

به نام خداوند بخشنده مهربان

تمرین شماره ۶

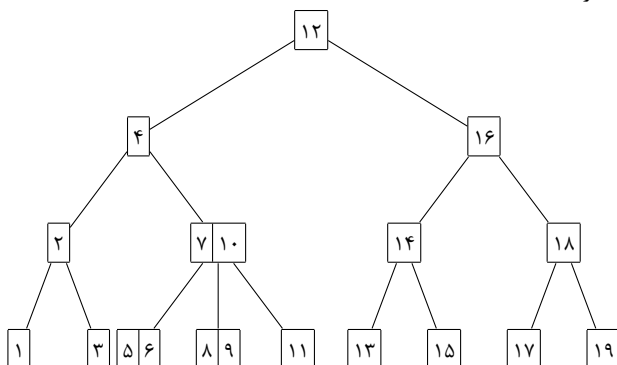
نام و نام خانوادگی طراح رومینا بدی

۱۶ دی ماه ۱۳۹۶

۱. در مورد B-tree. به سوالات زیر پاسخ دهید

آ (یک B-tree با $t = 2$ شامل کلیدهای $۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰$ داریم. مینیمم تعداد node برای درخت چیست؟ یک ترتیب برای وارد شدن اعداد به درخت ارائه دهید که تعداد node ها را مینیمم کند. این مساله را برای ماکزیمم تعداد node ها هم حل کنید. نیازی به اثبات راه حل نیست.

ب (از درخت زیر با $t = 2$ ، کلید ۲ را حذف کنید. در هر مرحله تغییرات درخت را بکشید و بنویسید که از چه قانونی استفاده کردید.



ج (ثابت کنید که در B-tree ارتفاع تمام برگها با هم مساوی است. برای این کار از عملیات حذف و اضافه کردن کلید به درخت استفاده کنید.

د (بیشترین و کمترین ارتفاعی که یک B-tree با $t = 2$ و n کلید می تواند داشته باشد چیست؟ (بهترین حد بالا و پایینی که می توانید را با ذکر دلیل بنویسید)

۲. یک ساختار داده داریم که هزینهی عملیات i ام روی آن به این شکل است که برای $i \neq 2^k$ برابر با 1 و برای $i = 2^k$ برابر با i است. هزینهی متوسط برای n عملیات متوالی را با سه روش aggregate method, accounting method و potential محاسبه کنید. برای دیدن مثال واقعی از این ساختمان داده می‌توانید به این جا بروید.

www.geeksforgeeks.org/analysis-algorithm-set-5-amortized-analysis-introduction

۳. یک ساختمان داده به شرح زیر داریم. این ساختمان داده از تعداد نامحدودی پشته تشکیل شده است که به ترتیب 1 و 2 و 4 و ... و 2^k ... ظرفیت دارند. هر عمل push از کوچکترین پشته شروع می‌شود. اگر پشته‌ای پر شده باشد در صورتی که در آن push کنیم، برای باز شدن جا تمام محتویاتش pop می‌شوند و در پشته‌ی بعدی push می‌شوند که این عملیات برابر (2^k) بار push و (2^k) بار pop است. در بدترین حالت هزینهی یک push چه قدر است و این حالت کی اتفاق می‌افتد؟ هزینهی میانگین را برای n بار push محاسبه کنید.

۴. در مورد binomial heap به سوالات زیر پاسخ دهید.

- آ (نشان دهید در هر binomial tree با درجه‌ی n تعداد نودها 2^n و ارتفاع n است.
- ب (یک binomial heap با ۱۳ نود بکشید. ارتباط این binomial heap را با نمایش باینری عدد ۱۳ نشان دهید.
- ج (بیشترین ارتفاعی که یک binomial heap با n نود می‌تواند داشته باشد چند است؟ (از بخش الف و ب استفاده کنید)
- د (ثابت کنید یک binomial heap درجه‌ی k ، در عمق k ، $i = 0, 1, \dots, k$ ، $\binom{k}{i}$ نود دارد.

۵. در مورد fibonacci heap به سوال زیر پاسخ دهید.

آ (یک fibonacci heap در نظر بگیرید و عملیات زیر را روی آن انجام دهید. نودهای ۱۰۰ و ۹۹ و ۹۸ را وارد کنید. بعد extract min انجام دهید. (یادتان نرود که consolidate هم بکنید. حالا ۹۸ و ۹۷ و ۹۶ را وارد کنید و دوباره extract min کنید. بعد نود ۹۸ را حذف کنید. روی گراف حاصل عملیاتی شبیه عملیات بالا انجام دهید که تعداد نود ها چهار و هیپ شامل یک درخت به ارتفاع چهار شود. سپس ثابت کنید که برای هر n ، ارتفاع fibonacci heap از او در n است.

ب (فرض کنید در عمل extract min، c بار cut اتفاق افتاده است. ($c-1$ بار تابع cascading-cut و یک بار تابع cut) هزینهی واقعی این عمل از چه اوردی است؟ محاسبه کنید چند درخت به fibonacci heap اضافه می‌شوند و چه تغییری در تعداد نودهای مارک شده اتفاق می‌افتد سپس محاسبه کنید که تابع پتانسیل fibonacci heap حداکثر چه قدر تغییر می‌کند و از روی آن هزینهی amortized را محاسبه کنید.

۶. در مورد disjoint sets به سوال زیر پاسخ دهید.

آ (همان طور که می‌دانید، می‌توانیم یک disjoint set را با استفاده از درخت ریشه‌دار پیاده‌سازی کنیم. در این پیاده‌سازی union به این صورت انجام می‌شود که از ریشه‌ی درخت کوچک‌تر به ریشه‌ی درخت بزرگ‌تر یال می‌کشیم (union by rank). عملیات find به این شکل است که

در مسیر نود مورد نظر تا ریشه، هر نودی که طی شد را مستقیماً به ریشه وصل می‌کنیم (path compression). ثابت کنید در این ساختمان داده، هزینه‌ی m عملیات make-set، union و find-set، با این فرض که تمام union ها قبل از find-set ها اتفاق می‌افتند، $O(m)$ است.

ب) یک گراف ساده‌ی بی‌جهت داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که با استفاده از union و find تعیین کند این گراف دور دارد یا نه.

ج) فرض کنید برای تشخیص تعداد مؤلفه‌های همبندی یک گراف از یک disjoint set استفاده شده‌است. اگر تعداد راس‌ها v و تعداد یال‌ها e و تعداد مؤلفه‌های همبندی k باشد، چند بار find-set و چند بار union صدا زده می‌شود؟