به نام آنکه جان را فکرت آموخت

ریاضی مهندسی

پاسخ کوییز دوم

۱. اگر $f(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\omega^2+4}\cos\omega x + \frac{\omega}{\omega^2+4}\sin\omega x\right) d\omega$ باشد، در اینصورت حاصل M را بدست آورید:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(2\cos^3 x + 3\sin^3 x\right) dx$$

با توجه به معادله $f(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\omega^2+4}\cos\omega x + \frac{\omega}{\omega^2+4}\sin\omega x\right) d\omega$ داریم:

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$$

$$B(\omega) = \frac{\omega}{\omega^2+4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$$

با استفاده از روابط $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ و $\cos 3x = 4\cos^3 - 3\cos x$ می توان نوشت:

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(\sin 3x - 3\sin x\right)$$

با جایگذاری روابط بالا در انتگرال خواسته شده داریم:

$$\begin{aligned}
M &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(2\cos^3 x + 3\sin^3 x\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(2\cos^3 x\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(3\sin^3 x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos 3x + 3\cos x)dx + \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(3\sin x - \sin 3x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx + \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 3x dx + \frac{9}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x dx - \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin 3x dx \\
&= \frac{1}{2}\pi A(1) + \frac{3}{2}\pi A(3) + \frac{9}{4}\pi B(1) - \frac{3}{4}\pi B(3) \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2+4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^2+4}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{1^2+4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{3^2+4}\right)\right) \\
&= \pi\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{26} + \frac{9}{20} - \frac{9}{52}\right) \\
&= \frac{101\pi}{260}
\end{aligned}$$

$$M = \frac{101\pi}{260}$$

۲. به کمک انتگرال فوریه برقراری رابطه زیر را ثابت کنید:

$$\frac{6}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2+\omega^2}{4+5\omega^2+\omega^4}\cos\omega x d\omega = e^{-x} + e^{-2x} \quad x > 0$$

تابع $f(x) = e^{-x} + e^{-2x} \quad x > 0$ را بسط زوج می دهیم، پس $B(\omega) = 0$ و داریم :

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\cos\omega x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-2x}\cos\omega x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\mathscr{L}\{\cos\omega x\}_{s=1} + \frac{2}{\pi}\mathscr{L}\{\cos\omega x\}_{s=2} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)_{s=1} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)_{s=2} \\
&= \frac{2}{\pi(1+\omega^2)} + \frac{4}{\pi(4+\omega^2)} = \frac{2(4+\omega^2)+4(1+\omega^2)}{\pi(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \\
&= \frac{6(2+\omega^2)}{\pi(4+5\omega^2+\omega^4)}
\end{aligned}
$$

حال داریم:

$$
\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) dx = f(x)
$$

$$
\frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+\omega^2}{4+5\omega^2+\omega^4}\cos\omega x d\omega = e^{-x}+e^{-2x} \quad x>0
$$

۳. به کمک انتگرال فوریه عبارت زیر را اثبات کنید:

$$
(1+x)e^{-x} = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{(\omega^2+1)^2} d\omega \quad x \geq 0
$$

تابع $f(x) = (1+x)e^{-x} \quad x \geq 0$ را بسط زوج می دهیم، پس $B(\omega) = 0$ و داریم :

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left((1+x)e^{-x}\right)\cos\omega x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x} x\cos\omega x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\mathscr{L}\{\cos\omega x\}_{s=1} + \frac{2}{\pi}\mathscr{L}\{x\cos\omega x\}_{s=1}
\end{aligned}
$$

از سویی می دانیم $\mathscr{L}\{xf(x)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathscr{L}\{f(x)\}\right)$

پس می توان نوشت:

$$\mathscr{L}\{x\cos\omega x\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathscr{L}\{\cos\omega x\}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله اصلی داریم:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)_{s=1} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)_{s=1} \\ &= \frac{2}{\pi(1+\omega^2)} + \frac{2(1-\omega^2)}{\pi(1+\omega^2)^2} = \frac{2(1+\omega^2)+2(1-\omega^2)}{\pi(1+\omega^2)^2} \\ &= \frac{4}{\pi(1+\omega^2)^2} \end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) dx \\ (1+x)e^{-x} &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\left(\omega^2+1\right)^2} d\omega \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

۴. در معادله انتگرالی زیر $f(\omega)$ را به دست آورید:

$$\int_0^\infty f(\omega)\sin\omega x d\omega = \frac{e^{-x}\sin x}{x} \quad x > 0$$

تابع $f(x) = \frac{e^{-x}\sin x}{x} \quad x > 0$ را بسط فرد می دهیم، پس $A(\omega) = 0$ و داریم :

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x}\sin\omega x dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\frac{(\cos(\omega-1)x - \cos(\omega+1)x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\cos(\omega-1)x dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\cos(\omega+1)x dx \\ &= \frac{1}{\pi}\mathscr{L}\{\frac{\cos(\omega-1)x}{x}\}_{s=1} - \frac{1}{\pi}\mathscr{L}\{\frac{\cos(\omega+1)x}{x}\}_{s=1} \end{aligned}$$

از سویی می دانیم $\mathscr{L}\{\frac{f(x)}{x}\} = \int_s^\infty \mathscr{L}\{f(x)\}_{s=u} du$ ؛ پس می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\frac{\cos(\omega-1)x}{x}\} &= \int_s^\infty \mathscr{L}\{\cos(\omega-1)x\}_{s=u} du \\ &= \int_s^\infty \frac{u}{u^2+(\omega-1)^2} du \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+(\omega-1)^2\right)\Big|_s^\infty\end{aligned}$$

به همین صورت ثابت می شود:

$$\mathscr{L}\{\frac{\cos(\omega+1)x}{x}\} = \frac{1}{2}\ln\left(u^2+(\omega+1)^2\right)\Big|_s^\infty$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله اصلی داریم:

$$\begin{aligned}B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\mathscr{L}\{\frac{\cos(\omega-1)x}{x}\}_{s=1} - \frac{1}{\pi}\mathscr{L}\{\frac{\cos(\omega+1)x}{x}\}_{s=1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\ln\left(u^2+(\omega-1)^2\right)\Big|_1^\infty - \frac{1}{2\pi}\ln\left(u^2+(\omega+1)^2\right)\Big|_1^\infty \\ &= \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{u^2+(\omega-1)^2}{u^2+(\omega+1)^2}\right)\Bigg|_1^\infty \\ &= \frac{1}{2\pi}\ln 1 - \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1^2+(\omega-1)^2}{1^2+(\omega+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\ln\sqrt{\frac{1+(\omega+1)^2}{1+(\omega-1)^2}}\end{aligned}$$

حال داریم:

$$\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) dx = f(x)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\ln\sqrt{\frac{1+(\omega+1)^2}{1+(\omega-1)^2}}\sin\omega x dx = \frac{e^{-x}\sin x}{x} \quad x>0$$

با مقایسه رابطه بالا و معادله ی $f(\omega)$ می توان نوشت:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \ln \sqrt{\frac{1+(\omega+1)^2}{1+(\omega-1)^2}}$$

۵. با استفاده از استقراء ثابت کنید تبدیل فوریه ی $a > 0 \quad x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$ برای n های طبیعی به صورت زیر است:

$$X(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

برای $n = 1$ داریم:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$
$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

برای $n = 2$ داریم:

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

از سویی طبق رابطه $tx(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$ می توان نوشت:

$$X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

فرض می کنیم برای n رابطه داده شده درست است، در نتیجه داریم:

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$$
$$X(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

برای $n + 1$ می توان نوشت:

$$x(t) = \frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)$$

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{j}{n}\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{(a+j\omega)^n}\right] \\
&= \frac{j}{n}\frac{d}{d\omega}\left[(a+j\omega)^{-n}\right] \\
&= \frac{j}{n}(-n)(a+j\omega)^{-n-1}j \\
&= \frac{1}{(a+j\omega)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

در نتیجه رابطه داده شده به ازای همه n های طبیعی برقرار است.

۶. اگر تبدیل فوریه $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ به صورت $X(\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}$ باشد؛ تبدیل فوریه $z(t)=te^{-\alpha|t|}$ را به دست آورید و به کمک آن تبدیل فوریه $r(t)=te^{-3|t|}\cos 3t$ را محاسبه کنید:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= te^{-\alpha|t|} \\
&= te^{-\alpha t}u(t)+te^{\alpha t}u(-t) \\
&= tx(t)+tx(-t)
\end{aligned}
$$

از سویی می دانیم $x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$ و $tx(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$ ، حال از دوطرف تساوی بالا تبدیل فوریه می گیریم:

$$
\begin{aligned}
Z(\omega) &= j\frac{d}{d\omega}X(\omega)+j\frac{d}{d\omega}X(-\omega) \\
&= j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\alpha+j\omega}\right)+j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\alpha-j\omega}\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}-\frac{1}{(\alpha-j\omega)^2} \\
&= \frac{(\alpha-j\omega)^2-(\alpha+j\omega)^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \\
&= \frac{-4j\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^2}
\end{aligned}
$$

همچنین برای $h(t)=cos(\alpha t)$ داریم:

$$
H(\omega)=\pi\left(\delta(\omega-\alpha)+\delta(\omega+\alpha)\right)
$$

حال داریم:

$$
r(t)=\left(te^{-\alpha|t|}\right)(\cos\alpha t)=z(t)h(t)
$$

از طرفی می دانیم اگر $x_1(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$ و $x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$ آنگاه:

$$x_1(t)x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{2\pi}Z(\omega) * H(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-4j\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^2}\right) * \left(\pi\left(\delta(\omega-\alpha)+\delta(\omega+\alpha)\right)\right) \\ &= -2\alpha j\left(\frac{\omega-\alpha}{(\alpha^2+(\omega-\alpha)^2)^2}+\frac{\omega+\alpha}{(\alpha^2+(\omega+\alpha)^2)^2}\right) \\ &= 2\alpha j\left(\frac{\omega+\alpha}{(\alpha^2+(\omega+\alpha)^2)^2}+\frac{\omega-\alpha}{(\alpha^2+(\omega-\alpha)^2)^2}\right) \end{aligned}$$

با انتخاب $\alpha = 3$ می توان نوشت:

$$te^{-3|t|}\cos 3t \overset{F}{\longleftrightarrow} 2(3)j\left(\frac{\omega+3}{(3^2+(\omega+3)^2)^2}+\frac{\omega-3}{(3^2+(\omega-3)^2)^2}\right)$$

$$R(\omega) = 6j\left(\frac{\omega+3}{(9+(\omega+3)^2)^2}+\frac{\omega-3}{(9+(\omega-3)^2)^2}\right)$$

۷. تبدیل فوریه تابع $x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)$ را به دست آورید:

با انتخاب $x_1(t) = 2\pi sinc(\pi t)$ و $x_2(t) = 4\pi sinc(2\pi t)$ داریم :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin \pi t}{\pi t}\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\left(2\pi sinc(\pi t)\right)\left(4\pi sinc(2\pi t)\right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}x_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

از سویی می دانیم اگر $x_1(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$ و $x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$ آنگاه:

$$x_1(t)x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)\right) \\
&= \frac{1}{8\pi^3}\left(X_1(\omega) * X_2(\omega)\right)
\end{aligned}
$$

از طرفی می دانیم:

$$
\Pi(\frac{t}{T}) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega T}{2})
$$

طبق خاصیت دوگانی اگر $X(\omega) \xleftrightarrow{F} x(t)$ آنگاه $2\pi x(-\omega) \xleftrightarrow{F} X(t)$ در نتیجه می توان نوشت:

$$
T\,\mathrm{sinc}(\frac{tT}{2}) \xleftrightarrow{F} 2\pi\Pi(\frac{-\omega}{T}) = 2\pi\Pi(\frac{\omega}{T})
$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &\xleftrightarrow{F} 2\pi\Pi(\frac{\omega}{2\pi}) \qquad T = 2\pi \\
x_2(t) &\xleftrightarrow{F} 2\pi\Pi(\frac{\omega}{4\pi}) \qquad T = 4\pi
\end{aligned}
$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله $X(\omega)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{1}{8\pi^3}\left(X_1(\omega) * X_2(\omega)\right) \\
&= \frac{1}{8\pi^3}\left(2\pi\Pi(\frac{\omega}{2\pi}) * 2\pi\Pi(\frac{\omega}{4\pi})\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\Pi(\frac{\omega}{2\pi}) * \Pi(\frac{\omega}{4\pi})\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(\frac{\omega-\tau}{2\pi})\Pi(\frac{\tau}{4\pi})\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

$$
X(\omega) = \begin{cases}
0 & \omega \le -3\pi \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\omega+2\pi}\mathrm{d}\tau & -3\pi < \omega \le -\pi \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\tau & -\pi < \omega \le \pi \\
\frac{1}{2\pi}\int_{\omega-2\pi}^{\pi}\mathrm{d}\tau & \pi < \omega \le 3\pi \\
0 & 3\pi < \omega
\end{cases}
= \begin{cases}
0 & \omega \le -3\pi \\
\frac{\omega}{2\pi} + \frac{3}{2} & -3\pi < \omega \le -\pi \\
1 & -\pi < \omega \le \pi \\
-\frac{\omega}{2\pi} + \frac{3}{2} & \pi < \omega \le 3\pi \\
0 & 3\pi < \omega
\end{cases}
$$

۸. اگر تبدیل فوریه $x(t) = e^{-t}u(t)$ به صورت $X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ باشد؛ تبدیل فوریه $z(t) = te^{-|t|}$ را به دست آورید و به کمک آن تبدیل فوریه $r(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$ را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} z(t) &= te^{-|t|} \\ &= te^{-t}u(t) + te^{t}u(-t) \\ &= tx(t) + tx(-t) \end{aligned}$$

از سویی می دانیم $X(-\omega) \xleftrightarrow{F} x(-t)$ و $j\frac{d}{d\omega}X(\omega) \xleftrightarrow{F} tx(t)$ ، حال از دوطرف تساوی بالا تبدیل فوریه می گیریم:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= j\frac{d}{d\omega}X(\omega) + j\frac{d}{d\omega}X(-\omega) \\ &= j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1+j\omega}\right) + j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{(1+j\omega)^2} - \frac{1}{(1-j\omega)^2} \\ &= \frac{(1-j\omega)^2 - (1+j\omega)^2}{(1^2+\omega^2)^2} \\ &= \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2} \end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت دوگانی می دانیم اگر $X(\omega) \xleftrightarrow{F} x(t)$ آنگاه $2\pi x(-\omega) \xleftrightarrow{F} X(t)$ ؛ در نتیجه طبق قسمت قبل می توان نوشت:

$$te^{-|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4jt}{(1+t^2)^2} \xleftrightarrow{F} 2\pi\omega e^{-|-\omega|}$$

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2} \xleftrightarrow{F} j2\pi\omega e^{-|\omega|}$$

در نتیجه داریم:

$$R(\omega) = j2\pi\omega e^{-|\omega|}$$