۱)

$$x(t) = |\sin(2\pi f_0 t)|$$

$$T = \frac{1}{2f_0} \Longrightarrow L = \frac{T}{2} = \frac{1}{4f_0}$$

$$fourier\ series\ of\ x(t) \rightarrow c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{jn\pi}{L}x}dx = \frac{1}{\frac{2}{4f_0}}\int_{-\frac{1}{4f_0}}^{\frac{1}{4f_0}} |\sin(2\pi f_0 x)|e^{-jn\pi 4f_0 x}dx$$

$$= 2f_0\left(-\int_{-\frac{1}{4f_0}}^{0} \sin(2\pi f_0 x)\, e^{-jn\pi 4f_0 x}dx + \int_{0}^{\frac{1}{4f_0}} \sin(2\pi f_0 x)\, e^{-jn\pi 4f_0 x}dx\right)$$

$$= 2f_0\left(-\frac{1}{2j}\int_{-\frac{1}{4f_0}}^{0} e^{j2\pi f_0(1-2n)x} - e^{j2\pi f_0(-1-2n)x}dx + \frac{1}{2j}\int_{0}^{\frac{1}{4f_0}} e^{j2\pi f_0(1-2n)x} - e^{j2\pi f_0(-1-2n)x}dx\right)$$

$$= \frac{f_0}{i}\left(-\left[\frac{e^{j2\pi f_0(1-2n)x}}{j2\pi f_0(1-2n)} - \frac{e^{j2\pi f_0(-1-2n)x}}{j2\pi f_0(-1-2n)}\right]_{-\frac{1}{4f_0}}^{0} + \left[\frac{e^{j2\pi f_0(1-2n)x}}{j2\pi f_0(1-2n)} - \frac{e^{j2\pi f_0(-1-2n)x}}{j2\pi f_0(-1-2n)}\right]_{0}^{\frac{1}{4f_0}}\right)$$

$$= \frac{f_0}{j^2 2\pi f_0}\left(-\left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}(1-2n)}}{1-2n} - \frac{e^{j\frac{\pi}{2}(1+2n)}}{1+2n}\right) + \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}(1-2n)}}{1-2n} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}(1+2n)}}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} - \frac{1}{1+2n}\right)\right)$$

$$\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}(1-2n)} + e^{j\frac{\pi}{2}(1-2n)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-2n)\right) = 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}(1+2n)} + e^{-j\frac{\pi}{2}(1+2n)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+2n)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ c_n = -\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{4}{1-4n^2}\right) = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

برای بدست آوردن سری فوریه مختلط تابع $|\sin(2\pi f_0 t)|$، با توجه به متناوب بودن تابع $|\sin(2\pi f_0 x)|e^{-in\pi 4 f_0 x}$ با فرکانس $\frac{1}{T}$، می‌توان بازه انتگرال‌گیری را تغییر داد و تنها کافیست که طول این بازه برابر با T باشد:

$$2f_0\int_0^{\frac{1}{2f_0}} \sin(2\pi f_0 t)\, e^{-jn\pi 4 f_0 t} dt$$

$$= \frac{f_0}{j}\left(\frac{e^{j\pi(1-2n)}-1}{j2\pi f_0(1-2n)} - \frac{e^{j\pi(-1-2n)}-1}{j2\pi f_0(-1-2n)}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4n^2)}e^{jn4\pi f_0 t}\right) e^{-j\omega t}dt$$

$$* \ \exp(jat) \rightarrow\ 2\pi\delta(\omega - a)$$

$$X(j\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{1-4n^2}\delta(\omega - 4n\pi f_0)$$

۲)

$$sinc(t) \rightarrow\ rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$sinc^2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi}\left(rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) *\ rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right) = tri\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه sneginsafari@gmail.com مکاتبه نمایید.

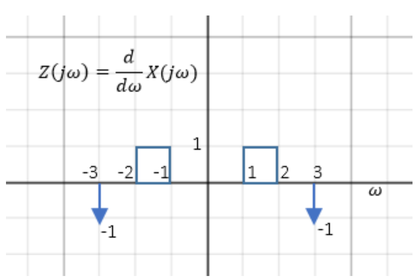
$$
\begin{aligned}
A = \int_{-\infty}^{\infty} |sinc^2(t)|^2 . dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|tri(\frac{\omega}{2\pi})\right|^2 . d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tri^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right). d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\pi}^{0}\left(\frac{1}{2\pi}\omega+1\right)^2 . d\omega + \int_{0}^{2\pi}\left(\frac{-1}{2\pi}\omega+1\right)^2 . d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{3}-0\right)+\frac{1}{2\pi}\left(0-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} . d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega). \exp(j\omega \times 0) . d\omega = 2\pi\, x(0) = \frac{2\pi}{2}\exp(-|0|) = \pi
\end{aligned}
$$

$* \quad 0.5\exp(-|t|) \rightarrow \dfrac{1}{1+\omega^2}$

۳)

برای حل این سوال از مشتق $X(j\omega)$ کمک میگیریم.



پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

$$
\begin{aligned}
z(t) = f^{-1}\{Z(j\omega)\} \\
&= f^{-1}\{-\delta(\omega+3) - \delta(\omega-3) + rect(\omega-1.5) + rect(\omega+1.5)\} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\exp(-j3t) \\
&-\frac{1}{2\pi}\exp(j3t) + \exp(j1.5t).\left(\frac{\sin(0.5t)}{\pi t}\right) \\
&+ \exp(-j1.5t).\left(\frac{\sin(0.5t)}{\pi t}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\cos(3t) + \frac{2}{\pi t}\cos(1.5t).\sin(0.5t)
\end{aligned}
$$

$* \quad -jtx(t) \rightarrow \dfrac{d}{d\omega}X(j\omega)$

$$x(t) = \frac{j}{t}z(t) = -\frac{j}{\pi t}\cos(3t) + \frac{2j}{\pi t^2}\cos(1.5t).\sin(0.5t)$$

۴)

ابتدا از دو طرف عبارت ۲ تبدیل فوریه میگیریم.

$$
\begin{aligned}
(1+j\omega)X(j\omega) = f\{A.exp(-2t)u(t)\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\big(A.exp(-2t)u(t)\big).\exp(-j\omega t).dt = \frac{A}{2+j\omega}
\end{aligned}
$$

$$X(j\omega) = \frac{A}{(1+j\omega).(2+j\omega)}$$

از عبارت ۱ میفهمیم که $X^*(-j\omega) = X(j\omega)$

$$\left[\frac{A}{(1-j\omega).(2-j\omega)}\right]^* = \frac{A}{(1+j\omega).(2+j\omega)} \quad \rightarrow \quad A^* = A$$

پس A یک عدد حقیقی مثبت است.

$$X(j\omega) = \frac{A}{(1+j\omega).(2+j\omega)} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{-A}{2+j\omega}$$

$$x(t) = A.exp(-t).u(t) - A.\exp(-2t).u(t) = A[\exp(-t) - \exp(-2t)].u(t)$$

حال به کمک عبارت آخر به جواب میرسیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2.dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2.d\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\rightarrow \quad A^2 \int_{-\infty}^{\infty} [(\exp(-t) - \exp(-2t)).u(t)]^2.dt = 1$$

$$\rightarrow \quad A^2 \int_{0}^{\infty} (\exp(-t) - \exp(-2t))^2.dt = 1 \rightarrow \quad A^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) = 1$$

$$\rightarrow \quad A = \pm\sqrt{12}$$

تنها مقدار مثبت قابل قبول است.

$$x(t) = \sqrt{12}\,[\exp(-t) - \exp(-2t)].u(t)$$

۵)

I) $X(j\omega)=\frac{j\omega-1}{j\omega+2}$

$$X(j\omega)=\frac{j\omega-1}{j\omega+1}=1-\frac{3}{j\omega+2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\}=\ \delta(t) \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3}{(j\omega+2)}\right\}=3e^{-2t}u(t)$$

$$\rightarrow x(t)=\delta(t)-3e^{-2t}u(t)$$

II) $X(j\omega)=\frac{e^{-j3\omega}}{(2+j\omega)^2}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2+j\omega)}\right\}=e^{-2t}u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right\}=te^{-2t}u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-j3\omega}}{(2+j\omega)^2}\right\}=x(t)=(t-3)e^{-2(t-3)}u(t-3)$$

III) $X(j\omega)=\frac{(j\omega+1)^2(j\omega+2)}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$

$$X(j\omega)=\frac{(j\omega+1)^2(j\omega+2)}{(j\omega+3)(j\omega+4)}=-3+j\omega-\frac{4}{(j\omega+3)}+\frac{18}{(j\omega+4)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{3\}=3\delta(t)\ ,\ \mathcal{F}^{-1}\{j\omega\}=\ \delta'(t)\ ,\ \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{4}{(j\omega+3)}\right\}=4e^{-3t}u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{18}{(j\omega+4)}\right\}=18e^{-4t}u(t)\rightarrow x(t)=18e^{-4t}u(t)-4e^{-3t}u(t)+\delta'(t)-3\delta(t)$$

۶)

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+K^2u=e^{-|x|}\ ;\ -\infty<x<\infty$$

می دانیم: $\mathcal{F}\{e^{-a|x|}\}=\frac{2a}{\omega^2+a^2}$

با تبدیل فوریه گرفتن از دو طرف خواهیم داشت:

$$-(j\omega)^2U(j\omega)+K^2U(j\omega)=\frac{2}{\omega^2+1}$$

$$\rightarrow U(j\omega)=\left(\frac{2}{\omega^2+1}\right)\left(\frac{1}{\omega^2+K^2}\right)=\left(\frac{1}{\omega^2+1}-\frac{1}{\omega^2+K^2}\right)\frac{2}{K^2-1}$$

$$\rightarrow u(x)=\left(\frac{e^{-|x|}}{K^2-1}-\frac{e^{-K|x|}}{K(K^2-1)}\right)$$

$$|x|\rightarrow\ \infty=>\ u(x)\rightarrow 0=>K>0$$

۷) الف)

$$f(x)=\ e^{-x}\cos(2\pi x)\,u(x)=\left(\frac{e^{j2\pi x}+e^{-j2\pi x}}{2}\right)e^{-x}u(x)$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j(\omega-2\pi)}+\frac{1}{j(\omega+2\pi)}\right)=\frac{j\omega}{4\pi^2-\omega^2}$$

ب) طبق قضیه پارسوال در تبدیل فوریه:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\omega}{4\pi^2-\omega^2}\right)^2d\omega=$$

$$\frac{1}{16\pi}\left(-\frac{4\omega}{\omega^2-4\pi^2}+\frac{\log(2\pi-\omega)}{\pi}-\frac{\log(2\pi+\omega)}{\pi}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=59.0707$$

با توجه به توضیحات بالا جواب سوال می‌شود بله،حاصل عبارت محدود است.

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

۸)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

این تابع، تابع آشناییست و همانطور که میدانیم حاصل تبدیل فوریه آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$if\ g(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \to G(\omega) = \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

در نتیجه در این سوال خواهیم داشت:

$$F(\omega) = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

از طرفی می‌دانیم که حاصل تبدیل فوریه مشتق یک تابع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{F}\{g^n(x)\} = (j\omega)^n G(\omega)$$

در نتیجه در این سوال خواهیم داشت:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = (j\omega)\frac{2\sin(2\omega)}{\omega} = j2\sin(2\omega)$$

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.