تمرین ۶ : معادلات با مشتقات نسبی در دو بعد

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله - حل تمرین: میکا امامی- گلمهر خسروخاور- حسین عطرسایی

۱ـ

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = x + ۲y$$

$$u(۰, y) = y; u(۱, y) = ۱$$

$$u_y(x, ۰) = x \; ; \; u_y(x, ۱) = x + ۱$$

همگن سازی :

$$u(x, y) = v(x, y) + ax + b \to u(x, y) = v(x, y) + x - xy - y^۲$$

$$v_{xx} + v_{yy} = x + ۲y \to v(۰, y) = v(۱, y) = ۰;$$

$$v_y(x, ۰) = ۲x \; ; \quad v_y(x, ۱) = ۲x + ۳$$

جواب حدسی :

$$v(x, y) = \sum_{n=۱}^{\infty} G(y) \sin(n\pi x) \; ; \; v_{xx} = \sum_{n=۱}^{\infty} G(y)(-n^۲\pi^۲) \sin(n\pi x)$$

$$v_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}(y) \sin(n\pi x)$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (\ddot{G}(y) - n^۲\pi^۲ G(y)) \sin(n\pi x) = x + ۲y$$

$$\ddot{G}(y) - n^۲\pi^۲ G(y) = ۲\int_۰^۱ (x + ۲y) \sin(n\pi x) dx$$

$$G(y) = A \sinh(n\pi y) + B \cosh(n\pi y) + \frac{-۲}{(n\pi)^۳}[(-۱)^{n+۱} + ۲y(۱ - (-۱)^n)]$$

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\{A\, sinh(n\pi y) + B\, cosh(n\pi y) \ + \frac{-2}{(n\pi)^3}((-1)^{n+1} \qquad + \ 2y(1 - (-1)^n))\ \}\, sin(n\pi x)$$

$$v_y(x,0) \ = \sum_{n=1}^{\infty}(An\pi - \frac{4}{(n\pi)^3}(1-(-1)^n))\, sin(n\pi x) \ = 2x$$

$$A = \frac{1}{n\pi}\{\frac{4}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right) + 2\int_0^1 2x sin(n\pi x)dx\} = \frac{1}{n\pi}\{\frac{4}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right) \ + \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\}$$

$$v_y(x,1) \ = \sum_{n=1}^{\infty}(An\pi\, cosh(n\pi) + Bn\pi\, sinh(n\pi) \qquad - \frac{4}{(n\pi)^3}(1 - (-1)^n))\, sin(n\pi x) \ = 2\int_0^1 (2x+3)sin(n\pi x)dx$$

با حل انتگرال بالا و جاگذاری مقدار A، ضریب B نیز به دست می آید.

۲ـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ = \ 0$$

$$X(x) = cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); n = 0,1,2,\dots$$

$$Y(y) = Asinh\left(\frac{n\pi}{H}y\right) + Bcosh\left(\frac{n\pi}{H}y\right); \rightarrow B \ = 0;$$

$$U(x,y) \;=\; Cy + \sum_{n=1}^{\infty} A\,sinh(\frac{n\pi}{H}y)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$U(x,h) \;=\; CH + \sum_{n=1}^{\infty} A\,sinh(\frac{n\pi}{H}H)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \;=\; f(x)$$

$$C \;=\; \frac{۱}{LH}\int_{.}^{L} f(x)dx$$

$$Asinh(n\pi) = \frac{۲}{L}\int_{.}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \rightarrow$$

$$A \;= \frac{۲}{L\,sinh(n\pi)}\int_{.}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

۳-

$$ODE(\theta): Y_K(\theta) = A_K cos(k\theta) + B_K sin(k\theta)$$

$$ODE(r):\;\; R_.(r) = C_.\, ln0 + D_.$$

$$R_K(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}$$

چون r=۰ داریم، $C_. = D_k = ۰$

شرایط مرزی: $u(r,۰) = ۰ \rightarrow Y_k(۰) = ۰ \rightarrow A_K = ۰$

همچنین نتیجه میگیریم: $Y_.(\theta) = ۰ \rightarrow u_. = ۰$

شرایط مرزی: $u_\theta\left(r,\frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \;\rightarrow\; -kB_k\cos(k\theta) = ۰ \rightarrow k = ۲n - ۱$

$$u(r,\theta) = R(r)Y(\theta)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} R_n(r)Y_n(\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} C_n\, r^{(۲n-۱)}\, B_n sin((۲n-۱)\theta)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \widetilde{C_n}\, r^{(۲n-۱)} sin((۲n-۱)\theta)$$

شرایط مرزی آخر: $u(۱,\theta) = ۱ = \sum_{n=۱}^{\infty} \widetilde{C_n} sin((۲n-۱)\theta)$

$$\widetilde{C_n} = \frac{۲}{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin((۲n-۱)\theta) d\theta = \frac{۴}{\pi(۲n-۱)}$$

پس : $u(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴}{\pi(۲n-۱)} r^{(۲n-۱)} sin((۲n-۱)\theta)$

۴ـ

$ODE(\theta): Y_K(\theta) = A_K cos(k\theta) + B_K sin(k\theta)$

$ODE(r): \quad R_۰(r) = C_۰\, ln0 + D_۰$

$R_K(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}$

چون r=۰ داریم، $C_۰ = D_k = ۰$

شرایط مرزی: $u(r,۰) = ۰ \rightarrow Y_k(۰) = ۰ \rightarrow A_K = ۰$

همچنین نتیجه میگیریم: $Y_۰(\theta) = ۰ \rightarrow u_۰ = ۰$

شرایط مرزی: $u_\theta(r,\pi) = ۰ \rightarrow -kB_k \cos(k\theta) = ۰ \rightarrow k = \frac{۲n-۱}{۲}$

$u(r,\theta) = R(r)Y(\theta)$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} R_n(r) Y_n(\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} C_n\, r^{\frac{۲n-۱}{۲}} B_n sin\left((\frac{۲n-۱}{۲})\theta\right)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \widetilde{C_n}\, r^{\frac{۲n-۱}{۲}} sin\left((\frac{۲n-۱}{۲})\theta\right)$$

شرایط مرزی آخر: $u(a,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{C_n}\, a^{\frac{2n-1}{2}} sin\left((\frac{2n-1}{2})\theta\right)$

$$\widetilde{C_n} = \frac{2}{\pi\, a^{\frac{2n-1}{2}}} \int_0^{\pi} f(\theta) sin\left((\frac{2n-1}{2})\theta\right) d\theta$$

۵-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

تبدیل لاپلاس می گیریم :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = S^2 U(x,S) - S sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \rightarrow$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - S^2 U(x,S) = (1-S)\, sin(\frac{\pi}{l}x)$$

تبدیل لاپلاس شرایط مرزی :

$$U(0,S) = U(l,S) = 0$$

$$U(x,S) = Ae^{Sx} + Be^{-Sx} + C sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + D cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$D = 0\, ;\ C = \frac{S-1}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + S^2}$$

$$U(0,S) = 0 \rightarrow A + B = 0;$$

$$U(l,S) = 0 \rightarrow Ae^{Sl} + Be^{-Sl} = 0 \rightarrow A = B = 0\, ;$$

$$U(x,S) = \frac{S-۱}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^۲ + S^۲} \, sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم :

$$u(x,t) = \{cos(\frac{\pi}{l}t) - \frac{l}{\pi}sin(\frac{\pi}{l}t)\}sin(\frac{\pi}{l}x)$$

۶ـ

$$\frac{d^۲U}{dx^۲} - s^۲U = -se^x \rightarrow \begin{cases} U_h = Ae^{xs} + Be^{-xs} \\ U_p = (s/(s^۲-۱))e^x \end{cases}$$

$$u(\cdot,t) = ۱ \xrightarrow{L} U(\cdot,s) = \frac{۱}{s}$$

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = \cdot \xrightarrow{L} \lim_{x\to-\infty} U(x,s) = \cdot \Rightarrow B = \cdot \Rightarrow A = \frac{۱}{s} - \frac{s}{s^۲-۱}$$

$$U(x,s) = \frac{۱}{s}e^{xs} - \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s-۱}e^{xs} - \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s+۱}e^{x} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s-۱}e^{x} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s+۱}e^{x}$$

$$u(x,t) = L^{-۱}\{U(x,s)\} = (۱ - \cosh(t+x))u(t+x) + e^x\cosh(t)\,u(t)$$

۷ـ

$$F(u_t) = c^۲F(u_{xx}) \Rightarrow \widehat{u_t} + c^۲\omega^۲\hat{u} = \cdot$$

$$\hat{u}(w,t) = A(w)e^{-c^۲\omega^۲t}$$

$$u(x,\cdot) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(w,\cdot) = \hat{f}(w) \Rightarrow A(w) = \hat{f}(w)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-c^۲\omega^۲t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f(x) * \frac{e^{\frac{-x^۲}{۴c^۲t}}}{۲c\sqrt{\pi t}}$$

۸-

$$U_t - ۲U_{xx} = e^{-۵|x|}$$

$$F\{U_t\} - ۲F\{U_{xx}\} = F\{e^{-۵|x|}\}$$

$$\widehat{U_t} - ۲(-\omega^۲\widehat{U}) = \frac{۱۰}{۲۵+\omega^۲} \to \widehat{U_t} + ۲(\omega^۲\widehat{U}) = \frac{۱۰}{۲۵+\omega^۲}$$

حل معادله ODE مرتبه ۱ برای $\widehat{U}$:

$$\widehat{U}(\omega,t) = C\exp\left\{\frac{-۵۰t\omega - ۲t\omega^۴}{۲۵+\omega^۲}\right\} + \frac{۵}{۲۵\omega^۲+\omega^۴}$$

شرایط مرزی:

$$U(x,۰) = f(x) \to fourier\ transform: \widehat{U}(\omega,۰) = \hat{f}(\omega)$$

$$C = \hat{f}(\omega) - \frac{۵}{۲۵\omega^۲+\omega^۴}$$

$$\widehat{U}(\omega,t) = \left(\hat{f}(\omega) - \frac{۵}{۲۵\omega^۲+\omega^۴}\right)\exp\left\{\frac{-۵۰t\omega - ۲t\omega^۴}{۲۵+\omega^۲}\right\} + \frac{۵}{۲۵\omega^۲+\omega^۴}$$

$$\to \quad U(x,t) = F^{-۱}\{\widehat{U}(\omega,t)\} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{U}(\omega,t)e^{iwx}\,d\omega$$