

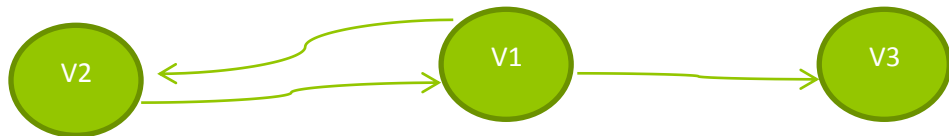
نمونه سوالات مربوط به بخش ۸.۴

8.4.1 پرفسور Deaver ادعا می کند که الگوریتم برای اجزای همبندی قوی می تواند با استفاده از گراف اولیه (به جای ترانهاده) در دومین جستجوی اول عمق و بررسی رئوس به ترتیب افزایش زمان های خاتمه ساده تر شود. آیا ادعای پرفسور درست می باشد؟

راه حل:

نه ، همواره درست نیست.

مثال نقض شکل زیر است. فرض کنید که DFS بزنییم از راس $V1$ ، سپس اگز بر اساس افزایش FINISHING TIME هاشون مرتب کنیم می شه:



Finishing Time: $V2, V1, V3$

حال برای دومین بار که از راس $V2$ ما DFS بزنییم. و به ترتیب افزایش Finish Time ها مرتب کنیم

Finish Time : $v1, v2, v3$

در حقیقت دو تا SCCs در گراف داریم. $\{v1, v2\}, \{v3\}$

8.4.2 گراف جهت دار $G(V, E)$ داده شده است. تبدیل $T(G)\{V, E'\}$ به صورت زیر به دست می آید. مجموعه رئوس گراف G و $T(G)$ یکسان هستند. از راس U به V در گراف تبدیل، یال جهت دار قرار می دهیم. اگر و تنها اگر مسیری از U به V در G وجود داشته باشد.

خوشه در یک گراف جهت دار مجموعه ای از رئوس مانند U است. که به ازای هر دو راس s, t داخل U یال جهت داری از s به t یا از t به s و یا هر دو وجود داشته باشد. اندازه خوشه برابر تعداد رئوس داخل آن است.

الگوریتمی برای یافتن بزرگترین خوشه ی $T(G)$ ارائه دهید.

راه حل:

در این مسئله به دنبال بزرگترین زیر مجموعه از رئوس هستیم. که بین هر دو راس آن مسیر وجود داشته باشد. اگر گراف DAG باشد. پاسخ طولانی ترین مسیر موجود در آن است.

در غیر این صورت با دو DFS مولفه های قوی همبندی گراف را پیدا می کنیم. و به ازای هر مولفه همبندی یک راس با برچسبی که برابر تعداد راس های آن مولفه است قرار می دهیم. سپس topological sort می زنیم. و از راس آخر شروع کرده (راسی که یال

خروجی ندارد) و یکی یکی به عقب می رویم. بزرگترین مسیر خارج شده از هر رأس برابر است با ماکزیمم بزرگترین مسیر های خارج شده از رئوسی که به آن ها یال دارد به علاوه ی بر چسب خودش به این ترتیب با $O(V + E)$ بزرگترین خوشه به دست می آید.

8.4.3 اگر یک یال به گراف اضافه کنیم، اجزای همبند قوی گراف چگونه تغییر می کند؟

راه حل:

دو حالت رخ می دهد. یا این که تغییر نمی کند. یا کاهش می یابد.

فرض کنید SCCs گراف اصلی $m =$

SCCs گراف جدید $m' =$

داریم: $m' \leq m$, $m' \geq 1$

8.4.4 گراف جهت دار $G(V, E)$ "نیمه همبند" گفته می شود. اگر برای همه جفت رئوس $u, v \in V$

داشته باشیم. $U \rightarrow V$ یا $V \rightarrow U$

یک الگوریتم موثر برای تعیین این که آیا G نیمه همبند است یا خیر ارائه دهید. و زمان اجرای الگوریتم خود را هم محاسبه کنید.

راه حل :

۱: اجزای همبندی گراف را باید پیدا کرد

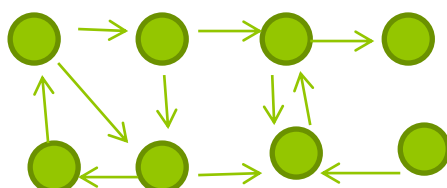
۲: حال این اجزای همبندی را مانند یک رأس در نظر بگیرید. و کل گراف که الان یک DAG است را به عنوان یک گراف کلی جدید در نظر بگیرید.

۳: روی اجزای گراف توپولوژی سورت بنزید

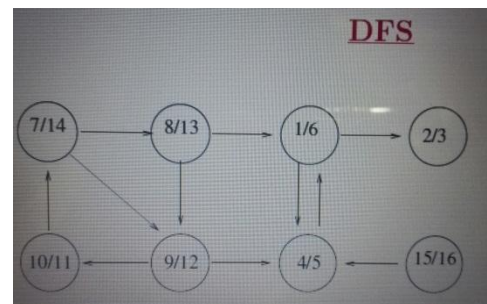
۴: بررسی کنید که یال های (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , ... (v_{k-1}, v_k)

وجود دارد در اجزای گراف اگر این رأس ها یک حلقه به وجود آوردند. پس گراف اصلی نیمه همبند است. در غیر این صورت خیر

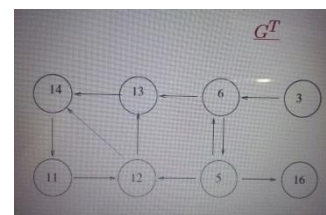
8.4.5 نشان دهید روال **strongly _ connected _ components** چگونه بر روی شکل زیر کار می کند.



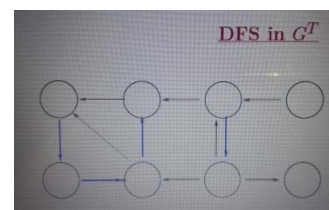
راه حل :



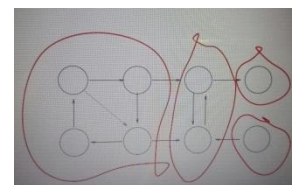
اول:



دوم:

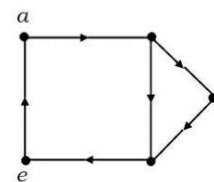


سوم:



چهارم:

8.4.6 گراف زیر همبند قوی است؟ یا همبند ضعیف چرا؟



راه حل:

همبند قوی زیرا مسیری جهت دار بین همه راس هایش وجود دارد.

8.4.7 الگوریتمی ارائه دهید تا تعداد یال هایی که باید به یک گراف اضافه کنیم. تا قوی همبند شود را محاسبه کند؟

هزینه این الگوریتم را بیابید.

راه حل:

ابتدا از گراف DFS می زنیم. و بعد از ترانهاده آن DFS می زنیم. با این کار مولفه های قوی همبند به دست می آیند.

حال یک گراف جدید ایجاد می کنیم. که رئوس آن مولفه های قوی همبند هستند. و اگر بین دو مولفه قوی همبند یال وجود داشته باشد. در گراف جدید بین آن دو یال جهت دار می گذاریم. به وضوح گراف جدید یک DAG است. (چرا که اگر دور داشت به این معنی بود که رئوس روی دور همگی به یکدیگر راه داشتند. و از ابتدا مولفه های قوی همبند جداگانه نبوده است. و باید همگی یک مولفه می شدند.)

در این DAG تعداد رئوسی که یال ورودی ندارند. را می شماریم. و آن را C1 می نامیم. سپس تعداد رئوسی که یال خروجی ندارند. را می شماریم. و آن را C2 می نامیم. اگر DAG فقط یک راس داشته باشد. لازم نیست یالی اضافه کنیم. در غیر این صورت باید MAX (C1, C2) یال اضافه کنیم.

8.4.8 مجموعه ای از عبارات منطقی داریم. به گونه ای که هر عبارت منطقی، تشکیل شده از or دو متغیر می باشد. که هر کدام از این دو متغیر، می توانند به شکل نقیض یا not شده باشند. الگوریتم بهینه و غیر مبتنی بر سعی و خطا ارائه دهید که مشخص نماید. آیا می توان متغیر های یک مجموعه ی عبارت را به گونه ای مقدار دهی کرد که تمامی عبارات داده شده، مقدار true پیدا کنند؟

به عنوان مثال: مجموعه عبارات زیر را در نظر بگیرید:

$$E1=A+B$$

$$E2=\sim A +C$$

$$E3=\sim C+\sim B$$

اگر مقدار A برابر false، مقدار B برابر true و مقدار C برابر false باشد. آنگاه تمامی عبارات E1, E2, E3 مقدار true پیدا خواهند کرد.

راه حل:

به ازای هر متغیر دخیل در مسئله مانند X دو راس تحت نام های $\sim X$, X اضافه می کنیم. به ازای هر عبارت مانند $X+Y$ یال های $(\sim X, Y)$ و $(X, \sim Y)$ را به گراف اضافه می کنیم. وجود یال (u, v) در گراف بیان می کند. که اگر u درست باشد. آنگاه v هم حتما درست است. با این کار عملا داریم محدودیت های مسئله را با گراف مدل سازی می کنیم. حال روی این گراف، با دو بار اجرای الگوریتم dfs مولفه های قوی همبند را استخراج می کنیم. سپس به ازای هر مولفه قوی همبند یک راس می گزاریم و اگر بین دو راس از دو

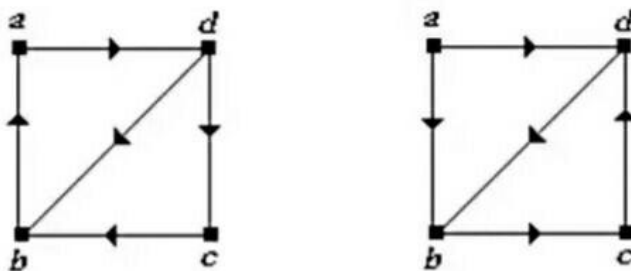
مولفه یال وجود دارد. با جهت مناسب ، دو مولفه را به هم وصل می کنیم. اما مطمئن هستیم که دور به وجود نمی آید. زیرا اگر دور داشتیم. آن وقت اجتماع این دو مولفه همبندی باز خود یک مولفه همبندی می بود. و الگوریتم ما استخراجش می کرد.

ضمن این کار ها ، به ازای هر متغیر شماره مولفه ی آن را نیز ذخیره می کنیم. در پایان به ازای هر متغیر x چک می کنیم. که شماره مولفه ی x و $\sim x$ مساوی نباشند. اگر به ازای همه رئوس این قاعده برقرار بود. می توان گفت که امکان حل این مسئله وجود دارد.

حالا برای این که بفهمیم مقدار هر متغیر باید چه باشد به این شکل عمل می کنیم. آخرین گرافی که از مولفه های قوی همبند ساختیم یک dag است. حالا روی آن topological sort می زنیم. اگر مولفه متغیر x قبل از مولفه متغیر $\sim x$ بیاید آنگاه x را false می گذاریم. در غیر این صورت true.

نکته مهم : اگر گراف ناهمبند باشد. و مسیری از مولفه ی شامل x به مولفه شامل $\sim x$ نباشد یا برعکس آن ، در این صورت متغیر x هر مقداری می تواند داشته باشد.

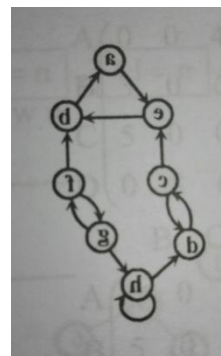
8.4.9 کدام یک از شکل های زیر همبند قوی و کدام یک همبند ضعیف است؟



راه حل:

شکل سمت چپ همبند قوی زیرا مسیری جهت دار بین همه راس هایش وجود دارد و شکل سمت راست همبند ضعیف است.

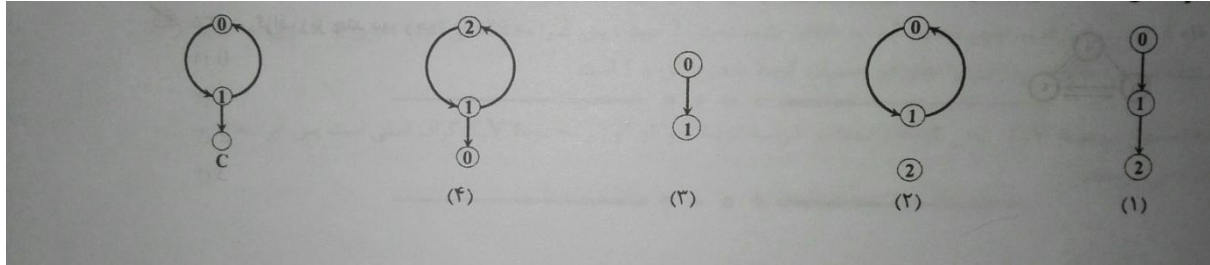
8.4.10 گراف جهت دار زیر چند مولفه متصل به صورت قوی دارد؟



راه حل :

۴ تا $\{h\}$, $\{c,d\}$, $\{g,f\}$, $\{a,e,b\}$

8.4.11 مولفه های کاملاً متصل گراف زیر کدام است؟



راه حل:

گزینه دوم درست: نکته: گراف با یک رأس خود کاملاً متصل است.