به نام خداوند جان و خرد

درس ریاضیات مهندسی

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله | پروژه دوم | نیمسال اول 1400-1401

مقدمه:

تا به اینجا با اصول اولیه معادلات PDE آشنا شده‌اید.

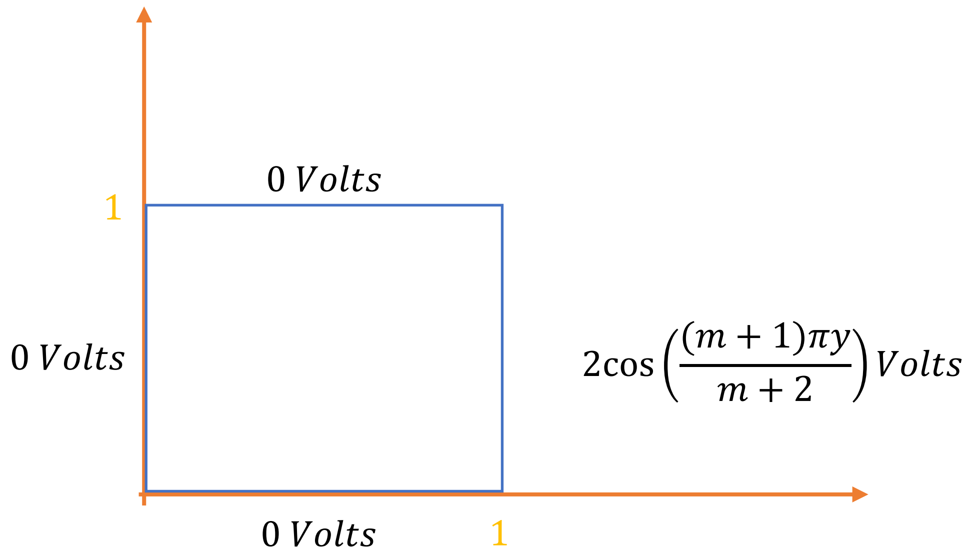
هدف از انجام این پروژه در وهله نخست حصول درک عمیق تر نسبت به مفهوم معادلات PDE و در وهله بعد ارتقا توانایی شما در حل این معادلات به کمک نرم افزار MATLAB است

❖ قسمت اول: حل معادله لاپلاس

یک ناحیه مربعی به اضلاع 2 متر داریم. اضلاع فلزی هستند و ضلع سمت راست دارای ولتاژی به صورت

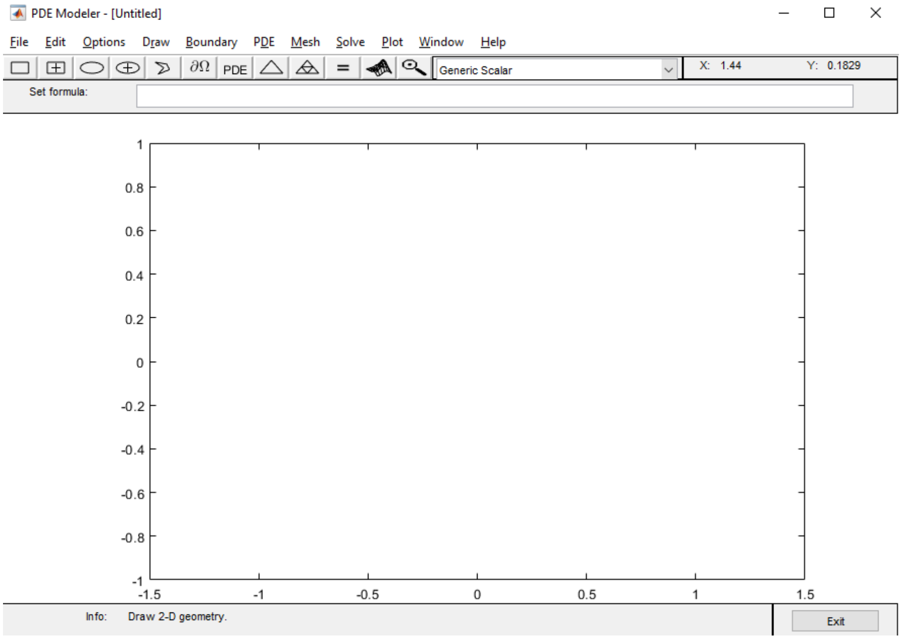
$$2\cos\left(\frac{(m+1)\pi y}{m+2}\right)$$

است و بقیه اضلاع به ولتاژ صفر ولت متصل شده اند. قصد داریم مقادیر ولتاژ را در نقاط مختلف به کمک MATLAB به دست بیاوریم. (دقت شود m برابر با رقم راست شماره دانشجویی شما میباشد)

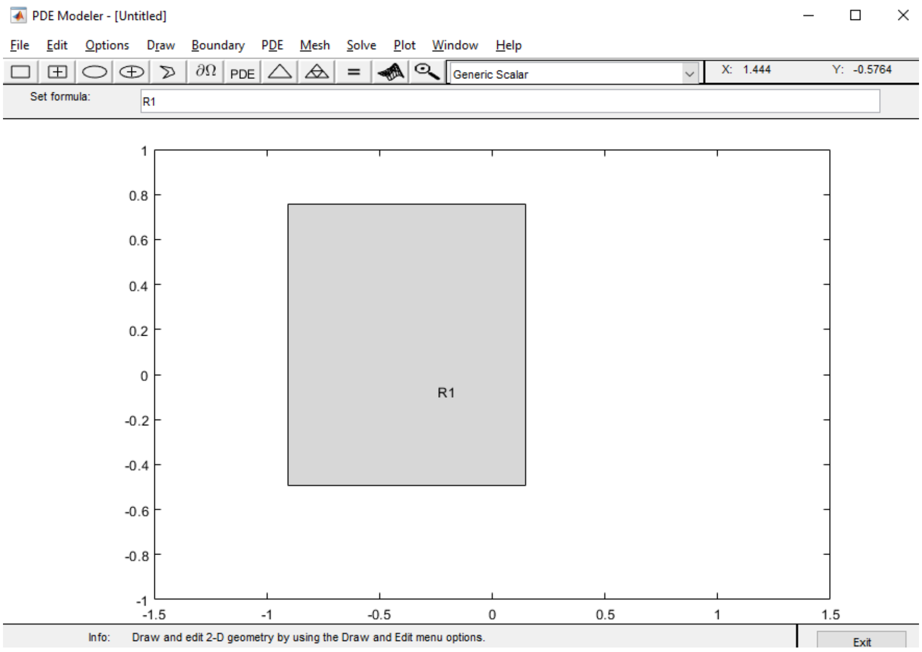


قصد داریم در این قسمت با استفاده از MATLAB به حل معادله لاپلاس بپردازیم

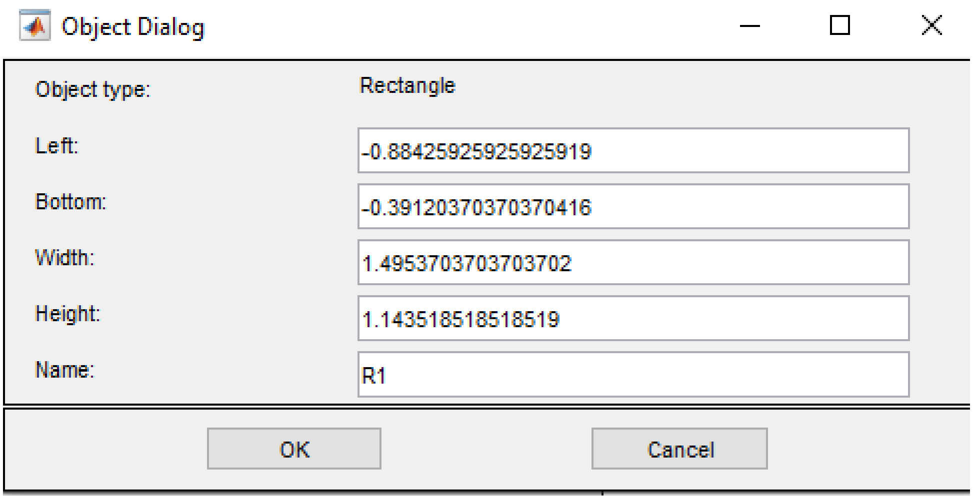
ابتدا در قسمت Command Window عبارت pdeModeler را وارد کنید، پنجره جدیدی مانند زیر برای شما باز خواهد شد.



از نوار بالا گزینه رسم مستطیل که با  نشان داده شده است را انتخاب کنید و به دلخواه مستطیلی را در صفحه مشخصه رسم کنید، مانند شکل زیر:

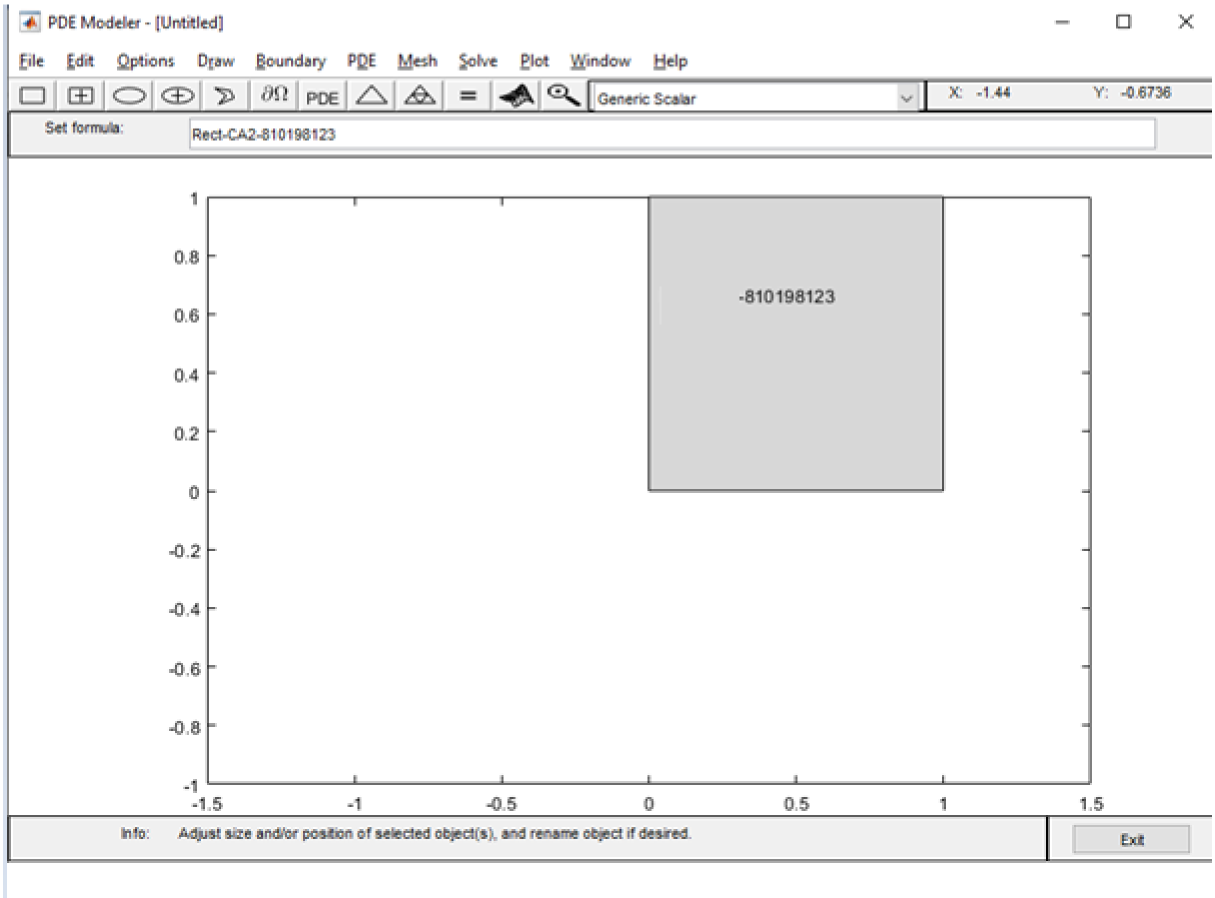


نشانگر خود را روی مستطیل رسم شده قرار داده سپس دوبار کلیک راست کنید، خواهید دید که پنجره Object Dialog به صورت زیر برای شما باز خواهد شد:

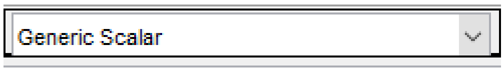


در نظر داریم مستطیل از نقطه (0,0) کشیده شود پس مقادیر Left و Bottom را برابر با 0 میگذاریم، همچنین چون شکل مربعی با طول 2 است مقادیر Width و Height را برابر با 2 قرار داده و قسمت Name را شماره دانشجویی خود بگذارید.

با فرض شماره دانشجویی 8101198123، نتیجه زیر حاصل خواهد شد:



حال میبایست شرایط مرزی مسئله را تعیین کرد، برای این منظور ابتدا لازم است مشخص کنیم که حل چه نوع مسئله ای مدنظر است. در اینجا قصد داریم تا مسئله الکترواستاتیک را حل کنیم. از نوار ابزار این گزینه را کلیک کنید:

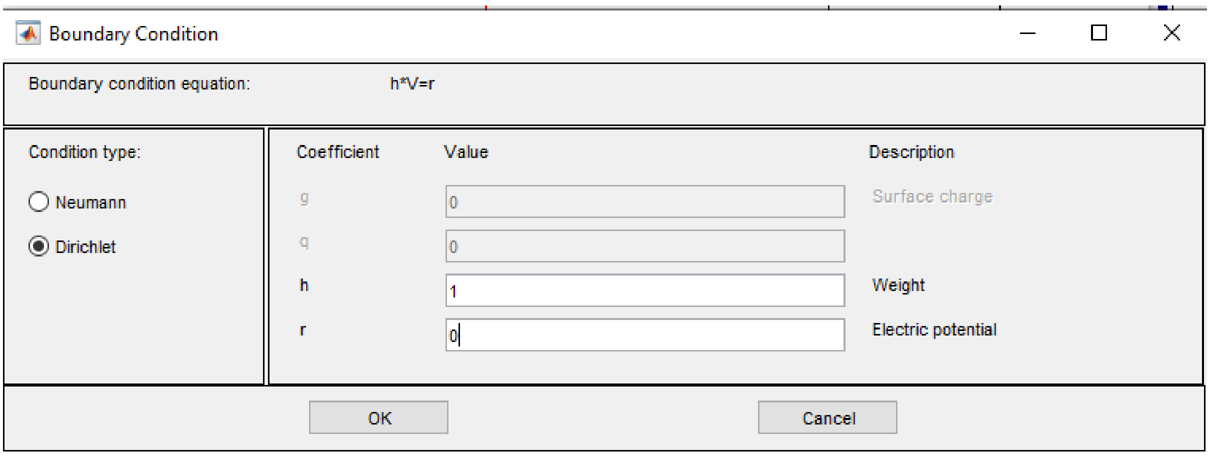


سپس زیر منوی Electrostatics را انتخاب کنید.

حال از نوار Boundary Mode آیتم  را انتخاب کنید سپس روی ضلع های مربوطه شرط را وارد نمایید.

راهنمایی:

هنگام 2 بار کلیک کردن روی ضلع صفحه ای مانند مقابل ظاهر خواهد شد:



رابطه ای که حاصل ولتاژ میشود به صورت مقابل است:

$$V \times h = r$$

پس کافیست h را برابر با 1 نگه دارید و r را برابر با شرط ولتاژ قرار دهید.

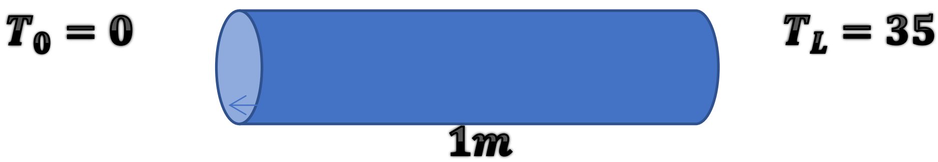
پس از تعیین شرایط مرزی کافیست از نوار بالا  را انتخاب کرده و نتیجه را مشاهده کنید.

نتایج تمامی مراحل فوق را در گزارش خود آورده و فایل نتیجه نهایی حاصل را با نام Q1_Final_Result ذخیره کنید و در کنار گزارش بیاورد.

قسمت دوم: حل معادله حرارت

در این قسمت می خواهیم معادله حرارت را به کمک MATLAB حل کنیم.

فرض کنید که میله‌ای به طول L داریم. ابتدای میله در مکان x = 0 در دمای 0 درجه سانتی‌گراد ثابت نگه داشته شده است و انتهای میله در دمای 35 درجه. میخواهیم دمای میله را در نقاط مختلف و لحظات متفاوت به دست آوریم.



$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

در معادله حرارت ضریب $\frac{1}{p^2}$ را برابر 100 در نظر بگیرید.

شرایط اولیه را به صورت مقابل در نظر بگیرید.

$$u(x,0) = \frac{2x}{1+x^2}$$

شرایط مرزی را به صورت مقابل در نظر بگیرید.

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 35$$

آموزش حل PDE به کمک متلب و تابع pdepe

فرض کنید که قصد داریم تا یک معادله PDE را حل کنیم. برای حل به فرم معادله نیاز داریم. برای مثال اگر معادله حرارت باشد شکل خاصی دارد. سپس به شرایط اولیه و شرایط مرزی هم نیاز داریم. پس تا اینجا به این موارد نیاز داریم:

1) فرم معادله
2) شرایط اولیه
3) شرایط مرزی

نرم افزار MATLAB هم برای حل معادله PDE نیاز به موارد بالا دارد. ابتدا به بررسی فرم معادله می‌پردازیم

فرم معادله

فرم کلی معادله حرارت به صورت زیر است:

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

فرم کلی معادله در MATLAB به شکل زیر است:

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)+s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

باید ضرایب را طوری تعیین کنیم تا به معادله حرارت برسیم.

ضریب $\frac{\partial u}{\partial t}$ در معادله حرارت، برابر $\frac{1}{p^2}$ است. در فرم کلی MATLAB، ضریب عبارت $\frac{\partial u}{\partial t}$ برابر $c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ است بنابراین ضریب c برابر $\frac{1}{p^2}$ خواهد بود.

می‌خواهیم عبارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را بسازیم. در معادله کلی متلب مقدار m را برابر صفر قرار می‌دهیم. عبارت وسط به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial x}f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

حال اگر مقدار f را برابر $\frac{\partial u}{\partial x}$ قرار دهیم، به عبارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ می‌رسیم.

برای مشخص کردن فرم کلی معادله در متلب یک تابع به شکل زیر تعریف کنید و ضرایب را مقداردهی کنید.

```
function [c,f,s]=Equation(x,t,u,DuDx)
c= ? ;
f= ? ;
s= ? ;
end
```

شرایط اولیه

مشخص کردن شرایط اولیه بسیار ساده است. به دلیل اینکه شرایط اولیه توصیف در لحظه $t=0$ است، بنابراین نیازی به متغیر t نداریم. فقط کافی است تا مقدار خروجی را بر حسب X مشخص کنید. تابع را به صورت مقابل پیاده سازی کنید:

```
function value=Init(x)
value= ? ;
end
```

شرایط مرزی

فرض کنید که شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 35$$

فرم کلی شرایط مرزی در MATLAB به صورت زیر می باشد:

$$p(x,t,u) + q(x,t)f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

برای مشخص کردن ضرایب، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

```
function [pl,ql,pr,qr]=BC(xl,ul,xr,ur,t)
pl= ? ;
ql= ? ;
pr= ? ;
qr= ? ;
end
```

- ql , pl ضرایب مربوط به شرایط مرزی در $x = xl$
- qr , pr ضرایب مربوط به شرایط مرزی در $x = xr$
- ul ضریب مربوط به دما در $x = xl$
- ur ضریب مربوط به دما در $x = xr$

در فرم کلی شرایط مرزی، تابع f در واقع همان $\frac{\partial u}{\partial x}$ است. به دلیل اینکه در شرایط مرزی مسئله، $\frac{\partial u}{\partial x}$ ظاهر نشده است. بنابراین $q(x,t)$ برابر صفر خواهد بود.

با تعاریف بالا شرایط مرزی در xl به این صورت خواهد بود.

$$ul = 35$$

با جابجایی خواهیم داشت:

$$ul - 35 = 0$$

با تطبیق این معادله و فرم کلی شرایط مرزی در متلب ضریب $p(x,t,u)$ به دست می‌آید.

$$p(x,t,u) = ul - 35;$$

$$pl = ul \quad \& \quad pr = ur - 35$$

حالا آماده‌ایم تا PDE را حل کنیم.

برای این کار از **pdepe()** استفاده می‌کنیم. این دستور را به شکل زیر به کار میبریم:

$$\mathrm{sol} = \mathrm{pdepe(m, Equation\_Function, Init\_Function, BC\_Function, xmesh, tspan)}$$

که پارامتر m را قبلاً توضیح داده ایم. x و t نیز همان بردارهای مکانی و زمانی هستند.

شرح سؤالات:

الف) سه تابع خواسته شده در بالا با نام های Equation, Init, BC را پیاده سازی کنید و آن را در گزارشکار خود بیاورید.

ب) با استفاده از تابع **pdepe** معادله را حل کنید، برای این امر $0 \leq x \leq 1$ که به 100 قسمت شکسته شده و $0 \leq t \leq 10$ که به 101 قسمت شکسته شده است را در نظر بگیرید نمودار دمای میله **1** متری را در زمان‌های $t = 0, t = 5, t = 10$ در یک محور نمودار نمایش دهید، برای این منظور میتوانید از دستور **hold on** در MATLAB استفاده کنید گراف های بدست آمده در نمودار را به همراه تحلیل و نتیجه گیری خود در گزارشکارتان بیاورید.

پ) با استفاده از دستور **imagesc()** و **colormap()** دیاگرام تغییرات دمایی را در طول زمان و مکان به صورت دو بعدی مشاهده کنید و آن را تحلیل کرده و در گزارش خود بیاورید. حال x و t را به ترتیب به 50 و 51 قسمت بشکنید، چه اتفاقی می افتد؟ نتیجه گیری خود را در گزارشکارتان مکتوب کنید.

ت) با استفاده از دستور **surf(sol)** دیاگرام تغییرات دمایی را در طول زمان و مکان به صورت سه بعدی مشاهده کنید و تصویر آن را در گزارشکارتان بیاورید.

نکات پایانی:

- گزارش کار باید در قالب pdf با فرمت StudentID-CA2 باشد.
- فایل های مربوط به قسمت اول در پوشه ای به نام Q1 و فایل های مربوط به قسمت دوم در پوشه ای به نام Q2 میبایست قرار گیرد. این دو پوشه به همراه گزارش کار باید در یک فایل zip به فرمت StudentID-Surname-CA2 قرار گیرد و در سایت درس بارگذاری شود.

در صورت ابهام در صورت پروژه میتوانید سوال های خود را در فروم مربوطه بپرسید یا از طریق ایمیل Shaker.ma98@gmail.com ابهام را برطرف کنید.

موفق باشید