مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله - حل تمرین: محمد هادی معصومی
برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه mhmasoumi@yahoo.com مکاتبه نمایید.

1- معادله موج را با شرایط اولیه و مرزی زیر حل کنید. (20 نمره)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = A_1,\ \ u(l,t) = A_2,\ \ u(x,0) = f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = 0$$

پاسخ: چون شرایط مرزی ناهمگن است، تابع u(x,t) را بصورت مجموع دو تابع می نویسیم که یکی پاسخ گذرا و دیگری پاسخ حالت پایدار است: $u(x,t) = u_s(x) + w(x,t)$. پاسخ حالت پایدار یعنی $u_s(x)$ پاسخ معادله به ازای $t \to \infty$ است و باید در شرایط مرزی صدق کند. شرایط مرزی را به این تابع اختصاص می دهیم تا w(x, t) شرایط مرزی همگن (صفر) داشته باشد.

چون $u_s(x)$ تابع زمان نیست، معادله موج برای این بخش بصورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = 0 \to u_{s(x)} = Ax + B$$

گفتیم که شرایط مرزی را تماماً به همین تابع $u_{s(x)}$ اختصاص دادیم. با اعمال شرایط مرزی، ضرایب A و B بدست می آید:

$$u_{s(x)} = \frac{A_1 - A_0}{l}x + A_0$$

برای بخش گذرا یعنی $w(x,t)$ در نظر می گیریم: $w(x,t) = X(x)T(t)$ و سپس در معادله جایگذاری می کنیم و آن را بر $X(x)T(t)$ تقسیم می کنیم تا بدست بیاوریم:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -k^2$$

با حل معادله های دیفرانسیل معمولی بدست آمده، داریم:

$$X(x) = Csin(kx) + Dcos(kx) \quad , \qquad T(t) = Esin(kct) + Fcos(kct)$$

گفتیم که با اختصاص شرایط مرزی به بخش $u_s(x)$، شرایط مرزی w(x,t) همگن شده است. پس با اعمال شرایط مرزی همگن داریم:

$$w(0,t) = 0 \to X(0)T(t) = 0 \to X(0) = 0 \to D = 0$$
$$w(l,t) = \ 0 \to X(l) = 0 \to \sin(kx) = 0 \to k = \frac{n\pi}{l} \qquad n = 1,2,\dots$$

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

حال شرایط اولیه را اعمال می کنیم. بهتر است از شرط اولیه ای شروع کنیم که برابر با صفر است، پس:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,(x,t)|_{t=0}=0\to X(x)T'(0)=0\to T'(0)=0\to E=0$$

پس تابع $w(x,t)$ تا به اینجا فرم زیر را دارد:

$$w(x,t)=X(x)T(t)=Csin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)Fcos(kct)=Gsin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos(kct)$$

می بینیم که در واقع ما بی نهایت $w(x,t)$ مجاز به ازای n های مختلف داریم. همچنین می دانیم مجموع این پاسخ ها، پاسخی برای معادله موردنظر ماست که ممکن است بتواند شرط اولیه $w(x,0)=g(x)$ که جلوتر بدست خواهیم آورد، برقرار کند. می نویسیم:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos(kct)$$

برای اینکه شرط اولیه تابع اصلی $u(x,t)$ را تبدیل به شرط اولیه ای برای بخش گذاری پاسخ یعنی $w(x,t)$ کنیم، باید بنویسیم:

$$.u(x,0)=u_s(x)+w(x,0)=f(x)\to w(x,0)=f(x)-\frac{A_1-A_0}{l}x-A_0=g(x)$$

با اعمال شرط اولیه بالا، خواهیم داشت:

$$w(x,0)=g(x)=f(x)-\frac{A_1-A_0}{l}x-A_0=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

برای بدست آوردن ضرایب G_n داریم:

$$G_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

در این مرحله حل کامل شد. می توانیم پاسخ نهایی برای تابع اصلی $u(x,t)$ را نیز بنویسیم:

$$u(x,t)=\frac{A_1-A_0}{l}x+A_0+\sum_{n=1}^{\infty}G_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2- معادله ی حرارت زیر را حل کنید و پاسخ حالت پایدار را نیز بیابید. (15 نمره)

$$u_t = c^2 u_{xx} \ , \qquad 0 < x < 1 \quad , \ t \geq 0$$
$$u(x,0) = 2x, \ \ u(1,t) = 1, \quad u_x(x,t)|_{x=0} = 1$$

پاسخ: این معادله از لحاظ غیرهمگن بودن شرایط مرزی و همگن بودن خود معادله مشابه سوال 1 می باشد. تنها تفاوت این است که این بار با یک معادله حرارت مواجهیم. پس تنها تفاوت این است که برای زمان یک فرم نمایی به جای متناوب ظاهر می شود. برای حل ابتدا مثل سوال 1 در نظر می گیریم: $u(x,t) = u_s(x) + w(x,t)$ که $u_s(x)$ بخش پایدار و w(x, t) بخش گذاری پاسخ معادله است. چون $u_s(x)$ مستقل از زمان است، معادله و پاسخ برای آن به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = 0 \rightarrow u_{s(x)} = Ax + B$$

در نظر می گیریم که تمام شرایط مرزی به تابع $u_s(x)$ اختصاص دارد. با توجه به شرایط مرزی، ضرایب A و B تعیین می شوند:

$$u_x(x,t)|_{x=0} = 1 \rightarrow A = 1$$
$$u(1,t) = 1 \rightarrow A + B = 1 \rightarrow B = 0$$

حال معادله برای w(x,t) همان معادله با مشتقات جزئی حرارت اما با شرایط مرزی همگن است. اگر فرض کنیم w(x,t) = X(x)T(t)، پس از جای گذاری در معادله و ساده سازی مثل همیشه خواهیم داشت:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2$$

با حل معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل:

$$X(x) = Csin(kx) + Dcos(kx) \quad , \qquad T(t) = \ Ee^{k^2c^2t} + Fe^{-k^2c^2t}$$

چون برای $t > 0$ باید تابع w(x,t) محدود باشد، لازم است $E = 0$.

به دلیل اختصاص دادن شرایط مرزی به بخش $u_{s(x)}$، شرایط مرزی همگن برای w(x,t) داریم:

$$w_x(0,t) = 0 \rightarrow X'(0)T(t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0 \rightarrow C = 0$$
$$w(1,t) = \ \ 0 \rightarrow X(1) = 0 \rightarrow Dcos(k) = 0 \rightarrow k = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 0,1,\ldots$$

پس فرم w(x,t) تا به اینجا:

$$w(x,t) = X(x)T(t) = Csin(n\pi x)Fe^{-k^2c^2t} = Gcos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\,x\right)e^{-k^2c^2t}$$

برای آنکه شرط اولیه لازم برای w(x,t) را از روی شرط اولیه u(x,t) بدست بیاوریم، می نویسیم:

$$u(x,0) = u_s(x) + w(x,0) = 2x \rightarrow w(x,0) = 2x - x = x$$

در نهایت شرط اولیه را اعمال می کنیم:

$$w(x,0) = x = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\,x\right)$$

ضرایب G_n را اینطور بدست می آوریم:

$$G_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\,x\right)dx$$

3- معادله موج ناهمگن زیر را حل کنید. (15 نمره)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sin(3\pi t) + \cos(3\pi x) \qquad 0 < x < 1$$

$$u_x(x,t)|_{x=0,1} = 0, \qquad u(x,0) = u_t(x,t)|_{t=0} = 0$$

پاسخ: معادله ناهمگن است یعنی ورودی دارد. ابتدا معادله همگن را حل می کنیم. در این صورت اگر u(x,t) = X(x)T(t) باشد، با جایگذاری در معادله همگن و ساده سازی خواهیم داشت:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -k^2$$

با حل معادله دیفرانسیل معمولی مربوط به X(x)، داریم:

$$X(x) = Asin(kx) + Bcos(kx)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی:

$$u_x(0,t) = 0 \to X'(0) = 0 \to A = 0$$

$$u_x(1,t) = 0 \to X'(1) = 0 \to -Bk\sin(k) = 0 \to k = n\pi \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

می توانیم در حالت کلی u(x,t) را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(n\pi x) \ + a_0(t)$$

با اعمال دو شرط اولیه داده شده روی u(x,t):

$$u(x,0) = 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\cos(n\pi x) \ + a_0(0) = 0$$

$$u_t(x,t)|_{t=0} = \ 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'(0)\cos(n\pi x) \quad + a_0'(0) = 0$$

چون عبارت های بالا به ازای همه x های بین 0 و 1 برقرار باشد، نتیجه می گیریم که به ازای n های حسابی:

$$a_n(0) = 0, \quad a_n{}'(0) = 0$$

حالا u(x,t) بدست آمده را در معادله غیرهمگن اصلی جایگذاری می کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n^2\pi^2 a_n(t) - \frac{a_n''(t)}{c^2}\right)\cos(n\pi x) \qquad -\frac{a_0''(t)}{c^2} = \sin(3\pi t) + \cos(3\pi x)$$

سعی می کنیم دو طرف را به ازای n های مختلف مساوی قرار دهیم:

$$n = 0 \to a_0''(t) = \ -c^2\sin(3\pi t) \to \ a_0(t) = \frac{1}{9\pi^2}c^2\sin(3\pi t) + Ct + D$$

که با توجه به شروط اولیه $a_n(0) = 0, \quad a_n{}'(0) = 0$ که بالاتر بدست آوردیم، $C = \frac{-c^2}{3\pi}$ و D = 0.

در ادامه با توجه به تساوی، فقط جمله n = 3 می تواند ضریب غیرصفر داشته باشد. یعنی $a_n(t) = 0 \quad n \neq 0,3$. پس:

$$n = 3 \to -9\pi^2 a_3(t) - \frac{a_3''(t)}{c^2} = 1 \to a_3''(t) + 9\pi^2c^2a_3(t) + c^2 = 0$$

باید این معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حل کنیم. معادله مشخصه:

$$s^2 + 9\pi^2 c^2 = 0 \to s_{1,2} = \pm j3\pi c$$

با توجه به موهومی بودن ریشه ها و بخش ثابت معادله، فرم $a_3(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$a_3(t) = E\sin(3\pi ct) + F\cos(3\pi ct) + G$$

$a_3(t)$ را در معادله دیفرانسیل جایگذاری می کنیم. دو طرف را مساوی قرار می دهیم تا ضریب G را بدست آوریم:

$$(E\sin(3\pi ct) + F\cos(3\pi ct) + G)'' + 9\pi^2 c^2 (E\sin(3\pi ct) + F\cos(3\pi ct) + G) + c^2 = 0 \to G = \frac{-1}{9\pi^2}$$

با توجه به شروط اولیه $a_n(0) = 0, \quad a_n{}'(0) = 0$:

$$a_3(0) = 0 \to F = -G = \frac{1}{9\pi^2}$$

$$a_n'(0) = 0 \to E = 0$$

پس در نهایت $u(x,t)$ را اینطور می توان نوشت:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(n\pi x) + a_0(t)$$
$$= \left(\frac{1}{9\pi^2} cos(3\pi ct) - \frac{1}{9\pi^2}\right)\cos(3\pi x) + \frac{1}{9\pi^2} c^2 \sin(3\pi t) - \frac{c^2}{3\pi} t$$

4- پاسخ معادله موج غیر همگن زیر را بیابید. (20 نمره)

$$u_{tt} - 4u_{xx} = x \quad , \qquad 0 < x < \pi; \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 3x \qquad u(0,t) = t$$
$$u_t(x,0) = 1 \quad u(\pi,t) = 1 - 2t$$

پاسخ: حل این سوال توسط آقای محمد مظفری در ترم بهار 99 تهیه شده است.

چون معادله با شرایط مرزی غیر همگن مطرح است فرض میکنیم:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

حال $w(x,t)$ را طوری تعیین میکنیم که شرایط مرزی معادله مربوط به $v(x,t)$ همگن باشد. برای سادگی فرض میکنیم تابع w تابعیت خطی نسبت به متغیر x دارد یعنی:

$$w(x,t) = a(t)x + b$$

حال با جایگذاری در شرایط مرزی معادله اصلی داریم:

$$w(0,t) = t; w(\pi,t) = 1 - 2t$$
$$\to b(t) = t, a(t) = \frac{1-3t}{\pi}$$
$$\to w(x,t) = \frac{1-3t}{\pi}x + t$$

حال با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$w_{tt} + v_{tt} - 4w_{xx} - 4v_{xx} = x$$
$$\to v_{tt} - 4v_{xx} = x; \quad 0 < x < \pi; \quad t > 0$$
$$v(x,0) = \left(3 - \frac{1}{\pi}\right)x; \quad v_t(x,0) = 1 - 1 + \frac{3}{\pi}x = \frac{3}{\pi}x$$
$$v(0,t) = 0; \quad v(\pi,t) = 0$$

حال برای پیدا کردن پاسخ معادله فوق ابتدا فرض میکنیم معادله همگن است و داریم:

$$Separation\ of\ Variables \to w(x,t) = X(x)T(t) \to \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

با توجه به ماهیت پریودیک w نسبت به متغیر مکان داریم:

$$\frac{X''}{X} = -k^2 \to X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$
$$X(0) = 0 \to A = 0;$$
$$X(\pi) = 0 \to k = n; \quad n \in N$$
$$\to v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin(nx)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله دیفرانسیل به دست آمده برای $v(x,t)$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n''(t)+\ 4n^2B_n(t)\right)\sin(nx)=x\,;\quad 0<x<\pi$$

با توجه به این که عبارت فوق تنها برای بازه محدودی از متغیر مکان معتبر است، گسترش پریودیک فرد تابع سمت راست معادله را در بازه $-\pi<x<\pi$ مینویسیم و سری فوریه آنرا میابیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n''(t)+\ 4n^2B_n(t)\right)\sin(nx)=x=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

حال با توجه به تعامد توابع سینوسی با فرکانس های متفاوت داریم:

$$\forall n\in n\colon B_n''(t)+\ 4n^2B_n(t)=\ 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$\to Characteristic\ Equation\colon \lambda^2+4n^2=0$$
$$\to Homogen\ Response\colon B_n(t)=C_n\cos(nt)+D_n\sin(nt)$$
$$\to Forced\ Response\colon B_n(t)=cte=E_n$$
$$\to 4n^2E_n=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\to E_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3}$$
$$\to B_n(t)=C_n\cos(2nt)+D_n\sin(2nt)+\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3}$$
$$\to v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos(2nt)+D_n\sin(2nt)+\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3}\right]\sin(nx)$$
$$v(x,0)=\left(3-\frac{1}{\pi}\right)x;\quad 0<x<\pi$$
$$v_t(x,0)=\frac{3}{\pi}x;\quad 0<x<\pi$$

با همان استدلال قبلی سری فوریه عبارت سمت راست را برای گسترش فرد آن مینویسیم:

$$v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3}=\left(3-\frac{1}{\pi}\right)x=\frac{\left(6-\frac{2}{\pi}\right)(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$
$$v_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}2nD_n\sin(nx)=\frac{3}{\pi}x=\frac{\frac{6}{\pi}(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

حال با توجه به تعامد توابع سینوسی با فرکانس های متفاوت داریم:

$$C_n = \frac{\left(6-\frac{2}{\pi}\right)(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{2n^3}$$

$$D_n = \frac{3(-1)^{n+1}}{\pi n^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\left(6-\frac{2}{\pi}\right)(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{2n^3}\right)\cos(2nt) + \frac{3(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\sin(2nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n^3}\right]\sin(nx) + \frac{1-3t}{\pi}x + t$$

5- در معادلات حرارت و موج، چنانچه تابع موردنظر مثل u خودش در معادله حضور داشته باشد، با تغییر تابع $u(x,t) = e^{kt}v(x,t)$ می توان با انتخاب مناسب k، تابع u را حذف کرده و معادله را ساده تر کرد. با بکارگیری این نکته، معادله با مشتقات جزئی زیر را حل کنید. (15 نمره)

$$u_t = u_{xx} - 4u \quad ,0 < x < 2\,, \quad t > 0$$

$$u_x(x,t)|_{x=0,2} = 0\;, \qquad u(x,0) = f(x)$$

پاسخ: تغییر تابعی که در صورت سوال گفته شده را انجام می دهیم و در معادله جایگذاری می کنیم:

$$u_t = u_{xx} - 4u \to ke^{kt}v + e^{kt}v_t = e^{kt}v_{xx} - 4e^{kt}v$$

برای اینکه v از دو طرف معادله حذف شود و فقط مشتقات جزئی آن باقی بماند، k را خودمان انتخاب می کنیم: $k = -4$

در نتیجه به این معادله می رسیم: $v_t = v_{xx}$. مثل همیشه با استفاده از روش تفکیک متغیر در نظر می گیریم: $v(x,t) = X(x)T(t)$. با جایگذاری در معادله و ساده سازی داریم:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -p^2$$

با حل معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل:

$$X(x) = A\sin(px) + B\cos(px)\;, \qquad T(t) = Ce^{p^2c^2t} + De^{-p^2c^2t}$$

برای آنکه تابع اصلی باید برای $t > 0$ محدود باشد، ضریب C برابر صفر در نظر گرفته می شود. همچنین با اعمال شرایط مرزی داده شده:

$$u_x(x,t)|_{x=0} = 0 \to v_x(x,t)|_{x=0} = 0 \to X'(0) = 0 \to A = 0$$

$$u_x(x,t)|_{x=2} = 0 \rightarrow v_x(x,t)|_{x=2} \rightarrow X'(2) = 0 \rightarrow -Bpsin(2p) = 0 \rightarrow p = \frac{n\pi}{2} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

فرم تابع $v(x,t)$ تا به اینجا:

$$v(x,t) = Bcos\left(\frac{n\pi}{2}\right)Ce^{-p^2c^2t} = Ecos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)e^{-p^2c^2t}$$

البته این فرم ها به سادگی قابل بدست آوردن هستند و نیازی به نوشتن نیست. مثلاً در اینجا چون شرط مرزی می گفت که مشتق بر حسب x در دو مرز مسئله باید برابر صفر شود، معلوم بود که وابستگی مکانی به صورت کسینوسی تنهاست، چون کسینوس است که مشتقش در $x = 0$، برابر صفر است. حالا در تناوب بعدی هم همین مشتق کسینوس صفر می شود. همچنین معمولاً چون معادلات را برای $t > 0$ حل می کنیم، فقط عبارت نمایی یعنی مثلاً $e^{-p^2c^2t}$ باقی می ماند. اینکه چرا بستگی مکانی فرم متناوب دارد و بستگی زمانی فرم نمایی دارد، به دلیل مراتب مشتق مکانی و زمانی در معادله است. اگر مشتق مرتبه دوم باشد، توابع سینوسی-کسینوسی (ترکیب خطی توابع مختلط ظاهر می شوند و اگر مشتق مرتبه اول باشد، فرم های نمایی مثبت و منفی (حقیقی) ظاهر می شوند.

حالا برای اینکه شرط اولیه را اعمال کنیم، مجموع پاسخ ها به ازای n های مختلف را در نظر می گیریم:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{-p^2ct} \rightarrow v(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

که ضرایب E_n اینگونه بدست می آیند:

$$E_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx \quad , \qquad E_n = \int_0^2 f(x)cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)dx \qquad n \neq 0$$

حالا که تابع کمکی $v(x,t)$ بصورت کامل مشخص شد، پاسخ نهایی معادله یعنی $u(x,t) = e^{-4t}v(x,t)$ را معرفی می کنیم.

6- یک میله نیمه محدود را در نظر می گیریم. درجه حرارت $u(x, t)$ را در طول میله با شرایط زیر بدست آورید. (15 نمره)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad x > 0, \qquad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

پاسخ: با استفاده از روش تفکیک متغیر در نظر می گیریم: $u(x,t) = X(x)T(t)$. پس از جایگذاری در معادله و ساده سازی:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2$$

با حل معادله های دیفرانسیل معمولی حاصل:

$$X(x) = A sin(kx) + B cos(kx) \quad , \qquad T(t) = C e^{k^2c^2t} + D e^{-k^2c^2t}$$

برای آنکه تابع اصلی باید برای $t > 0$ محدود باشد، ضریب C برابر صفر در نظر گرفته می شود. همچنین با اعمال شرط مرزی داده شده:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

بنابراین فرم تابع $u(x,t)$:

$$u(x,t;\ p) = X(x)T(t) = B cos(kx) D e^{-k^2c^2t} = E cos(kx) e^{-k^2c^2t}$$

در مسائل قبلی که از لحاظ مکانی محدود بودند، ثابت k بواسطه دو شرط مرزی که داشتیم به مقادیر گسسته ای محدود می شد. اما در اینجا یک میله نامحدود داریم در نتیجه فقط یک شرط مرزی داریم و ثابت k در این مسئله محدود مقادیر گسسته ای نمی شود. همچنین می دانیم عبارتی که در بالا برای $u(x,t)$ نوشتیم، نمی تواند شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$ را برقرار کند. پس همانند مسائل قبلی، باید حاصل جمعی از $u(x,t)$ ها به ازای مقادیر مختلف k به عنوان پاسخ معادله معرفی شود و سعی در برقرای شرط اولیه کند. چون در اینجا k در حالت کلی پیوسته است، دیگر سیگما نخواهیم و عملاً یک انتگرال نقش همان سیگما را بازی می کند.

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;\ p)dp = \int_0^\infty E_{(p)} cos(kx) e^{-k^2c^2t} dp$$

شرط اولیه را اعمال می کنیم:

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty E_{(p)} cos(kx) dp$$

که ضرایب $E_{(p)}$ (تابع) اینطور بدست می آیند:

$$E_{(p)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(kx)dx = \frac{2}{\pi k}\sin(k)$$