

# ساختمان داده و الگوریتم ها

## تمرین ششم - تحلیل سرشکن

مجید فریدفر، فاطمه کرمی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۲/۱۰/۲۴

### ۱. استک k تایی

نمره ۱۰

فرض کنید روی یک ساختمان داده استک که اندازه آن هرگز از  $k$  بیشتر نمی شود تعدادی عملیات انجام می دهیم و پس از هر  $k$  عملیات برای Backup گرفتن از استک یک کپی از کل عناصر آن می گیریم. با اختصاص دادن هزینه سرشکن مناسب به هر عملیات استک (شامل Copy, Push, Pop) نشان دهید که انجام  $n$  عملیات روی استک زمان اجرای  $O(n)$  دارد.

### ۲. صلوات counter پیشرفته

نمره ۱۵

شایان که عاشق درس مدار منطقی است، برای خرید تعدادی ترانزیستور و گیت به خیابان پشت شهرداری رفته. هنگامی که به دنبال لوازم مورد نیازش می گشت در یکی از مغازه ها وسیله ای دید که برایش خیلی جالب بود: یک صلوات counter پیشرفته! این دستگاه روش جالبی برای نمایش اعداد دارد. برخلاف بقیه counter های موجود در بازار که از نمایش باینری اعداد برای محاسباتشان استفاده می کنند، در این شمارنده از نمایش فیبوناچی آن ها استفاده شده (دقت کنید که هر عددی را می توان به صورت مجموعی از جملات دنباله ی فیبوناچی نوشت). به عبارت دیگر به جای نگه داری آرایه ای از bit ها، از آرایه ای از fit ها استفاده می شود که اگر فیت  $i$  ام، صفر باشد به این معنی است که جمله ی  $i$  ام دنباله ی فیبوناچی در ساختن عدد  $n$  ضریب صفر دارد، اگر یک باشد یعنی این ضریب یک است و جمله ی  $i$  ام دنباله در ساختن عدد  $n$  به کار رفته است. برای مثال دنباله ی ۱۰۱۱۱۰ عدد  $14 = 1 + 2 + 3 + 8 = F_4 + F_5 + F_6 + F_7$  را نشان می دهد. به شایان کمک کنید هزینه ی سرشکن عمل increment در این صلوات counter را به دست بیاورد. از روش accounting استفاده کنید.

### ۳. چشم بهم بزنی، هاشمی نیست!

نمره ۱۵

صادق مدتی است از ماتریکس خارج شده. دنیا به مکان ترسناکی تبدیل شده است. ساختمان ها و خیابان های ویران شده توسط ربات ها، طبیعت نابود شده، آسمانی که دیگر رنگ خاکستری به خود گرفته و بدتر از همه، مزارع کشت انسان... تحمل این همه ویرانی برای صادق خیلی سخت است. برای همین به سرعت شروع به برنامه ریزی نقشه هایی کرده است تا دنیا را از ربات ها پس بگیرد. مورفیوس پس از دیدن پشتکار او، تصمیم گرفت حقوقش را از بقیه ی اعضای تیم بیش تر کند. اما صادق که خیلی متواضع است، قبول نکرد. مورفیوس، بعد از یک جلسه ی طولانی، موفق شد او را متقاعد کند که مدل دریافتی زیر را بپذیرد، که البته خیلی کم تر از مقدار پیشنهادی اولیه است:

صادق هر روز، ۱۰۰۰ دلار دریافت می کند (مثل بقیه ی اعضای تیم)، اما اول ژانویه ی هر سال، یک عیدی هم می گیرد که برابر با تعداد کل روزهایی است که از ابتدای شروع به کارش تا آخر آن سال کار کرده.

مدتی به همین منوال گذشت، تا این که صادق در ضیافت هالوین، بهمن هاشمی را ملاقات کرد که سال های زیادی است از ماتریکس خارج شده - حتی بعضی ها می گویند اصلا وارد آن نشده! پس از صحبت با او که اطلاعات خیلی زیادی دارد، به موضوع عجیبی پی برد که به شدت ذهن او را درگیر کرد. آقای هاشمی گفت، بعد از انقلاب ربات ها در روز سال نوی ۲۰۰۰، به دلایلی شتاب زمین به نحوی تغییر کرد که هر سال سرعت گردش زمین به دور خورشید نصف می شود! خوشبختانه او موفق شده برای یک سال جلوی این روند را بگیرد و انتظار می رود سال ۲۰۰۱ هم مثل ۲۰۰۰، ۳۶۵ روزه باشد، اما از ۲۰۰۲ به بعد تعداد روزهای سال به صورت نمایی زیاد خواهد شد!

با فرض این که زمانی که صادق از ماتریکس خارج شد دقیقا به اول ژانویه ی ۲۰۰۰ برگشت، به صورت سرشکن درآمد روزانه ی صادق را از ابتدای خروجش از ماتریکس تا روز  $n$  ام از روش aggregate محاسبه کنید.

### ۴. ساختمان داده ی به درد نخور

نمره ۱۵

می خواهیم یک ساختمان داده  $S$  با اعداد حقیقی و عملیات های زیر پیاده سازی کنیم:

۱. عملیات  $Insert(S, x)$  عنصر  $x$  را به  $S$  اضافه می کند.

۲. عملیات  $Delete(S)$ ،  $\lceil \frac{|S|}{4} \rceil$  تا از بزرگترین عناصر در  $S$  را پاک می کند.

یک پیاده سازی پیشنهاد دهید که هزینه سرشکن هر دو عملیات  $O(1)$  بشود. (راهنمایی: می توان در زمان  $O(n)$  میانه آرایه ای با سایز  $n$  را پیدا کرد.)

## ۵. DFS پیشرفته

۲۰ نمره

پیچیدگی زمانی فراخوانی تابع زیر را محاسبه کنید.

```
def DFS(v):
    sub[v] = [v]
    for u in children[v]:
        DFS(u)
    for x in sub[v]:
        for y in sub[u]:
            print("Hello\n")
    sub[v] += sub[u]
```

## ۶. زندان مرکزی گاتهام بزرگ

۲۵ نمره

به دنبال سرماخوردگی بروس وین، صابر مدتی است که مسئولیت دستگیری تبهکاران شهر گاتهام را به عهده گرفته است. او که از ابتدا به دلیل گند بودن عملکرد پلیس با تحویل مجرمان مشکل داشت (بارها جوکر از همین موضوع برای فرار استفاده کرده بود و موفق شده بود!) تصمیم گرفته خودش زندانی را احداث کند تا شروران را بعد از دستگیری در آن نگه دارد. زندان او به تعدادی بخش تقسیم بندی شده که بخش  $i$  ام،  $2^i$  تا سلول دارد (بخش ۰ ام، بخش ۱ ام، بخش ۲ ام و...). با توجه به محدودیت زندانبان، او مجبور است زندانیان را به نحوی بین این بخش ها پخش کند، که هیچ بخش نیمه خالی ای وجود نداشته باشد (هر بخش یا کاملاً خالی است و زندانبان ندارد، یا کاملاً پر است). هم چنین برای این که از طریق دستگاه بت و یو بتواند بهتر اطلاعات آنان را آنالیز کند، زندانیان هر بخش را به ترتیب حروف الفبا در سلول ها قرار می دهد. (بین زندانیان دو بخش متفاوت، لزومی ندارد ترتیبی وجود داشته باشد) اثبات کنید صابر از بروس وین بت من بهتری است (نشان دهید هزینه ی سرشکن بازداشت یک تبهکار جدید با روش صابر از اردر  $O(\log n)$  است. در حالی که می دانیم بروس وین این کار را با اردر  $O(n)$  انجام می دهد!)

فرض کنید محدودیتی روی تعداد بخش ها نداریم.