

به نام خداوندی که بخشید تا ببخشیم

تمرین پنجم درس ساختمان داده

مهلت تحویل : ۴ دیماه

- برای هر الگوریتمی که ارائه می‌دهید باید پیچیدگی زمانی و حافظه آن را نیز محاسبه کنید.
- حل سوال بدون اثبات درستی الگوریتم پذیرفته نیست. اثبات بهینه بودن الگوریتمتان لزومی ندارد اما الگوریتمتان باید بهینه باشد.
- کپی نکنید

پرسش نخست : یک جدول hash با n خانه داریم که از روش chaining برای رفع برخورد استفاده می‌شود. n عضو به جدول اضافه می‌کنیم که احتمال قرار گرفتن هر عضو در خانه‌های جدول برابر است.

الف) احتمال آن که دقیقاً k کلید در یک خانه قرار بگیرند را محاسبه کنید. (این احتمال را Q_k بنامید).

ب) نشان دهید احتمال آن که بیشترین تعداد برخورد برابر k باشد کمتر با مساوی nQ_k است .

پ) نشان دهید $Q_k < e^k / k^k$ است. (راهنمایی : از فرمول استرلینگ استفاده کنید).

پرسش دوم : یک جدول $2^n * 2^n$ داریم که می‌دانیم تنها n خانه همبند آن سیاه و بقیه سفید هستند. در هر مرحله می‌توانیم یک زیر جدول $2^m * 2^m$ از این جدول را انتخاب کرده و بپرسیم که آیا در این زیر جدول خانه سیاهی وجود دارد یا خیر . با سریعترین روش ممکن تمام خانه‌های سیاه جدول را پیدا کنید. (دو خانه به هم متصلند اگر و فقط اگر یال مشترک داشته باشند)

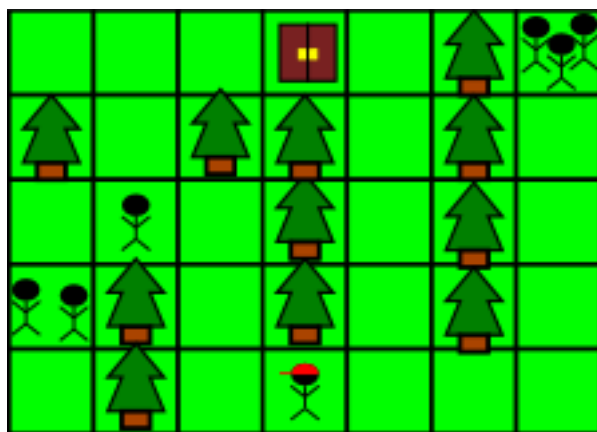
پرسش سوم : یک درخت داریم که روی هر یالش یک عدد 32 بیتی نوشته شده است. فاصله دو راس از هم برابر با xor^1 یالهای مسیر بین دو راس است. می‌خواهیم فاصله n جفت راس دلخواه را از هم پیدا کنیم. این کار را به بهترین روشی که می‌توانید انجام دهید.

پرسش چهارم : یال‌ها و راس‌های برشی در یک گراف را با بهترین روش پیدا کنید.

پرسش پنجم : یک گراف با n راس و حداکثر $3n$ یال در نظر بگیرید. در ابتدای کار روی هر راس عدد صفر نوشته شده است. آرایه A را نیز که شامل n عدد است در نظر بگیرید. با فشار دادن کلید روی هر راس عدد آن راس و راس‌های همسایه‌اش یکی بالا می‌رود. هدف این است که تعدادی راس انتخاب کنیم و هر کدام را دقیقاً یک بار فشار دهیم و در پایان برای هیچ i ای عدد A_i و عدد روی راس i ام برابر نباشد. این کار را به بهترین روش انجام دهید.

¹ $a \text{ xor } b = (\sim a \text{ or } \sim b) \text{ and } (a \text{ or } b)$

پرسش ششم : معین پس از سانحه سقوط هواپیما در جزیره‌ای گرفتار شده است . او می‌داند که در این جزیره دقیقا یک راه فرار وجود دارد و از مکان آن نیز مطلع است. ولی مشکل او این است که قسمت‌هایی از این جزیره جنگل‌هایی خطرناک وجود دارد که گذر از آن‌ها غیر ممکن است. مشکل بزرگتر این است که تعدادی زامبی نیز در این جزیره وجود دارند که به دنبال او هستند. سرعت حرکت معین و زامبی‌ها برابر است و اگر بخواهند می‌توانند حرکت نکنند. از آنجاییکه معین علاقه‌ای به ملاقات زامبی‌ها ندارد می‌خواهد در مسیر فرارش به کمترین تعداد زامبی برخورد کند . شما جزیره را به صورت یک جدول $m \times n$ در نظر بگیرید که هر خانه آن یا خالی است یا جنگل و دقیقا یک خانه راه فرار است. با دانستن نقشه جزیره و مکان ابتدایی زامبی‌ها و معین باید سریعا به معین بگویید بهترین راه (راه با کمترین تعداد زامبی) برای فرار از جزیره کدام راه است. (مثلا در مثال زیر معین در هر صورتی که حرکت کند به حداقل سه زامبی برخورد می‌کند. معین آدمکی است که کلاه دارد) (زامبی‌ها می‌توانند از جنگل‌ها عبور کنند)



پرسش هفتم : با دانستن اطلاعات یک گراف با بهترین روش یک $2^{\text{تور}}$ اوپلری در این گراف را مشخص کنید .

پرسش هشتم : دانشجویان کامپیوتر همیشه بعد از کلاس ساختمان داده با هم این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا در یک صف به ترتیب قد قرار می‌گیرند (هیچ دو نفری قد یکسان ندارند). سپس در هر مرحله از بازی هر کسی با احتمالی خاص کوتاهترین فرد را از بازی حذف می‌کند (اما هیچ کس خودش را حذف نمی‌کند). شما باید با دانستن مقدار احتمال برای دانشجویان بگویید که پس از حداکثر k مرحله چه زیر مجموعه‌ای از دانشجویانی که در ابتدا شروع به بازی کردند ممکن است باقی بمانند. (دقت کنید که احتمال دونفر متفاوت لزوما متفاوت و یا یکسان نیست و این احتمال می‌تواند هر مقداری میان بازه بسته صفر و یک باشد)