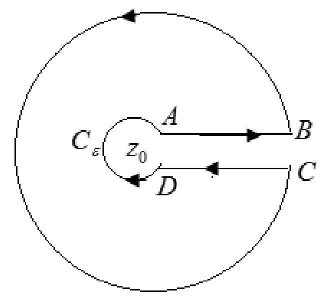
انتگرال یک تابع مختلط روی مسیر بسته

اگر تابع $g(z)$ در داخل مسیر بسته تحلیلی باشد بعبارت دیگر داخل این مسیر دارای قطبی نباشد در اینصورت $\oint_C g(z)dz=0$ حال فرض کنید که $g(z)$ دارای یک قطب $z=z_0$ داخل سیر بسته باشد در اینصورت اگر مسیر انتگرال گیری را مطابق شکل زیر انتخاب کنیم این قطب خارج مسیر بسته انتگرال گیری قرار میگیرد و در نتیجه مجددا $\oint_C g(z)dz=0$ میباشد. حال انتگرال روی مسیر بسته جدید را بگیریم میتوانیم بنویسیم:



$$\oint_C g(z)dz=\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_A^B \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_B^C \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_C^D \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

حال $\int_A^B \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_C^D \frac{f(z)}{z-z_0}dz=0$ زیرا مسیرهای انتگرال گیری عکس هم هستند. از طرف دیگر روی مسیر C_ε که دایره ای به شعاع کوچک ε و مرکز z_0 میتوان نوشت: $(0<\theta<2\pi)$ $|z-z_0|=\varepsilon \to z-z_0=\varepsilon e^{j\theta}$ بعبارت دیگر $z=z_0+\varepsilon e^{j\theta}$ که روی این مسیر میتوان نوشت:

$$dz=\varepsilon j d\theta e^{j\theta}$$

در نتیجه میتوان نوشت:

$$\oint_C g(z)dz=\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_B^C \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_B^C \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{j\theta})}{\varepsilon e^{j\theta}}\varepsilon j d\theta e^{j\theta}\to$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_B^C \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{2\pi}^{0} f(z_0+\varepsilon e^{j\theta})\,jd\theta=0$$

وقتی $\varepsilon\to 0$ در اینصورت $f(z_0+\varepsilon e^{j\theta})=f(z_0)$ و $\int_B^C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_B^C \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{2\pi}^{0} f(z_0+\varepsilon e^{j\theta})\,jd\theta=0\to\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{2\pi}^{0} f(z_0)\,jd\theta=\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi jf(z_0)=0\to$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi jf(z_0)$$

رابطه بالا یک رابطه مهم و کاربردی درانتگرالهای مختلط است در حقیقت $f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)$ همان مانده تابع $g(z)$ در $z=z_0$ میباشد. بنابراین میتوان بطورکلی نوشت:

$$\oint_C g(z)dz = 2\pi j \operatorname{Re}s(g(z), z_0)$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

از تعریف مشتق تابع $f(z)$ در نقطه z_0 داریم:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}[f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = \lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}[\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz - \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz] =$$
$$\lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)} - \frac{f(z)}{z-z_0})dz = \lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)[z - z_0 - (z - z_0 - \Delta z]}{[z-(z_0+\Delta z)](z-z_0)})dz =$$
$$\lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)](z-z_0)})dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)}{(z-z_0)^2})dz \to f'(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)}{(z-z_0)^2})dz$$

بنابراین میتوان نوشت:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)}{(z-z_0)^2})dz$$

بنابر این اگر $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$ باشد در اینصورت $\oint_C g(z)dz = 2\pi j f'(z_0)$ در حقیقت میتوان نوشت:

$$\oint_C g(z)dz = 2\pi j f'(z_0) = 2\pi j \operatorname{Re}s(g(z), z_0) \to f'(z_0) = \operatorname{Re}s(g(z), z_0)$$

بنابراین اگر قطب $g(z)$ از مرتبه دوم باشد برای محاسبه مانده باید از رابطه زیر حساب شود:

$$\operatorname{Re}s(g(z), z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^2 g(z) = f'(z_0)$$

حال مشتق دوم $f(z)$ در $z = z_0$ با رابطه زیر بدست می آوریم:

$$f''(z_0) = \lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}[f'(z_0+\Delta z) - f'(z_0)] = \lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}[\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{[z-(z_0+\Delta z)]^2}dz - \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz] =$$

$$\lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)}{[z-(z_0+\Delta z)]^2} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^2})dz = \lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)[(z-z_0)^2 - (z-z_0-\Delta z)^2]}{[z-(z_0+\Delta z)]^2(z-z_0)^2})dz =$$
$$\lim_{\Delta z\to} \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)\Delta z \times 2(z - z_0 - 0.5\Delta z)}{[z-(z_0+\Delta z)]^2(z-z_0)^2})dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C (\frac{2f(z)}{(z-z_0)^3})dz \to f''(z_0) = \frac{2}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)}{(z-z_0)^3})dz$$

بنابراین میتوان نوشت:

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi j}\oint_C (\frac{f(z)}{(z-z_0)^3})dz$$

در حالت کلی میتوان رابطه زیر را نوشت:

$$f^{(n-1)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2\pi j}\oint_C \left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\right)dz \rightarrow \oint_C \left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\right)dz=\frac{2\pi j}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(z_0)$$

بنابراین اگر $g(z)=\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ یعنی $z=z_0$ قطب مرتبه nام باشد در اینصورت مانده این تابع در $z=z_0$ برابر است با:

$$\operatorname{Re}s(g(z),z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}(z-z_0)^n g(z)=\frac{1}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(z_0)$$

حال فرض کنید که تابع $g(z)$ به صورت زیر تجزیه شده باشد:

$$g(z)=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{(z-z_1)^2}+\dots\dots\dots\frac{A_n}{(z-z_1)^n}=\frac{A_1(z-z_1)^{n-1}+A_2(z-z_1)^{n-2}+\dots\dots A_n}{(z-z_1)^n}=\frac{f(z)}{g(z-z_1)^n}$$

حال اگر بخواهیم مانده $g(z)$ در $z=z_1$ را بدست بیاوریم طبق فرمول بالا داریم:

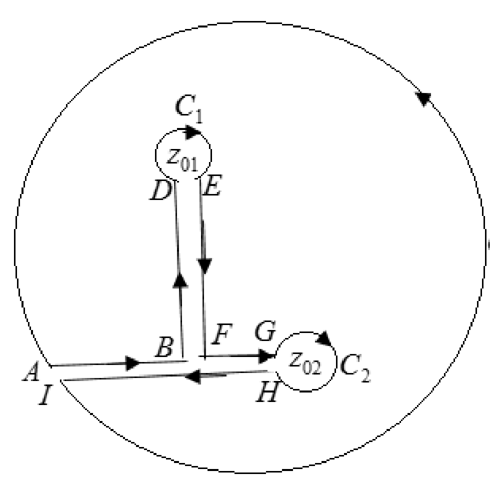
$$\operatorname{Re}s(g(z),z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}(z-z_0)^n g(z)=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(A_1(z-z_1)^{n-1}+A_2(z-z_1)^{n-2}+\dots\dots A_n)_{(z=z_0)}$$

$$\rightarrow \operatorname{Re}s(g(z),z_0)=\frac{1}{(n-1)!}[A_1(n-1)!]=A_1$$

بنابراین این بسیار نکته جالبی است که اگر یک تابع قطب مرتبه nام داشته باشد و آنرا بسط دهیم ضریب جمله $\dfrac{1}{z-z_1}$ همان مانده تابع در قطب است. این مانده چون ضریب عبارت $(z-z_1)^{-1}$ است را C_{-1} نامیده میشود. پس اگر بخواهیم از یک تابع مختلط $g(z)$ روی مسیر بسته انتگرال بگیریم انتگرال بگیریم و این تابع کسری و دارای قطب در $z=z_0$ با هر مرتبه ای داخل مسیر بسته باشد کافیست آن تابع را بسط دهیم و ضریب $(z-z_0)^{-1}$ را بدست بیاوریم که همان C_{-1} میباشد. در اینحالت میتوانیم بنویسیم:

$$\oint_C g(z)dz=2\pi j\operatorname{Re}s(g(z),z_0)=2\pi jC_{-1}$$

حال فرض کنید تابع $g(z)$ دو قطب داخل مسیر بسته داشته باشد یعنی بتوان آنرا به صورت $g(z)=\dfrac{f(z)}{(z-z_{01})(z-z_{02})}$ نشان داد که دارای دو قطب $z=z_1$ و $z=z_2$ داخل میسر بسته است. در اینصورت مطابق شکل مسیر بسته را طوری انتخاب میکنیم که هر دو قطب خارج مسیر بسته باشند که در زیر نشان داده شده است. چون هر دو قطب خارج مسیر بسته نشان داده با فلشها میباشد در نتیجه حاصل انتگرال صفر است.



$$\oint_C g(z)dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_{01})(z-z_{02})}dz = \int_A^I g(z)dz = \int_A^B g(z)dz + \int_B^D g(z)dz + \oint_{C_1} g(z)dz + \int_E^F g(z)dz +$$
$$\int_F^G g(z)dz + \oint_{C_2} g(z)dz + \int_H^I g(z)dz + \int_I^A g(z)dz = 0$$

حاصل انتگرال های $\int_H^I g(z)dz$ $\int_A^B g(z)dz + \int_B^D g(z)dz + \int_F^G g(z)dz$ بدلیل آنکه مسیرهای انتگرال روی این انتگرالها مخالف هم هستند صفر میباشد. بعلاوه حاصل انتگرال $\int_B^D g(z)dz + \int_E^F g(z)dz$ بدلیل آنکه مسیرهای انتگرال روی این انتگرالها مخالف هم هستند صفر میباشد. در نتیجه داریم:

$$\oint_C g(z)dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_{01})(z-z_{02})}dz = \int_A^I g(z)dz = \oint_{C_1} g(z)dz + \oint_{C_2} g(z)dz + \int_I^A g(z)dz = 0 \rightarrow$$
$$\int_I^A g(z)dz = -\oint_{C_1} g(z)dz - \oint_{C_2} g(z)dz$$

اگر شعاعهای دوایره C_1 و C_2 به سمت صفر میل کنند در اینصورت $\int_I^A g(z)dz = \oint_C g(z)dz$ در اینصورت داریم:

$$\oint_C g(z)dz = -\oint_{C_1} g(z)dz - \oint_{C_2} g(z)dz$$

در روی مسیر C_1 داریم: $z - z_{01} = \varepsilon_1 e^{j\theta} \rightarrow dz = \varepsilon_1 jd\theta e^{j\theta}$ که ε_1 شعاع دایره C_1 است. بعلاوه روی مسیر C_2 میتوان نوشت: $z - z_{02} = \varepsilon_2 e^{j\theta} \rightarrow dz = \varepsilon_2 jd\theta e^{j\theta}$ که ε_2 شعاع دایره C_2 است. در اینصورت داریم:

$$\oint_C g(z)dz = -\oint_{C_1} g(z)dz - \oint_{C_2} g(z)dz = -\int_{2\pi}^0 g(z)dz - \int_{2\pi}^0 g(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_{01}+\varepsilon_1 e^{j\theta})}{(\varepsilon_1 e^{j\theta})(z_{01}+\varepsilon_1 e^{j\theta}-z_{02})}\varepsilon_1 jd\theta e^{j\theta} +$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z_{02}+\varepsilon_2 e^{j\theta})}{(z_{02}+\varepsilon_1 e^{j\theta}-z_{01})(\varepsilon_2 e^{j\theta})}\varepsilon_1 jd\theta e^{j\theta} \rightarrow \oint_C g(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_{01})}{(z_{01}-z_{02})}jd\theta + \int_0^{2\pi} \frac{f(z_{02})}{(z_{02}-z_{01})}jd\theta =$$
$$2\pi j[\frac{f(z_{01})}{(z_{01}-z_{02})} + \frac{f(z_{02})}{(z_{02}-z_{01})}] = 2\pi j[\mathrm{Re}\, s(g(z), z=z_{01}) + \mathrm{Re}\, s(g(z), z=z_{02})]$$

لازم به ذکر است که

$$\mathrm{Re}\, s(g(z), z=z_{01}) = \lim_{z\to z_{01}} (z-z_{01})\frac{f(z)}{(z-z_{01})(z-z_{02})} = \frac{f(z_{01})}{(z_{01}-z_{02})}$$
$$\mathrm{Re}\, s(g(z), z=z_{02}) = \lim_{z\to z_{01}} (z-z_{02})\frac{f(z)}{(z-z_{01})(z-z_{02})} = \frac{f(z_{02})}{(z_{02}-z_{01})}$$

در حالت کلی که بیش از دو قطب داخل میسر بسته داشته باشیم حاصل انتگرال برابر است با $2\pi j$ ضرب در مجموع تمام مانده های تابع در قطبهای تابع که داخل مسیر بسته هستندیعنی:

$$\oint_C g(z) = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_n)} = 2\pi j\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} s(g(z), z=z_i)$$

اگر $z = z_0$ قطب مرتبه n ام باشد در اینصورت داریم:

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} = \frac{A_1}{(z-z_0)} + \frac{A_2}{(z-z_0)^2} + ... \frac{A_n}{(z-z_0)^n} = \frac{A_1(z-z_0)^{n-1} + A_2(z-z_0)^{n-2} + ...A_n}{(z-z_0)^n}$$

$$f(z) = A_1(z-z_0)^{n-1} + A_2(z-z_0)^{n-2} + ...A_n \qquad A_1 = \frac{1}{(n-1)!}\frac{df^{(n-1)}}{z^{n-1}}(z=z_0)$$

میتوان ثابت کرد که انتگرال تمام جملات تابع $g(z)$ داخل میسر بسته صفر است مگر انتگرال جمله اول مثلا برای جمله i ام داریم:

$$\oint_C \frac{A_i}{(z-z_0)^i}dz \qquad z - z_0 = \varepsilon e^{j\theta} \to dz = j\varepsilon e^{j\theta}d\theta \to \oint_C \frac{A_i}{(z-z_0)^i}dz = \int_0^{2\pi} \frac{A_i}{\varepsilon^i e^{ij\varepsilon}} j\varepsilon e^{j\theta}d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} jA_i\varepsilon^{1-i}e^{j(1-i)\theta}d\theta = jA_i\varepsilon^{1-i}[\frac{1}{j(1-i)}e^{j(1-i)\theta}]_0^{2\pi} = 0 \quad (i>1)$$

برای جمله اول داریم:

$$\oint_C \frac{A_1}{(z-z_0)}dz \qquad z - z_0 = \varepsilon e^{j\theta} \to dz = j\varepsilon e^{j\theta}d\theta \to \oint_C \frac{A_1}{(z-z_0)}dz = \int_0^{2\pi} \frac{A_1}{\varepsilon e^{j\varepsilon}} j\varepsilon e^{j\theta}d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} jA_1 d\theta = j2\pi A_1$$

یعنی در حقیقت A_1 همان مانده تابع در قطب $z = z_0$ بنابراین داریم:

$$\oint_C g(z)dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz = \oint_C (\frac{A_1}{(z-z_0)} + \frac{A_2}{(z-z_0)^2} + ... \frac{A_n}{(z-z_0)^n})dz = 2\pi jA_1 = 2\pi j\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}f(z)}{z^{n-1}}_{(z=z_0)} =$$

$$2\pi j\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{z^{n-1}}[(z-z_0)^n g(z)]_{(z=z_0)}$$

مثال **14**: حاصل انتگرال $\oint_{|z|=2} \frac{3z^3+2z^2-3z+4}{(z-1)^3}dz$ را بدست آورید.

حل: قطب $z = 1$ قطب مرتبه سوم است و داخل مسیر بسته یعنی دایره به شعاع **2** قرار دارد بنابراین داریم:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3z^3+2z^2-3z+4}{(z-1)^3}dz = 2\pi j\frac{1}{2!}[\frac{d^2(3z^3+2z^2-3z+4)}{dz^2}]_{z=1} = \pi j(18z+4)_{(z=1)} = 22\pi j$$

نکته: قطب $z = z_1$ داخل مسیر بسته که دایره ای به شعاع a و مرکز z_0 میباشد و با معادله $|z-z_0| = a$ داده شده است میباشد اگر $|z_1 - z_0| < a$ باشد. بنابراین اگر $|z_1 - z_0| > a$ قطب $z = z_1$ خارج مسیر سته یا دایره میباشد.

مثال **14**: مطلوبست حاصل $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ برای حالات زیر:

الف) $C: \ |z-1|=1$ ب) $C: \ |z-0.5|=1$ پ) $C: \ |z-1-0.5j|=1$ ت) $C: \ |z-j|=1$

حل: تابع زیر انتگرال دو قطب $z_1=-1$ و $z_2=1$ دارد بنابراین برای حالت الف داریم:

$$|z_1-1|=|-1-1|=2>1 \qquad |z_2-1|=|1-1|=0<1$$

بنابراین قطب $z_1=-1$ خارج مسیر بسته و قطب $z_2=1$ داخل مسیر بسته است بنابراین باید مانده را برای قطب $z_2=1$ حساب کنیم در نتیجه

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{z^2+1}{z^2-1}, z=1)] = 2\pi j[(z-1)\frac{z^2+1}{z^2-1}, z=1] = 2\pi j(\frac{z^2+1}{z+1}, z=1) = 2\pi j\frac{1^2+1}{1+1} = 2\pi j$$

برای حالت ب داریم:

$$|z_1-0.5|=|-1-0.5|=1.5>1 \qquad |z_2-1|=|1-0.5|=0.5<1$$

بنابراین قطب $z_1=-1$ خارج مسیر بسته و قطب $z_2=1$ داخل مسیر بسته است بنابراین باید مانده را برای قطب $z_2=1$ حساب کنیم در نتیجه

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{z^2+1}{z^2-1}, z=1)] = 2\pi j[(z-1)\frac{z^2+1}{z^2-1}, z=1] = 2\pi j(\frac{z^2+1}{z+1}, z=1) = 2\pi j\frac{1^2+1}{1+1} = 2\pi j$$

برای حالت پ داریم:

$$|z_1-1-0.5j|=|-1-1-0.5j|=\sqrt{4.25}>1 \qquad |z_2-1-0.j|=|1-1-0.5j|=0.5<1$$

بنابراین قطب $z_1=-1$ خارج مسیر بسته و قطب $z_2=1$ داخل مسیر بسته است بنابراین باید مانده را برای قطب $z_2=1$ حساب کنیم در نتیجه

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{z^2+1}{z^2-1}, z=1)] = 2\pi j[(z-1)\frac{z^2+1}{z^2-1}, z=1] = 2\pi j(\frac{z^2+1}{z+1}, z=1) = 2\pi j\frac{1^2+1}{1+1} = 2\pi j$$

برای حالت ت داریم:

$$|z_1-j|=|-1-j|=\sqrt{2}>1 \qquad |z_2-j|=|1-j|=\sqrt{2}>1$$

بنابراین هر دو قطب قطب $z_1=-1$ و $z_2=1$ خارج مسیر بسته است در نتیجه حاصل انتگرال صفر است.

مثال **15**:حاصل انتگرال $\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2+4)(z+4)}$ برای حالت الف) $C: |z|=3$ و ب) $C: |z+1|+|z-1|=9$ را بدست آورید.

حل: قطبهای تابع زیر انتگرال عبارتند از: $z_1=-j2, \quad z_2=j2, \quad z_3=-4$ برای حالت الف داریم:

$$|z_1|=|-j2|=2<3 \qquad |z_2|=|j2|=2<3 \qquad |z_3|=|-4|=4>3$$

بنابراین دو قطب $z_1=-j2, \quad z_2=j2$ راخل مسیر بسته و قطب $z_3=-4$ خارج مسیر بسته هستند در نتیجه داریم:

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2+4)(z+4)} = 2\pi j[\operatorname{Res}(\frac{e^z}{(z^2+4)(z+4)}, z=-j2) + \operatorname{Res}(\frac{e^z}{(z^2+4)(z+4)}, z= j2)] =$$

$$2\pi j[(\frac{(z+j2)e^z}{(z+j2)(z-j2)(z+4)}, z=-j2) + (\frac{(z-j2)e^z}{(z+j2)(z-j2)(z+4)}, z= j2)] =$$

$$2\pi j[\frac{e^{-j2}}{-j4(-j2+4)} + \frac{e^{j2}}{j4(j2+4)}] = \frac{\pi}{2}[\frac{e^{j2}}{(j2+4)} - \frac{e^{-j2}}{(-j2+4)}] = \frac{\pi}{2}[\frac{e^{j2}(4-j2)}{20} - \frac{e^{-j2}(4+j2)}{20}] =$$

$$\frac{\pi}{40}[4(e^{j2}-e^{-j2}) - j2(e^{j2}+e^{-j2})] = \frac{\pi}{40}[8j\sin 2 - j2(2\cos 2)] = \frac{\pi j}{10}(2\sin 2 - \cos 2)$$

برای حالت ب داریم:

$$|z_1+1|+|z_1-1| = |-j2+1|+|-j2-1| = 2\sqrt{5} < 9 \qquad |z_2+1|+|z_2-1| = |j2+1|+|j2-1| = 2\sqrt{5} < 9$$

$$|z_3+1|+|z_3-1| = |-4+1|+|-4-1| = 8 < 9$$

بنابراین هر سه قطب داخل مسیر بسته هستند و باید مانده هر سه قطب را حساب کنیم:

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2+4)(z+4)} = 2\pi j[\operatorname{Res}(\frac{e^z}{(z^2+4)(z+4)}, z=-j2) + \operatorname{Res}(\frac{e^z}{(z^2+4)(z+4)}, z= j2)$$

$$+\operatorname{Res}(\frac{e^z}{(z^2+4)(z+4)}, z=-4] = \frac{\pi j}{10}(2\sin 2 - \cos 2) + 2\pi j\,\frac{(z+4)e^z}{(z^2+4)(z+4)}, z=-4) =$$

$$\frac{\pi j}{10}(2\sin 2 - \cos 2) + 2\pi j\,\frac{e^{-4}}{(-4)^2+4} = \frac{\pi j}{10}(2\sin 2 - \cos 2 + e^{-4})$$

یک روش برای م2حاسبه مانده قطبهای ساده

فرض کنید تابع $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_n)}$ در اینصورت مانده تابع در قطب $z = z_1$ برابر است با:

$$\operatorname{Res}(g(z), z=z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_n)}, z=z_1 = \frac{P(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)........(z_1-z_n)}$$

اگر به مخرج تابع بدست آمده دقت کنیم ملاحظه میشود که مخرج همان مشتق $Q(z)$ به ازای $z = z_1$ یعنی $Q'(z_1)$ است در نتیجه:

$$\operatorname{Res}(\frac{P(z)}{Q(z)}, z=z_1) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}$$

در حالت کلی مانده در قطب iام یعنی در $z = z_i$ برابر است با:

$$\operatorname{Res}(\frac{P(z)}{Q(z)}, z=z_i) = \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}$$

حال اگر تابع به صورت $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{Q_1(z)Q_2(z)}$ باشد و بخواهیم مانده در قطب $z = z_i$ که ریشه $Q_1(z)$ میباشد حساب کنیم داریم:

$$\operatorname{Re} s(\frac{P(z)}{Q(z)}, z=z_i) = \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_i)Q_2(z_i)+Q(z_1)Q'(z_i)}$$

چون قطب $z=z_i$ ریشه $Q_1(z)$ میباشددر نتیجه $Q_1(z)=0$ در نتیجه داریم:

$$\operatorname{Re} s(\frac{P(z)}{Q(z)}, z=z_i) = \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_i)Q_2(z_i)}$$

یعنی برای محاسبه مخرج مانده کافیست از عبارتی مشتق بگیریم که قطب مورد نظر ریشه آن عبارت است. مثال زیر این موضوع را روشن میکند.

مثال **16**: حاصل $\oint_{|z|=3} \frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$ را بدست آورید.

حل: تابع زیر انتگرال دارای چهار قطب $z_1=-j,\quad z_2=j,\quad z_3=-j2,\quad z_4=j2$ که هر چهار قطب داخل مسیر بسته $|z|=3$ میباشد. دو قطب اول و دوم ریشه عبارت (z^2+1) در مخرج میباشند بنابراین مانده این دو قطب برابرند با:

$$\operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_1=-j) = \frac{(-j)^3}{2(-j)[(-j)^2+4]} = \frac{j}{-2j(-1+4)} = -\frac{1}{6}$$
$$\operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_2=j) = \frac{(j)^3}{2(j)[(-j)^2+4]} = \frac{-j}{2j(-1+4)} = -\frac{1}{6}$$

دو قطب سوم و چهارم ریشه عبارت (z^2+4) در مخرج میباشند بنابراین مانده این دو قطب برابرند با:

$$\operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_3=-j2) = \frac{(-j2)^3}{[(-j2)^2+1]2(-2j)} = \frac{j8}{(-4+1)(-j4)} = \frac{2}{3}$$
$$\operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_4=j2) = \frac{(j2)^3}{[(j2)^2+1]2(2j)} = \frac{-j8}{(-4+1)(j4)} = \frac{2}{3}$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)}dz = 2\pi j[\operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_1=-j) + \operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_2=j) +$$
$$\operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_3=-j2) + \operatorname{Re} s(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z_4=j2)] = 2\pi j[-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}] = 2\pi j$$

حال برای قطب ساده $z=z_0$ برای $\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$ داریم:

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi j[\operatorname{Re} s(\frac{f(z)}{(z-z_0)}, z=z_0)] = 2\pi j[(z-z_0)\frac{f(z)}{(z-z_0)},\quad z=z_0)] = 2\pi j f(z_0) \rightarrow$$
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_C\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)}-\frac{f(z)}{(z-z_0)}\right]dz=$$

$$\frac{1}{2\pi j}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_C\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\right]dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\to f'(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\to$$

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=2\pi j f'(z_0)$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \qquad f''(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z}=$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi j}\left[\oint_C\frac{1}{\Delta z}\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)^2}dz-\oint_C\frac{1}{\Delta z}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right]=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_C\frac{1}{\Delta z}\frac{f(z)[(z-z_0)^2-(z-z_0-\Delta z)^2}{(z-z_0-\Delta z)^2(z-z_0)^2}dz=$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{1}{\Delta z}\frac{f(z)2\Delta z(z-z_0)}{(z-z_0)^4}dz=\frac{2}{2\pi j}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}\to f''(z_0)=\frac{2}{2\pi j}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}\to\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}=\frac{2\pi j}{2}f''(z_0)$$

اگر همین روش را ادامه دهیم خواهیم داشت:

$$\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^n}=\frac{2\pi j}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0)$$

که $f^{(n-1)}(z_0)$ مشتق $(n-1)$ام در $z=z_0$ میباشد.

مثال **17**: حاصل $\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{(2z-\pi)^4}dz$ را بدست آورید.

حل: باید مخرج را به صورت $(z-z_0)^n$ درآوریم بنابراین داریم:

$$\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{(2z-\pi)^4}dz=\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{16(z-\frac{\pi}{2})^4}dz=\frac{1}{16}\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^4}dz=\frac{1}{16}\frac{2\pi j}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(\cos z)_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi j}{48}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi j}{48}$$

لازم به ذکر است که قطب $z_0=\frac{\pi}{2}$ داخل مسیر بسته دایره $|z|=2$ میباشد.

مثال **18**:حاصل انتگرال $\oint_{|z|=3}\{\frac{\sin 5\pi z}{\pi^4(2z+1)^5}+\frac{1+\bar{z}+\mathrm{Re}(z)}{z}\}dz$ را بدست آورید.

حل:انتگرال را میتوان به دو انتگرال تبدیل کرد:

$$I=\oint_{|z|=3}\{\frac{\sin 5\pi z}{\pi^4(2z+1)^5}+\frac{1+\bar{z}+\mathrm{Re}(z)}{z}\}dz=I_1+I_2 \qquad I_1=\oint_{|z|=3}\frac{\sin 5\pi z}{\pi^4(2z+1)^5}dz \qquad I_2=\oint_{|z|=3}\frac{1+\bar{z}+\mathrm{Re}(z)}{z}dz$$

برای انتگرال اول داریم:

$$I_1 = \oint_{|z|=3} \frac{\sin 5\pi z}{\pi^4 (2z+1)^5} dz = \oint_{|z|=3} \frac{\sin 5\pi z}{2^5 \pi^4 (z+0.5)^5} dz = \frac{2\pi j}{4!} \frac{1}{2^5 \pi^4} \frac{d^4 (\sin 5\pi z)}{dz^4} (z=-0.5) =$$

$$\frac{2\pi j}{4!} \frac{1}{2^5 \pi^4} (5\pi)^4 \sin(5\pi \times -0.5) = \frac{5^4}{4!} \frac{1}{2^5} 2\pi j \times -1 = -1.63\pi j$$

برای انتگرال دوم داریم:

$$I_2 = \oint_{|z|=3} \frac{1+\bar{z}+\mathrm{Re}(z)}{z} dz = \oint_{|z|=3} \frac{1+\bar{z}+\frac{z+\bar{z}}{2}}{z} dz = \oint_{|z|=3} \frac{z+z\bar{z}+\frac{zz+\bar{z}z}{2}}{z^2} dz = \oint_{|z|=3} \frac{z+|z|^2+\frac{zz+|z|^2}{2}}{z^2} dz =$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{z+9+\frac{z^2+9}{2}}{z^2} dz = \oint_{|z|=3} \frac{z^2+2z+27}{2z^2} dz = \frac{2\pi j}{2} \frac{d}{dz} (z^2+2z+27) = \frac{2\pi j}{2} (2z+2)_{(z=0)} = 2\pi j$$

بنابراین:

$$I = I_1 + I_2 = -1.63\pi j + 2\pi j = 0.37\pi j$$

مثال **19**: حاصل $\oint_{|z-0.5j|=0.5} \frac{\ln(1+z^2)}{(2z-j)^2} dz$ را بدست آورید.

حل: قطب تابع داخل مسیر بسته است بنابراین داریم:

$$\oint_{|z-0.5j|=0.5} \frac{\ln(1+z^2)}{(2z-j)^2} dz = \oint_{|z-0.5j|=0.5} \frac{\ln(1+z^2)}{4(z-0.5j)^2} dz = \frac{1}{4} \frac{2\pi j}{(2-1)!} \frac{d(\ln(1+z^2))}{dz}_{(z=0.5j)} = \frac{\pi j}{2} \frac{2z}{1+z^2} = \frac{\pi j}{2} \frac{2(0.5j)}{1+(0.5j)^2} =$$

$$\frac{\pi j}{2} \frac{j}{0.75} = -\frac{2\pi}{3}$$

مثال **20**: حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید:

الف) $\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-j\pi)^2} dz$ ب) $\oint_{|z|=1.5} \frac{z^4-3z^2+6}{(z+j)^3} dz$ پ) $\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{(z^2+4)(z-1)^2} dz$

حل الف:قطب تابع داخل مسیر بسته است پس:

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-j\pi)^2} dz = \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-j\pi)^2} dz = \frac{2\pi j}{(2-1)!} \frac{d}{dz} (\cos z)_{(z=j\pi)} = 2\pi j(-\sin j\pi) = 2\pi j(-j\sinh \pi) = 2\pi \sinh \pi$$

حل ب: قطب مرتبه سوم داخل مسیر بسته است پس:

$$\oint_{|z|=1.5} \frac{z^4-3z^2+6}{(z+j)^3} dz = \frac{2\pi j}{(3-1)!} \frac{d^2(z^4-3z^2+6)}{dz^2}_{(z=-j)} = \pi j(12z^2-6)_{(z=-j)} = \pi j[(12(j)^2-6] = -18\pi j$$

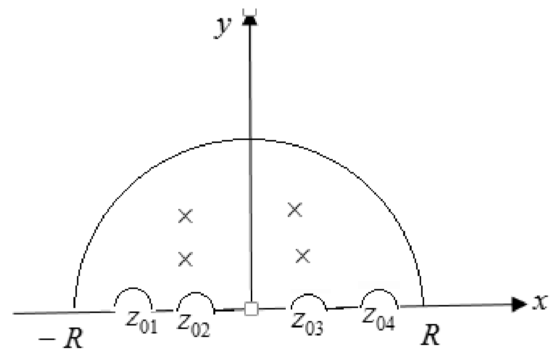
حل پ: از سه قطب تابع فقط قطب مضاعف $z=1$ داخل مسیر بسته است بنابراین:

$$\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{(z^2+4)(z-1)^2}dz = \oint_{|z|=1.5} \frac{\frac{e^z}{(z^2+4)}}{(z-1)^2}dz = \frac{2\pi j}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{(z^2+4)}\right)_{z=1} = 2\pi j\left[\frac{e^z(z^2+4)-2ze^z}{(z^2+4)^2}\right]_{(z=1)} = \frac{6\pi je}{25}$$

کاربرد مانده ها در محاسبه انتگرالهای حقیقی

فرض کنید هدف محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ باشد که $g(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ و تابع $g(x)$ دارای تعدادی قطب حقیقی و تعدادی قطب مختلط باشد. در اینصورت حاصل انتگرال $\oint_C g(z)dz$ را برای برای مسیر زیر که نیمدایره به شعاع بینهایت میباشد که قطبهای حقیقی خارج آن مسیر بسته میباشد. در اینصورت داریم:

$$\oint_C g(z)dz = 2\pi j\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}s(g(z), z=z_i) \qquad z_i = Complex\ poles$$



در مسیر بسته بالا ضربدرها قطبهای مختلط با قسمت موهومی مثبت که داخل مسیر بسته و z_{0i} قطب حقیقی i ام است که خارج مسیر بسته است و در مرکز نیمدایره های با شعاع بسیار کوچک به شعاع ε قرار دارند اگر نیمدایره i ام را C_i بنامیم در اینصورت برای مسیر بسته نشانداده شده داریم:

$$\oint_C g(z)dz = \int_{-R}^{R} g(x)dx + \sum_{j=1}^{m}\int_{C_j} g(z)dz + \int_{C_R} g(z)dz = 2\pi j\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}s(g(z), z=z_i) \qquad z_i = Complex\ poles$$

در رابطه بالا C_R نیمدایره با شعاع R میباشد که اگر $R\to\infty$ میل کنید چون تعداد قطبهای $g(z)$ بیشتر از صفرهای آن است در نتیجه $\int_{C_R} g(z)dz = 0$. حال یکی از انتگرالها روی نیمدایره های کوچک به شعاع ε را حساب میکنیم.

$$\int_{C_j} g(z)dz = \int_{C_j}\frac{p(z)}{q(z)}dz = \int_{C_j}\frac{p(z)}{(z-z_{01})(z-z_{02})......(z-z_{0j})A(z)}dz$$

برای نیمدایره با مرکز z_{0j} داریم $z - z_{0j} = \varepsilon e^{j\theta} \to dz = \varepsilon je^{j\theta}d\theta$ در اینصورت:

$$\int_{C_j} g(z)dz = \int_{C_j} \frac{p(z)}{q(z)}dz = \int_{C_j} \frac{p(z)}{(z-z_{01})(z-z_{02})......(z-z_{0j}).......A(z)}dz =$$
$$\int_{\pi}^{0} \frac{p(z_{0j}+\varepsilon e^{j\theta})}{(z_{0j}+\varepsilon e^{j\theta}-z_{01})(z_{0j}+\varepsilon e^{j\theta}-z_{02})......(\varepsilon e^{j\theta}).....A(z)} \varepsilon j e^{j\theta} d\theta$$

وقتی $\varepsilon \to 0$ انتگرال بالا به تبدیل به انتگرال زیر میشود

$$\int_{C_j} g(z)dz = \int_{\pi}^{0} \frac{p(z_{0j})}{(z_{0j}-z_{01})(z_{0j}-z_{02})..........A(z)} jd\theta = -j\pi \frac{p(z_{0j})}{(z_{0j}-z_{01})(z_{0j}-z_{02})..........A(z)} =$$
$$-j\pi[\operatorname{Re}s(g(z), z=z_{0j})]$$

بنابراین داریم:

$$\oint_C g(z)dz = \int_{-R}^{R} g(x)dx + \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j} g(z)dz + \int_{C_R} g(z)dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}s(g(z), z=z_i) \qquad z_i = Complex\ poles \to$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \sum_{j=1}^{m} -\pi j[\operatorname{Re}s(g(z), z=z_{0j})] = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}s(g(z), z=z_i) \to$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}s(g(z), z=z_i) + \pi j \sum_{j=1}^{m} [\operatorname{Re}s(g(z), z=z_{0j})] =$$

یعنی حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ برابر است با $2\pi j$ ضربدر با مجموع مانده های قطبهای موهومی تابع $g(z)$ با قسمت موهومی مثبت بعلاوه πj ضربدر مجموع مانده های قطبهای حقیقی تابع $g(z)$.

مثال **21**:حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-2)(x+1)(x^2+4)}$ را بدست آورید.

حل: تابع $g(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+1)(z^2+4)}$ را در نظر میگیریم در اینصورت قطبهای حقیقی برابرند با $z_{01}=0,\quad z_{02}=2,\ z_{03}=-1$ و قطب موهومی با قسمت موهومی مثبت برابر است با $z_1 = j2$ در نتیجه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-2)(x+1)(x^2+4)} = \pi j[\operatorname{Re}s(g(z), z=0) + \operatorname{Re}s(g(z), z=2) + \operatorname{Re}s(g(z), z=-1) +$$
$$2\pi j[\operatorname{Re}s(g(z), z=j2)]$$

حال مانده ها را حساب میکنیم

$$\operatorname{Re}s(g(z),z=0)=\lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-2)(z+1)(z^2+4)}=\frac{1}{(0-2)(0+1)(0^2+4)}=-\frac{1}{8}$$

$$\operatorname{Re}s(g(z),z=2)=\lim_{z\to 1}(z-2)\frac{1}{z(z-2)(z+1)(z^2+4)}=\frac{1}{2(2+1)(2^2+4)}=\frac{1}{48}$$

$$\operatorname{Re}s(g(z),z=-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{z(z-2)(z+1)(z^2+4)}=\frac{1}{-1(-1-2)((-1)^2+4)}=\frac{1}{15}$$

برای محاسبه مانده در قطب $z_1=j2$ از رابطه $\operatorname{Re}s(\frac{P(z)}{Q(z)},z=z_i)=\frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}=\frac{P(z_1)}{Q'(z_i)Q_2(z_i)}$ استفاده میکنیم:

$$\operatorname{Re}s(g(z),z=j2)=\frac{1}{j2(j2-2)(j2+1)2(2j)}=\frac{1}{-8(-6-j2)}=\frac{1}{16(3+j)}=\frac{3-j}{160}$$

در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x-2)(x+1)(x^2+4)}=\pi j[\operatorname{Re}s(g(z),z=0)+\operatorname{Re}s(g(z),z=2)+\operatorname{Re}s(g(z),z=-1)+$$

$$2\pi j[\operatorname{Re}s(g(z),z=j2)]=\pi j[-\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{15}]+2\pi j\frac{3-j}{160}=\pi j[-\frac{3}{80}]+2\pi j\frac{3-j}{160}=\pi j[-\frac{3}{80}+\frac{3}{80}-\frac{j}{80}]$$

$$\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x-2)(x+1)(x^2+4)}=\pi j[-\frac{j}{80}]=\frac{\pi}{80}$$

مثال **22**:حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x-1}{(x^2+1)(x^3-x)}dx$ را بدست آورید.

حل: تابع $g(z)=\frac{2z-1}{(z^2+1)(z^3-z)}$ را در نظر میگیریم. این تابع سه قطب حقیقی در $z=0,\ z=-1,\ z=1$ و یک قطب موهومی بالای محور حقیقی در $z=j$ دارد. برای محاسبه مانده قطب z_i تابع $\frac{P(z)}{Q(z)}$ از رابطه $\frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}$ استفاده میکنیم در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\pi j[\operatorname{Re}s(g(z),z=0)+\operatorname{Re}s(g(z),z=-1)+\operatorname{Re}s(g(z),z=1)]+2\pi j[\operatorname{Re}s(g(z),z=j)]=$$

$$\pi j[\frac{2(0)-1}{(0^2+1)(3(0)^2-1)}+\frac{2(-1)-1}{((-1)^2+1)(3(-1)^2-1)}+\frac{2(1)-1}{(1^2+1)(3(1)^2-1)}]+2\pi j\frac{2j-1}{2j(j^3-j)}=$$

$$\pi j[\frac{-1}{-1}+\frac{-3}{4}+\frac{1}{4}]+2\pi j\frac{2j-1}{4}=\pi j[\frac{1}{2}]-\frac{\pi j}{2}-\pi=-\pi\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x-1}{(x^2+1)(x^3-x)}dx=-\pi$$

مثال **23**: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)}$ را بدست آورید.

حل: تابع $g(z)=\frac{1}{(z^2+2)(z-1)}$ را در نظر میگیریم. این تابع یک قطب حقیقی در $z=1$ و یک قطب مختلط بالای محور حقیقی در $z=j\sqrt{2}$ دارد بنابراین داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \pi j[\operatorname{Re}s(g(z), z=1)] + 2\pi j[\operatorname{Re}s(g(z), z= j\sqrt{2})] = \pi j[\frac{1}{(1^2+2)}] + 2\pi j\frac{1}{2j\sqrt{2}(j\sqrt{2}-1)} =$$

$$\pi[\frac{j}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}-j2}] = \pi[\frac{j}{3} - \frac{\sqrt{2}+j2}{6}] = \pi[\frac{j}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{j}{3}] = -\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$$

مثال **24**: حاصل انتگرال الف) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(x-x^5)(16-x^4)}$ و ب) تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{x}{x^4-1}$ را با استفاده از قضیه مانده ها بدست آورید.

حل الف: قطبهای تابع که باید مانده آنها را حساب کرد و در روی مسیر و یا نیم دایره به شعاع ∞ بالای صفحه s هستند عبارتند از:

$$x=0, x=-2, x=-1, x=1, x=2, x=j, x=2j$$

حال تابع $f(z) = \frac{e^{jz}}{(z-z^5)(16-z^4)}$ را در نظر میگیریم و از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x-x^5)(16-x^4)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x-x^5)(16-x^4)} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}dx}{(x-x^5)(16-x^4)} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}[I']$$

$$I' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}dx}{(x-x^5)(16-x^4)} = 2\pi j[(\operatorname{Re}sf(z), j) + (\operatorname{Re}sf(z), 2j)] + \pi j[\operatorname{Re}sf(z), 0) + \operatorname{Re}sf(z), -1) +$$

$$\operatorname{Re}sf(z), -2) + \operatorname{Re}sf(z), 1) + \operatorname{Re}sf(z), 2)] \qquad (\operatorname{Re}sf(z), j) = \frac{e^{j(j)}}{(1-5j^4)(16-j^4)} = \frac{e^{-1}}{-4\times 15} = -\frac{e^{-1}}{60}$$

$$(\operatorname{Re}sf(z), 2j) = \frac{e^{j(2j)}}{[2j-(2j)^5][-4(2j)^3]} = \frac{e^{j(2j)}}{-30j[-4(2j)^3]} = \frac{e^{-2}}{960}$$

$$(\operatorname{Re}sf(z), 0) = \frac{e^{j0}}{(1-5\times 0^4)(16-0^4)} = \frac{1}{16} \qquad (\operatorname{Re}sf(z), -1) = \frac{e^{j(-1)}}{(1-5\times -1^4)(16-(-1)^4)} = \frac{e^{-j}}{-4\times 15} = -\frac{e^{-j}}{60}$$

$$(\operatorname{Re}sf(z), 1) = \frac{e^{j(1)}}{(1-5\times 1^4)(16-(1)^4)} = \frac{e^{j}}{-4\times 15} = -\frac{e^{j}}{60}$$

$$(\operatorname{Re}sf(z), -2) = \frac{e^{j(-2)}}{[-2-(-2)^5](-4(-2)^3)} = \frac{e^{-2j}}{30\times 32} = -\frac{e^{-2j}}{960}$$

$$(\operatorname{Re}sf(z), 2) = \frac{e^{j(2)}}{[2-(2)^5](-4(2)^3)} = \frac{e^{2j}}{-30\times -32} = -\frac{e^{2j}}{960} \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}dx}{(x-x^5)(16-x^4)} = 2\pi j[-\frac{e^{-1}}{60} + \frac{e^{-2}}{960}] + \pi j[\frac{1}{16} - \frac{e^{-j}}{60} - \frac{e^{-j}}{60} - \frac{e^{-2j}}{960} - \frac{e^{-2j}}{960}] =$$

$$2\pi j[-\frac{e^{-1}}{60} + \frac{e^{-2}}{960}] + \pi j[\frac{1}{16} - \frac{1}{30}\cos 1 - \frac{1}{480}\cos 2] \rightarrow I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}[I'] = \pi[-\frac{e^{-1}}{60} + \frac{e^{-2}}{960} + \frac{1}{32} - \frac{1}{60}\cos 1 - \frac{1}{960}\cos 2]$$

حل ب)

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-j\omega x}}{x^4-1}dx$$

حال اگر $f(z)=\frac{ze^{-j\omega z}}{z^4-1}$ در اینصورت قطب ها عبارتند: $z=-1,\ z=1,\ z=j$ در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-j\omega x}}{x^4-1}dx=2\pi j[Res(f(z),j)]+\pi j[Res(f(z),-1)+\pi j[Res(f(z),1)]$$

$$Res(f(z),j)=\frac{je^{-j\omega(j)}}{4(j)^3}=\frac{je^{\omega}}{-4j}=-\frac{1}{4}e^{\omega}\quad Res(f(z),-1)=\frac{-e^{-j\omega(-1)}}{4(-1)^3}=\frac{e^{j\omega}}{4}\qquad [Res(f(z),1]=\frac{e^{-j\omega(1)}}{4(1)^3}=\frac{e^{-j\omega}}{4}$$

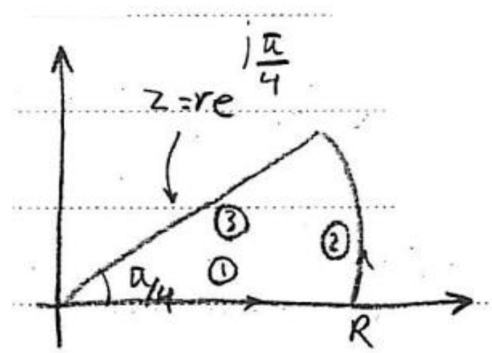
$$\rightarrow F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-j\omega x}}{x^4-1}dx=2\pi j(-\frac{1}{4}e^{\omega})+j\pi(\frac{e^{j\omega}}{4}+\frac{e^{-j\omega}}{4})=\frac{j\pi}{2}(\cos\omega-e^{\omega})$$

ملاحظه میشود که چون تابع فرد است پس تبدیل فوریه آن موهومی خالص است.

مثال 25: با استفاده از قضیه مانده ها ثابت کنید $\int_{0}^{\infty}\sin x^2dx=\int_{0}^{\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

حل: برای مسیر بسته نشانداده شده $\oint_C e^{jz^2}dz=0$ **زیرا تابع زیر انتگرال هیچ قطبی داخل مسیر بسته ندارد. حال انتگرال روی مسیر بسته را به سه مسیر مطابق شکل تبدیل میکنیم:**

$$\oint_C e^{jz^2}dz=0=\int_1 e^{jz^2}dz+\int_2 e^{jz^2}dz+\int_3 e^{jz^2}dz$$



برای مسیر 1 داریم $z=x\rightarrow dz=dx$ **برای مسیر 2 داریم:**

$$z=\mathrm{Re}^{j\theta}\rightarrow dz=Rjd\theta e^{j\theta},\quad \theta:0\rightarrow\frac{\pi}{4}\quad R\rightarrow\infty$$

و برای مسیر 3 داریم $z=re^{j\frac{\pi}{4}}\rightarrow dz=dre^{j\frac{\pi}{4}}\quad r:R\ \ to\ \ 0$ **در نتیجه داریم:**

$$\oint_C e^{jz^2}dz=0=\int_1 e^{jz^2}dz+\int_2 e^{jz^2}dz+\int_3 e^{jz^2}dz=\int_0^R e^{jx^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{jR^2e^{j2\theta}}Rje^{j\theta}d\theta+\int_R^0 e^{jr^2e^{j\frac{\pi}{2}}}e^{j\frac{\pi}{4}}dr=$$

$$\int_0^R e^{jx^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{jR^2(\cos2\theta+j\sin2\theta)}Rje^{j\theta}d\theta+e^{j\frac{\pi}{4}}\int_R^0 e^{jr^2(j)}dr=\int_0^R e^{jx^2}dx+\mathrm{Re}^{-R^2\sin2\theta}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{jR^2\cos2\theta}je^{j\theta}d\theta+e^{j\frac{\pi}{4}}\int_R^0 e^{-r^2}dr=0$$

لازم به ذکر است که $e^{j\frac{\pi}{2}}=j$ **حال اگر** $R\rightarrow\infty$ **عبارت** $\mathrm{Re}^{-R^2\sin2\theta}$ **به سمت صفر میل میکند در نتیجه انتگرال روی مسیر 2 به سمت صفر میل میکند بنابراین خواهیم داشت:**

$$\int_0^\infty e^{jx^2}dx + e^{j\frac{\pi}{4}}\int_R^0 e^{-r^2}dr = 0 \rightarrow \int_0^\infty (\cos x^2 + j\sin x^2)dx - e^{j\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-r^2}dr = 0 \rightarrow \int_0^\infty (\cos x^2 + j\sin x^2)dx = e^{j\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-r^2}dr$$

$$\rightarrow \int_0^\infty (\cos x^2 + j\sin x^2)dx = (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})\int_0^\infty e^{-r^2}dr \rightarrow \int_0^\infty \cos x^2 dx + j\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}dr + j\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}dr \rightarrow$$

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}dr \qquad \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}dr$$

میدانیم $\int_0^\infty e^{-r^2}dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ در نتیجه داریم:

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

مثال 26: ثابت کنید $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

حل چون تابع زیر انتگرال زوج است پس میتوانیم بنویسیم: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. حال داریم:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{x}dx$$

حال تابع $g(x) = \frac{e^{jx}}{x}$ در نظر میگیریم این تابع قطب موهومی ندارد و فقط یک قطب حقیقی در $x=0$ دارد در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^\infty g(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{x}dx = \pi j[\mathrm{Re}\,s(g(z), z=0)] = \pi j[\lim_{z\to 0} z\frac{e^{jz}}{z},\ z=0] = \pi j \rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{x}dx = j\pi$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{x}dx = \pi \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

مثال 27: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \omega x}{x^2+k^2}dx$ را بدست آورید.

حل: تابع زیر انتگرال فقط یک قطب موهومی $x = jk$ بالای محور حقیقی دارد. حالا تابع $g(z) = \frac{e^{j\omega z}}{z^2+k^2}$ را در نظر میگیریم.

$$\int_{-\infty}^\infty g(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega x}}{x^2+k^2}dx = 2\pi j[\mathrm{Re}\,s(g(z), z=jk] = 2\pi j[\mathrm{Re}\,s(\frac{e^{j\omega z}}{z^2+k^2}, z=jk] = 2\pi j\frac{e^{j\omega(jk)}}{2(jk)} = \frac{\pi e^{-\omega k}}{k}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi e^{-\omega k}}{k} \rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\omega x}{x^2+k^2}dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi e^{-\omega k}}{k}$$

بنابراین برای محاسبه انتگرالهای $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax dx$ و $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax dx$ باید تابع $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}e^{jaz}$ را در نظر بگیریم و از رابطه زیر

حساب کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos axdx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\operatorname{Re}[2\pi j\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}s(g(z),z=z_i)+\pi j\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}s(g(z),z=z_j)]$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin axdx=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\operatorname{Re}[2\pi j\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}s(g(z),z=z_i)+\pi j\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}s(g(z),z=z_j)]$$

که z_i ها قطبهای موهومی با قسمت موهومی مثبت و z_j ها قطبهای حقیقی تابع $g(z)$ میباشند.

مثال**28**:حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx$ را بدست اورید.

حل: تابع $g(z)=\frac{e^{jz}}{z(1+z^2)}$ را در نظر میگیریم. این تابع یک قطب حقیقی در $z=0$ و یک قطب موهومی بالای محور حقیقی در $z=j$ دارد

در نتیجه میتوانیم بنویسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x(1+x^2)}dx=2\pi j[\operatorname{Re}s(g(z),z=j]+\pi j[\operatorname{Re}s[g(z),z=0]=2\pi j[\frac{e^{j(j)}}{j(2j)}]+\pi j[\frac{e^{j(0)}}{1+0^2}]\rightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x(1+x^2)}dx=j\pi(1-e^{-1})\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x(1+x^2)}dx=\pi(1-e^{-1})$$

مثال **29**: با استفاده از قضیه مانده ها انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{1-x^4}$ را بدست آورید.

حل : میتوانیم بنویسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{1-x^4}=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}$$

انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}$ را گرفته و قسمت حقیقی آنرا انتخاب میکنیم. تابع زیر انتگرال دو قطب حقیقی $x=-1$ و $x=1$ و یک قطب مختلط بالای محور $x=j$ دارد بنابراین داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}=2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{e^{jz}}{1-z^4},j)]+\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{e^{jz}}{1-z^4},z=-1)+\operatorname{Re}s(\frac{e^{jz}}{1-z^4},z=1)]=2\pi j\frac{e^{j(j)}}{-4(j)^3}+\pi j[\frac{e^{j(-1)}}{-4(-1)^3}+$$
$$\pi j\frac{e^{j(1)}}{-4(1)^3}]=2\pi j\frac{e^{-1}}{4j}+\frac{\pi j}{4}(e^{-j}-e^{j})=\frac{\pi}{2}e^{-1}+\frac{\pi j}{4}(-2j\sin 1)=\frac{\pi}{2}(e^{-1}+\sin 1)\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{1-x^4}=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}=\frac{\pi}{2}(e^{-1}+\sin 1)$$

محاسبه انتگرالهای $\int_0^{2\pi}f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ با استفاده از قضیه مانده ها

برای حل چنین انتگرالهای از تعریف $z = e^{j\theta}$ استفاده میکنیم در اینصورت $dz = je^{j\theta}d\theta = jzd\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{jz}$ و:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \qquad \sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = \frac{1}{2j}(z - \frac{1}{z})$$

که با جایگزینی در انتگرال $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ انتگرال به صورت $\oint_{|z|=1} g(z)dz$ در می آید که با قضیه مانده ها قابل حل است. مثالهای زیر این مسئله را روشن میسازد.

مثال **30**:حاصل $\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}]d\theta$ را بدست اورید.

حل:

$$\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}]d\theta \qquad z = e^{j\theta} \qquad dz = jd\theta e^{j\theta} = jd\theta z \rightarrow d\theta = \frac{dz}{jz} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) =$$

$$\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \qquad \sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = \frac{1}{2j}(z - \frac{1}{z}) \rightarrow \oint_{|z|=1}[\frac{1}{3 - 2\times\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) + \frac{1}{2j}(z - \frac{1}{z})}]\frac{dz}{jz}$$

$$\oint_{|z|=1}[\frac{dz}{3jz - (jz^2 + j) + \frac{1}{2}(z^2 - 1)}] = \oint_{|z|=1}\frac{2}{z^2(1-2j) + 6jz - (2j+1)}]dz$$

قطبها عبارت زیر انتگرال عبارتند: $z_1 = \frac{2-j}{5}$ و $z_2 = 2 - j$ که قطب دوم خارج دایره واحد است پس فقط باید مانده قطب اول را حساب کنیم یعنی:

$$\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}]d\theta = 2\pi j[\operatorname{Re}s\frac{2}{(1-2j)z^2 + 6jz - (1+2j)}, (\frac{j-2}{5}] = 2\pi j\frac{2}{2\frac{2-j}{5}(1-2j) + 6j} = \pi$$

مثال **31**: حاصل انتگرال $-1 < p < 1$ $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta + p^2}$ را بدست آورید.

حل:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta + p^2} \qquad z = e^{j\theta} \rightarrow dz = jd\theta e^{j\theta} = jzd\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{jz} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta + p^2} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z[1 - 2p\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) + p^2]} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{[z(1+p^2) - p(z^2+1)]} =$$

$$\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{[-pz^2 + z(1+p^2) - p)]} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-p(z - \frac{1}{p})(z - p)}$$

قطبهای تابع زیر انتگرال عبارتند $z=p$ و $z=\frac{1}{p}$ که با توجه به شرط $-1<p<1$ فقط قطب $z=p$ داخل مسیر یعنی دایره واحد است بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)}=\frac{1}{j}2\pi j[\operatorname{Re}z\frac{1}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)},z=p]=2\pi\frac{1}{-p(p-\frac{1}{p})}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}$$

مثال **32**: حاصل $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$ را بدست آورید.

حل:

$$z=e^{j\theta}\rightarrow dz=je^{j\theta}d\theta=jzd\theta\rightarrow d\theta=\frac{dz}{jz}\quad \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}=\oint_{|z|=1}(\frac{1}{5-4\frac{1}{2}(z+z^{-1})})\frac{dz}{jz}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}(\frac{1}{5z-2(z^2+1)})dz=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}(\frac{1}{5z-2(z^2+1)})dz=$$

$$\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}(\frac{1}{-2(z-0.5)(z-2)})dz$$

تابع زیر انتگرال دو قطب در $z_1=0.5,\quad z_2=2$ دارد که فقط قطب $z_1=0.5$ داخل مسیر بسته واحد است در نتیجه:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}(\frac{1}{-2(z-0.5)(z-2)})dz=\frac{1}{j}2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{1}{-2(z-0.5)(z-2)},z=0.5]=2\pi\frac{1}{-2(0.5-2)}=\frac{2\pi}{3}$$

موفق باشید

محمود محمدطاهری خرداد 1401