

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

تمرین سوم - درخت

محمدصادق ابوفاضلی، حامد میرامیرخانی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۲/۹/۴

۱۰ نمره

۱. مسیر درختی

یک درخت دودویی کامل با n گره و به ارتفاع $\log(n)$ داریم. هر گره از این درخت به گره‌های فرزند و گره پدر خود دسترسی دارد. می‌خواهیم مسیر ساده‌ای بین دو راس u و v پیدا کنیم (کوتاه‌ترین مسیر بین این دو راس).

الف) الگوریتم بهینه‌ای برای این کار ارائه دهید.

ب) مرتبه زمانی الگوریتم خود را بدست آورید.

پاسخ:

الف)

برای پیدا کردن مسیر بین u و v ، ابتدا پایین‌ترین جد مشترک این دو گره را بدست می‌آوریم.

سپس مسیر بین این دو گره به این صورت است: از u تا پایین‌ترین جد مشترک بعلاوه پایین‌ترین جد مشترک تا v

برای پیدا کردن پایین‌ترین جد مشترک، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱- پیدا کردن ارتفاع دو گره:

برای این کار کافی است بشماریم چند بار باید از آن گره پدر گرفته شود تا به ریشه برسیم.

۲- هم ارتفاع کردن دو گره:

اگر یکی از گره‌ها دارای ارتفاع بیشتری است، از گره دارای ارتفاع بیشتر، به اندازه اختلاف ارتفاع دو گره، پدر می‌گیریم.

۳- حرکت به سمت پایین‌ترین جد مشترک:

حال که به دو گره هم ارتفاع رسیده ایم، چک می‌کنیم آیا آن دو گره برابرند یا خیر، و اگر برابر نبودند، آنقدر از هر دو پدر می‌گیریم تا در یک گره برابر شوند. آن گره، پایین‌ترین جد مشترک u و v است (میدانیم این اتفاق می‌افتد زیرا دو راس هم ارتفاع اند و حداکثر در ریشه به یکدیگر میرسند و برابر میشوند)

در طول انجام مراحل ۲ و ۳، مسیر حرکت از هر دو گره را ذخیره می‌کنیم تا در نهایت با در کنار هم قرار دادن آنها به مسیر بین u و v برسیم.

ب)

پیدا کردن ارتفاع دو گره از مرتبه ارتفاع درخت است پس در $O(\log(n))$ انجام میشود.

هم ارتفاع کردن دو گره و همچنین رسیدن به پایین‌ترین جد مشترک نیز از مرتبه ارتفاع درخت، یعنی $O(\log(n))$ است.

در نتیجه مرتبه زمانی الگوریتم: $O(\log(n))$

۲. درخت هافمن

۱۵ نمره

جدول زیر را در نظر بگیرید:

حرف	تعداد تکرار
A	۱۸
B	۵
C	۴۳
D	۷
E	۴
F	۳۹
G	۲
H	۱۰

- الف) با توجه به جدول تکرار حروف، درخت هافمن را رسم کنید و کد بهینه هافمن را برای حروف بدست آورید.
- ب) با توجه به درخت رسم شده، برای تعداد تکرار حرف D یک بازه ارائه دهید که اگر در این بازه باشد، شکل درخت و کد هافمن حروف تغییر نکند. (برای جواب خود استدلال بیاورید)
- ج) تعداد تکرار حرف C را حداقل چند واحد باید افزایش دهید تا یک واحد به ارتفاع درخت هافمن فعلی اضافه شود؟

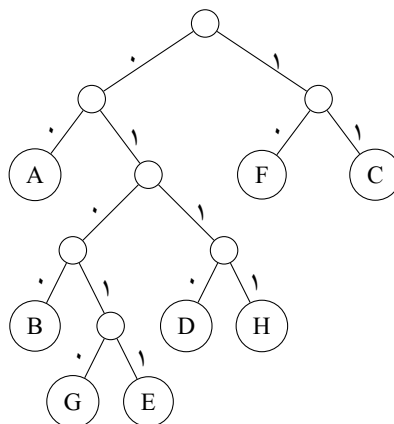
پاسخ:

(الف)

ابتدا دو حرف با کمترین تعداد تکرار یعنی (G) و (E) ادغام می شوند که گره حاصل از ادغام آنها به مجموع تکرار ۶ می رسد. سپس گره حاصل، با حرف (B) ادغام شده و مجموع تکرار در آن به ۱۱ می رسد. دو حرف (D) و (H) هر دو دارای تکرار کمتر از ۱۱ هستند پس در این مرحله با هم ادغام شده و گره ای با مجموع تکرار حروف ۱۷ را می سازند. گره حاصل از ادغام (G, E, B) و گره حاصل از ادغام (D, H) به ترتیب دارای مجموع تکرار ۱۱ و ۱۷ هستند که از تعداد تکرار حرف (A) کمتر است. پس در این مرحله این دو گره ادغام شده و گره ای با مجموع تکرار ۲۸ حاصل می شود. سپس این گره با حرف (A) ادغام شده و مجموع تعداد تکرار حروف در گره بدست آمده به ۴۶ می رسد.

در مرحله بعدی دو حرف (F) و (C) که دارای تعداد تکرار کمتر از ۴۶ هستند ادغام شده و گره ای با مجموع تکرار ۸۲ می سازند. در نهایت این گره بدست آمده با گره حاصل از ادغام (G, E, B, D, H, A) ادغام می شود و درخت نهایی تشکیل می شود.

درخت نهایی:



کد هافمن حروف:

$$A = 00$$

$$B = 0100$$

$$C = 11$$

$$D = 0110$$

$$E = 01011$$

$$F = 10$$

$$G = 01010$$

(ب)

اگر (D) مقداری کمتر از ۶ داشت (مقادیر ۵ و کمتر از ۵)، بجای اینکه (B) با گره حاصل از ادغام (G, E) ادغام شود، با (D) ادغام می‌شد و شکل درخت و در نتیجه کد هافمن حروف تغییر می‌کرد.

از طرف دیگر، اگر (D) مقداری بالای ۸ داشت (مقادیر ۹ و بیشتر از ۹)، ادغام آن با (H) دارای مجموع تکرار بیشتر از ۱۸ می‌شد و گره حاصل از ادغام (G, E, B) بجای اینکه با گره حاصل از ادغام (D, H) ادغام شود، با گره (A) ادغام می‌شد.

در نتیجه تعداد تکرار D باید بین ۶ تا ۸ باشد.

$$6 \leq D \leq 8$$

(ج)

گره حاصل از ادغام (G, E, B, D, H, A) را گره (K) می‌نامیم. این گره دارای مجموع تکرار حروف ۴۶ است که از تعداد تکرار حرف $(F = ۳۹)$ و $(C = ۴۳)$ بیشتر است که باعث می‌شود ابتدا (F) با (C) ادغام شود و سپس گره حاصل از ادغام آنها با گره (K) ادغام شود. برای اینکه یک واحد به ارتفاع درخت هافمن اضافه شود، باید کاری کنیم که یک حرف از بین (F) یا (C) با گره (K) ادغام شود و سپس گره حاصل با حرف باقی مانده ادغام شود. اینگونه ارتفاع درخت یک واحد بیشتر می‌شود. از طرفی باید این کار را صرفاً با تغییر تکرار حرف (C) انجام دهیم، پس باید تعداد تکرار این حرف را تا حدی زیاد کنیم که از مجموع تعداد تکرار حروف گره (K) بیشتر شود. در این صورت است که گره (K) ابتدا با گره (F) ادغام شده و سپس گره بدست آمده با گره (C) ادغام می‌شود.

برای اینکه تعداد تکرار (C) که ۴۳ است، از مجموع تعداد تکرار حروف گره (K) که برابر با ۴۶ است بیشتر شود، باید حداقل ۴ واحد آن را افزایش دهیم. پس جواب این بخش ۴ است.

۳. میانه‌ی لحظه‌ای

۱۵ نمره

می‌خواهیم دنباله‌ای از اعداد را در حافظه‌ای نگه داریم. در ابتدا حافظه خالی است. در هر مرحله یک عدد از ورودی خوانده می‌شود و ما می‌خواهیم پس از insert کردن هر عدد در حافظه، میانه تمام اعداد موجود در حافظه (شامل عدد insert شده) را با صرف کمترین هزینه برگردانیم. از چه داده ساختاری (داده ساختارهایی) استفاده کنیم؟ الگوریتمی ارائه دهید که این کار را انجام دهد. مرتبه زمانی الگوریتم خود را بدست آورید.

پاسخ:

از داده ساختار Min-Heap و Max-Heap استفاده می‌کنیم.

یک متغیر به نام mid برای نگهداری میانه تعریف می‌کنیم.

از یک Min-Heap برای نگهداری اعداد بزرگتر از میانه استفاده می‌کنیم.

و از یک Max-Heap برای نگهداری اعداد کوچکتر از میانه استفاده میکنیم.

در ابتدا اولین عدد را در mid ذخیره کرده و همان را بعنوان میانه خروجی میدهیم.

در مراحل بعدی، عدد وارد شده را با mid مقایسه کرده و اگر از mid بزرگتر بود آن را در Min-Heap و اگر کوچکتر بود آن را در Max-Heap درج می‌کنیم. سپس تعداد اعضای این دو Heap را مقایسه کرده و اگر تعداد آنها متوازن نبود، mid را در Heap با تعداد کمتر push کرده، سپس از Heap با اعضای بیشتر pop کرده و آن را در mid قرار میدهیم تا توازن حذف شود. در نهایت mid را خروجی میدهیم.

این الگوریتم بدلیل استفاده از Heap در مرتبه زمانی $O(\log(n))$ انجام پذیر است.