سوال 1

الف) نادرست، زیرا مقدار بهینه‌ی x_1^* تا x_n^* می‌تواند با مقدار بهینه در توزیع حاشیه‌ای‌ها یکسان نباشد.

ب) درست، اگر یک BN به صورت moral باشد، آن گاه یک MRF برای آن وجود دارد که perfect map آن است.

ج) درست، زیرا متغیر C مسیر بین E و F را بلاک می‌کند.

د) نادرست، زیرا متغیر D یکی از فرزندان B است و روی B یک v-struct داریم. لذا مسیر بین G و A فعال می‌شود.

هـ) نادرست، مثلاً در گراف زیر توزیع حاشیه‌ای روی (C و A) را نمی‌توان یافت.

سوال ۲

$$P(x_1, x_2 \mid x_3 = 0.1, x_7 = 0.2)$$

$$= P(x_1 \mid x_3 = 0.1)\, P(x_2 \mid x_3 = 0.1, x_7 = 0.2)$$

$$m_{41}(x_1) = \int_0^1 x_4 (x_1 + x_4)\, dx_4 = \frac{1}{2} x_1 x_4^2 + \frac{1}{3} x_4^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3}$$

$m_{51}(x_1) = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3}$ به طریق مشابه داریم:

$$m_{31}(x_1) = 0.1 (x_1 + 0.1)$$

$$\Rightarrow P(x_1 \mid x_3 = 0.1) \propto 0.1 (x_1 + 0.1) \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3}\right)^2$$

$m_{62}(x_2) = \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{3}$ مشابه قسمت قبل:

$$m_{72}(x_2) = 0.2 (0.2 + x_2)$$

$$m_{32}(x_2) = 0.1 (0.1 + x_2)$$

$$\Rightarrow P(x_2 \mid x_3 = 0.1, x_7 = 0.2) \propto$$

$$0.02 \left(\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{3}\right) (0.2 + x_2)(0.1 + x_2)$$

سوال ۳

$$m_{32}(x_2) = \max_{x_3} \log \phi(x_3) + \log \phi(x_2, x_3)$$

$$= \max_{x_3} \underbrace{-\frac{1}{2}(x_3-1)^2 - x_2 x_3}_{f}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -x_3 + 1 - x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1 - x_2}$$

$$\Rightarrow m_{32}(x_2) = -\frac{1}{2}x_2^2 - x_2(1-x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2$$

به‌طور مشابه داریم: $m_{42}(x_2) = m_{52}(x_2) = m_{62}(x_2) = m_{32}(x_2)$

$$m_{21}(x_1) = \max_{x_2} \log \phi(x_2) + \log \phi(x_1, x_2) + m_{32}(x_2) + \dots + m_{62}$$

$$= \max_{x_2} \frac{3}{2} x_2^2 - 3x_2 - x_1 x_2 - \frac{1}{2}$$

از آنجایی که ضریب x_2^2 مثبت است، لذا بیشینه تابع فوق در $x_2 \to +\infty$ رخ می‌دهد.

در واقع در این شرایط توزیع احتمال داده شده انتگرالش بی‌نهایت می‌شود!

لذا سوال مشکل دارد

اگر روند درستی برای حل این مسئله انتخاب شده باشد نمره کامل داده می‌شود.

جواب آخر در این سوال مهم نیست.

سوال 4

$$\log q(z_1) = E_{z_2, z_3}\left[\log P(z_1, z_2, z_3, x)\right] + const$$

$$\log q(z_2) = E_{z_1, z_3}\left[\quad 〃 \quad\right] + const$$

$$\log q(z_3) = E_{z_1, z_2}\left[\quad 〃 \quad\right] + const$$

$$\log P(z_1, z_2, z_3, x) = \log P(z_1) P(z_2) P(z_3 | z_1, z_2) P(x | z_3)$$

$$= \log z_1 - z_1 - \frac{1}{2} z_2^2 - \frac{1}{2}(z_3 - z_1 - z_2)^2 - \frac{1}{2}(x - z_3)^2 + const$$

$$\log q(z_1) = \log z_1 - z_1 + z_1 E[z_3] + z_1 E[z_2] + const - \frac{1}{2} z_1^2$$

$$\log q(z_2) = -\frac{1}{2} z_2^2 - \frac{1}{2} z_2^2 + z_2 E[z_1] + z_2 E[z_3] + const$$

$$= -z_2^2 + \left(E[z_1] + E[z_3]\right) z_2 + const$$

$$= -\left(z_2 - \frac{E[z_1] + E[z_3]}{2}\right)^2 + const_2$$

$$\Rightarrow \boxed{q(z_2) = \mathcal{N}\left(z_2 \,\middle|\, \frac{E[z_1] + E[z_3]}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

$$\log q(z_3) = -\frac{1}{2} z_3^2 + z_3\left(E[z_1] + E[z_2]\right) - \frac{1}{2} z_3^2 + x z_3 + \text{const}$$

$$= -z_3^2 + z_3\left(E[z_1] + E[z_2] + x\right) + \text{const}$$

$$\Rightarrow \boxed{q(z_3) = \mathcal{N}\left(z_3 \,\middle|\, \frac{E[z_1] + E[z_2] + x}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

سوال ۵ جواب آن در اسلایدهای درس موجود است