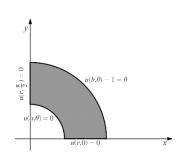


دانسڅه تهران- دانسگده مهندسي برق و کامپيوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۱ تمرین ۸: معادله لایلاس در مخصات قطبی مدرس: دكترمهدي طالع ماموله - حل تمرين: كلممر خسروضاور - نما باشي



راي بوالات نود درخصوص اين تمرين بار ليانهمه <u>nimahashemi57@gmail.com</u>، gkhosrokhavar@gmail.com محلمة بأييد .

۱) معادله لایلاس را در ناحیه مشخص شده و با شرایط مرزی زیر حل کنید.

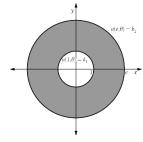


$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \qquad a \le r \le b, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$u(r,0) = 0, \qquad u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$u(a,\theta) = 0, \qquad u(b,\theta) = 1 - \theta$$

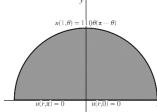
۲) معادله زیر را حل کنید.



$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad 1 \le r \le e, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$u(1,\theta) = k_1, \qquad u(e,\theta) = k_2$$

میدانیم که پتانسیل الکترواستاتیک، معادله لاپلاس $abla^2 u = 0$ را در هر منطقهای که بار الکتریکی در آن صفر باشد، ارضا می کند. پتانسیل الکتریکی را در شكل زير بدست آوريد.



$$\nabla^2 u = 0, \qquad r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$u(r,0) = 0, \qquad u(r,\pi) = 0$$

$$u(1,\theta) = 110\theta(\pi - \theta)$$

۴) معادله لایلاس زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \qquad 1 \le r \le 2, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$1 \le r \le 2$$
,

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$u_{\theta}(r,0)=0, \qquad u_{\theta}(r,2\pi)=0$$

$$u_{\theta}(r, 2\pi) = 0$$

$$u(1,\theta) = 1 - \Pi\left(\frac{\theta - \pi}{\pi}\right), \qquad u(2,\theta) = \theta$$

$$u(2,\theta)=\theta$$

۵) معادله لاپلاس زیر را حل کنید. (امتیازی)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad 1 \le r, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$1 \le r$$
,

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$u(r,0)=u(r,2\pi),$$

$$u(r,0) = u(r,2\pi), \qquad u_{\theta}(r,0) = u_{\theta}(r,2\pi)$$

$$u(1,\theta) = |\cos(2\theta)| + \cos(2\theta)$$



دانشه تیران- دانشگده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰–۱۴۰۱ تمرین ۸: معادله لاپلاس در مخصات قلب مدرس: دکتر مهدی طالع ما موله - عل تمرین: کلممر خسروخاور - نیا ایشی



رای بوالات نود درخصوص این تمرین مار لیانامه <u>nimahashemi57@gmail.com.gkhosrokhavar@gmail.com</u> مهتمه ناید.

۶) معادله لایلاس زیر را حل کنید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad \frac{1}{2} \le r \le 2, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
 $u_{\theta}(r,0) = 0, \qquad u(r,\pi) = 0$

$$u\left(\frac{1}{2},\theta\right) = \Pi\left(\frac{\theta}{\pi}\right), \qquad u(2,\theta) = 1 - \Pi\left(\frac{\theta}{\pi}\right)$$

کنید. (۷ معادله لاپلاس زیر را حل کنید.
$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_{r}+\frac{1}{r^{2}}u_{\theta\theta}=0, \qquad 1\leq r\leq 2, \qquad 0\leq \theta\leq \frac{3\pi}{2}$$

$$u(r,0) = 0, \qquad u_{\theta}\left(r, \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$u(1,\theta) = \Lambda\left(\frac{\theta - \frac{3\pi}{4}}{\frac{3\pi}{2}}\right), \qquad u(2,\theta) = \Pi\left(\frac{\theta}{\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad r \le 2, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$u(2,\theta) = \Lambda\left(\frac{\theta - \pi}{2\pi}\right)$$

$$\begin{split} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0, \qquad r_0 \le r \le r_1, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ u(r,0) &= 0, \qquad u\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ u(r_0,\theta) &= \theta\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \qquad u(r_1,\theta) = \theta^2 \end{split}$$

موفق باشيد.