



به نام خداوند بخشنده مهربان

تمرین شماره ۵
طراح : حسین بابایی
۱ دی ماه ۱۳۹۶

*در هر سوال بهترین الگوریتمی که می توانید را ارائه دهید و همچنین مرتبه زمانی الگوریتم خود را محاسبه کنید.

۱. الگوریتم بهینه ای ارائه دهید که به کمک آن بتوان طولانی ترین مسیر در یک درخت را پیدا کرد.
۲. الگوریتم بهینه ای ارائه دهید که حداقل تعداد یال هایی که لازم است به یک گراف جهتدار اضافه شود تا قویا همبند شود را پیدا کند.
۳. در کشور وستروس n شهر وجود دارد که توسط $n-1$ جاده به هم وصل شده اند. در این کشور از هر شهر به شهر دیگر می توان رفت. بر اثر جنگ هایی که برای کسب تخت آهنین در این کشور صورت گرفته است، تعدادی از جاده ها خراب شده اند و نیاز به تعمیر دارند. تعمیر هر جاده دقیقا یک روز زمان می برد و برای اینکه دوباره جنگی بین دو شهر صورت نگیرد، در هنگام تعمیر یک جاده باید تمامی بزرگان هر دو شهر دو سر این جاده، حضور داشته باشند. همچنین بزرگان یک شهر در یک روز فقط می توانند روی یک جاده حضور داشته باشند. برای اینکه احتمال وقوع جنگ بین طرفین در حین بازسازی جاده ها وجود دارد می خواهیم که در کمترین زمان ممکن همه جاده ها تعمیر شوند. الگوریتمی ارائه دهید که به کمک آن بتوان تعداد کمترین روزهایی که برای بازسازی تمام جاده ها لازم است را پیدا کرد. یک برنامه زمان بندی پیشنهاد دهید که مشخص کند در هر روز کدام جاده ها باید تعمیر شوند.
۴. گراف غیرجهتداری داریم که n راس و m یال دارد. در این گراف از هیچ راسی به خودش یال نداریم و بین هر دو راس حداکثر یک یال وجود دارد. الگوریتم بهینه ای ارائه دهید که به کمک آن بتوان دو عدد a و b را حساب کرد به گونه ای که a برابر با حداقل تعداد یال هایی است که می توان به گراف اضافه کرد تا گراف دارای دور فرد شود و b برابر با تعداد روش های افزودن این a یال است. (توجه کنید که گرافی که داریم لزوما همبند نیست).
۵. گراف غیرجهتداری داریم که n راس و m یال دارد. در این گراف از هیچ راسی به خودش یال نداریم و بین هر دو راس حداکثر یک یال وجود دارد. در هر مرحله می توانیم دو راسی که به هم متصل نیستند را انتخاب کرده، حذفشان کنیم و به جای آن ها راسی بگذاریم که به رؤوسی که آن دو قبلا یال داشتند، یال داشته

باشد. همچنین دقت کنید که اگر مثلاً دو راس انتخاب شده a, b باشند و هر دو به راس مشترک c یال داشته باشند، بعد از انجام این عملیات یک یال از راس جدید به راس c خواهیم داشت. می خواهیم با تکرار این عمل به گراف $path$ برسیم که یک خط می باشد (دنباله ای از رؤوس که هر راس به راس بعدی خود یال دارد). ما به دنبال این هستیم که بیشترین طول گراف $path$ ای که میتوانیم به آن برسیم را پیدا کنیم. الگوریتم بهینه ای ارائه دهید که این طول را برای ما محاسبه کند.