معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی-قسمت دوم

حل معادله گرما میله با طول نیمه محدود

فرض کنید میله ای روی محور x قرار دارد بطوریکه ابتدای آن در $x=0$ و انتهای آن در بینهایت باشد. بعبارت دیگر طول میله بینهایت است. همانطوریکه قبلا معادله گرما را به روش جداسازی متغییرها بدست آوردیم پاسخ معادله به صورت زیر است:

$$u(x,t)=(A\cos kx+B\sin kx)e^{-(kc)^2t}$$

شرایط مرزی و اولیه میله به صورت زیر است:

$$u(0,t)=0 \qquad Lim_{x\to\infty}u(x,t)=bounded<\infty \qquad u(x,0)=f(x)$$

حال شرط مرزی ابتدای میله را اعمال میکنیم:

$$u(0,t)=0\to(A\cos 0+B\sin 0)e^{-(kc)^2t}=0\to Ae^{-(kc)^2t}=0\to A=0$$

$$u(x,t)=B\sin kxe^{-(kc)^2t}$$

چون انتهای میله در بینهایت است و شرط مرزی در بینهایت معلوم نیست نمیتوان ثابت k را بدست آورد. اگر طول میله محدود بود و دمای میله در بینهایت صفر بود همانطوریکه در قسمت اول اثبات کردیم $k=\frac{m\pi}{L}$ و تابع در $t=0$ پریودیک با پریود $2L$ بود که آنرا با بسط سری فوریه سینوسی با این پریود نشان میدادیم ولی چون طول میله بینهایت است میوان گفت پریود میله بینهایت و یا بعبارت دیگر تابع غیر پریودیک است بنابراین از رابطه:

$$u(x,0)=f(x)\to B\sin kx=f(x)$$

نتیجه میگیریم که چون رابطه بالا امکانپذیر نیست رابطه را به جای مجموع یا سری فوریه که در حالتی که تابع پریودیک بود نشان میدادیم در اینحالت باید به صورت انتگرال فوریه نشان دهیم. بعبارت دیگر:

$$f(x)=\int_0^\infty B(k)\sin kxdk$$

تابع $B(k)$ همانطوریکه قبلا در مباحث انتگرال سینوسی فوریه ملاحظه کردیم همان $B(\omega)$ است که عبارت بود از $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega xdx$ برای توابع فرد. در نتیجه پاسخ معادله گرما برای میله نیمه محدود (در یکطرف محدود و طرف دیگر در بینهایت) به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\int_0^\infty B(k)\sin kxe^{-(kc)^2t}dk \qquad B(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin kxdx \qquad f(x)=u(x,0)$$

مثلا اگر $u(x,0)=f(x)=e^{-\alpha x}$ باشد در اینصورت همانطوریکه در بحث انتگرال فوریه اثبات کردیم $B(k)=\frac{2k}{\pi(k^2+\alpha^2)}$ دراینصورت:

$$u(x,t)=\int_0^\infty B(k)\sin kx e^{-(kc)^2 t}dk=\int_0^\infty \frac{2k}{\pi(k^2+\alpha^2)}\sin kx e^{-(kc)^2 t}dk$$

در حالت کلی برای هر تابع $f(x)$ میتوان نوشت:

$$u(x,t)=\int_0^\infty B(k)\sin kx e^{-(kc)^2 t}dk=\int_0^\infty (\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x')\sin kx' dx')\sin kx e^{-(kc)^2 t}dk=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\sin kx'\sin kx e^{-(kc)^2 t}dx'dk=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\frac{1}{2}(\cos k(x'-x)+\cos k(x'+x)e^{-(kc)^2 t}dx'dk=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')(\cos k(x'-x)-\cos k(x'+x))e^{-(kc)^2 t}dx'dk=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\cos k(x'-x)e^{-(kc)^2 t}dx'dk-$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\cos k(x'+x)e^{-(kc)^2 t}dx'dk$$

حال از رابطه اولر $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})$ استفاده میکنیم که خواهیم داشت:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\cos k(x'-x)e^{-(kc)^2 t}dx'dk-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\cos k(x'+x)e^{-(kc)^2 t}dx'dk=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\frac{1}{2}[e^{jk(x'-x)}+e^{-jk(x'-x)}]e^{-(kc)^2 t}dx'dk-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\frac{1}{2}[e^{jk(x'+x)}+e^{-jk(x'+x)}]e^{-(kc)^2 t}dx'dk=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\int_0^\infty [e^{-(kx)^2 t+jk(x'-x)}+e^{-(kx)^2 t-jk(x'-x)}]dk-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\int_0^\infty [e^{-(kx)^2 t+jk(x'+x)}+e^{-(kx)^2 t-jk(x'+x)}]dk=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\int_0^\infty e^{-(kx)^2 t+jk(x'-x)}dk+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\int_0^\infty e^{-(kx)^2 t-jk(x'-x)}dk-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\int_0^\infty e^{-(kx)^2 t+jk(x'+x)}dk$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\int_0^\infty e^{-(kx)^2 t-jk(x'+x)}dk=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\times u_1+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\times u_2-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\times u_3-$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x')dx'\times u_4$$

چهار انتگرال بالا مشابه هستند حالا یکی از انتگرالها را به صورت زیر میگیریم:

$$u_1=\int_0^\infty e^{-(kx)^2 t+jk(x'-x)}dk$$

که میتوان نوشت: $-(kc)^2 t+jk(x'-x)=a^2+2ab=(a+b)^2-b^2$

$$a=jkc\sqrt{t}\qquad b=\frac{2ab}{2a}=\frac{jk(x'-x)}{2jkc\sqrt{t}}=\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}}\rightarrow(a+b)^2-b^2=(jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}})^2-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}\rightarrow$$

$$-(kc)^2 t+jk(x'-x)=(jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}})^2-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}$$

در نتیجه داریم:

$$u_1=\int_0^\infty e^{-(kx)^2t+jk(x'-x)}dk=\int_0^\infty e^{(jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}})^2-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}dk=e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\int_0^\infty e^{(jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}})^2}dk$$

حال تغییر متغییر $jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}}=jA$ را انجام میدهیم در اینصورت $jc\sqrt{t}dk=jdA\to dk=\dfrac{dA}{c\sqrt{t}}$ و $(jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}})^2=-A^2$ پس انتگرال بالا برابر میشود با:

$$u_1=e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\int_0^\infty e^{(jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}})^2}dk=e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\frac{1}{c\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-A^2}dA$$

از قبل داشتیم: $\int_0^\infty e^{-A^2}dA=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ در نتیجه:

$$u_1=e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\int_0^\infty e^{(jkc\sqrt{t}+\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}})^2}dk=e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\frac{1}{c\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\to u_1=\int_0^\infty e^{-(kx)^2t+jk(x'-x)}dk=\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}$$

به همین ترتیب:

$$u_3=\int_0^\infty e^{-(kx)^2t+jk(x'+x)}dk=\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x'+x)^2}{4c^2t}}=u_4\qquad u_2=u_1$$

در نتیجه داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}c}[\int_0^\infty f(x')(e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}-e^{-\frac{(x'+x)^2}{4c^2t}})dx'$$

حل معادله گرما میله با طول نا محدود

در اینحالت میله ابتدا و انتهایش در بینهایت است در نتیجه درجه حرات ابتدا و انتهایش مشخص نیست زیرا هر دو سر میله در بینهایت است.

در اینحالت پاسخ معادله گرما همانطوریکه در قسمت اول اثبات کردیم به صورت کلی زیر است:

$$u(x,t)=(A\cos kx+B\sin kx)e^{-(kc)^2t}$$

اگر شرط اولیه را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$u(x,0)=(A\cos kx+B\sin kx)=f(x)$$

این تساوی امکان ندارد زیرا سمت چپ تابع سینوسی و سمت راست یک تابع اختیاری است بنابراین باید به صورت مجموع بنویسیم که چون تابع دارای پریود بینهایت است به جای سری فوریه از انتگرال فوریه استفاده میکنیم یعنی:

$$f(x)=\int_0^\infty[A(k)\cos kx+B(k)\sin kx]dk$$

توابع $A(k)$ و $B(k)$ همانطوریکه قبلا در مباحث انتگرال سینوسی و کسینوسی فوریه ملاحظه کردیم همان $A(\omega)$ و $B(\omega)$ هستند که عبارت بودند از $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$ و $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$ در نتیجه پاسخ معادله گرما به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}[A(k)\cos kx+B(k)\sin kx]e^{-(kc)^2t}dk \quad , \ A(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx dx \quad B(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin kx dx$$

حال برای جایگزینی توابع $A(k)$ و $B(k)$ در معادله بالا و برای ادغام دو انتگرال در یکدیگر متغییر x را به x' تبدیل میکنیم یعنی

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}[A(k)\cos kx+B(k)\sin kx]e^{-(kc)^2t}dk=\int_0^{\infty}[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\cos kx'dx'\cos kx+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\sin kx'dx'\sin kx]e^{-(kc)^2t}dk$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')[\cos kx'\cos kx+\sin kx'\sin kx]e^{-(kc)^2t}dx'dk=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')[\cos k(x'-x)]e^{-(kc)^2t}dx'dk$$

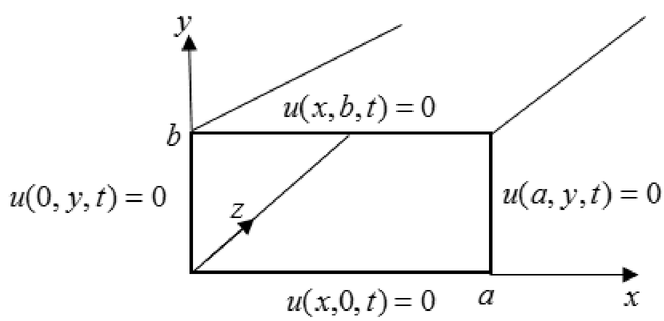
این انتگرال در قسمت قبل برای میله نیمه محدود قبلا حساب شده که در نتیجه خواهیم داشت:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}c}\int_0^{\infty} f(x')e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}dx'$$

حل معادله موج برای میله با سطح مقطع مستطیلی

در بخش اول این قسمت معادله موج را برای حالتی که سطح مقطع تار صفر بود و تار روی محور x به طول مشخص قرار داشت حل کردیم در این بخش فرض میکنیم که سطح مقطع تار مستطیلی به ابعاد $a\times b$ و بطول بینهایت میباشد در اینصورت معادله موج به صورت دو بعدی به صورت زیر است:

$$\nabla^2 u=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



برای حل معادله بالا از روش جداسازی متغییرها به صورت $u(x,y,t)=f(x)g(y)h(t)$ که با جایگزینی در معادله موج خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to g(y)h(t)\frac{d^2f(x)}{dx^2}+f(x)h(t)\frac{d^2g(y)}{dy^2}=f(x)g(y)\frac{d^2h(t)}{dt^2}$$

حال طرفین را بر $f(x)g(y)h(t)$ تقسیم میکنیم که خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{d^2g(y)}{dy^2}=\frac{1}{h(t)}\frac{d^2h(t)}{dt^2}$$

از معادله بالا مشاهده میشود که سمت چپ مجموع دو تابع از x و y و سمت چپ تابعی از t میباشد که این امکان ندارد مگر که هر جمله ثابت باشد. در بخش اول ثابت کردم که عدد ثابت باید منفی باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k_x^2$$
$$\frac{1}{g(y)}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -k_y^2 \rightarrow \frac{1}{h(t)}\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = -k_x^2 - k_y^2$$

پاسخ معادلات بالا به صورت زیرند:

$$\frac{1}{f(x)} f''(x) = -k_x^2 \rightarrow f''(x) = -k_x^2 f(x) \rightarrow f(x) = A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x$$
$$\frac{1}{g(y)} g''(y) = -k_y^2 \rightarrow g''(y) = -k_y^2 g(y) \rightarrow g(y) = A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y$$
$$\frac{1}{h(t)} h''(t) = -k_x^2 - k_y^2 = -k_z^2 \rightarrow h''(t) = -k_z^2 h(t) \rightarrow h(t) = A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t$$

در نتیجه پاسخ معادله موج برابر است با:

$$u(x,y,t) = f(x)g(y)h(t) = (A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x)(A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y)(A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t)$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$u(0,y,t) = (A_1 \sin 0 + B_1 \cos 0)(A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y)(A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t) = 0 \rightarrow B_1 = 0 \rightarrow$$
$$u(x,y,t) = A_1 \sin k_x x(A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y)(A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t) \quad u(a,y,t) = 0 \rightarrow$$
$$u(a,y,t) = A_1 \sin k_x a(A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y)(A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t) = 0 \rightarrow \sin k_x a = 0 \rightarrow k_x a = m\pi$$
$$\rightarrow k = \frac{m\pi}{a} \quad u(x,0,t) = A_1 \sin k_x x(A_2 \sin 0 + B_2 \cos 0)(A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t) = 0 \rightarrow B_2 = 0 \rightarrow$$
$$u(x,y,t) = A_1 A_2 \sin k_x x \sin k_y y(A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t) \quad u(x,b,t) = A_1 A_2 \sin k_x x \sin k_y b(A_3 \sin k_z t + B_3 \cos k_z t) = 0$$
$$\rightarrow \sin k_y b = 0 \rightarrow k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \rightarrow u(x,y,t) = (A \sin k_z t + B \cos k_z t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$
$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 = \lambda_{mn}^2 \rightarrow \lambda_{mn} = k_z = \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} \rightarrow$$
$$u(x,y,t) = (A \sin \lambda_{mn} t + B \cos \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

حال شرایط اولیه را اعمال میکنیم تا ضرایب مجهول را بدست بیاوریم:

$$u(x,y,0) = B \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = f(x,y)$$
$$u_t(x,y,0) = A\lambda_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = g(x,y)$$

روابط بالا امکانپذیر نیستند زیرا سمت چپ حاصلضرب دو تابع سینوسی و سمت راست توابع اختیاری هستند این تساویها تنها موقعی

امکانپذیر هستند که پاسخ معادله موج به صورت مجموع باشند یعنی:

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\sin\lambda_{mn}t+B_{mn}\cos\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

حال شرایط اولیه را اعمال میکنیم:

$$u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=f(x,y)$$

$$u_t(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=g(x,y)$$

اگر طرفین رابطه اول را در $\sin\frac{p\pi}{a}x$ ضرب و از 0 تا a انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}x\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydx=\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}xf(x,y)dx$$

میدانیم که $\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{a}xdx=\begin{cases}0 & m\neq p\\ \frac{a}{2} & m=p\end{cases}$ در نتیجه انتگرال سمت چپ تنها به ازای جمله $m=p$ غیر صفر است پس:

$$\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2}B_{pn}\sin\frac{n\pi}{b}y=\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}xf(x,y)dx$$

حال اگر طرفین رابطه بدست آمده را در $\sin\frac{q\pi}{b}y$ ضرب و از 0 تا b انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_0^b\sin\frac{q\pi}{b}y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2}B_{pn}\sin\frac{n\pi}{b}ydy=\int_0^b\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}x\sin\frac{q\pi}{b}yf(x,y)dxdy$$

میدانیم که $\int_0^a\sin\frac{q\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}xdx=\begin{cases}0 & n\neq q\\ \frac{b}{2} & n=q\end{cases}$ در نتیجه انتگرال سمت چپ تنها به ازای جمله $n=q$ غیر صفر است پس:

$$\int_0^b\sin\frac{q\pi}{b}y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2}B_{pn}\sin\frac{n\pi}{b}ydy=\int_0^b\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}x\sin\frac{q\pi}{b}yf(x,y)dxdy\rightarrow\frac{a}{2}\frac{b}{2}B_{pq}=\int_0^b\int_0^a\sin\frac{p\pi}{a}x\sin\frac{q\pi}{b}yf(x,y)dxdy$$

$$\rightarrow B_{pq}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{p\pi}{a}x\sin\frac{q\pi}{b}ydxdy\rightarrow B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy$$

همانطوریکه از رابطه $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=f(x,y)$ به رابطه $B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy$ رسیدیم

بنابراین از رابطه $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=g(x,y)$ به رابطه زیر میرسیم:

$$A_{mn}\lambda_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy\to A_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy$$

مثال 1: برای یک میله با سطح مقطع مستطیلی $a\times b=2\times 3$ دارای شرایط اولیه $u(x,y,0)=xe^{2y}$ و $u_t(x,y,0)=ye^{3x}$ معادله دما را بدست آورید.

حل: پاسخ کلی معادله گرما به صورت زیر است:

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\sin\lambda_{mn}t+B_{mn}\cos\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a xe^{2y}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy$$

$$A_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a ye^{3x}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy \qquad \lambda_{mn}=\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}=\sqrt{(\frac{m\pi}{2})^2+(\frac{n\pi}{3})^2}=\frac{\pi}{6}\sqrt{9m^2+4n^2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a xe^{2y}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy=\frac{4}{6}\int_0^3 e^{2y}\sin\frac{n\pi}{3}ydy\int_0^2 x\sin\frac{m\pi}{2}x=$$

$$\frac{2}{3}\int_0^3 e^{2y}\frac{1}{2j}(e^{j\frac{n\pi}{3}y}-e^{-j\frac{n\pi}{3}y})dy\int_0^2 x\sin\frac{m\pi}{2}xdx=\frac{1}{3j}\int_0^3[e^{y(2+j\frac{n\pi}{3})}-e^{y(2-j\frac{n\pi}{3})}]dy\int_0^2 x\sin\frac{m\pi}{2}xdx=$$

$$\frac{1}{3j}[\frac{1}{2+j\frac{n\pi}{3}}e^{(2+j\frac{n\pi}{3})y}-\frac{1}{2-j\frac{n\pi}{3}}e^{y(2-j\frac{n\pi}{3})}]_0^3[(x\times-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}x)_0^2+\int_0^2\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}xdx]=$$

$$\frac{1}{3j}[(\frac{1}{2+j\frac{n\pi}{3}}-\frac{1}{2-j\frac{n\pi}{3}})(e^6(-1)^n-1)][-\frac{4}{m\pi}]=\frac{8n[1-e^6(-1)^n]}{m(36+n^2\pi^2)}$$

$$A_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a ye^{3x}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy=\frac{4}{6\lambda_{mn}}\int_0^2 e^{3x}\sin\frac{m\pi}{2}xdx\int_0^3 y\sin\frac{n\pi}{3}y=$$

$$\frac{2}{3\lambda_{mn}}\int_0^2 e^{3x}\frac{1}{2j}(e^{j\frac{m\pi}{2}x}-e^{-j\frac{m\pi}{2}x})dx\int_0^3 y\sin\frac{n\pi}{3}ydx=\frac{2}{3j\lambda_{mn}}\int_0^2[e^{x(3+j\frac{m\pi}{2})}-e^{x(2-j\frac{m\pi}{2})}]dx\int_0^3 y\sin\frac{n\pi}{3}ydy=$$

$$\frac{1}{3j\lambda_{mn}}[\frac{1}{3+j\frac{m\pi}{2}}e^{x(3+j\frac{m\pi}{2})}-\frac{1}{3-j\frac{m\pi}{2}}e^{x(3-j\frac{m\pi}{2})}]_0^2[(y\times-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}y)_0^3+\int_0^3\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}ydy]=$$

$$\frac{1}{3j\lambda_{mn}}[(\frac{1}{3+j\frac{m\pi}{2}}-\frac{1}{3-j\frac{m\pi}{2}})(e^6(-1)^m-1)][-\frac{9}{n\pi}]=\frac{3m[1-e^6(-1)^m]}{n\lambda_{mn}(36+m^2\pi^2)}$$

حل کلی معادلات موج و گرما با استفاده از تبدیل لاپلاس

در قسمت قبل برای حل معادلاتی که شرایط مرزی غیر صفر داشتند و در حالتی که شکل معادله پیچیده است از تغییر متغییر $u(x,t)=w(x,t)+V(x)$ استفاده شد. این روش در مواقعی قابل استفاده است که شرایط مرزی عدد ثابت باشند ولی در حالت کلی که شرایط مرزی متغییری از زمان و یا مکان باشند قابل استفاده نیست. در اینحالت از روش تبدیل لاپلاس استفاده میکنیم که معادله کلی گرما و

موج را تبدیل به معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت میکند که حل آن بسیارراحت است و پاسخ ان از جمع پاسخ هموژن یا همگن و پاسخ خصوصی بدست می آید که پاسخ خصوصی از جنس تابع طرف دوم معادله است. جهت یادآوری مثال زیر را برای حل معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت حل میکنیم

مثال **2**:پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2$ بدست آورید

$$y'' + 4y' + 3y = 6 + 2e^{-2x} + 30\cos 3x$$

ابتدا معادله مشخصه که ضرایب ان همان ضرایب معادله دیفرانسیل و درجه آن همان درجه بالاترین مشتق (در این مثال درجه **2** میباشد) را تشکیل میدهیم که عبارتست از:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \to (\lambda+1)(\lambda+3) = 0 \to \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$$

در نتیجه پاسخ هموژن عبارتست از: $y_h = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{-x} + Be^{-3x}$. پاسخ خصوصی باید از جنس طرف دوم باشد که متشکل از یک عدد ثابت بعلاوه یک تابع سینوسی و یک تابع اکسپونانسیل. دقت کنید که چون مشتق سینوس برابر با کسینوس و برعکس است اگر سمت راست معادله کسینوس باشد پاسخ خصوصی باید ترکیبی از جمله سینوس و کسینوس باشد در نتیجه پاسخ خصوصی برابر است با:

$$y_p = k_1 + k_2\cos 3x + k_3\sin 3x + k_4 e^{-2x}$$

حال این پاسخ را در معادله دیفرانسیل جایگزین میکنیم و از مقایسه ضرایب جملات مشابه دو طرف معادله ضرایب مجهول را بدست می آوریم:

$$\frac{d^2}{dx^2}(k_1 + k_2\cos 3x + k_3\sin 3x + k_4 e^{-2x}) + 4\frac{d}{dx}(k_1 + k_2\cos 3x + k_3\sin 3x + k_4 e^{-2x}) +$$
$$3(k_1 + k_2\cos 3x + k_3\sin 3x + k_4 e^{-2x}) = 6 + 2e^{-2x} + 30\cos 3x \to 3k_1 + (-6k_2 + 12k_3)\cos 3x +$$
$$(-6k_3 - 12k_2)\sin 3x - k_4 e^{-2x} \to 3k_1 = 6 \to k_1 = 2,\quad -k_4 = 2 \to k_4 = -2 \qquad \begin{cases} -6k_2 + 12k_3 = 30 \\ -6k_3 - 12k_2 = 0 \end{cases} \to k_2 = -1, k_3 = 2$$

در نتیجه پاسخ خصوصی برابر است با: $y_p = 2 - \cos 3x + 2\sin 3x - 2e^{-2x}$. حال پاسخ کامل معادله برابر است با:

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Be^{-3x} + 2 - \cos 3x + 2\sin 3x - 2e^{-2x}$$

حال با اعمال شرایط مرزی ضرایب مجهول را بدست می آوریم:

$$y(0) = A + B + 2 - 1 - 2 = -1 \to A + B = 0$$
$$y'(0) = -A - 3B + 6 + 4 = 2 \to -A - 3B = -8 \to \begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 3B = -8 \end{cases} \to B = 4,\quad A = -4$$

بنابراین پاسخ معادله داده شده عبارتست از:

$$y = -4e^{-x} + 4e^{-3x} + 2 - \cos 3x + 2\sin 3x - 2e^{-2x}$$

حال که حل معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت توضیح داده شد معادلات گرما و موج را به روش لاپلاس حل میکنیم. چون گرما و موج تابع دو

متغیر x (مکان) و t (زمان میباشد) میتوان یا در حوزه مکان لاپلاس گرفت و یا در حوزه زمان یعنی:

$$Laplas[u(x,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-sx}dx=U(s,t) \qquad Laplas[u(x,t)]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-st}dt=U(x,s)$$

مثالهای زیر کاربرد تبدیل لاپلاس را در حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی نشان میدهند.

مثال **3**:با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را بدست آورید.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad u(x,0)=1+\sin \pi x \qquad u(0,t)=1 \qquad u(1,t)=1$$

حل: از طرفین نسبت به زمان لاپلاس میگیریم. برای طرف اول میدانیم لاپلاس مشتق دوم برابر است با مشتق دوم لاپلاس. لاپلاس حوزه زمان تابع $u(x,t)$ برابر است با $U(x,s)$ولی طرف دوم باید از مشتق زمانی تابع لاپلاس در حوزه زمان بگیریم که از فرمول $Laplas(y'(t))=SY(s)-y(0)$ استفده میکنیم. بنابراین با لاپلاس گرفتن از دو طرف داریم:

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=sU(x,s)-u(x,0)\rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=sU(x,s)-(1+\sin \pi x)\rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-sU(x,s)=-(1+\sin \pi x)$$

چون معادله دیفرانسیل بر حسب تابع x است پس ضریب s در سمت چپ معادله عدد ثابت به حساب می آید بنابراین معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت داریم که باید پاسخ هموژن و پاسخ خصوصی را بدست آوریم. پاسخ هموژن عبارتست از:

$$\lambda^2-s=0\rightarrow\lambda_1=\sqrt{s} \qquad \lambda_2=-\sqrt{s} \qquad U_h(x,s)=Ae^{\sqrt{s}x}+Be^{-\sqrt{s}x}$$

حال پاسخ خصوصی باید از جنس طرف دوم باشد یعنی باید: $U_p(x,s)=k_1+k_2\sin \pi x+k_3\cos \pi x$ که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\frac{d^2U_p(x,s)}{dx^2}-sU_p(x,s)=-(1+\sin \pi x)\rightarrow\sin \pi x(-sk_2-k_2\pi^2)-sk_3\cos \pi x-sk_1=-(1+\sin \pi x)\rightarrow$$

$$(-sk_2-k_2\pi^2)=-1\rightarrow k_2=\frac{1}{s+\pi^2} \qquad k_3=0 \qquad k_1=\frac{1}{s}\rightarrow U_p(x,s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2}\sin \pi x$$

بنابراین پاسخ کامل معادله برابر است با:

$$U(x,s)=U_h(x,s)+U_p(x,s)=Ae^{\sqrt{s}x}+Be^{-\sqrt{s}x}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2}\sin \pi x$$

حال باید از شرایط مرزی لاپلاس بگیریم تا ضرایب مجهول را بدست آوریم:

$$u(0,t)=1\rightarrow U(0,s)=\frac{1}{s} \qquad u(1,t)=1\rightarrow U(1,s)=\frac{1}{s}$$

این شرایط مرزی را در پاسخ بدست امده میگذاریم که خواهیم داشت:

$$U(x,s)=Ae^{\sqrt{s}x}+Be^{-\sqrt{s}x}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2}\sin\pi x \quad U(0,s)=A+B+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2}(0)=\frac{1}{s}\to A+B=0$$
$$U(1,s)=Ae^{\sqrt{s}}+Be^{-\sqrt{s}}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2}\sin\pi=e^{\sqrt{s}}+Be^{-\sqrt{s}}+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}\to Ae^{\sqrt{s}}+Be^{-\sqrt{s}}=0\to$$
$$\begin{cases}A+B=0\\ Ae^{\sqrt{s}}+Be^{-\sqrt{s}}=0\end{cases}\to A=-B=0\to U(x,s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2}\sin\pi x$$

حال از جواب بدست آمده لاپلاس معکوس میگیریم. میدانیم لاپلاس معکوس $\frac{1}{s+\alpha}$ برابراست با $e^{-\alpha t}u_{-1}(t)$ که $u_{-1}(t)$ تابع پله واحد است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$U(x,s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2}\sin\pi x\to u(x,t)=(1+e^{-\pi^2 t})\sin\pi x u_{-1}(t)$$

مثال **4**: معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی را یکبار با تبدیل لاپلاس در حوزه زمان و یکبار با تبدیل لاپلاس در حوزه فرکانس حل کنید و ثابت کنید پاسخ یکی است:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\sin t=0 \qquad u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=x \qquad x>0 \qquad t>0$$

حل-الف) تبدیل لاپلاس در حوزه زمان: در اینحالت ابتدا معادله را به صورت زیر مینویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t})+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\sin t=0\to\frac{\partial}{\partial x}[Laplas(\frac{\partial u}{\partial t})]+Laplas[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}]+\frac{1}{s^2+1}=0\to$$
$$\frac{d}{dx}[sU(x,s)-u(x,0)]+\frac{d}{dx}[Laplas(u(x,t)]+\frac{1}{s^2+1}=0\to\frac{d}{dx}[sU(x,s)-x]+\frac{dU(x,s)}{dx}+\frac{1}{s^2+1}=0\to$$
$$s\frac{dU(x,s)}{dx}-1+\frac{dU(x,s)}{dx}+\frac{1}{s^2+1}=0\to(s+1)\frac{dU(x,s)}{dx}=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}\to\frac{dU(x,s)}{dx}=\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}\to$$
$$U(x,s)=\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}x+C(s)$$

که $C(s)$ عدد ثابت بر حسب x است (لازم به ذکر است که لاپلاس $\sin\omega_0 t$ برابر است با $\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$). حالا برای پیدا کردن $C(s)$ از شرط مرزی استفاده میکنیم:

$$u(0,t)=0\to U(0,s)=0 \qquad U(x,s)=\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}x+C(s) \quad U(0,s)=0+C(s)=0\to C(s)=0\to$$
$$U(x,s)=\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}x=\frac{1}{2}(\frac{1}{s+1}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1})x\to u(x,t)=\frac{1}{2}x(e^{-t}+\cos t-\sin t)$$

(لازم به ذکر است که لاپلاس $\cos\omega_0 t$ برابر است با $\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$).

حل-ب) تبدیل لاپلاس در حوزه مکان: در اینحالت ابتدا معادله را به صورت زیر مینویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\sin t=0\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}[Laplas(\frac{\partial u}{\partial x})]+Laplas[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}]+\frac{1}{s}\sin t=0\rightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial t}[sU(s,t)-u(0,t)]+[sU(s,t)-u(0,t)]+\frac{1}{s}\sin t=0\rightarrow\frac{d}{dx}[sU(s,t)-0]+sU(s,t)-0+\frac{1}{s}\sin t=0\rightarrow$$
$$s(\frac{dU(s,t)}{dx}+U(s,t))=-\frac{1}{s}\sin t=0\rightarrow\frac{dU(s,t)}{dx}+U(s,t)=-\frac{1}{s^2}\sin t$$

معادله دیفرانسیل بالا معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت است که هم پاسخ هموژن دارد و هم پاسخ خصوصی. لازم به ذکر است که $\sin t$ نسبت به متغییر x یک عدد ثابت است و لاپلاس یک عدد ثابت kبرابر است با: $\frac{k}{s}$. حال معادله مشخصه برابر است با: $\lambda+1=0\rightarrow\lambda=-1$ در نتیجه پاسخ هموژن برابر است با: $U_h(s,t)=Ae^{-t}$. پاسخ خصوصی که باید از جنس طرف دوم باشد برابر است با: $U_p(s,t)=B\sin t+C\cos t$ که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل بدست آمده خواهیم داشت:

$$\frac{dU(s,t)}{dx}+U(s,t)=-\frac{1}{s^2}\sin t\rightarrow\frac{d}{dx}(B\sin t+C\cos t)+B\sin t+C\cos t=-\frac{1}{s^2}\sin t\rightarrow$$
$$\sin t(B-C)+\cos t(B+C)=-\frac{1}{s^2}\sin t\rightarrow\begin{cases}B-C=-\frac{1}{s^2}\\ B+C=0\end{cases}\rightarrow B=-\frac{1}{2s^2}\quad C=\frac{1}{2s^2}\rightarrow$$
$$U_p(s,t)=B\sin t+C\cos t=\frac{1}{2s^2}(\cos t-\sin t)\rightarrow U(s,t)=U_h(s,t)+U_p(s,t)=Ae^{-t}+\frac{1}{2s^2}(\cos t-\sin t)$$

حال شرایط مرزی را اعمال میکنیم تا ضریب مجهول بدست آید:

$$u(x,0)=x\rightarrow U(s,0)=\frac{1}{s^2}=A+\frac{1}{2s^2}(1-0)\rightarrow A=\frac{1}{2s^2}\rightarrow U(s,t)=\frac{1}{2s^2}e^{-t}+\frac{1}{2s^2}(\cos t-\sin t)\rightarrow$$
$$U(s,t)=\frac{1}{2s^2}(e^{-t}+\cos t-\sin t)\rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}x(e^{-t}+\cos t-\sin t)$$

که همان جواب قسمت الف است. لازم به ذکر است که لاپلاس x در حوزه مکان مثل لاپلاس tدر حوزه زمان و برابر است با: $\frac{1}{s^2}$.

مثال **5**:معادله دیفرانسیل زیر با مشتقات جزیی را به روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}+e^{-t}\qquad u(x,0)=u_t(x,0)=0\quad u(0,t)=1$$

حل: از طرفین نسبت به زمان تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$\frac{d^2[Laplasu(x,t)]}{dx^2}=Laplas(\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2})+Laplas(e^{-t})\rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)+\frac{1}{s+1}\rightarrow$$
$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=s^2U(x,s)-s(0)-0+\frac{1}{s+1}\rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^2U(x,s)=\frac{1}{s+1}$$

معادله مشخصه $\lambda^2-s^2=0\rightarrow\lambda_1=s,\ \lambda_2=-s$ در نتیجه پاسخ هموژن برابر است با: $U_h(x,s)=Ae^{sx}+Be^{-sx}$. اما چون طرف دوم بر حسب x ثابت است در نتیجه پاسخ خصوصی عدد ثابت است در نتیجه $U_p(x,s)=k$ که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\frac{d^2k}{dx^2}-s^2k=\frac{1}{s+1}=0\rightarrow -s^2k=\frac{1}{s+1}\rightarrow k=-\frac{1}{s^2(s+1)}=U_p(x,s)$$

بنابراین پاسخ کامل معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$U(x,s)=Ae^{sx}+Be^{-sx}-\frac{1}{s^2(s+1)}$$

چون $\lim_{x\to\infty}U(x,s)\neq\infty$ پس باید $A=0$ در نتیجه:

$$U(x,s)=Be^{-sx}-\frac{1}{s^2(s+1)}$$

حال شرط مرزی را اعمال میکنیم تا ضریب مجهول را بدست آوریم:

$$u(0,t)=1\rightarrow U(0,s)=\frac{1}{s}\qquad U(x,s)=Be^{-sx}-\frac{1}{s^2(s+1)}\rightarrow U(0,s)=B-\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s}\rightarrow$$

$$B=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2(s+1)}\rightarrow U(x,s)=(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2(s+1)})e^{-sx}-\frac{1}{s^2(s+1)}=(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1})e^{-sx}+(-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1})$$

حال اگر $G(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}$ در اینصورت $g(t)=(t+e^{-t})u_{-1}(t)$ و لاپلاس معکوس $(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1})e^{-sx}$ برابر است با $g(t-x)$ در نتیجه:

$$u(x,t)=(t-x+e^{-(t-x)})u_{-1}(t-x)+(-t+1-e^{-t})u_{-1}(t)$$

مثال **6**: معادله غیر همگن زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید

$$w_{xx}(x,t)=w_{tt}(x,t)+4e^{-2t}\qquad w(x,0)=x\qquad w_t(x,0)=0\qquad w(0,t)=1-2t-e^{-2t}$$
$$w(2,t)=3-2t-e^{-2t}\qquad x\geq 0\qquad t\geq 0$$

حل: از طرفین بر حسب زمان تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$\frac{d^2W(x,s)}{dx^2}=s^2W(x,s)-sw(x,0)-w_t(x,0)+\frac{4}{s+2}\rightarrow\frac{d^2W(x,s)}{dx^2}-s^2W(x,s)=-sx+\frac{4}{s+2}$$

پاسخ هموژن به صورت زیر است:

$$\lambda^2-s^2=0\rightarrow\lambda_1=s\qquad\lambda_2=-s\rightarrow W_h(x,s)=Ae^{sx}+Be^{-sx}$$

پاسخ خصوصی از چنس طرف دوم است چون طرف دوم عدد ثابت (بر حسب x) یعنی جمله $\frac{1}{s+2}$ و جمله خطی بر حسب x (یعنی عبارت $-sx$) میباشد پس فرم کلی پاسخ خصوصی به صورت $W_p(x,s)=k_1x+k_2$ میباشد در نتیجه با جایگزینی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\frac{d^2W(x,s)}{dx^2}-s^2W(x,s)=-sx+\frac{4}{s+2}\to 0-s^2(k_1x+k_2)=-sx+\frac{4}{s+2}\to k_1=\frac{1}{s}\qquad k_2=-\frac{4}{s^2(s+2)}\to$$
$$W_p(x,s)=k_1x+k_2=\frac{1}{s}x-\frac{4}{s^2(s+2)}$$

بنابراین پاسخ کامل معادله به صورت زیر است:

$$W(x,s)=W_h(x,s)+W_p(x,s)=Ae^{sx}+Be^{-sx}+\frac{1}{s}x-\frac{4}{s^2(s+2)}$$

حالا از شرایط مرزی تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$w(0,t)=1-2t-e^{-2t}\to W(0,s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2}=-\frac{4}{s^2(s+2)}$$

$$w(2,t)=3-2t-e^{-2t}\to W(2,s)=\frac{3}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2}=\frac{2s^2+4s-4}{s^2(s+2)}$$

حال **داریم:**

$$W(x,s)=Ae^{sx}+Be^{-sx}+\frac{1}{s}x-\frac{1}{s^2(s+2)}\to W(0,s)=A+B-\frac{1}{s^2(s+2)}=-\frac{1}{s^2(s+2)}\to A+B=0$$
$$W(2,s)=Ae^{2s}+Be^{-2s}+\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2(s+2)}=\frac{2s^2+4s-4}{s^2(s+2)}\to Ae^{2s}+Be^{-2s}+\frac{2s^2+4s-4}{s^2(s+2)}=\frac{2s^2+4s-4}{s^2(s+2)}\to$$
$$Ae^{2s}+Be^{-2s}=0\to\begin{cases}A+B=0\\ Ae^{2s}+Be^{-2s}=0\end{cases}\to A=B=0$$

بنابراین پاسخ معادله دیفرانسیل بالا برابر است با:

$$W(x,s)=Ae^{sx}+Be^{-sx}+\frac{1}{s}x-\frac{1}{s^2(s+2)}=\frac{1}{s}x-\frac{1}{s^2(s+2)}=\frac{1}{s}x+\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2}$$

حالا از نتیجه بدست آمده در حوزه زمان لاپلاس میگیریم:

$$w(x,t)=(x+1-2t-e^{-2t})u_{-1}(t)$$

مثال 7: معادله غیر همگن موج زیر را به روش تبدیل لاپلاس حل کنید

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+4\sin\pi x\qquad w(0,t)=0\qquad w(2,t)=0\qquad w(x,0)=-\frac{4}{\pi^2}\sin\pi x\qquad w_t(x,0)=\sin\pi x$$

حل: از طرفین در حوزه زمان لاپلاس میگیریم

$$\frac{d^2W(x,s)}{dx^2}=s^2W(x,s)-sw(x,0)-w_t(x,0)+\frac{4\sin\pi x}{s}\to\frac{d^2W(x,s)}{dx^2}-s^2W(x,s)=\frac{4s}{\pi^2}\sin\pi x-\sin\pi x+\frac{4\sin\pi x}{s}$$
$$\to\frac{d^2W(x,s)}{dx^2}-s^2W(x,s)=\sin\pi x[\frac{4s}{\pi^2}-1+\frac{4}{s}]$$

معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت یک پاسخ هموژن دارد که به صورت زیربدست می آید:

$$\lambda^2 - s^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm s \rightarrow W_h(x,s) = Ae^{-sx} + Be^{sx}$$

پاسخ خصوصی از جنس طرف دوم است که به صورت $W_p(x,s) = C\sin\pi x$ که ضریب مجهول با جایگزینی در معادله دیفرانسیل بدست می اید:

$$\frac{d^2W(x,s)}{dx^2} - s^2W(x,s) = \sin\pi x[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}] \rightarrow -C\pi^2\sin\pi x - s^2C\sin\pi x = \sin\pi x[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}] \rightarrow$$

$$-(\pi^2 + s^2)C\sin\pi x = \sin\pi x[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}] \rightarrow C = -\frac{1}{s^2+\pi^2}[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}] \rightarrow W_p(x,s) = -\frac{1}{s^2+\pi^2}[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}]\sin\pi x$$

بنابراین پاسخ کامل برابر است با:

$$W(x,s) = W_h(x,s) + W_p(x,s) = Ae^{-sx} + Be^{sx} - \frac{1}{s^2+\pi^2}[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}]\sin\pi x$$

$$w(0,t) = w(2,t) = 0 \rightarrow W(0,s) = W(2,s) = 0 \rightarrow W(0,s) = 0 = A + B - \frac{1}{s^2+\pi^2}[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}]\sin 0 \rightarrow$$

$$A + B = 0 \qquad W(2,s) = 0 = Ae^{-2s} + Be^{2s} - \frac{1}{s^2+\pi^2}[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}]\sin 2\pi \rightarrow Ae^{-2s} + Be^{2s} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{-2s} + Be^{2s} = 0 \end{cases} \rightarrow A = B = 0 \rightarrow W(x,s) = -\frac{1}{s^2+\pi^2}[\frac{4s}{\pi^2} - 1 + \frac{4}{s}]\sin\pi x =$$

$$[\frac{1}{s^2+\pi^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}(\frac{4(s^2+\pi^2)}{s\pi^2})]\sin\pi x = [\frac{1}{s^2+\pi^2} - \frac{4}{s\pi^2}]\sin\pi x \rightarrow w(x,t) = [\frac{1}{\pi}\sin\pi t - \frac{4}{\pi^2}]\sin\pi x$$

موفق باشید

محمود محمدطاهری اردیبهشت 1401