



به نام خداوند مهربان

ساختمان داده – تمرین پنجم

امین عارفزاده



*در هر سوال بهترین الگوریتمی که می‌توانید را ارائه دهید و همچنین مرتبه زمانی الگوریتم خود را محاسبه کنید.

(۱) در سرزمین وستروس تعداد n شهر وجود دارد که توسط راه‌هایی یکطرفه به یکدیگر وصل شده‌اند به صورتی که نمی‌توان با شروع از یک شهر دوباره به همان شهر بازگشت. پس از پیروزی رابرت شاه بر خاندان تارگارین رابرت به این نکته پی برد که پایتخت فعلی کشور به تمامی شهرها دسترسی ندارد. او تصمیم گرفت شهری را به عنوان پایتخت انتخاب کند که از طریق آن شهر بتوان به تمامی نقاط کشور دسترسی داشت. او برای انتخاب پایتخت جدید وستروس از شما کمک می‌خواهد. الگوریتمی طراحی کنید که با داشتن n شهر و m راه بین این شهرها بتواند در صورت وجود شهر مطلوب را پیدا کند.

(۲) سارا و مینا دو دوست هستند که در یک شرکت برنامه‌نویسی با یکدیگر کار می‌کنند. آنها هر روز صبح با استفاده از مترو به محل کار می‌روند سارا از مبدا S به محل شرکت که در f قرار دارد می‌رود و مینا نیز از مبدا t به محل شرکت در f می‌رود. همچنین آنها کوتاه‌ترین مسیر را برای رسیدن به شرکت انتخاب می‌کنند. شبکه مترو از n ایستگاه تشکیل شده است که توسط ریل‌هایی به یکدیگر وصل شده‌اند و از هر ایستگاه به ایستگاه دیگر حداقل یک مسیر وجود دارد. از آنجایی که مینا می‌خواهد در هنگام حرکت به سمت شرکت دقیقاً در k ایستگاه سارا را ببیند (k ایستگاه مشترک). الگوریتمی طراحی کنید که تمام ایستگاه‌هایی که مینا با شروع از آنها می‌تواند دقیقاً k بار سارا را در ایستگاه‌های مشترک ببیند را پیدا کند.

۳) بعد از آن که تانوس تصمیم به نابودی کهکشان گرفت گروه انتقام جویان در صدد برآمدند تا سیارات کهکشان را شیری را در برابر حملات تانوس و نیروهایش محافظت کنند. برای محافظت از سیارات آنها گروهی از جفت مامور هایی را به سیارات میفرستند (a_i, b_i) . سیاره ای تحت محافظت گروه انتقام جویان است که یا یکی از مامور ها در مستقر باشد یا در مسیر بین یک جفت مامور قرار بگیرد. کهکشان را شیری از n سیاره تشکیل شده که با کرم چاله فضایی بهم متصل شده اند و از هر سیاره به سیاره دیگر دقیقاً یک مسیر وجود دارد. از آنجایی که گروه انتقام جویان یک نهاد خصوصی است و مورد حمایت دولت قرار ندارد آنها با محدودیت تعداد جفت مامور سر کار دارند. الگوریتم طراحی کنید که با گرفتن ورودی k (تعداد جفت مامور ها) و داشتن مکان سیارات و مسیر های ارتباطی آنها بیشترین تعداد سیاره که انتقام جویان میتوانند تحت کنترل داشته باشند را پیدا کند.

۴) الف) ثابت کنید یک گراف جهت دار بدون دور است اگر و تنها اگر بتوان ترتیبی از راس ها پیدا کرد که در آن به ازای هر یال $a \rightarrow b$ همواره راس a زودتر از راس b آمده باشد.

ب) به کمک قضیه الف الگوریتمی برای تشخیص دور داشتن یا نداشتن یک گراف جهت دار بیابید.

۵) حسام که به تازگی در کلاس ساختمان داده با **bubble sort** آشنا شده است به دنبال یادگیری بهتر آن است. ناگهان سوالی به ذهنش خطور می کند که چگونه می توان مجموعه ایی از اعداد ۲ رقمی را به گونه ایی مرتب کرد که اگر دو عدد در یک رقم یکسان باشند عددی که رقم دیگرش کوچکتر است زودتر بیاید (مثلاً ۴۳ قبل از ۳۷ می آید زیرا ۷ از ۴ بزرگتر است) بعد از ساعتها فکر حسام به این نتیجه می رسد که نمی تواند با الگوریتم **bubble sort** این اعداد را با این ترتیب سورت کند. آیا شما میتوانید به حسام کمک کنید؟ الگوریتمی طراحی کنید که با گرفتن n عدد دورقمی این مجموعه از اعداد را به گونه گفته شده مرتب کند.