

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

تمرین سوم - درخت

محمدصادق ابوفاضلی، حامد میرامیرخانی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۲/۹/۴

نمره ۱۰

۱. مسیر درختی

یک درخت دودویی کامل با n گره و به ارتفاع $\log(n)$ داریم. هر گره از این درخت به گره‌های فرزند و گره پدر خود دسترسی دارد. می‌خواهیم مسیر ساده‌ای بین دو راس u و v پیدا کنیم (کوتاه‌ترین مسیر بین این دو راس).

الف) الگوریتم بهینه‌ای برای این کار ارائه دهید.

ب) مرتبه زمانی الگوریتم خود را بدست آورید.

نمره ۱۵

۲. درخت AVL

در رابطه با درخت AVL به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) حداقل تعداد رئوس یک درخت AVL را برحسب ارتفاع آن بدست بیاورید و ادعای خود را ثابت کنید.

ب) نشان دهید پیچیدگی زمانی عمل insert در یک درخت AVL که دارای n گره است، از مرتبه $O(\log(n))$ است.

نمره ۱۵

۳. درخت هافمن

جدول زیر را در نظر بگیرید:

تعداد تکرار	حرف
۱۸	A
۵	B
۴۳	C
۷	D
۴	E
۳۹	F
۲	G
۱۰	H

الف) با توجه به جدول تکرار حروف، درخت هافمن را رسم کنید و کد بهینه هافمن را برای حروف بدست آورید.

ب) با توجه به درخت رسم شده، برای تعداد تکرار حرف D یک بازه ارائه دهید که اگر در این بازه باشد، شکل درخت و کد هافمن حروف تغییر نکند. (برای جواب خود استدلال بیاورید)

ج) تعداد تکرار حرف C را حداقل چند واحد باید افزایش دهید تا یک واحد به ارتفاع درخت هافمن فعلی اضافه شود؟

۴. میانه‌ی لحظه‌ای

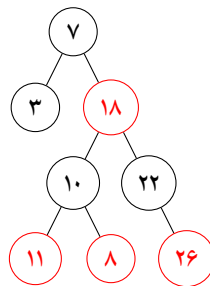
۱۵ نمره

می‌خواهیم دنباله‌ای از اعداد را در حافظه‌ای نگه داریم. در ابتدا حافظه خالی است. در هر مرحله یک عدد از ورودی خوانده می‌شود و ما می‌خواهیم پس از insert کردن هر عدد در حافظه، میانه تمام اعداد موجود در حافظه (شامل عدد insert شده) را با صرف کمترین هزینه برگردانیم. از چه داده ساختاری (داده ساختارهایی) استفاده کنیم؟ الگوریتمی ارائه دهید که این کار را انجام دهد. مرتبه زمانی الگوریتم خود را بدست آورید.

۵. درخت قرمز-سیاه

۱۰ نمره

درخت Red-Black زیر را در نظر بگیرید.



الف) راس ۹ را به درخت اضافه کنید.

ب) ثابت کنید در درخت Red-Black به ازای هر راس ۷ مقدار ارتفاع آن راس حداکثر می‌تواند ۲ برابر فاصله ی آن راس تا نزدیکترین برگ خود باشد.

۶. کاغذ نازک

۲۰ نمره

در تمرین درس ساختمان داده، صادق جواب یک سوال که ترسیم یک درخت دودویی با شرایطی خاص است را بلد نیست. بنابراین به سمت برگه تمرین حامد می‌رود تا این سوال را از روی او بنویسد. حامد که می‌خواهد صادق را اذیت کند، برگه خود را از روی میز برمی‌دارد تا صادق نتواند روی برگه را ببیند. اما از آنجایی که برگه تمرین حامد نازک بوده، صادق تصویر درختی را از پشت برگه حامد تشخیص می‌دهد. درختی که صادق از پشت برگه حامد دیده، همراه با مقادیر روی هر گره بوده است.

الف) الگوریتمی با پیچیدگی زمانی بهینه ارائه دهید که درخت دیده شده توسط صادق را ورودی گرفته و بدون دانستن صورت سوال، آن را به درخت مطلوب سوال تبدیل کند. شبه کد الگوریتم خود را بنویسید.

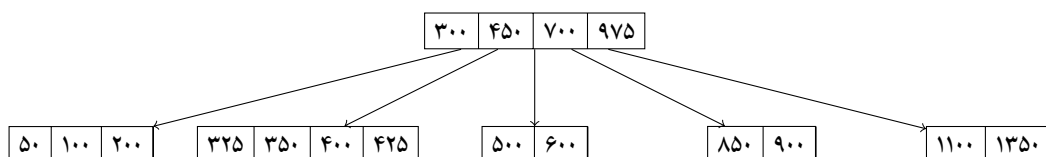
ب) در سوال بعدی از صادق خواسته شده تا سنگین‌ترین مسیر بین دو راس در آن درخت را پیدا کند. وزن مسیر بین دو راس درخت را برابر با مجموع وزن رئوس روی آن مسیر تعریف می‌کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان خطی سنگین‌ترین مسیر را پیدا کند. (وزن رئوس می‌تواند عددی منفی باشد)

۷. درخت B

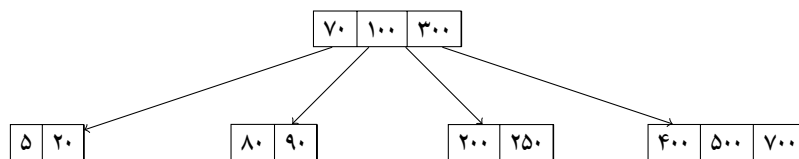
۱۵ نمره

برای تمام B-Tree های زیر، کمینه تعداد کلید هر گره را ۲ و بیشترین تعداد کلید ممکن برای هر گره را ۵ در نظر بگیرید.

الف) کلید ۳۷۵ را به درخت زیر اضافه کنید، مراحل درج و متوازن سازی را به طور کامل توضیح دهید.



ب) کلید ۲۵۰ را از درخت زیر حذف کنید، مراحل حذف و متوازن سازی را بطور کامل توضیح دهید.



ج) کلید ۱۰۰ را از درخت زیر حذف کنید، مراحل حذف و متوازن سازی را به طور کامل توضیح دهید.

