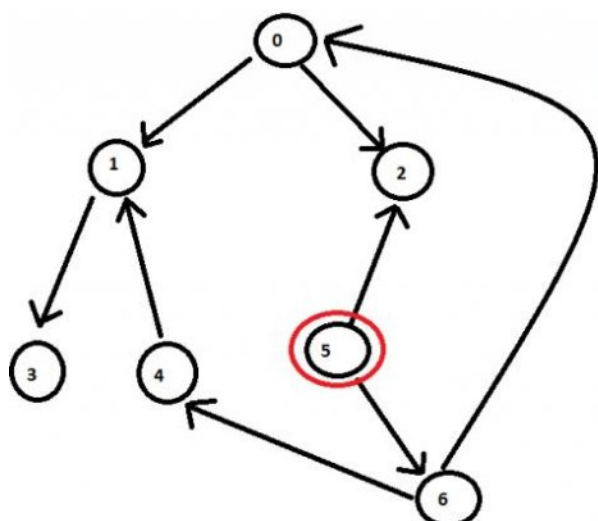


## پرسش اول

الگوریتمی طراحی کنید که در یک گراف یک راس مادر را پیدا کند (راس مادر راسی است که از آن به همه ی راس ها مسیری ساده یا بدون دور وجود دارد)



In this graph the mother vertex is '5' (circled red) as we can reach any node from '5' through a directed path

To reach 0-

5->6->0

To reach 1-

5->6->0->1

To reach 2-

5->2

To reach 3-

5->6->0->1->3

To reach 4-

5->6->4

To reach 6-

5->6

اگر گراف ناهمبند باشد هیچ راس مادری وجود ندارد چراکه از هیچ راسی به همه راس های دیگر مسیر نداریم از طرفی برای گراف غیر جهتدار همبند نیز همه راس ها راس مادر هستند زیرا از هر راس به راس دیگر مسیری وجود دارد  
برای گراف های جهتدار الگوریتم مورد نظر را بدست می آوریم بدین منظور روی گراف الگوریتم جستجوی عمق اول را اجرا میکنیم و مشابه الگوریتم پیدا کردن اجزای قویا همبند ابتدا راسی با بیشترین زمان پایان را پیدا میکنیم این راس راسی است که به همه ی راس های دیگر مسیری دارد

## پرسش دوم

در یک گراف جهتدار الگوریتمی طراحی کنید که نشان دهد آیا گراف دور دارد یا خیر؟

با استفاده از تعاریف یال ها در گراف در صورتی که گراف یال برگشتی داشته باشد دور به وجود می آید برای بررسی این ویژگی بر روی گراف مورد نظر الگوریتم جستجوی عمق اول را اجرا میکنیم در هر مرحله در صورتی که در میان راس های انتخابی از راس های مجاور راس کنونی راسی وجود داشت که قبلا بازدید شده است یال برگشتی داریم بنابراین گراف دارای دور می باشد که هزینه این الگوریتم برابر هزینه جستجو عمق اول است

## پرسش سوم

مدیریت راه های یک شهر تازه کشف شده قصد دارد برای ساختن راه های شهر خود برنامه ریزی کند این امر در حالی است که راه هایی در حال حاضر در شهر وجود دارند با توجه به این که همه ی راه ها یک طرفه اند به مدیریت کمک کنید تا با افزودن کمترین راه ها طوری عمل کند که همه مراکز شهر به هم راه داشته باشند؟

هر مرکز شهر را یک راس گراف در نظر میگیریم سوال در اصل یافتن حداقل یال های ممکن به یک گراف است به شرطی که گراف قویا همبند شود

برای این منظور در ابتدا اجزای قویا همبند گراف را پیدا میکنیم برای این کار ابتدا روی گراف الگوریتم دی اف اس را اجرا میکنیم و راس ها را به ترتیب نزولی بر اساس زمان پایان آن ها مرتب میکنیم سپس گراف را به ترانهاده آن تبدیل میکنیم و بار دیگر روی آن بر اساس ترتیب به دست آمده دی اف اس میزنیم چون گراف ترانهاده شده مسیر های بین مولفه های قویا همبند برعکس میشوند و با شروع دی اف اس از راس مادر در هر مرحله یک مولفه را بدست می آوریم

حال هر مولفه را یک سوپر نود در نظر میگیریم و در گراف ایجاد شده تعداد راس های با درجه ورودی صفر را پیدا میکنیم و در

مجموعه الف میریزیم سپس راس های با درجه خروجی صفر را پیدا کرده و در مجموعه ب قرار می دهیم این راس ها ایزوله هستند و تنها امکان ورود و یا خروج از آن ها وجود دارد بنابراین برای آن که به همه راس ها مسیر داشته باشیم باید این راس ها را از این حالت خارج کنیم بنابراین حداقل به ماکزیم تعداد اعضای الف و ب یال نیاز داریم که تعداد حداقل راه هایی است که باید ساخته شود

#### پرسش چهارم

برای ساخت منبع آب در یک نقطه بین روستاها به دنبال یافتن مکانی هستیم که بیشترین تعداد جاده هایی که کوتاه ترین مسافت را دارند از آن ها بگذرد به ما در پیدا کردن این مکان کمک کنید؟

از هر راس الگوریتم دایکسترا را اجرا میکنیم و درخت حاصل از اجرا را نگه میداریم. در عین حال برای هر راس آرایه ای مانند  $A$  نگه میداریم که در آن تعداد راس های موجود در زیر درخت آن راس در درخت ایجاد شده را یادداشت میکنیم. برای بدست آوردن تعداد راس های زیر درخت یک راس از روی آن DFS میزنیم. این عدد برابر مجموع راس های زیر درخت چپ به اضافه زیر درخت راست می باشد. در نهایت آرایه ای که در یک راس بیشترین مقدار را داشته باشد راس متناظر آن راس مورد نظر است.

#### پرسش پنجم

الگوریتم  $\text{prim}$  را برای گراف  $G = (V, E)$  که با ماتریس مجاورت بیان شده طوری بیابید که پیچیدگی زمانی آن  $O(V^2)$  باشد. با شروع از یک راس دلخواه بنابر الگوریتم باید یالی را بیابیم که  $\text{safe}$  باشد که این یال یالی با کمترین وزن از راس فعلی به دیگر راس هایی است که در مجموعه ی فعلی نیستند بنابراین در هر مرحله باید  $V$  راس دیگر را ملاقات کنیم و از آنجا که این عمل را ( عمل ریلکس کردن ) به اندازه تعداد راس ها انجام می دهیم عملیات از مرتبه زمانی  $O(V^2)$  خواهد بود.

#### پرسش ششم

ثابت کنید که در درخت DFS، راس  $v$  از نوادگان راس  $u$  است، اگر و تنها اگر در زمان  $d[u]$  که تابع DFS شروع به بررسی راس  $u$  می کند، مسیری از  $u$  به  $v$  وجود داشته باشد که تمام رئوس آن سفید باشند.

فرض کنید  $v$  نواده  $u$  باشد. اگر راسی در مسیر  $u$  به  $v$  باشد  $d[u] < d[v]$  بنابراین  $w$  سفید است. طرف دوم: با برهان خلف فرض میکنیم چنین مسیری سفیدی موجود باشد اما  $v$  نواده  $u$  نباشد فرض کنید بقیه رئوس این مسیر سفید نواده  $u$  باشند. اگر  $w$  پدر  $v$  در این مسیر باشد  $w$  نواده  $u$  است بنابراین داریم:

$$d[u] < d[w] < f[w] < f[u]$$

و چون  $w$  پدر  $u$  است بنابراین  $d[w] < d[v] < f[v] < f[w]$  در نتیجه داریم:

$$d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$$

پس  $v$  نواده  $u$  است.

#### پرسش هفتم

نوید یک لیست از دوستانش را در یک فایل نگه داشته که هر یک از آن ها شامل اسم ایمیل و شماره تلفن آن ها است او سال ها است که این لیست را تکمیل میکند و ممکن است دو نفر در لیست او یکسان باشند که این در صورتی اتفاق می افتد که حداقل یکی از فیلد ها بین دو نفر

یکسان باشد به او کمک کنید تا به وسیله گراف ها به این هدف برسد

هر یک از دوستان را یک راس گراف در نظر میگیریم دو راس را در صورتی به هم متصل میکنیم که یکی از ویژگی های آن دو یکسان باشد حال سوال به پیدا کردن مولفه های همبندی خلاصه میشود حال با اجرای یکبار عملیات جستجوی سطح اول یا عمق اول هر مولفه را پیدا میکنیم و آن ها را یکسان سازی میکنیم

### پرسش هشتم

در یک گراف غیر جهت دار داده شده الگوریتمی را بیابید که حداقل تعداد یال لازم برای تبدیل گراف به گرافی با دور فرد را بیابید؟

بنابر قضیه میدانیم یک گراف دور فرد ندارد اگر و فقط اگر دوبخشی باشد. بنابراین ابتدا با یک بار رنگ آمیزی گراف با عملیات bfs بررسی میکنیم که میتوان گراف را با دو رنگ رنگ آمیزی کرد یا خیر اگر اینطور نباشد گراف دو بخشی نیست و دور فرد داریم در غیر این صورت بررسی میکنیم که اگر گراف همه راس هایش از درجه صفر بود به سه یال اگر حداکثر درجه رئوس یک بود دو یال و در غیر این صورت به یک یال نیاز خواهیم داشت.

### پرسش نهم

گراف وزن دار بدون جهت  $G$  و زیر گراف  $F$  از آن را در نظر بگیرید که یک جنگل است. الگوریتم بهینه ای ارائه دهید که کم هزینه ترین درخت پوشای  $G$  را طوری بیابد که همه یال های  $F$  را در بر بگیرد.

در ابتدا از جنگل  $F$  شروع میکنیم و هر مولفه همبندی آن را با اجرای عملیات DFS بدست می آوریم سپس هر مولفه را یک راس در نظر گرفته و مشابه الگوریتم  $kruskal$  یا  $prim$  آنقدر یال های  $safe$  را به مجموعه یال ها می افزاییم تا به درخت پوشای بهینه برسیم.

### پرسش دهم

فرض کنید در گراف  $G$  درخت پوشای بهینه را داریم. حال اگر وزن یکی از یال ها در این درخت را کم کنیم با کمترین هزینه درخت پوشای جدید را بیابید.

اگر یالی که وزن آن کم شده است  $(u,v)$  باشد آنگاه از راس  $u$  مسیری را به راس  $v$  پیدا میکنیم ( در درخت پوشا ) در این مسیر یال با بیشترین وزن را در نظر میگیریم اگر این یال وزنی بیشتر از یال  $(u,v)$  آن را حذف کرده و  $(u, v)$  را جایگزین آن میکنیم در این صورت درخت همبند مانده و مینیمم میماند.