

به نام خداوند بخشنده مهربان

تمرین شماره ۴

امیر محمد کریمی

۱۰ آذر ۱۳۹۶

۱. در یک آرایه یک جفت طلایی را اینگونه تعریف میکنیم:

اگر $array[i] > 2 * array[j]$, $i < j$, آنگاه (i, j) یک جفت طلایی میباشد.

آرایه ای نامرتب به طول n داده شده است. الگوریتمی در زمان $O(n \log n)$ ارائه دهید که تعداد جفت های طلایی در این آرایه را پیدا کند.

۲. در یک آرایه به طول n عددی وجود دارد که بیش از $\frac{n}{2}$ بار در آن تکرار شده است. الگوریتمی در زمان $O(n)$ و با حافظه $O(1)$ ارائه دهید که این عدد را بیابد.

۳. آرایه ای نامرتب به طول n داده شده است. الگوریتمی در زمان $O(n)$ ارائه دهید که آرایه را به صورت زیر مرتب کند :

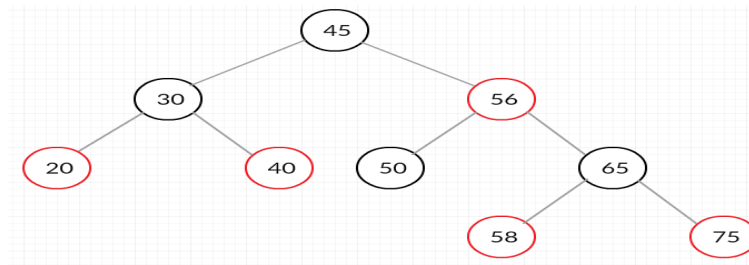
$$array[0] < array[1] > array[2] < array[3] > array[4] \dots$$

(فرض کنید ورودی به گونه ایست که لافل یک جایگشت با شرط گفته شده وجود دارد)

۴. آرایه نامرتب P به طول n داده شده است. الگوریتمی در زمان $O(n \log n)$ ارائه دهید به طوری که خروجی آن آرایه Q باشد. هر عضو این آرایه دارای شرط زیر است :

$$Q[i] = (P[j] < P[i] \text{ و } j > i)$$

۵. در درخت $Red\ Black$ زیر، عدد ۶۰ را اضافه کنید.



۶. یک جدول *hash* با ۷ خانه داریم.

آ (اگر از روش *double hashing* برای رفع برخورد استفاده کنیم، با استفاده از توابع داده شده، اعداد ۷۶، ۹۳، ۴۰، ۴۷، ۱۰ و ۵۵ را به ترتیب در جدول قرار دهید.

$$h_1(k) = k \bmod 7, \quad h_2(k) = 5 - (k \bmod 5)$$

(یادآوری: برای قرار دادن یک عدد در جدول *hash* به روش *double hashing* از تابع

$$H(k, i) = (h_1(k) + i * h_2(k)) \bmod TableSize$$
 استفاده میکنیم.)

ب (توابع بالا را به گونه ای تغییر دهید که هنگام اضافه کردن داده های مذکور، تعداد برخورد برای هر عدد حداکثر ۱ باشد.

ج (اگر از روش *Quadratic Probing* برای رفع برخورد استفاده کنیم و تابع مپ به صورت

$$H(k, i) = (k \bmod M + i + i^2) \bmod TableSize$$

باشد، کمترین مقدار M را به گونه ای بیابید که هنگام اضافه کردن داده های بالا، تعداد برخورد برای هر عدد حداکثر ۱ باشد. الگوریتم خود را برای یافتن M توضیح دهید. (امتیازی)

د (اگر از روش *chaining* برای رفع برخورد استفاده کنیم به طوری که احتمال قرار گرفتن هر عضو در خانه های جدول برابر باشد، احتمال آن که در فرآیند اضافه کردن ۷ عدد به جدول، دقیقاً ۵ کلید در یک خانه قرار گیرند را محاسبه کنید.