سری فوریه

دسته بندی سیگنال ها

سیگنالها را از جهات مختلف میتوان به دسته های زیر تقسیم کرد

الف) **سیگنال زوج**: سیگنال $f(x)$ را زوج گویند اگر $f(-x)=f(x)$ مثل $f(x)=x^2$ یا $f(x)=\cos ax$

ب) **سیگنال فرد**: سیگنال $f(x)$ را فرد گویند اگر $f(-x)=-f(x)$ مثل $f(x)=x^3$ یا $f(x)=\sin ax$

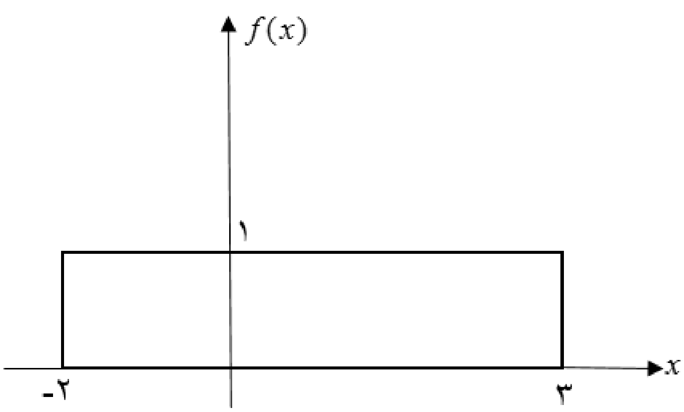
به طور کلی هر سیگنال غیر زوج و غیر فرد را میتوان به صورت مجموع تابع زوج $f_e(x)$ و فرد $f_o(x)$ نوشت بعبارت دیگر $f(x)=f_e(x)+f_o(x)$ در اینصورت میتوان نوشت:

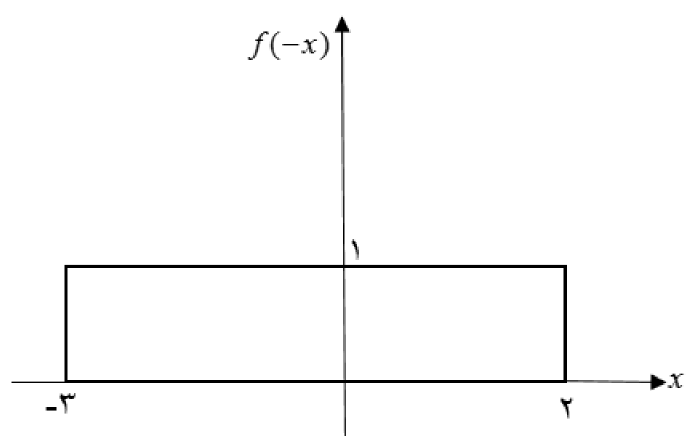
$$\begin{cases} f(x)=f_e(x)+f_o(x) \\ f(-x)=f_e(-x)+f_o(-x)=f_e(x)-f_o(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_e(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ f_o(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

یعنی با داشتن تابع میتوان قسمتهای زوج و فرد آنرا بدست آورد. بعبارت دیگر ابتدا با داشتن تابع $f(x)$ تابع $f(-x)$ را بدست آورده سپس از روابط بالا برای محاسبه تابع زوج و فرد استفاده میکنیم. در جمعبندی میتوان گفت که هر تابع را میتوان به مجموع دو تابع زوج و فرد تجزیه کرد

مثال **1**: تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده قسمتهای زوج و فرد تابع را بدست آورید

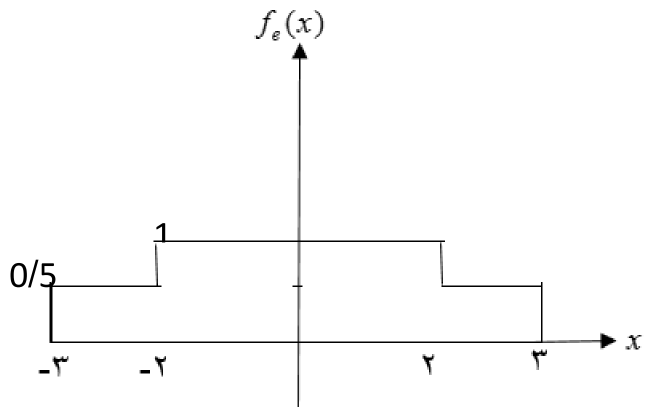
حل: ابتدا تابع $f(-x)$ را رسم میکنیم که به شکل زیر خواهد شد:

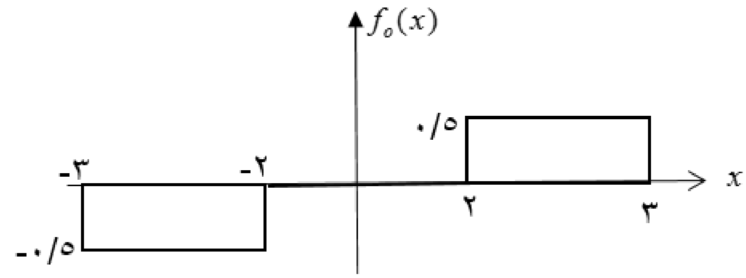




حال قسمت زوج تابع را بدست می آوریم. یعنی دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ بالا را با هم جمع میکنیم و نتیجه را بر **2** تقسیم میکنیم که خواهیم داشت:

برای محاسبه قسمت فرد تابع کافیست دو تابع بالا را از هم کم و نتیجه را بر **2** تقسیم کنیم که نتیجه در زیر رسم شده است.





تابع پریودیک: تابع $f(x)$ با پریود T را میتوان به صورت $f(x)=f(x+T)$ تعریف کرد یعنی تابع در هر فاصله Tتکرار میشود. مثلا برای تابع $f(x)=\cos x$ یک تابع پریودیک با پریود $T=2\pi$میباشد زیرا $\cos(x)=\cos(x+2\pi)$ حال تابع $f(x)=\cos ax$ دارای پریود Tاست که خواهیم داشت:

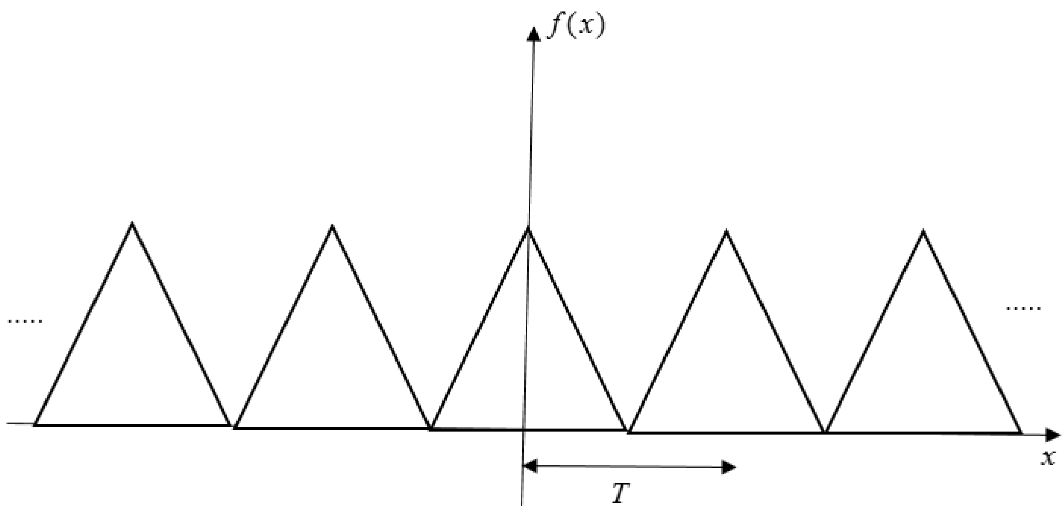
$$f(x)=\cos ax=\cos a(x+T)=\cos(ax+aT)\rightarrow\cos ax=\cos(ax+aT)\rightarrow aT=2\pi\rightarrow T=\frac{2\pi}{a}$$

تابع غیر پریودیک: تابع غیر پریودیک تابعی است که تکرار نمیشود به عبارت دیگر دارای پریود بینهایت است یعنی در بینهایت تکرار میشود مثلا تابع مثال **1** تابع غیر پریودیک است زیرا تکرار نمیشود و یک تابع محدود در حوزه xاست.

اگر تابع پریودیک با پریود T داشته باشیم در اینصورت میتواانیم بنویسیم:

$$f(x)=f(x+T)\rightarrow f(x+T)=f(x+T+T)=f(x+2T)\rightarrow f(x)=f(x+2T)\rightarrow$$
$$f(x+T)=f(x+2T+T)\rightarrow f(x)=f(x+T)=f(x+3T)..........f(x)=f(x+nT)$$

یعنی اگر پریود تابع Tباشد میتوان گفت پریود تابع nTنیز میباشد که nیک عدد صحیح است. تابع زیر مثالی از یک تابع پریودیک با پریود Tمیباشد



پریود تابعی که مجموع چند تابع پریودیک است برابر است با کوچکترین مضرب مشترک پریود هر تابع مثال زیر این مسئله را روشن میکند.

مثال **2**: پریود تابع پریودیک زیر را بدست آورید

$$f(x) = \sin 2x + 3\cos 3x + 4\cos 4x$$

حل: پریود جمله اول برابر است با: $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$، پریود جمله دوم برابر است با: $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ و پریود جمله سوم برابر است با: $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. بنابراین پریود تابع برابر است با کوچکترین مضرب مشترک سه پریود بدست آمده یعنی کوچکترین مضرب مشترک π و $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{2}$ که برابر است با $T = 2\pi$.

مثال **3**: پریود تابع $f(x) = 2\cos^2 x$ را بدست آورید.

حل: میتوانیم بنویسیم:

$$f(x) = 2\cos^2 x = 2(\frac{1+\cos 2x}{2}) = 1+\cos 2x$$

جمله اول ثابت است در نتیجه پریود تابع برابر است با پریود تابع $\cos 2x$ یعنی $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. در حالی که پریود تابع $\cos x$ برابر است با 2π. بعبارت دیگر با مربع کردن یک تابع پریود آن نصف میشود.

مثال **4**: پریود تابع $f(x) = |\cos x|$ را بدست آورید.

حل: میتوانیم بنویسیم:

$$f(x+\pi) = |\cos(x+\pi)| = |-\cos x| = |\cos x| = f(x) \rightarrow T = \pi$$

بنابراین وقتی از یک تابع پریودک قدرمطلق میگیریم پریود آن نصف میشود. حال مثال زیر را در نظر بگیریم:

مثال **5**: پریود تابع $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ را بدست آورید.

حل: میتوانیم بنویسیم:

$$f(x+\frac{\pi}{2}) = \left|\cos(x+\frac{\pi}{2})\right| + \left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right| = |-\sin x| + |\cos x| = |\sin x| + |\cos x| = f(x) \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

سیگنالهای عمود بر هم یا orthogonal

دو سیگنال پریودیک $f(x)$ و $g(x)$ با پریود T بر هم عمودند اگر ضرب داخلی آنها صفرباشد بعبارت دیگر:

$$< f(x), g(x) >= \int_T f(x)g(x)dx = 0$$

که $\int_T$ یعنی انتگرال در یک بازه یک پریود بعبارت دیگر: $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \int_0^T = \int_T$. مثلا توابع $\sin mx$ و $\cos nx$ که دارای پریود $T = 2\pi$ هستند به ازای جمیع مقادیر m و n بر هم عمودند زیرا:

$$< \sin mx, \cos nx >= \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx =$$
$$-\frac{1}{2}[\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x + \frac{1}{m-n}\cos(m-n)x]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}[\frac{1}{m+n}\cos(m+n)2\pi + \frac{1}{m-n}\cos(m-n)2\pi] +$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n}] = -\frac{1}{2}[\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n}] = 0$$

حال دو تابع $\cos mx$ و $\cos nx$ را در نظر بگیرید که پریود آنها 2π در اینصورت داریم:

$$< \cos mx, \cos nx >= \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx =$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)2\pi + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)2\pi]$$
$$\frac{1}{2}\frac{1}{m-n}\sin(m-n)2\pi = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

همچنین برای دو تابع $\sin mx$ و $\sin nx$ داریم:

$$< \sin mx, \sin nx >= \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx =$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m-n)x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)2\pi - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)2\pi]$$
$$\frac{1}{2}\frac{1}{m-n}\sin(m-n)2\pi = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

یعنی دو تابع $\cos mx$ و $\cos nx$ ودو تابع $\sin mx$ و $\sin nx$ به ازای $m \neq n$ بر هم عمودند در حالت کلی میتوان نوشت:

$$< \cos mx, \cos nx >=< \sin mx, \sin nx >= \begin{cases} \frac{T}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \qquad < \cos mx, \sin nx >=< \cos nx, \sin mx >= 0$$

بسط فوریه تابع پریودیک با پریود T

یک تابع پریودیک $f(t)$ با پریود T را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t \qquad T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

به بسط بالا بسط سری فوریه و به ضرایب a_n و b_n ضرایب کسینوسی و سینوسی بسط سری فوریه میگویند. حال با استفاده از خواص بر هم بودن توابع سینوس و کسینوس این ضرایب مجهول را بدست می آوریم. اگر از طرفین رابطه بالا روی یک پریود انتگرال بگیریم داریم:

$$\int_0^T f(t)dt=\int_0^T a_0 dt+\int_0^T(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t)dt+\int_0^T(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega_0 t)dt=a_0T+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n\omega_0}(\sin n\omega_0 T)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n\omega_0}(\cos n\omega_0 T-1)\rightarrow\int_0^T f(t)dt=a_0T+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n\omega_0}(\sin n\frac{2\pi}{T}T)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega_0}(\cos n\frac{2\pi}{T}T-1)=$$

$$a_0T+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n\omega_0}\sin 2n\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega_0}(\cos 2n\pi-1)\rightarrow\int_0^T f(t)dt=a_0T+0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega_0}(1-1)\rightarrow$$

$$\int_0^T f(t)dt=a_0T\rightarrow a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_T f(T)dt$$

حال ضرایب a_n را بدست می آوریم. برای اینکار طرفین را در $\cos m\omega_0 t$ ضرب و روی یک پریود انتگرال میگیریم:

$$\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 tdt=\int_0^T a_0\cos m\omega_0 tdt+\int_0^T(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t)\cos m\omega_0 tdt+\int_0^T(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega_0 t)\cos m\omega_0 tdt=$$

$$a_0[\frac{1}{m\omega_0}(\sin m\omega_0 T)]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}\sin(m+n)\omega_0 T+\frac{1}{(n-m)\omega_0}\sin(m-n)\omega_0 T]-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}\cos(m+n)\omega_0 T+\frac{1}{(n-m)\omega_0}\cos(m-n)\omega_0 T]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}+\frac{1}{(n-m)\omega_0}]$$

$$\rightarrow\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 tdt=a_0[\frac{1}{m\omega_0}(\sin m\frac{2\pi}{T}T)]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}\sin(m+n)\frac{2\pi}{T}T+\frac{1}{(n-m)\omega_0}\sin(m-n)\frac{2\pi}{T}T]-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}\cos(m+n)\frac{2\pi}{T}T+\frac{1}{(n-m)\omega_0}\cos(m-n)\frac{2\pi}{T}T]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}+\frac{1}{(n-m)\omega_0})]$$

$$\rightarrow\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 tdt=a_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}\sin(m+n)2\pi+\frac{1}{(n-m)\omega_0}\sin(m-n)2\pi]$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}\cos(m+n)2\pi+\frac{1}{(n-m)\omega_0}\cos(m-n)2\pi]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}[\frac{1}{(n+m)\omega_0}+\frac{1}{(n-m)\omega_0})]$$

$$\rightarrow\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 tdt=\frac{a_m}{2\omega_0}2\pi\rightarrow\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 tdt=a_m\frac{T}{2}\rightarrow a_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 tdt\rightarrow a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 tdt$$

به روش مشابه برای محاسبه ضرایب b_n طرفین را در $\sin m\omega_0 t$ ضرب و روی یک پریود انتگرال میگیریم که با محاسبات شبیه به

آنچه در بالا انجام دادیم خواهیم داشت:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt$$

واضح است که اگر تابع زوج باشد در اینصورت ضرایب b_n صفر و اگر تابع فرد باشد در اینصورت ضرایب a_n صفر خواهند بود.

مثال 6: هر گاه $-\pi < x < \pi$ $f(x) = \cos \mu x,$ در اینصورت بسط سری فوریه این تابع را بدست آورید.

حل: تابع زوج است با پریود $T = 2\pi$ بنابراین داریم:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1 \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x dx = \frac{1}{\pi\mu}\sin\mu\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu x\cos nx dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+\mu)x + \cos(n-\mu)x]dx = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{n+\mu}\sin(n+\mu)\pi + \frac{1}{n-\mu}\sin(n-\mu)\pi] =$$

$$\frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^n}{n+\mu}\sin\mu\pi - \frac{(-1)^n}{n-\mu}\sin\mu\pi] = \frac{2\mu\sin\pi\mu}{\pi(n^2-\mu^2)}(-1)^{n+1} \to f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx =$$

$$\frac{1}{\pi\mu}\sin\mu\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}\mu\sin\pi\mu}{\pi(n^2-\mu^2)}\cos nx = \frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi[\frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2-\mu^2)}\cos nx] =$$

$$\frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi[\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1-\mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \dots\dots\dots \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-\mu^2} + \dots\dots]$$

بنابراین بسط سری فوریه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \cos\mu x = \frac{1}{\pi\mu}\sin\mu\pi + \frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-\mu^2}$$

مثال **7**: با استفاده از مثال بالا ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

حل: در بسط فوریه بدست آمده قرار میدهیم $x = \pi$ $\mu = \frac{1}{3},$

$$f(x) = \cos\mu x = \frac{1}{\pi\mu}\sin\mu\pi + \frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-\mu^2}$$

$$f(\pi) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\pi\frac{1}{3}}\sin\frac{1}{3}\pi + \frac{2\frac{1}{3}}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos n\pi}{n^2-\frac{1}{9}} \to \frac{1}{2} = \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9(-1)^{2n+1}}{9n^2-1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}\rightarrow\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}=\frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}=\frac{\frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

مثال 8: اگر سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2+1}\cos nx+\frac{1}{n^3}\sin nx)$ بیان شود حاصل انتگرال $I=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[1+\cos 2x+\sin 3x]dx$ چقدر است؟

حل: تابع پریودیک داده شده دارای پریود $T=2\pi$ در نتیجه داریم:

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2+1}\cos nx+\frac{1}{n^3}\sin nx)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\rightarrow a_0=\frac{1}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{2(n^2+1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{\pi}{2(n^2+1)}\rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2x dx=\frac{\pi}{2(2^2+1)}=\frac{\pi}{10}$$

$$b_n=\frac{1}{2n^3}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{\pi}{2n^3}\rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x dx=\frac{\pi}{2(3)^3}=\frac{\pi}{54}$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\pi a_0=\frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x dx=\frac{\pi}{2(3)^3}=\frac{\pi}{54}\rightarrow I=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[1+\cos 2x+\sin 3x)dx=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{54}=\frac{(180+27+5)\pi}{270}$$

$$\rightarrow I=\frac{106\pi}{135}$$

مثال 9: برای تابع پریودیک $f(x)=|x|,\quad -\pi<x<\pi$ بسط سری فوریه را بدست آورید و ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

حل: تابع زوج و با پریود $T=2\pi$ است بنابراین فقط بسط کسینوسی دارد در اینصورت $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$ و میتوان نوشت:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\qquad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\times\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=2\times\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}[(x\times\frac{1}{n}\sin nx)_0^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx]=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx=$$

$$\frac{2}{\pi n^2}[\cos nx]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}[\cos n\pi-1]=\begin{cases}-\frac{4}{\pi n^2} & n=odd\\ 0 & n=even\end{cases}\rightarrow a_n=\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos nx$$

حال اگر در تابع بسط داده شده $x=0$ قرار دهیم داریم:

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos nx \to |0|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos(0)\to 0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\to$$
$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

در حل مثال بالا مشاهده شد که برای محاسبه ضریب a_n مجبور شدیم از انتگرال جز به جز استفاده کنیم. برای اجتناب از این روش زمان بر میتوان از تابع مشتق گرفت تا محاسبات ساده شود یعنی:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\to g(x)=f'(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin nx\to g(x)=f'(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}=\sum b_n\sin nx\to b_n=-na_n$$

ملاحظه میشود که با مشتق گرفتن از تابع زوج این نابع تبدیل به تابع فرد میشود که بسط سینوسی دارد حال ضرایب بسط سینوسی تابع $g(x)$ را بدست می آوریم:

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nxdx=2\times\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\times\sin nxdx=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{n}\cos nx]_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}[\cos n\pi-1]=\begin{cases}\frac{4}{n\pi} & n=odd\\ 0 & n=even\end{cases}\to$$
$$b_n=-na_n=\begin{cases}\frac{4}{n\pi} & n=odd\\ 0 & n=even\end{cases}\to a_n=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi} & n=odd\\ 0 & n=even\end{cases}$$

ملاحظه میشود که این همان ضریبی است که قبلا بدست آوریم ولی در اینحالت مجبور نشدیم که از انتگرال جز به جز استفاده کنیم.

مثال 10: تابع پریودیک $f(x)=\begin{cases}t+0.5\pi & -0.5\pi<x<0\\ 0.5\pi-t & 0<x<0.5\pi\end{cases}$ داده شده است. اولا سری فوریه این تابع را بدست آورید. ثانیا با استفاده از بسط سری فوریه این تابع دنباله های زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

حل: تابع زوج با پریود $T=\pi$ است در اینصورت $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2$. در نتیجه به صورت زیر نوشته میشود:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nt$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-0.5\pi}^{0.5\pi}f(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{0.5\pi}f(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{0.5\pi}(0.5\pi-t)dt=\frac{1}{\pi}[-(0.5\pi-t)^2]_0^{0.5\pi}=\frac{\pi}{4}$$

حال از تابع مشتق میگیریم:

$$g(t)=f'(t)=\begin{cases}1 & -0.5\pi<x<0\\ -1 & 0<x<0.5\pi\end{cases}=\sum_{n=1}^{\infty}-2na_n\sin 2nt=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nt\rightarrow$$

$$b_n=-2na_n=\frac{2}{\pi}\int_{-0.5\pi}^{0.5\pi}g(t)\sin 2nt=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{0.5\pi}(-1)\sin 2nt dt=\frac{4}{\pi}[\frac{1}{2n}\cos 2nt]_0^{0.5\pi}=\frac{2}{n\pi}[\cos n\pi-1]\rightarrow$$

$$a_n=\frac{1}{-\pi n^2}[\cos n\pi-1]=\begin{cases}0 & n=even\\ \frac{2}{\pi n^2} & n=odd\end{cases}\rightarrow f(t)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos 2(2n-1)t$$

$$g(t)=f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin 2(2n-1)t \qquad g(\frac{\pi}{4})=-1=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin 2(2n-1)\frac{\pi}{4}$$

$$-1=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}(-1)^{n-1}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{4}$$

$$f(t)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos 2(2n-1)t\rightarrow f(0)=0.5\pi=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

محاسبه توان یک سیگنال پریودیک و قانون پارسوال

توان یک سیگنال پریودیک $f(x)$ با استفاده از بسط فوریه به صورت زیر بدست می آید:

$$P=\frac{1}{T}\int_T f^2(x)dx=\frac{1}{T}\int_T[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega_0x]^2dx=$$

$$\frac{1}{T}\int_T(a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_na_m\cos n\omega_0x\cos m\omega_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_nb_m\sin n\omega_0x\sin m\omega_0x+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_nb_m\cos n\omega_0x\sin m\omega_0x)dx$$

طبق اصل عمود بر هم بودن توابع سینوس و کسینوس انتگرال جمله چهارم روی یک پریود همواره صفر است و انتگرالهای جمله دوم و سوم فقط به ازای $n=m$ غیر صفر است و به ترتیب برابر است با $\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ و $\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ در نتیجه توان سیگنال پریودیک برابر است با:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T a_0^2dt+\frac{1}{T}[\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2]+\frac{1}{T}[\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2]=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$$

عبارت بدست آمده را قانون پارسوال مینامند.

مثال **11**: با استفاده از قانون پارسوال برای مثال **10** حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ را بدست آورید.

حل: برای مثال **10** داشتیم: $a_0=\frac{\pi}{4},\quad a_n=\frac{2}{\pi(2n-1)^2},\ b_n=0$ حال از قضیه پارسوال استفاده میکنیم که خواهیم داشت:

$$p=\frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T}f^2(t)dt=2\times\frac{1}{\pi}\int_0^{0.5\pi}(0.5\pi-t)^2dt=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{3}(0.5\pi-t)^3]_0^{0.5\pi}=\frac{\pi^2}{12}=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\rightarrow$$
$$\frac{\pi^2}{12}=(\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^4}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^4}=2(\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{16})=\frac{\pi^2}{24}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

مثال **12**: با استفاده از بسط سری فوریه $f(x)=x^2$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ بسط سری فوریه $x^3-\pi^2x$ را در فاصله داده شده بدست آورید و با استفاده از بسط تابع $f(x)$ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ را بدست آورید.

حل: تابع زوج است با پریود $T=2\pi$ پس $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$ و بسط سری فوریه به صورت زیر است:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\qquad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3}$$

برای بدست آوردن ضریب فوریه a_n از تابع مشتق میگیریم و بسط فوریه آنرا بدست آورده و سپس از آن انتگرال میگیریم:

$$g(x)=f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin nx\rightarrow2x=\sum_{n=1}b_n\sin nx\rightarrow b_n=-na_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2x\sin nxdx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\rightarrow$$
$$b_n=\frac{4}{\pi}[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx]_0^{\pi}=-\frac{4}{n}\cos n\pi=-\frac{4}{n}(-1)^n=-na_n\rightarrow a_n=\frac{4}{n^2}(-1)^n\rightarrow$$
$$g(x)=f'(x)=\sum_{n=1}-\frac{4}{n}(-1)^n\sin nx\rightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx\rightarrow$$
$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^3=\frac{\pi^2}{3}x+\sum_{n=1}\frac{4}{n^3}(-1)^n\sin nx\rightarrow(x^3-\pi^2x)=3\sum_{n=1}\frac{4}{n^3}(-1)^n\sin nx=\sum_{n=1}\frac{12}{n^3}(-1)^n\sin nx$$

با داشتن بسط فوریه $f(x)=x^2$ در فاصله داده شده و با استفاده از قضیه پارسوال خواهیم داشت:

$$P_f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{\pi^4}{5}=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\rightarrow\frac{\pi^4}{5}=(\frac{\pi^2}{3})^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\rightarrow\frac{4\pi^4}{45}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

تعریف سیگنال توان و سیگنال انرژی

برای یک سیگنال پریودیک توان سیگنال را محاسبه کردیم که یک عدد محدود غیر بینهایت بود اگر سیگنالی دارای توان محدود باشد در این صورت آن سیگنال را سیگنال توان میگویند. بنابراین سیگنالهای پریودیک سیگنالهای توان هستند. اگر سیگنال غیر پریودیک باشد بدین معنی است که پریود آن بینهایت است در اینصورت تعریف توان این سیگنال به صورت زیر است:

$$f(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T} f^{2}(x)dx$$

برای یک سیگنال انرژی به صورت زیر تعریف میشود:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(x)dx$$

اگر انرژی سیگنال محدود باشد آن سیگنال را سیگنال انرژی میگویند. واضح است که انرژی سیگنالهای پریودیک طبق تعریف بالا بینهایت است یعنی سیگنالهای پریودیک سیگنال غیر انرژی است و سیگنال توان است. تمام سیگنالهایی که در حوزه زمان محدود هستند دارای توان صفر و انرژی محدود هستند. مثلا سیگنال $f(x)=\begin{cases}2 & |x|<3\\ 0 & |x|>3\end{cases}$ دارای انرژی محدود و توان صفر میباشد زیرا:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(x)dx=\int_{-3}^{3}2^{2}dx=12 \qquad P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T} f^{2}(x)dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-3}^{3}2^{2}dx=\lim_{T\to\infty}\frac{12}{T}=0$$

بنابراین این سیگنال دارای انرژی محدود و توان صفر است در نتیجه سیگنال $f(x)$ یک سیگنال انرژی است.

مثال **13**: سیگنال $f(x)=e^{-a|x|}$ چه نوع سیگنالی است؟

حل: ابتدا انرژی و توان سیگنال را بدست می آوریم:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(x)dx=\int_{-\infty}^{0}(e^{ax})^{2}dx+\int_{0}^{\infty}(e^{-ax})^{2}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{2ax}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-2ax}dx=[\frac{1}{2a}e^{2ax}]_{-\infty}^{0}+[-\frac{1}{2a}e^{-2ax}]_{0}^{\infty}=$$

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a} \qquad P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T} f^{2}(x)dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(x)dx=\lim_{T\to\infty}\frac{E}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{aT}=0$$

بنابراین سیگنال بالا یک سیگنال انرژی است زیرا توانش صفر و انرژی اش محدود است..

مثال **14**: اگر سری فوریه تابع $f(x)$ برابر با $1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}\sin nx$ باشد حاصل انتگرال زیر را بدست آورید

$$I=\int_{0}^{\pi} f(x)\sin^{3}xdx$$

حل: میدانیم: $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

$$I=\int_0^\pi f(x)\sin^3 xdx=\int_0^\pi[1+\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx](\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x)dx=$$

$$\int_0^\pi(\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x)dx+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx(3\sin x-\sin 3x)dx=$$

$$\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\frac{(-1)^n}{n^2}\sin x\sin nxdx-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\frac{(-1)^n}{n^2}\sin 3x\sin nxdx$$

انتگرال $\int_0^\pi\frac{(-1)^n}{n^2}\sin x\sin nxdx$ فقط به ازای $n=1$ غیر صفر است و انتگرال $\int_0^\pi\frac{(-1)^n}{n^2}\sin 3x\sin nx$ فقط به ازای $n=3$ غیر صفر است بنابراین داریم:

$$I=\int_0^\pi f(x)\sin^3 xdx=\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\int_0^\pi\frac{(-1)^1}{1^2}\sin^2 xdx-\frac{1}{4}\int_0^\pi\frac{(-1)^3}{3^2}\sin^2 3xdx=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{36}(\frac{\pi}{2})=\frac{4}{3}-\frac{13\pi}{36}$$

مثال 15: با استفاده از بسط سری فوریه $f(t)=|\sin t|+|\cos t|$ ثابت کنید: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{16n^2-1}=\frac{4-\pi}{8}$

حل: همانطوریکه قبلا اثبات شد پریود این تابع $T=\frac{\pi}{2}$ در نتیجه $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=4$. از طرف دیگر این تابع زوج است بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos n\omega_0 t=a_0+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos 4nt \qquad a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+\cos t)dt=$$

$$\frac{2}{\pi}[-\cos t+\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi} \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos 4ntdt=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+\sin t)\cos 4ntdt=$$

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos(4n+1)t+\cos(4n-1)t+\sin(4n+1)t-\sin(4n-1)t]dt=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{4n+1}\sin(4n+1)t+\frac{1}{4n-1}\sin(4n-1)t$$

$$-\frac{1}{4n+1}\cos(4n+1)t+\frac{1}{4n-1}\cos(4n-1)t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n-1}]=\frac{-8}{\pi(16n^2-1)}$$

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos n\omega_0 t=\frac{4}{\pi}+\sum_{n=1}^\infty\frac{-8}{\pi(16n^2-1)}\cos n\omega_0 t \qquad f(0)=1=\frac{4}{\pi}+\sum_{n=1}^\infty\frac{-8}{\pi(16n^2-1)}\rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{8}{\pi(16n^2-1)}=\frac{4}{\pi}-1=\frac{4-\pi}{\pi}\rightarrow\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{16n^2-1}=\frac{4-\pi}{8}$$

مثال **16**: با استفاده از قضیه پارسوال برای مثال بالا ثابت کنید $\frac{\pi^2+2\pi-16}{32}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(16n^2-1)^2}$.

حل ابتدا توان سیگنال را بدست می آوریم:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+\cos t)^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2t)dt=1+\frac{2}{\pi}$$

حال با استفاده از قانون پارسوال داریم:

$$P=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\rightarrow 1+\frac{2}{\pi}=(\frac{4}{\pi})^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{-8}{\pi(16n^2-1)}]^2\rightarrow 1+\frac{2}{\pi}=\frac{16}{\pi^2}+\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(16n^2-1)^2}\rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(16n^2-1)^2}=(1+\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^2})\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{2}=\frac{\pi^2+2\pi-16}{32}$$

مثال **17**: -تابع پریودیک $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x\le-\frac{\pi}{2}\\ 1 & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ مفروض است. با محاسبه سری فوریه این تابع ثابت کنید:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{4}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{16}$

حل: : پریود تابع 2π و $1=\frac{2\pi}{T}=\omega_0$ میباشد با توجه به اینکه تابع زوج است سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1)\cos nx dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-.....)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\cos(2n-1)x$$

برای حالت الف کافیست $x=0$ قرار دهیم با توجه به اینکه $f(0)=1$ داریم:

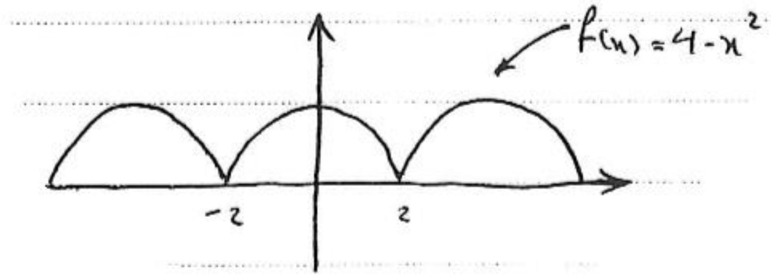
$$f(0)=1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{4}$$

برای حالت ب از قانون پارسوال استفاده میکنیم. توان سیگنال برابر است با:

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1^2\,dx=\frac{1}{2}=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{2}{\pi})^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

مثال 18: با بسط سری فوریه تابع زیر ثابت کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$



حل: تابع زوج است و پریود آن $T=4$ در نتیجه $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$. حال بسط سری فوریه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\frac{\pi}{2}x$$

ضریب a_0 برابر است با:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(4-x^2)dx=\frac{8}{3}$$

برای محاسبه ضرایب a_n از روش مشتق استفاده میکنیم:

$$g(x)=f'(x)=-2x=\sum_{n=1}^{\infty}(-n\frac{\pi}{2}a_n)\sin n\frac{\pi}{2}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\frac{\pi}{2}x\rightarrow b_n=-n\frac{\pi}{2}a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g(x)\sin n\frac{\pi}{2}xdx\rightarrow$$

$$-n\frac{\pi}{2}a_n=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}g(x)\sin n\frac{\pi}{2}xdx=\int_{0}^{2}-2x\sin n\frac{\pi}{2}xdx\rightarrow-n\frac{\pi}{2}a_n=-2[x\times(-\frac{2}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2}x)_0^2+\int_0^2\frac{2}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2}xdx]\rightarrow$$

$$n\frac{\pi}{2}a_n=2[(-\frac{4}{n\pi})\cos n\pi]\rightarrow n\frac{\pi}{2}a_n=\frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi}\rightarrow a_n=\frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\rightarrow f(x)=\frac{8}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

$$f(0)=4=\frac{8}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}=\frac{4}{3}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

مثال 19: تابع پریود به صورت $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \sin x & 0<x<\pi\end{cases}$ داده شده است. با بسط سری فوریه این تابع ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

حل: پریود تابع $T=2\pi$ میباشد در نتیجه $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$. تابع نه زوج است و نه فرد بنابراین بسط سری فوریه به صورت زیر است:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin xdx=\frac{1}{\pi}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin nxdx=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}\to b_1=\frac{1}{2}\quad b_n=0\ \ (n>1)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx\to$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi}[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x]_0^{\pi}=\begin{cases}0 & n=odd\\ \frac{-2}{\pi(n^2-1)} & n=even\end{cases}\to a_n=\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\to$$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\frac{1}{\pi}+b_1\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\cos nx=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\cos nx$$

$$f(0)=0=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(4n^2-1)}=\frac{1}{\pi}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

بسط سری فوریه مختلط

قانون اویلر بیان میدارد که $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ که $j=\sqrt{-1}$ در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta\\ e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta\end{cases}\to\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})\qquad\sin\theta=\frac{1}{2j}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})$$

حال به جای سینوس و کسینوس در سری فوریه روابط بالا را قرار میدهیم:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0x+b_n\sin n\omega_0x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{2}(e^{jn\omega_0x}+e^{-jn\omega_0x})+b_n\frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0x}-e^{-jn\omega_0x})=$$

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n-jb_n}{2})e^{jn\omega_0x}+(\frac{a_n+jb_n}{2})e^{-jn\omega_0x}\to f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n-jb_n}{2})e^{jn\omega_0x}+(\frac{a_n+jb_n}{2})e^{-jn\omega_0x}$$

حال با توجه به رابطه $a_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos n\omega_0xdx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\sin n\omega_0xdx$ میتوانیم بنویسیم:

$$a_{-n}=a_n \qquad b_{-n}=-b_n$$

در نتیجه اگر $C_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$ باشد در اینصورت در نتیجه $C_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$. حال رابطه بالا را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n-jb_n}{2})e^{jn\omega_0 x}+(\frac{a_n+jb_n}{2})e^{-jn\omega_0 x}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 x}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}e^{-jn\omega_0 x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 x} \qquad C_0=a_0$$

رابطه $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 x}$ را بسط سری فوریه مختلط تابع میگویند. حال داریم:

$$C_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{2}(\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos n\omega_0 x dx-j\frac{2}{T}\int_T f(x)\sin n\omega_0 x dx)=\frac{1}{T}\int_T f(x)(\cos n\omega_0 x-j\sin n\omega_0 x)dx=$$
$$\frac{1}{T}\int_T f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx \to C_n=\frac{1}{T}\int_T f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx$$

بنابراین میتوان بسط سری فوریه و ضرایب سری فوریه مختلط را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 x} \qquad C_n=\frac{1}{T}\int_T f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx$$

همانطوریکه ملاحظه میشود $C_n=\frac{1}{T}\int_T f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx \to C_0=\frac{1}{T}\int_T f(x)dx=a_0$.

مثال **20**: با بدست آوردن بسط سری فوریه مختلط تابع $f(x)=e^x,\ -\pi<x<\pi$ حاصل عبارت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$ را بدست آورید.

حل: با توجه به اطلاعات داده شده پریود تابع $T=2\pi$ و $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$ میباشد. ضریب سری فوریه مختلط برابر است با:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x e^{-jnx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-jn)x}dx=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{1-jn}e^{(1-jn)x}]_{-\pi}^{\pi}=$$
$$\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{1-jn}(e^{(1-jn)\pi}-e^{-(1-jn)\pi}]=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{1-jn}((-1)^n e^{\pi}-(-1)^n e^{-\pi}]=\frac{(-1)^n}{2\pi(1-jn)}2\sinh\pi=$$
$$\frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1-jn)}\to f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1-jn)}e^{jn\omega_0 x}$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$C_n=\frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1-jn)}=\frac{(-1)^n\sinh\pi(1+jn)}{\pi(1+n^2)}=\frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1+n^2)}+j\frac{n(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1+n^2)}=\frac{a_n-jb_n}{2}\to$$

$$a_n = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \qquad b_n = -\frac{2(-1)^n n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \qquad a_0 = C_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi} \to f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x$$

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \cos nx - \frac{2(-1)^n n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \sin nx \qquad f(0) = 1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \to$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} = 1 - \frac{\sinh \pi}{\pi} = \frac{\pi - \sinh \pi}{\pi} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} = \frac{\sinh \pi - \pi}{\pi} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1} = \frac{\sinh \pi - \pi}{2\sinh \pi}$$

مثال 21: برای تابع داده شده زیر ضرایب مختلط سری فوریه را بدست آورید.

$$f(x) = 1 + 2\cos 2t + 3\sin 4t + 5\sin 6t + 4\cos 8t$$

حل: ابتدا پریود تابع را بدست می آوریم. برای اینکار پریود هر کدام از جملات را بدست می آوریم و سپس کوچکترین مضرب مشترک پریودها را بدست می آوریم که همان پریود تابع داده شده میباشد.

$$\cos 2t \to T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \qquad \sin 4t \to T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \sin 6t \to T_3 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \qquad \cos 8t \to T_4 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

بنابراین کوچکترین مضرب مشترک پریودهای بدست آمده $T = \pi$ میباشد. بنابراین پریود تابع داده شده π است در نتیجه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$. حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(x) = 1 + 2\cos 2t + 3\sin 4t + 5\sin 6t + 4\cos 8t = 1 + 2\cos \omega_0 t + 3\sin 2\omega_0 t + 5\sin 3\omega_0 t + 4\cos 4\omega_0 t \to$$

$$f(x) = 1 + 2\cos \omega_0 t + 3\sin 2\omega_0 t + 5\sin 3\omega_0 t + 4\cos 4\omega_0 t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \to$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad b_2 = 3 \quad b_3 = 5 \quad a_4 = 4 \quad b_n = 0 \quad (n = 1, n \ge 4) \quad a_n = 0 \quad (n = 2, 3,\ n \ge 5)$$

حال با داشتن ضرایب سینوسی و کسینوسی سری فوریه، ضرایب مختلط سری فوریه را بدست می آوریم:

$$C_0 = a_0 = 1 \qquad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \to C_1 = \frac{a_1 - jb_1}{2} = \frac{2 - j0}{2} = 1 \qquad C_2 = \frac{a_2 - jb_2}{2} = \frac{0 - j3}{2} = -j\frac{3}{2}$$

$$C_3 = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{a_3 - jb_3}{2} = \frac{0 - j5}{2} = -j\frac{5}{2} \qquad C_4 = \frac{a_4 - jb_4}{2} = \frac{4 - j0}{2} = 2$$

$$C_{-1} = C_1^* = 1 \qquad C_{-2} = C_2^* = j\frac{3}{2} \qquad C_{-3} = C_3^* = j\frac{5}{2} \qquad C_{-4} = C_4^* = 2 \qquad C_n(n \ge 5) = 0 \quad C_n^*(n \ge 5) = 0$$

مثال 22: برای تابع داده شده زیر ضرایب مختلط سری فوریه را بدست آورید.

$$f(x) = 2 + 4\cos\frac{1}{5}t + 6\sin\frac{1}{7}t + 5\sin\frac{3}{7}t + 4\cos\frac{4}{5}t + 6\cos\frac{3}{10}t$$

حل: ابتدا پریود تابع را بدست می آوریم. برای اینکار پریود هر کدام از جملات را بدست می آوریم و سپس کوچکترین مضرب مشترک پریودها را بدست می آوریم که همان پریود تابع داده شده میباشد.

$$\cos\frac{1}{5}t \to T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi \qquad \sin\frac{1}{7}t \to T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{7}} = 14\pi \qquad \sin\frac{3}{7}t \to T_3 = \frac{2\pi}{\frac{3}{7}} = \frac{14\pi}{3}$$

$$\cos\frac{4}{5}t \to T_4 = \frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{2} \qquad \cos\frac{3}{10}t \to T_5 = \frac{2\pi}{\frac{3}{10}} = \frac{20\pi}{3}$$

بنابراین کوچکترین مضرب مشترک پریودهای بدست آمده $T = 140\pi$ میباشد. بنابراین پریود تابع داده شده 140π است در نتیجه $\omega_0 = \frac{2\pi}{140\pi} = \frac{1}{70}$. حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(x) = 2 + 4\cos\frac{1}{5}t + 6\sin\frac{1}{7}t + 5\sin\frac{3}{7}t + 4\cos\frac{4}{5}t + 6\cos\frac{3}{10}t = 2 + 4\cos 14\omega_0 t + 6\sin 10\omega_0 t + 5\sin 30\omega_0 t +$$

$$4\cos 56\omega_0 t + 6\cos 21\omega_0 t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 \to a_0 = 2 \qquad b_{10} = 6 \qquad a_{14} = 4 \qquad a_{21} = 6 \qquad b_{30} = 6$$

$$a_{56} = 4 \qquad C_0 = a_0 = 2 \qquad C_{10} = \frac{a_{10} - jb_{10}}{2} = \frac{0 - j10}{2} = -j5 \qquad C_{14} = \frac{a_{14} - jb_{14}}{2} = \frac{4 - j0}{2} = 2$$

$$C_{21} = \frac{a_{21} - jb_{21}}{2} = \frac{6 - j0}{2} = 3 \qquad C_{30} = \frac{a_{30} - jb_{30}}{2} = \frac{0 - j6}{2} = -j3 \qquad C_{56} = \frac{a_{56} - jb_{56}}{2} = \frac{4 - j0}{2} = 2$$

$$C_{-10} = C_{10}^* = j5 \qquad C_{-14} = C_{14}^* = 2 \qquad C_{-21} = C_{21}^* = 3 \qquad C_{-30} = C_{30}^* = j3 \qquad C_{-56} = C_{56}^* = 2$$

مثال **23**: اگر $x(t) = 1 + 2\sin 3\omega_0 t + 3\cos 4\omega_0 t$ باشد در اینصورت ضرایب سری فوریه مختلط توابع زیر را بدست آورید:

$$y(t) = x^2(t) \qquad z(t) = x(t)\cos 5\omega_0 t$$

حل: برای تابع اول داریم:

$$y(t) = x^2(t) = [1 + 2\sin 3\omega_0 t + 3\cos 4\omega_0 t]^2 = 1 + 4\sin^2 3\omega_0 t + 9\cos^2 4\omega_0 t + 4\sin 3\omega_0 t + 6\cos 4\omega_0 t +$$

$$12\sin 3\omega_0 t\cos 4\omega_0 t = 1 + 4\frac{1 - \cos 6\omega_0 t}{2} + 9\frac{1 + \cos 8\omega_0 t}{2} + 4\sin 3\omega_0 t + 6\cos 4\omega_0 t + 6\sin 7\omega_0 t - 6\sin \omega_0 t$$

$$7.5 - 6\sin \omega_0 t + 4\sin 3\omega_0 t + 6\cos 4\omega_0 t - 2\cos 6\omega_0 t + 6\sin 7\omega_0 t + 4.5\cos 8\omega_0 t \to$$

$$a_0 = 7.5 \qquad b_1 = -6 \qquad b_3 = 4 \qquad a_4 = 6 \qquad a_6 = -2 \qquad b_7 = 6 \qquad a_8 = 4.5 \quad \to C_0 = a_0 = 7.5$$

$$C_1 = \frac{a_1 - jb_1}{2} = \frac{0 + j6}{2} = j3 \qquad C_3 = \frac{a_3 - jb_3}{2} = \frac{0 - j4}{2} = -j2 \qquad C_4 = \frac{a_4 - jb_4}{2} = \frac{6 - j0}{2} = 3$$

$$C_6 = \frac{a_6 - jb_6}{2} = \frac{-2 - j0}{2} = -1 \qquad C_7 = \frac{a_7 - jb_7}{2} = \frac{0 - j7}{2} = -j3.5 \qquad C_8 = \frac{a_8 - jb_8}{2} = \frac{4.5 - j0}{2} = 2.25$$

$$C_{-1} = C_1^* = -j3 \qquad C_{-3} = C_3^* = j2 \qquad C_{-4} = C_4^* = 3 \qquad C_{-6} = C_6^* = -1 \qquad C_{-7} = C_7^* = j3.5 \qquad C_{-8} = C_8^* = 2.25$$

برای تابع دوم داریم:

$z(t)=x(t)\cos 5\omega_0 t=[1+2\sin 3\omega_0 t+3\cos 4\omega_0 t]\cos 5\omega_0 t=\cos 5\omega_0 t+\sin 8\omega_0 t-\sin 2\omega_0 t+1.5\cos 9\omega_0 t+$
$1.5\cos\omega_0 t\rightarrow z(t)=1.5\cos\omega_0 t-\sin 2\omega_0 t+\cos 5\omega_0 t+\sin 8\omega_0 t+1.5\cos 9\omega_0 t\rightarrow a_0=0 \quad a_1=1.5$

$b_2=-1 \quad a_5=1 \quad b_8=1 \quad a_9=1.5 \quad C_0=a_0=0 \quad C_1=\frac{a_1-jb_1}{2}=\frac{1.5-j0}{2}=0.75$

$C_2=\frac{a_2-jb_2}{2}=\frac{0+j1}{2}=j0.5 \quad C_5=\frac{a_5-jb_5}{2}=\frac{1-j0}{2}=0.5 \quad C_8=\frac{a_8-jb_8}{2}=\frac{0-j1}{2}=-j.5$

$C_9=\frac{a_9-jb_9}{2}=\frac{1.5-j0}{2}=0.75 \quad C_{-1}=C_1^*=0.75 \quad C_{-2}=C_2^*=-j0.5 \quad C_{-5}=C_5^*=0.5 \quad C_{-8}=C_8^*=j0.5$

$C_{-9}=C_9^*=0.75$

توان یک تابع بر حسب ضرایب مختلط فوریه (قضیه پارسوال)

توان یک سیگنال پریودیک را به صورت زیر مینویسیم:

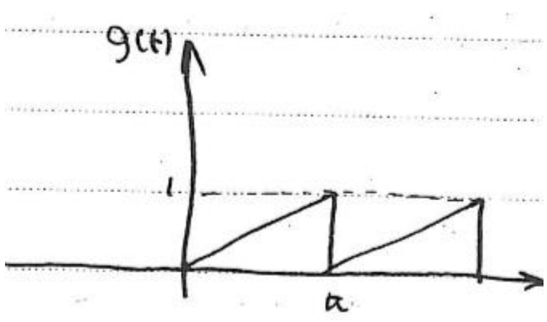
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T|f(x)|^2dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)f^*(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)[\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{jn\omega_0x}]^*dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jn\omega_0x}dx]C_n^*=$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[C_n]C_n^*=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2=C_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2$$

میدانیم $C_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$ در نتیجه $|C_n|^2=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ در نتیجه داریم:

$$P=C_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2=a_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2)=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$$

که این همان رابطه ای است که قبلا بدست آوردیم.

مثال 24:با استفاده از قانون پارسوال برای تابع زیر ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$



حل: برای این تابع داریم: $T=\pi\rightarrow\omega_0=\frac{2\pi}{\pi}=2$ **در نتیجه ضرایب مختلط سری**

فوریه برابر است با:

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^{T\pi}g(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}dt=\frac{1}{2} \quad C_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-jn\omega_0t}dt=$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}e^{-j2nt}dt=\frac{1}{2jn\pi}$$

حال از قانون پارسوال استفاده میکنیم:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T g^2(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\frac{t}{\pi})^2 dt=\frac{1}{3}=C_0^2+2\sum_{n=1}^\infty |C_n|^2 \rightarrow \frac{1}{3}=(\frac{1}{2})^2+2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4\pi^2 n^2} \rightarrow \frac{1}{12}=\frac{1}{2\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \rightarrow$$
$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

توابع متعامد

اگر دو تابع f و g متعامد باشند در اینصورت $<f,g>=\int_T f.gdx=0$ حال مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$S=\{1,\cos x,\cos 2x,.........\cos nx,\sin x,\sin 2x,\sin 3x,........\sin nx\}=\{q_n,p_{n'}\},\ \ n=0,1,2,........\infty,\ n'=1,2,....\infty$$

توابعی که در مجموع زیر داده شده **2** به **2** برهم عمود هستند مثلا جمله اول و دوم بر هم عمودند زیرا

$$<1,\cos x>=\int_0^{2\pi} 1\times \cos xdx=0$$

حالا تابع پریودیک $f(x)$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$f(x)=\sum_{m=0}^\infty a_m q_m(x)+b_m p_m(x) \qquad <f(x),q_n(x)>=<\sum_{m=0}^\infty a_m q_m(x),q_n(x)>=$$
$$\sum_{m=0}^\infty a_m<q_m(x),q_n(x)>+b_m<p_m(x),q_n(x)>$$

لازم به ذکر است که در عبارت بالا $<p_m(x),q_n(x)>$ به ازای تمام مقادیر m و n صفر میباشند حتی برای $m=n$. از طرفی چون $q_n(x)$ ها دو بدو بر هم عمودند پس $<q_m(x),q_n(x)>=0$ مگر $m=n$ در نتیجه فقط جمله n ام $\sum_{m=0}^\infty a_m<q_m(x),q_n(x)>$ غیر صفر است. بعبارت دیگر $\sum_{m=0}^\infty a_m<q_m(x),q_n(x)>=a_n<q_n(x),q_n(x)>$ در نتیجه داریم:

$$<f(x),q_n(x)>=\sum_{m=0}^\infty a_m<q_m(x),q_n(x)>=a_n<q_n(x),q_n(x)>\rightarrow a_n=\frac{<f(x),q_n(x)>}{<q_n(x),q_n(x)>}\rightarrow$$

$$a_0=\frac{<f(x),q_0(x)>}{<q_0(x),q_0(x)>}=\frac{<f(x),1>}{<1,1>}=\frac{\int_0^{2\pi} f(x)dx}{\int_0^{2\pi} 1dx}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \qquad a_n=\frac{<f(x),q_n(x)>}{<q_n(x),q_n(x)>}=$$

$$\frac{<f(x),\cos nx>}{<\cos nx,\cos nx>}=\frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx}{\int_0^{2\pi}\cos nx.\cos nxdx}=\frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx}{\int_0^{2\pi}\cos^2 nxdx}=\frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx$$

به همان روشی که برای محاسبه a_n در بالا به کار بردیم ضرایب b_n به صورت زیر محاسبه میشوند.

$$b_n = \frac{< f(x), p_n(x) >}{< q_n(x), p_n(x) >} = \frac{< f(x), \sin nx >}{< \sin nx, \sin nx >} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx}{\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

این همان ضرایبی است که قبلا در ابتدای این درس برای $T = 2\pi$ بدست آوردیم.

موفق باشید

محمود محمدطاهری-بهمن 1400