



به نام خدا
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر



ریاضیات مهندسی

تمرین کامپیوتری ۱: تحلیل فوریه

استاد:
دکتر مهدی طالع ماسوله

طراح تمرین:
محمدعلی شاکردرگاه
سید نیما هاشمی

۱	مقدمه	۱
۱	سری فوریه	۲
۲	توابع متعامد	۳
۴	تبدیل فوریه	۴

در فصل اول درس ریاضیات مهندسی با تحلیل فوریه آشنا شدید. اکنون می‌توانید سری فوریه را بر اساس هارمونیک‌های متناسب برای توابع مختلف بدست آورید. همچنین همگرایی سری فوریه را با استفاده از قضایای مربوطه بررسی نمودید. در ادامه شکل مختلط سری فوریه را آموختید و با انتگرال فوریه و تبدیل فوریه آشنا شدید. رابطه انرژی سیگنال را در حوزه زمان و فوریه بررسی کردید که به آن رابطه پارسوال گفته می‌شود.

هدف از این تمرین کامپیوتری بررسی مفاهیم آموخته شده با استفاده از تمرین‌های ساده، بدست آوردن درک عمیق‌تر نسبت به مباحث تحلیل فوریه در درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها و در نهایت، ارتقا توانایی شما در برنامه‌نویسی با نرم‌افزار MATLAB می‌باشد.

۲ سری فوریه

همانطور که در فصل اول آموختید، سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $[x_0, x_1]$ با استفاده از معادله ۱ بدست می‌آید. سری فوریه این تابع، $\hat{f}(x)$ ، تابعی متناوب با دوره تناوب $T = x_1 - x_0$ می‌باشد که تنها در بازه $[x_0, x_1]$ با تابع $f(x)$ برابر است.

$$\hat{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \quad (۱)$$

a_n و b_n ضرایب سری فوریه نامیده می‌شوند که از رابطه ۲ بدست می‌آیند.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \quad (۱-۲)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \quad (۲-۲)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \quad (۳-۲)$$

- در محیط MATLAB تابعی با نام `fourierSeriesCalc` بنویسید که ورودی‌های آن عبارتند از:

■ `func`: تابع $f(x)$ که به صورت `symbolic` تعریف شده است.

■ `xinterval`: برداری که مقدار x_0 و x_1 در آن قرار دارد.

■ `N`: تعداد ضرایب سری فوریه.

- خروجی‌های تابع `fourierSeriesCalc` عبارتند از:

■ `a0`: ضریب a_0 .

■ `a`: بردار $1 \times N$ که بیانگر ضرایب a_n می‌باشد.

■ `b`: بردار $1 \times N$ که بیانگر ضرایب b_n می‌باشد.

■ `T`: دوره تناوب تابع $\hat{f}(x)$ که برابر است با $T = x_1 - x_0$.

- بر اساس رقم یکان شماره دانشجویی خود، تابع $f(x)$ را به صورت `symbolic` تعریف کنید. اگر رقم دهگان شماره دانشجویی شما m باشد، x_0 و x_1 را با توجه به آن تعیین کنید و تابع $f(x)$ را با استفاده از دستور `fplot` در بازه $[x_0 - T, x_1 + T]$ رسم کنید.

$$0) f(x) = \Pi(x), \quad x_0 = -1 - \frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$$

$$1) f(x) = \Lambda(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$$

$$2) f(x) = \text{sgn}(x)\Lambda(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$$

$$3) f(x) = x, \quad x_0 = -\frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$$

$$4) f(x) = x^2, \quad x_0 = -\frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$$

$$5) f(x) = x^3, \quad x_0 = -\frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$$

$$6) f(x) = \cos(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$$

- 7) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$
 8) $f(x) = \ln(x), \quad x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$
 9) $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \bmod(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bmod(m, 3)$

- با استفاده از تابع `fourierSeriesCalc` ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ را در بازه $[x_0, x_1]$ به ازای $N = 50$ بدست آورید.
- تابع $\hat{f}(x)$ را با استفاده از معادله ۱ و ضرایبی که بدست آوردید به ازای $N = 1, 5, 10, 25, 50$ به صورت symbolic تعریف کنید و بر روی نمودار تابع $f(x)$ رسم کنید. برای این کار در یک حلقه `for`، به ازای هر N ، در یک `figure` جدید، نمودار $\hat{f}(x)$ را بر روی $f(x)$ رسم کنید. در نهایت باید ۵ شکل تولید گردد.
- با استفاده از دستور `title`، `xlabel`، `ylabel` و `legend` اطلاعات لازم را به شکل اضافه کنید.
- بدون مشتق گیری از تابع خطا اثبات کنید بهترین تقریب برای تابع $f(x)$ با تعداد حملات متناهی و با معیار خطای توان دوم، سری فوریه تابع است. خطای توان دوم از رابطه ۳ بدست می آید.

$$E = \int_{x_0}^{x_1} |f(x) - \hat{f}(x)|^2 dx \quad (۳)$$

- مقدار خطای توان دوم، E ، را به ازای $N = 1$ تا $N = 50$ بدست آورید و به صورت تابعی از N رسم کنید.

۳ توابع متعامد

در درس با مفهوم تعامد^۱ و توابع متعامد^۲ آشنا شدید. ضرب داخلی^۳ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مطابق رابطه ۴ تعریف می شود

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(\bar{x})w(x)dx \quad (۴)$$

که $w(x)$ تابع وزن^۴ نامیده می شود. دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ متعامد نامیده می شوند اگر

$$\langle f, g \rangle_w = 0 \quad (۵)$$

باشد. نرم^۵ تابع $f(x)$ از رابطه ۶ بدست می آید.

$$\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f \rangle_w} \quad (۶)$$

مجموعه ای از توابع square-integrable با مقادیر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید،

$$\Phi = \{\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}\}_{n=0}^{\infty} \quad (۷)$$

که دو به دو متعامد هستند. بنابراین می توان تابع $f(x)$ را در بازه $[a, b]$ به صورت مجموعه ای از پایه های متعامد نوشت

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (۸)$$

که ضرایب c_n از رابطه ۹ بدست می آیند.

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle_w}{\|\varphi_n\|_w^2} \quad (۹)$$

Orthogonality^۱
 Orthogonal Functions^۲
 Inner Product^۳
 Weight Function^۴
 Norm^۵

چندجمله‌ای‌های لژاندر $P_n(x)$ ، چندجمله‌ای‌هایی دو به دو متعامد در بازه $[-1, 1]$ هستند. با توجه به این چندجمله‌ای‌های متعامد می‌توان تابع $f(x)$ را در بازه $[-1, 1]$ با استفاده از این توابع و سری فوریه-لژاندر بسط داد.

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (10)$$

ضرایب این سری از رابطه ۱۱ بدست می‌آیند.

$$c_n = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\|P_n\|_w^2} \quad (11)$$

- در رابطه با چندجمله‌ای‌های لژاندر تحقیق کنید و معادله دیفرانسیلی را که پاسخ آن چند جمله‌ای‌های لژاندر است بنویسید.
- رابطه چند جمله‌ای‌های لژاندر، $P_n(x)$ را به ازای $n = 0$ تا $n = 7$ بنویسید و آنها را در بازه $[-1, 1]$ رسم کنید.
- مقدار $\|P_n\|^2$ را به ازای $n = 0$ تا $n = 3$ به صورت دستی محاسبه کنید و مراحل محاسبه را بنویسید. با توجه مقادیر بدست آمده و استقرا می‌توانید رابطه‌ای برای $\|P_n\|^2$ بدست بیاورید؟ این رابطه را بنویسید.
- رابطه ۱۰ و ۱۱ را به نحوی اصلاح کنید که بتوان سری فوریه-لژاندر را برای تابع $f(x)$ در بازه $[x_0, x_1]$ بدست آورد. (راهنمایی: از خواص shift و scale استفاده کنید).
- در محیط MATLAB تابعی با نام legendreSeriesCalc بنویسید که ورودی‌های آن عبارتند از:
 - func: تابع $f(x)$ که به صورت symbolic تعریف شده است.
 - xinterval: برداری که مقدار x_0 و x_1 در آن قرار دارد.
 - N: تعداد ضرایب سری فوریه-لژاندر
- خروجی‌های تابع legendreSeriesCalc عبارتند از:
 - c: بردار $1 \times N$ که بیانگر ضرایب c_n می‌باشد.
 - xm: وسط بازه تعریف تابع $f(x)$ که برابر است با $x_m = \frac{x_0+x_1}{2}$
 - T: طول بازه تعریف تابع $f(x)$ که برابر است با $T = x_1 - x_0$
- بر اساس رقم یکان شماره دانشجویی خود، تابع $f(x)$ را به صورت symbolic تعریف کنید. اگر رقم دهگان شماره دانشجویی شما m باشد، x_0 و x_1 را با توجه به آن تعیین کنید و تابع $f(x)$ را با استفاده از دستور fplot در بازه $[x_0, x_1]$ رسم کنید.

- 0) $f(x) = \Pi(x), \quad x_0 = -1 - \frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 1) $f(x) = \Lambda(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 2) $f(x) = \text{sgn}(x)\Lambda(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 3) $f(x) = \cosh(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 4) $f(x) = \text{sgn}(x)e^{-|x|}, \quad x_0 = -\frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 5) $f(x) = e^{-x}u(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 6) $f(x) = \cos(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 7) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = -\frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 8) $f(x) = \ln(x), \quad x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$
- 9) $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{mod}(m, 2), \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{mod}(m, 3)$

- با استفاده از تابع legendreSeriesCalc ضرایب سری فوریه-لژاندر تابع $f(x)$ را در بازه $[x_0, x_1]$ به ازای $N = 50$ بدست آورید.
- تابع $\hat{f}(x)$ را با استفاده از معادله ۱۰ و ضرایبی که بدست آوردید به ازای $N = 1, 5, 10, 25, 50$ به صورت symbolic تعریف کنید و بر روی نمودار تابع $f(x)$ رسم کنید.
- با استفاده از دستور xlabel, ylabel, legend و title اطلاعات لازم را به شکل اضافه کنید.
- مقدار خطای توان دوم، E ، را به ازای $N = 1$ تا $N = 50$ بدست آورید و به صورت تابعی از N رسم کنید.

۴ تبدیل فوریه

در انتهای فصل اول با تبدیل فوریه و خواص آن آشنا شدید. تبدیل فوریه تابع $f(x)$ از رابطه ۱۲ بدست می آید.

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (12)$$

تبدیل فوریه معکوس تابع $F(\omega)$ نیز از رابطه ۱۳ بدست می آید.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (13)$$

- در رابطه با نمونه برداری از سیگنال پیوسته-زمان $x(t)$ و سیگنال گسسته-زمان $x[n]$ که از نمونه برداری از سیگنال $x(t)$ بدست آمده تحقیق کنید و رابطه آنها را بنویسید.
- در رابطه با تبدیل فوریه گسسته-زمان، DTFT (Discrete-Time Fourier Transform)، و تفاوت آن با تبدیل فوریه تحقیق کنید و رابطه آن را بنویسید.
- رابطه بین تبدیل فوریه سیگنال پیوسته-زمان $x(t)$ و تبدیل فوریه گسسته-زمان (DTFT) سیگنال گسسته-زمان $x[n]$ را بنویسید.
- در رابطه با تبدیل فوریه گسسته، DFT (Discrete Fourier Transform) و تفاوت آن با تبدیل فوریه تحقیق کنید و رابطه آن را بنویسید.
- رابطه بین DTFT و DFT را بنویسید.
- در رابطه با تبدیل فوریه سریع، FFT، تحقیق کنید و تفاوت آن را با DFT بنویسید.

تا اینجا با برخی از ویژگی‌های محیط symbolic نرم‌افزار MATLAB آشنا شدید. همانطور که می‌دانید در کامپیوتر اطلاعات به صورت گسسته ذخیره می‌شوند و در نرم‌افزار MATLAB می‌توانیم به پردازش سیگنال‌های گسسته بپردازیم.

- سیگنال $x(t) = m \text{sinc}^2(mt)$ را در نظر بگیرید. رابطه تبدیل فوریه این تابع را بر حسب فرکانس بنویسید. فرض کنید m برابر با دو رقم اول شماره دانشجویی شما بعلاوه ۱۰ باشد.
- سیگنال $x(t)$ را در بازه $-1 \leq t \leq 1$ با نرخ $f_s = 300\text{Hz}$ نمونه برداری کنید و در بردار x ذخیره کنید.
- با استفاده از دستور plot نمودار تابع $x(t)$ را رسم کنید و اطلاعات لازم را به محورهای نمودار اضافه کنید.
- با استفاده از دستور fft تبدیل فوریه سریع x را بدست آورید، در بردار X ذخیره کنید و نمودار دامنه و فاز آن را جداگانه رسم کنید. با توجه به نمودار اندازه و رابطه تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ که بدست آوردید، نتایج را تحلیل کنید. آیا نمودار آن با چیزی که انتظار داشتید یکسان است؟ (در این قسمت و دو قسمت بعدی نیازی به تکمیل اطلاعات و مقادیر محور افقی نیست و در قسمت‌های بعدی بررسی می‌شود)
- با استفاده از دستور fftshift اعمال آن بر تبدیل فوریه سریع x ، اصلاحات لازم را انجام دهید و در بردار X ذخیره کنید. حال نمودار اندازه و فاز X را رسم کنید. نتایج را تحلیل کنید.
- با اضافه کردن یک ضریب به مرحله قبل، سعی کنید دامنه نمودار خروجی با دامنه تبدیل فوریه محاسبه شده برابر شود. این ضریب برابر با کدامیک از پارامترها می‌باشد؟

- حال سعی کنید با توجه به پارامترهای مساله بردار \mathbf{f} را به نحوی تعریف کنید که اعداد محور افقی ایجاد شوند و با اضافه کردن آن به اطلاعات محور افقی سه قسمت قبل، آنها را تکمیل کنید.
- نمودار تابع $x(t)$ و اندازه و فاز تبدیل فوریه سریع آن را به ازای $f_s = \frac{9m}{4}, \frac{8m}{4}, \frac{7m}{4}, \frac{6m}{4} \text{ Hz}$ در بازه $-1 \leq t \leq 1$ رسم کنید. نتایج را تحلیل کنید.
- حال رابطه تبدیل فوریه تابع $x_1(t) = 20m \cos(2m\pi t) \text{sinc}^2(10t)$ را بر حسب فرکانس بنویسید. نمودار این تابع و نمودار اندازه تبدیل فوریه آن را رسم کنید.

نکات تحویل تمرین کامپیوتری

- جزئیات گزارش شما در فرایند تصحیح از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، لطفا تمامی نکات و فرض‌هایی که برای پیاده‌سازی و محاسبات خود در نظر می‌گیرید را در توضیحات ذکر کرده و نشان دهید.
- در صورت مشاهده تقلب، امتیاز تمامی افراد شرکت کننده در آن ۱۰۰- لحاظ می‌شود.
- پس از گذشت تاریخ بارگذاری، به ازای هر ساعت تاخیر، ۱ درصد از نمره را از دست می‌دهید.
- توضیحات، اثبات‌ها و نمودارهای خواسته شده را همراه با کد در یک فایل MATLAB live script بنویسید. برای نوشتن معادلات از بخش insert استفاده کنید.
- این تمرین کامپیوتری به صورت ۰.۵ نمره امتیازی از نمره نهایی شما می‌باشد.
- فایل‌های خود را در قالب [Name]_[StudentNumber]_CA1.zip بارگذاری کنید.
- در صورت وجود هرگونه ابهام یا مشکل در صورت پروژه می‌توانید از طریق رایانامه‌های زیر در تماس باشید و ابهام را برطرف کنید.

- nimahashemi57@gmail.com
- shaker.ma98@gmail.com