به نام خداوند قلم

دانشگاه تهران

پردیس دانشکدگان فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۵

نیم‌سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

معادلات مشتقات جزئی

پاسخ سوال ۱ : (۲۰ نمره)

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \rightarrow u_{tt} = v_{tt} \,,\; u_{xx} = v_{xx} + w_{xx}$$

$$\rightarrow v_{tt} - v_{xx} - w_{xx} = x \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ w_{xx} = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_x = -x^2/2 + A \rightarrow w(x) = -\frac{x^3}{6} + Ax + B$$

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0) = 0 \rightarrow v(0,t) = w(0) = 0$$

$$u(\pi,t) = v(\pi,t) + w(\pi) = 0 \rightarrow v(\pi,t) = w(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow w(0) = 0 \rightarrow B = 0 \,,\; w(\pi) = -\frac{\pi^3}{6} + A\pi = 0$$

$$\Rightarrow A = \pi^2/6 \rightarrow w(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x\pi^2}{6}$$

$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{cases} \rightarrow$ تابع ویژه : $\sin nx$ ، مقدار ویژه : n

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum F_n(t) \sin nx$$

جایگذاری : $\sum \left(F_n''(t) + n^2 F_n(t)\right) \sin nx = 0$

$$\Rightarrow F_n''(t) + n^2 F_n(t) = 0 \rightarrow F_n(t) = A\cos nt + B\sin nt$$

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{x\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow v(x,0) = \sum F_n(0) \sin nx \rightarrow F_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(x,0) \sin nx \, dx$$

$$v_t(x,0) = 0 \rightarrow F_{t_n}(0) = 0 \rightarrow 0 \cdot nA \sin 0 + nB \cos 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 0}$$

پاسخ سوال ۲: (۲۰ نمره)

می‌دانیم حل کلی معادله موج نیمه‌متناهی به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \underbrace{\left(a(\omega)\cos \omega x + b(\omega)\sin \omega x\right)}_{F_\omega(x)} \underbrace{\left(A(\omega)\cos \omega ct + B(\omega)\sin \omega ct\right)}_{G_\omega(t)} d\omega$$

$$u(0,t) = 0 \rightarrow F_\omega(x) = \sin \omega x \quad , \quad u(x,0) = 0 \rightarrow G_\omega(t) = \sin 2\omega t$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} C_\omega \sin \omega x \sin 2\omega t \, d\omega \quad , \quad u_t(x,0) = \int_0^{\infty} 2\omega C_\omega \sin \omega x \, d\omega = e^{-x}$$

$$C_\omega = \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x \, dx = \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \sin \omega x \sin 2\omega t \, d\omega$$

پاسخ سوال ۳ قسمت : (۲۰ نمره)

تمرین ۵:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$u(a,t)=0$

$u(r,0)=f(r)$

$$U(r,t)=R(r)T(t)\xrightarrow[\text{تقسیم طرفین بر } U]{\text{جانگذاری در معادله و}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{T'}{T}=\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=-\rho^2$$

$$\Rightarrow T'+\rho^2c^2T=0 \Rightarrow T(t)=Ae^{-\rho^2c^2t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=-\rho^2 \Rightarrow r[R'+rR'']+\rho^2r^2R=0 \Rightarrow r^2R''+rR'+r^2\rho^2R=0$$

بسل مرتبه صفر

$$\Rightarrow R(r)=J_0(\rho r)\xrightarrow{u(a,t)=0} J_0(\rho a)=0 \Rightarrow \rho=\frac{\alpha_{m0}}{a}$$

$$\Rightarrow U(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)e^{-\rho^2c^2t}$$

$$u(r,0)=f(r)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0\left(\frac{\alpha_m}{a}r\right) \Rightarrow \int_0^a rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{a}r\right)dr=A_m\frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_{m0}) \Rightarrow A_m=\frac{2\int_0^a rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{a}r\right)dr}{a^2J_1^2(\alpha_{m0})}$$

پاسخ سوال ۴ قسمت : (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] \\ u(a,\varphi,t)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0,\pi}=0 \\ u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi) \end{cases}$$

$$U=R(r)\Phi(\varphi)T(t) \xrightarrow[\text{تقسیم طرفین بر } U]{\text{جایگذاری در معادله}} \frac{T'}{T}=k\left[\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]=-\rho^2$$

$$\Rightarrow T'+\rho^2 kT=0 \Rightarrow \boxed{T(t)=e^{-\rho^2 kt}}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\rho^2 r^2=-\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}=\nu^2$$

$$\Rightarrow \Phi''+\nu^2\Phi=0 \Rightarrow \Phi(\varphi)=A\sin(\nu\varphi)+B\cos(\nu\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0}=0 \Rightarrow A=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\pi}=0 \Rightarrow \nu\varphi\Big|_{\varphi=\pi}=n\pi \rightarrow \nu=n \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$\Rightarrow r^2R''+rR'+(\rho^2r^2-\nu^2)R=0 \Rightarrow R(r)=AJ_\nu(\rho r)=A_nJ_n(\rho r)$$

$$U(a,\varphi,t)=0 \Rightarrow R(a)=0 \Rightarrow \rho a=\alpha_{mn} \Rightarrow \rho=\frac{\alpha_{mn}}{a} \qquad m=1,2,\dots$$

$$\Rightarrow U(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right)\cos(n\varphi)e^{-kt\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2}$$

$$U(r,\varphi,0)=f(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right)\cos(n\varphi)\xrightarrow[\text{و انتگرال‌گیری از } [0,\pi]]{\text{ضرب طرفین در } \cos(q\varphi)}\int_0^\pi f(r,\varphi)\cos(q\varphi)d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_{qm}J_q\left(\frac{\alpha_{mq}}{a}r\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

همچنین می دانیم:

$$\int_0^a rJ_n(k_{mn}r)J_n(k_{pn}r)dr=\begin{cases}0 & p\neq m\\ \frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(k_{mn}a) & p=m\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi\int_0^a f(r,\varphi)J_q\left(\frac{\alpha_{lq}}{a}r\right)\cos(q\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=A_{ql}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{a^2}{2}J_{q+1}^2(\alpha_{lq}) \Rightarrow A_{ql}=\boxed{}$$

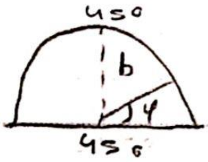
پاسخ سوال ۵: (۲۰ نمره)

ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۵

نیم‌سال دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱

معادله موج دوبعدی قطبی : $\frac{1}{c^2}u_{tt} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$



$0<r<b,\ 0<\varphi<\pi$

نسبت به φ تقارن نداریم لذا:

$u(r,\varphi,t)=R(r)\Phi(\varphi)T(t)$

جایگذاری: $\frac{1}{c^2}R\Phi T'' = \frac{1}{r}(rR')'\Phi T + \frac{1}{r^2}\Phi''RT$

$\xrightarrow{\div R\Phi T}$ $\underbrace{\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{\frac{1}{r^2}\Phi''}{\Phi}}_{\text{تابع } r \text{ و } \varphi} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}}_{\text{تابع } t} = \begin{cases} +k_1^2 \\ 0 \\ -k_1^2 \ \checkmark \end{cases}$

معادله T : $T''+c^2k^2T=0$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $T(t)=c_1\sin(\omega t)+c_2\cos(\omega t);\ \omega=\sqrt{c^2k_1^2}$

اعمال شرایط مرزی : $u(b,\varphi,t)=0 \to \underline{R(b)=0}$

$u(r,0,t)=u(r,\pi,t)=0 \to \underline{\Phi(0)=\Phi(\pi)=0}$

شرایط اولیه : $u_t(r,\varphi,0)=0 \to \underline{T'(0)=0}$

$T'(t)=c_1ck_1\cos(ck_1t)-c_2ck_1\sin(ck_1t) \xrightarrow{T'(0)=0} c_1ck_1=0 \to \begin{cases} c_1=0 \\ \text{یا} \\ k_1=0 \end{cases}$

نمی‌تواند صفر باشد ← علت: معادله R که در ادامه می‌بینیم.

$c_1=0 \to \underline{T(t)=c_2\cos(ck_1t)}$

معادله R,Φ : $\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+k_1^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ تکلیف شماره ۵

$$\rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + k_1^2 r^2 = -\frac{\phi''}{\phi} = k_2^2$$

معادله R : $r^2R'' + rR' + (k_1^2r^2 - k_2^2)R = 0 \rightarrow$ به فرم معادله بسل است

معادله ϕ : $\phi'' + k_2^2\phi = 0 \xrightarrow{\text{حل}} \phi = C_3\sin(k_2\varphi) + C_4\cos(k_2\varphi)$

$$\rightarrow \phi(0) = 0 \rightarrow \boxed{C_4 = 0}\ ,\ \phi(\pi) = 0 \rightarrow k_2\cancel{\pi} = n\cancel{\pi}\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

معادله R ، معادله بسل مرتبه n است لذا:

$R(r) = C_5J_n(k_1r) + C_6N_n(k_1r) \xrightarrow{r\to 0} N_n \rightarrow \infty \rightarrow$ برای اینکه جواب محدود باشد $C_6 = 0$ است.

$$\rightarrow R(r) = C_5J_n(k_1r)$$

$\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} R(b) = C_5J_n(k_1b) = 0 \rightarrow k_1b = \alpha_{mn} \rightarrow$ m امین ریشه تابع بسل مرتبه n

$$\rightarrow k_1 = \frac{\alpha_{mn}}{b} \rightarrow R_{mn}(b) = C_5J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{b}r\right)$$

$$\rightarrow T_{mn}(t) = C_2\cos\left(\frac{c\alpha_{mn}}{b}t\right) \rightarrow u_{mn}(r,\varphi,t) = R_{mn}(r)\phi_n(\varphi)T_{mn}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(r,\varphi,t) = \sum_m\sum_n C_{mn}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{b}r\right)\sin(n\varphi)\cos\left(\frac{c\alpha_{mn}}{b}t\right)}$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط اولیه}} u(r,\varphi,0) = \sum_m\sum_n C_{mn}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{b}r\right)\sin(n\varphi) = f(r,\varphi)$$

برای محاسبه C_{mn} می‌توان از تعامد این توابع استفاده کرد.