

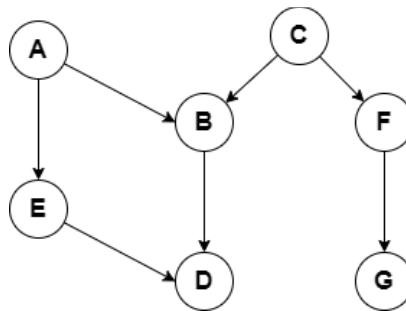
توجه: استفاده از کتاب، جزوه و لپتاپ در حین امتحان مجاز است.

سوال ۱ سوالات پاسخ کوتاه (۲۰ نمره)

در هر یک از موارد زیر درست یا غلط بودن آن را مشخص کنید و حداکثر در ۲ جمله به صورت مختصر علت را توضیح دهید. (هر مورد ۴ نمره)

الف) برای توزیع $P(x_1, \dots, x_n)$ می‌خواهیم محتمل‌ترین مقادیر x_1 تا x_n را بیابیم. برای این کار می‌توانیم ابتدا توزیع حاشیه‌ای روی هر متغیر، یعنی $P(x_i)$ ، را بدست آوریم و سپس تک‌تک توزیع‌های حاشیه‌ای را ماکزیمم کنیم.

ب) اگر در یک شبکه‌ی بیزی (Bayesian Network) ساختار V نداشته باشیم، آن‌گاه یک شبکه‌ی مارکوف وجود دارد که perfect map آن خواهد بود.



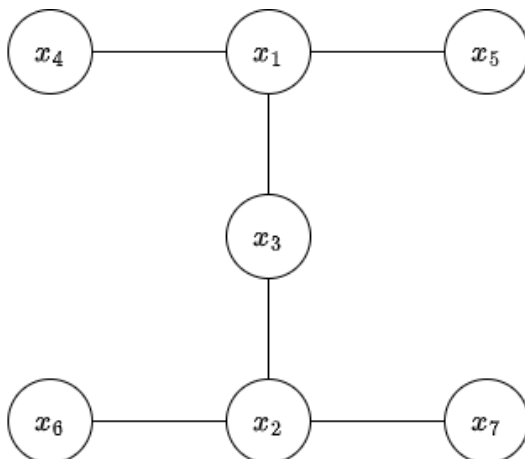
ج) در شبکه‌ی بیزین بالا، داریم $E \perp F \mid C, D$

د) در شبکه‌ی بیزین بالا، داریم $G \perp A \mid D$

ه) اگر یک شبکه‌ی مارکوف درخت باشد، هر گونه توزیع حاشیه‌ای روی هر زیر مجموعه‌ی از متغیرهای شبکه را می‌توان با استفاده از الگوریتم sum-product بدست آورد.

سوال ۲ الگوریتم sum-product (۲۰ نمره)

شبکه‌ی مارکوف زیر را در نظر بگیرید. احتمال $P(x_1, x_2 \mid x_3 = 0.1, x_7 = 0.2)$ را بدست آورید. نیازی به محاسبه‌ی ضرایب نرمال‌کننده نیست.

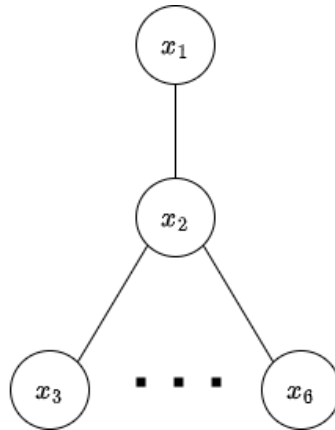


$$\phi(x_i) = x_i, \quad x_i \in [0, 1]$$

$$\phi(x_i, x_j) = x_i + x_j, \quad x_i, x_j \in [0, 1]$$

سوال ۳ الگوریتم max-product (۲۰ نمره)

شبکه مارکوف زیر را در نظر بگیرید.



$$\phi(x_i) = e^{-\frac{1}{2}(x_i-1)^2} \quad x_i \geq 0$$

$$\phi(x_i, x_j) = e^{-x_i x_j} \quad x_i, x_j \geq 0$$

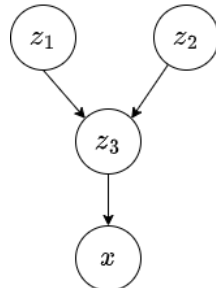
می‌خواهیم با استفاده از الگوریتم max-product (max-sum)، مقادیر بهینه x_1, \dots, x_6 را بدست آوریم:

$$(x_1^*, \dots, x_6^*) = \arg \max_{x_1, \dots, x_6} P(x_1, \dots, x_6)$$

مقدار بهینه‌ی x_1^* را بدست آورید (نیازی به محاسبه‌ی مقادیر بهینه‌ی سایر متغیرها نیست).

سوال ۴ Variational Inference (۲۰ نمره)

شبکه‌ی بی‌زی زیر را در نظر بگیرید که در آن متغیر x مشاهده شده و متغیرهای z_1, z_2 و z_3 پنهان هستند. می‌خواهیم با استفاده از روش Mean-Field، توزیع احتمال پسین $P(z_1, z_2, z_3 | x)$ را تقریب بزنیم. توزیع احتمال $q(z_1, z_2, z_3) = q(z_1)q(z_2)q(z_3)$ را که تقریب توزیع احتمال پسین است بدست آورید.



$$p(z_1) = z_1 e^{-z_1}$$

$$p(z_2) = N(z_2 | 0, 1)$$

$$p(z_3) = N(z_3 | z_1 + z_2, 1)$$

$$p(x) = N(x | z_3, 1)$$

راهنمایی: توزیع $q(z_1)$ به صورت یک توزیع شناخته شده نمی‌شود (نیازی به محاسبه ضریب نرمال‌کننده برای آن نیست) ولی $q(z_2)$ و $q(z_3)$ به صورت یک توزیع معروف خواهند شد.

سوال ۵ Stochastic Inference (۲۰ نمره)

الف) (۶ نمره) الگوریتم Rejection Sampling را توضیح دهید و مهمترین مشکل آن را بیان کنید.

ب) (۱۰ نمره) الگوریتم Metropolis-Hastings را توضیح دهید. آیا در این الگوریتم ممکن است یک سمپل دو یا چند بار تولید شود؟

ج) (۴ نمره) مفهوم Burn-in در الگوریتم‌های MCMC چیست؟ توضیح دهید.

موفق باشید.