

امتحان پایان ترم ساختمان داده

زمان امتحان: ۱۴۰ دقیقه – قابل تمدید نیست – برای هر یک دقیقه ای که زودتر برگه را

تحویل دهید، یک ششم نمره اضافه میشود.

دانشجویان با شماره دانشجویی زوج، سوالات زوج و دانشجویان با شماره دانشجویی فرد،

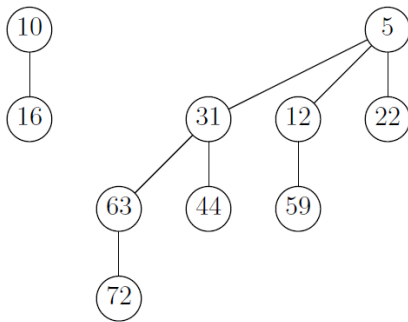
سوالات فرد را پاسخ دهند

تعداد سوالات برای هر دانشجو: ۱۱ عدد –

بارم همه سوالات ۱۰ نمره است . جمعا ۱۱۰ نمره – ۱۰ نمره بونوس

## Advanced Data Structure

۱- عنصر حداقل را از Binomial-Tree روبرو حذف کنید و نتیجه را رسم کنید؟



۲- فرض کنید در یک Fibonacci-heap بعد از انجام عملیات مختلف درجه‌ی درخت‌های موجود در ریشه برابر

۱.۱.۱.۱.۱.۳.۳.۳ باشد. بعد از انجام عملیات consolidate چند درخت در ریشه باقی می‌ماند؟ شکل Heap را بکشید؟

۳- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را درباره‌ی B-tree از مرتبه‌ی m و اندازه‌ی n تعیین کنید؟ برای پاسخ خود

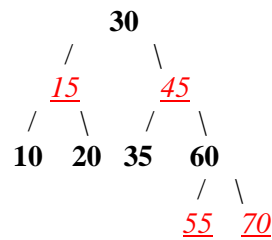
دلیل بیاورید؟

الف) ارتفاع B-tree برابر  $\log_m n$  است.

ب) هر نود حداکثر m کلید در خود نگهداری می‌کند.

ج) B-tree در مواردی که اندازه‌ی m کم باشد (مثلا ۵) بهتر از شرایطی که مقدار m زیاد باشد (مثلا ۵۰۰) کار می‌کند.

۴- عدد ۶۵ را در درخت قرمز-سیاه زیر درج کنید.

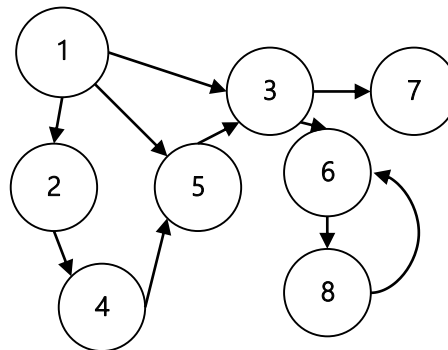


## Graph

۵- الگوریتم زیر یک گراف  $G$  را بصورت DFS جستجو می‌کند و به رئوس شماره‌های DFN را نسبت می‌دهد. فرض کنید که گراف زیر را با  $dfs(1)$  صدا کنیم و رئوس مجاور یک راس را به ترتیب شماره‌های آنها مورد بررسی قرار دهیم. همچنین مقدار عددی اولیه Count را صفر در نظر بگیرید. آرایه DFN به ازای راسهای ۱ تا ۸ چه مقداری است؟

```

Procedure dfs(v:Vertex)
    w:Vertex;
    Begin
        Visited[v]=true
        For all vertices  $w \in adj(v)$ 
            If (visited[w]==false)
        then
            dfs(w)
            Count=Count+1;
            DFN[v]=Count;
        End.
    
```



گره v	1	2	3	4	5	6	7	8
DFN(v)								

۶- الگوریتم DFS به روی گراف بدون جهت  $G$  اجرا شده است. زمان ورود  $d(v)$  و خروج  $f(v)$  از هر رأس  $v$  به صورت زیر است. کدامیک از یالهای زیر در گراف  $G$  نمیتواند وجود داشته باشند؟ چرا؟ (ممکن است بیش از یک گزینه پاسخ باشد)

گره v	a	b	c	d	e	f	g	h	I
d(v)	۱	۹	۸	۷	۵	۴	۲	۱۲	۱۳

$f(v)$	۱۸	10	۱۱	۱۶	۶	۱۷	۳	۱۵	۱۴
--------	----	----	----	----	---	----	---	----	----

ch (۴)

bd (۳)

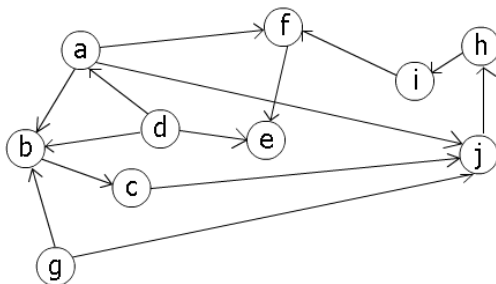
di (۲)

fh (۱)

۷- اگر  $d[u]$  نخستین زمان ملاقات گره  $u$  در جستجوی عمق اول و  $f[v]$  آخرین زمان ملاقات گره  $v$  و یال  $(u,v)$  یک Cross edge باشد، کدامیک از رابطه های زیر میتواند درست باشد؟ ممکن است بیش از یک گزینه درست باشد؟

$$\begin{array}{ll} d_{w-1} < f_{w-1} < d_{u-1} < f_{u-1} & (۲) \quad d_{w-1} < d_{u-1} < f_{u-1} < f_{w-1} \quad (۱) \\ d_{w-1} < d_{u-1} < f_{w-1} < f_{u-1} & (۴) \quad d_{u-1} < f_{u-1} < d_{w-1} < f_{w-1} \quad (۳) \end{array}$$

۸- الگوریتم Topological Sort را توضیح مختصری داده و سپس روی گراف زیر پیاده سازی کنید.



۹- فرض کنید گراف  $G$  داده شده است به صورتی که وزن یال های آن عددی بین صفر و  $N$  است. الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه ترین مسیر از یک راس  $s$  به  $t$  را با زمان  $O(E + V*N)$  و حافظه  $O(V + N)$  مشخص کند.

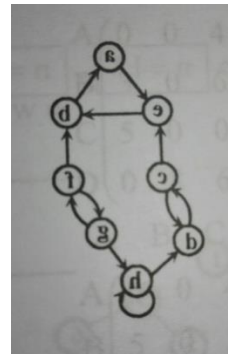
۱۰- گراف دو بخشی گرافی است که بتوان رئوس آنرا به دو دسته افراز کرد به نحوی که در بین رئوس دسته ها یالی وجود نداشته باشد. الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن اطلاعات یک گراف به ما بگوید دو بخشی است یا نه.

۱۱- پرفسور Lauren ادعا می کند که الگوریتم برای اجزای همبندی قوی می تواند با استفاده از گراف اولیه (به جای ترانهاده) در دومین جستجوی اول عمق و بررسی رئوس به ترتیب افزایش زمان های خاتمه ساده تر شود. آیا ادعای پرفسور درست می باشد؟

۱۲- اگر یک یال به گراف اضافه کنیم. اجزای همبند قوی گراف چگونه تغییر می کند؟ آیا افزایش می یابد یا کاهش؟ به چه میزان ممکن است تغییر یابد؟

۱۳- الگوریتمی ارائه دهید تا تعداد یال هایی که باید به یک گراف اضافه کنیم. تا قوی همبند شود را محاسبه کند؟ هزینه این الگوریتم را بیابید.

۱۴- گراف جهت دار زیر چند مولفه متصل به صورت قوی دارد؟



## Amortized Analysis

۱۵- پشته ای با حداکثر اندازه ی  $k$  را در نظر بگیرید. بعد از اجرای  $k$  عمل به طور خودکار از محتوای پشته یک نسخه ی پشتیبان تولید می شود. هزینه ی اجرای  $n$  عمل با در نظر گرفتن  $\text{copy}$  به عنوان یک عمل از چه مرتبه ی زمانی است؟ دقیقترین پاسخ را بگویید؟ چرا؟

د)  $O(\log^k n)$

ج)  $O(\log(n/k))$

ب)  $O(n)$

الف)  $O(k^2)$

۱۶- فرض می‌کنیم ساختمان داده‌ای مبتنی بر پشته ساخته ایم این ساختمان داده از عملی به نام  $\text{MultiPush}()$  پشتیبانی می‌کند این عمل به این صورت است که  $K$  عنصر را درون پشته درج می‌کند آیا هزینه سرشکنی عملیات مربوط به پشته در این ساختمان داده نیز  $O(1)$  باقی می‌ماند؟ اگر جواب شما مثبت است دلیل آن را بگویید. در غیر این صورت توجیه کنید که هزینه‌ی سرشکنی مربوط به این ساختمان داده  $O(1)$  نمی‌باشد.

۱۷- یکی از راه‌های ساختن صف استفاده از دو پشته می‌باشد این روش را توضیح دهید و نشان دهید صفی که با استفاده از این روش ساخته می‌شود هزینه سرشکنی هر  $\text{Enqueue}$  و هر  $\text{Dequeue}$  برابر با  $O(1)$  می‌باشد.

۱۸- نشان دهید اگر در در شمارنده‌ی  $k$  بینی عملگر کاهش هم وجود داشت، هزینه‌ی انجام  $n$  عمل متوالی برابر با  $\Theta(nk)$  می‌باشد.

## Algorithms

۱۹- مرتبه زمانی الگوریتم‌های زیر به ترتیب از راست به چپ کدام گزینه می‌باشد؟ الگوریتم را توضیح دهید؟

A. فرض کنید  $X[1 \dots n]$  و  $Y[1 \dots n]$  دو آرایه مرتب شده از اعداد باشند، الگوریتمی که عضو میانه در میان این  $2n$  عدد را بیابد.

B. فرض کنید که لیست مرتب  $A$  را که از اعداد صحیح پر شده است داریم. الگوریتمی که نشان دهد آیا در بین این اعداد، عددی با مشخصه  $A[i] = i$  وجود دارد. به طور مثال:  $\{-1.0.0.3.7\}$  جواب  $\text{true}$  باز می‌گرداند چون  $A[3] = 3$ .

ب)  $O(\lg n) - O(n)$

الف)  $O(\lg n) - O(\lg n)$

د)  $O(n) - O(n)$

ج)  $O(n) - O(\lg n)$

۲۰- دو آرایه‌ی مرتب شده به طول‌های  $m$  و  $n$  در نظر بگیرید. می‌خواهیم  $k$ امین عضو اجتماع این دو آرایه را به دست آوریم. کمترین زمان اجرای این کار را به دست آورید. (بهترین گزینه را انتخاب کنید). چرا؟

الف)  $O(\lg m + \lg n)$

ب)  $O(\sqrt{m} + \sqrt{n})$

ج)  $O(m + n)$

د)  $O(\lg m * \lg n)$

## Hashing

۲۱- در جدول درهم‌سازی (hashing) با واریسی خطی (linear probing)، اگر تابع درهم‌سازی برای هفت عنصر ورودی به صورت زیر باشد،

key	A	B	C	D	E	F	G
hash	۳	۵	۳	۴	۵	۶	۳

کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند حاصل درج این عناصر با هر ترتیب دلخواه در آرایه‌ی ۷تایی  $H[0..6]$  (که در ابتدا تهی است) باشد؟ چرا؟

a.  $H[0..6] = [E F G A C B D]$

b.  $H[0..6] = [C E B G F D A]$

c.  $H[0..6] = [B D F A C E G]$

d.  $H[0..6] = [C G B A D E F]$

۲۲- فرض کنید که یک جدول درهم‌سازی (hash) به اندازه‌ی ۸۰ (هشتاد) از روش آدرس‌دهی باز (open Addressing) استفاده می‌کند. ابتدا جدول خالی بوده است و تنها عملیات اضافه کردن و جستجو روی جدول انجام شده است. در حال حاضر وضعیت درایه‌های ۴۵ تا ۵۶ جدول به صورت زیر است. اعداد بالای آرایه، اندیس درایه‌ها و اعداد پایین آرایه خروجی تابع درهم‌سازی است. اگر یک بار دیگر از جدول درهم‌سازی خالی شروع کنیم و همان عملیات را به غیر از اضافه کردن کلید e دوباره انجام دهیم، در درایه‌ی ۵۰ چه کلیدی قرار می‌گیرد؟

۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j		
۴۶	۴۶	۴۶	۴۷	۴۶	۵۱	۴۷	۴۶	۴۸	۴۹		

g (۴)

h (۳)

f (۲)

i (۱)