ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۳

نیم‌سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

انتگرال و تبدیل فوریه

پاسخ سوال ۱: (۱۰ نمره)

$$Sine\ Fourier\ Integral:\ A(\omega)=0\ and\ B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^a sin\omega x\, dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-cosa\omega}{\omega}\right)$$

$$Parseval:\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f^2(x)dx=\int_0^\infty B^2(\omega)\, d\omega\ \rightarrow\ \frac{2}{\pi}\int_0^a dx=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\left(\frac{1-cosa\omega}{\omega}\right)^2 d\omega$$

$$if\ a=2\ \rightarrow\ \frac{2}{\pi}\int_0^2 dx=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\left(\frac{1-cos2\omega}{\omega}\right)^2 d\omega\ \rightarrow\ \frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{4sin^4\omega}{\omega^2}d\omega\ \rightarrow\ \int_0^\infty\frac{sin^4\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{4}$$

پاسخ سوال ۲: (۱۵ نمره)

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-x}sinx}{x}sin\omega x\, dx\ \rightarrow\ \frac{df(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}sinx\, cos\omega x\, dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}[sin\,(1+\omega)x+sin\,(1-\omega)x]\, dx=\frac{1}{\pi}L\{sin(1+\omega)\,x+sin\,(1-\omega)x\}\big|_{s\,=\,1}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\omega}{1+(1+\omega)^2}+\frac{1-\omega}{1+(1-\omega)^2}\right]\rightarrow\ f(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{1+\omega}{1+(1+\omega)^2}+\frac{1-\omega}{1+(1-\omega)^2}\right]d\omega$$

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}Ln(1+(1+\omega)^2)-\frac{1}{2}Ln(1+(1-\omega)^2)\right]+c\ \rightarrow\ f(\omega)=\frac{1}{2\pi}Ln\left(\frac{2+\omega^2+2\omega}{2+\omega^2-2\omega}\right)$$

پاسخ سوال ۳: (۱۵ نمره)

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)cos\omega x\, d\omega\rightarrow A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)cos\omega x\, dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)cos\omega x\, dx$$

$$\rightarrow\int_0^\infty f(x)dx=\frac{\pi}{2}A(\omega)\big|_{\omega\,=\,0}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)(-xsin\omega x)dx \to \int_0^\infty xf(x)sin\omega x\,dx=\frac{-\pi}{2}\frac{dA(\omega)}{d\omega}$$

$$\to \int_0^\infty xf(x)sin\omega x\,dx=\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2} \to \int_0^\infty xf(x)sin2x\,dx=\frac{2}{25}$$

$$so:\ \int_0^\infty f(x)(1+xsin2x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{25}=\frac{29}{50}$$

پاسخ سوال ۴ قسمت (الف): (۱۰ نمره)

$$f(x)=\frac{sinx}{x} \to xf(x)=sinx \to F\{xf(x)\}=F\{sinx\}\,,sinx=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$as\ we\ know\ F\{1\}=\sqrt{2\pi}\delta(\omega) \to F\{sinx\}=\frac{1}{2i}\left(F\{1\}\Big|_{\omega=\omega-1}-F\{1\}\Big|_{\omega=\omega+1}\right)$$

$$=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\big)$$

$$F\{xf(x)\}=i\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\big) \to \frac{dF(\omega)}{d\omega}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\big)$$

$$integrate:\ F(\omega)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\big(\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\big)\,d\omega=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(u(\omega-1)-u(\omega+1)\big)$$

$$F(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & ,\ |\omega|<1\\ 0 & ,\ |\omega|>1\end{cases}$$

پاسخ سوال ۴ قسمت (ب): (۱۵ نمره)

$$F\{e^{-a|x|}\}=\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|}.e^{-j\omega x}dx=\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|}(cos\omega x-jsin\omega x)dx=\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|}cos\omega x\,dx$$

$$=2\int_0^\infty e^{-ax}cos\omega x\,dx=2L\{cos\omega x\}\Big|_{s=a}=\frac{2s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=a}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\to \int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|}.e^{-j\omega x}dx=\frac{2a}{a^2+\omega^2}\quad (I)$$

ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۳

نیم‌سال دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱

$$Parseval: \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F^2(\omega)|\, d\omega \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}\, d\omega$$

$$\rightarrow 2\int_{0}^{\infty} e^{-2ax}dx = \frac{4a^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$$

پاسخ سوال ۴ قسمت (ج): (۲۰ نمره)

اگر از طرفین رابطه (I) نسبت به ω مشتق بگیریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-jx)e^{-a|x|}.\, e^{-j\omega x}dx = \frac{-4a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (jxe^{-a|x|}).\, e^{-j\omega x}dx = \frac{4a\omega}{(a^2+\omega^2)^2} \quad (II)$$

و $g(x) = jxe^{-a|x|}$ را تعریف می‌کنیم و تبدیل فوریه آن نیز $\frac{4a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$است.

حال اگر از طرفین رابطه (II) نسبت به a مشتق بگیریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-jx|x|e^{-a|x|}).\, e^{-j\omega x}dx = \frac{4\omega(a^2+\omega^2)^2 - 4a(a^2+\omega^2)(4a\omega)}{(a^2+\omega^2)^4} = \frac{4\omega^3 - 12a^2\omega}{(a^2+\omega^2)^3}$$

اگر $h(x) = -jx|x|e^{-a|x|}$ را در نظر بگیریم، تبدیل فوریه آن $\frac{4\omega^3-12a^2\omega}{(a^2+\omega^2)^3}$خواهد بود و خواهیم داشت که:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega x}d\omega \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\omega^3 - 12a^2\omega}{(a^2+\omega^2)^3}e^{j\omega x}d\omega = -2j\pi x|x|e^{-a|x|} \quad (III)$$

اگر در رابطه (III) قرار دهیم $a = \sqrt{2}\,, x = 0$ و مخرج کسر را گسترده کنیم خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\omega^3 - 24\omega}{\omega^6 + 6\omega^4 + 12\omega^2 + 8}d\omega = 0$$

ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۳

نیم‌سال دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۵: (۱۵ نمره)

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x-t)dt \;\; \rightarrow g(x) = f(x) * h(x) \;\; \rightarrow G(\omega) = F(\omega).H(\omega)$$

$$F(\omega) = F\{e^{-a|x|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}.e^{-j\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}(cos\omega x - jsin\omega x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}cos\omega x\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax}cos\omega x\, dx = 2L\{cos\omega x\}\Big|_{s\,=\,a} = \frac{2s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s\,=\,a} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$H(\omega) = F\{Arc\; cotx\} \;\; \rightarrow \;\; h(x)' = \frac{-1}{1+x^2} \;\; \rightarrow \;\; F\{h(x)'\} = F\left\{\frac{-1}{1+x^2}\right\} = j\omega H(\omega) = -\pi e^{-|\omega|}$$

$$\rightarrow H(\omega) = \frac{-\pi e^{-|\omega|}}{j\omega} \;\; \rightarrow F\{g(x)\} = G(\omega) = F(\omega).H(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,\frac{-\pi e^{-|\omega|}}{j\omega}$$

موفق باشید – خان چرلی