به نام آنکه جان را فکرت آموخت

ریاضی مهندسی

پاسخ کوییز اول

۱. سری فوریه تابع $f(x)$ را تعیین و به کمک آن حاصل سری S را محاسبه کنید:

$$f(x)=\begin{cases}1+2x & -1\le x<0\\ 1-2x & 0\le x<1\end{cases}$$
$$S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\dots$$

$$T=2L=2\to L=1$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=2\left[\int_0^1(1-2x)dx\right]=2\left(x-x^2\right)\Big|_0^1=0$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=2\left[\int_0^1(1-2x)\cos(\pi nx)dx\right]$$
$$=2\left[\int_0^1\cos n\pi x-2x\cos(\pi nx)dx\right]=2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1-2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx\right]$$
$$=2\left[0+\frac{2x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]=-4\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1=-\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

$$a_n=\begin{cases}0 & n=0,2,4,\dots\\ \frac{8}{n^2\pi^2} & n=1,3,5,\dots\end{cases}$$

چون تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفر است. بنابراین:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x)$$

برای محاسبه سری S از طرفین رابطه بالا در فاصله -0.5 تا 0.5 انتگرال می گیریم:

$$\int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx=\int_{-0.5}^{0.5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x)dx$$

$$\int_{-0.5}^{0}(1+2x)dx+\int_{0}^{0.5}(1-2x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\left[\sin((2n-1)\pi x)\right]_{-0.5}^{0.5}$$

$$\left[x+x^2\right]_{-0.5}^{0}+\left[x-x^2\right]_{0}^{0.5}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})=\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots\right)$$

$$S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots=\frac{\pi^3}{32}$$

۲. اگر بسط فوریه مختلط تابع e^{ax} به صورت زیر باشد؛ حاصل سری M را بیابید:

$$f(x)=\frac{\sinh a\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-in}e^{inx}\qquad |x|<\pi$$

$$M=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$$

تابع $f(x)$ در $x=\pi$ ناپیوسته است؛ در نتیجه سری فوریه این تابع در $x=\pi$ به میانگین حد چپ و راست تابع در همان نقطه همگراست:

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\sinh a\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-in}e^{in\pi}$$

از طرفی می دانیم:

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n$$
$$f(\pi^-) = e^{a\pi} \quad f(\pi^+) = e^{-a\pi}$$

حال روابط بالا را در معادله $f(x)$ جایگذاری می کنیم:

$$\frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2} = \frac{\sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{a - in}$$

$$\begin{aligned}
\cosh a\pi &= \frac{\sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a - in} \left(\frac{a + in}{a + in} \right) \\
&= \frac{\sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a + in}{a^2 + n^2} \\
&= \frac{\sinh a\pi}{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{a^2 + n^2} \right] \\
&= \frac{\sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} + i \frac{\sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{a^2 + n^2}
\end{aligned}$$

قسمت های حقیقی دو طرف تساوی را برابر قرار می دهیم:

$$\frac{\sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \cosh a\pi$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{a} \coth a\pi$$

معادله را به ازای $a = 2$ بازنویسی می کنیم:

$$M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4} = \frac{\pi}{2} \coth 2\pi$$

۳. سری فوریه تابع $f(x)$ را تعیین و به کمک آن و با استفاده از قضیه پارسوال حاصل سری S را محاسبه کنید:

$$f(x) = x(\pi - x) \qquad 0 < x < \pi$$
$$S = \tfrac{1}{1^4} + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \dots$$

$$T = 2L = \pi \to L = \frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\cos 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(\pi x - x^2\right)\frac{\sin 2nx}{2n} + \frac{\sin 2nx}{4n^3} + (\pi - 2x)\left(\frac{\cos 2nx}{4n^2}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[(\pi - 2\pi)\left(\frac{\cos 2n\pi}{4n^2}\right) - (\pi - 2\times 0)\left(\frac{\cos 2n \times 0}{4n^2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} & n = 0 \\ \frac{-1}{n^2} & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

چون تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفر است. بنابراین:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx
\end{aligned}$$

حال طبق قضیه پارسوال داریم:

$$\frac{1}{L}\int_0^{2L}|f(x)|^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x-x^2\right)^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n^2}\right)^2$$
$$\frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-2\pi\frac{x^4}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$
$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^5}{3}+\frac{\pi^5}{5}-\frac{2\pi^5}{4}\right]=\frac{\pi^4}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15}-\frac{\pi^4}{18}=\frac{\pi^4}{90}$$

$$S=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

۴. سری فوریه مختلط تابع متناوب $f(x)$ را بدست آورید:

$$f(x)=|\sin x| \qquad 0<x\leq\pi$$

$$T=2L=\pi\rightarrow L=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{2L}\int_0^{2L}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|e^{-2inx}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\left(\cos 2nx-i\sin 2nx\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos 2nxdx-\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin 2nxdx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x)dx-\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x)dx\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\pi}-\frac{i}{2\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)-\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)\right]=\frac{2}{\pi(1-4n^2)}
\end{aligned}$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4n^2)}e^{2inx}$$

۵. سری فوریه تابع $f(x)$ را تعیین و به کمک آن حاصل سری S را محاسبه کنید:

$$f(x)=\begin{cases}\pi x & 0\le x\le 1\\ \pi(2-x) & 1\le x\le 2\end{cases}$$
$$S=\tfrac{1}{1^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5^2}+\dots$$

$$T=2L=2\to L=1$$

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\pi x\mathrm{d}x+\int_1^2\pi(2-x)\mathrm{d}x=\left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\pi\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2\\&=\frac{\pi}{2}+\pi\left(4-2-2+\frac{1}{2}\right)=\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\cos n\pi x dx\\&=\left[\int_0^1\pi x\cos n\pi x dx+\int_1^2\pi(2-x)\cos n\pi x dx\right]\\&=\pi\left[x\cdot\frac{\sin n\pi x}{n\pi}-(1)\left(-\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_0^2+\pi\left[(2-x)\cdot\frac{\sin n\pi x}{n\pi}-(-1)\left(-\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_1^2\\&=\pi\left[\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}-\frac{1}{n^2\pi^2}\right]+\pi\left[-\frac{\cos 2n\pi}{n^2\pi^2}+\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right]\\&=\frac{\pi}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)+\frac{\pi}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-\cos 2n\pi)\\&=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\end{aligned}$$

$$a_n=\begin{cases}\pi & n=0\\ 0 & n=2,4,6,\dots\\ \frac{-4}{n^2\pi} & n=1,3,5,\dots\end{cases}$$

چون تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفر است. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi} \cos n\pi x
\end{aligned}
$$

چون که تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته است، طبق قضیه همگرایی سری فوریه ؛باید مقدار سری فوریه در این نقطه به مقدار تابع در این نقطه همگرا شود:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi} \cos n\pi(0) \\
&\pi \times 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)
\end{aligned}
$$

$$
S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}
$$

۶. سری فوریه مختلط تابع $f(x)$ را بدست آورید:

$$
f(x) = \sinh ax \qquad -\pi < x < \pi
$$

$$
T = 2L = 2\pi \rightarrow L = \pi
$$

$$
c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(ax)e^{-inx}\,\mathrm{d}x
$$

رابطه $\sinh(ax) = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ را در معادله بالا جایگذاری می کنیم:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right)e^{-inx}dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{(a-in)x}-e^{-(a+in)x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(a-in)x}}{a-in}+\frac{e^{-(a+in)x}}{a+in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{(a-in)\pi}-e^{-(a-in)\pi}}{a-in}+\frac{e^{-(a+in)\pi}-e^{(a+in)\pi}}{a+in}\right)$$

رابطه $e^{i\pi n}=e^{-i\pi n}=(-1)^n$ و $\sinh(ax)=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ را در معادله بالا جایگذاری می کنیم:

$$c_n=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{(-1)^n\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{a-in}-\frac{(-1)^n\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{a+in}\right)$$
$$=\frac{2(-1)^n\sinh(a\pi)}{4\pi}\left(\frac{1}{a-in}-\frac{1}{a+in}\right)$$
$$=\frac{in(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi\left(a^2+n^2\right)}$$
$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{in(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi\left(a^2+n^2\right)}e^{inx}$$

۷. سری فوریه تابع $f(x)$ را تعیین و به کمک آن و با استفاده از قضیه پارسوال حاصل سری S را محاسبه کنید:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\leq x\leq -1\\ k & -1\leq x\leq 1\\ 0 & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$
$$S=\tfrac{1}{1^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5^2}+\dots$$

$$T=2L=4\rightarrow L=2$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}k\mathrm{d}x=\frac{k}{2}\left[x\right]_{-1}^{1}=k$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[k\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{k}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{k}{n\pi}\left[2\sin\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
a_n = \begin{cases} k & n = 0 \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2k}{n\pi} & n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{-2k}{n\pi} & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}
$$

چون تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس ضریب b_n در سری فوریه آن برابر صفر است. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

حال به طبق قضیه پارسوال داریم:

$$
\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2
$$

$$
\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k^2 dx = \frac{k^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k^2}{n^2\pi^2}\sin^2\frac{n\pi}{2}
$$

$$
k^2 = \frac{k^2}{2} + \frac{4k^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin^2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2^2}\sin^2\pi + \frac{1}{3^2}\sin^2\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4^2}\sin^2 2\pi + \frac{1}{5^2}\sin^2\frac{5\pi}{2} + \dots\right)
$$

$$
\frac{k^2}{2} = \frac{4k^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)
$$

$$
S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}
$$

۸. سری فوریه مختلط تابع $f(x)$ را بدست آورید:

$$f(x) = \cosh ax \qquad -\pi < x < \pi$$

$$T = 2L = 2\pi \to L = \pi$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh(ax)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

رابطه $\cosh(ax) = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$ را در معادله بالا جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)e^{-inx}dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{(a-in)x}+e^{-(a+in)x}\right)dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(a-in)x}}{a-in} - \frac{e^{-(a+in)x}}{a+in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{(a-in)\pi}-e^{-(a-in)\pi}}{a-in} - \frac{e^{-(a+in)\pi}-e^{(a+in)\pi}}{a+in}\right) \end{aligned}$$

رابطه $e^{i\pi n} = e^{-i\pi n} = (-1)^n$ و $\sinh(ax) = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ را در معادله بالا جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(-1)^n\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{a-in} + \frac{(-1)^n\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{a+in}\right) \\ &= \frac{2(-1)^n\sinh(a\pi)}{4\pi}\left(\frac{1}{a-in}+\frac{1}{a+in}\right) \\ &= \frac{a(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi\left(a^2+n^2\right)} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi\left(a^2+n^2\right)}e^{inx}$$