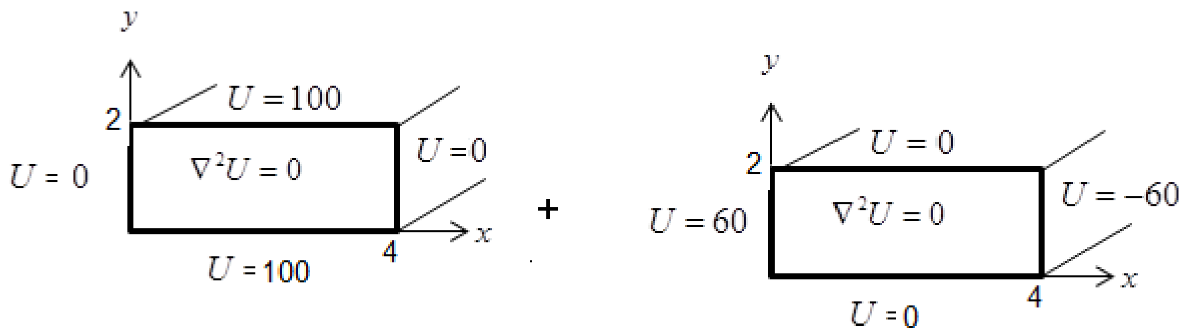
حل امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

حل 1: شکل سمت چپ را به دو شکل مطابق زیر تبدیل میکنیم



برای شکل سمت چپ پتانسیل $x = 0,\ \ x = 4$ صفر شده بنابراین تابعیت x به صورت $\sin\frac{m\pi}{4}x$ میباشد در نتیجه تابعیت پتانسیل بر حسب y باید به صورت هیپوربولیک باشد که چون حول $y = 1$ زوج است باید به صورت کسینوس هیپوربولیک باشد در نتیجه برای این شکل داریم:

$$U_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{4}x \cosh\frac{m\pi}{4}(y-1) \to U_1(x,0) = U_1(x,2) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cosh\frac{m\pi}{4}\sin\frac{m\pi}{4}x = 100 \to$$

$$A_m \cosh\frac{m\pi}{4} = \frac{2}{4}\int_0^4 100\sin\frac{m\pi}{4}x\,dx = 50[-\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{4}x]_0^4 = \begin{cases} \frac{400}{m\pi} & m = odd \\ 0 & m = even \end{cases} \to A_m = \frac{400}{(2m-1)\pi\cosh\frac{(2m-1)\pi}{4}}$$

$$U_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{400}{(2m-1)\pi\cosh\frac{(2m-1)\pi}{4}} \sin\frac{(2m-1)\pi}{4}x \cosh\frac{(2m-1)\pi}{4}(y-1)$$

برای شکل سمت راست تابعیت پتانسیل بر حسب y سینوسی و به صورت $\sin\frac{m\pi}{2}y$ است بنابراین بر حسب x باید هیپربولیک باشد و چون حول $x = 2$ تابع فرد است بنابراین باید به صورت سینوس هیپوربولیک باشد در نتیجه برای این شکل داریم:

$$U_2(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi}{2}y \sinh\frac{m\pi}{2}(2-x) \to U_2(0,y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sinh m\pi \sin\frac{m\pi}{2}y = 60 \to$$

$$B_m \sinh m\pi = \frac{2}{2}\int_0^2 60\sin\frac{m\pi}{2}y\,dy = 60[-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}y]_0^4 = \begin{cases} \frac{240}{m\pi} & m = odd \\ 0 & m = even \end{cases} \to B_m = \frac{240}{(2m-1)\pi\sinh(2m-1)\pi}$$

$$U_2(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{240}{(2m-1)\pi\sinh(2m-1)\pi} \sin\frac{(2m-1)\pi}{2}y \sinh\frac{m\pi}{2}(2-x)$$

در نتیجه پاسخ به صورت: $U(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y)$ میباشد. **4 نمره**

برای شکل ربع استوانه پتانسل در داخل ربع استوانه که پاسخ معادله لاپلاس است با توجه به اینکه پتانسیل در $\phi = 0$ برابر صفر است به صورت کلی زیر است:

$$U(r,\phi)=A_k r^k \sin k\phi \quad U(r,\frac{\pi}{2})=0 \to \sin\frac{k\pi}{2}=m\pi \to k=2m \to U(r,\phi)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m r^{2m}\sin 2m\phi$$

4 نمره

$$U(a,\phi)=20=\sum_{m=1}^{\infty} A_m (a)^{2m}\sin 2m\phi \to A_m(a)^{2m}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 20\sin 2m\phi d\phi=\frac{80}{\pi}[-\frac{1}{2m}\cos 2m\phi]_0^{\frac{\pi}{2}}=\begin{cases}\frac{80}{m\pi} & m=odd\\ 0 & m=even\end{cases}\to$$

$$A_m=\frac{80}{(2m-1)\pi a^{2m}}\to U(r,\phi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{80}{(2m-1)\pi a^{2(2m-1)}}r^{2(2m-1)}\sin(2m-1)\phi=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{80}{(2m-1)\pi}(\frac{r}{a})^{2(2m-1)}\sin(2m-1)\phi$$

حل 2– الف) برای خط $y=-1$ داریم $C=1,\ D=1$ در اینصورت نگاشت این خط با $w=\frac{1}{z}$ برابر است با:

$$1(u^2+v^2)+0u-v+0=0 \to u^2+v^2-v=0 \to u^2+(v-0.5)^2=0.5^2$$

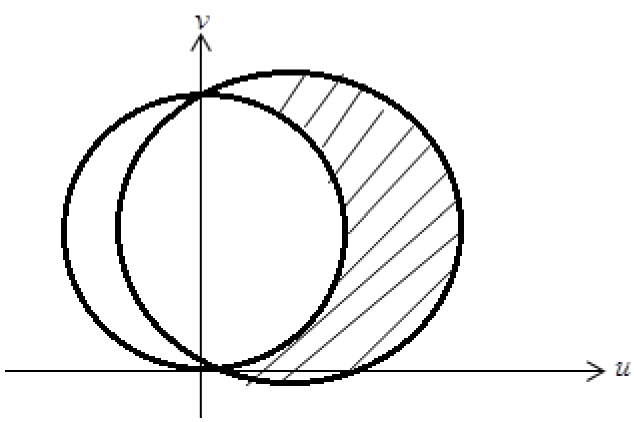
یعنی نگاشت خط $y=-1$ دایره ای به شعاع 0.5 و مرکز $(0,0.5)$ در صفحه $u-v$ است.

برای خط $y=x-1$ داریم $B=-1, C=1,\ D=1$ در اینصورت نگاشت این خط با $w=\frac{1}{z}$ برابر است با:

$$1(u^2+v^2)-u-v+0=0 \to u^2+v^2-u-v=0 \to (u-0.5)^2+(v-0.5)^2=0.5$$

یعنی نگاشت خط $y=x-1$ دایره ای به شعاع $\sqrt{0.5}$ و مرکز $(0.5,0.5)$ در صفحه $u-v$. نکته مهم اینست که هر دو دایره از مرکز مختصات عبور میکنند. این دو نگاشت در زیر رسم شده اند.

محور x که جزو منطقه هاشور خورده است به $z=\frac{1}{x}=u$ نگاشت میشود(حقیقی) یعنی محور u جزو منطقه نگاشت شده میباشد در نتیجه منطقه هاشور خورده در زیر پاسخ است



3 نمره

حل 2–ب–1)

ابتدا با نگاشت $w_1=z+j$ *راس زاویه را به مبدا مختصات انتقال میدهیم. چون زاویه **45** درجه است با* نگاشت $w_2=w_1^4$ ناحیه داده شده را به نیم صفحه بالای محور حقیقی نگاشت میکنیم و در نهایت با نگاشت $w=e^{j\alpha}\frac{w_2-w_0}{w_2-\overline{w}_0}$ ناحیه بدست آمده را به داخل دایره واحد نگاشت میکنیم پس نگاشت نهایی برابر است با: $w=e^{j\alpha}\frac{(z+j)^4-w_0}{(z+j)^4-\overline{w}_0}$ حال باید $z=2$ به $w=0$ منتقل شود در نتیجه داریم:

$$w=e^{j\alpha}\frac{(z+j)^4-w_0}{(z+j)^4-\overline{w}_0}\rightarrow 0=e^{j\alpha}\frac{(2+j)^4-w_0}{(2+j)^4-\overline{w}_0}\rightarrow$$
$$w_0=(2+j)^4=(4+j^2+4j)^2=(3+4j)^2=-7+24j$$

برای بدست آوردن αباید به ازای $z=-j$ داشته باشیم $w=j$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$w=e^{j\alpha}\frac{(z+j)^4-w_0}{(z+j)^4-\overline{w}_0}\rightarrow j=e^{j\alpha}\frac{(-j+j)^4-w_0}{(-j+j)^4-\overline{w}_0}=e^{j\alpha}\frac{w_0}{\overline{w}_0}\rightarrow j=e^{j\alpha}\frac{7-24j}{7+24j}=e^{j\alpha}\frac{\sqrt{7^2+24^2}e^{-\tan^{-1}\frac{24}{7}}}{\sqrt{7^2+24^2}e^{\tan^{-1}\frac{24}{7}}}\rightarrow$$

2 نمره

$$j=e^{j\alpha}.e^{-2\tan^{-1}\frac{24}{7}}\rightarrow e^{j90^\circ}=e^{j(\alpha-2\tan^{-1}\frac{24}{7})}\rightarrow 90^\circ=\alpha-2\tan^{-1}\frac{24}{7}\rightarrow\alpha=90^\circ+2\tan^{-1}\frac{24}{7}=163.7^\circ$$

در نتیجه نگاشت نهایی برابر است با: $w=e^{j163.7^\circ}\dfrac{(z+j)^4+7-24j}{(z+j)^4+7+24j}$

حل 2-ب-2)

ابتدا با نگاشت $w_1=z+j$ راس زاویه را به مبدا مختصات انتقال میدهیم چون زاویه **45** درجه است با نگاشت $w_2=w_1^2$ ناحیه بدست آمده را به ربع صفحه اول نگاشت میکنیم. حال با نگاشت $w=\ln w_2$ ناحیه بدست آمده به به نوار $-\infty<u<\infty$ و $0<v<\dfrac{\pi}{2}$ نگاشت میشود بنابراین نگاشت نهایی برابر است با:

$$w=\ln w_2=\ln w_1^2=2\ln w_1\rightarrow w=2\ln(z+j)$$

1 نمره

حل 2-ج)

با نگاشت $w_1=z+j$ **2** پتانسیل روی صفحه $\phi=0$ صفر و روی صفحه $\phi=\dfrac{\pi}{4}$ **100** در نتیجه معادله پتانسیل به صورت $U=\dfrac{400}{\pi}\phi$ میباشد که در صفحه w_1 داریم: $w_1=z+j=x+j(y+1)=u+jv\rightarrow u=x,\ \ v=y+1$ در نتیجه داریم:

$$U=\frac{400}{\pi}\phi=\frac{400}{\pi}\tan^{-1}\frac{v}{u}=\frac{400}{\pi}\tan^{-1}\frac{y+1}{x}$$

3 نمره

حل 3) این تابع باید در معادله لاپلاس صدق کند در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\rightarrow(24+2d)x^2+(24+2e)x+(2d+12b)y^2+(6+2g)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow 24+2d=0\rightarrow d=-12\qquad 24+2e=0\rightarrow e=-12\qquad 2d+12b=0\rightarrow b=-\frac{1}{6}d=2$$

$$6+2g=0\rightarrow g=-3$$

در نتیجه قسمت حقیقی تابع تحلیلی به صورت زیر خواهد شد:

$$u(x,y)=2x^4+by^4+4x^3-12x^2y^2-12xy^2+3x^2-3y^2+5x+k$$

حال از اصل کوشی ریمان برای بدست آوردن قسمت موهومی تابع استفاده میکنیم:

$$u_x = v_y \to 8x^3 + 12x^2 - 24xy^2 - 12y^2 + 6x + 5 = v_y \to$$

$$v = 8x^3y + 12x^2y - 8xy^3 - 4y^3 + 6xy + 5y + f(x)$$

$$u_y = -v_x \to 8y^3 - 24x^2y - 24xy - 6y = -(24x^2y + 24xy - 8y^3 + 6y + \dot{f})$$

$$\dot{f} = 0 \to f = c \to v(x) = 8x^3y + 12x^2y - 8xy^3 - 4y^3 + 6xy + 5y + c$$

در نتیجه داریم:

$$f(x,y) = u(x,y) + jv(x,y) = u(x,y) = 2x^4 + by^4 + 4x^3 - 12x^2y^2 - 12xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 5x + k +$$
$$j(8x^3y + 12x^2y - 8xy^3 - 4y^3 + 6xy + 5y + c)$$

حال برای محاسبه $f(z)$ کافیست در معادله بالا قرار دهیم: $x = z, \quad y = 0$ در نتیجه داریم:

$$f(z) = 2z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 5z + k + jc \qquad f(0) = 1 \to k + jc = 1 \to k = 1, \quad c = 0 \to$$
$$f(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 5z + 1$$

4 نمره

4- با استفاده از قضیه مانده ها به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) فوریه تابع $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 16x^6}$ ب) $-1 < p < 1$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2}$ پ) $\displaystyle\oint_{|z|=3} z^5 \sin\frac{1}{z-2}\,dz$

<u>حل 4-الف:</u> با استفاده از تعریف تبدیل فوریه داریم:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega x}}{x^2 - 16x^6}dx$$

حال تابع $f(z) = \dfrac{e^{-j\omega z}}{z^2 - 16z^5}$ را در نظر میگیریم. قطبهای حقیقی این تابع عبارتند از: $z = 0,\ z = -0.5, z = 0.5$ و تنها قطب مختلط بالای محور حقیقی $z = 0.5j$ میباشد حال میتوانیم بنویسیم:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega x}}{x^2 - 16x^6}d = 2\pi j[\mathrm{Res} f(z), 0.5j] + \pi j[\mathrm{Res}\ f(z), 0 + \mathrm{Res}\ f(z), -0.5 + \mathrm{Rez}\ f(z), 0.5]$$

حال مانده ها را محاسبه میکنیم:

$$[\mathrm{Res} f(z), 0.5j] = [\mathrm{Res}\frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)}, 0.5j] = \frac{e^{-j\omega(0.5j)}}{(0.5j)^2[-64(0.5j)^3]} = \frac{e^{-0.5\omega}}{-2j}$$

$$[\mathrm{Res} f(z), 0] = \frac{d}{dz} z^2 \frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)}(z=0) = \frac{d}{dz}[\frac{e^{-j\omega z}}{(1-16z^4)}] = \frac{-j\omega(e^{-j\omega z})(1-16z^4) + 64z^3e^{-j\omega z}}{(1-16z^4)^2}(z=0)$$

$$[\mathrm{Res} f(z), 0] = -j\omega \qquad [\mathrm{Res} f(z), -0.5] = [\mathrm{Res}\frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)}, -0.5] = \frac{e^{-j\omega(-0.5)}}{(-0.5)^2[-64(-0.5)^3]} = \frac{e^{0.5j\omega}}{2}$$

$$[\mathrm{Res} f(z), 0.5] = [\mathrm{Res}\frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)}, -0.5] = \frac{e^{-j\omega(0.5)}}{(0.5)^2[-64(0.5)^3]} = -\frac{e^{-0.5j\omega}}{2} \to$$

$$F(\omega)=2\pi j[\mathrm{Re}\, s f(z),0.5j]+\pi j[\mathrm{Re}\, s\ f(z),0+\mathrm{Re}\, s\ f(z),-0.5+\mathrm{Re}\, z\ f(z),0.5]=$$
$$2\pi j(\frac{e^{-0.5\omega}}{-2j})+\pi j(-j\omega+\frac{e^{0.5j\omega}}{2}-\frac{e^{-0.5j\omega}}{2})=-\pi e^{-0.5\omega}+\pi j(-j\omega+j\sin 0.5\omega)=\pi(-e^{-0.5\omega}+\omega-\sin 0.5\omega)$$

3 نمره

ملاحظه میشود که چون تابع زوج است فوریه آن حقیقی است.

حل 4–ب:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\qquad z=e^{j\theta}\to dz=jd\theta e^{j\theta}=jzd\theta\to d\theta=\frac{dz}{jz}\qquad \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})\to$$
$$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\to\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z[1-2p\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+p^2]}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{[z(1+p^2)-p(z^2+1)]}=$$
$$\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{[-pz^2+z(1+p^2)-p)]}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)}$$

قطبهای تابع زیر انتگرال عبارتند $z=p$ **و** $z=\frac{1}{p}$ **که با توجه به شرط** $-1<p<1$ **فقط قطب** $z=p$ **داخل مسیر یعنی دایره واحد است بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:**

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)}=\frac{1}{j}2\pi j[\mathrm{Re}\, z\frac{1}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)},z=p]=2\pi\frac{1}{-p(p-\frac{1}{p})}$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}$$

3 نمره

حل 4–پ:

$$\oint_{|z|=3}z^5\sin\frac{1}{z-2}dz\qquad z-2=t\to\oint_{|z|=3}[t+2]^5\sin\frac{1}{t}dt=$$
$$\oint_{|t+2|=3}[t^5+5t^4+10t^3+10t^2+5t+1]^5(\frac{1}{t}-\frac{1}{3!t^3}+\frac{1}{5!t^5}+....]dt=\oint_{|t+2|=3}[......+(1-\frac{10}{3!}+\frac{5}{5!})\frac{1}{t}+.....]dt=$$
$$2\pi jC_{-1}=2\pi j(1-\frac{10}{3!}+\frac{5}{5!})=2\pi j(1-\frac{5}{3}+\frac{1}{24})=-\frac{5\pi j}{4}$$

3 نمره

حل 5–الف:

$$f(z)=\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{0.5}{1-z}-\frac{0.5}{1+z}=\frac{1}{(z-2j)+2j}+\frac{0.5}{1-2j-(z-2j))}-\frac{0.5}{1+2j+(z-2j)}=$$
$$\frac{1}{2j}\frac{1}{1+\frac{z-2j}{2j}}+\frac{0.5}{1-2j}\frac{1}{1-\frac{z-2j}{1-2j}}-\frac{0.5}{1+2j}\frac{1}{1+\frac{z-2j}{1+2j}}$$

اگر $|z-2j|<2$ در اینصورت $\left|\frac{z-2j}{2j}\right|<1 \to |z-2j|<\sqrt{5}$ در اینصورت $\left|\frac{z-2j}{1-2j}\right|<1 \to |z-2j|<\sqrt{5}$ و $\left|\frac{z-2j}{1+2j}\right|<1 \to |z-2j|<\sqrt{5}$ در اینصورت داریم:

$$f(z)=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-2j}{2j})^n+\frac{0.5}{1-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-2j}{1-2j})^n-\frac{0.5}{1+2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-2j}{1+2j})^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(2j)^{-n-1}(-1)^n+0.5(1-2j)^{-n-1}-0.5(-1)^n(1+2j)^{-n-1}](z-2j)^n \qquad |z-2j|<2$$

1 نمره

اگر $2<|z-2j|<\sqrt{5}$ در اینصورت داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{0.5}{1-z}-\frac{0.5}{1+z}=\frac{1}{z-2j+2j}+\frac{0.5}{1-(z-2j+2j)}-\frac{0.5}{1+(z-2j+2j)}=$$

$$\frac{1}{z-2j}\frac{1}{1+\frac{2j}{z-2j}}+\frac{0.5}{1-2j}\frac{1}{1-\frac{z-2j}{1-2j}}-\frac{0.5}{1+2j}\frac{1}{1+\frac{z-2j}{1+2j}}=\frac{1}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2j}{z-2j})^n+\frac{0.5}{1-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-2j}{1-2j})^n-$$

$$\frac{0.5}{1+2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-2j}{1+2j})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2j)^n(z-2j)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[0.5(1-2j)^{-n-1}-0.5(-1)^n(1+2j)^{-n-1}](z-2j)^n$$

1 نمره

اگر $|z-2j|>\sqrt{5}$ داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z-2j}\frac{1}{1+\frac{2j}{z-2j}}-\frac{0.5}{z-2j}\frac{1}{1-\frac{1-2j}{z-2j}}-\frac{0.5}{z-2j}\frac{1}{1+\frac{1+2j}{z-2j}}=\frac{1}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2j}{z-2j})^n+$$

$$-\frac{0.5}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-2j}{z-2j})^n-\frac{0.5}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1+2j}{z-2j})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(-2j)^n-0.5(1-2j)^n+(-1-2j)^n](z-2j)^{-n-1}$$

1 نمره

حل 5–ب

$$f(z)=z^2e^z=(z-2+2)^2e^{(z-2+2)}=[(4+4(z-2)+(z-2)^2]e^2[1+(z-2)+\frac{1}{2!}(z-2)^2+.....\frac{1}{n!}(z-2)^n+...]$$

$$f(z)=z^2e^z=e^2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{n!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!})(z-2)^n=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}(z-2)^n$$

$$f(3)=(3)^2e^3=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}(3-2)^n\to 9e^3=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}=9e$$

از روی بسط بالا معلوم است که: $e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-2)^n\to C_n=e^2\frac{n^2+3n+4}{n!}$ در نتیجه مشتق دهم تابع در $z=2$ برابر است با: $f^{(10)}=10!C_{10}=10!e^2\frac{10^2+30+4}{10!}=134e^2$

3 نمره

حل 5–ج

برای هر دنباله شعاع همگرایی را بدست می آوریم. برای دنباله اول داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}<1\right|<1=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}}{\frac{3^n}{n^3}\frac{1}{(z-1)^n}}\right|<1\to 3\left|\frac{1}{z-1}\right|<1\to |z-1|>3$$

برای دنباله دوم داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}<1\to \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{z-1}\right|<1\to |z-1|>2$$

که اشتراک دو شعاع همگرای $|z-1|>3$ میباشد.

3 نمره

موفق باشید

محمود محمدطاهری تیرماه 1401