برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

۱)

الف)

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & x < |1| \\ 0 & , x > |1| \end{cases}$$

$$\mathrm{A}(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sin(\omega x)dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos(\omega x)}{\omega}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos(\omega x)}{\omega}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega^2} - \frac{x\cos(\omega x)}{\omega}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\pi\omega^2}$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\left(\frac{2(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\pi\omega^2}\right)\sin(\omega x)\,d\omega$$

ب)

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0\ , & |x| < 1 \end{cases}$$

$$B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|x|\cos(\omega x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{0} -x\cos(\omega x)dx + \int_{0}^{1} x\cos(\omega x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\omega\sin(\omega) + \cos(\omega) - 1}{\omega^2} + \frac{\omega\sin(\omega) + \cos(\omega) - 1}{\omega^2}\right)$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

$$= \frac{2(\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1)}{\pi\omega^2}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \left(\frac{2(\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1)}{\pi\omega^2}\right) \cos(\omega x)\, d\omega$$

۲)

الف)

$$f(x) = e^{-a|x|} \qquad a > 0$$

$$B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos(\omega x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ax} \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{-ax}(\omega \sin(\omega x) - a\cos(\omega x))}{\omega^2 + a^2}\right) \Big|_0^\infty = \frac{2a}{\pi(\omega^2 + a^2)}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \left(\frac{2a}{\pi(\omega^2 + a^2)}\right) \cos(\omega x)\, d\omega$$

برای سوالات خود درخصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

ب)

$$g(x) = \begin{cases} x - x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} -x^2\cos(\omega x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(\omega^2 x^2 - 2)\sin(\omega x) + 2x\omega\cos(\omega x)}{\omega^3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{-2\left((\omega^2 - 2)\sin(\omega) + 2\omega\cos(\omega)\right)}{\pi\omega^3}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} x\sin(\omega x)\,dx = \frac{2(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\pi\omega^2}$$

$$g(x) = \int_0^{\infty}\left[\left(\frac{-2\left((\omega^2 - 2)\sin(\omega) + 2\omega\cos(\omega)\right)}{\pi\omega^3}\right)\cos(\omega x) + \left(\frac{2(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega))}{\pi\omega^2}\right)\sin(\omega x)\right]d\omega$$

۳)

$$B(a) = 0 \quad A(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos x)(\cos ax)\,dx = \frac{2\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{\pi(1 - a^2)}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{1 - a^2}\cos ax\,da$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{1-a^2}da \quad \rightarrow \quad x = \frac{a\pi}{2} \rightarrow \int_0^\infty \frac{\text{cosx}}{\pi^2 - 4x^2}\,dx \;= 1/4$$

۴)

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-w} cos\omega x d\omega = [L\{\cos(\omega x)\}]_{s=1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = \int_0^\infty tan^{-1}\,\omega\,\sin(\omega x)\,d\omega \rightarrow \text{فرم انتگرال فوریه} \rightarrow B(\omega)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x)\sin(\omega x)\,dx = \; tan^{-1}\omega$$

$$\frac{d(B(\omega))}{d\omega} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty xg(x)\cos(\omega x)\,dx = \frac{1}{1+\omega^2} = \int_0^\infty e^{-x}\, cos\;\omega x dx = f(\omega)$$

$$\frac{2}{\pi}\,xg(x) = e^{-x} \quad x > 0$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-x}}{x} \quad x > 0$$

$$\xrightarrow{\text{فرد }g(x)} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{e^{-x}}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}\frac{e^{x}}{x} & x < 0 \end{cases} \quad = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-|x|}}{x}$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

۵)

$$f(x)=\int_0^{\infty} P(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega \Rightarrow P(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$$

$$\frac{dP(\omega)}{d\omega}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x).x\cos(\omega x)dx$$

$$xf(x)=\int_0^{\infty} q(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \Rightarrow q(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$\Rightarrow P'(\omega)=q(\omega)$$

۶)

تابع $f(x)$ زوج است پس داریم:

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\,cos\,\omega x\,dx$$

$$\rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos((\omega+1)x)$$

$$+\cos((\omega-1)x)]dx=\frac{1}{1-\omega^2}\cos(\frac{\pi}{2}\omega)$$

$$\rightarrow f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)d\omega$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

۷)

تابع $f(x)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-kx}, & x > 0 \\ -e^{-kx}, & x < 0 \end{cases}$$

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-kx}\sin(\omega x) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{\omega^2+k^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+k^2}\sin(\omega x)\,d\omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+k^2}\sin(\omega x)\,d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+k^2}\sin(\omega x)\,d\omega = \pi\, e^{-kx} \qquad\qquad x > 0$$

$$k = \sqrt{8i} \implies \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+8i}\sin(\omega x)\,d\omega = \pi\, e^{-\sqrt{8i}x}$$

$$k = i\sqrt{8i} \implies \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2-8i}\sin(\omega x)\,d\omega = \pi\, e^{-i\sqrt{8i}x}$$

$$\frac{\pi(e^{-\sqrt{8i}x} + e^{-i\sqrt{8i}x})}{8i} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^4+64}\sin(\omega x)\,d\omega$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

۸)

$$A(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2+4}$$

$$B(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\, dx = \frac{a}{a^2+4}$$

$$\cos 3x = 4cos^3 x - 3\cos x$$

$$cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, cos^3 x dx = \frac{1}{4}(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 3x\, dx + 3\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\, dx)$$

$$= \frac{\pi}{4}A(3) + \frac{3\pi}{4}A(1) = \frac{11\pi}{65}$$

۹)

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)\, d\omega \Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\, dx$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\omega^2} \xRightarrow{\omega=0} \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} -xf(x)\sin(\omega x)\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-2\omega}{(1+\omega^2)^2} \xRightarrow{\omega=2} \int_0^{\infty} xsin(2x)f(x)dx = \frac{2}{25}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} (1 + xsin(2x)f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{25} = \frac{29}{50}$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com مکاتبه نمایید.

۱۰)

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-x} + 2\delta(x)\right)\cos(wx)\,dx$$

چون تابع زوج است می توان گفت:

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\int_0^\infty e^{-x}\left(e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}\right)dx + 2\cos 0\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\int_0^\infty \left(e^{(jw-1)x} + e^{(-jw-1)x}\right)dx + 2\right) = \frac{2w^2+6}{\pi(w^2+1)}$$

$$w = a \rightarrow g(a) = \frac{2a^2+6}{\pi(a^2+1)}$$