مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: ارشاد حسنپور

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه orhanhasanpour@gmail.com مکاتبه نمایید.

۱) وجود حد توابع زیر را بررسی کنید. در صورت وجود حد آنها را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$

$$z = x + iy \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x - iy}{x + iy}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{if we choose } z \text{ real } \Rightarrow z = x \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \text{if we choose } z \text{ imaginary } \Rightarrow z = iy \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-iy}{iy} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{limit value doesn't exist}$$

ب) $\lim\limits_{z\to -1} \dfrac{z^4 - 2z^2 + 1}{z + 1}$

$$\lim_{z\to -1} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z + 1} = \lim_{z\to -1} \frac{(z^2 - 1)^2}{z + 1} = \lim_{z\to -1} \frac{(z - 1)^2 (z + 1)^2}{z + 1} = \lim_{z\to -1} (z - 1)^2 (z + 1) = 0$$

ج) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Re(z^2)}{|z|^2}$

$$\frac{Re(z^2)}{|z|^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{if we choose } z \text{ real } \Rightarrow z = x \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Re(z^2)}{|z|^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \\ \text{if we choose } z \text{ imaginary } \Rightarrow z = iy \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Re(z^2)}{|z|^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{limit value doesn't exist}$$

د) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z\,Re(z)}{|z|}$

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \; y = r\sin\theta \;, x = r\cos\theta \;\; (\text{it includes all directions}) \Rightarrow \; r \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z\,Re(z)}{|z|} = \lim_{r\to 0} \frac{re^{i\theta}\, r\cos\theta}{r} = \lim_{r\to 0} \; r * \cos\theta\, e^{i\theta} = 0 * (\text{bounded}) = 0$$

۲) معادلات کوشی ریمان را برای تابع $f(z)$ در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید و با توجه به آن بگویید که آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر می باشد یا خیر.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{y^3+ix^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\text{first equation:}\quad u_x=v_y\quad (?)\ \Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0\end{cases}$$

$$\text{second equation:}\quad u_y=-v_x\ (?)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)\neq-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

As we can see , the second equation doesn't hold at point (0,0), so there is no derivative at this point.

۳) توابع مختلط زیر در چه نقاطی تحلیلی می‌باشند؟

$a)\qquad f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)+i\,tan^{-1}(\frac{y}{x})$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)\ \Rightarrow|x|>|y|\quad ,v(x,y)=tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow x\neq 0$$

$u(x,y)$ and $v(x,y)$ are both defined when $|x|>|y|$ *and* $x\neq 0$

$$u_x=\frac{x}{x^2-y^2}\quad ,\quad v_y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\text{if } x\neq 0\Rightarrow\begin{cases}if\ y=0\ \Rightarrow\ u_x=v_y\ \text{ but } u(x,y)=\ln(x)\,,v(x,y)=0=>u_x=\frac{1}{x}\neq v_y=0\\ \text{if } y\neq 0\Rightarrow u_x\neq v_y\end{cases}$$

$$\text{if } x=0\Rightarrow\begin{cases}\text{if } y=0\ \Rightarrow\ u(x,y)=\frac{1}{2}Ln(0)=-\infty\\ \text{if } y\neq 0\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}Ln(-y^2)\,;\ \{-y^2<0\}\text{ and the ln( ) function doesn't accept negative inputs}\end{cases}$$

So this function can not be analytical anywhere.

b) $f(z) = \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2) + i\cot^{-1}(\frac{x}{y})$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2) \quad , \quad v(x,y) = \cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow y \neq 0$$

$u(x,y)$ and $v(x,y)$ are both defined when $y \neq 0$

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad v_y = \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} * \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = u_x$$

$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad v_x = \frac{-1}{1+(\frac{x}{y})^2} * \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = -u_y$$

So this function can be analytical everywhere except $y = 0$

۴) معادلات کوشی ریمان را برای تابع $f(z)$ بررسی کنید و سپس ناحیه ای که در آن $f(z)$ تحلیلی می باشد را مشخص کرده و $f'''(i)$ را حساب کنید.

$$f(z) = \frac{x^3+xy^2+x+i\,(x^2y+y^3-y)}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{x^3+xy^2+x+i\,(x^2y+y^3-y)}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2+1)+i\,y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{(x^2+y^2)(x+iy)+(x-iy)}{x^2+y^2} = (x+iy) + \frac{(x-iy)}{x^2+y^2} = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z + \frac{1}{z}$$

$\Rightarrow f(z)$ is analytic for $z \neq 0$

$$if\ \ z \neq 0, then: u(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2} \quad , v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u_x = 1 + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad , v_y = 1 - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x$$

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \Rightarrow f'''(z) = 0 + \left(\frac{-6}{z^4}\right) \Rightarrow f'''(i) = \frac{-6}{i^4} = -6$$

۵) نشان دهید که معادلات کوشی ریمان برای تابع $f(z)$، در کل صفحه ی مختلط برقرار می باشند اما همچنان تابع $f(z)$ در نقطه $z = 0$ مشتق پذیر نمی باشد.(**امتیازی**)

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Cauchy-Riemann's equations for $z \neq 0$:

Since $f(z)$ for $z \neq 0$ is the composition of analytic functions,it follows that $f(z)$ analytic for $z \neq 0$.So $f(z)$ fulfils Cauchy-Riemann's equations $for\ z \neq 0$.

Cauchy-Riemann's equations for $z = 0$:

$$u(x,0) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^4}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad , \quad v(x,0) = 0$$

$$u(0,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{y^4}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \quad , \quad v(0,y) = 0$$

first equation: $u_x = v_y \quad (?)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^4}} - u(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^4}} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^4}}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^4}} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) \end{cases}$$

second equation: $u_y = -v_x \quad (?)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^4}} - u(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^4}} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^4}}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^4}} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) \end{cases}$$

So $f(z)$ fulfils Cauchy-Riemann's equations for $z = 0$.

Continuity:

if we choose the curve of the parametric description $z(t) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)t\ , t > 0$:

برای سوالات خود در خصوص این تمرین بارایانامه orhanhasanpour@gmail.com مکاتبه نمایید.

$$f(z(t)) = \exp\left(-\frac{1}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 t^4}\right) = \exp\left(\frac{1}{t^4}\right) \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} f(z(t)) = \lim_{t\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{t^4}\right) = \infty \neq 0 = f(0)$$

So $f(z)$ is not continuous at $z = 0$.

Differentiablity:

the function is not continuous at $z = 0$, so it can not be analytic and differentiable at $z = 0$.

۶) قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی مختلط به صورت

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2 + 30x + cxy^2 + 29y^2 - 10$$

می باشد.

الف) ضرایب a ، b و c را طوری بدست آورید تا این تابع همساز شود.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} = 6ax + 2b \ , \ u_{yy} = 2cx + 58 \Rightarrow b = -29 \ , c = -3a$$

$$u(x,y) = ax^3 - 29x^2 + 30x - 3axy^2 + 29y^2 - 10$$

ب) قسمت موهومی آن یعنی $v(x,y)$ را بدست آورید.

$$u_x = v_y \Rightarrow u_x = 3ax^2 - 58x + 30 - 3ay^2 = v_y \Rightarrow v(x,y) = \int u_x \, dy + g(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int 3ax^2 - 58x + 30 - 3ay^2 \, dy + g(x) = 3ax^2y - 58xy + 30y - ay^3 + g(x)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow 6axy - 58y + g'(x) = -(-6axy + 58y)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = k \ (constant)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 3ax^2y - 58xy + 30y - ay^3 + k$$

ج) اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ باشد و $f(0) = -10$ باشد، آنگاه $f''(i)$ را بدست آورید.

$$f(0) = -10 \Longrightarrow u(0,0) = -10 \ , v(0,0) = 0 \Longrightarrow k = 0$$

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = az^3 - 29z^2 + 30z - 10$$

$$\Longrightarrow f''(z) = 6az - 58 \Longrightarrow f''(i) = 6ai - 58$$

۷) اگر $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد با فرض اینکه $u(r,\theta) = rcos(\theta)Ln(r) - r\theta\sin(\theta)$ باشد، $v(r,\theta)$ و $f(z)$ را بیابید و سپس با توجه به آن $f'''(i)$ را بدست آورید.

$$ru_r = v_\theta \Longrightarrow r(cos\theta \ln(r) + cos\theta - \theta sin\theta) = v_\theta$$

$$\Longrightarrow v(r,\theta) = \int r(cos\theta \ln(r) + cos\theta - \theta sin\theta)d\,\theta = rln(r)\,sin\theta + rsin\theta - r(sin\theta - \theta cos\theta) + g(r)$$

$$\Longrightarrow v(r,\theta) = rln(r)\,sin\theta + r\theta cos\theta + g(r)$$

$$u_\theta = -rv_r \;\Longrightarrow\; -rln(r)\,sin\theta - r(sin\theta + \theta cos\theta) = -r\big(sin\theta \ln(r) + sin\theta + \theta cos\theta + g'(r)\big)$$

$$\Longrightarrow g'(r) = 0 \;\Longrightarrow g(r) = k \;\; (constant)$$

$$\Longrightarrow v(r,\theta) = rln(r)\,sin\theta + r\theta cos\theta + k$$

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \;\; \Longrightarrow r = z, \theta = 0$$

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = zln(z) + ik \;\; \Longrightarrow f'''(z) = -\frac{1}{z^2} \;\Longrightarrow f'''(i) = -\frac{1}{i^2} = 1$$