



ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۲

نیم سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

سری فوریه

پاسخ سوال ۱: (۲۰ نمره)

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(ax) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right) e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[e^{(a-in)x} - e^{-(a+in)x} \right] dx \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{a-in} \left(e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi} \right) + \frac{1}{a+in} \left(e^{-(a+in)\pi} - e^{-(a+in)\pi} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{a+in}{a^2+n^2} \left(e^{a\pi} (-1)^n - e^{-a\pi} (-1)^n \right) + \frac{a-in}{a^2+n^2} \left(e^{-a\pi} (-1)^n - e^{a\pi} (-1)^n \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2} (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) [a+in - a+in] = \frac{2in(-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{4\pi(a^2+n^2)} = \frac{in(-1)^n \sinh(a\pi)}{(a^2+n^2)} \\
 f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in(-1)^n \sinh(a\pi)}{(a^2+n^2)} e^{inx}
 \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۲: (۳۰ نمره)

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{1+n} \cos(1+n)x + \frac{-1}{1-n} x \cos(1-n)x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos n\pi}{1 - n^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{1 - n^2} \cos nx \rightarrow \text{parseval} : S = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$



ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۲

نیم سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۳: (۲۰ نمره)

$$T = 1 \text{ and } l = 0.5$$

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

$$a_n = 0 \text{ and } b_n = 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx = \left. \frac{-2x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{2}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi x \right|_0^1 = \frac{-1}{n\pi}$$

پاسخ سوال ۴ قسمت (الف): (۱۵ نمره)

الف) سری فوری نقطه (مغای) $f(x) = e^{\alpha|x|}$, $T = 2\pi \Rightarrow L = \pi$

Complex Fourier Series: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{jn\pi}{L}x}$, $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{jn\pi}{L}x} dx$

ادامه جمل

نتیجه

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha|x|} e^{-jnx} dx \xrightarrow{\text{تجزیه به دو انتگرال}} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\alpha(-1)^n e^{\alpha\pi} - 2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \right]$$



ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۲

نیم سال دوم

۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۴ قسمت (ب): (۱۵ نمره)

(ب) برای محاسبه S_r با استفاده از اتحاد پارسل برای سری فوری می‌توانیم داریم:

$$\frac{1}{r\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{rx})^r dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi(n^r + 1)} \right]^r \quad ; \quad g(n) = \left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi(n^r + 1)} \right]^r$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{rx} = \frac{1}{\pi^r} \left[\underbrace{(e^{\pi} - 1)^r}_{g(0)} + r \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^r + 1} \right]^r}_{g(n)} \right] \rightarrow \text{برای ساده‌سازی}$$
$$\frac{1}{r\pi} [e^{r\pi} - 1] \quad g(0) \quad g(n)$$
$$\Rightarrow S_r = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^r + 1} \right]^r = \frac{\pi^r}{r} (e^{r\pi} - 1) - \frac{1}{r} (e^{\pi} - 1)^r$$

موفق باشید - خان چرلی