حل چند مسئله نگاشت

1–ناحیه $|z-1|<1$ تحت $w=\dfrac{z-2}{z}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

<u>حل **1**</u>: ابتدا تحت نگاشت $w_1=\dfrac{1}{z}$ مسئله را حل میکنیم:

$$w=\frac{z-2}{z}\rightarrow wz=z-2\rightarrow z(1-w)=2\rightarrow z=\frac{2}{1-w}\rightarrow z-1=\frac{1+w}{1-w}\rightarrow |z-1|=\left|\frac{1+w}{1-w}\right|<1\rightarrow$$

$$\left|\frac{(u+1)+jv}{(1-u)-jv}\right|<1\rightarrow\sqrt{(u+1)^2+v^2}<\sqrt{(1-u)^2+v^2}\rightarrow u^2+1+2u+v^2<u^2+1-2u+v^2\rightarrow 4u<0$$
$$\rightarrow u<0$$

بنابراین تحت $w=\dfrac{z-2}{z}$ ناحیه $|z-1|<1$ به قسمت سمت چپ محور موهومی نگاشت میشود

2–نگاشتی پیدا کنید که ناحیه $D:\{\mathrm{Re}(z)>1,\ 0<Arg(z)<\dfrac{\pi}{3}\}$ را به داخل دایره واحد به مرکز مبدا برده بطوریکه نقطه $z=2+j$ به مرکز دایره و نقطه $z=1$ به $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$ نگاشت شود.

<u>حل **2**</u>: ابتدا با نگاشت $w_1=z-1$ شکل را به مبدا منتقل میکنیم. سپس با نگاشت $w_2=w_1^3$ ناحیه را به نیم صفحه بالای محور حقیقی تبدیل میکنیم و سپس با نگاشت: $w=e^{j\alpha}\dfrac{w_2-t}{w_2-\bar{t}}$ ناحیه را به داخل دایره واحد میبریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$w=e^{j\alpha}\frac{w_1^3-t}{w_1^3-\bar{t}}=e^{j\alpha}\frac{(z-1)^3-t}{(z-1)^3-\bar{t}}$$

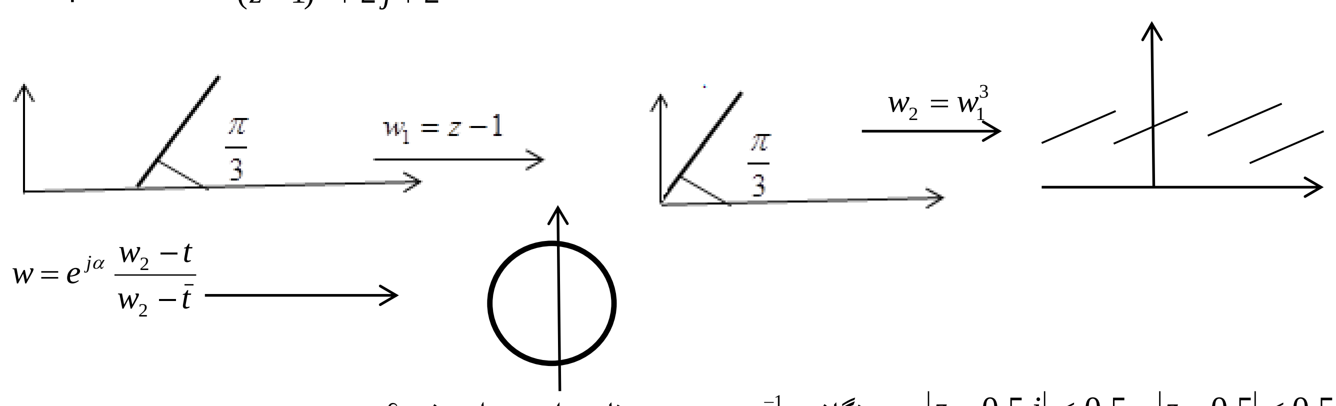
حالا باید $z=2+j$ را به مرکز دایره واحد یعنی $w=0$ نگاشت کنیم یعنی:

$$w=0=e^{j\alpha}\frac{(2+j-1)^3-t}{(2+j-1)^3-\bar{t}}\rightarrow t=(1+j)^3=1+3j^2+3j+j^3=1-3+3j-j=2j-2\rightarrow t=2j-2$$

$$w=e^{j\alpha}\frac{(z-1)^3-t}{(z-1)^3-\bar{t}}=e^{j\alpha}\frac{(z-1)^3-2j+2}{(z-1)^3+2j+2}\qquad z=1\rightarrow w=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)=e^{-j\frac{\pi}{4}}=e^{j\alpha}\frac{(1-1)^3+2-2j}{(1-1)^3+2+2j}$$

$$e^{-j\frac{\pi}{4}}=e^{j\alpha}\frac{1-j}{1+j}=e^{j\alpha}\frac{(1-j)(1-j)}{1-j^2}\rightarrow e^{-j\frac{\pi}{4}}=e^{j\alpha}\frac{-2j}{2}\rightarrow e^{-j\frac{\pi}{4}}=-je^{j\alpha}=e^{j(\alpha-\frac{\pi}{2})}\rightarrow-\frac{\pi}{4}=\alpha-\frac{\pi}{2}\rightarrow$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4}\rightarrow w=e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{(z-1)^3-2j+2}{(z-1)^3+2j+2}$$



3–ناحیه بین $|z-0.5|<0.5$ و $|z-0.5j|<0.5$ تحت نگاشت $w=z^{-1}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل 3

از روش نگاشت تابع $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D$ به تابع $D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A$ تحت $w=z^{-1}$ هم استفاده میکنیم در اینصورت برای دایره $|z-0.5|=0.5$ داریم:

$$|z-0.5|=0.5=|(x-0.5)+jy|=0.5\to\sqrt{(x-0.5)^2+y^2}=0.5\to(x-0.5)^2+y^2=0.25\to$$

$$x^2+y^2-x=0\to A=1,B=-1\quad C=0\quad D=0\to D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=-u+1=0\to u=1$$

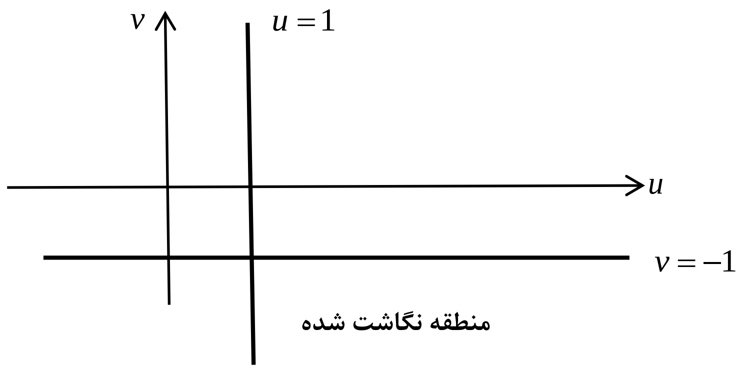
و برای دایره $|z-0.5j|=0.5$ داریم:

$$|z-0.5j|<0.5=|x+(y-0.5)|=0.5\to\sqrt{x^2+(y-0.5)^2}=0.5\to(y-0.5)^2+x^2=0.25\to$$

$$y^2+x^2-y=0\to A=1,B=0\quad C=-1\quad D=0\to D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=v+1=0\to v=-1$$

یعنی دایره ها به دو خط $u=1$ و $v=-1$ نگاشت میشوند. حالا یک نقطه در ناحیه مشترک دو دایره که میتواند نقطه $z=0.25+j0.25$ انتخاب میکنیم که نگاشت آن میشود:

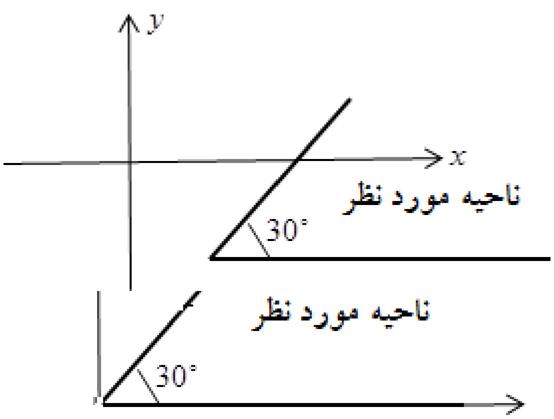
$$w=\frac{1}{0.25+j0.25}=\frac{4}{1+j}=2-2j\to u=2>1\quad v=-2<-1$$



4- ناحیه بین $y=-2$ و خط $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-(2+\frac{1}{\sqrt{3}})$ تحت چه نگاشتی به ناحیه $|z|<1$ تبدیل میشود.

حل **4**: ناحیه بین $y=-2$ و خط $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-(2+\frac{1}{\sqrt{3}})$ در زیر رسم شده است. زاویه این ناحیه **30** درجه و راس آن نقطه $z=1-j2$ میباشد

حال ابتدا با نگاشت $w_1=z-(1-j2)$ راس را به مبدا منتقل میکنیم. پس تحت نگاشت $w_1=z-(1-j2)$ ناحیه بالا به صورت زیر



تبدیل میشود. حال تحت نگاشت $w_2=w_1^6$ ناحیه بدست آمده به نیم صفحه بالای صفحه w_2 تبدیل میشود و نهایتا تحت نگاشت $w=e^{j\alpha}\frac{w_2-w_0}{w_2-\overline{w}_0}$ ناحیه نیم صفحه بالا به داخل دایره واحد میبرد در نتیجه نگاشت نهایی به صورت $w=e^{j\alpha}\frac{[(z-1+j2)]^6-w_0}{[(z-1+j2)]^6-\overline{w}_0}$ دو مجهول w_0 و α را میتوان با انتقال دو نقطه معین از صفحه z به دو نقطه معین در صفحه W بدست آورد.

5- خطوط $x=c$ و $y=k$ تحت $w=\cos z$ به چه ناحیه ای نگاشت میشوند؟

حل **5**:

$$w=\cos z=\cos(x+jy)=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y\rightarrow u=\cos x\cosh y \quad v=-\sin x\sinh y$$

$$x=c\rightarrow u=\cos c\cosh y \quad v=-\sin c\sinh y\rightarrow \cosh y=\frac{u}{\cos c} \quad \sinh y=-\frac{v}{\sin c}\rightarrow$$

$$\cosh^2 y-\sinh^2 y=\frac{u^2}{\cos^2 c}-\frac{v^2}{\sin^2 c}=1\rightarrow x=c\rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 c}-\frac{v^2}{\sin^2 c}=1$$

یعنی نگاشت $x=c$ تحت $w=\cos z$ هذلولی است. حال نگاشت $y=k$ را تحت $W=\cos z$ بدست می آوریم:

$$W=\cos z=\cos(x+jy)=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y\rightarrow u=\cos x\cosh y \quad v=-\sin x\sinh y$$

$$y=k\rightarrow u=\cos x\cosh k \quad v=-\sin x\sinh k\rightarrow \cos x=\frac{u}{\cosh k} \quad \sin x=-\frac{v}{\sinh k}\rightarrow$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=\frac{u^2}{\cosh^2 k}+\frac{v^2}{\sinh^2 k}=1\rightarrow y=k\rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 k}+\frac{v^2}{\sinh^2 k}=1$$

یعنی نگاشت $y=k$ تحت $W=\cos z$ بیضی است.

6- ناحیه $0\le \mathrm{Re}(z)\le\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}(z)>0$ تحت چه نگاشت $w=f(z)$ به ناحیه $0\le \mathrm{Im}(w)\le\frac{\pi}{2}$ تبدیل میشود.

حل **6**: میدانیم ناحیه $0\le Re(z)\le\frac{\pi}{2},\ Im(z)>0$ یعنی $0\le x\le\frac{\pi}{2}, y>0$ تحت نگاشت $w_1=\sin z$ به صورت زیر تبدیل میشود:

$$W_1=\sin(x+jy)=\sin x\cosh y+j\cos x\sinh y=u_1+jv_1 \qquad 0\le x\le\frac{\pi}{2}, y>0\rightarrow 0<u_1<\infty \quad 0<v_1<\infty$$

یعنی نگاشت $w_1=\sin z$ ناحیه $0\le x\le\frac{\pi}{2}, y>0$ را به نیمه بالای صفحه w_1 تبدیل میکند. در این نیمه بالای صفحه w_1 داریم:

$$W_1=re^{j\theta} \qquad 0<r<\infty \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

حال نگاشت $w=\ln w_1$ را در نظر میگیریم:

$$W=\ln W_1=\ln re^{j\theta}=\ln r+j\theta\rightarrow -\infty<u=Re(W)=\ln r<\infty \qquad 0<v=Im(W)=\theta<\frac{\pi}{2}$$

پس نگاشت $w=\ln(\sin z)$ ناحیه $0\le Re(z)\le\frac{\pi}{2},\ Im(z)>0$ را به نوار $0\le Im(W)\le\frac{\pi}{2}$ تبدیل میکند.

7- تحت نگاشت $w=e^{jz}\sin z$ ناحیه $\mathrm{Im}(z)>\frac{1}{2}\ln 2$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل **7**:

$$w=e^{jz}\sin z=e^{j(x+jy)}\sin(x+jy)=e^{-y}e^{jx}(\sin x\cosh y+j\cos x\sinh y)=$$
$$e^{-y}(\cos x+j\sin x)(\sin x\cosh y+j\cos x\sinh y)=e^{-y}(\cos x\sin x\cosh y-\sin x\cos x\sinh y)+$$
$$e^{-y}j(\cos^2 x\sinh y+\sin^2 x\cosh y) \qquad \mathrm{Im}(z)=y>\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}\rightarrow e^y>e^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}\rightarrow e^{2y}>2$$
$$u=e^{-y}(\cos x\sin x\cosh y-\sin x\cos x\sinh y)=0.5e^{-y}\sin 2x(\cosh y-\sinh y)=0.5e^{-y}\sin 2x(e^{y})=0.5\sin 2x$$
$$\rightarrow \sin 2x=2u \qquad v=e^{-y}(\cos^2 x\sinh y+\sin^2 x\cosh y)=e^{-y}[\cos^2 x(e^y-e^{-y})+\sin^2 x(e^y-e^{-y})]=$$
$$e^{-y}[e^y(\cos^2 x+\sin^2 x)-e^{-y}(\cos^2 x-\sin^2 x)]\rightarrow v=e^{-y}[e^y(1)-e^{-y}\cos 2x]=(1-e^{-2y}\cos 2x)\rightarrow$$
$$\cos 2x=(1-2v)e^{2y} \qquad \sin 2x=2u\rightarrow$$

$$\sin^2 2x+\cos^2 2x=1=4u^2+e^{4y}(1-2v)^2 \qquad e^{2y}>2\to e^{4y}>4\to$$
$$1=4u^2+e^{4y}(1-2v)^2>4u^2+4(1-2v)^2=4u^2+16v^2-16v+4\to$$
$$4u^2+16v^2-16v+4<1\to\frac{u^2}{0.25}+\frac{(v-0.5)^2}{0.0625}<1$$

پس ناحیه $\operatorname{Im}(z)>\frac{1}{2}\ln 2$ داخل بیضی که مختصات مرکز آن $(0,0.5j)$بوده و اقطارش $2b=0.5$ $\quad 2a=1$ در صفحه w میباشد قرار میگیرد

8- تحت نگاشت $w=\tanh z$ ناحیه نیم صفحه سمت چپ محور موهومی به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل **8**:

$$w=\tanh z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\to\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}\to w(e^{2z}+1)=e^{2z}-1\to e^{2z}=\frac{1+w}{1-w}=e^{2x}e^{j2y}\to$$
$$\left|\frac{1+w}{1-w}\right|=\left|\frac{w+1}{w-1}\right|=e^{2x}$$

چون برای سمت چپ محور موهومی $x<0$ پس $e^{2x}<1$ پس خواهیم داشت:

$$\left|\frac{w+1}{w-1}\right|<1\to|w+1|<|w-1|\to\sqrt{(u+1)^2+v^2}<\sqrt{(u-1)^2+v^2}\to 2u<-2u\to u<0$$

یعنی سمت چپ محور موهومی در صفحه z به سمت چپ محور موهومی در صفحه w نگاشت میشود.

9- تحت نگاشت $w=\cos z$ منحنی $y=Ln[\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}]$ به چه منحنی ای تبدیل میشود؟

حل **9**:

$$y=Ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})\to e^y=\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\to(e^y-\sin x)^2=1+\sin^2 x\to$$
$$e^{2y}-2e^y\sin x+\sin^2 x=1+\sin^2 x\to\sin x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\sinh y\to\sin x=\sinh y$$
$$w=\cos z=\cos(x+jy)=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y=\cos x\cosh y-j\sin^2 x$$
$$u=\cos x\cosh y\quad v=-\sin^2 x\to u^2+v^2=\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^4 x=\cos^2 x(1+\sinh^2 y)+\sin^4 x=$$
$$\cos^2 x(1+\sin^2 x)+\sin^4 x=(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)+\sin^4 x=1\to u^2+v^2=1$$

پس نگا شت منحنی $y=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$ در صفحه z دایره به مرکز مبدا مخت صات و شعا ع **1** در صفحه w می شود که چون $v=-\sin^2 x$ همواره منفی است پس نیمدایره ای که در زیر محور حقیقی در صفحه w است جواب مسئله است.

10-تحت نگاشت $w=\sin z$ خط $x=\frac{\pi}{6}$ به چه شکلی نگاشت میشود.

حل **10**:

$$w=\sin w=\sin(x+jy)=\sin x\cosh y+j\cos x\sinh y=\sin\frac{\pi}{6}\cosh y+j\cos\frac{\pi}{6}\sinh y$$

$$w=\frac{1}{2}\cosh y+j\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh y\to u=\frac{1}{2}\cosh y\qquad v=\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh y\to\cosh y=2u\qquad\sinh y=\frac{2v}{\sqrt{3}}$$
$$\cosh^2 y-\sinh^2 y=1\to 4u^2-\frac{4v^2}{3}=1\to\frac{u^2}{0.25}-\frac{v^2}{0.75}=1$$

پس نگاشت یک هذلولی است.

11- تحت نگاشت $w = z - \frac{2}{z}$ خط $\theta = \frac{\pi}{4}$ و دایره به شعاع a $(z = ae^{j\theta})$ به چه شکلی نگاشت میشوند؟

حل **11**:

$$w = z - \frac{2}{z} = re^{j\theta} - \frac{2}{r}e^{-j\theta} = (r - \frac{2}{r})\cos\theta + j(r + \frac{2}{r})\sin\theta$$

$$u = (r - \frac{2}{r})\cos\theta = (r - \frac{2}{r})\cos\frac{\pi}{4} = (r - \frac{2}{r})\frac{1}{\sqrt{2}} \to r - \frac{2}{r} = \sqrt{2}u \to r^2 + \frac{4}{r^2} - 4 = 2u^2$$

$$v = (r + \frac{2}{r})\sin\theta = (r + \frac{2}{r})\sin\frac{\pi}{4} \to r + \frac{2}{r} = \sqrt{2}v \to r^2 + \frac{4}{r^2} + 4 = 2v^2 \to v^2 - u^2 = 4$$

پس نگاشت یک هذلولی است. دایره به شعاع $r = a$ به شکل زیر نگاشت میشود:

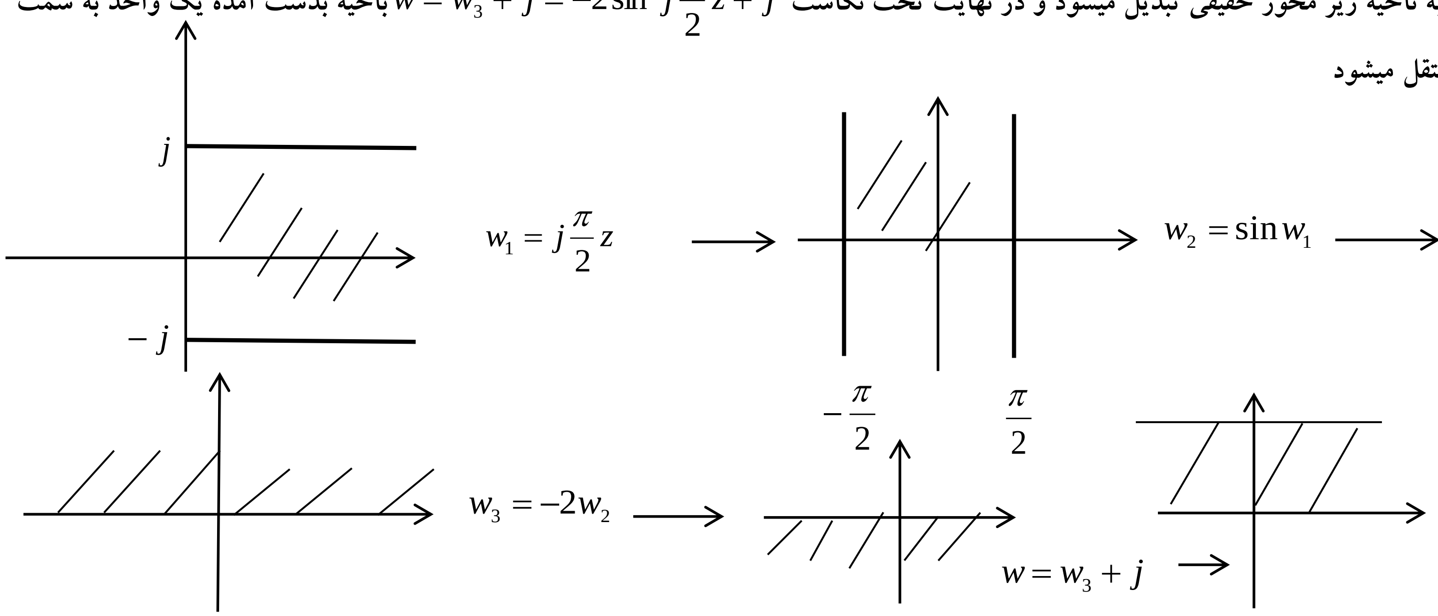
$$u = (a - \frac{2}{a})\cos\theta \qquad v = (a + \frac{2}{a})\sin\theta \to \cos\theta = \frac{u}{(a - \frac{2}{a})} \qquad \sin\theta = \frac{v}{(a + \frac{2}{a})} \to$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \to \frac{u^2}{(a - \frac{2}{a})^2} + \frac{v^2}{(a + \frac{2}{a})^2} = 1$$

یعنی دایره به شعاع a به یک بیضی نگاشت میشود.

12-ناحیه بین $-j < y < j$ $x > 0$ تحت نگاشت $w = -2\sin j\frac{\pi}{2}z + j$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل **12**: ابتدا تحت نگاشت $w_1 = j\frac{\pi}{2}z$ ناحیه داده شده به $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(w_1) < \frac{\pi}{2}$ و $-\infty < \mathrm{Im}(w_1) < \infty$ مطابق شکل زیر میبرد. سپس تحت نگاشت $w_2 = \sin w_1 = \sin j\frac{\pi}{2}z$ ناحیه بدست آمده به ناحیه بالای محور حقیقی نگاشت میشود. حال تحت $w_3 = -2w_2$ ناحیه بدست آمده به ناحیه زیر محور حقیقی تبدیل میشود و در نهایت تحت نگاشت $w = w_3 + j = -2\sin j\frac{\pi}{2}z + j$ ناحیه بدست آمده یک واحد به سمت بالا منتقل میشود



13-نگاشت ناحیه $|z-1|\geq 1$ را تحت $w=\dfrac{jz}{z-1}$ بدست آورید.

حل **13**: ابتدا z را بر حسب w بدست می اوریم:

$$w=\frac{jz}{z-1}\to w(z-1)=jz\to z(w-j)=w\to z=\frac{w}{w-j}\to z-1=\frac{j}{w-j}\to |z-1|=\left|\frac{j}{w-j}\right|\geq 1\to$$

$$|j|\geq |w-j|\to 1\geq \sqrt{u^2+(v-1)^2}\to u^2+v^2-2v\leq 0\to u^2+(v-1)^2-1\leq 0\to u^2+(v-1)^2\leq 1$$

یعنی داخل دایره ای به شعاع واحد و مرکز $(0,1)$ در صفحه w نگاشت میشود.

14- دایره یکه با نگاشت زیر در صفحه w به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

$$w=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{e^{\alpha}}+\frac{e^{\alpha}}{z}\right)\qquad \alpha>0$$

حل **14**: دایره یکه با $z=e^{j\theta}$ بیان میشود حال داریم:

$$w=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{e^{\alpha}}+\frac{e^{\alpha}}{z}\right)\to \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\theta}}{e^{\alpha}}+\frac{e^{a}}{e^{j\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{j(\theta+j\alpha)}+e^{-j(\theta+j\alpha)}\right)=\cos(\theta+j\alpha)=\cos\theta\cosh\alpha-j\sin\theta\sinh\alpha$$

$$u=\cos\theta\cosh\alpha\qquad v=-\sin\theta\sinh\alpha\to \cos\theta=\frac{u}{\cosh\alpha}\qquad \sin\theta=-\frac{v}{\sinh\alpha}\to \frac{u^2}{\cosh^2\alpha}+\frac{v^2}{\sinh^2\alpha}=1$$

بنابراین دایره واحد به بیضی نگاشت میشود. البته چون $\alpha>0$ است ربع دایره یکه در ناحیه **1** به ربع بیضی ناحیه چهارم نگاشت میشود و ربع دایره یکه در ناحیه **2** به ربع بیضی در ربع سوم نگاشت میشود.

15-منحنی $xy=1$ تحت نگاشت $w=(1-j)z+2j$ به چه شکلی تبدیل میشود؟

حل **15**: نگاشت را به صورت زیر مینویسیم:

$$w=(1-j)z+2j=(1-j)(x+jy)+2j=(x+y)+j(2+y-x)\to\begin{cases}u=x+y\\ v=2+y-x\end{cases}\to\begin{cases}x=\dfrac{u+v-2}{2}\\ y=\dfrac{u-v+2}{2}\end{cases}$$

$$xy=1\to\left(\frac{u+v-2}{2}\right)\left(\frac{u-v+2}{2}\right)=1\to\frac{u^2-(v-2)^2}{4}=1\to\frac{u^2}{4}-\frac{(v-2)^2}{4}=1$$

یعنی به یک هذلولی نگاشت میشود.

16–دایره $|z|=2$ تحت نگاشت $w=z+\dfrac{2}{z}$ به چه شکلی تبدیل میشود؟

حل **16**:

$$|z|=2\to x^2+y^2=4\to w=z+\frac{2}{z}=x+jy+\frac{2}{x+jy}=x+jy+\frac{2(x-jy)}{x^2+y^2}$$

$$w=\left(x+\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+j\left(y-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\left(x+\frac{2x}{4}\right)+j\left(y-\frac{2y}{4}\right)=\frac{3x}{2}+j\frac{y}{2}=u+jv\to$$

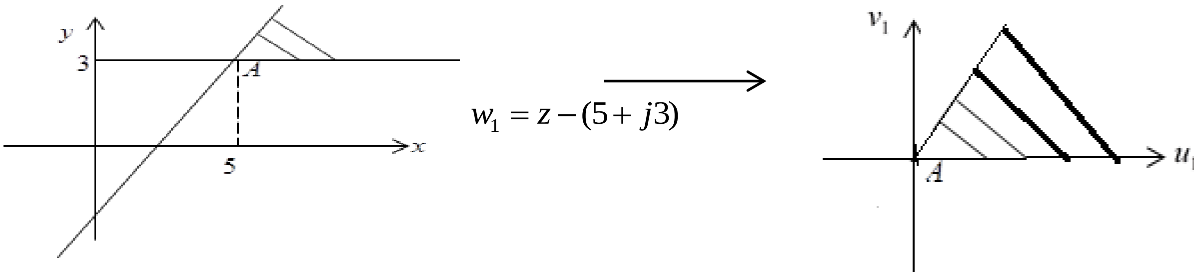
$$u=\frac{3x}{2}\qquad v=\frac{y}{2}\to x=\frac{2u}{3}\qquad y=2v\to x^2+y^2=4=\left(\frac{2u}{3}\right)^2+(2v)^2\to\frac{u^2}{9}+\frac{v^2}{1}=1$$

که معادله یک بیضی است.

17– نگاشتی با معادله $w=f(z)$ را بیابید که ناحیه $3\le y\le x-2$ را

الف- به داخل دایره واحد بنگارد.   ب**2**-به ناحیه $\mathrm{Im}[w]=\frac{\pi}{2}$ $-\infty<\mathrm{Re}(w)<\infty$ بنگارد

<u>حل **17**-الف:</u> ناحیه $3\le y\le x-2$ در زیر رسم شده است: ابتدا با نگاشت $w_1=z-(5+j3)$ نقطه A را به مبدا منتقل میکنیم



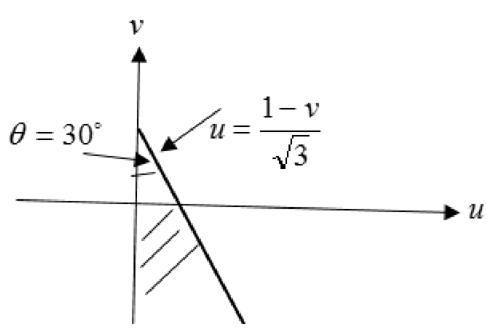
حال زاویه راس A است **45** درجه که با نگاشت $w_2=w_1^4$ به نیم صفحه بالای محور حقیقی نگاشت میشود حال این نیم صفحه با نگاشت $w=e^{j\alpha}\frac{w_2-z_0}{w_2-\bar{z}_0}=e^{j\alpha}\frac{(z-5-j3)^4-z_0}{(z-5-j3)^4-\bar{z}_0}$ به داخل دایره واحد نگاشت میشود.

<u>حل **17**-ب:</u> اگر بعد از نگاشت $w_1=z-(5+j3)$ نگاشت $w_2=w_1^2$ را انجام دهیم صفحه مختلط w_1 به ربع صفحه مثبت مختصات نگاشت میشود یعنی $0<Arg(w_2)<\frac{\pi}{2}$ و $0<|w_2|<\infty$. حال با نگاشت $w=\ln w_2=\ln|w_2|+jArg(w_2)$ صفحه w_2 را به ناحیه $0<\mathrm{Im}[w]=Arg(w_2)<\frac{\pi}{2}$ $-\infty<\mathrm{Re}(w)=|w_2|<\infty$ نگاشت میشود یعنی نگاشت نهایی برابر است با:

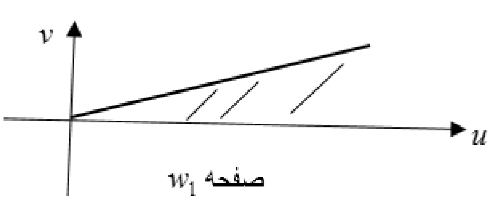
$$w=\ln w_2=\ln w_1^2=\ln[z-(5+j3)]^2=2\ln[z-(5+j3)]$$

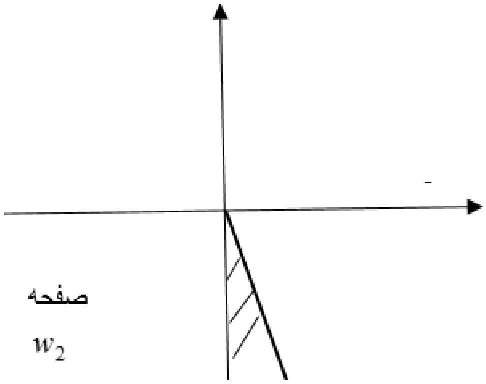
18– نگاشتی بیابید که نیم صفحه بالای محور حقیقی در صفحه z را به ناحیه $0\le u\le\frac{1-v}{\sqrt{3}}$ تبدیل کند

<u>**حل 18:**</u> ناحیه خواسته شده در زیر رسم شده است



ناحیه اولیه بالای محور حقیقی است که با نگاشت $w_1=z^{\frac{1}{6}}$ به ناحیه تبدیل زیر تبدیل میشود.(زاویه شکل در صفحه w_1 برابر**30** درجه است).





حال با نگاشت $w_2 = w_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jw_1$ شکل بالا به شکل زیر تبدیل میشود

سپس با نگاشت $w = w_2 + j$ نگاشت نهایی خواسته شده حاصل میشود پس نگاشت به صورت زیر است

$$w = -jz^{\frac{1}{6}} + j = j(1 - z^{\frac{1}{6}})$$

19- تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ ناحیه بین دو منحنی $\left|z - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ و $\left|z + \frac{j}{6}\right| = \frac{1}{6}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل 19: برای $\left|z - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ داریم:

$$\left|z - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \rightarrow \left|(x - \frac{1}{4}) + jy\right| = \frac{1}{4} \rightarrow (x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16} \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x = 0 \rightarrow A = 1 \;\; B = -\frac{1}{2} \quad C = D = 0$$

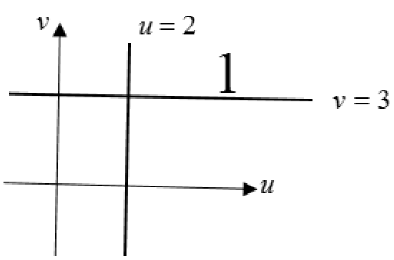
$$\rightarrow D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \rightarrow 0(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}u - 0v + 0 = 0 \rightarrow u = 2$$

. برای $\left|z + \frac{j}{6}\right| = \frac{1}{6}$ داریم:

$$\left|z + \frac{j}{6}\right| = \frac{1}{6} \rightarrow \left|x + j(y + \frac{1}{6})\right| = \frac{1}{6} \rightarrow x^2 + (y + \frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36} \rightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{3}y = 0 \rightarrow A = 1 \;\; C = \frac{1}{3} \quad B = D = 0$$

$$\rightarrow D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \rightarrow 0(u^2 + v^2) + 0u - \frac{1}{3}v + 0 = 0 \rightarrow v = 3$$

یعنی ناحیه بین دو دایره به ناحیه بین دو خط $u = 2$ و $v = 3$ حال برای اینکه بدانیم در کدام از چهار ناحیه است نقطه ای در ناحیه بین دو دایره یعنی نقطه $(\frac{1}{8} - \frac{j}{12})$ انتخاب میکنیم که نگاشت آن برابر است با:

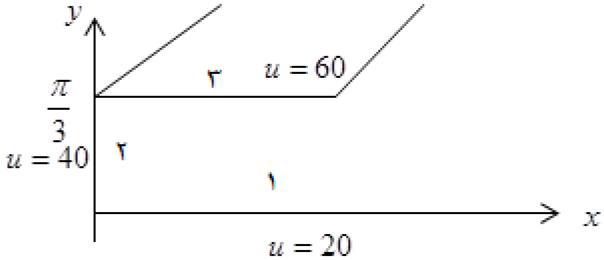


$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{8} - \frac{j}{12}} = \frac{24}{3 - 2j} = \frac{24(3 + 2j)}{13} = 5.54 + j3.7$$

یعنی ناحیه **1** جواب است

20-با استفاده ان نگاشت $w = \cosh 3z$ تابع پتانسیل بین دو صفحه موازی $y = 0$ و $y = \frac{\pi}{3}$ را با شرایط مرزی نشان داده شده بدست آورید.

حل 20: تابع را به صورت زیر مینویسیم:

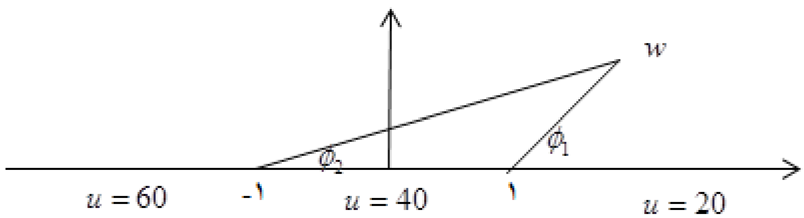


$$u = \cosh 3x \cos 3y \qquad v = \sinh 3x \sin 3y \qquad 1 \rightarrow (y = 0, \quad 0 < x < \infty) \rightarrow \quad v = 0 \qquad 1 < u < \infty$$

$$2 \rightarrow (x = 0 \quad 0 < y < \frac{\pi}{3}) \rightarrow v = 0 \qquad -1 < u < 1 \qquad 3 \rightarrow y = \frac{\pi}{3} \quad 0 < x < \infty \rightarrow v = 0 \qquad -\infty < u < -1$$

بنابراین سه صفحه نشان داده شده با **1** و **2** و **3** به صفحه $v = 0$ با شرایط مرزی نشان داده شده زیرتبدیل میشوند

حال تابع پتانسیل را میتوان به صورت زیر نوشت:



$$U = A\phi_1 + B\phi_2 + C \qquad U(\phi_1 = \phi_2 = 0) = 20 \to C = 20$$

$$U(\phi_1 = \pi, \quad \phi_2 = 0) = 40 \to \pi A + 20 = 40 \to A = \frac{20}{\pi} \qquad U(\phi_1 = \phi_2 = \pi) = 60 \to B = \frac{20}{\pi} \to$$

$$U = \frac{20}{\pi}(\phi_1 + \phi_2 + \pi) \qquad \to \frac{\pi U}{20} = \phi_1 + \phi_2 + \pi \to \tan\frac{\pi U}{20} = \tan(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tan\phi_1 + \tan\phi_2}{1 - \tan\phi_1 + \tan\phi_2} \to$$

$$\tan\phi_1 = \frac{v}{u-1} \qquad \tan\phi_2 = \frac{v}{u+1} \to \tan(\phi_1 + \phi_2) = \frac{2uv}{u^2 - v^2 - 1} = \tan\frac{\pi U}{20} \to U = \frac{20}{\pi}\tan^{-1}\frac{2uv}{u^2 - v^2 - 1} =$$

$$U = \frac{20}{\pi}\tan^{-1}\frac{2\cosh 3x \cos 3y \sinh 3x \sin 3y}{(\cosh 3x \cos 3y)^2 - (\sinh 3x \sin 3y)^2 - 1}$$

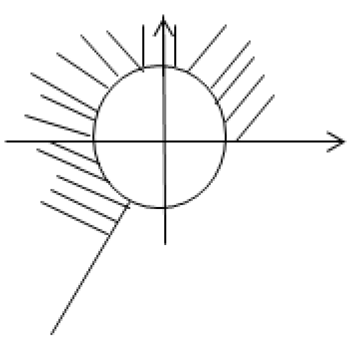
21- ناحیه $D = \left\{ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \right\}$ با نگاشت $w = e^{3z - \bar{z}}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

<u>حل 21</u>: رابطه را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$w = e^{3z - \bar{z}} = e^{3(x+jy)-(x-jy)} = e^{2x}.e^{4jy} \to |w| = e^{2x} \qquad x \geq 0 \to 1 \leq |w| < \infty$$

$$\angle w = 4y \qquad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \to 0 \leq \angle w \leq \frac{4\pi}{3}$$

بنابراین ناحیه به خارج دایره ای به شعاع واحد در زاویه بین صفر و **120** درجه نگاشت میشود که در زیر به صورت هاشور خورده نشان داده شده است



22- ناحیه $|z-1| < 2|z|$ با نگاشت $w = \frac{z-1}{z+1}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

<u>حل 22</u>:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \to wz + w = z - 1 \to z(1-w) = 1 + w \to z = \frac{1+w}{1-w} \qquad |z-1| < 2|z| \to \left|\frac{1+w}{1-w} - 1\right| < 2\left|\frac{1+w}{1-w}\right| \to$$

$$\left|\frac{2w}{1-w}\right| < 2\left|\frac{1+w}{1-w}\right| \to |w| < |1+w|$$

روی خط $u=-0.5$ شرط $|w|=|1+w|$ برقرار است. بنابراین $|w|<|1+w|$ سمت چپ خط $u=-0.5$ میباشد. یعنی ناحیه داده شده $|z-1|<2|z|$ تحت نگاشت فوق ناحیه به سمت راست خط $u=-0.5$ در صفحه w تصویر میشود. میتوان مسئله را به صورت زیر هم اثبات کرد:

$$|w|<|1+w|\to\sqrt{u^2+v^2}<\sqrt{(u+1)^2+v^2}\to u^2+v^2<u^2+1+2u+v^2\to 1+2u>0\to u>-0.5$$

یعنی به سمت راست خط $u=-0.5$ نگاشت میشود.

23- نگاشت $|z-j|=1$ تحت $w=\dfrac{j}{z}$ را بدست آورید

حل 23:

داریم:

$$w=\frac{j}{z}\to z=\frac{j}{w}\qquad |z-j|=1\to\left|\frac{j}{w}-j\right|=1\to|j|\left|\frac{1-w}{w}\right|=1\to\left|\frac{1-w}{w}\right|=1\to|w-1|=w\to$$

$$\sqrt{(u-1)^2+v^2}=\sqrt{u^2+v^2}\to u^2+1-2u+v^2=u^2+v^2\to 1-2u=0\to u=0.5$$

بعبارت دیگر $|w-1|=w$ همان خط $u=0.5$ میباشد که روی این خط $|w-1|=w$. میشود از روش زیر نیز استفاده کرد. تحت نگاشت $w=\dfrac{1}{z}$ داریم:

$$|z-j|=1\to\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1\to x^2+y^2-2y=0\qquad A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0\to$$

$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0\qquad A=1\qquad B=0\qquad C=-2\qquad D=0\to 2v+1=0\to v=-0.5$$

یعنی نگاشت $w=\dfrac{1}{z}$ دایره $|z-j|=1$ را به خط $v=-0.5$ نگاشت میکند حال اگر نگاشت $|z-j|=1$ را با $w=\dfrac{j}{z}$ بخواهیم انجام دهیم کافیست خط $v=-0.5$ را به اندازه **90** درجه در جهت مثلثاتی بچرخانیم که تبدیل به خط $u=0.5$ میشود.

24- ناحیه $D=\left\{\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\le y\le\dfrac{\pi}{3}\right\}$ با نگاشت $w=\cos z$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل 24:

ابتدا $w=\cos z$ را به صورت زیر مینویسیم:

$$\cos z=\cos(x+jy)=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y\to$$

$$u=\cos x\cosh y\qquad v=-\sin x\sinh y$$

حال تگاشت خط $x=\dfrac{\pi}{6}$ به صورت زیر است:

$$u=\cos\frac{\pi}{6}\cosh y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh y\qquad v=-\sin\frac{\pi}{6}\sinh y=-\frac{1}{2}\sinh y\to$$

$$\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2-\left(\frac{v}{-\frac{1}{2}}\right)^2=\cosh^2 y-\sinh^2 y=1\to\frac{u^2}{\frac{3}{4}}-\frac{v^2}{\frac{1}{4}}=1$$

یعنی نگاشت خط $x=\dfrac{\pi}{6}$ تحت $w=\cos z$ یک هذلولی است به همین ترتیب تگاشت خط $x=\dfrac{\pi}{4}$ هذلولی به معادله زیر است:

$$u=\cos\frac{\pi}{4}\cosh y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh y \qquad v=-\sin\frac{\pi}{4}\sinh y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh y\rightarrow$$

$$(\frac{u}{\frac{\sqrt{2}}{2}})^2-(\frac{v}{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2=\cosh^2 y-\sinh^2 y=1\rightarrow\frac{u^2}{0.5}-\frac{v^2}{0.5}=1$$

از طرفی نگاشت خط $y=\frac{\pi}{4}$ به صورت زیر است:

$$u=\cos x\cosh\frac{\pi}{4} \qquad v=-\sin x\sinh\frac{\pi}{4}\rightarrow$$

$$(\frac{u}{\cosh^2\frac{\pi}{4}})^2+(\frac{v}{-\sinh^2\frac{\pi}{4}})^2=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

یعنی نگاشت خط $y=\frac{\pi}{4}$ تحت $w=\cos z$ یک بیضی است به همین ترتیب تگاشت خط $y=\frac{\pi}{3}$ بیضی به معادله زیر است:

$$u=\cos x\cosh\frac{\pi}{3} \qquad v=-\sin x\sinh\frac{\pi}{3}\rightarrow$$

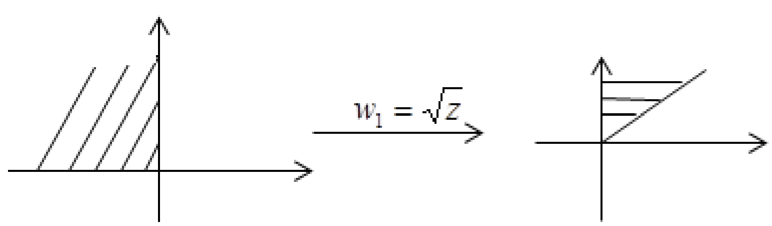
$$(\frac{u}{\cosh^2\frac{\pi}{3}})^2+(\frac{v}{-\sinh^2\frac{\pi}{3}})^2=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

حال نگاشت ناحیه داده شده بین محل برخورد دو بیضی و دو هذلولی با معادلات داده شده در بالا میباشد.

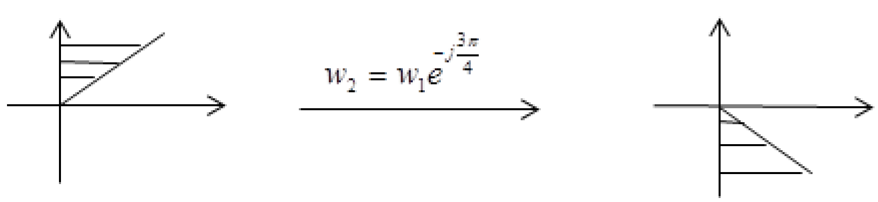
25- چه نگاشتی ربع صفحه ناحیه دوم صفحه z را به $0\le u\le 1-v$ در صفحه $w=f(z)=u+jv$ تبدیل میکند؟

حل 25:

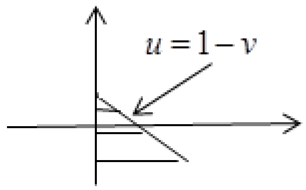
ناحیه ربع دوم دارای فاز بین **90** درجه و **180** درجه است. حال با نگاشت $w_1=\sqrt{z}$ این ناحیه به ربع اول و فاز بین **45** و **90** مطابق شکل تبدیل میشود.



حال باید نگاشت $w_2=w_1e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ را اعمال کنیم تا شکل **135** درجه در جهت عقربه های ساعت بچرخد و به شکل زیر در آید:



حال باید نگاشت $w = w_2 + j$ را اعمال کنیم تا به شکل نهایی در آید که در زیر نشان داده شده است

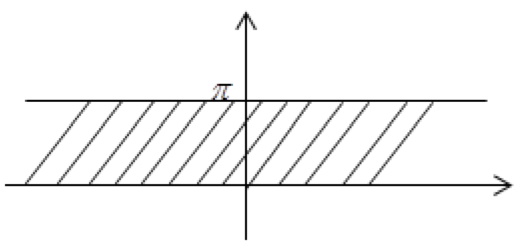


بنابراین نگاشت نهایی بصورت $w = e^{-j\frac{3\pi}{4}}\sqrt{z} + j$ میباشد

26- نگاشتی بیابید که ناحیه $D = \left\{ -\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{3} \right\}$ را به داخل دایره واحد ببرد.

<u>حل 26:</u>

ابتدا تحت $w_1 = 3z$ ناحیه $D = \left\{ -\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{3} \right\}$ به ناحیه $D' = \{ -\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le \pi \}$ که این همان ناحیه هاشور خورده شکل زیراست:



حال تحت نگاشت $w_2 = e^{w_1}$ ناحیه هاشورخورده به صورت زیر نگاشت میشود:

$$w_1 = \eta + j\xi \to w_2 = e^{w_1} = e^{\eta + j\xi} = e^{\eta}.e^{j\xi} \qquad 0 \le e^{\eta} \le \infty \qquad \angle w_2 = \xi \to 0 \le \angle w_2 \le \pi$$

یعنی نگاشت $w_2 = e^{w_1}$ ناحیه هاشور خورده را به قسمت بالا محور حقیقی در صفحه w_2 تبدیل میکند. حال با نگاشت $w = e^{j\alpha}\dfrac{w_2 - z_0}{w_2 - \bar{z}_0}$ این ناحیه به داخل دایره واحد نگاشت میشود بنابراین نگاشت نهایی $w = e^{j\alpha}\dfrac{e^{3z} - z_0}{e^{3z} - \bar{z}_0}$ میباشد

موفق باشید

محمود محمد طاهری

خرداد **1401**