Matlab CA2

Mohammad Taha Majlesi

810101504

دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پروژه دوم درس ریاضیات مهندسی

مقدمه

در درس ریاضیات مهندسی با معادلات PDE آشنا شدید، این دسته از معادلات در بسیاری از زمینه‌های مهندسی اهمیت ویژه‌ای دارند. در این تمرین کامپیوتری هدف ما بررسی و حل برخی از معادلات PDE معروف می‌باشد.

این تمرین در دو بخش طراحی شده است.

- حل معادله حرارت

در این قسمت به حل معادله حرارت در یک میله محدود می‌پردازیم، سپس با Plot کردن آن توزیع حرارت در طول میله را مشاهده کنیم.

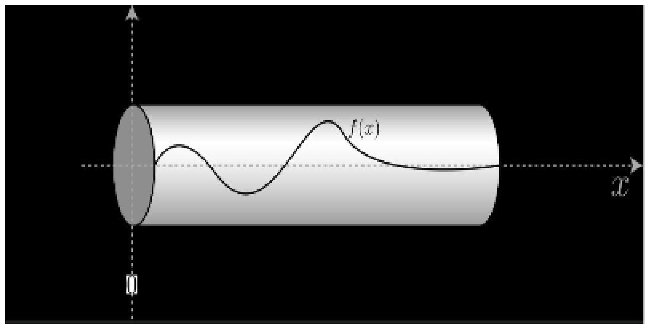
- حل معادله هلمهولتز

در این قسمت به تحلیل معادله هلمهولتز می‌پردازیم که یکی از معادلات بنیادی در بررسی میدان‌ها و امواج است.

Part 1 :

۱ حل معادله حرارت

در این قسمت می‌خواهیم معادله حرارت را برای میله‌ای به طول 2 متر حل کنیم، دمای ابتدای میله صفر درجه سانتی‌گراد و دمای انتهای آن، 50 درجه سانتی‌گراد است.



شکل ۱: Finite Length Pole

معادله به همراه شرایط مرزی آن به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(2,t) = 50 \\ u(x,0) = 2e^x \end{cases} \quad , \quad \frac{1}{c^2} = 50$$

حال گام به گام به بررسی مراحل حل می‌پردازیم.

۱.۱ فرم کلی معادله در MATLAB

در نرم افزار MATLAB فرم کلی معادله به صورت زیر بیان می‌گرد.

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial d}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

هدف ما تعیین ضرایب فوق به گونه‌ای می‌باشد که معادله حرارت حاصل شود.

راهنمایی:

برای رسیدن به $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ مقدار f را برابر $\frac{\partial u}{\partial x}$ قرار دهید.

براي مشخص كردن فرم كلي يک تابع در MATLAB به شكل زير عمل می‌کنیم.

```
function [c,f,s]=Equation(x,t,u,DuDx)
c= ? ;
f= ? ;
s= ? ;
end
```

۲.۱ شرایط اولیه

برای مشخص کردن شرایط اولیه به صورت زیر عمل می‌کنیم.

```
function value =Init(x)
value = 2*exp(x);
end
```

۳.۱ شرایط مرزی

فرم کلی شرایط مرزی در MATLAB به صورت زیر می باشد.

$$p(x,t,u) + q(x,t)f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

برای مشخص کردن ضرایب به صورت زیر عمل می‌کنیم.

```
function [pl,ql,pr,qr]=BC(xl,ul,xr,ur,t)
pl= ? ;
ql= ? ;
pr= ? ;
qr= ? ;
end
```

- p_l, q_l ضرایب مربوط به شرایط مرزی در $x = x_l$
- p_r, q_r ضرایب مربوط به شرایط مرزی در $x = x_r$
- u_l ضرایب مربوط به دما در $x = x_l$
- u_r ضرایب مربوط به دما در $x = x_r$

ضریب $p(x,t,u)$ در MATLAB به صورت زیر است.

$$p(x,t,u) = u_l - 45, \quad p_l = u_l, \quad p_r = u_r - 35$$

۴.۱ حل معادله

در نهایت برای حل معادله از دستور pdepe() استفاده می‌کنیم.

تذکر

برای حل معادله دقت کنید که باید $0 \leq x \leq 1$ به 200 قسمت شکسته شده و همچنین $0 \leq t \leq 10$ به 201 قسمت شکسته شود.

۵.۱ خواسته‌ها

- توابع معرفی شده برای معادله، شرایط مرزی و شرایط اولیه را پیاده‌سازی کنید و در گزارش‌کار خود شرح دهید.
- معادله را به کمک دستور معرفی شده حل کنید. پس از حل معادله به نمایش دمای میله در زمان‌های $t = 0, 5, 10$ در یک نمودار بپردازید و تحلیل خود را ارائه دهید.
- به کمک دستورات imagesc(),colormap() به صورت دوبعدی نمودار تغییرات دمایی را در طول مکان و زمان مشاهده کنید و تحلیل خود را ارائه کنید.
- ابتدا x و t را به ترتیب به 100 و 101 قسمت تقسیم کرده سپس خواسته قبل را تکرار کنید.
- نمودار سه بعدی دما بر حسب زمان و مکان را به کمک دستور surf(sol) ترسیم کرده و نتیجه را در گزارش‌کار خود ارائه دهید.(به ازای هر دو حالت ذکر شده برای x, t)

۵.۱ خواسته‌ها

- توابع معرفی شده برای معادله، شرایط مرزی و شرایط اولیه را پیاده‌سازی کنید و در گزارش‌کار خود شرح دهید.

- معادله را به کمک دستور معرفی شده حل کنید. پس از حل معادله به نمایش دمای میله در زمان‌های $t = 0, 5, 10$ در یک نمودار بپردازید و تحلیل خود را ارائه دهید.

this part is for plt for t=0 t=5 and t= 10

```
    u0 = sol(1,:, :);
    u5 = sol(101,:, :);
    u10 = sol(end,:, :);

    figure;
    plot(x, u0, 'b', x, u5, 'r', x, u10, 'g');
    legend('t=0', 't=5', 't=10');
    xlabel('x');
    ylabel('u(x,t)');
    title('Temperature Distribution in the Rod');
```

$$\text{ic } u(x,0) = 2e^x$$

```
function u0 = Init(x)
    u0 = 2 * exp(x);
end
```

define bc

$$u(0,t) = 0$$

$$u(2,t) = 50$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} = 50 \Rightarrow c = 50$$

$$f = \frac{\partial u}{\partial x}$$

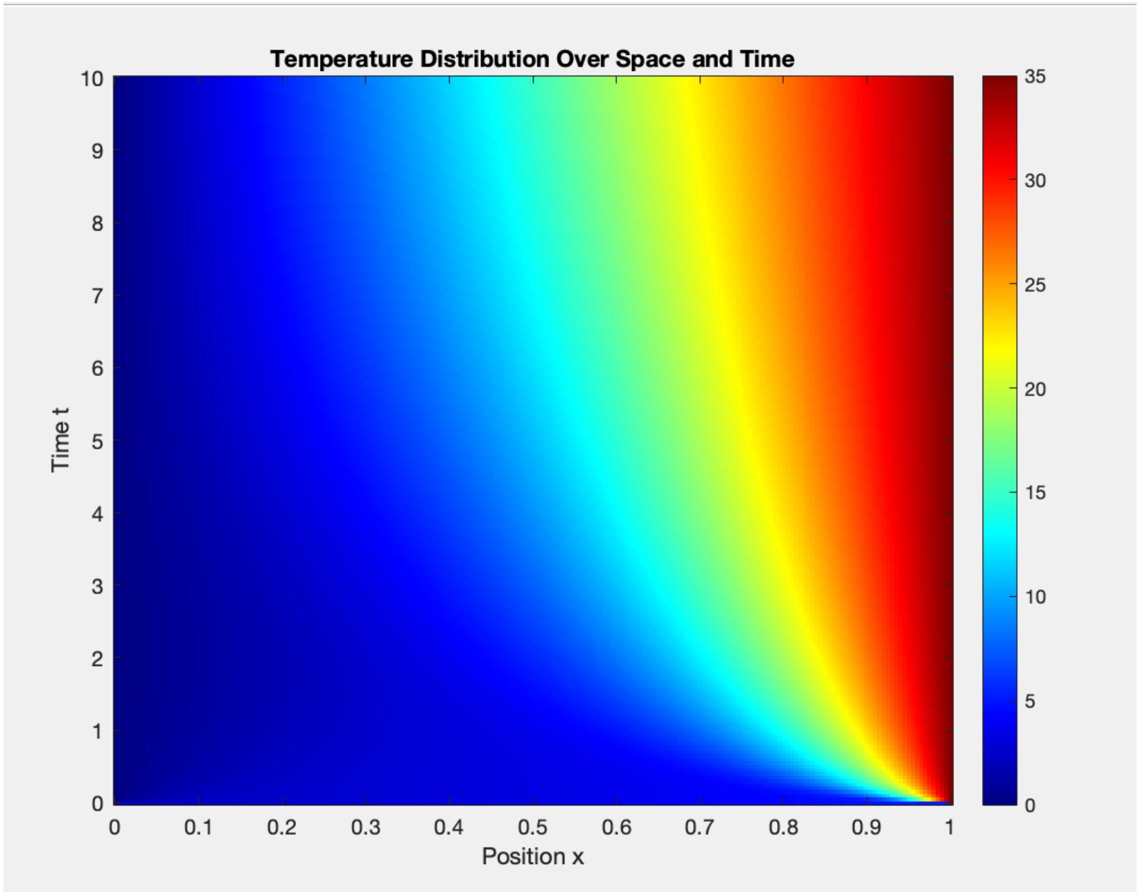
$$s = 0$$

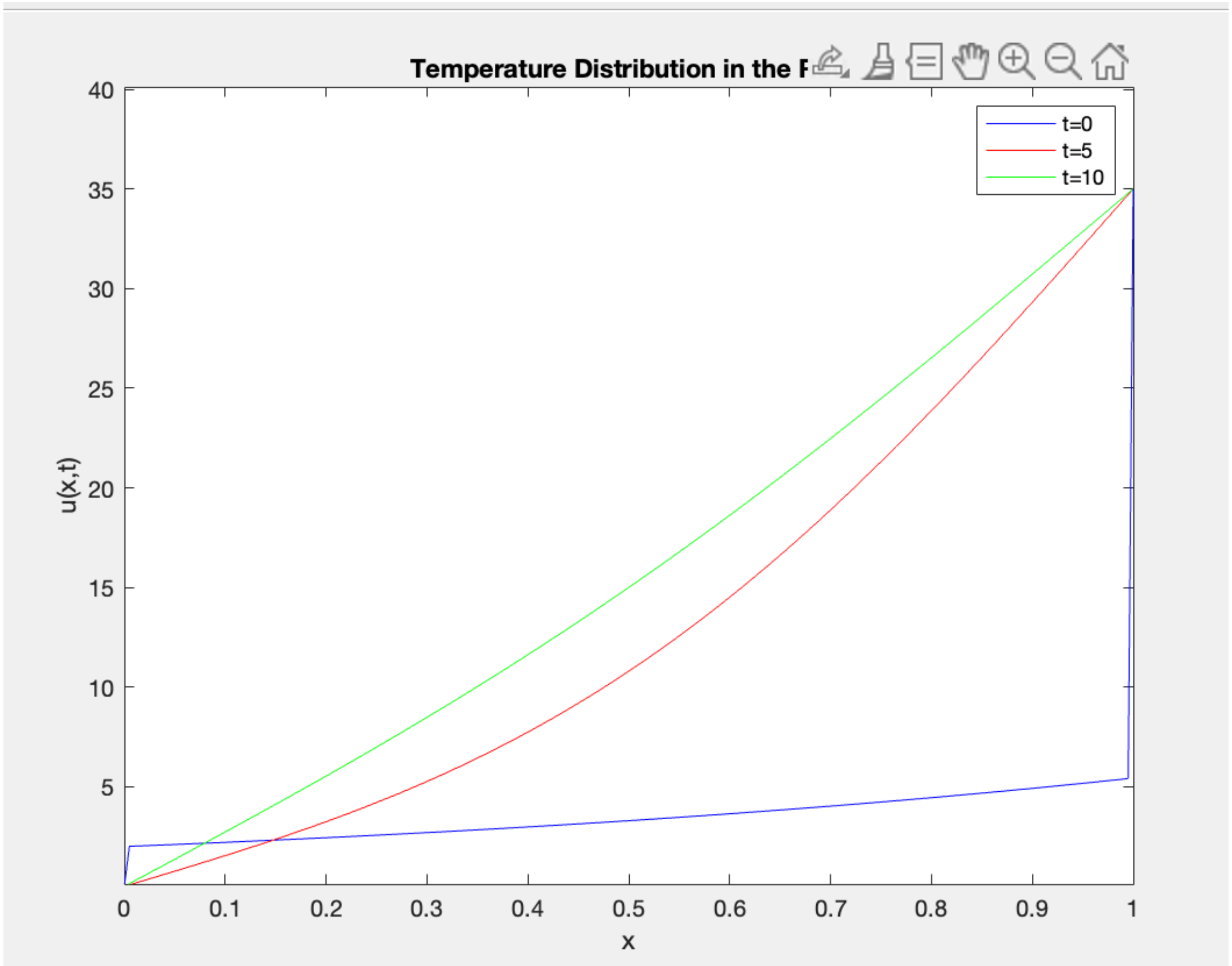
```
function [c, f, s] = Equation(x, t, u, dudx)
    c = 50;
    f = dudx;
    s = 0;
end
```

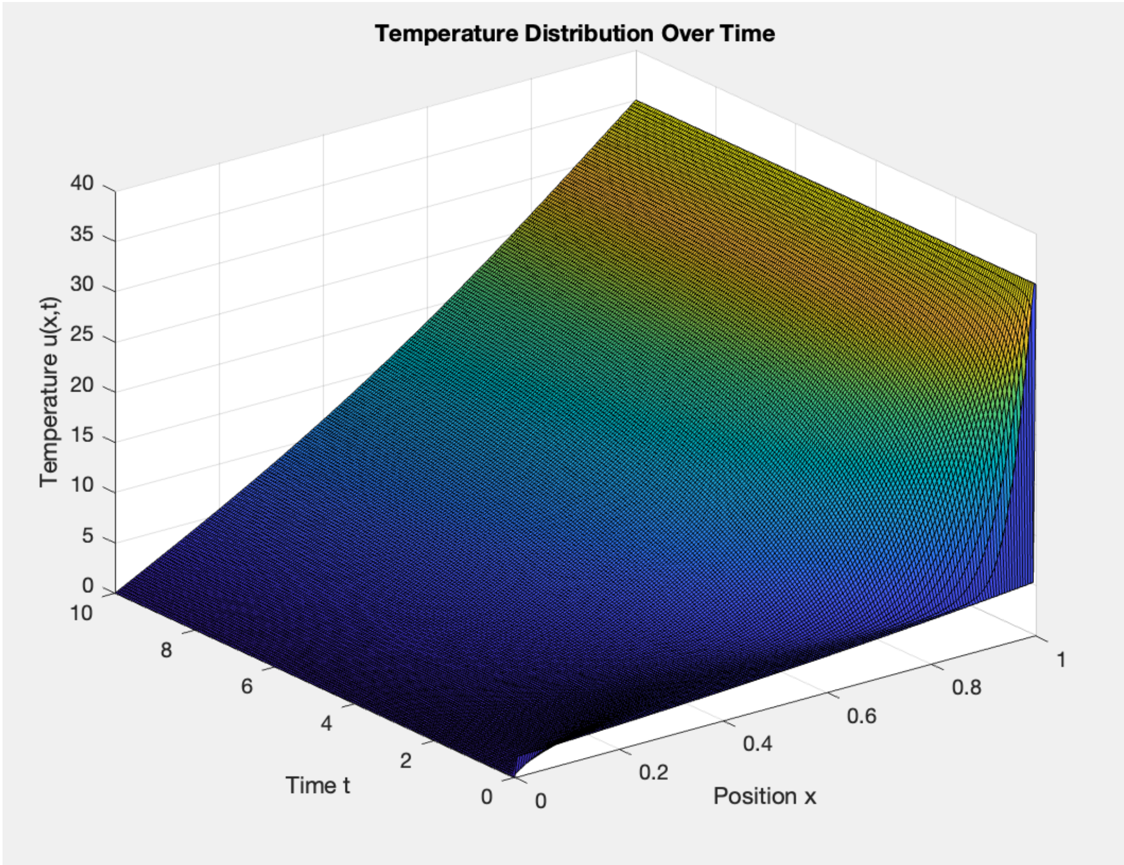
کد های قسمت های مختلف :

```
function heat_equation_solution
    m = 0;

    x = linspace(0, 1, 201);
    t = linspace(0, 10, 201);

    sol = pdepe(m, @Equation, @Init, @bc, x, t);

    u0 = sol(1,:, :);
    u5 = sol(101,:, :);
    u10 = sol(end,:, :);

    figure;
    plot(x, u0, 'b', x, u5, 'r', x, u10, 'g');
    legend('t=0', 't=5', 't=10');
    xlabel('x');
    ylabel('u(x,t)');
    title('Temperature Distribution in the Rod');

    figure;
    surf(x, t, sol);
    xlabel('Position x');
    ylabel('Time t');
```

```
    zlabel('Temperature u(x,t)');
    title('Temperature Distribution Over Time');

    figure;
    imagesc(x, t, sol);
    set(gca, 'YDir', 'normal');
    colormap(jet);
    colorbar;
    xlabel('Position x');
    ylabel('Time t');
    title('Temperature Distribution Over Space and Time');
end

function [c, f, s] = Equation(x, t, u, dudx)
    c = 50;
    f = dudx;
    s = 0;
end

function u0 = Init(x)
    u0 = 2 * exp(x);
end

function [pl, ql, pr, qr] = bc(xl, ul, xr, ur, t)
    pl = ul;
    ql = 0;
    pr = ur - 35;
    qr = 0;
end
```


Temperature Distribution Over Space and Time
Time t
Position x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
35
30
25
20
15
10
5
0


Temperature Distribution in the R
t=0
t=5
t=10
u(x,t)
x
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



Second Part :

استخراج معادله هلمهولتز از معادله موج

معادله هلمهولتز یک فرم خاص از معادله موج است که در شرایط خاصی به دست می‌آید. برای استخراج معادله هلمهولتز، ابتدا معادله موج را در نظر می‌گیریم:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$

در این معادله:

- u تابع موج است که وابسته به مکان و زمان است.
- c سرعت موج است.
- ∇^2 لاپلاس که در فضای سه‌بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

تابع موج اگر به صورت زیر باشد داریم :

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

با قرار دادن این تابع در معادله موج، به معادله هلمهولتز می‌رسیم. ابتدا مشتقات زمانی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[A(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right] = A(\mathbf{r})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[e^{i\omega t}\right] = A(\mathbf{r})\left(i\omega\right)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 A(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 A(\mathbf{r})e^{i\omega t} = c^2 \nabla^2 \left[A(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right]$$

$$-\omega^2 A(\mathbf{r})e^{i\omega t} = c^2 \nabla^2 A(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} A(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0$$

که در آن:

- $k = \frac{\omega}{c}$ عدد موج است.

روش حل و شرایط مرزی معادله هلمهولتز

روش‌های حل:

1. **روش جداسازی متغیرها**:
   - این روش برای حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تجزیه تابع به حاصل‌ضرب توابع تک‌متغیره به کار می‌رود. برای مثال:

     $$A(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

   - با استفاده از این روش می‌توان معادله هلمهولتز را به چند معادله دیفرانسیل عادی (ODE) تفکیک کرد و سپس هر یک از این معادلات را جداگانه حل کرد.
2. **روش تبدیل فوریه**:
   - تبدیل فوریه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) در حوزه فرکانسی به کار می‌رود. با استفاده از تبدیل فوریه، معادله هلمهولتز به معادله‌ای در حوزه فرکانسی تبدیل می‌شود که حل آن ساده‌تر است.
3. **روش سری‌های فوریه**:
   - در این روش، تابع موج به صورت یک سری فوریه گسترش می‌یابد و با استفاده از شرایط مرزی، ضرایب سری مشخص می‌شوند.

شرایط مرزی:

معادله هلمهولتز می‌تواند تحت شرایط مرزی مختلفی حل شود. برخی از این شرایط مرزی عبارتند از:

1. **شرایط دیریکله**
   - در این شرایط، مقدار تابع در مرزها مشخص است.

   $$A(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad \text{on the boundary}$$

2. **شرایط نئومان**
   - در این شرایط، مشتق تابع در مرزها مشخص است.

   $$\frac{\partial A}{\partial n} = g(\mathbf{r}) \quad \text{on the boundary}$$

   - که در آن \(\frac{\partial}{\partial n} \) مشتق در جهت نرمال به مرز است.

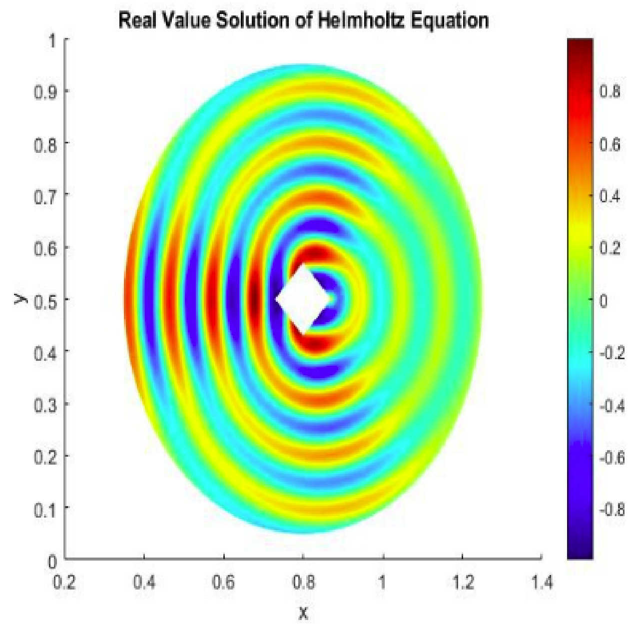
3. **شرایط ترکیبی**
   - در این شرایط، ترکیبی از مقدار تابع و مشتق آن در مرزها مشخص است.

   $$aA + b\frac{\partial A}{\partial n} = h(\mathbf{r}) \quad \text{on the boundary}$$

۲ حل معادله هلمهلتز

در این قسمت می‌خواهیم معادله هلمهلتز را حل و بررسی کنیم. فرم کلی معادله به صورت زیر است.

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0, \quad k : Wave\ number, \quad A : Amplitude$$



شکل ۲: Solved Helmholtz Equation

امتیازی: معادله هلمهولتز را با استفاده از معادله موج استخراج کنید و در مورد روش جل و شرایط مرزی آن تحقیق کنید.

در ادامه می‌خواهیم معادله هلمهولتز را در محیط PDE Modeler حل کنیم.

۱.۲ مراحل حل معادله

- ابتدا PDE Modeler را با نوشتن عبارت pdeModeler در CMD نرم‌افزار MATLAB باز کنید.
- محدوده محورهای x و y را به ترتیب [0.1 1.5] و [0 1] در نظر بگیرید. برای انجام این کار به قسمت Options-Axes limits مراجعه فرمایید.
- یک دایره به شعاع 0.45 و مرکز (0.8 0.5) رسم کنید.
- مود کاری را با مراجعه به بخش Application mode به Generic Scalar تنظیم کنید.
- شرایط مرزی را با مراجعه به قسمت Boundary-Specify Boundary Conditions مشخص کنید. دقت شود که شرایط مرزی از شرط Neumann با $q = -60i$ و $g = 0$ استفاده کنید.
- با مراجعه به بخش Mesh-Initialize Mesh شرایط اولیه مش را تعیین کنید.
- حال معادله را حل کنید.
- شکل موج را رسم کرده و درگزارش‌کار خود ارائه کنید، همچنین رفتار موج را توجیه کنید.

با این دستور میتوان محیط را باز کرد

```
pdeModeler
```

```
function helmholtz_equation_solution
    k = 2 * pi;

    model = createpde(1);

    R1 = [1,0.8,0.5,0.45]';
```

```
    g = decsg(R1,'C1',('C1')');

    geometryFromEdges(model, g);

    figure;
    pdegplot(model,'EdgeLabels','on');
    axis equal;
    title('Geometry with Edge Labels');



    specifyCoefficients(model, 'm', 0, 'd', 0, 'c', 1, 'a', -k^2, 'f', 0);

    applyBoundaryCondition(model, 'neumann', 'Edge', 1:model.Geometry.NumEdges,

    generateMesh(model, 'Hmax', 0.05);

    results = solvepde(model);

    u = results.NodalSolution;

    figure;
    pdeplot(model, 'XYData', u, 'Contour', 'on');
    title('Solution to Helmholtz Equation');
    xlabel('x');
    ylabel('y');
end
```

این تابع اصلی است:

```
function helmholtz_equation_solution
    k = 2 * pi;
```

تعریف مدل pde:

```
    model = createpde(1);
```

تعریف شیپ اصلی :

```
R1 = [1,0.8,0.5,0.45]';
g = decsg(R1,'C1',('C1')');

geometryFromEdges(model, g);
figure;
pdegplot(model,'EdgeLabels','on');
axis equal;
title('Geometry with Edge Labels');
```

ضرایب مدل این گونه تعریف میشوند :

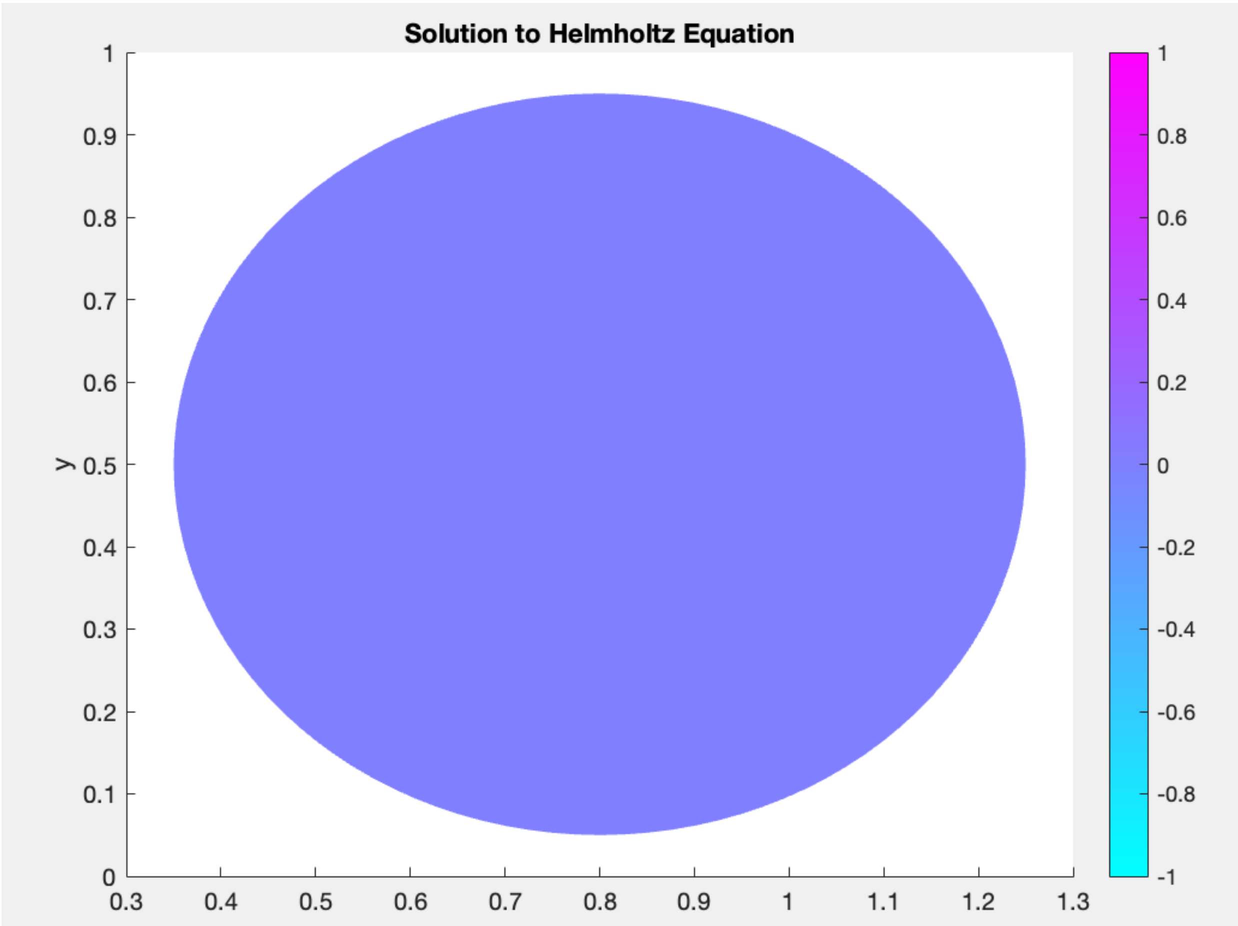
```
specifyCoefficients(model, 'm', 0, 'd', 0, 'c', 1, 'a', -k^2, 'f', 0);
```

تولید مش

```
generateMesh(model, 'Hmax', 0.05);
```

و در پایان این گونه معادله را حل میکنیم :

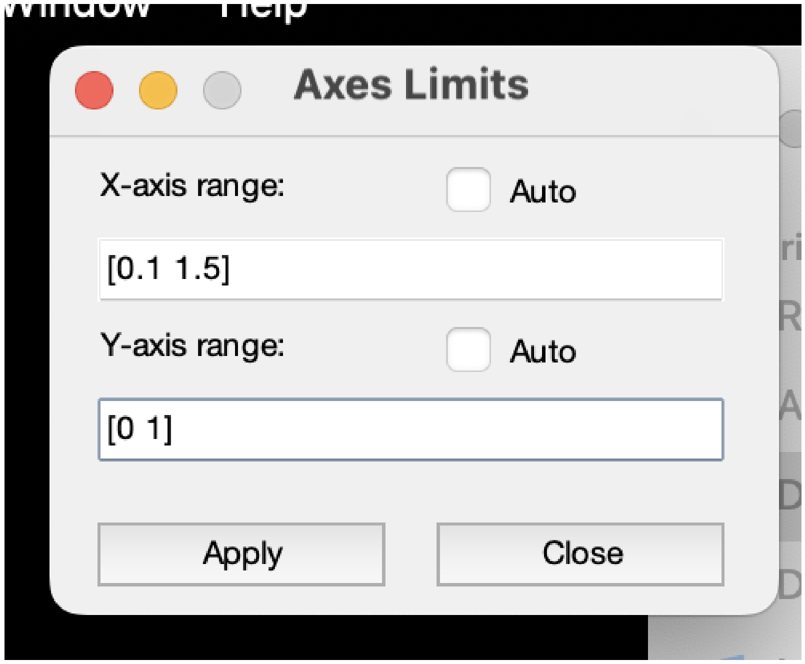
```
results = solvepde(model);
u = results.NodalSolution;
```



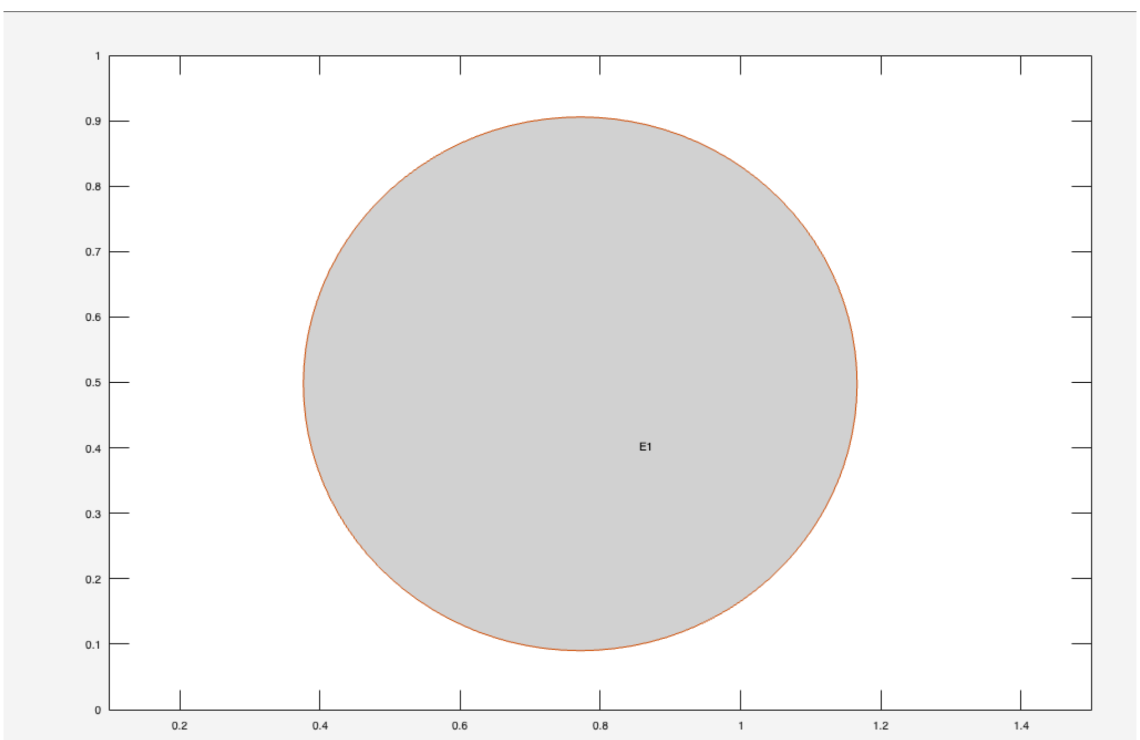
۱.۲ مراحل حل معادله

- ابتدا PDE Modeler را با نوشتن عبارت pdeModeler در CMD نرم‌افزار MATLAB باز کنید.

- محدوده محورهای x و y را به ترتیب [0.1 1.5] و [0 1] در نظر بگیرید. برای انجام این کار به قسمت Options-Axes limits مراجعه فرمایید.

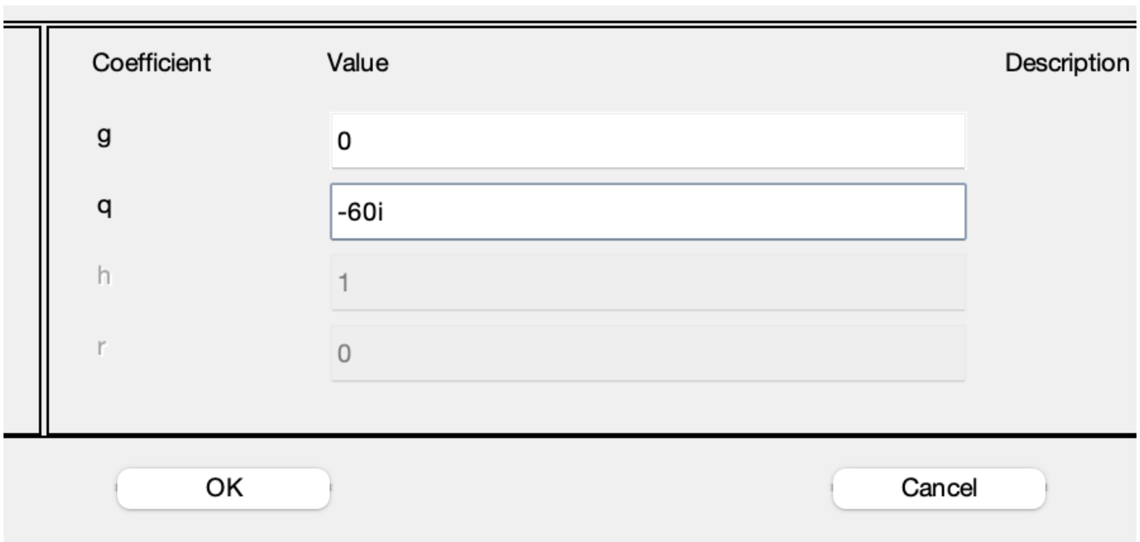


- یک دایره به شعاع 0.45 و مرکز (0.8 0.5) رسم کنید.



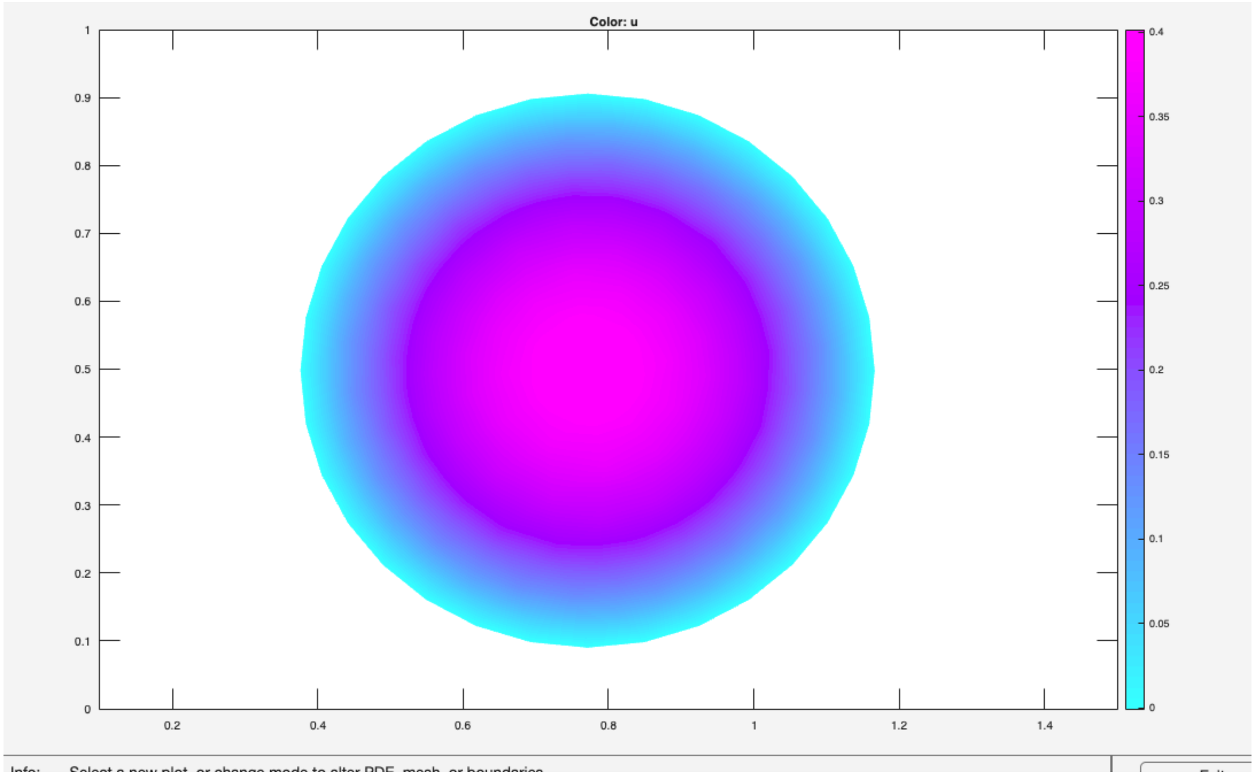
- مود کاری را با مراجعه به بخش Application mode به Generic Scalar تنظیم کنید.

- شرایط مرزی را با مراجعه به قسمت Boundary-Specify Boundary Conditions مشخص کنید. دقت شود که شرایط مرزی از شرط Neumann با $q = -60i$ و $g = 0$ استفاده کنید.



- با مراجعه به بخش Mesh-Initialize Mesh شرایط اولیه مش را تعیین کنید.

- حال معادله را حل کنید.



در این قسمت موج از مرکز دایره شروع شده و تا لبه های دایره ادامه پیدا خواهد کرد
مطابق با همانچه که در معادله ی اصلی انتظار داشتیم.