حل چند مسئله از توابع مختلط و قضیه کوشی ریمان

1-تابع $(1+j)(x-y)^2$ در چه نقاطی تحلیلی است؟

<u>حل**1**</u>: تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z)=(1+j)(x-y)^2=(x-y)^2+j(x-y)^2=u(x,y)+jv(x,y)$$

حال شرط کوشی-ریمان را بررسی میکنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 2(x-y)=-2(x-y)\to x=y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow -2(x-y)=-2(x-y)$$

پس فقط به ازای $\mathrm{x}=\mathrm{y}$ تحلیلی است.

2-مشتق توابع زیر را در نقاطی که مشتق پذیر هستند بدست آورید:

$a)\quad f(z)=|x|+j|y|\qquad b)\quad f(z)=\frac{\bar{Z}}{|Z|}\qquad c)\ f(z)=[\mathrm{Re}(Z)]^2-j[\mathrm{Im}(Z)]^2$

<u>حل**2**– *a*</u>: برای اولی داریم:

$$\mathrm{u}=|\mathrm{x}|\quad \mathrm{v}=|\mathrm{y}|\qquad \mathrm{u}_{\mathrm{x}}=\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\to\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|}=\frac{\mathrm{y}}{|\mathrm{y}|}\to\frac{\mathrm{x}^2}{|\mathrm{x}|}=\frac{\mathrm{xy}}{|\mathrm{y}|}\to \mathrm{xy}>0\to \text{first and third quarters}$$
$$\mathrm{v}_{\mathrm{x}}=-\mathrm{u}_{\mathrm{y}}\to 0=0$$

پس در ربع اول و سوم تحلیلی است بنابراین مشتق پذیر است. حال تابع را میتوان به صورت زیر نوشت که تحلیلی خواهد بود.

$$f(z)=|x|+j|y|=\frac{x|y|}{y}+j|y|\to f'(z)=u_x+jv_x=\frac{|y|}{y}$$

<u>حل**2**– *b*</u>: برای دومی داریم:

$$f(z)=\frac{\bar{Z}}{|Z|}=\frac{x-jy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-j\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\to u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad v=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$u_x=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{1.5}}\qquad v_y=\frac{-\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{1.5}}$$

$$u_x=v_y\to\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{1.5}}=\frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{1.5}}\to x^2+y^2=0\to|Z|=0$$

پس تنها تابع در مبدا تحلیلی است و مشتق تابع صفر است.

حل 2– c: برای سومی داریم:

$$f(z) = [\mathrm{Re}(Z)]^2 - j[\mathrm{Im}(Z)]^2 = x^2 - jy^2 \to u = x^2 \quad v = -y^2 \quad u_x = 2x \quad v_y = -2y$$

$$u_x = v_y \to 2x = -2y \to x = -y$$
$$v_x = 0 \quad u_y = 0 \to v_x = -u_y$$

پس برای $x = -y$ یعنی روی نیمساز ربع دوم و چهارم تحلیلی است.

$$f(z) = x^2 - jy^2 \qquad x = -y \to f(z) = x^2 - jx^2 \to f'(z) = u_x + jv_x = 2x - j2x$$

3-اگر $u(x, y)$ تابع همساز باشد ضرایب مجهول این تابع را پیدا کنید. سپس تابع تحلیلی $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ را طوری پیدا کنید که $f(0) = 2 + j$ باشد

الف)

$$u(x, y) = x^5 + ax^3y^2 + bxy^4 + cx^4 + dy^4 - 24x^2y^2 + 3x^3 + exy^2 + 2x^2 + fy^2 + 5x + g$$

ب) اگر $u(r,\theta)$ و $v(r,\theta)$ قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی $f(z)$ باشند بطوریکه $f(0) = 1$ مطلوبست $v(r,\theta)$ و $f(z)$ اگر

$$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta + 2r\cos\theta + 1$$

حل 3– الف: برای اینکه تابع همساز باشد باید در معادله لاپلاس صدق کند بنابراین خواهیم داشت:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \to (20x^3 + 6axy^2 + 12cx^2 - 48y^2 + 18x + 4) + (2ax^3 + 12bxy^2 + 12dy^2 - 48x^2$$
$$+ 2ex + 2f) = (20 + 2a)x^3 + (6a + 12b)xy^2 + (12c - 48)x^2 + (12d - 48)y^2 + (18 + 2e)x + (2f + 4)$$
$$= 0 \to a = -10 \quad b = 5 \quad c = 4 \quad d = 4 \quad e = -9 \quad f = -2 \to$$
$$u(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 4x^4 + 4y^4 - 24x^2y^2 + 3x^3 - 9xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + 5x + g$$

حال با استفاده از اصل کوش-ریمان میتوان تابع $v(x, y)$ را بدست آورد:

$$v_y = u_x = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 + 16x^3 - 48xy^2 + 9x^2 - 9y^2 + 4x + 5 = \frac{\partial v}{\partial y} \to$$
$$v(x, y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 + 16x^3y - 16xy^3 + 9x^2y - 3y^3 + 4xy + 5y + f(x)$$
$$v_x = -u_y \to 20x^3y - 20xy^3 + 48x^2y + 16y^3 + 18xy + 4y + f'(x) = 20x^3y - 20xy^3 + 16y^3 + 48x^2$$

$$+ 18xy + 4y \to f'(x) = 0 \to f(x) = k \to f(z) = u(x, y) + jv(x, y) =$$
$$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 4x^4 + 4y^4 - 24x^2y^2 + 3x^3 - 9xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + 5x + g +$$
$$j(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 + 16x^3y - 16xy^3 + 9x^2y - 3y^3 + 4xy + 5y + k)$$

برای بدست آوردن $f(z)$ کافیست در بالا بجای x قرار دهیم z و به جای y صفر قرار دهیم بنابراین خواهیم داشت:

$$f(z)=z^5+4z^4+3z^3+2z^2+5z+g+jk \quad f(0)=2+j\rightarrow g=2 \quad k=1\rightarrow$$
$$f(z)=z^5+4z^4+3z^3+2z^2+5z+2+j$$

حل 3–ب: از اصل کوشی–ریمان در دستگاه قطبی استفاده میکنیم که خواهیم داشت:

$$u_r(r,\theta)=\frac{1}{r}v_\theta(r,\theta)\rightarrow 2r\cos 2\theta+2\cos\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\rightarrow v(r,\theta)=r^2\sin 2\theta+2r\sin\theta+f(r)$$
$$u_\theta(r,\theta)=-rv_r(r,\theta)\rightarrow -2r^2\sin 2\theta-2r\sin\theta=-2r^2\sin 2\theta-2r\sin\theta-rf'(r)\rightarrow f'(r)=0$$
$$\rightarrow f(r)=k\rightarrow f(z)=u(r,\theta)+jv(r,\theta)=(r^2\cos 2\theta+2r\cos\theta+1)+j(r^2\sin 2\theta+2r\sin\theta+k)$$

برای بدست آوردن $f(z)$ باید باید در بالا قرار دهیم: $r=z,\ \theta=0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$f(z)=z^2+2z+1+jk \qquad f(0)=1\rightarrow k=0\rightarrow f(z)=z^2+2z+1$$

4- α را طوری تعیین کنید که تابع $f(z)$ در $z=0$ پیوسته باشد.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z+\mathrm{Im}(z)}{2\bar{z}+\mathrm{Re}(z)} & z\neq 0\\ \alpha & z=0\end{cases}$$

حل4: شرط اینکه تابع پیوسته باشد اینست که حد آن با مقدارش در $z=0$ برابر باشد. بنابراین اول حد تابع را در $z=0$ بدست می اوریم:

$$\lim_{Z\to 0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+jy+y}{2(x-jy)+x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y(j+1)}{3x-j2y}$$

ابتدا $y=0$ میگیریم و $x\rightarrow 0$ میل میکند که داریم:

$$\lim_{Z\to 0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+0(j+1)}{3x-j0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

حال $x=0$ میگیریم و $y\rightarrow 0$ میل میکند که داریم:

$$\lim_{Z\to 0}=\lim_{y\to 0}\frac{0+y(j+1)}{3(0)-jy}=\lim_{y\to 0}\frac{y(j+1)}{-j2y}=0.5(j-1)$$

چون $\frac{1}{3}\neq 0.5(j-1)$ پس تابع در $z=0$ حد ندارد در نتیجه هرگزدر $z=0$ پیوسته نیست در نتیجه هیچ α ای وجود ندارد.

5- اگر $v(x,y)=4x^3y-4xy^3+9x^2y-3y^3+4xy+4y$ قسمت موهومی تابع تحلیلی $f(z)$ به شرط $f(0)=1$ باشد تابع $f(z)$ را بدست آورید.

حل5: با استفاده از اصل کوشی–ریمان خواهیم داشت:

$$u_x=v_y\rightarrow\frac{du}{dx}=4x^3-12xy^2+9x^2-9y^2+4x+4\rightarrow u=x^4-6x^2y^2+3x^3-9y^2x+2x^2+4x+f(y)$$

$$v_x=-u_y \to 12x^2y-4y^3+18xy+4y=-(-12x^2y-18xy+f'(y)) \to f'(y)=4y^3-4y \to$$
$$f(y)=y^4-2y^2+k \to u=x^4-6x^2y^2+3x^3-9y^2x+2x^2+4x+y^4-2y^2+k \to$$
$$f(x,y)=u+jv=x^4-6x^2y^2+3x^3-9y^2x+2x^2+4x+y^4-2y^2+k+j(4x^3y-4xy^3+9x^2y-3y^3+4xy+4y)$$
$$f(z)=f(x,y)_{x=z,\ y=0}=z^4+3z^3+2z^2+4z+k \qquad f(0)=1 \to k=1 \to f(z)=z^4+3z^3+2z^2+4z+1$$

6- قسمت موهومی یک تابع تحلیلی با رابطه $v(x,y)=\frac{1}{2}e^x[\sin 2y(\sinh x+\cosh x)]$ داده شده است. اگر $f(0)=0$ باشد $f(z)$ مطلوبست .

__حل6__: قضیه کوشی-ریمان را به صورت زیر مینویسیم:

$$u_y=-v_x \to u_y=-\frac{1}{2}e^x[\sin 2y(\sinh x+\cosh x)]-\frac{1}{2}e^x[\sin 2y(\cosh x+\cosh x)]=$$
$$-e^x[\sin 2y(\sinh x+\cosh x)] \to u=e^x[\frac{1}{2}\cos 2y(\sinh x+\cosh x)]+f(x) \qquad u_x=v_y \to$$
$$e^x[\cos 2y(\sinh x+\cosh x)]+f'(x)=e^x[\cos 2y(\sinh x+\cosh x)] \to f'(x)=0 \to f(x)=k \to$$
$$f(z)=u(x,y)+jv(x,y)=e^x[\frac{1}{2}\cos 2y(\sinh x+\cosh x)]+k+j\frac{1}{2}e^x[\sin 2y(\sinh x+\cosh x)]$$
$$=e^x[\frac{1}{2}\cos 2y(e^x)+k+j\frac{1}{2}e^x[\sin 2y(e^x)]=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2y+k+j\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2y$$

حال کافیست به جای x قرار دهیم z و به جای y قرار دهیم صفر که خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{1}{2}e^{2z}+k+j0=\frac{1}{2}e^{2z}+k \quad f(0)=0 \to \frac{1}{2}+k=0 \to k=-\frac{1}{2} \to f(z)=\frac{1}{2}(e^{2z}-1)$$

7- الف) اگر $u(x,y)=ax^4+by^4-12x^2y^2+dx^3-9xy^2+fx^2-8y^2-6x+g$ قسمت حقیقی یک تابع مختلط تحلیلی $f(z)$ باشد بطوریکه $f(0)=7$ در اینصورت $f(z)$ را بدست آورید.

7- ب) اگر $v(r,\theta)=r^3\sin 3\theta+3r^2\cos 2\theta+2r^2\sin 2\theta-7r\sin\theta-1$ قسمت موهومی یک تابع مختلط تحلیلی $f(z)$ باشد بطوریکه $f(-j)=3+4j$ در اینصورت $f(z)$ را بدست آورید.

__حل 7-الف:__ برای محاسبه ضرایب باید شرط صدق کردن قسمت حقیقی در معادله لاپلاس را بنویسیم که داریم:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \to (12a-24)x^2+(12b-24)y^2+(6d-18)x+(2f-16)=0 \to a=b=2$$
$$d=3 \qquad f=8 \to u(x,y)=2x^4+2y^4-12x^2y^2+3x^3-9xy^2+8x^2-8y^2-6x+g$$

حل شرط کوشی –ریمان را مینویسیم:

$$v_y=u_x=8x^3-24xy^2+9x^2-9y^2+16x-6 \to v(x,y)=8x^3y-8xy^3+9x^2y-3y^3+16xy-6y+f(x)$$
$$u_y=-v_x \to 8y^3-24x^2y-18xy-16y=-(24x^2y-8y^3+18xy+16y+f'(x)) \to f'(x)=0 \to f(x)=k$$
$$f(x,y)=u(x,y)+jv(x,y)=(2x^4+2y^4-12x^2y^2+3x^3-9xy^2+8x^2-8y^2-6x+g)+$$

$$j(8x^3y-8xy^3+9x^2y-3y^3+16xy-6y+k)$$

برای بدست اوردن $f(z)$ کافیست در معادله بدست آمده به جای x قرار دهیم z و به جای y صفر قرار دهیم در نتیجه داریم:

$$f(z)=2z^4+3z^3+8z^2-6z+g+jk \qquad f(0)=7\rightarrow g=7 \qquad k=0\rightarrow$$
$$f(z)=2z^4+3z^3+8z^2-6z+7$$

حل 7-ب): شرط کوشی ریمان را مینویسیم:

$$u_r=\frac{1}{r}v_\theta\rightarrow u_r=\frac{1}{r}(3r^3\cos3\theta-6r^2\sin2\theta+4r^2\cos2\theta-7r\cos\theta)=$$
$$3r^2\cos3\theta-6r\sin2\theta+4r\cos2\theta-7\cos\theta\rightarrow$$
$$u(r,\theta)=r^3\cos3\theta-3r^2\sin2\theta+2r^2\cos2\theta-7r\cos\theta+f(\theta) \qquad v_r=-\frac{1}{r}u_\theta\rightarrow$$
$$3r^2\sin3\theta+6r\cos2\theta+4r\sin2\theta-7\sin\theta=-\frac{1}{r}(-3r^3\sin3\theta-6r^2\cos2\theta-4r^2\sin2\theta+7r\sin\theta+f'(\theta))$$

$$f'(\theta)=0\rightarrow f(\theta)=k\rightarrow f(r,\theta)=[r^3\cos3\theta-3r^2\sin2\theta+2r^2\cos2\theta-7r\cos\theta+f(\theta)]+$$
$$j[r^3\sin3\theta+3r^2\cos2\theta+2r^2\sin2\theta-7r\sin\theta-1]$$

برای بدست اوردن $f(z)$ کافیست در معادله بدست آمده به جای r قرار دهیم z و به جای θ صفر قرار دهیم در نتیجه داریم:

$$f(z)=(z^3+2z^2-7z+k)+j(3z^2-1) \qquad f(-j)=[(-j)^3+2(-j)^2-7(-j)+k]+j[3(-j)^2-1]=$$
$$3+4j\rightarrow(j-2+7j+k)+j(-3-1)=3+4j\rightarrow-2+4j+k=3+4j\rightarrow k=5\rightarrow$$

$$f(z)=z^3+2z^2-7z+5+j(3z^2-1)\rightarrow f(z)=(z+j)^3-4z+5$$

موفق باشید

محمود محمدطاهری

خرداد 1401