مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله - حل تمرین: نیکا امامی- گلمهر خسروخاور- حسین عطرسایی

۱)

باتوجه اینکه شرایط مرزی(BC) از نوع دیریکله است؛ می‌توان از روش جواب حدسی و تفکیک استفاده کرد.

بنابراین:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\, F_n(x)$$

$$Dirichlet \rightarrow F_n(x) = sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

حال باتوجه به اینکه معادلهٔ مذکور معادله موج همگن با شرایط مرزی همگن است می‌توان گفت:

$$G_n(t) = B_n\, cos(\lambda_n t) + A_n\, sin(\lambda_n t) \quad , \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n\, cos(\lambda_n t) + A_n\, sin(\lambda_n t))\, sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

$$\xrightarrow{IC:\quad u(x,0)=0} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n)\, sin(\frac{n\pi}{l}x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$\xrightarrow{IC:\quad u_t(x,0)=2\,cos(\frac{\pi x}{l})} u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \lambda_n)\, sin(\frac{n\pi}{l}x) = 2\,cos(\frac{\pi x}{l})$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{l \times \lambda_n}\int_0^l sin(\frac{n\pi}{l}x) 2\,cos(\frac{\pi}{l}x) dx = \frac{4}{l \times \lambda_n}\left[\frac{nl(cos(\pi n)+1)}{\pi(n^2-1)}\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & ; n = \{2k+1 | k \in \mathbb{Z}\} \\ \dfrac{8l}{\pi^2(n^2-1)} & ; n = 2k \end{cases}$$

۲)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \underline{(t)\, sin(\,nx),} \qquad u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)\, sin(\,nx),$$

$$u_{xx}(x,t) = -n^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, sin(\,nx),$$

باجایگذاری خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\,u_n^{'}(t) + n^2 u_n(t)]\, sin(\,nx) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\, sin(\,nx),$$

و لذا

$$\begin{cases} u_1^{'}(t) + u_1(t) = 2\, cos(\,t), \quad u_1(t) = (sin(\,t) + cos(\,t)) + c_1 e^{-t} \\ \qquad u_n^{'}(t) + n^2 u_n(t) = 0, \quad u_n(t) = c_n e^{-n^2 t}, n \neq 1 \end{cases}$$

پس خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, sin(\,nx) = u_1(t)\, sin(\,x) + \sum_{n=2}^{\infty} u_n(t)\, sin(\,nx)$$

$$= [cos(\,t) + sin(\,t) + c_1 e^{-t}]\, sin(\,x) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, sin(\,nx)$$

$$u(x,0) = sin(\,x) = (1 + c_1)\, sin(\,x) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, sin(\,nx)$$

$$= sin(\,x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, sin(\,nx)$$

در نتیجه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = [\cos(t) + \sin(t)] \sin(x)$$

۳)

معادله PDE همگن و شرایط مرزی ناهمگن است.

$$\begin{cases} \mathrm{U(x,t) = w(x,t) + v(x,t)} \\ \text{dirichlet}: \quad U(0,t) = t\,, \qquad U(2,t) = t^2 \\ lagrangian\ interpolation:\ w(x,t) = t + \frac{x}{2}[t^2 - t] \end{cases}$$

$U_{tt} = w_{tt} + v_{tt} = x + v_{tt}$ و $U_{xx} = v_{xx} + w_{xx} = v_{xx}$

$$IC:\ U(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = v(x,0) + 0 \ \rightarrow\ v(x,0) = U(x,0) = e^{-2x}$$

$$U_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = v_t(x,0) + \left(-\frac{x}{2} + 1\right)$$

$$\rightarrow\ v_t(x,0) = \frac{x}{2} - 1$$

جاگذاری در معادله ابتدایی : $x + v_{tt} = 4v_{xx}$

بازنویسی معادله بر حسب v :

$$v_{tt} + x = 4v_{xx}$$

$0 < x < 2 \ , \ 0 < t$

$v(0,t) = v(2,t) = 0$

$v(x,0) = e^{-2x}\ ,\ v_t(x,0) = \frac{x}{2} - 1$

معادله موج، ناهمگن، شرایط مرزی همگن دیریکله:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$v_{tt=}\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \quad , \quad v_{xx=}\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{4}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

جاگذاری : $\sum_{n=1}^{\infty}[\,\ddot{T}_n(t) + n^2\pi^2 T_n(t)\,]\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = -x$

ضریب سینوسی سری فوریه : $\ddot{T}_n(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = \frac{2}{2}\int_0^2 -x\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{4}{n\pi}(-1^n)$

معادله دیفرانسیل مرتبه 2 : $T_n(t) = A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t) + \frac{4}{n^3\pi^3}(-1^n)$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t) + \frac{4}{n^3\pi^3}(-1^n)]\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

جاگذاری شرایط اولیه داده شده :

$$v(x,0) = e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n + \frac{4}{n^3\pi^3}(-1^n)]\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

ضریب سینوسی سری فوریه : $A_n + \frac{4}{n^3\pi^3}(-1^n) = \frac{2}{2}\int_0^2 e^{-2x}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$

$$A_n = \frac{2\pi n(e^{-4}(-1)^{n+1} + 1)}{n^2\pi^2 + 16} - \frac{4}{n^3\pi^3}(-1^n)$$

$$v_t(x,0) = \frac{x}{2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi B_n)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

ضریب سینوسی سری فوریه : $n\pi B_n = \frac{2}{2}\int_0^2 \left(\frac{x}{2} - 1\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{-2}{n\pi}$

$$B_n = \frac{-2}{n^2\pi^2}$$

و در نهایت:

$$\mathrm{U(x,t) = w(x,t) + v(x,t)}$$

$$= \left(t + \frac{x}{2}[t^2 - t] \right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t) + \frac{4}{n^3\pi^3}(-1^n)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

۴)

معادله PDE ناهمگن و شرایط مرزی ناهمگن است.

شرایط مرزی نیومن : $U(x,t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos(n\pi x)$

$$U_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)(-n^2\pi^2)\cos(n\pi x) \quad , \quad U_{tt} = \ddot{T}_0(t)\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t)\cos(n\pi x)$$

جاگذاری : $\ddot{T}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{T}_n(t) + T_n(t)(n^2\pi^2))\cos(n\pi x) = -(\sin(5\pi t) + \cos(5\pi x))$

ضرایب مشخص سینوس و کسینوس:

$\ddot{T}_0(t) = -\sin(5\pi t)$

$(\ddot{T}_5(t) + T_5(t)(5^2\pi^2))\cos(5\pi x) = -\cos(5\pi x)$

پس : $\ddot{T}_5(t) + T_5(t)(5^2\pi^2) = -1$

حل معادله دیفرانسیل : $T_0(t) = \frac{\sin(5\pi t)}{25\pi^2} + at + b$

$$T_5(t) = A_5\sin(5\pi t) + B_5\cos(5\pi t) - \frac{1}{25\pi^2}$$

$U(x,0) = T_0(t) + T_5(t)\cos(5\pi x) = 0$

$$\rightarrow \frac{\sin(0)}{25\pi^2} + a(0) + b = 0 \rightarrow b = 0$$

$$\rightarrow \quad A_5\sin(0) + B_5\cos(0) - \frac{1}{25\pi^2} = 0 \rightarrow \quad B_5 = \frac{1}{25\pi^2}$$

$$U_t(x,0) = \dot{T}_0(t) + \dot{T}_5(t)\cos(5\pi x) = 0$$

$$\rightarrow \frac{5\pi\cos(0)}{25\pi^2} + a = 0 \rightarrow a = \frac{-1}{5\pi}$$

$$\rightarrow \ 5\pi\, A_5\cos(0) - 5\pi\, B_5\sin(0) = 0 \ \rightarrow \ A_5 = 0$$

در نهایت :

$$U(x,t) = T_0(t) + T_5(t)\cos(5\pi x)$$

$$= \frac{\sin(5\pi t)}{25\pi^2} + \frac{-1}{5\pi}t + \frac{1}{25\pi^2}(\cos(5\pi t) - 1)\cos(5\pi x)$$

۵)

با استفاده از رابطه $v(x,t)=u(x,t)-100$ باید معادله زیر را حل نماییم:

$$\begin{cases} kv_{xx}=v_t, \quad 0<x<1, \quad t>0 \\ v(0,t)=v(1,t)=0 \\ v(x,0)=-100 \end{cases}$$

با فرض $v(x,t)=X(x)T(t)$ و $-\lambda$ به عنوان ثابت در روش جداسازی، داریم:

$$X''+\lambda X=0, \quad X(0)=X(1)=0.$$

$$T'+\lambda kT=0$$

$$\Rightarrow X=c_2\sin(n\pi x), T=c_3e^{-kn^2\pi^2t}, n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,e^{-kn^2\pi^2t}\sin(n\pi x)$$

$$v(x,0)=-100=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi x)\Rightarrow A_n=2\int_0^1(-100)\sin(n\pi x)dx$$

$$=\frac{200}{n\pi}((-1)^n-1)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=v(x,t)+100=100+\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n-1)}{n}e^{-kn^2\pi^2t}\sin(n\pi x)$$

۶)

معادله PDE همگن و شرایط مرزی ناهمگن است.

$$\begin{cases} U(x,t) = w(x,t) + v(x,t) \\ \text{Neuman:} \quad U_x(0,t) = a(t)\,, U_x(l,t) = b(t) \\ lagrangian\ interpolation\colon\ w(x,t) = xa(t) + \dfrac{x^2}{2l}[b(t) - a(t)] \end{cases}$$

پس : $w(x,t) = xt^2 + \frac{x^2}{2}(0) = xt^2$

$U_t = w_t + v_t = 2xt + v_t$ و $U_{xx} = v_{xx}$

$IC\colon\ U(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = v(x,0) + 0 \ \rightarrow\ v(x,0) = U(x,0) = 2x + 5$

جاگذاری در معادله ابتدایی : $2xt + v_t = v_{xx} + 2tx \rightarrow\ v_t = v_{xx}$

بازنویسی معادله بر حسب v :

$$v_t = v_{xx}$$

$0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t$

$v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0$

$v(x,0) = 2x + 5$

معادله گرما، همگن، شرایط مرزی همگن نیومن:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda^2 nt} \cos\left(\frac{n\pi}{1}x\right) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda^2 nt}(-1^n)$$

$$A_0 = \int_0^1 (2x+5)\,dx = 6$$

$$B_n = 2\int_0^1 (2x+5)\cos(n\pi x)\,dx = 2\left(\frac{\cos(\pi n)-1}{(n\pi)^2}\right)$$

و در نهایت:

$$\mathrm{U(x,t)} = \mathrm{w(x,t)} + \mathrm{v(x,t)} = xt^2 + \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n e^{-\lambda^2 nt}\cos(n\pi x)\right)$$

۷)

شرایط مرزی از نوع ترکیبی می باشد.

$$W(x,t) = a(t) + xb(t)$$

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$$

$$U(0,t) = V(0,t) + W(0,t) = t^2 \rightarrow W(0,t) = t^2$$

$$U_x(\pi,t) = V_x(\pi,t) + W_x(\pi,t) = 3 + t \rightarrow W_x(\pi,t) = 3 + t$$

پاسخ حالت پایدار مساله :

$$W(x,t) = t^2 + x(3+t)$$

$$U_{tt} = V_{tt} + 2\ ;\ U_{xx} = V_{xx}$$

معادله را بازنویسی میکنیم :

$$V_{tt} + 2 - \alpha V_{xx} = 2x^2 \rightarrow V_{tt} - \alpha V_{xx} = 2(x^2 - 1)$$

بازنویسی شرایط مرزی و شرایط اولیه :

$$V(0,t) = 0\ ;\ V_x(\pi,t) = 0$$

$$U(x,0) = V(x,0) + 3x \rightarrow V(x,0) = 3x - 3x = 0;$$

$$U_t(x,0) = 4 \rightarrow V_t(x,0) = 4 - x$$

پاسخ حدسی در راستای x با توجه به شرایط مرزی:

$$X_n(x) = \sin(\frac{2n-1}{2\pi}\pi x) = \sin(\frac{2n-1}{2}x)$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$V_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \; ;$$

$$V_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -(\frac{2n-1}{2})^2 T_n(t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

جاگذاری در معادله:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\,\ddot{T}_n(t) + \alpha\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 T_n(t)\,]\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = 2x^2 - 2$$

$$\ddot{T}_n(t) + \alpha\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 T_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x^2-2)\,\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx = H(n)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل :

$$T_n(t) = A_n\cos\gamma t + B_n\sin\gamma t \rightarrow \gamma = \sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

جواب خصوصی :

$$T_n(t) = C_0 \rightarrow \alpha\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 C_0 = H(n) \rightarrow C_0 = H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t + B_n \sin\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t) + B_n \sin(\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t) + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}] \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

برای محاسبه ضرایب به شرایط IC مراجعه میکنیم:

$$V(x,0) = 0 \rightarrow V(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}] \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = 0$$

$$\left[A_n + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(0)\ \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\ dx = 0$$

$$A_n = -H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}$$

$V_t(x,0) = 4 - x \rightarrow$

$$V_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\sin(\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t) + B_n\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\cos(\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t) + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}]\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$V_x(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right) + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}]\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = 4 - x$$

$$B_n\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right) + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(4-x)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx$$

حاصل انتگرال سمت راست میشود :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(4-x)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx = \frac{8}{(2n-1)\pi}[2 - \sin(\frac{2n-1}{2}\pi)]$$

با محاسبه انتگرال فوق ضریب B_n نیز بدست می آید

$$B_n = [\frac{8}{(2n-1)\pi}[2 - \sin(\frac{2n-1}{2}\pi)] - H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}]\frac{2}{\sqrt{\alpha}(2n-1)}$$

و در نهایت با جاگذاری خواهیم داشت :

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t) \rightarrow W(x,t) = t^2 + x(3+t)$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [[A_n \cos(\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t) + B_n \sin(\sqrt{\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\right)t) + H(n)\frac{4}{\alpha(2n-1)^2}] \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)] + t^2 + x(3+t)$$

۸)سوال امتیازی:

با روش تفکیک متغیر ها خواهیم داشت :

$$U(x,t) = X(x)T(t) \rightarrow X''(x)T(t) = \frac{1}{c^2} X(x)\dot{T}(t)$$

$$ODE\ X:\ X''(x) + k^2 X(x) = 0 \rightarrow X_k(x) = A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$$

$$ODE\ T:\ \dot{T}(t) + (ck)^2 T(t) = 0 \rightarrow T_k(t) = e^{-(ck)^2 t}$$

$$U_k(x,t) = [A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)]\, e^{-(ck)^2 t}$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} = [-kA_k \sin(kx) + kB_k \cos(kx)]\, e^{-(ck)^2 t}$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x}(0,t) = kB_k \cos(kx) = 0 \rightarrow B_k = 0$$

$$U_k(x,t) = [A_k \cos(kx)]\, e^{-(ck)^2 t} \rightarrow k \in [0,\infty)$$

$$U(x,t) = \int_0^\infty A_k\, e^{-(ck)^2 t} \cos(kx)\, dk$$

$$U(x,0) = \int_0^\infty A_k \cos(kx)\, dk = e^{-\alpha x}\cos(\beta x)$$

در ادامه برای محاسبه ضریب ثابت کافی است که ضریب کسینوسی انتگرال فوریه عبارت سمت راست تساوی را محاسبه کنیم.

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} cos(\beta x)\, cos(kx)\, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1}{2}[cos((\beta - k)x) + cos\big((\beta + k)x\big)\,]dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} cos((\beta - k)x)\, dx \ + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} cos((\beta + k)x)\, dx$$

از تبدیل لاپلاس کسینوس برای محاسبه پاسخ انتگرال فوق استفاده میکنیم.

$$A_k = \frac{1}{\pi}[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - k)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + k)^2}]$$

$$U(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - k)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + k)^2}]\, e^{-(ck)^2 t}\, cos(kx)\ dk$$

۹)سوال امتیازی:

با فرض $u = X(x)T(t)$ داریم:

$$u_{xx} = tu_t \rightarrow X''T = tXT' \xrightarrow{\div XT} \frac{X''}{X} = \frac{tT'}{T}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{tT'}{T} = -\lambda^2$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) \xrightarrow{x=0} 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$X(x) = A\sin(\lambda x) \xrightarrow{x=\pi} 0 = A\sin(\lambda x) \Rightarrow \lambda\pi = k\pi \Rightarrow \lambda = k \Rightarrow X(x) = A\sin(kx)$$

$$\frac{tT'}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{tT'}{T} = -k^2 \Rightarrow ln(T) = -k^2\, ln(t) + c$$

$$\Rightarrow ln(T) = ln(Dt^{-k^2}) \Rightarrow T(t) = Dt^{-k^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X(x)T(t) = \sum_{k=1}^{\infty}[A(\sin k\, x)(Dt^{-k^2})] = \sum_{k=1}^{\infty}[E_k t^{-k^2}(\sin k\, x)]$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}[E_k t^{-k^2}(\sin k\, x)] \xrightarrow{t=1} 1 = \sum_{k=1}^{\infty}[E_k(\sin k\, x)]$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{2}{L}\int_0^L l \times sin(kx)dx \xrightarrow{L=\pi} E_k = \frac{2}{\pi}\int_0^L sin(kx)dx \to E_k$$

$$= (\frac{2}{\pi})(\frac{-1}{k})(cos(k\pi) - 1)$$

$$\begin{cases} E_{2n} = 0, n \in \mathbb{N} \\ E_{2n+1} = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}, n \in W \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} t^{-(2n+1)^2} sin((2n+1)x)$$