سوال ۱)الف-با استفاده از رابطه ی بین ضرایب سری فوریه مختلط و تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(ax)\, e^{-jnx}\, dx$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad , \quad \sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right) e^{-jnx}\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{(a-jn)x}+e^{-(a+jn)x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\left[\frac{e^{(a-jn)x}}{a-jn}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-(a+jn)x}}{a+jn}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{(a-jn)\pi}-e^{-(a-jn)\pi}}{a-jn} - \frac{e^{-(a+jn)\pi}-e^{(a+jn)\pi}}{a+jn}\right)$$

$$e^{j\pi n} = e^{-j\pi n} = (-1)^n$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(-1)^n(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{a-jn} + \frac{(-1)^n(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{a+jn}\right)$$

$$= \frac{2\times(-1)^n\times\sinh(a\pi)}{4\pi}\left(\frac{1}{a-jn}+\frac{1}{a+jn}\right)$$

$$= \frac{2\times(-1)^n\times\sinh(a\pi)}{4\pi}\left(\frac{2a}{a^2+n^2}\right) = \frac{a\times(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}$$

$$c_n = \frac{a\times(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a\times(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}\, e^{jnx}$$

ب- برای حل این قسمت از رابطه ی پارسوال استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

ابتدا مقدار سمت چپ تساوی را می یابیم.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cosh(ax)|^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cosh^2(ax)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cosh(2ax)+1}{2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[x+\frac{1}{2a}\sinh(2ax)\right]_{0}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left[\pi+\frac{1}{2a}\sinh(2a\pi)\right]$$

سمت چپ تساوی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{a^2\sinh^2(\pi a)}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2}$$

اکنون روابط بدست آمده را برابر هم قرار داده و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi}\left[\pi+\frac{1}{2a}\sinh(2a\pi)\right]=\frac{a^2\sinh^2(\pi a)}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{2a^2\sinh^2(\pi a)}\left[\pi+\frac{1}{2a}\sinh(2a\pi)\right]$$

سوال ۲)الف- با استفاده از رابطه ی بین ضرایب سری فوریه مختلط و تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jnx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sinh(ax)\,e^{-jnx}\,dx$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right)e^{-jnx}\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{(a-jn)x} - e^{-(a+jn)x})\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\left[\frac{e^{(a-jn)x}}{a-jn}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-(a+jn)x}}{a+jn}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{(a-jn)\pi} - e^{-(a-jn)\pi}}{a-jn} + \frac{e^{-(a+jn)\pi} - e^{(a+jn)\pi}}{a+jn}\right)$$

$$e^{j\pi n} = e^{-j\pi n} = (-1)^n$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(-1)^n(e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{a-jn} - \frac{(-1)^n(e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{a+jn}\right)$$

$$= \frac{2\times(-1)^n\times\sinh(a\pi)}{4\pi}\left(\frac{1}{a-jn} - \frac{1}{a+jn}\right)$$

$$= \frac{2\times(-1)^n\times\sinh(a\pi)}{4\pi}\left(\frac{j2n}{a^2+n^2}\right) = \frac{jn\times(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}$$

$$c_n = \frac{jn\times(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{jn\times(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}e^{jnx}$$

ب- برای حل این قسمت از رابطه ی پارسوال استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

ابتدا مقدار سمت چپ تساوی را می یابیم.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sinh(ax)|^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sinh^2(ax)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{cosh(2ax)-1}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left[-x+\frac{1}{2a}\sinh(2ax)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\pi+\frac{1}{2a}\sinh(2a\pi)\right]$$

سمت چپ تساوی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{\sinh^2(\pi a)}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{n}^2}{(a^2+n^2)^2}$$

اکنون روابط بدست آمده را برابر هم قرار داده و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi}\left[-\pi+\frac{1}{2a}\sinh(2a\pi)\right]=\frac{\sinh^2(\pi a)}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{n}^2}{(a^2+n^2)^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{n}^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{2\sinh^2(\pi a)}\left[-\pi+\frac{1}{2a}\sinh(2a\pi)\right]$$

سوال ۳)الف-برای سادگی تابع را به صورت جمع دو تابع در نظر می گیریم.

$$f(x) = g(x) + h(x) = 1 + \sin x \to g(x) = 1, h(x) = |\sin x|$$

برای هر کدام از این توابع می توان از روابط مربوطه استفاده کرده و سری فوریه مختلط هر کدام را محاسبه نمود.

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{j2nx} \to \begin{cases} c'_0 = 1 \\ c'_n = 0 \quad\quad n \neq 0 \end{cases}$$

$$|\sin x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2nx}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x| e^{-j2nx}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, e^{-j2nx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} e^{-j2nx} dx = \frac{1}{j2\pi}\int_0^{\pi} (e^{-j(2n-1)x} - e^{-j(2n+1)x})\, dx$$

$$= \frac{1}{j2\pi}\left[\frac{e^{-j(2n-1)x}}{-j(2n-1)} - \frac{e^{-j(2n+1)x}}{-j(2n+1)}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-j(2n-1)x}}{(2n-1)} - \frac{e^{-j(2n+1)x}}{(2n+1)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-j(2n-1)\pi} - 1}{2n-1} - \frac{e^{-j(2n+1)\pi} - 1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2}{2n-1} - \frac{-2}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi(4n^2 - 1)} \xrightarrow{n=0} c_0 = \frac{2}{\pi}$$

پس در کل سری فوریه ی مختلط تابع داده شده به صورت زیر خواهد شد:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{\pi(1 - 4n^2)} e^{j2nx}$$

ب-با توجه به قسمت قبل می توان نوشت:

$$f(0) = 1 + \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{\pi(1 - 4n^2)} e^{j2n\times 0}$$

$$1 = 1 + \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} = -\frac{2}{\pi} \xrightarrow{\text{با توجه تقارن زوج سری می توان نوشت}} 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)} = -\frac{1}{2}$$

توجه:باید این نکته را در نظر داشته باشید که اگر بخواهیم از فرمول،مقدار ضرایب سری فوریه را برای $g(x) = 1$ محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$c'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-j2nx}dx = \frac{1}{-j2n\pi}\left[e^{-j2nx}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{-j2n\pi}\left[e^{-j2n\pi} - 1\right] = 0 \qquad \forall n \in Z - \{0\}$$

اما برای $n = 0$ خواهیم داشت:

$$c'_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-j2\times 0\times x}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = 1$$

پس در این سوال بهتر بود که c'_0 و c'_n جداگانه محاسبه شوند.

سوال ۴)

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = |g(t)|$$

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = a0 + \sum_{n=1}^{inf} an\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + bn\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$f(t) \to T\ and\ f\left(\frac{t}{2}\right) \to 2T, so{:}\ a0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t')2dt' = \frac{\tau}{T}$$

$$an = \frac{2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t')cos\left(\frac{2\pi nt'}{T}\right)2dt' = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

$$bN = 0 \rightarrow f\left(\frac{t}{2}\right): even$$

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{inf}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{T}\right)t$$

$$g(t) = \begin{cases} -f(\frac{t}{2}) & 0 < t < \tau \\ f\left(\frac{t}{2}\right) & -\tau < t < 0 \end{cases}$$

سوال ۵)

$$a0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

$$an = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')\cos(nx')\,dx'$$

$$bn = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')\sin(nx')\,dx' = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)$$

$$f(x) = a0 + \sum_{n=1}^{inf} an\cos(nx) + bn\sin(nx)$$
$$= 0$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{inf}\cos(nx)\int_{-\pi}^{\pi} f(x')\cos(nx')\,dx'$$
$$+ \sin(nx)\int_{-\pi}^{\pi} f(x')\sin(mx')\,dx'$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{inf}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')(\cos(nx)\cos(nx') + \sin(nx)\sin(nx'))dx'$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{inf}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')cos\big(n(x'-x)\big)dx'$$

سوال ۶)

$$\mathrm{FS}\big(\delta(\mathrm{x})\big) = \frac{1}{2\pi}\,[1 + 2\cos\mathrm{x} + 2\cos(2\mathrm{x}) + 2\cos(3\mathrm{x}) + \cdots]$$

$$\mathrm{FS}\big(2\delta(\mathrm{x}) - 2\delta(\mathrm{x}+\pi)\big)$$
$$= \frac{1}{\pi}\,[1 + 2\cos\mathrm{x} + 2\cos(2\mathrm{x}) + 2\cos(3\mathrm{x}) + \cdots + -1 - 2\cos(\mathrm{x}+\pi)$$
$$- 2\cos(2\mathrm{x}+2\pi) - 2\cos(3\mathrm{x}+3\pi) + \cdots]$$
$$= \frac{1}{\pi}\,[1 + 2\cos\mathrm{x} + 2\cos(2\mathrm{x}) + 2\cos(3\mathrm{x}) + \cdots + -1 + 2\cos(\mathrm{x})$$
$$- 2\cos(2\mathrm{x}) + 2\cos(3\mathrm{x}) + \cdots] = \frac{4}{\pi}\,[\cos(\mathrm{x}) + \cos(3\mathrm{x}) + \cos(5\mathrm{x}) + \cdots]$$

Thus, the Fourier series of f is the antiderivative of the cosine series above: FS(f)

$$= \int \frac{4}{\pi}\,[\cos(\mathrm{x}) + \cos(3\mathrm{x}) + \cos(5\mathrm{x}) + \cdots]\mathrm{dx}$$
$$= \int \frac{4}{\pi}\,[\sin\mathrm{x} + \sin(3\mathrm{x})3 + \sin(5\mathrm{x})5 + \cdots]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sin\mathrm{x} + \frac{4}{3\pi}\sin(3\mathrm{x}) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\mathrm{x}) + \cdots,$$