تبدیل فوریه(Fourier Transform)

تابع $f(x)$ در فصل پیش به صورت زیر تعریف شد:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

که با جایگزینی

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)\cos\omega\gamma d\gamma \qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)\sin\omega\gamma d\gamma$$

در معادله بالا داریم:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)\cos\omega\gamma d\gamma\cos\omega x+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)\sin\omega\gamma d\gamma\sin\omega x]d\omega=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)[\cos\omega\gamma\cos\omega x+\sin\omega\gamma\sin\omega x]d\omega d\gamma=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)d\gamma\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\gamma-x)d\omega$$

چون تابع $\cos\omega(\gamma-x)$ نسبت به ω زوج است در نتیجه $\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\gamma-x)d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\gamma-x)d\omega$ که با جایگزینی در معادله بالا داریم:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)d\gamma\int_{0}^{\infty}\cos\omega(\gamma-x)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)d\gamma\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\gamma-x)d\omega\rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)d\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\gamma-x)d\omega$$

حال اگر به جای $\cos\omega(\gamma-x)$ در معادله بالا قرار دهیم $\sin\omega(\gamma-x)$ در اینصورت $\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega(\gamma-x)d\omega=0$ چون $\sin\omega(\gamma-x)$ نسبت به ω فرد است بعبارت دیگر میتوانیم بنویسیم:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)d\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(\gamma-x)d\omega \qquad (1)$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)d\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega(\gamma-x)d\omega \qquad (2)$$

حال اگر رابطه (۱) را با j برابر رابطه (۲) جمع کنیم خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)[\cos\omega(\gamma-x)+j\sin\omega(\gamma-x)]d\omega d\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)[e^{j\omega(x-\gamma)}]d\omega d\gamma\rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f(\gamma)e^{-j\omega\gamma}d\gamma]e^{j\omega x}d\omega$$

عبارت $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma)e^{-j\omega\gamma}d\gamma$ را که میتوان به صورت $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx$ نوشت تبدیل فوریه تابع $f(x)$ میباشد. در نتیجه رابطه بالا به صورت زیر نوشته میشود:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

معادله بالا فوریه معکوس تابع $F(\omega)$ میباشد. یعنی با داشتن تبدیل فوریه یک تابع میتوان خود تابع را با معادله بالا بدست آورد.تابع میتواند بر حسب زمان باشد در اینصورت تبدیل فوریه آن با رابطه $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ بیان میشود.

مثال۱: برای تابع $f(t)=rect(\frac{t}{\tau})$ تبدیل فوریه را بدست آورید.

حل: تابع داده شده به صورت $f(t)=rect(\frac{t}{\tau})=\begin{cases}1 & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$ تعریف میشود. در نتیجه تبدیل فوریه آن به صورت زیربدست می آید:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt=[-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=-\frac{1}{j\omega}(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau}{2}})=-\frac{1}{j\omega}(-2j\sin\omega\frac{\tau}{2})$$

$$F(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

البته تبدیل فوریه را میتوان بر حسب فرکانس نوشت که با جایگزینی $\omega=2\pi f$ بدست می آید. یعنی:

$$F(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\rightarrow F(f)=\frac{2}{2\pi f}\sin\frac{2\pi f\tau}{2}=\frac{1}{\pi f}\sin\pi f\tau=\frac{\tau}{\pi f\tau}\sin\pi f\tau=\tau\sin c(\tau f)$$

مثال ۲: تبدیل فوریه تابع $f(t)=e^{-\alpha|t|}$ را بدست آورید.

حل: با استفاده ازرابطه تبدیل فوریه داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=[\frac{1}{(\alpha-j\omega)}e^{(\alpha-j\omega)t}]_{-\infty}^{0}$$
$$+[-\frac{1}{(\alpha+j\omega)}e^{-(\alpha+j\omega)t}]_{0}^{\infty}=\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$

ملاحظه میشود که چون تابع $f(t)=e^{-\alpha|t|}$ تابع زوج است تبدیل فوریه آن یک عدد حقیقی میباشد. در مثال ۱ نیز تابع $f(t)=rect(\frac{t}{\tau})$ یک تابع زوج و تبدیل فوریه آن حقیقی بود. برای یک تابع اگر تبدیل فوریه را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t-j\sin\omega t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

اگر تابع $f(t)$ زوج باشددر اینصورت $f(t)\sin\omega t$ یک تابع فرد است و در نتیجه $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt=0$ بنابراین:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

که یک عدد حقیقی است. حال اگر $f(t)$ فرد باشددر اینصورت $f(t)\cos\omega t$ یک تابع فرد است و در نتیجه $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt=0$ بنابراین:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt=-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

یعنی اگر یک تابع فرد باشد در اینصورت تبدیل فوریه آن موهومی خالص است.

مثال ۳: تبدیل فوریه تابع $f(t)=e^{-at}u_{-1}(t)=\begin{cases}e^{-at} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$ را بدست آورید. تابع $u_{-1}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$ پله واحد میباشد.

حل: با استفاده از رابطه تبدیل فوریه میتوانیم بنویسیم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=[-\frac{1}{(\alpha+j\omega)}e^{-(\alpha+j\omega)t}]_0^{\infty}=\frac{1}{j\omega+a}=\frac{a}{\omega^2+a^2}-j\frac{\omega}{\omega^2+a^2}$$

ملاحظه میشود که چون تابع نه زوج است و نه فرد تبدیل فوریه آن مختلط است.

قوانین تبدیل فوریه

الف) قانون تاخیر

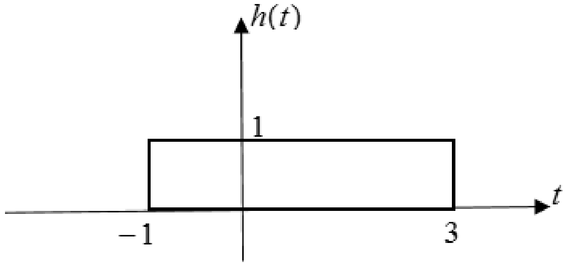
اگر تبدیل فوریه تابع $g(t)$ را $G(\omega)$ بنامیم در اینصورت تبدیل فوریه تاخیر یافته ای تابع یعنی $h(t)=g(t-\tau)$ با محاسبات زیر بدست می آید:

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t}dt \qquad t'=t-\tau\rightarrow t=t'+\tau \qquad dt=dt'$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t')e^{-j\omega(t'+\tau)}dt'=e^{-j\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} g(t')e^{-j\omega t'}dt'=e^{-j\omega\tau}G(\omega)$$

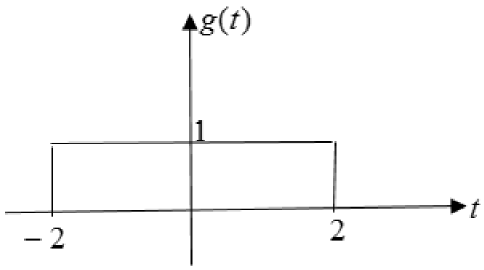
بعبارت دیگر تبدیل فوریه $h(t)=g(t-\tau)$ برابر است با: $e^{-j\omega\tau}G(\omega)$. یعنی اگر یک تابعی را به اندازه τ تاخیر دهیم تبدیل فوریه آن در ضریب $e^{-j\omega\tau}$ ضرب میشود.

مثال۴: تبدیل فوریه تابع رسم شده در زیر را بدست آورید.



اگر تابع $g(t)=rect(\frac{t}{4})$ که در زیر رسم شده است در اینصورت $h(t)=g(t-1)$. با توجه به اینکه تبدیل فوریه $rect(\frac{t}{\tau})$ برابر است با:

$\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$ در نتیجه تبدیل فوریه تابع $g(t)=rect(\frac{t}{4})$ برابر است با:



$G(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin 2\omega$ و با استفاده از قانون تاخیر تبدیل فوریه $h(t)=g(t-1)$

برابر است با: $H(\omega)=e^{-j\omega\tau}G(\omega)=\frac{2e^{-j\omega}}{\omega}\sin 2\omega$

ملاحظه میشود که چون تابع $h(t)$ نه فرد است نه زوج تبدیل فوریه آن مختلط است در حالی تابع $g(t)$ چون زوج است تبدیل فوریه آن حقیقی است

ب) فوریه تابع $h(t)=g(t)e^{j\omega_0 t}$

فوریه تابع $h(t)=g(t)e^{j\omega_0 t}$ با محاسبات زیر بدست می آید:

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=G(\omega-\omega_0)$$

به همین ترتیب فوریه تابع $h(t)=g(t)e^{-j\omega_0 t}$ برابر است با: $G(\omega+\omega_0)$

پ) فوریه مشتق تابع

فوریه معکوس یک تابع برابر است با:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

ملاحظه میشود که ضریب $e^{j\omega_0 t}$ که $G(\omega)$ است همان تبدیل فوریه عبارت سمت چپ یعنی فوریه $g(t)$ است. حال از طرفین نسبت به زمان مشتق میگیریم:

$$g'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[j\omega G(\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

طبق آنچه در بالا بیان شد ضریب $e^{j\omega_0 t}$ که $j\omega G(\omega)$ تبدیل فوریه سمت چپ یعنی فوریه $g'(t)$ است. بعبارت دیگر تبدیل فوریه مشتق یک تابع برابر با $j\omega$ ضربدر تبدیل فوریه همان تابع است. حال اگر n بار از طرفین نسبت به زمان مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} = g^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [(j\omega)^n G(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

یعنی تبدیل فوریه مشتق nام یک تابع برابر است با $(j\omega)^n$ در تبدیل فوریه همان تابع است. فوریه مشتق یک تابع را میتوان از راه دیگر هم اثبات کرد. اگر $h(t) = g'(t)$ در اینصورت تبدیل فوریه این تابع برابر است با:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g'(t) e^{-j\omega t} dt$$

حال از انتگرال جزء به جزء $\int u'v = uv - \int uv'$ استفاده میکنیم که خواهیم داشت:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g'(t) e^{-j\omega t} dt = [(g(t) e^{-j\omega t})_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \times -j\omega e^{-j\omega t} dt] = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega G(\omega)$$

در محاسبات بالا فرض شده که $g(-\infty) = g(\infty) = 0$.

مثال۵: با استفاده از خاصیت مشتق تبدیل فوریه پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 6e^{-4t} u_{-1}(t)$$

حل: از طرفین تبدیل فوریه میگیریم (تبدیل فوریه $e^{-at} u_{-1}(t)$ برابر است با $\frac{1}{j\omega + a}$)

$$(j\omega)^2 Y(\omega) + 3(j\omega) Y(\omega) + 2Y(\omega) = \frac{6}{j\omega + 4} \rightarrow [(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2] Y(\omega) = \frac{6}{j\omega + 4} \rightarrow$$
$$(j\omega + 1)(j\omega + 2) Y(\omega) = \frac{6}{j\omega + 4} \rightarrow Y(\omega) = \frac{6}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 4)}$$

حالا کسر بدست آمده را به مجموع سه کسر تجزیه میکنی. برای سهولت ابتدا تغییر متغیر $j\omega = x$ را انجام میدهیم:

$$Y(x) = \frac{6}{(x+1)(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4} \qquad A = (x+1)Y_{(x=-1)} = \frac{6}{(-1+2)(-1+4)} = 2$$
$$B = (x+2)Y_{(x=-2)} = \frac{6}{(-2+1)(-2+4)} = -3 \qquad C = (x+4)Y_{(x=-4)} = \frac{6}{(-4+1)(-4+2)} = 1 \rightarrow$$
$$Y(\omega) = \frac{2}{j\omega + 1} + \frac{-3}{j\omega + 2} + \frac{1}{j\omega + 4}$$

حال از معادله بدست آمده فوریه معکوس میگیریم. با توجه به اینکه فوریه معکوس $\frac{1}{j\omega + a}$ برابر است با: $e^{-at} u_{-1}(t)$ فوریه معکوس $Y(\omega)$ برابر است با:

$$y(t) = [2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-4t}] u_{-1}(t)$$

ت) تبدیل فوریه $tg(t)$

اگر از تبدیل فوریه تابع $g(t)$ یعنی $G(\omega)$ نسبت به ω مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt \to \frac{dG(\omega)}{d\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}[-jtg(t)]e^{-j\omega t}dt \to \frac{1}{-j}\frac{dG(\omega)}{d\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}tg(t)e^{-j\omega t}dt$$

از رابطه بالا میتوان دریافت که تبدیل فوریه تابع $tg(t)$ برابر است با $\frac{1}{-j}\frac{dG(\omega)}{d\omega}$ یا $j\frac{dG(\omega)}{d\omega}$. مثلا چون تبدیل فوریه تابع $g(t)=e^{-at}u_{-1}(t)$ برابر است با: $G(\omega)=\frac{1}{j\omega+a}$ ر اینصورت تبدیل فوریه تابع $h(t)=te^{-at}u_{-1}(t)$ برابر است با:

$$H(\omega)=j\frac{dG(\omega)}{d\omega}=j\frac{d}{d\omega}(\frac{1}{j\omega+a})=\frac{1}{(j\omega+a)^2}$$

حال اگر از رابطه $G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt$ به تعداد n بار نسبت به ω مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{d^nG(\omega)}{d\omega^n}=\int_{-\infty}^{\infty}(-jt)^n g(t)e^{-j\omega t}dt \to \frac{1}{(-j)^n}\frac{d^nG(\omega)}{d\omega^n}=\int_{-\infty}^{\infty}t^n g(t)e^{-j\omega t}dt$$

بعبارت دیگر تبدیل فوریه $t^n g(t)$ برابر است با: $\frac{1}{(-j)^n}\frac{d^nG(\omega)}{d\omega^n}$.

تابع ضربه $\delta(t)$ داری خواص غربالی است یعنی $\delta(t)f(t)=\delta(t)f(0)$. در حالت کلی $\delta(t-a)f(t)=\delta(t-a)f(a)$. حال با این خاصیت تابع ضربه میتوان تبدیل فوریه تابع ضربه را بدست آورد. در نظر بگیرید که سطح زیر منحنی تابع ضربه در هر فاصله که دامنه منفی و مثبت را پوشش دهد مساوی ۱ میباشد یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$. البته حد بالا و پائین میتواند هر عدد منفی و مثبتی باشد بعبارت دیگر $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1$. حال تبدیل فوریه تابع ضربه $g(t)=\delta(t)$ برابر است با:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega(0)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

یعنی تبدیل فوریه تابع ضربه برابر ۱ میباشد.

ث) اصل دوگانگی یا *duality*

اصل دو گانگی یعنی اگر تبدیل فوریه تابع $g(t)$ برابر $G(\omega)$ باشد در اینصورت تبدیل فوریه تابع زمانی $G(t)$ برابر است با $2\pi g(-\omega)$. مثلا تبدیل فوریه تابع $g(t)=\delta(t)$ برابر است با $G(\omega)=1$ در نتیجه تبدیل فوریه تابع $G(t)=1$ برابر است با $2\pi\delta(-\omega)$ که چون تابع ضربه تابع زوج است تبدیل فوریه عدد ثابت ۱ برابر است با $2\pi\delta(\omega)$ و تبدیل فوریه عدد ثابت A برابر است با: $2\pi A\delta(\omega)$

مثال۶: با استفاده از اصل دوگانگی تبدیل فوریه تابع $A\cos\omega_0 t$ را بدست آورید.

حل: تابع را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$A\cos\omega_0 t=\frac{A}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

برای جمله اول اگر $g(t)=\frac{A}{2}$ باشد در اینصورت $G(\omega)=2\pi\frac{A}{2}\delta(\omega)=\pi A\delta(\omega)$. در اینصورت فوریه تابع $\frac{A}{2}e^{j\omega_0 t}=g(t)e^{j\omega_0 t}$ طبق قانون (ب) تبدیل فوریه برابر است با: $G(\omega-\omega_0)=\pi A\delta(\omega-\omega_0)$. به همین ترتیب تبدیل فوریه جمله دوم یعنی $\frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}$ برابر است با: $G(\omega+\omega_0)=\pi A\delta(\omega+\omega_0)$. در نتیجه تبدیل فوریه $A\cos\omega_0 t$ برابر است با: $\pi A\delta(\omega-\omega_0)+\pi A\delta(\omega+\omega_0)$.

اثبات اصل دوگانگی

اگر تبدیل فوریه $g(t)$ را $G(\omega)$ بنامیم در اینصورت میتوان نوشت:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega\rightarrow 2\pi g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

حال به جای متغییر انتکرال یعنی ω میتوانیم α بگذاریم یعنی:

$$2\pi g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)e^{j\alpha t}d\alpha$$

حال با جایگزینی t با $-\omega$ در معادله بالا داریم:

$$2\pi g(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)e^{-j\omega\alpha}d\alpha$$

حال در سمت راست میتوان متغییر انتگرال گیری را از α به t تغییر داد یعنی:

$$2\pi g(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t)e^{-j\omega t}dt$$

عبارت $\int_{-\infty}^{\infty}G(t)e^{-j\omega t}dt$ همان تبدیل فوریه $G(t)$ در نتیجه تبدیل فوریه $G(t)$ برابر است با: $2\pi g(-\omega)$.

مثلا قبلا تبدیل فوریه $g(t)=e^{-\alpha|t|}$ را بدست آوردیم که برابر بود با: $G(\omega)=\frac{2\alpha}{\omega^2+a^2}$. حال تبدیل فوریه تابع $G(t)=\frac{2\alpha}{t^2+a^2}$ با استفاده از اصل دوگانگی برابر است با: $2\pi g(-\omega)=2\pi e^{-a|-\omega|}=2\pi e^{-a|\omega|}$. دقت کنید که تبدیل فوریه $G(t)=\frac{2\alpha}{t^2+a^2}$ از رابطه $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}e^{-j\omega t}dt$ که گرفتن این انتگرال خیلی مشکل است ولی با استفاده از اصل دوگانگی مقدار انتگرال برابر است با: $2\pi e^{-a|\omega|}$.

حال اگر $\omega=2\pi f$ در اینصورت ضریب 2π حذف میشود. یعنی اگر تبدیل فوریه $g(t)$ برابر $G(f)$ باشد در اینصورت تبدیل فوریه $G(t)$ برابر است با $g(-f)$.

مثال دیگر برای کاربرد دوگانگی محاسبه تبدیل فوریه تابع $\sin c(t)$ میباشد. میدانیم تبدیل فوریه $g(t) = rect(\frac{t}{\tau})$ برابر است با $G(f) = \tau \sin c(\tau f)$ در اینصورت تبدیل فوریه $G(t) = \tau \sin c(\pi t)$ برابر است با: $g(-f) = rect(-\frac{f}{\tau}) = rect(\frac{f}{\tau})$. در نتیجه تبدیل فوریه $\sin c(\pi t)$ برابر است با: $\frac{1}{\tau} rect(\frac{f}{\tau})$. حال برای $\tau = 1$ تبدیل فوریه $\sin c(t)$ برابر است با: $rect(f)$. دقت کنید که تبدیل فوریه تابع $\sin c(t)$ برابر است با: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c(t) e^{-j2\pi f t} dt$ که گرفتن این انتگرال بسیار مشکل است ولی با استفاده از اصل دوگانگی تبدیل فوریه $\sin c(t)$ برابر است با: $rect(f)$

مثال۷: تبدیل فوریه $g(t) = e^{-\alpha t^2}$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از رابطه تبدیل فوریه داریم:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t^2 + j\omega t)} dt$$

حال اگر $\alpha t^2 + j\omega t = a^2 + 2ab = (a+b)^2 - 2ab$ در اینصورت $a = t\sqrt{\alpha}$ و $b = \frac{2ab}{2a} = \frac{j\omega t}{2t\sqrt{\alpha}} = \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}}$ در اینصورت داریم:

$$\alpha t^2 + j\omega t = (a+b)^2 - 2ab = (t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2 - (\frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2 = (t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t^2 + j\omega t)} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha}]} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} . e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dt$$

حال انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dt$ را بدست می آوریم. برای اینکار تغییر متغیر $u = t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}}$ را اعمال میکنیم در اینصورت داریم $du = \sqrt{\alpha} dt \rightarrow dt = \frac{du}{\sqrt{\alpha}}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} du = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

میدانیم که $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 du} = \sqrt{\pi}$. در نتیجه $G(\omega)$ برابر است با:

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{\alpha} + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

د)تبدیل فوریه $g(-t)$

تبدیل فوریه $h(t) = g(-t)$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(-t)e^{-j\omega t}dt$$

حال با تفییر متغیر $t=-t'\rightarrow dt=-dt'$ خواهیم داشت:

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(-t)e^{-j\omega t}dt=\int_{\infty}^{-\infty}g(t')e^{j\omega t'}(-dt')=\int_{-\infty}^{\infty}g(t')e^{j\omega t'}dt'=\int_{-\infty}^{\infty}g(t')e^{-j(-\omega)t'}dt'=G(-\omega)$$

ذ) فوریه انتگرال یک تابع

اگر $h(t)=\int g(t)dt$ باشد در اینصورت داریم:

$$h(t)=\int g(t)dt\rightarrow g(t)=\frac{dh(t)}{dt}$$

حال با دانستن فوریه مشتق اگر از طرفین رابطه بالا تبدیل فوریه بگیریم داریم:

$$G(\omega)=j\omega H(\omega)\rightarrow H(\omega)=\frac{1}{j\omega}G(\omega)$$

یعنی فوریه انتگرال یک تابع برابر است با فوریه آن تابع تقسیم بر $j\omega$

مثال ۸: تبدیل فوریه تابع پله واحد $u_{-1}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$ را بدست آورید.

حل: تابع $g(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & t>0\\ -\frac{1}{2} & t<0\end{cases}$ در نظر بگیرید. در اینصورت تابع پله را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$h(t)=u_{-1}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

تابع ضربه از مشتق تابع $\delta(t)=\frac{dg(t)}{dt}\rightarrow g(t)=\int\delta(t)dt$ بدست می آید. یعنی $g(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$ چون تبدیل فوریه تابع ضربه برابر ۱ میباشد در نتیجه تبدیل فوریه تابع $g(t)$ که انتگرال تابع ضربه است برابر است با: $G(\omega)=\frac{1}{j\omega}$. یعنی تبدیل فوریه $\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$ برابر است با $G(\omega)=\frac{1}{j\omega}$. از طرفی تبدیل فوریه عدد ۱ با توجه به اصل دوگانگی همانطوریکه قبلا اثبات کردیم برابر بود با: $2\pi\delta(\omega)$ در نتیجه تبدیل فوریه $\frac{1}{2}$ برابر است با: $\pi\delta(\omega)$. حال اگر از طرفین رابطه $h(t)=u_{-1}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$ تبدیل فوریه بگیریم با توجه به آنچه بحث شد خواهیم داشت:

$$H(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

حل معادله دیفرانسیل با ورودی سینوسی با استفاده از تبدیل فوریه

برای یک سیستم فرض کنید ورود $x(t)$ و خروجی $y(t)$ باشد در اینصورت در حالت کلی معادله دیفرانسیل را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + ...a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^n} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2}\frac{d^{m-2}x(t)}{dt^{m-2}} + ...b_0 x(t)$$

حال اگر از طرفین تبدیل فوریه بگیریم خواهیم داشت:

$$[a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + a_{n-2}(j\omega)^{n-2} + ...a_0]Y(\omega) = [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + b_{m-2}(j\omega)^{m-2} + ...b_0]X(\omega)$$

در نتیجه تابع تبدیل به صورت زیر تعریف میشود:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + b_{m-2}(j\omega)^{m-2} + ...b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + a_{n-2}(j\omega)^{n-2} + ...a_0} \rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

که $H(\omega)$ را تابع تبدیل سیستم میگوییم.

حال فرض کنید ورودی یک سیستم $x(t) = A\cos\omega_0 t$ باشد در اینصورت همانطوریکه در بخشهای قبل اثبات شد داریم:

$$X(\omega) = \pi A\delta(\omega-\omega_0) + \pi A\delta(\omega+\omega_0)$$

حال خروجی را بدست می آوریم:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = H(\omega).\pi A\delta(\omega-\omega_0) + \pi A\delta(\omega+\omega_0) = \pi A[H(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0) + H(-\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)]$$

حال $H(\omega_0)$ را به صورت دامنه و فاز مینویسیم یعنی $H(\omega_0) = |H(\omega_0|e^{j\angle H(\omega_0)}$ که $|H(\omega_0|$ اندازه تابع تبدیل در فرکانس ω_0 و $\angle H(\omega_0)$ فاز تابع تبدیل در فرکانس ω_0 میباشد. همانطوریکه میدانیم تبدیل فوریه یک تابع خاصیت هرمتین دارد یعنی اندازه تبدیل فوریه تابع زوجی از ω و فاز تابع تبدیل تابع فردی از ω میباشد زیرا:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin\omega t dt = A(\omega) - jB(\omega) \rightarrow |H(\omega)| = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$$

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

همانطوریکه که دیده میشود $A(\omega)$ تابع زوجی از ω و $B(\omega)$ تابع فردی از ω است یعنی $A(-\omega) = A(\omega)$ و $B(-\omega) = -B(\omega)$ در نتیجه داریم:

$$|H(-\omega)| = \sqrt{[A(-\omega)]^2 + [B(-\omega)]^2} = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [-B(\omega)]^2} = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2} = |H(\omega)|$$

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \rightarrow \angle H(-\omega) = -\tan^{-1}\frac{B(-\omega)}{A(-\omega)} = -\tan^{-1}\frac{-B(\omega)}{A(\omega)} = \tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)} = -\angle H(\omega)$$

حال حل مسئله را ادامه میدهیم:

$$Y(\omega) = \pi A[H(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0) + H(-\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)] = \pi A[|H(\omega_0|e^{j\angle H(\omega_0)}\delta(\omega-\omega_0) + |H(-\omega_0|e^{j\angle H(-\omega_0)}\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$Y(\omega) = \pi A[|H(\omega_0|e^{j\angle H(\omega_0)}\delta(\omega-\omega_0) + |H(\omega_0|e^{-j\angle H(\omega_0)}\delta(\omega+\omega_0)] \rightarrow$$

$$Y(\omega) = |H(\omega_0|[\pi A\delta(\omega-\omega_0)e^{j\angle H(\omega_0)} + \pi A\delta(\omega+\omega_0)e^{-j\angle H(\omega_0)}]$$

حالا از عبارت بدست آمده فوریه معکوس میگیریم. میدانیم فوریه معکوس $\pi A\delta(\omega)$برابر است با: $\frac{A}{2}$ در نتیجه فوریه معکوس $\pi A\delta(\omega-\omega_0)$ برابر است با: $\frac{A}{2}e^{j\omega_0 t}$ و به همین ترتیب فوریه معکوس $\pi A\delta(\omega+\omega_0)$برابر است با: $\frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}$ در نتیجه فوریه معکوس $Y(\omega)$ که همان $y(t)$ است برابر است با:

$$Y(\omega)=\left|H(\omega_0\right|[\pi A\delta(\omega-\omega_0)e^{j\angle H(\omega_0)}+\pi A\delta(\omega+\omega_0)e^{-j\angle H(\omega_0)}]\rightarrow y(t)=\left|H(\omega_0\right|[\frac{A}{2}e^{j\omega_0 t}e^{j\angle H(\omega_0)}+\frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}e^{-j\angle H(\omega_0)}]$$

$$y(t)=\left|H(\omega_0\right|\frac{A}{2}[e^{j[\omega_0 t+\angle H(\omega_0)]}+e^{-j[\omega_0 t+\angle H(\omega_0)]}]=\left|H(\omega_0\right|\frac{A}{2}[2\cos(\omega_0 t+\angle H(\omega_0))=A\left|H(\omega_0\right|\cos(\omega_0 t+\angle H(\omega_0))$$

یعنی اگر به یک سیستم ورودی با معادله $A\cos(\omega_0 t+\phi)$ اعمال شود خروجی برابر است با $A\left|H(j\omega_0\right|\cos(\omega_0 t+\phi+\angle H(\omega_0))$ یعنی دامنه خروجی برابر است با دامنه ورودی ضربدر دامنه تابع تبدیل در فرکانس ورودی و فاز خروجی برابر است با فاز ورودی بعلاوه فاز تابع تبدیل در فرکانس ورودی. مثال زیر این مطلب را روشن میکند.

مثال ۹: یک سیستم خطی با معادله دیفرانسیل $y'''+8y''+37y'+50y=9x'+35x$ داده شده است با استفاده از تبدیل فوریه پاسخ این معادله را برای ورودی $x(t)=2\cos(5t+150^\circ)$ بدست آورید.

حل: از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل فوریه میگیریم:

$$[(j\omega)^3+8(j\omega)^2+37(j\omega)+50]Y(\omega)=[9j\omega+35]X(\omega)\rightarrow H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{9j\omega+35}{(j\omega)^3+8(j\omega)^2+37(j\omega)+50}$$

برای فرکانس ورودی $\omega=5$ تابع تبدیل را بدست می آوریم:

$$\mathrm{H}(5)=\frac{45\mathrm{j}+35}{-125\mathrm{j}-200+185\mathrm{j}+50}=\frac{45\mathrm{j}+35}{-150+60\mathrm{j}}=\frac{7+9\mathrm{j}}{-30+12\mathrm{j}}=\frac{11.4\angle 52.1^\circ}{32.3\angle 158.2^\circ}=0.35\angle -106.1$$

حال دامنه خروجی را باضرب کردن اندازه دامنه تابع تبدیل در دامنه ورودی و فاز خروجی را با جمع کردن فاز ورودی با فاز تابع تبدیل بدست می آوریم:

$$H(5)=0.35\angle -106.1 \qquad x(t)=2\cos(5t+150^\circ)\rightarrow y(t)=2\times 0.35\cos(5t+150^\circ-106.1)\rightarrow$$
$$y(t)=0.7\cos(5t+43.9^\circ)$$

ملاحظه میشود که بدون نیاز به حل معادله دیفرانسیل توانستیم پاسخ معادله دیفرانسیل را بدست آوریم.

تبدیل لاپلاس (Laplace Transform)

تابع $g(t)=e^{\alpha t}u_{-1}(t)$ اگر $\alpha>0$ تبدیل فوریه ندارد زیرا

$$G(\omega)=\int_0^\infty e^{\alpha t}.e^{-j\omega t}dt=\int_0^\infty e^{t(a-j\omega)}.dt=[\frac{1}{\alpha-j\omega}e^{t(a-j\omega)}]_0^\infty=\frac{1}{\alpha-j\omega}[e^{\infty(a-j\omega)}-1]$$

اگر $\alpha > 0$ در اینصورت عبارت $e^{\infty(a-j\omega)}$ بینهایت میشود و پاسخ همگرا نمیشود یعنی تابع تبدیل فوریه ندارد. حال اگر تابع $h(t) = g(t)e^{-\sigma t}$ را در نظر بگیریم در اینصورت تبدیل فوریه آن برابر است با:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-\sigma t}.e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}.dt$$

اگر پارامتر جدید $s = \sigma + j\omega$ را تعریف کنیم در اینصورت داریم:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-\sigma t}.e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}.dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}.dt = G(s)$$

عبارت $G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}.dt$ را تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ مینامند. حال اگر $g(t) = e^{\alpha t}u_{-1}(t)$ در اینصورت $h(t) = g(t)e^{-\sigma t}$ برابر است با $h(t) = g(t)e^{-(\sigma-a)t}$ در اینحالت اگر $a > 0$ باشد با انتخاب $\sigma > a$ عبارت $\sigma - a > 0$ مثبت بوده و توان e منفی میشود و تابع تبدیل فوریه خواهد داشت.

مثال ۱۰: تبدیل لاپلاس $g(t) = e^{-at}u_{-1}(t)$ را بدست آورید.

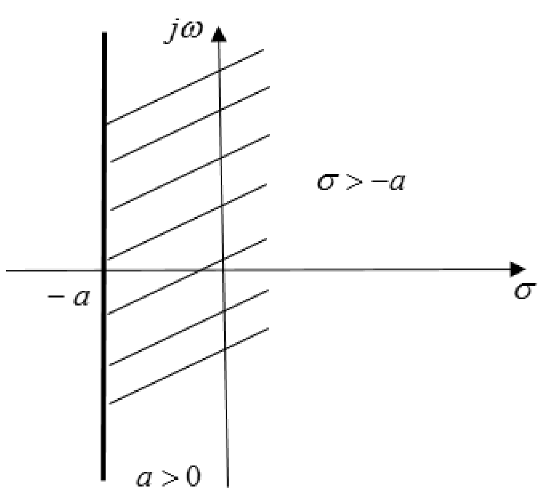
حل چون تابع برای زمانهای منفی صفر است بنابراین انتگرال باید از صفر تا بینهایت گرفته شود در نتیجه داریم:

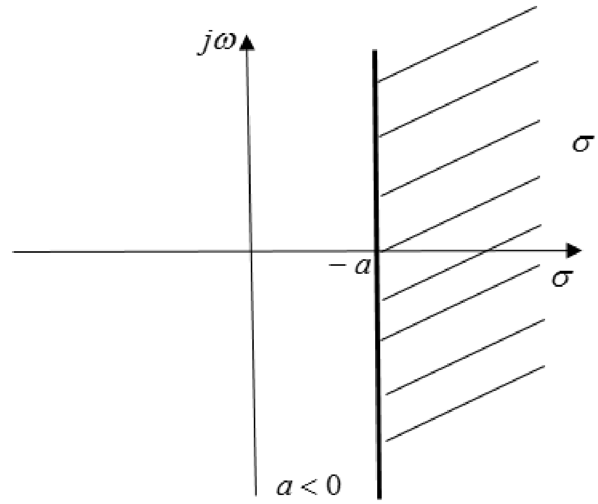
$$G(s) = \int_{0}^{\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}.e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+s)}dt = [-\frac{1}{a+s}e^{-t(a+s)}]_0^{\infty} = -\frac{1}{a+s}e^{-\infty(a+s)} + \frac{1}{s+a}$$

حال اگر $a + s = a + \sigma + j\omega$ در اینصورت انتگرال وقتی همگرا میشود و جمله $e^{-\infty(a+s)}$ به سمت صفر میل میکندکه $a + \sigma > 0$ در غیر اینصورت عبارت جمله $e^{-\infty(a+s)}$ به سمت بینهایت میل میکند و انتگرال همگرا نمیشود. بعبارت دیگر لاپلاس موقعی وجود دارد که $a + \sigma > 0$ بعبارت دیگر $\sigma = \mathrm{Re}[s] > -a$ که در اینصورت داریم:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}.e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+s)}dt = [-\frac{1}{a+s}e^{-t(a+s)}]_0^{\infty} = -\frac{1}{a+s}e^{-\infty(a+s)} + \frac{1}{s+a} = \frac{1}{s+a}$$

حال منطقه $\sigma = \mathrm{Re}[s] > -a$ را در دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ در زیر نشان میدهیم:





منطقه هاشورخورده را منطقه همگرایی یا**Region Of Convergence (R.O.C)** مینامند که منطقه ای است که در آن منطقه لاپلاس وجود دارد و انتگرال همگرا میشود. ملاحظه میشود برای $a<0$ منطقه همگرایی شامل محور $j\omega$ نمیشود در نتیجه به ازای $a<0$ تابع فوریه ندارد زیرا نمیتوان به جای s قرار داد $j\omega$ اما برای $a>0$ منطقه همگرایی شامل محور $j\omega$ میشود و در نتیجه در لاپلاس تابع میتوان با قرار دادن $s=j\omega$ از لاپلاس به فوریه رسید. یعنی چون $s=j\omega$ در نتیجه $G(s)=\dfrac{1}{s+a}$ و $G(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+a}$ که قبلا بدست آوردیم. بنابراین با وجود اینکه لاپلاس تابع $g(t)=e^{-at}u_{-1}(t)$ همواره در منطقه همگرایی بدست آمده ($\sigma=\mathrm{Re}[s]>-a$) همواره وجود دارد ولی این تابع فقط در شرایط $a>0$ دارای تبدیل فوریه میباشد. حالا اگر $g(t)=-e^{-at}u_{-1}(-t)$ باشد که یک تابع سمت چپی میباشد یعنی برای $t<0$ تابع وجود دارد و برای $t>0$ تابع صفر است (تابع در سمت چپ محور عمودی وجود دارد و در سمت راست صفر است). لاپلاس این تابع برابر است با:

$$G(s)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}-e^{-at}.e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}-e^{-t(a+s)}dt=[\frac{1}{a+s}e^{-t(a+s)}]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{a+s}e^{\infty(a+s)}$$

حال اگر $a+s=a+\sigma+j\omega$ در اینصورت انتگرال وقتی همگرا میشود و جمله $e^{\infty(a+s)}$ به سمت صفر میل میکندکه $a+\sigma<0$ در غیر اینصورت عبارت جمله $e^{\infty(a+s)}$ به سمت بینهایت میل میکند و انتگرال همگرا نمیشود. بعبارت دیگر لاپلاس موقعی وجود دارد که $a+\sigma<0$ بعبارت دیگر $\sigma=\mathrm{Re}[s]<-a$ که در اینصورت داریم:

$$G(s)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}-e^{-at}.e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}-e^{-t(a+s)}dt=[\frac{1}{a+s}e^{-t(a+s)}]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{a+s}e^{\infty(a+s)}=\frac{1}{s+a}$$

بعبارت دیگر تابع $g(t)=e^{-at}u_{-1}(t)$ و تابع $g(t)=-e^{-at}u_{-1}(-t)$ هر دو دارای تبدیل لاپلاس یکسان $\dfrac{1}{s+a}$ هستند با این تفاوت که برای تابع اول منطقه همگرایی $\sigma=\mathrm{Re}[s]>-a$ و برای تابع دوم منطقه همگرایی $\sigma=\mathrm{Re}[s]<-a$ میباشد. بنابراین اگر سوال شود لاپلاس معکوس $\dfrac{1}{s+a}$ چیست باید جواب داد اگر $\sigma=\mathrm{Re}[s]>-a$ در اینصورت لاپلاس معکوس $g(t)=e^{-at}u_{-1}(t)$ یعنی تابع سمت راستی و اگر $\sigma=\mathrm{Re}[s]<-a$ در اینصورت لاپلاس معکوس $g(t)=-e^{-at}u_{-1}(-t)$ یعنی تابع سمت چپی میباشد.ملاحظه میشود که $s=-a$ قطب تابع $\dfrac{1}{s+a}$ میباشد.در نتیجه اگر $\sigma=\mathrm{Re}[s]$ از قطب تابع بزرگتر بود در اینصورت تابع لاپلاس معکوس به صورت سمت راستی بیان میشودو اگر $\sigma=\mathrm{Re}[s]$ از قطب تابع کوچکتر بود در این صورت تابع لاپلاس معکوس به صورت سمت چپی بیان میشود. مثال زیر این مطلب را روشن میکند.

مثال ۱۱: لاپلاس معکوس تابع $G(s)=\dfrac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ را بدست آورید.

حل: ابتدا تابع را به جمع سه تابع تجزیه میکنیم:

$$G(s)=\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3} \qquad A=(s+1)G(s)_{s=-1}=\frac{6}{(-1+2)(-1+3)}=3$$

$$B+(s+2)G(s)_{s=-2}=\frac{6}{(-2+1)(-2+3)}=-6 \qquad C=(s+3)G(s)_{s=-3}=\frac{6}{(-3+1)(-3+2)}=3\rightarrow$$

$$G(s)=\frac{3}{s+1}-\frac{6}{s+2}+\frac{3}{s+3}$$

تابع دارای سه قطب $s=-1,\ s=-2,\ s=-3$ که $s=-1$ بزرگترین قطب است. حال ابتدا فرض میکنیم منطقه همگرایی $\mathrm{Re}[s]>-1$ در اینصورت حتما $\mathrm{Re}[s]>-2$ و $\mathrm{Re}[s]>-3$. چون $\mathrm{Re}[s]>-1$ پس لاپلاس معکوس $\frac{3}{s+1}$ تابع سمت راستی و برابر است با: $3e^{-t}u_{-1}(t)$. از طرفی لاپلاس معکوس $-\frac{6}{s+2}$ چون $\mathrm{Re}[s]>-2$ تابع سمت راستی و برابر است با: $-6e^{-2t}u_{-1}(t)$. بعلاوه چون $\mathrm{Re}[s]>-3$ در اینصورت لاپلاس معکوس $\frac{3}{s+3}$ تابع سمت راستی به صورت $3e^{-3t}u_{-1}(t)$ میباشد. بنابراین:

$$g(t)=[3e^{-t}-6e^{-2t}+3e^{-3t}]u_{-1}(t) \qquad R.O.C \;=\; \mathrm{Re}[s]>-1$$

حال منطقه همگرایی را $-2<\mathrm{Re}[s]<-1$ در نظر میگیریم در اینصورت چون $-2<\mathrm{Re}[s]$ در اینصورت $-3<\mathrm{Re}[s]$ میباشد. بنابراین لاپلاس معکوس $-\frac{6}{s+2}$ به صورت سمت راستی $-6e^{-2t}u_{-1}(t)$ و لاپلاس معکوس $\frac{3}{s+3}$ تابع سمت راستی به صورت $3e^{-3t}u_{-1}(t)$ میباشد. از طرفی چون $\mathrm{Re}[s]<-1$ لاپلاس معکوس $\frac{3}{s+1}$ تابع سمت چپی و برابر است با: $-3e^{-t}u_{-1}(-t)$. در نتیجه لاپلاس معکوس تابع به صورت زیر است:

$$g(t)=-3e^{-t}u_{-1}(-t)+[-6e^{-2t}+3e^{-3t}]u_{-1}(t) \qquad R.O.C \;=\; -2<\mathrm{Re}[s]<-1$$

حال منطقه همگرایی را $-3<\mathrm{Re}[s]<-2$. چون $\mathrm{Re}[s]<-2$ پس حتما $\mathrm{Re}[s]<-1$. در نتیجه لاپلاس معکوس $\frac{3}{s+1}$ تابع سمت چپی و برابر است با: $-3e^{-t}u_{-1}(-t)$. بعلاوه چون $\mathrm{Re}[s]<-2$ در نتیجه لاپلاس معکوس $-\frac{6}{s+2}$ تابع سمت چپی و برابر است با: $6e^{-t}u_{-1}(-t)$. چون $\mathrm{Re}[s]>-3$ در اینصورت لاپلاس معکوس $\frac{3}{s+3}$ تابع سمت راستی به صورت $3e^{-3t}u_{-1}(t)$ میباشد. بنابراین:

$$g(t)=[-3e^{-t}u_{-1}(-t)+6e^{-2t}]u_{-1}(-t)+3e^{-3t}u_{-1}(t) \qquad R.O.C \;=\; -3<\mathrm{Re}[s]<-2$$

سرانجام اگر منطقه همگرایی به صورت $\mathrm{Re}[s]<-3$ باشد در اینصورت حتما $\mathrm{Re}[s]<-2$ و $\mathrm{Re}[s]<-1$ و هر سه تابع معکوس به صورت تابع سمت چپی خواهندبود یعنی:

$$g(t)=[-3e^{-t}u_{-1}(-t)+6e^{-2t}-3e^{-3t}]u_{-1}(-t) \qquad R.O.C \;=\; \mathrm{Re}[s]<-3$$

بنابراین لاپلاس معکوس تابع به صورت زیر است:

$$g(t)=\begin{cases} [3e^{-t}-6e^{-2t}+3e^{-3t}]u_{-1}(t) & R.O.C = \operatorname{Re}[s]>-1 \\ -3e^{-t}u_{-1}(-t)+[-6e^{-2t}+3e^{-3t}]u_{-1}(t) & R.O.C = -2<\operatorname{Re}[s]<-1 \\ [-3e^{-t}u_{-1}(-t)+6e^{-2t}]u_{-1}(-t)+3e^{-3t}u_{-1}(t) & R.O.C = -3<\operatorname{Re}[s]<-2 \\ [-3e^{-t}u_{-1}(-t)+6e^{-2t}-3e^{-3t}]u_{-1}(-t) & R.O.C = \operatorname{Re}[s]<-3 \end{cases}$$

مثال ۱۲: تبدیل لاپلاس $g(t)=e^{-a|t|}$ را بدست آورید و برای دو حالت $a>0$ و $a<0$ منطقه همگرایی (R.O.C) را بدست آورید و ثابت کنید برای $a<0$ تابع تبدیل فوریه ندارد.

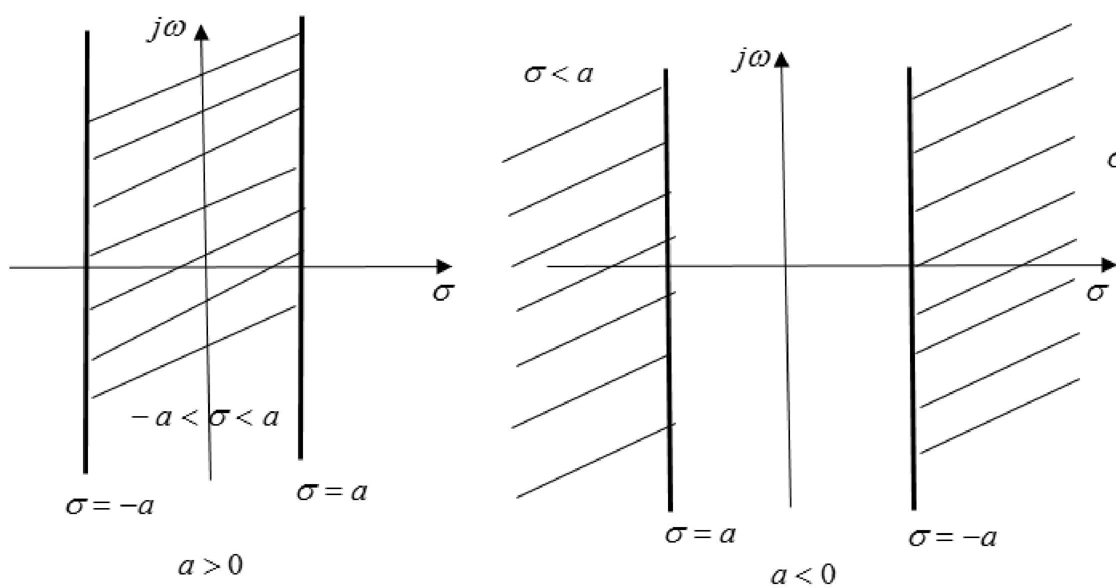
حل: طبق تعریف لاپلاس داریم:

$$G(s)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}.e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}.e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t(a-s)}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t(a+s)}dt=[\frac{1}{a-s}e^{t(a-s)}]_{-\infty}^{0}+[-\frac{1}{a+s}e^{-t(a+s)}]_{0}^{\infty}$$
$$G(s)=[\frac{1}{a-s}-\frac{1}{a-s}e^{-\infty(a-s)}]+[-\frac{1}{a+s}e^{-\infty(a+s)}+\frac{1}{a+s}]=\frac{2a}{a^2-s^2}-[\frac{1}{a-s}e^{-\infty(a-\sigma-j\omega)}+\frac{1}{a+s}e^{-\infty(a+\sigma+j\omega)}$$

شرط اینکه لاپلاس موجود باشد باید جملات داخل براکت صفر شوند یعنی برای جمله اول باید $a-\sigma>0$ و برای جمله دوم باید $a+\sigma>0$ باشد در غیر اینصورت هر دو جمله بینهایت میشوند و پاسخ همگرا نخواهد شد. با این دو شرط داریم:

$$G(s)=\frac{2a}{a^2-s^2}\qquad a-\sigma>0\rightarrow\sigma<a\qquad a+\sigma>0\rightarrow\sigma>-a\rightarrow\ -a<\sigma=\operatorname{Re}[s]<a$$

بنابراین منطقه همگرایی $-a<\operatorname{Re}[s]<a$. حال این منطقه را برای دو حالت $a>0$ و $a<0$ در زیر نشان میدهیم.



در شکل بالا منطقه همگرایی به صورت هاشورخورده نشان داده شده است. ملاحظه میشود که برای $a>0$ محور $j\omega$ در منطقه همگرایی قرار دارد بنابراین با قرار دادن $s=j\omega$ در تبدیل لاپلاس میتوان به تبدیل فوریه رسید یعنی:

$$G(s)=\frac{2a}{a^2-s^2}\rightarrow G(\omega)=\frac{2a}{a^2-(j\omega)^2}=\frac{2a}{\omega^2+a^2}$$

این همان پاسخی است که در مثال ۲ این فصل بدست آوردیم. حال برای $a<0$ ملاحظه میشود که محور $j\omega$ در منطقه همگرایی وجود ندارد

و به جای s نمیتوان $j\omega$ گذاشت لذا تابع تبدیل فوریه ندارد. مشخص است که اگر $a<0$ باشد توان تابع $g(t)=e^{-a|t|}$ مثبت میشود و در $t=\infty$ تابع به سمت بینهایت میل میکند لذا تبدیل فوریه ندارد.

مثال ۱۳: تبدیل لاپلاس تابع پله واحد را بدست آورید.

حل: تابع پله فقط برای زمانهای مثبت وجود دارد بنابراین داریم:

$$g(t)=u_{-1}(t)\rightarrow G(s)=\int_{-\infty}^{\infty}u_{-1}(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-st}dt=[-\frac{1}{s}e^{-st}]_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

قوانین لاپلاس

الف) لاپلاس تاخیر یافته یک تابع

تبدیل لاپلاس تابع تاخیر یافته $h(t)=g(t-\tau)$ برابر است با:

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)e^{-st}dt \qquad t-\tau=t' \qquad t=t'+\tau \qquad dt=dt'$$
$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t')e^{-s(t'+\tau)}dt'=e^{-s\tau}\int_{-\infty}^{\infty}g(t')e^{-st'}dt'=e^{-s\tau}G(s)$$

ب) لاپلاس $h(t)=g(t)e^{-s_0t}$

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-s_0t}e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-(s+s_0)t}dt=G(s+s_0)$$

پ) لاپلاس مشتق یک تابع

در اینجا فرض میکنیم تابع برای زمانهای مثبت وجود دارد (در عمل سیگنال در لحظه صفر به مدار اعمال میشود)

$$h(t)=g'(t)\rightarrow H(s)=\int_{0}^{\infty}h(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}g'(t)e^{-st}dt=[(g(t)e^{-st})_0^{\infty}+\int_{0}^{\infty}sg(t)e^{st}dt]=-g(0)+s\int_{0}^{\infty}sg(t)e^{st}dt\rightarrow$$
$$H(s)=-g(0)+sG(s)\rightarrow Laplace[g'(t)]=sG(s)-g(0)$$

لازم به ذکر است که برای بدست آوردن لاپلاس مشتق یک تابع از انتگرال جزء به جزء استفاده کردیم. حال میتوان رابطه بالا را برای مشتقات مرتبه بالاتر تعمیم داد مثلا لاپلاس مشتق دوم و بالاتر یک تابع به صورت زیر است:

$$Laplace[g''(t)]=sLaplace[g'(t)]-g'(0)=s[sG(s)-g(0)]-g'(0)=s^2G(s)-sg(0)-g'(0)$$
$$Laplace[g'''(t)]=sLaplace[g''(t)]-g''(0)=s[s^2G(s)-sg(0)-g'(0)]-g''(0)\rightarrow$$
$$Laplace[g'''(t)]=s^3G(s)-s^2g(0)-sg'(0)-g''(0)$$

اگر شرایط اولیه را صفر در نظر بگیریم آنگاه $Laplace[g'(t)]=sG(s)$

ت) لاپلاس انتگرال یک تابع

اگر $h(t)=\int g(t)dt$ در اینصورت داریم:

$$h(t)=\int g(t)dt \to h'(t)=g(t) \to Laplace[h'(t)]=Laplace[g(t)] \to sH(s)=G(s) \to H(s)=\frac{1}{s}G(s)$$

مثال ۱۴: با استفاده از لاپلاس مشتقات تابع پاسخ معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه داده شده بدست آورید.

$$y''+3y'+2y=2e^{-3t}u_{-1}(t) \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=2$$

از طرفین معادله لاپلاس میگیریم که خواهیم داشت:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=\frac{2}{s+3} \to s^2Y(s)-s(1)-2+3[sY(s)-1]+2Y(s)=\frac{2}{s+3}$$
$$Y(s)[s^2+3s+2]-s-2-3=\frac{2}{s+3} \to Y(s)[s^2+3s+2]=\frac{2}{s+3}+s+5 \to Y(s)=\frac{s^2+8s+17}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$
$$Y(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3} \qquad A=(s+1)Y(s)_{s=-1}=\frac{(-1)^2+8(-1)+17}{(-1+2)(-1+3)}=5 \qquad B=(s+2)Y(s)_{s=-2}=$$
$$\frac{(-2)^2+8(-2)+17}{(-2+1)(-2+3)}=-5 \qquad C=(s+3)Y(s)_{s=-3}=\frac{(-3)^2+8(-3)+17}{(-3+1)(-3+2)}=1 \to$$
$$Y(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{5}{s+2}+\frac{1}{s+3} \to y(t)=[5e^{-t}-5e^{-2t}+e^{-3t}]u_{-1}(t)$$

برای اطمینان از درستی جواب شرایط اولیه را بررسی میکنیم.

$$y(0)=[5-5+1]=1 \qquad y'(t)=[-5e^{-t}+10e^{-2t}-3e^{-3t}] \qquad y'(0)=[-5+10-3]=2$$

که همان شرایط اولیه ای است که در صورت مسئله داده شده است.

ث) تبدیل لاپلاس $tg(t)$

اگر از تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ نسبت به s مشتق بگیریم داریم:

$$G(s)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt \to \frac{dG(s)}{ds}=\int_{-\infty}^{\infty} -tg(t)e^{-st}dt \to -\frac{dG(s)}{ds}=\int_{-\infty}^{\infty}[tg(t)]e^{-st}dt \to Laplace[tg(t)]=-\frac{dG(s)}{ds}$$

بنابراین لاپلاس $tg(t)$ برابر است با : $-\frac{dG(s)}{ds}$. حال اگر از تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ نسبت به s به اندازه n بار مشتق بگیریم داریم:

$$G(s)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt \to \frac{d^nG(s)}{ds^n}=\int_{-\infty}^{\infty}(-t)^n g(t)e^{-st}dt \to \frac{1}{(-1)^n}\frac{d^nG(s)}{ds^n}=\int_{-\infty}^{\infty}[t^n g(t)]e^{-st}dt \to$$
$$Laplace[t^n g(t)]=\frac{1}{(-1)^n}\frac{d^nG(s)}{ds^n}$$

بنابراین لاپلاس $t^n g(t)$ برابر است با: $\frac{1}{(-1)^n}\frac{d^nG(s)}{ds^n}$.

مثال۱۵: با استفاده از تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=e^{-2t}u_{-1}(t)$ تبدیل لاپلاس $f(t)=te^{-2t}u_{-1}(t)$ و $h(t)=t^2e^{-2t}u_{-1}(t)$ را بدست آورید.

حل: تبدیل لاپلاس $g(t)=e^{-2t}u_{-1}(t)$ برابر است با: $G(s)=\frac{1}{s+2}$ در نتیجه داریم:

$$F(s)=-\frac{dG(s)}{ds}=-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s+2})=\frac{1}{(s+2)^2} \qquad H(s)=\frac{1}{(-1)^2}\frac{d^2G(s)}{ds^2}=\frac{d^2G(s)}{ds^2}=\frac{2}{(s+2)^3}$$

مثال ۱۶: با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ معادله دیفرانسل زیر را بدست آورید

$$y''+7y'+14y+8\int y=e^{-2t}u_{-1}(t)$$

شرایط اولیه را صفر فرض کنید.

حل: از طرفین معادله تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$s^2Y(s)+7sY(s)+14Y(s)+\frac{8}{s}Y(s)=\frac{1}{s+2}\rightarrow(s^3+7s^2+14s+8)Y(s)=\frac{s}{s+2}\rightarrow$$
$$Y(s)=\frac{s}{(s^3+7s^2+14s+8)(s+2)}=\frac{s}{(s+1)(s+2)^2(s+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+2)}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+4}$$
$$A=(s+1)Y(s)_{s=-1}=\frac{-1}{(-1+2)^2(-1+4)}=-\frac{1}{3} \qquad B=\frac{d}{ds}(s+2)^2Y(s)_{s=-2}=0$$
$$C=(s+2)^2Y(s)_{s=-2}=\frac{-2}{(-2+1)(-2+4)}=1 \qquad D=(s+4)Y(s)_{s=-4}=\frac{-4}{(-4+1)(-4+2)^2}=\frac{1}{3}\rightarrow$$
$$Y(s)=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{\frac{1}{3}}{(s+4)}\rightarrow y(t)=[-\frac{1}{3}e^{-t}+te^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-4t}]u_{-1}(t)$$

برای اطمینان از درستی جواب شرایط اولیه را چک میکنیم:

$$y(0)=[-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}]=0 \qquad y'(t)=[\frac{1}{3}e^{-t}+e^{-2t}-2te^{-2t}-\frac{4}{3}e^{-4t}] \qquad y'(0)=[\frac{1}{3}+1-0-\frac{4}{3}]=0$$

بنابراین شرایط اولیه صفر که در صورت مسئله بیان شد برقرار است.

مثال ۱۷: تبدیل لاپلاس $g(t)=A\cos\omega_0 t\,u_{-1}(t)$ و $h(t)=A\sin\omega_0 t\,u_{-1}(t)$ را بدست آورید.

حل: چون توابع برای زمانهای مثبت وجود دارند در رابطه لاپلاس باید انتگرال را از صفر تا بینهایت بگیریم:

$$G(s)=\int_0^\infty A\cos\omega_0 te^{-st}dt=\int_0^\infty A\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})e^{-st}dt=\int_0^\infty A\frac{1}{2}(e^{-(s-j\omega_0)t}+e^{-(s+j\omega_0)t})dt\rightarrow$$
$$G(s)=\frac{A}{2}[-\frac{1}{s-j\omega_0}e^{-(s-j\omega_0)t}-\frac{1}{s+j\omega_0}e^{-(s+j\omega_0)t}]_0^\infty=\frac{A}{2}[\frac{1}{s-j\omega_0}+\frac{1}{s+j\omega_0}]=\frac{As}{s^2+\omega_0^2}$$

$$H(s)=\int_0^\infty A\sin\omega_0 t e^{-st}dt=\int_0^\infty A\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})e^{-st}dt=\int_0^\infty A\frac{1}{2j}(e^{-(s-j\omega_0)t}-e^{-(s+j\omega_0)t})dt\rightarrow$$

$$H(s)=\frac{A}{2j}[-\frac{1}{s-j\omega_0}e^{-(s-j\omega_0)t}+\frac{1}{s+j\omega_0}e^{-(s+j\omega_0)t}]_0^\infty=\frac{A}{2j}[\frac{1}{s-j\omega_0}-\frac{1}{s+j\omega_0}]=\frac{A\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

مثال ۱۸: یک سیستم خطی با معادله دیفرانسیل $y'''+8y''+37y'+50y=9x'+35x$ داده شده است..(شرایط اولیه صفر است)

با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه این سیستم را بدست آورید. راهنمایی: $x^3+8x^2+37x+50=(x+2)(x^2+6x+25)$

حل:از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$s^3Y(s)+8s^2Y(s)+37sY(s)+50Y(s)=9sX(s)+35X(s)\rightarrow[s^3+8s^2+37s+50]Y(s)=(9s+35)X(s)\rightarrow$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{9s+35}{s^3+8s^2+37s+50}\rightarrow Y(s)=H(s)X(s)$$

برای ورودی ضربه یعنی $x(t)=\delta(t)\rightarrow X(s)=1$ در نتیجه داریم:

$$Y(s)=H(s)X(s)=H(s)=\frac{9s+35}{s^3+8s^2+37s+50}=\frac{9s+35}{(s+2)(s^2+6s+25)}=$$

$$\frac{1}{s+2}-\frac{s-5}{s^2+6s+25}=\frac{1}{s+2}-[\frac{s+3}{(s+3)^2+16}-\frac{8}{(s+3)^2+16}]\rightarrow Y(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{8}{(s+3)^2+16}-\frac{s+3}{(s+3)^2+16}$$

حال با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس $e^{-at}u_{-1}(t)$ برابر است با $\frac{1}{s+2}$، تبدیل لاپلاس $A\cos\omega_0 tu_{-1}(t)$ برابر است با $\frac{As}{s^2+\omega_0^2}$ و تبدیل لاپلاس $A\sin\omega_0 tu_{-1}(t)$ برابر است با $\frac{A\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ و با استفاده از تبدیل لاپلاس $f(t)e^{-\alpha t}$ که برابر است با $F(s+\alpha)$ لاپلاس معکوس عبارت بالا برابر است با:

$$y(t)=[e^{-2t}+2e^{-3t}\sin 4t-e^{-3t}\cos 4t]u_{-1}(t)$$

مثال ۱۹: با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه $y'(0)=-1$ $y(0)=0,$ را بدست آورید.

$$y''+4y'+3y=\frac{25}{4}e^{-3t}\sin 4t\,u_{-1}(t)$$

از طرفین لاپلاس میگیریم:

$$S^2Y(S)-Sy(0)-y'(0)+4[SY(S)-y(0)]+3Y(S)=\frac{25}{4}\frac{4}{(S+3)^2+16}\rightarrow(S^2+4S+3)Y(S)=$$

$$y'(0)+\frac{25}{(S+3)^2+16}=-1+\frac{25}{S^2+6S+25}\rightarrow(S^2+4S+3)Y(S)=\frac{-S^2-6S}{S^2+6S+25}\rightarrow$$

$$Y(S)=\frac{-S^2-6S}{(S^2+4S+3)(S^2+6S+25)}=\frac{-S^2-6S}{(S+1)(S+3)(S^2+6S+25)}=\frac{A}{S+1}+\frac{B}{S+3}+\frac{CS+D}{S^2+6S+25}$$

$$A=(S+1)Y(S)_{(S=-1)}=\frac{-(-1)^2-6(-1)}{(-1+3)[(-1)^2+6(-1)+25]}=\frac{5}{2\times 20}=\frac{1}{8}$$
$$B=(S+3)Y(S)_{(S=-3)}=\frac{-(-3)^2-6(-3)}{(-3+1)[(-3)^2+6(-3)+25]}=\frac{9}{-2\times 16}=-\frac{9}{32}$$

حال اگر از کسر بالا مخرج مشترک بگیریم داریم:

$$Y(S)=\frac{-S^2-6S}{(S^2+4S+3)(S^2+6S+25)}=$$
$$\frac{S^3(A+B+C)+S^2(9A+7B+4C+D)+S(43A+31B+3C+4D)+75A+25B+3D}{(S^2+4S+3)(S^2+6S+25)}$$

که با مقایسه ضرایب داریم:

$$A+B+C=0\rightarrow \frac{1}{8}-\frac{9}{32}+C=0\rightarrow C=\frac{5}{32}\qquad 75A+25B+3D=0\rightarrow D=-\frac{25}{32}$$
$$Y(S)=\frac{1}{8}\frac{1}{S+1}-\frac{9}{32}\frac{1}{S+3}+\frac{5}{32}\frac{S-5}{S^2+6S+25}=\frac{1}{8}\frac{1}{S+1}-\frac{9}{32}\frac{1}{S+3}+\frac{5}{32}(\frac{S+3-8}{(S+3)^2+16})$$
$$y(t)=[\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{9}{32}e^{-3t}+\frac{5}{32}e^{-3t}(\cos 4t-2\sin 4t)]u_{-1}(t)$$

برای تبدیل معکوس از رابطه لاپلاس $\cos\omega_0 t$ برابر با $\frac{S}{S^2+\omega_0^2}$ و لاپلاس $\sin\omega_0 t$ برابر با $\frac{\omega_0}{S^2+\omega_0^2}$ و قانون اینکه لاپلاس $e^{-\alpha t}f(t)$ برابر است با $F(S+\alpha)$ استفاده کردیم.

قضیه پارسوال

در فصول قبل قضیه پارسوال را برای توابع پریودیک بدست آوردیم که چون سیگنالهای پریودیک سیگنالهای توان هستند توانستیم توان یک سیگنال پریودیک را بر حسب ضرایب سری فوریه بیان کنیم. برای توابع غیر پریودیک باید از انرژی استفاده کنیم. انرژی یک سیگنال غیر پریودیک را میتوان به صورت زیر بیان کرد:

$$E_g=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t).g^*(t)dt$$

با توجه به اینکه $g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ در نتیجه $g^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$ که با جایگزینی در معادله انرژی بالا داریم:

$$E_g=\int_{-\infty}^{\infty}g(t).g^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t).\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G^*(\omega).[\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt]d\omega=$$

چون $\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt=G(\omega)$ در نتیجه عبارت داخل براکت همان تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ میباشد بعبارت دیگر:

$$E_g=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G^*(\omega).[\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt]d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G^*(\omega).[G(\omega)]d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2d\omega\rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2d\omega$$

البته اگر $\omega=2\pi f$ را در معادله بالا جایگزین کنیم چون $d\omega=2\pi df$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|G(f)|^2df$$

روابط بالا را قضیه پارسوال میگویند.

مثال ۲۰: با استفاده از تبدیل فوریه $g(t)=rect(\frac{t}{\tau})$ و قضیه پارسوال ثابت کنید $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

حل: میدانیم که اگر $g(t)=rect(\frac{t}{\tau})$ در اینصورت $G(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$ حال اگر $\tau=2$ باشد در اینصورت $g(t)=rect(\frac{t}{2})$ و $G(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin\omega$. از قضیه پارسوال استفاده میکنیم که خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2d\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}[rect(\frac{t}{2})]^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{2}{\omega}\sin\omega]^2d\omega\rightarrow 2\int_0^1 1^2dt=\frac{1}{2\pi}2\int_0^{\infty}\frac{4\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega\rightarrow$$

$$2=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega\rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\qquad \omega=x\rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۲۱: با استفاده از قضیه پارسوال ثابت کنید $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{4a^3}$

حل: میدانیم اگر $g(t)=e^{-a|t|}$ در اینصورت $G(\omega)=\frac{2a}{\omega^2+a^2}$ در اینحالت داریم:

$$G(\omega)=\frac{2a}{\omega^2+a^2}\rightarrow G(f)=\frac{2a}{(2\pi f)^2+a^2}=\frac{\frac{2a}{4\pi^2}}{f^2+\frac{a^2}{4\pi^2}}\qquad a=2\pi b\rightarrow G(f)=\frac{\frac{b}{\pi}}{f^2+b^2}\rightarrow$$

$$g(t)=e^{-2\pi b|t|}\rightarrow G(f)=\frac{\frac{b}{\pi}}{f^2+b^2}\qquad\int_{-\infty}^{\infty}g^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}G^2(f)df\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-2\pi b|t|}]^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\frac{b}{\pi}}{f^2+b^2}]^2df\rightarrow$$

$$2\int_0^{\infty}e^{-4\pi bt}dt=2\frac{b^2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{df}{(f^2+b^2)^2}\rightarrow[-\frac{1}{4\pi b}e^{-4\pi bt}]_0^{\infty}=\frac{b^2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{df}{(f^2+b^2)^2}\rightarrow\frac{1}{4\pi b}=\frac{b^2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{df}{(f^2+b^2)^2}\rightarrow$$

$$\int_0^{\infty}\frac{df}{(f^2+b^2)^2}=\frac{\pi}{4b^3}$$

که همان انتگرال خواسته شده است b جایگزین a شده است. لازم به ذکر است که در محاسبات بالا از $\int_{-\infty}^{\infty}g^2dt=2\int_0^{\infty}g^2dt$ استفاده شده زیرا

g^2 تابع زوج میباشد. لازم به ذکر است که شکل کلی قضیه پارسوال به صورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)H^*(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H^*(f)df$$

مثال ۲۲: ثابت کنید $\int_0^{\infty} \frac{\sin c(x)}{x^2+a^2}dx = \frac{1-e^{-\pi a}}{2a^2}$

حل: فرض کنید $g(t) = rect(t)$ و $h(t) = e^{-2\pi a|t|}$ در اینصورت داریم:

$$g(t) = rect(t) \to G(f) = \sin c(f) \qquad h(t) = e^{-2\pi a|t|} \to H(\omega) = \frac{2(2\pi a)}{\omega^2 + (2\pi a)^2} = \frac{4\pi a}{\omega^2 + 4\pi^2 a^2} \to$$

$$H(f) = \frac{4\pi a}{4\pi^2 f^2 + 4\pi^2 a^2} = \frac{\frac{a}{\pi}}{f^2 + a^2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H^*(f)df \to$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} rect(t).e^{-2\pi a|t|}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin c(f)\frac{\frac{a}{\pi}}{f^2+a^2}df \to 2\int_0^{\frac{1}{2}} 1\times e^{-2\pi a t}dt = 2\frac{a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin c(f)}{f^2+a^2}df \to$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin c(f)}{f^2+a^2}df = \frac{\pi}{a}\int_0^{\frac{1}{2}} 1\times e^{-2\pi a t}dt \to \int_0^{\infty}\frac{\sin c(f)}{f^2+a^2}df = \frac{\pi}{a}[-\frac{1}{2\pi a}e^{-2\pi a t}]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2a^2}(e^{-\pi a}-1) \to$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin c(f)}{f^2+a^2}df = \frac{1-e^{-\pi a}}{2a^2}$$

لازم به ذکر است که $g(t) = rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$ و $h(t) = e^{-2\pi a|t|}$ تابع زوج هستند در نتیجه $g(t)h^*(t)$ تابع زوج است بنابراین $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h^*(t)dt = 2\int_0^{\infty} g(t)h^*(t)dt$. همچنین $G(f) = \sin c(f)$ و $H(f) = \frac{\frac{a}{\pi}}{f^2+a^2}$ هر دو تابع زوج هستند در نتیجه $G(f)H^*(f)$ زوج میباشد در نتیجه $\int_{-\infty}^{\infty} G(f)H^*(f)df = 2\int_0^{\infty} G(f)H^*(f)df$.

مثال ۲۳: با استفاده از قانون پارسوال حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$ را بدست آورید.

حل ابتدا انتگرال را به صورت زیر ساده میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[(x+2)^2+1]^2} \qquad x+2 = y \to dx = dy \to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(y^2+1)^2}$$

اگر $g(t) = e^{-\alpha|t|}$ در اینصورت $G(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ در اینصورت برای $a=1$ داریم: $g(t) = e^{-|t|}$ و $G(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1}$. حالا قضیه پارسوال را اعمال میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega)d\omega = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2}{\omega^2+1})^2 d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{(\omega^2+1)^2} d\omega$$

$$\rightarrow 2[-\frac{1}{2}e^{-2t}]_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{(\omega^2+1)^2} d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{(\omega^2+1)^2} d\omega = \pi[\frac{1}{2}] \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+1)^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = y \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(y^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲۴: با توجه به اینکه تبدیل فوریه تابع $f(t) = e^{-\alpha t}u_{-1}(t)$ **برابر است با:** $F(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$ **ثابت کنید:** $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}d\omega = \frac{\pi}{32}$

حل: میدانیم تبدیل فوریه $g(t) = tf(t)$ **برابر است با** $G(\omega) = j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$ **در نتیجه تبدل فوریه:** $g(t) = te^{-2t}u_{-1}(t)$ **برابر است با:**

$$G(\omega) = j\frac{d}{d\omega}(\frac{1}{j\omega+2}) = \frac{1}{(j\omega+2)^2} \rightarrow |G(\omega)| = \frac{1}{\omega^2+4}$$

حال از قضیه پارسوال استفاده میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}[te^{-2t}u_{-1}(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\omega^2+4})^2 d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\omega^2+4})^2 d\omega = 2\pi\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-4t} dt$$

انتگرال آخر را از طریق جز به جز حل میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\omega^2+4})^2 d\omega = 2\pi[(\frac{t^2}{-4}e^{-4t})_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{t}{2}e^{-4t}dt] = \pi\int_{0}^{\infty} te^{-4t}dt = \pi[(\frac{t}{-4}e^{-4t})_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{4}e^{-4t}] = \frac{\pi}{16} \rightarrow$$

$$\int_{0}^{\infty}(\frac{1}{\omega^2+4})^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\omega^2+4})^2 d\omega = \frac{\pi}{32}$$

موفق باشید

محمود محمدطاهری- اسفند ۱۴۰۰