درس ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱	پاسخ کوئیز ۱	تاریخ ۱۴۰۰/۱۲/۱۶

۱-

ابتدا باید نمایش سری فوریه تابع $f(x)$ را بدست آوریم

$$P = 2L = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(x)\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\sin(x))\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(1-n)x+\sin(1+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n}\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n\pi)}{1-n}+\frac{\cos(n\pi)}{1+n}+\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right]$$

$$a_n = \frac{1+\cos(n\pi)}{\pi(1-n^2)} \quad ,(n\neq 1)$$

به ازای $n=1$ ضریب a_1 را بایستی جداگانه محاسبه نمود.

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(1\times x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^\pi = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\sin(nx)dx + \int_0^\pi \sin(x)\sin(nx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos(1-n)x-\cos(1+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\sin(1+n)x}{1+n}\right]_0^\pi = 0 \quad ,(n\neq 1)$$

درس ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم	پاسخ کوئیز ۱	تاریخ
۱۴۰۰-۱۴۰۱		۱۴۰۰/۱۲/۱۶

به ازای $n=1$ ضریب b_1 را بایستی جداگانه محاسبه نمود.

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\sin(1\times x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx=\frac{1}{2}$$

بنابراین سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\right)\cos(nx)$$

طبق قضیه پارسوال داریم:

$$a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{2}\right)=\frac{1}{P}\int_{<p>}f^2(x)dx\Rightarrow\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\right)^2=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}}{\frac{1}{2\pi^2}}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

موفق باشید-خان چرلی