



## ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۹

نیم سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

## نگاشت مختلط

پاسخ سوال ۱: (۲۰ نمره)

**حل تمرین ۱** تصویر (Image) خطوط  $x=c$  و  $y=d$  تحت نگاشت  $w=z^2$

$$\Rightarrow z=x+jy \Rightarrow w=f(z)=z^2=(x+jy)^2=x^2-y^2+j2xy=u+jv$$

$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \xrightarrow{x=c} \begin{cases} u=c^2-y^2 \\ v=2cy \end{cases} \xrightarrow{\text{رابطه بین } u \text{ و } v} y=\frac{v}{2c} \Rightarrow u=c^2-\frac{v^2}{4c^2}$$

معادله سهمی افقی در صفحه  $w$  با رأس  $|c|^2$

**یادآوری:** معادله سهمی افقی  $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$

۱۰  $F(\alpha+\frac{p}{2}, \beta)$  کانون  $p \rightarrow$  پارامتر سهمی  $\frac{d}{p}$  رأس سهمی

به طور مشابه برای  $y=d$  نیز داریم:

$$\begin{cases} u=x^2-d^2 \\ v=2xd \end{cases} \Rightarrow x=\frac{v}{2d} \Rightarrow u=\frac{v^2}{4d^2}-d^2 \rightarrow$$

معادله سهمی افقی در صفحه  $w$



## ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۹

نیم سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۲: (۲۰ نمره)

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} r = e^x & 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow e \leq r \leq e^2 \\ \theta = y & \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

پاسخ سوال ۳: (۲۰ نمره)

حل تمرین ۳

تصور  $|z-1| < 1$  را در صفحه  $z$  ترسیم کنید.

فرض  $w = \frac{z-1}{z}$

متر جبری  $z$  را به  $w$  مناسب بنویسید و در عبارت  $|z-1| < 1$  قرار دهید:

$$\begin{aligned} \rightarrow w = \frac{z-1}{z} &\Rightarrow wz = z-1 \Rightarrow z(w-1) = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{w-1} \\ \rightarrow |z-1| < 1 &\Rightarrow z-1 = \frac{-w}{w-1} \Rightarrow |z-1| = \frac{|w|}{|w-1|} < 1 \\ \Rightarrow |w| < |w-1| &\xrightarrow{w=u+jv} |u+jv|^2 < |(u-1)+jv|^2 \Rightarrow u^2+v^2 < (u-1)^2+v^2 \\ \Rightarrow u < \frac{1}{2} &\text{ (در صفحه } w \text{)} \end{aligned}$$

15



## ریاضی مهندسی

### پاسخ تکلیف شماره ۹

نیم سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۴: (۲۰ نمره)

ابتدا تبدیل  $t = \cosh(z)$  را در نظر می‌گیریم:

$$t = \cosh z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad z = x + jy \quad \frac{-y + jx}{2} + \frac{y - jx}{2} = \frac{e^{-y} (\cosh x + j \sinh x) + e^y (\cosh x - j \sinh x)}{2}$$

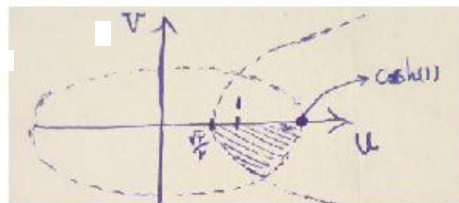
$$\Rightarrow t = \cosh y \cosh x - j \sinh y \sinh x \Rightarrow \begin{cases} u = \cosh y \cosh x \\ v = -\sinh y \sinh x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sinh^2 x + \cosh^2 x = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{(\cosh y)^2} + \frac{v^2}{(\sinh y)^2} = 1 \rightarrow \text{بیض (1)} \\ \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 y} - \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1 \rightarrow \text{هذلولی (2)} \end{cases}$$

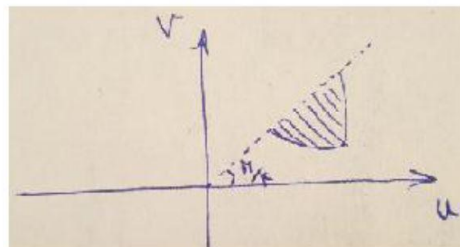
از (۱) و (۲) داریم:  $v = \tanh y \cdot u$

بین حالت ①، ② اشتراک منته می‌شود  
و باید دقت شود که  $\cosh x$ ،  $\sinh x$  در بازه‌ی مورد  
نظر، مثبت اند:

تصویر تحت نگاشت  $t$



انترایش فاز به اندازه  $\frac{\pi}{4}$ :  $w = e^{j\frac{\pi}{4}} t$   
تصویر تحت نگاشت  $w$ :





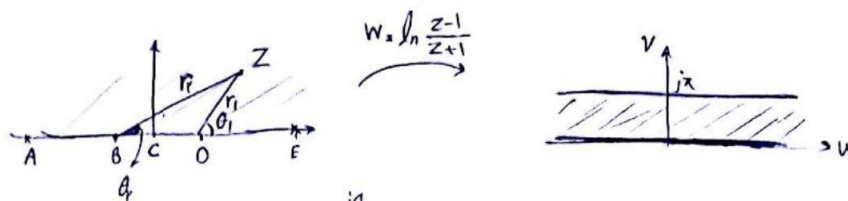
## ریاضی مهندسی

### پاسخ تکلیف شماره ۹

نیم سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۵: (۲۰ نمره)



$$W = \ln \frac{z-1}{z+1} \quad ; \quad \begin{matrix} z-1 = r_1 e^{j\theta_1} \\ z+1 = r_2 e^{j\theta_2} \end{matrix} \Rightarrow W = \ln \frac{r_1}{r_2} + j(\theta_1 - \theta_2) = u + jv$$

نقطه A:  $\theta_1 = \theta_2 = \pi \Rightarrow v = 0$  ;  $r_1 > r_2 \Rightarrow u = \ln \frac{r_1}{r_2} > 0$

نقطه B:  $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0 \Rightarrow v = \pi$  ;  $0 < r_1, r_2 < \infty \Rightarrow -\infty < u < +\infty$

نقطه E:  $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0 \Rightarrow v = 0$  ;  $r_1 < r_2 \Rightarrow u < 0$

$$A = \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta_1, \theta_2 = \pi} v = 0, u > 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0} \text{نقطه B}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta_1 = 0, \theta_2 = 0} v = 0, -\infty < u < +\infty$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta_1 = 0, \theta_2 = 0} \text{نقطه D}$$

$$E = \begin{pmatrix} +\infty \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta_1 = 0, \theta_2 = 0} v = 0, u < 0$$

$$v = \theta_1 - \theta_2 = \text{Arg}(z-1) - \text{Arg}(z+1) = \text{Arg} \frac{z-1}{z+1} = \text{Arg} \frac{(x+jy-1)}{(x+jy+1)} = \text{Arg} \left( \frac{x-1+jy}{x+1+jy} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x-1} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y}{x+1} \right)$$

موفق باشید - خان چرلی