



کوئیز شماره ۴

Trees



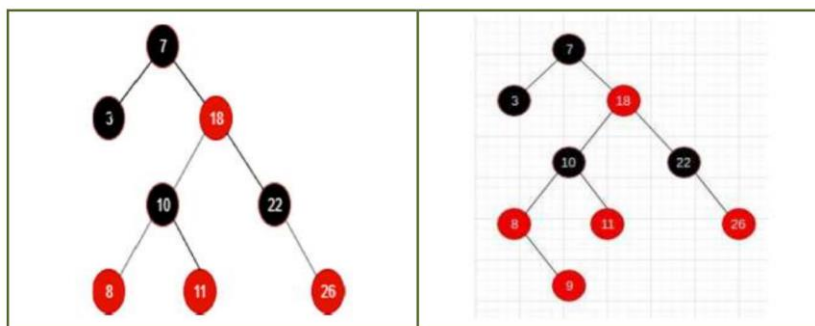
ساختمان های داده و الگوریتم -
بهار ۱۴۰۰

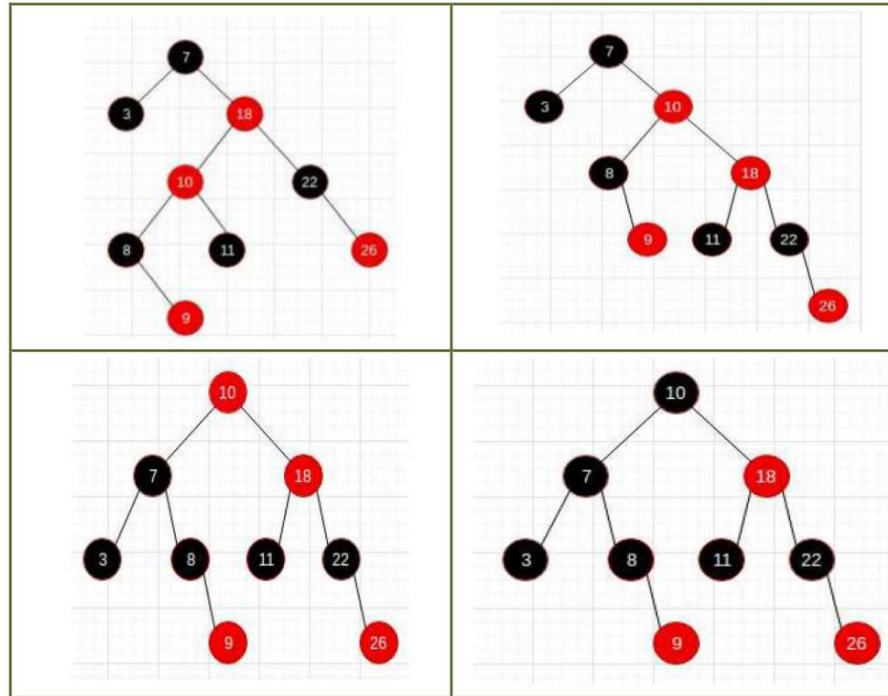
مهلت تحویل:

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

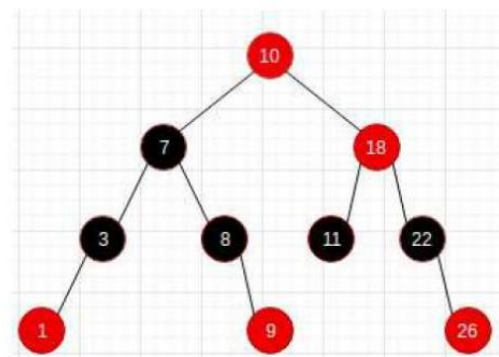
سوال ۱:

(الف)





(ب)



سوال ۲:

یک درخت **avl** با ارتفاع **h** داریم. حداکثر و حداقل تعداد رئوس این درخت را پیدا کنید.
(دقت کنید که باید عدد را بر حسب **h** ارائه دهید و ادعای خود را نیز اثبات کنید) (۳۰ نمره)

پاسخ: ادعا: در درختی با ارتفاع h که دارای بیشترین تعداد راس است، تمامی برگ‌ها دارای ارتفاع h نسبت به ریشه هستند. چرا؟ فرض کنید حداقل یک برگ با ارتفاع کمتر داریم. از بین این برگ‌ها، برگی با کمترین ارتفاع را در نظر میگیریم. فرض کنید مقدار این برگ x و دارای ارتفاع h' باشد ($h' < h$)، میتوانیم به درخت اعداد $1-x$ و $1+x$ را اضافه کرده و راس‌های معادل با این دو عدد اضافه شده به ترتیب در سمت پایین راست و پایین چپ راس x قرار میگیرند. پس ارتفاع این دو راس نسبت به ریشه حداکثر h خواهد بود و نیز ارتفاع کل درخت نیز تغییری نخواهد کرد. در نتیجه درختی با ارتفاع h خواهیم داشت که تعداد رئوس بیشتری نسبت به درخت اولیه دارد. که این تناقض است و ادعا ما اثبات میشود. پس اگر یک درخت avl دارای بیشترین تعداد راس ممکن باشد، باید یک درخت دودویی کامل باشد. در نتیجه $2^h - 1$ راس دارد.

کمترین تعداد راس ممکن برای یک درخت avl با ارتفاع h نیز از رابطه زیر پیروی میکند: (در اینجا $Min(h)$ حداقل تعداد رئوس ممکن برای یکی درخت avl با ارتفاع h است)

$$Min(h) = 1 + Min(h-1) + Min(h-2)$$

$$Min(1) = 1 \text{ و } Min(2) = 2$$

می دانیم ارتفاع زیر درخت سمت راست و چپ ریشه حداکثر یک واحد تفاوت دارند. پس یکی حداقل $h-1$ و دیگری حداقل $h-2$ است. پس با کم نشدن از کلیت مسئله و طبق تقارن میتوانیم فرض کنیم زیر درخت سمت چپ دارای ارتفاع $h-2$ و حداقل $Min(h-2)$ راس است. زیر درخت سمت راست نیز دارای ارتفاع $h-1$ و حداقل $Min(h-1)$ راس است. خود ریشه نیز یک راس حساب میشود.

حال باید مقدار صریح $Min(h)$ را محاسبه کنیم:

فرض کنید $T(h) = Min(h) + 1$. آنگاه داریم:

$$Min(h) + 1 = 1 + Min(h - 1) + Min(h - 2) + 1$$

$$T(h) = T(h - 1) + T(h - 2)$$

$$T(1) = 2 \text{ و } T(2) = 3$$

پس $T(h) = Fib(h + 2)$. پس $Min(h) = Fib(h + 2) - 1$ که در اینجا $Fib(n)$ همان عدد فیبوناچی n ام است. پس در آخر داریم:

$$Min(h) = \frac{\phi^{h+2} - (-\phi)^{h+2}}{\sqrt{5}} - 1$$

سوال ۳:

پاسخ: یادآوری: ویژگیهای یک درخت قرمز و سیاه:

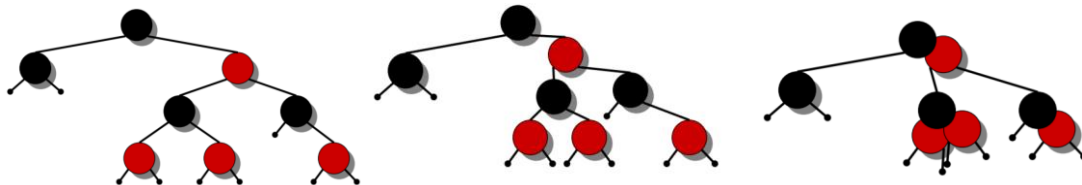
1. ریشه سیاه است.

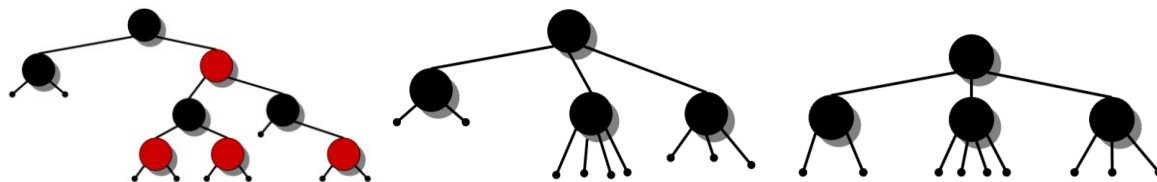
2. به ازای هر راس مثل v ، تمامی مسیرهای v به برگهای زیر درختش تعداد برابری راس سیاه دارند.

3. اگر یک راس قرمز باشد، تمامی راسهای فرزندش سیاه هستند.

سقفی برای ارتفاع درخت:

راسهای قرمز را در راسهای سیاه پدر ادغام میکنیم. دقت کنید که حاصل این ادغام یک درخت تمام سیاه است که هر راس در صورت برگ نبودن ۲، ۳ و یا ۴ فرزند دارد.





اگر ارتفاع درخت جدید h' و ارتفاع درخت اولیه h باشد، آنگاه $2h' \geq 2h$. زیرا در هر مسیر دلخواه از ریشه تا یک برگ در درخت اولیه حداکثر نصف رئوس قرمز خواهند بود (ویژگی ۳) پس با برگرداندن رئوس قرمز ارتفاع حداکثر ۲ برابر میشود. حال گفتیم که هر راس غیر برگ در درخت جدید که تمام سیاه است حداقل ۲ فرزند دارد. پس داریم:

$$n \geq 2^{h'} - 1 \Rightarrow \log(n + 1) \geq h' \geq \frac{h}{2}$$

پس:

$$h \leq 2\log(n + 1) \Rightarrow h \in O(\log n)$$

موفق باشید