به نام خداوندی که بخشید تا ببخشیم تمرین پنجم درس دی اس

- برای هر الگوریتمی که ارائه می دهید باید پیچیدگی زمانی و حافظه آن را نیز محاسبه کنید.
- حل سوال بدون اثبات درستى الگوريتم پذيرفته نيست. اثبات بهينه بودن الگوريتمتان لزومي ندارد اما الگوريتمتان بايد بهينه باشد.

پرسش صفرم: یاد آوری (امتیازی) (هر قسمت ۵ نمره) الف) بیچیدگی زمانی توابع زیر را حساب کنید:

T(n) = T(n-radical(n)) + O(1)

O(radical(n))

 $T(n) = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/n$

O(lgn)

ب) یک لیست پیوندی خراب لیستی است که آخرین node آن به جای nullبه یکی از nodeهای داخل لیست اشاره کند. یک لیست پیوندی یک طرفه به شما داده شده است که طول آن نامشخص است و داده های هر nodeاعداد متمایزی هستند با بهینه ترین حالت ممکن (حافظه و زمان) تعیین کنید که این لیست خراب است یا خیر.

باسخ :

بًا دو پوینتر که یکی دوتا دوتا و دیگری یکی یکی جلو برود. اگر یکی به NULLبرسد لیست سالم است و اگر به هم برسند لیست خراب است.

ج) تعداد درخت های جست و جوی دودویی متفاوت که از n عدد متمایز ساخته شده اند چندتاست؟

ياسخ: اعداد كاتالان

د) یک 'نابجایی در یک آرایه از اعداد به یک زوج مرتب از اعداد آن آرایه می گویند که عددی که زودتر در آرایه آمده بزرگتر از عدد بعدی باشد.روشی برای شمردن تعداد نابجایی های یک آرایه ارائه دهید.

پاسخ :با استفاده از merge sort در

پرسش نخست : یک جدول hash اهخانه داریم که از روش chainingبرای رفع برخورد استفاده می شود. اعضو به جدول اضافه می کنیم که احتمال قرار گرفتن هر عضو در خانه های جدول برابر است.

الف) احتمال آن که دقیقا کالید در یک خانه قرار بگیرند را محاسبه کنید. (این احتمال را Qk بنامید.) (۵ نمره)

inversion '

ب) نشان دهید احتمال آن که بیشترین تعداد برخور د بر ابر kباشد کمتر با مساوی nQ_k است . (۵ نمره) پ)نشان دهید $Q_k < e^k/k^k$ است. (راهنمایی : از فرمول استرلینگ استفاده کنید.) (۵ نمره)

پاسخ : اأه)

 $C(n,k)^*(1/n)^{k*}((n-1)/n)^{n-k}$

ب)

به احتمال nQ_k خانه ای با k المان وجود دارد.ولی تعدادی حالت تکر اری می شمارد پس احتمال این که حداکثر تعداد برخورد ها k باشد حداکثر این مقدار است.

پ)

 $Q_k = 1/k! * (n!/(n-k)!n^k) * (1-1/n)^{n-k}$

قسمت دوم و سوم کوچکتر از یک هستند پس طبق استرلینگ شرط اثبات می شود.

پرسش دوم : یک جدول 2ⁿ x 2 داریم که می دانیم تنها nخانه همبند آن سیاه و بقیه سفید هستند.در هر مرحله می توانیم یک زیر جدول 2^m x 2^m از این جدول را انتخاب کرده و بپرسیم که آیا در این زیر جدول خانه سیاهی وجود دارد یا خیر . با سریعترین روش ممکن تمام خانه های سیاه جدول را پیدا کنید.(دو خانه به هم متصلند اگر و فقط اگر یال مشترک داشته باشند) (۱۰ نمره)

پاسخ :

در هر مرحله جدول $2^i * 2^i$ را به چهر زیر جدول $2^{i-1} * 2^{i-1}$ تقسیم می کنیم و یکی از آن ها را که حاوی خانه سیاه است را رندوم انتخاب کرده و ادامه می دهیم تا به یک خانه سیاه برسیم از آن حانه دی اف اس می زنیم تا کل خانه ها را به دست آوریم با O(n)

پرسش سوم: یک درخت داریم که روی هر یالش یک عدد ۳۲ بیتی نوشته شده است.فاصله دو راس از هم برابر با xor یالهای مسیر بین دو راس است.می خواهیم فاصله مجفت راس دلخواه را از هم پیدا کنیم.این کار را به بهترین روشی که می توانید انجام دهید.(امتیازی:اگر بخواهیم برای هر راس نزدیکترین راس به آن را پیدا کنیم چطور؟(۲۰نمره)) (۱۵ نمره)

پاسخ : از آنجایی که:

d(u,v) = d(u,x) xor d(x,v)ما می توانیم با یک دی اف اس فاصله راس ریشه را از بقیه رئوس به دست آورده و سپس برای هر جفت دلخواه با استفاده از روابط بالا جواب دلخواه را گرفت.

امتیازی: در مورد Trieتحقیق کنید.

پرسش چهارم: یال ها و راس های برشی در یک گراف را با بهترین روش پیدا کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ :

راس برشی : http://en.wikipedia.org/wiki/Biconnected_component بال برشی : http://en.wikipedia.org/wiki/Bridge %28graph theory%29

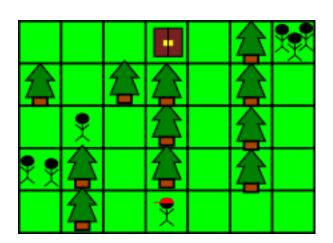
a xor b = (-a or -b) and (a or b)

پرسش پنجم: یک گراف با مراس و حداکثر 3nیال در نظر بگیرید.در ابتدای کار روی هر راس عدد صفر نوشته شده است.آرایه Aرا نیز که شامل معدد است در نظر بگیرید.با فشار دادن کلید روی هر راس عدد آن راس و راس های همسایه اش را یکی بالا می رود.هدف این است که تعدادی راس انتخاب کنیم و هر کدام را دقیقا یک بار فشار دهیم و در پایان برای هیچ آای عدد A_i و عدد روی راس آام برابر نباشد.این کار را به بهترین روش انجام دهید.(۱۰ نمره)

باسخ:

در هر مرحله یکی از رئوسی را که با عدد خودش برابر است را فشار می دهیم. به این ترتیب هر راسی خودش می تواند مشکل خودش را برطرف کند و پس از برطرف کردن مشکلش هیچ وقت مشکلی برایش به وجود نمی آید و همچنین هر راس حداکثر یک بار فشار داده می شود. پیچیدگی :O(V+E)

پرسش ششم: معین پس از سانحه سقوط هواپیما در جزیره ای گرفتار شده است. او می دانید که در این جزیره دقیقا یک راه فرار وجود دارد که وجود دارد و از مکان آن نیز مطلع است. ولی مشکل او این است که قسمت هایی از این جزیره جنگل هایی خطرناک وجود دارد که گذر از آن ها غیر ممکن است. مشکل بزرگتر این است که تعدادی زامبی نیز در این جزیره وجود دارند که به دنبال او هستند. سرعت حرکت معین و زامبی ها برابر است و اگر بخواهند می توانند حرکت نکنند. از آنجاییکه معین علاقه ای به ملاقات زامبی ها ندارد می خواهد در مسیر فرارش به کمترین تعداد زامبی برخورد کند. شما جزیره را به صورت یک جدول m* در نظر بگیرید که هر خانه آن یا خالی است یا جنگل و دقیقا یک خانه راه فرار است. با دانستن نقشه جزیره و مکان ابتدایی زامبی ها و معین باید سریعا به معین بگویید بهترین راه (راه با کمترین تعداد زامبی) برای فرار از جزیره کدام راه است. (مثلا در مثال زیر معین در هر صورتی که حرکت کند به حداقل سه زامبی برخورد می کند. معین آدمکی است که کلاه دارد) (زامبی ها می توانند از جنگل ها عبور کنند) نمره)



هر زامبی ای که سطح بی اف اسش برابر یا کمتر از سطح بی اف اس معین باشد می تواند به او برسد و بقیه نمی توانند. اثبات : زامبی هایی که سطحشان کمتر مساوی معین است به درب خروج رفته و آنجا منتظر او می مانند. بقیه اگر می توانستند به معین برسند از ان جای مسیر را با معین همراه می شدند و بدین ترتیب سطح بی اف اسشان با معین برابر می شد که تناقض است .

پرسش هفتم: با دانستن اطلاعات یک گراف با بهترین روش یک تور اویلری در این گراف را مشخص کنید .(۱۰ نمره)

پاسخ :

با یک دی اف اس روی یالها و چاپ کردن نام یال در هنگام بازگشت از آن یال. اگر راس با درجه فرد داشتیم باید از آن راس شروع به دی اف اس کنیم. اگر بیش از دو راس درجه فرد بود یا گراف ناهمبند بود دور اویلری وجود ندارد.

پرسش هشتم: دانشجویان کامپیوتر همیشه بعد از کلاس ساختمان داده با هم این بازی را انجام می دهند.ابتدا در یک صف به ترتیب قد قرار می گیرند(هیچ دو نفری قد یکسان ندارند).سپس در هر مرحله از بازی هر کسی با احتمالی خاص کوتاهترین فرد را از بازی حذف می کند(اما هیچ کس خودش را حذف نمی کند).شما باید با دانستن مقدار احتمال برای دانشجویان بگویید که پس از حداکثر k مرحله چه زیر مجموعه ای از دانشجویانی که در ابتدا شروع به بازی کردند ممکن است باقی بماند.(دقت کنید که احتمال دونفر متفاوت لزوما متفاوت و یا یکسان نیست و این احتمال می تواند هر مقداری میان بازه بسته صفر و یک باشد)(۱۵ نمره)

پاسخ :

هر حالتی که ممکن است به وجود بیاید شرط لازم زیر را دارد:

M*ZM*Z* مر ده <-M

زنده<-Z

 M^* -هداد بزرگتر مساوی صفر مرده Z^* تعداد بزرگتر مساوی صفرزنده

پس هر حالت را می توان با دو زنده ابتداییش به صورت یکتا مشخص کرد و آن را با (A,B) نشان می دهیم. از هر حالت به چهار حالت می توانیم برویم:

(A,B) -> (A,B)

به شرط آنکه احتمال هیچ کس ٪۱۰۰ نباشد.

 $(A,B) \rightarrow (A,B+1)$

به شرط آن که A %0نباشد و از Bبه بعد کسی ٪۱۰۰ نباشد.

 $(A,B) \rightarrow (B,B+1)$

به شرط آن که A %100نباشد و از Bبه بعد همه ٪ • نباشند.

 $(A,B) \rightarrow (B+1,B+2)$

به شرط آن که A %0 نباشد و از Bبه بعد همه ٪ • نباشند.

چون تعداد حالت ها محدود است می توان از حالت آغازین به عمق k بی اف اس زد.

eulerian circuit 5

سعی کنید بیشتر بدانید: أدرخت بازه ای

تلاش کردید ؟ (امتیازی) (۲۵ نمره)

یک درخت n راسی داریم که از یک راس °ریشه دار شده است.روی هر راس آن یک مخزن آب وجود دارد که در ابتدا خالی اند. شما باید m عملیات از انواع زیر را در سریعترین زمان ممکن انجام دهید .

الف) مخزن راس ٧ را بر از آب كنيد كه در اين صورت مخازن تمام نوادگان آن راس بر از آب مي شود.

ب) مخزن راس ۷را خالی کنید که در این صورت مخازن تمام اجداد آن راس خالی می شوند.

پ) بگویید که آیا مخزن راس ∨پر است یا خیر.

پاسخ :

http://codeforces.com/contest/343/problem/D

دريناه حق

segment tree 'rooted tree'