انتگرالهای فوریه

همانطوریکه در فصل قبل دیدیم هر تابع پریودیک را میتوان به صورت سری فوریه سینوسی و کسینوسی با ضرایب مشخص بیان کرد. حال برای یک تابع غیر پریودیک میتوان فرض کرد که که این تابع یک تابع پریودیک با پریود بینهایت است. مثلا تابع زیر که یک پالس با عرض $2L$ که با پریود $T=2b$ تکرار شده را در نظر بگیرید. همانطوریکه دیده میشود این یک تابع پریودیک زوج میباشد که تنها بسط کسینوسی فوریه دارد که به صورت زیر نوشته میشود:

$$f_b(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 x \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2b}=\frac{\pi}{b} \qquad a_0=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}f_b(x)dx=\frac{1}{2b}\int_{-L}^{L}1dx=\frac{L}{b}$$

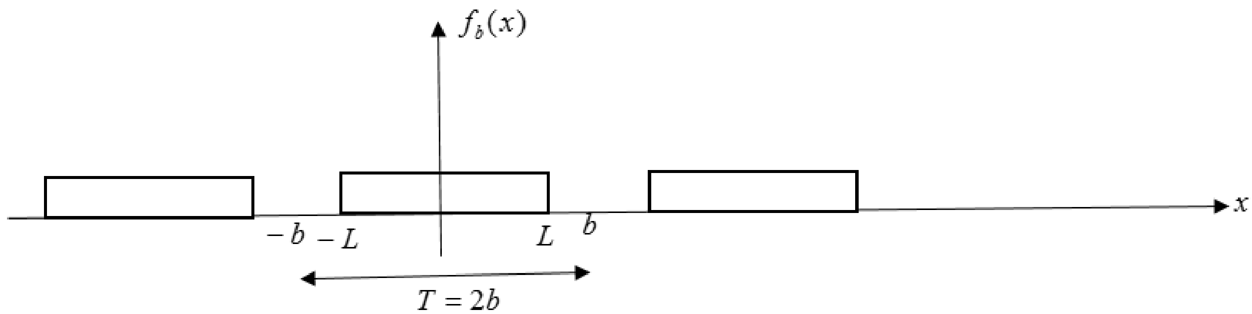
$$a_n=\frac{2}{2b}\int_{-b}^{b}\cos n\omega_0 xdx=\frac{1}{b}\int_{-L}^{L}\cos n\omega_0 xdx=\frac{1}{b}[\frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 x]_{-L}^{L}=\frac{2}{n\omega_0 b}\sin n\omega_0 L=\frac{2}{n\frac{\pi}{b}b}\sin n\frac{\pi}{b}L=$$

$$\frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{b}L=\frac{2L}{b}\frac{1}{\pi\frac{n}{b}L}\sin\pi\frac{n}{b}L=\frac{2L}{b}\sin c(n\frac{L}{b})$$

که $\sin c(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$. حال برای بدست آوردن سری فوریه تابع فوق وقتی که پریود به سمت بینهایت میل میکند ابتدا فرض میکنیم $b=2L$ (در اینصورت $T=2b=4L$) در اینصورت داریم:

$$a_n=\frac{2L}{b}\sin c(n\frac{L}{b})=\sin c(\frac{n}{2})$$

میدانیم که $\sin c(x)=0$ وقتی x یک عدد صحیح است. بنابراین تمام a_nها با اندیس زوج صفر میباشند و فقط برای اندیسهای فرد ضریب سری فوریه غیر صفر میباشد.



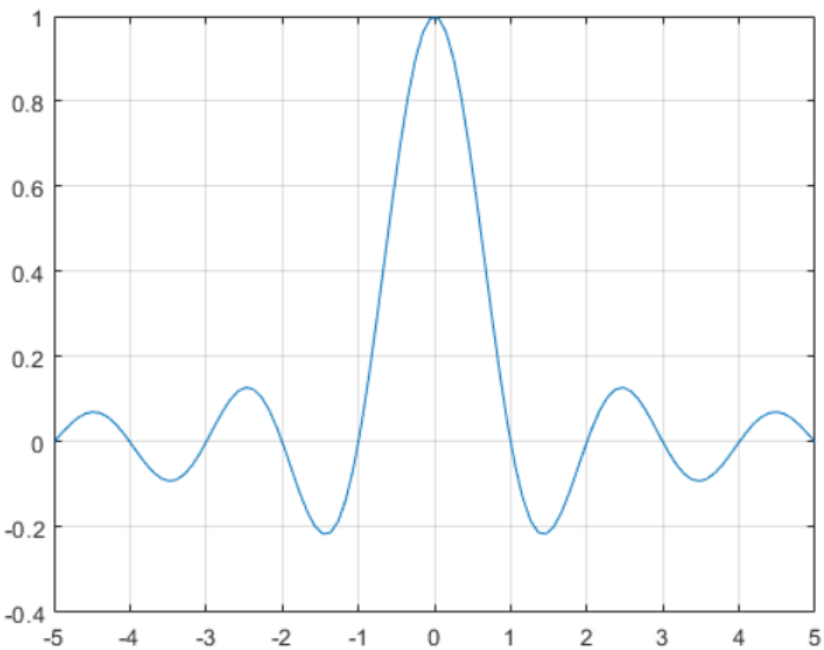
حال پریود را افزایش میدهیم در اینحالت $b=4L$ یعنی $T=2b=8L$ که خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{2L}{b}\sin c(n\frac{L}{b})=\frac{1}{2}\sin c(\frac{n}{4})$$

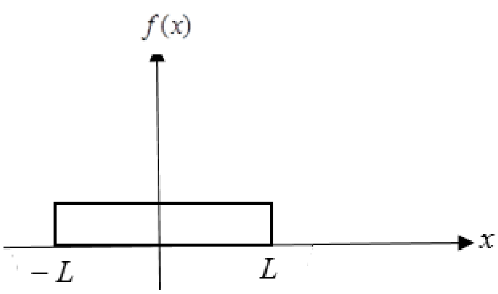
ملاحظه میشود که برای به ازای nهای مضرب **4** ضرایب a_n صفر میباشد یعنی نسبت به حالت قبل تعداد بیشتری از ضرایب a_n غیر صفر میباشند. حال مجددا پریود را افزایش میدهیم. در اینحالت $b=8L$ یعنی $T=2b=16L$ که خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{2L}{b}\sin c(n\frac{L}{b}) = \frac{1}{4}\sin c(\frac{n}{8})$$

ملاحظه میشود که برای به ازای nهای مضرب **8** ضرایب a_n صفر میباشد یعنی نسبت به حالت قبل باز تعداد بیشتری از ضرایب a_n غیر صفر میباشند. در اینحالت a_0 تا a_7 غیر صفر میباشند و a_8 صفر میباشد. در حد که پریود به سمت بینهایت میل میکند تمام ضرایب a_n به ازای همه اندیسها غیر صفر هستند و در حقیقت ضرایب a_n پوش یک تابع $\sin c$ میباشند. تابع $\sin c(x)$ در زیر نشان داده شده است.



وقتی $T \to \infty$ در اینصورت تابع $f_b(x)$ به سمت تابع $f(x)$ که یک پالس به عرض $2L$ میباشد میباشد که در زیر رسم شده است که یک تابع غیر پریودیک میباشد.



حالا تابع پریودیک $f_b(x)$ میتوان به صورت سری فوریه نشان داد:

$$f_b(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} f_b(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b}\int_{-b}^{b}(f_b(x)\cos n\omega_0 x dx)\cos n\omega_0 x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b}\int_{-b}^{b}(f_b(x)\sin n\omega_0 x dx)\sin n\omega_0 x$$

حال اگر متغییر جدید $\omega = n\omega_0$ تعریف کنیم در اینصورت داریم:

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{\pi}{b} = d\omega \to \frac{1}{b} = \frac{d\omega}{\pi}$$

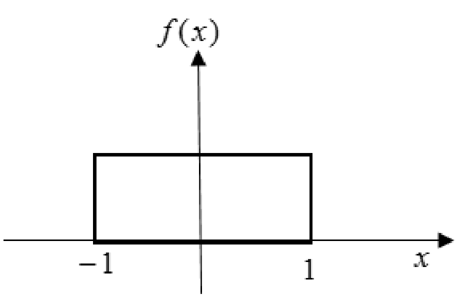
از طرفی وقتی پریود به سمت بینهایت میل میکند $\sum$ به سمت $\int$ میل میکند در نتیجه داریم:

$$f(x)=\lim_{T=2b\to\infty} = f(x)=\frac{1}{\pi}[\int_0^\infty[\cos\omega x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx+\sin\omega x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx]d\omega=$$

$$\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x dx+B(\omega)\sin\omega x dx]d\omega \to A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx \qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$$

بنابراین تابع غیر پریودیک $f(x)$ را میتوان به صورت $f(x)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x dx+B(\omega)\sin\omega x dx]d\omega$ بیان کرد که $A(\omega)$ و $B(\omega)$ به ترتیب انتگرال کسینوسی و سینوسی فوریه میباشند. در نتیجه تابع پریودیک را میتوان به صورت بسط سری فوریه نشان داد یعنی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega_0 x+b_n\sin n\omega_0 x$ در حالی که یک تابع غیر پریودیک را میتوان به صورت انتگرال سری فوریه نشان داد یعنی $f(x)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x dx+B(\omega)\sin\omega x dx]d\omega$ که $\omega=n\omega_0$. در نتیجه تابع پریودیک به صورت $\sum$ و تابع غیر پریودیک به صورت $\int$ نشان داده میشود. در روابط داده شده برای بسط سری فوریه تابع پریودیک $a_n=\frac{2}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos n\omega_0 x dx$ ضریب بسط کسینوسی سری فوریه و برای تابع غیر پریودیک $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$ انتگرال کسینوسی فوریه میباشد. بعلاوه برای بسط سری فوریه تابع پریودیک $b_n=\frac{2}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin n\omega_0 x dx$ ضریب بسط سینوسی فوریه و برای تابع غیر پریودیک $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$. حال برای تابع غیر پریودیک زوج $B(\omega)=0$ و $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$ در حالی که برای تابع فرد $A(\omega)=0$ و $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$.

مثال1:برای تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ انتگرالهای کسینوسی و سینوسی را بدست آورید.



حل: تابع زوج است و در زیر رسم شده است. در نتیجه $B(\omega)=0$ در حالی که:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega$$

حال با جایگزینی $A(\omega)$ در معادله $f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega=\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega\cos\omega x d\omega \to$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

حال به ازای $x=0$ سمت راست عبارت بدست آمده برابر است با $\frac{\pi}{2}$ بعبارت دیگر:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

در نتیجه بدون انتگرال گیری میتوان ثابت کرد $\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$. جالب است که به ازای $x=\frac{1}{2}$ چون $|x|<1$ است باز سمت راست عبارت بالابرابر است با $\frac{\pi}{2}$ در نتیجه داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\frac{1}{2}\omega d\omega=\frac{\pi}{2}$$

برای تابع $f(x)$ میتوان نوشت: $f(1^-)=1$, $f(1^+)=0$ در نتیجه: $f(1)=\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{1}{2}$ حال به ازای $x=1$ داریم:

$$f(1)=\frac{1}{2}=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega d\omega=\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega\cos\omega d\omega=\int_0^\infty \frac{2\sin\omega\cos}{\pi\omega}\omega d\omega \to \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

عبارت بدست آمده به راحتی قابل اثبات است. در $\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$ اگر تغییر متغیر $\omega=2W$ را اعمال کنیم داریم:

$$d\omega=2dW \to \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2} \to \int_0^\infty \frac{\sin 2W}{2W}2dW=\frac{\pi}{2} \to \int_0^\infty \frac{\sin 2W}{W}dW=\frac{\pi}{2}$$

مثال **2**: برای تابع $f(x)=e^{-\alpha x}$ به فرض گسترش زوج، انتگرال کسینوسی فوریه را بدست آورید.

حل: وقتی میگوییم گسترش زوج یعنی تابع به صورت $e^{-\alpha|x|}$ میباشد.

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1}{2}(e^{j\omega x}+e^{-j\omega x})dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [e^{-x(\alpha-j\omega)}+e^{-x(\alpha+j\omega)}]dx=$$

$$\frac{1}{\pi}[-\frac{1}{\alpha-j\omega}e^{-x(\alpha-j\omega)}-\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-x(\alpha+j\omega)}]_0^\infty=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}]=\frac{2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega \rightarrow e^{-\alpha x}=\int_0^\infty \frac{2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}\cos\omega x d\omega \rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\omega^2+\alpha^2}d\omega=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha x}$$

ملاحظه میشود که بدون اینکه نیاز به انتگرال گرفتن اثبات میشود که: $\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\omega^2+\alpha^2}d\omega=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha x}$. حال برای حالت خاص $x=0$ داریم:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$$

که به راحتی قابل اثبات است. با تغییر متغیر $\omega=\alpha\tan\theta$ داریم: $d\omega=\alpha d\theta(1+\tan^2\theta)$ در نتیجه:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2+\alpha^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha d\theta(1+\tan^2\theta)}{\alpha^2(1+\tan^2\theta)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha}d\theta=\frac{\pi}{2\alpha}$$

مثال **3**: حال با فرض گسترش فرد تابع $f(x)=e^{-\alpha x}$ ، انتگرال سینوسی فوریه این تابع را بدست آورید.

حل وقتی میگوییم گسترش فرد یعنی: $f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x} & x>0 \\ -e^{\alpha x} & x<0 \end{cases}$. ملاحظه میشود که این تابع یک تابع فرد است. در نتیجه داریم:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1}{2j}(e^{j\omega x}-e^{-j\omega x})dx=\frac{1}{j\pi}\int_0^\infty [e^{-x(\alpha-j\omega)}-e^{-x(\alpha+j\omega)}]dx=$$
$$\frac{1}{\pi}[-\frac{1}{\alpha-j\omega}e^{-x(\alpha-j\omega)}+\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-x(\alpha+j\omega)}]_0^\infty=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{\alpha-j\omega}-\frac{1}{\alpha+j\omega}]=\frac{2\omega}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega \rightarrow e^{-\alpha x}=\int_0^\infty \frac{2\omega}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}\sin\omega x d\omega \rightarrow \int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{\omega^2+\alpha^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha x}$$

ملاحظه میشود که بدون اینکه نیاز به انتگرال گرفتن اثبات میشود که: $\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{\omega^2+\alpha^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha x}$.

مثال **4**: ثابت کنید $\int_0^\infty \frac{(\omega^2+5)\cos\omega x}{\omega^4+6\omega^2+25}d\omega=\frac{\pi}{4}e^{-2x}\cos x$.

حل: با مقایسه صورت مثال با رابطه کلی $\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega=f(x)$ باید ثابت کنیم برای تابع $f(x)=\frac{\pi}{4}e^{-2x}\cos x$ انتگرال کسینوسی فوریه $A(\omega)$ برابر است با: $\frac{\omega^2+5}{\omega^4+6\omega^2+25}$. میتوانیم بنویسیم:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}e^{-2x}\cos x=\frac{\pi}{4}e^{-2x}[\frac{1}{2}(e^{jx}+e^{-jx})]=\frac{\pi}{8}e^{-(2-j)x}+\frac{\pi}{8}e^{-(2+j)x}$$

برای محاسبه $A(\omega)$ برای تابع $f(x)=\frac{\pi}{4}e^{-2x}\cos x$ باید $A(\omega)$ را برای مجموع دو تابع $\frac{\pi}{8}e^{-(2-j)x}$ و $\frac{\pi}{8}e^{-(2+j)x}$ بدست آوریم. با توجه به اینکه $A(\omega)$ برای تابع $e^{-\alpha x}$، برابر است با: $\frac{2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$ در نتیجه برای تابع $\frac{\pi}{8}e^{-(2-j)x}$ انتگرال کسینوسی فوریه برابر است با: $A_1(\omega)=\frac{\pi}{8}\frac{2(2-j)}{\pi[\omega^2+(2-j)^2]}=\frac{1}{4}\frac{2-j}{\omega^2+3-4j}$ و برای تابع $\frac{\pi}{8}e^{-(2+j)x}$ انتگرال کسینوسی فوریه برابر است با: $A_2(\omega)=\frac{\pi}{8}\frac{2(2+j)}{\pi[\omega^2+(2-j)^2]}=\frac{1}{4}\frac{2+j}{\omega^2+3+4j}$. در نتیجه برای تابع $f(x)=\frac{\pi}{4}e^{-2x}\cos x$ انتگرال کسینوسی برابر است با مجموع دو انتگرال کسینوسی محاسبه شده یعنی:

$$A(\omega)=A_1(\omega)+A_2(\omega)=\frac{1}{4}\frac{2-j}{\omega^2+3-4j}+\frac{1}{4}\frac{2+j}{\omega^2+3+4j}=$$

$$\frac{1}{4}[\frac{(2-j)(\omega^2+3+4j)+(2+j)(\omega^2+3-4j)}{(\omega^2+3)^2+16}]=\frac{(\omega^2+5)}{\omega^4+6\omega^2+25}$$

در نتیجه برای تابع $f(x)=\frac{\pi}{4}e^{-2x}\cos x$ انتگرال کسینوسی فوریه برابر است با: $A(\omega)=\frac{\omega^2+5}{\omega^4+6\omega^2+25}$ حال میتوانیم بنویسیم:

$$\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega = f(x)\rightarrow\int_0^\infty\frac{(\omega^2+5)\cos\omega x}{\omega^4+6\omega^2+25}d\omega=\frac{\pi}{4}e^{-2x}\cos x$$

مثال 5: ثابت کنید $\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega^3\sin\omega x}{(\omega^2+4)^2}d\omega=(1-x)e^{-2x}$

حل: ما اثبات کردیم که تبدیل فوریه سینوسی (بسط فرد) $e^{-\alpha x}$ برابر است با: $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$ بنابراین داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega\rightarrow e^{-\alpha x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2}\sin\omega x d\omega$$

حال از طرفین رابطه برحسب α مشتق گرفته و با خود تابع جمع میکنیم که داریم:

$$e^{-\alpha x}-xe^{-\alpha x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2}\sin\omega x d\omega+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{-2\alpha\omega}{(\omega^2+\alpha^2)^2}\sin\omega x d\omega\rightarrow(1-x)e^{-\alpha x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega^3+\omega(\alpha^2-2\alpha)}{(\omega^2+\alpha^2)^2}\sin\omega x d\omega$$

حال برای $\alpha=2$ داریم

$$(1-x)e^{-2x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega^3}{(\omega^2+4)^2}\sin\omega x d\omega$$

مثال 6: اگر $f(x)=\int_0^\infty(\frac{1}{\omega^2+4}\cos\omega x+\frac{\omega}{\omega^2+4}\sin\omega x)d\omega$ باشد در اینصورت $\int_{-\infty}^\infty f(x)(2\cos^3 x+3\sin^3 x)dx$ را بدست آورید.

$(\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\ )$

حل: با توجه به معادله $\quad f(x)=\int_0^\infty(\frac{1}{\omega^2+4}\cos\omega x+\frac{\omega}{\omega^2+4}\sin\omega x)d\omega$ داریم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega^2+4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx\to\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\pi A(\omega)=\frac{\pi}{\omega^2+4}$$

$$B(\omega)=\frac{\omega}{\omega^2+4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx\to\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx=\pi B(\omega)=\frac{\pi\omega}{\omega^2+4}$$

با استفاده از روابط $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,\ \ \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ داریم:

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x),\ \ \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$$

که باجایگزینی در معادله خواسته شده داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(2\cos^3 x+3\sin^3 x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(2\cos^3 x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(3\sin^3 x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\cos 3x+3\cos x)dx+\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(3\sin x-\sin 3x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos x dx+\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos 3x dx+\frac{9}{4}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin x dx-\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin 3x dx=$$

$$\frac{1}{2}\pi A(1)+\frac{3}{2}\pi A(3)+\frac{9}{4}\pi B(1)-\frac{3}{4}\pi B(3)=\pi[\frac{1}{2}\frac{1}{1^2+4}+\frac{3}{2}\frac{1}{3^2+4}+\frac{9}{4}\frac{1}{1^2+4}-\frac{3}{4}\frac{3}{3^2+4}]=$$

$$\pi[\frac{1}{10}+\frac{3}{26}+\frac{9}{20}-\frac{9}{52}]=\pi\frac{52+6+26\times 9-90}{520}=\frac{101\pi}{260}$$

7- با توجه به انتگرال فوریه توابع $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ و $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega\qquad x>0\qquad\qquad I_2=\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega^n}{\omega}d\omega\qquad I_3=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

حل: برای e^{-x} انتگرالهای سینوسی و کسینوسی را بدست می آوریم(چون تابع برای مقادیر منفی صفر است پس به جای از $-\infty$ تا ∞ از **0** تا ∞ انتگرال میگیریم)

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{1}{2}(e^{j\omega x}+e^{-j\omega x})dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(e^{-(1-j\omega)x}+e^{-(1+j\omega)x})dx$$

$$\frac{1}{2\pi}[-\frac{1}{1-j\omega}(e^{-(1-j\omega)x}-\frac{1}{1+j\omega}(e^{-(1-j\omega)x}]_0^{\infty}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-x}\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{1}{2j}(e^{j\omega x}-e^{-j\omega x})dx=\frac{1}{2\pi j}\int_0^{\infty}(e^{-(1-j\omega)x}-e^{-(1+j\omega)x})dx$$

$$\frac{1}{2\pi}[-\frac{1}{1-j\omega}(e^{-(1-j\omega)x}+\frac{1}{1+j\omega}(e^{-(1-j\omega)x}]_0^{\infty}=\frac{\omega}{\pi(1+\omega^2)}$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega \to e^{-x}=\int_0^\infty[\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}\cos\omega x+\frac{\omega}{\pi(1+\omega^2)})\sin\omega x]d\omega$$

$$\to\int_0^\infty\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\pi e^{-x}$$

برای $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ چون تابع زوج است باید $A(\omega)$ را حساب کنیم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^a\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^a\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi\omega}[\sin\omega x]_0^a=\frac{2\sin\omega a}{\pi\omega}\to f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega\to$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}=\int_0^\infty\frac{2\sin\omega a}{\pi\omega}\cos\omega x d\omega\to\int_0^\infty\frac{\sin\omega a}{\omega}\cos\omega x d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

حال به ازای $x=0$ سمت راست $\frac{\pi}{2}$ و سمت چپ تبدیل به $\int_0^\infty\frac{\sin\omega a}{\omega}d\omega$ میشود بنابراین داریم:

$$\int_0^\infty\frac{\sin\omega a}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

با تغیر متغییر $\omega a=t^n$ در عبارت بدست آمده داریم:

$$\omega a=t^n\to ad\omega=nt^{n-1}dt,\ \ \omega=\frac{t^n}{a},\quad d\omega=\frac{nt^{n-1}dt}{a}\to\int_0^\infty\frac{\sin t^n}{\frac{t^n}{a}}\frac{nt^{n-1}dt}{a}=\frac{\pi}{2}\to$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin t^n}{t^n}nt^{n-1}dt=\frac{\pi}{2}\to\int_0^\infty\frac{\sin t^n}{t}dt=\frac{\pi}{2n}$$

که کافیست به جای t قرار دهیم ω یعنی $\int_0^\infty\frac{\sin\omega^n}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2n}$

برای انتگرال سوم میتوانیم از انتگرال جزء به جزء استفاده کنیم:

$$I_3=\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^\infty\frac{1}{x^2}(\sin x)^2dx=[-\frac{1}{x}\sin^2 x+\int_0^\infty\frac{2\sin x\cos x}{x}dx]_0^\infty=\int_0^\infty\frac{\sin 2x}{x}dx$$

حال میدانیم $\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$. با تغییر متغیر $\omega=2x\to d\omega=2dx$ خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\to\int_0^\infty\frac{\sin 2x}{2x}2dx=\frac{\pi}{2}\to\int_0^\infty\frac{\sin 2x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

8-با استفاده از اینکه انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-\alpha x}$ برابر است با $A(\omega)=\frac{2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$ ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \frac{\omega^2 \cos\omega x}{(\omega^2+9)^2}d\omega = \frac{\pi}{12}(1-3x)e^{-3x}$$

حل: با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega \to e^{-\alpha x} = \int_0^\infty \frac{2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}\cos\omega x d\omega$$

حال از عبارت بالا نسبت به αمشتق میگیریم:

$$-xe^{-\alpha x} = \int_0^\infty \frac{2\cos\omega x}{\pi}\frac{(\omega^2+\alpha^2)-2\alpha^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}d\omega = \int_0^\infty \frac{2\cos\omega x}{\pi}\frac{(\omega^2-\alpha^2)}{(\omega^2+\alpha^2)^2}d\omega$$

حال رابطه دوم را در $k-$ضرب و با رابطه اول جمع میکنیم:

$$(1+kx)e^{-\alpha x} = \int_0^\infty \frac{2\cos\omega x}{\pi}\left[\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2} - \frac{k(\omega^2-\alpha^2)}{(\omega^2+\alpha^2)^2}\right]d\omega = \int_0^\infty \frac{2\cos\omega x}{\pi}\left[\frac{\omega^2(\alpha-k)+\alpha^2(\alpha+k)}{(\omega^2+\alpha^2)^2}\right]d\omega$$

حال اگر $\alpha=-k=3$ فرض کنیم در اینصورت $k=-3$ در نتیجه داریم:

$$(1-3x)e^{-3x} = \int_0^\infty \frac{2\cos\omega x}{\pi}\left[\frac{\omega^2(6)}{(\omega^2+9)^2}\right]d\omega \to \int_0^\infty \frac{\omega^2\cos\omega x}{(\omega^2+9)^2}d\omega = \frac{\pi}{12}(1-3x)e^{-3x}$$

مثال**9**:ثابت کنید $\int_0^\infty \frac{\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{1+\omega^2} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0 \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$.

حل: تابع $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-x} & x>0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. چون برای این تابع $f(0^-)=0$ ، $f(0^+)=1$ در نتیجه $f(0)=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{1}{2}$ بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

انتگرالهای کسینوسی و سینوسی فوریه را برای تابع $f(x)$ در مثال **7** بدست آوردیم که برابر بود با: $A(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$ و $B(\omega)=\frac{\omega}{\pi(1+\omega^2)}$. حال با جایگزینی در رابطه زیر داریم:

$$\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]d\omega = f(x) \rightarrow \int_0^\infty [\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}\cos\omega x + \frac{\omega}{\pi(1+\omega^2)}\sin\omega x]d\omega =$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ e^{-x} & x>0 \end{cases} \rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0 \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

مثال**10**: ثابت کنید $\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega\cos\omega x}{1-\omega^2}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

حل: تابع زوج است و با توجه به رابطه $f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega$ باید ثابت کنیم برای تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ انتگرال کسینوسی فوریه برابر است با: $A(\omega) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}$.

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[\cos(1+\omega)x + \cos(1-\omega)x]dx =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x + \frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}[\frac{1}{1+\omega}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\omega) + \frac{1}{1-\omega}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\omega)] =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{1+\omega}\cos\frac{\pi}{2}\omega + \frac{1}{1-\omega}\cos\frac{\pi}{2}\omega] = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}$$

حال با جایگزینی در رابطه $\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega = f(x)$ خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega = f(x) \rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega\cos\omega x}{1-\omega^2}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال **11**: ثابت کنید $\int_0^\infty \frac{\sin\pi\omega\sin\omega x}{1-\omega^2}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$.

حل: تابع فرد است و با توجه به رابطه $f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega$ باید ثابت کنیم برای تابع $\begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$ انتگرال سینوسی فوریه برابر است با: $B(\omega) = \frac{\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$.

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \rightarrow B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin x \sin\omega x dx=\int_0^\pi \frac{1}{2}[\cos(1-\omega)x-\cos(1+\omega)x]dx=$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)x-\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x]_0^\pi=\frac{1}{2}[\frac{1}{1-\omega}\sin(\pi-\pi\omega)-\frac{1}{1+\omega}\sin(\pi+\pi\omega)]=$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{1-\omega}\sin\pi\omega+\frac{1}{1+\omega}\sin\pi\omega]=\frac{\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$$

حال با جایگزینی در رابطه $\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega = f(x)$ خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega = f(x) \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\pi\omega \sin\omega x}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

مثال **12**: ثابت کنید $\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\omega x d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<x<\pi \\ \frac{\pi}{4} & x=\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$.

حل: تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$ را در نظر میگیریم. چون برای این تابع $f(\pi^-)=1$,$f(\pi^+)=0$ در نتیجه
بنابراین میتوانیم بنویسیم: $f(\pi)=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ \frac{1}{2} & x=\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

حال برای تابع $f(x)$ انتگرال سینوسی فوریه را بدست می آوریم:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \rightarrow B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{\omega}\cos\omega x]_0^\pi=\frac{2}{\pi\omega}[1-\cos\omega\pi]$$

حال با جایگزینی در رابطه $\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega = f(x)$ خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega = f(x) \rightarrow \int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}[1-\cos\omega\pi]\sin\omega x d\omega = \begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ \frac{1}{2} & x=\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\omega x d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0<x<\pi \\ \frac{\pi}{4} & x=\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$$

مثال13: با استفاده از اینکه انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ برابر است با $A(\omega)=\dfrac{\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$ و انتگرال فوریه سینوسی این تابع $B(\omega)=\dfrac{\omega}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$ ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \frac{3(\omega^2+18)\cos\omega x+\omega^3\sin\omega x}{(\omega^4+324)}d\omega = \pi e^{-3x}\cos 3x \qquad x>0$$

حل:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\frac{1}{2}(e^{j\omega x}+e^{-j\omega x})dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty (e^{-(-j\omega+a)x}+e^{-(j\omega+a)x})dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}[-\frac{1}{a-j\omega}e^{-(-j\omega+a)x}-\frac{1}{a+j\omega}e^{-(j\omega+a)x}]_0^\infty=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{a+j\omega}+\frac{1}{a-j\omega}]=\frac{a}{\pi(\omega^2+a^2)}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\frac{1}{2j}(e^{j\omega x}-e^{-j\omega x})dx=\frac{1}{2\pi j}\int_0^\infty (e^{-(-j\omega+a)x}-e^{-(j\omega+a)x})dx$$

$$=\frac{1}{2\pi j}[-\frac{1}{a-j\omega}e^{-(-j\omega+a)x}+\frac{1}{a+j\omega}e^{-(j\omega+a)x}]_0^\infty=\frac{1}{2\pi j}[\frac{1}{a-j\omega}-\frac{1}{a+j\omega}]=\frac{\omega}{\pi(\omega^2+a^2)}$$

با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$f(x)=2e^{-3x}\cos 3x=2e^{-3x}\frac{1}{2}(e^{j3x}+e^{-j3x})=e^{-x(3-3j)}+e^{-x(3+3j)}$$

طبق آنچه در بالا اثبات شد برای تابع $f(x)$ انتگرال کسینوسی و سینوسی فوریه برابرند با:

$$A(\omega)=\frac{3-3j}{\pi[\omega^2+(3-3j)^2]}+\frac{3+3j}{\pi[\omega^2+(3+3j)^2]}=\frac{3-3j}{\pi(\omega^2-18j)}+\frac{3+3j}{\pi(\omega^2+18j)}=\frac{6(\omega^2+18)}{\pi(\omega^4+324)}$$

$$B(\omega)=\frac{\omega}{\pi[\omega^2+(3-3j)^2]}+\frac{\omega}{\pi[\omega^2+(3+3j)^2]}=\frac{\omega}{\pi(\omega^2-18j)}+\frac{\omega}{\pi(\omega^2+18j)}=\frac{2\omega^3}{\pi(\omega^4+324)}$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega \rightarrow 2e^{-3x}\cos 3x=\int_0^\infty [\frac{6(\omega^2+18)}{\pi(\omega^4+324)}\cos\omega x+\frac{2\omega^3}{\pi(\omega^4+324)}\sin\omega x]d\omega \rightarrow$$
$$\int_0^\infty \frac{3(\omega^2+18)\cos\omega x+\omega^3\sin\omega x}{(\omega^4+324)}d\omega=\pi e^{-3x}\cos 3x$$

تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه یک تابع

برای یک تابع زوج $f(x)$ داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \qquad f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega$$

حال یک تابع $\hat{f}_c(\omega)$ را به صورت $A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_c(\omega)$ تعریف میکنیم که با جایگزینی در روابط بالا داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \rightarrow \hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$$
$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega \rightarrow f(x)=\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x d\omega \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos\omega x d\omega$$

بنابراین زوج $f(x)$ و $\hat{f}_c(\omega)$ به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos\omega x d\omega$$

که $\hat{f}_c(\omega)$ را تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x)$ مینامند. نکته جالب اینست که رابطه $\hat{f}_c(\omega)$ و $f(x)$ هر دو دارای ضریب مساوی $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ میباشنددر حالی که رابطه $A(\omega)$ دارای ضریب $\frac{2}{\pi}$ولی رابطه $f(x)$ فاقد این ضریب میباشد. همینطور برای تابع فرد $f(x)$ داریم:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \qquad f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega$$

حال یک تابع $\hat{f}_s(\omega)$ را به صورت $B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_s(\omega)$ تعریف میکنیم که با جایگزینی در روابط بالا داریم:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \rightarrow \hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$$
$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega \rightarrow f(x)=\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_s(\omega)\sin\omega x d\omega \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\omega)\sin\omega x d\omega$$

بنابراین زوج $f(x)$ و $\hat{f}_s(\omega)$ به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin \omega x dx \qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \hat{f}_s(\omega)\sin \omega x d\omega$$

که $\hat{f}_s(\omega)$ را تبدیل سینوسی فوریه تابع $f(x)$ مینامند. در ادامه $\hat{f}_c(\omega)$ را به صورت $F_c(f)$ و $\hat{f}_s(\omega)$ را به صورت $F_s(f)$ نشان میدهیم که عدد داخل پرانتز همان تابع $f(x)$ است و $F_c(f)$ یعنی تبدیل کسینوسی تابع $f(x)$.

قوانین تبدیلهای سینوسی و کسینوسی فوریه

الف) خطی بودن

تبدیلهای سینوسی و کسینوسی فوریه دارای خواص خطی زیر هستند:

$$F_c(af+bg)=aF_c(f)+bF_c(g) \qquad F_s(af+bg)=aF_s(f)+bF_s(g)$$

ب) تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه برای مشتق تابع

تبدیل کسینوسی و سینوسی فوریه تابع f' را با استفاده از محاسبه انتگرال جزء به جزء به صورت زیر محاسبه میشود:

$$F_c(f')=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f'(x)\cos \omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[(f(x)\cos \omega x)_0^{\infty}+\int_0^{\infty} f(x)\omega \sin \omega x dx]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[-f(0)+\omega\int_0^{\infty} f(x)\sin \omega x dx]$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)+\omega F_s(f)\rightarrow F_c(f')=\omega F_s(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$$

$$F_s(f')=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f'(x)\sin \omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[(f(x)\sin \omega x)_0^{\infty}-\int_0^{\infty} f(x)\omega \cos \omega x dx]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[-\omega\int_0^{\infty} f(x)\cos \omega x dx]=$$

$$-\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos \omega x dx=-\omega F_c(f)\rightarrow F_s(f')=-\omega F_c(f)$$

در محاسبات بالا فرض شده که $f(\infty)=0$ است. حالا روابط بالا را میتوان برای مشتق دوم تابع تعمیم داد. بعبارت دیگر داریم:

$$F_c(f')=\omega F_s(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)\rightarrow F_c(f'')=\omega F_s(f')-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)=\omega[-\omega F_c(f)]-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0\rightarrow$$

$$F_c(f'')=-\omega^2 F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0 \qquad F_s(f')=-\omega F_c(f)\rightarrow F_s(f'')=-\omega F_c(f')$$

$$=-\omega[\omega F_s(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)]\rightarrow F_c(f'')=-\omega^2 F_s(f)+\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)\rightarrow$$

$$F_s(f'')=-\omega^2 F_s(f)+\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$$

مثال 14: با استفاده از قوانین مشتق، تبدیل کسینوسی و سینوسی تابع $f(x)=e^{-\alpha x}$ را بدست آورید.

حل: میدانیم اگر $f(x)=e^{-\alpha x}$ در اینصورت $f''(x)=\alpha^2 e^{-\alpha x}=\alpha^2 f(x) \qquad f'(x)=-\alpha e^{-\alpha x},$. بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$F_c(f'')=-\omega^2 F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0\rightarrow F_c(\alpha^2 f)=-\omega^2 F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-\alpha)\rightarrow \alpha^2 F_c(f)=-\omega^2 F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-\alpha)$$

$$F_c(f)[\alpha^2+\omega^2]=\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\rightarrow F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

همانطوریکه تعریف کردیم $A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}F_c(f)$ در نتیجه میتوانیم بنویسیم:

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$$

این همان رابطه ای است که قبلا با انتگرال گیری بدست آورده بودیم که در اینجا بدون نیاز به انتگرال گیری بدست آوردیم. حالا تبدیل سینوسی را بدست می آوریم (توجه کنید که چون $f(x)=e^{-\alpha x}$ در نتیجه $f(0)=1$):

$$F_s(f'')=-\omega^2 F_s(f)+\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)\rightarrow F_s(\alpha^2 f)=-\omega^2 F_s(f)+\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\rightarrow \alpha^2 F_s(f)=\omega^2 F_s(f)+\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\rightarrow F_s(f)[\omega^2+\alpha^2]=\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\rightarrow F_s(f=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2}$$

همانطوریکه تعریف کردیم $B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}F_s(f)$ در نتیجه میتوانیم بنویسیم:

$$B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}F_s(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2\omega}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$$

این همان رابطه ای است که قبلا با انتگرال گیری بدست آورده بودیم که در اینجا بدون نیاز به انتگرال گیری بدست آوردیم.

موفق باشید

محمود محمدطاهری اسفند 1400