

دانشگاه تهران- دانسگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰ ۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: د کشرمهدی طالع ماموله - حل تمرین: هلیا حسینی



برای بوالات خود دخصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com محاتبه ناید.

(1

الف)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < |1| \\ 0, & x > |1| \end{cases}$$

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} x \sin(\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cos(\omega x)}{\omega} \Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{\cos(\omega x)}{\omega} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega^2} - \frac{x \cos(\omega x)}{\omega} \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{2(\sin(\omega) - \omega \cos(\omega))}{\pi \omega^2}$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{2(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\pi\omega^{2}} \right) \sin(\omega x) d\omega$$

ب)

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

$$B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} |x| \cos(\omega x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^{0} -x \cos(\omega x) dx + \int_{0}^{1} x \cos(\omega x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1}{\omega^2} + \frac{\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1}{\omega^2} \right)$$



دانشگاه تهران- دانسگده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی- نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع مالوله - مل تمرین: هلیا حسینی



رای بوالات نود در خصوص این تمرین ارایاماسه helia.ho3eini@gmail.com محاتبه نایید.

$$=\frac{2(\omega\sin(\omega)+\cos(\omega)-1)}{\pi\omega^2}$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{2(\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1)}{\pi \omega^{2}} \right) \cos(\omega x) d\omega$$

(٢

الف)

$$f(x) = e^{-a|x|} \qquad a > 0$$

$$B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos(\omega x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{-ax} (\omega \sin(\omega x) - a\cos(\omega x))}{\omega^2 + a^2} \right) \Big|_{0}^{\infty} = \frac{2a}{\pi (\omega^2 + a^2)}$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{2a}{\pi(\omega^2 + a^2)} \right) \cos(\omega x) d\omega$$



دانشگاه تهران- دانشگره مهندسی برق و کامپوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰ ۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: د کشرمهدی طالع ماموله - حل تمرین: هلما حسینی



براى بوالات نود دخصوص اين تمرين مارايانامه helia.ho3eini@gmail.com محاتب نابد.

(ب

$$g(x) = \begin{cases} x - x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} -x^{2} \cos(\omega x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(\omega^2 x^2 - 2)\sin(\omega x) + 2x\omega\cos(\omega x)}{\omega^3} \right) \Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{-2((\omega^2-2)\sin(\omega)+2\omega\cos(\omega))}{\pi\omega^3}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} x \sin(\omega x) dx = \frac{2(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\pi\omega^{2}}$$

$$g(x) = \int_{0}^{\infty} \left[\left(\frac{-2((\omega^2 - 2)\sin(\omega) + 2\omega\cos(\omega))}{\pi\omega^3} \right) \cos(\omega x) + \left(\frac{2(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\pi\omega^2} \right) \sin(\omega x) \right] d\omega$$

(٣

$$B(a) = 0 \quad A(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos x) (\cos ax) dx = \frac{2\cos(\frac{a\pi}{2})}{\pi(1 - a^2)}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{1 - a^{2}} \cos ax \ da$$



دانشگاه تهران- دانسگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰ ۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: د کشرمهدی طالع ماموله - حل تمرین: هلیا حسینی



(4

برای بوالات نود در خصوص این تمرین بارایامه helia.ho3eini@gmail.com محاتبه نایید.

$$x = 0 \to f(0) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{1 - a^{2}} da \to x = \frac{a\pi}{2} \to \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{\pi^{2} - 4x^{2}} dx = 1/4$$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-w} \cos \omega x d\omega = [L\{\cos(\omega x)\}]_{s=1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = \int_0^\infty tan^{-1} \, \omega \sin(\omega x) \, d\omega \to B(\omega)$$
 فرم انتگرال فوریه $B(\omega x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(x) \sin(\omega x) \, dx = tan^{-1} \omega$

$$\frac{d(B(\omega))}{d\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x g(x) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{1+\omega^2} = \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x dx = f(\omega)$$

$$\frac{2}{\pi} x g(x) = e^{-x} \quad x > 0$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-x}}{x} \quad x > 0$$

$$\xrightarrow{g(x)} g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{e^{-x}}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{e^{x}}{x} & x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-|x|}}{x}$$



دانشگاه تهران- دانسگده مهندسی برق و کاپپوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - مل تمرن: هلما حسینی



برای بوالات خود دخصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com محاتبه نایید.

(Δ

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} P(\omega) \sin(\omega x) d\omega \Rightarrow P(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

$$\frac{dP(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) . x \cos(\omega x) dx$$

$$xf(x) = \int_{0}^{\infty} q(\omega)\cos(\omega x) d\omega \Rightarrow q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\cos(\omega x) dx$$

 $\Rightarrow P'(\omega) = q(\omega)$

(8

:تابع f(x) زوج است پس داریم

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$\to \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos \omega x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos x \cos \omega x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [\cos((\omega + 1)x)] \, dx$$

$$+\cos((\omega-1)x)]dx = \frac{1}{1-\omega^2}\cos(\frac{\pi}{2}\omega)$$

$$\to f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \omega^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) d\omega$$



دانتگاه تهران- دانسگده مهندی برق و کاپپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: دکترمهدی طابع ماموله - حل تمرین: حلیا حسینی



براى بوالات نود دخصوص اين تمرين ارايامات helia.ho3eini@gmail.com محاتب نايد.

1

تابع f(x) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-kx}, & x > 0 \\ -e^{-kx}, & x < 0 \end{cases}$$

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-kx} \sin(\omega x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + k^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + k^2} \sin(\omega x) d\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + k^2} \sin(\omega x) d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + k^2} \sin(\omega x) d\omega = \pi e^{-kx} \qquad x > 0$$

$$k = \sqrt{8i} \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + 8i} \sin(\omega x) d\omega = \pi e^{-\sqrt{8i}x}$$

$$k = i\sqrt{8i} \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 - 8i} \sin(\omega x) d\omega = \pi e^{-i\sqrt{8i}x}$$

$$\frac{\pi(e^{-\sqrt{8i}x} + e^{-i\sqrt{8i}x})}{8i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^4 + 64} \sin(\omega x) d\omega$$



دانشگاه تهران- دانسگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰ ۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: د کشرمهدی طالع ماموله - حل تمرین: هلیا حسینی



براى بوالات نود دخصوص اين تمرين ما رايانامه helia.ho3eini@gmail.com محاتبه نابد.

()

$$A(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \ dx = \frac{1}{a^2 + 4}$$

$$B(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx = \frac{a}{a^2 + 4}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos^3 x dx = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 3x \, dx + 3 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x \, dx \right)$$
$$= \frac{\pi}{4} A(3) + \frac{3\pi}{4} A(1) = \frac{11\pi}{65}$$

(9

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \omega^{2}} \cos(\omega x) d\omega \Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \omega^{2}} \xrightarrow{\omega = 0} \frac{1}{2} = \int_{0}^{\infty} f(x) dx$$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} -xf(x)\sin(\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-2\omega}{(1+\omega^{2})^{2}} \Longrightarrow \int_{0}^{\infty} x\sin(2x)f(x) dx = \frac{2}{25}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} (1 + x\sin(2x)f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{25} = \frac{29}{50}$$



دانشگاه تهران- دانسگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۳: انتگرال فوریه مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - حل تمرین: هلیاحسینی



برای موالات نود درخصوص این تمرین ارایامامه helia.ho3eini@gmail.com محاتبه ناید.

(1.

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x} + 2\delta(x)) \cos(wx) dx$$

چون تابع زوج است می توان گفت:

$$= \frac{1}{\pi} \left(2 \int_0^\infty e^{-x} \left(e^{j\omega x} + e^{-j\omega x} \right) dx + 2 \cos 0 \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(2 \int_0^\infty \left(e^{(jw-1)x} + e^{(-jw-1)x} \right) dx + 2 \right) = \frac{2w^2 + 6}{\pi (w^2 + 1)}$$

$$w = a \to g(a) = \frac{2a^2 + 6}{\pi (a^2 + 1)}$$