

به نام خداوندی که بخشید تا ببخشیم
تمرین پنجم درس دی اس

- برای هر الگوریتمی که ارائه می دهید باید پیچیدگی زمانی و حافظه آن را نیز محاسبه کنید.
- حل سوال بدون اثبات درستی الگوریتم پذیرفته نیست. اثبات بهینه بودن الگوریتمتان لزومی ندارد اما الگوریتمتان باید بهینه باشد.

پرسش صفرم : یاد آوری (امتیازی) (هر قسمت ۵ نمره)
الف) پیچیدگی زمانی توابع زیر را حساب کنید :

$$T(n) = T(n-\text{radical}(n)) + O(1)$$

$O(\text{radical}(n))$

$$T(n) = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/n$$

$O(\lg n)$

ب) یک لیست پیوندی خراب لیستی است که آخرین node آن به جای null به یکی از node های داخل لیست اشاره کند.
یک لیست پیوندی یک طرفه به شما داده شده است که طول آن نامشخص است و داده های هر node اعداد متمایزی هستند. با بهینه ترین حالت ممکن (حافظه و زمان) تعیین کنید که این لیست خراب است یا خیر.

پاسخ :
با دو پوینتر که یکی دوتا دوتا و دیگری یکی یکی جلو برود.
اگر یکی به NULL برسد لیست سالم است و اگر به هم برسند لیست خراب است.

ج) تعداد درخت های جست و جوی دودویی متفاوت که از n عدد متمایز ساخته شده اند چقدر است؟

پاسخ : اعداد کاتالان

د) یک 'نابجایی' در یک آرایه از اعداد به یک زوج مرتب از اعداد آن آرایه می گویند که عددی که زودتر در آرایه آمده بزرگتر از عدد بعدی باشد. روشی برای شمردن تعداد نابجایی های یک آرایه ارائه دهید.

پاسخ : با استفاده از merge sort در $O(n \lg n)$

پرسش نخست : یک جدول hash با n خانه داریم که از روش chaining برای رفع برخورد استفاده می شود. n عضو به جدول اضافه می کنیم که احتمال قرار گرفتن هر عضو در خانه های جدول برابر است.
الف) احتمال آن که دقیقاً k کلید در یک خانه قرار بگیرند را محاسبه کنید. (این احتمال را Q_k بنامید.) (۵ نمره)

ب) نشان دهید احتمال آن که بیشترین تعداد برخورد برابر k باشد کمتر با مساوی nQ_k است. (۵ نمره)
 پ) نشان دهید $Q_k < e^k / k^k$ است. (راهنمایی: از فرمول استرلینگ استفاده کنید). (۵ نمره)

پاسخ :
 الف)

$$C(n,k) * (1/n)^k * ((n-1)/n)^{n-k}$$

ب) به احتمال nQ_k خانه ای با k المان وجود دارد. ولی تعدادی حالت تکراری می شمارد پس احتمال این که حداکثر تعداد برخورد ها k باشد حداکثر این مقدار است.

پ)

$$Q_k = 1/k! * (n!/(n-k)!n^k) * (1-1/n)^{n-k}$$

قسمت دوم و سوم کوچکتر از یک هستند پس طبق استرلینگ شرط اثبات می شود.

پرسش دوم: یک جدول $2^n * 2^n$ داریم که می دانیم تنها n خانه همبند آن سیاه و بقیه سفید هستند. در هر مرحله می توانیم یک زیر جدول $2^m * 2^m$ از این جدول را انتخاب کرده و بپرسیم که آیا در این زیر جدول خانه سیاهی وجود دارد یا خیر. با سریعترین روش ممکن تمام خانه های سیاه جدول را پیدا کنید. (دو خانه به هم متصلند اگر و فقط اگر یال مشترک داشته باشند) (۱۰ نمره)

پاسخ :

در هر مرحله جدول $2^i * 2^i$ را به چهار زیر جدول $2^{i-1} * 2^{i-1}$ تقسیم می کنیم و یکی از آن ها را که حاوی خانه سیاه است را رندوم انتخاب کرده و ادامه می دهیم تا به یک خانه سیاه برسیم. از آن حانه دی اف اس می زنیم تا کل خانه ها را به دست آوریم. با $O(n)$

پرسش سوم: یک درخت داریم که روی هر یالش یک عدد ۳۲ بیتی نوشته شده است. فاصله دو راس از هم برابر با xor یالهای مسیر بین دو راس است. می خواهیم فاصله n جفت راس دلخواه را از هم پیدا کنیم. این کار را به بهترین روشی که می توانید انجام دهید. (امتیازی: اگر بخواهیم برای هر راس نزدیکترین راس به آن را پیدا کنیم چطور؟) (۲۰ نمره) (۱۵ نمره)

پاسخ :

از آنجایی که:

$$d(u,v) = d(u,x) xor d(x,v)$$

ما می توانیم با یک دی اف اس فاصله راس ریشه را از بقیه رئوس به دست آورده و سپس برای هر جفت دلخواه با استفاده از روابط بالا جواب دلخواه را گرفت.

امتیازی: در مورد Trie تحقیق کنید.

پرسش چهارم: یال ها و راس های برشی در یک گراف را با بهترین روش پیدا کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ :

راس برشی: http://en.wikipedia.org/wiki/Biconnected_component

یال برشی: http://en.wikipedia.org/wiki/Bridge_%28graph_theory%29

$$a \text{ xor } b = (\sim a \text{ or } \sim b) \text{ and } (a \text{ or } b)$$

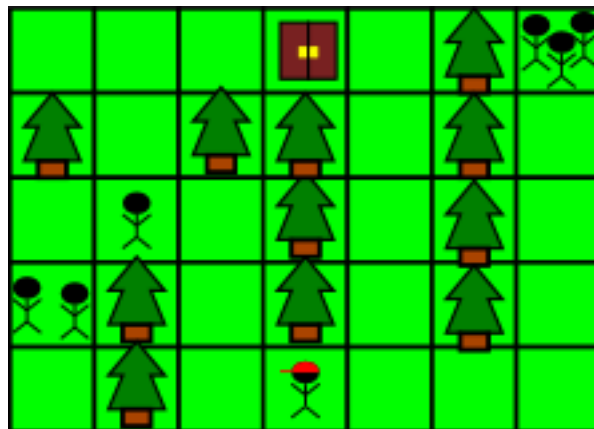
پرسش پنجم : یک گراف با n راس و حداکثر $3n$ یال در نظر بگیرید. در ابتدای کار روی هر راس عدد صفر نوشته شده است. آرایه A را نیز که شامل n عدد است در نظر بگیرید. با فشار دادن کلید روی هر راس عدد آن راس و راس های همسایه اش را یکی بالا می رود. هدف این است که تعدادی راس انتخاب کنیم و هر کدام را دقیقاً یک بار فشار دهیم و در پایان برای هیچ i ی عدد A_i و عدد روی راس i ام برابر نباشد. این کار را به بهترین روش انجام دهید. (۱۰ نمره)

پاسخ :

در هر مرحله یکی از رئوسی را که با عدد خودش برابر است را فشار می دهیم. به این ترتیب هر راسی خودش می تواند مشکل خودش را برطرف کند و پس از برطرف کردن مشکلیش هیچ وقت مشکلی برایش به وجود نمی آید و همچنین هر راس حداکثر یک بار فشار داده می شود.

پیچیدگی: $O(V+E)$

پرسش ششم : معین پس از سانحه سقوط هواپیما در جزیره ای گرفتار شده است . او می داند که در این جزیره دقیقاً یک راه فرار وجود دارد و از مکان آن نیز مطلع است. ولی مشکل او این است که قسمت هایی از این جزیره جنگل هایی خطرناک وجود دارد که گذر از آن ها غیر ممکن است. مشکل بزرگتر این است که تعدادی زامبی نیز در این جزیره وجود دارند که به دنبال او هستند. سرعت حرکت معین و زامبی ها برابر است و اگر بخواهند می توانند حرکت نکنند. از آنجاییکه معین علاقه ای به ملاقات زامبی ها ندارد می خواهد در مسیر فرارش به کمترین تعداد زامبی برخورد کند . شما جزیره را به صورت یک جدول $m*n$ در نظر بگیرید که هر خانه آن یا خالی است یا جنگل و دقیقاً یک خانه راه فرار است. با دانستن نقشه جزیره و مکان ابتدایی زامبی ها و معین باید سریعاً به معین بگویید بهترین راه (راه با کمترین تعداد زامبی) برای فرار از جزیره کدام راه است. (مثلاً در مثال زیر معین در هر صورتی که حرکت کند به حداقل سه زامبی برخورد می کند. معین آدمکی است که کلاه دارد) (زامبی ها می توانند از جنگل ها عبور کنند) (۱۵ نمره)



پاسخ :

از خانه خروج بی اف اس می زنیم.

سعی کنید بیشتر بدانید : ^۴درخت بازه ای

تلاش کردید ؟ (امتیازی) (۲۵ نمره)

یک درخت n راسی داریم که از یک راس ^۵ریشه دار شده است. روی هر راس آن یک مخزن آب وجود دارد که در ابتدا خالی اند. شما باید m عملیات از انواع زیر را در سریعترین زمان ممکن انجام دهید .

الف) مخزن راس v را پر از آب کنید که در این صورت مخازن تمام نوادگان آن راس پر از آب می شود.

ب) مخزن راس v را خالی کنید که در این صورت مخازن تمام اجداد آن راس خالی می شوند.

پ) بگویید که آیا مخزن راس v پر است یا خیر.

پاسخ :

<http://codeforces.com/contest/343/problem/D>

درپناه حق

^۴segment tree
^۵rooted tree