



(۱) وجود حد توابع زیر را بررسی کنید. در صورت وجود حد آنها را بدست آورید.

- الف) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$
ب) $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z + 1}$
ج) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$
د) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re}(z)}{|z|}$

(۲) معادلات کوشی-ریمان را برای تابع $f(z)$ در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید و با توجه به آن بگویید که آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر می باشد یا خیر.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{y^3 + ix^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(۳) بررسی کنید توابع مختلط زیر در چه نقاطی تحلیلی می باشند.

- الف) $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - y^2) + i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
ب) $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

(۴) معادلات کوشی ریمان را برای تابع $f(z)$ بررسی کنید و سپس ناحیه ای که در آن $f(z)$ تحلیلی می باشد را مشخص کرده و $f'''(i)$ را حساب کنید.

$$f(z) = \frac{x^3 + xy^2 + x + i(x^2y + y^3 - y)}{x^2 + y^2}$$

(۵) نشان دهید که معادلات کوشی-ریمان برای تابع $f(z)$ در کل صفحه ی مختلط برقرار می باشند اما همچنان تابع $f(z)$ در نقطه $z = 0$ مشتق پذیر نمی باشد. (امتیازی)

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4}), & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

(۶) قسمت حقیقی یک تابع مختلط به صورت

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2 + 30x + cxy^2 + 29y^2 - 10$$

می باشد

الف) ضرایب a , b و c را به گونه ای بدست آورید که این تابع همساز شود.

ب) قسمت موهومی آن یعنی $v(x, y)$ را بدست آورید.

ج) اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ باشد و $f(0) = -10$ باشد، آنگاه $f''(i)$ را بدست آورید.

(۷) اگر $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ تابعی تحلیلی باشد با فرض اینکه $u(r, \theta) = r \cos(\theta) \ln(r) - r\theta \sin(\theta)$ باشد، $v(r, \theta)$ و $f(z)$ را بیابید و سپس با توجه به آن $f'''(i)$ را بدست آورید.

موفق باشید.