معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی-قسمت اول

اگر تابعی به صورت $u(x,y,.....z)$ یعنی تابع بیش از یک متغییر باشد در اینصورت مشتق این تابع نسبت به هر کدام از این متغییر ها را مشتق جزیی مینامند مثلا $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x$ را مشتق تابع u نسبت به متغییر x مینامند در حالی که اگر تابع فقط یک متغییرداشته باشد یعنی به صورت $u(x)$ باشد مشتق آن تابع نسبت به x به صورت $\frac{du}{dx}$ نشان داده میشود. در مشتق جزیی اندیس یعنی متغییری که نسبت به آن مشتق گرفته میشود. مثلا u_{xx} یعنی مشتق دوم تابع نسبت به متغییر x بعبارت دیگر $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{xx}$. حال $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=u_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x})$. یک معادله دیفرانسیل دو متغییره با مشتقات جزیی را میتوان به صورت زیر در حالت کلی نشان داد:

$$f(u_x,u_{xx},u_{xy},u_{yy},u_y)=0$$

حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی به روش جدا سازی متغییره ها

برای استفاده از این روش تابع دو متغییره را به صورت $u(x,y)=f(x)g(y)$ یعنی به صورت حاصلضرب دو تابع نوشته و با جایگزینی در معادله دیفرانسیل دو تابع $f(x)$ و $g(y)$ را بدست می آوریم. مثالهای زیر این روش را نشان میدهند

مثال **1**: معادله دیفرانسیل زیر را به روش جداسازی متغییرها حل کنید.

$$xu_x-yu_y=0$$

حل: تابع مجهول $u(x,y)$ را به صورت $u(x,y)=f(x)g(y)$ مینویسیم که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$xu_x-yu_y=0\rightarrow xg(y)\frac{df(x)}{dx}-yf(x)\frac{dg(y)}{dy}=0$$

حال اگر طرفین معادله بدست آمده را بر $f(x)g(y)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}-\frac{y}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}=0\rightarrow\frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{y}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}$$

حال اگر دقت شود ملاحظه میکنیم که طرف چپ معادله یعنی $\frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$ تنها تابع x و سمت راست معادله یعنی $\frac{y}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}$ تنها تابع y میباشد و تساوی امکان ندارد مگر اینکه هر دو طرف عدد ثابت باشند بعبارت دیگر:

$$\begin{cases}\frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=k\rightarrow\frac{df(x)}{f(x)}=\frac{kdx}{x}\rightarrow\ln\ f(x)=k\ln(c_1x)=\ln(c_1x)^k\rightarrow f(x)=(c_1x)^k=k_1x^k\\ \frac{y}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}=k\rightarrow\frac{dg(y)}{g(y)}=\frac{kdy}{y}\rightarrow\ln g(y)=k\ln(c_2y)=\ln(c_2y)^k\rightarrow g(y)=(c_2y)^k=k_2y^k\end{cases}$$

در نتیجه $u(x,y)=f(x)g(y)=k_1k_2(xy)^k=c(xy)^k$. با داشتن شرایط اولیه ضرایب ثابتهای c و k بدست می آیند.

مثال **2**: معادله دیفرانسیل زیر را به روش جداسازی متغییرها حل کنید.

$$u_y - xu_x = 0$$

حل: تابع مجهول $u(x,y)$ را به صورت $u(x,y) = f(x)g(y)$ مینویسیم که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$u_y - xu_x = 0 \rightarrow f(x)\frac{dg(y)}{dy} - xg(y)\frac{df(x)}{dx} = 0$$

حال اگر طرفین معادله بدست آمده را بر $f(x)g(y)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy} - \frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy} = \frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$$

حال اگر دقت شود ملاحظه میکنیم که طرف راست معادله یعنی $\frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$ تنها تابع x و سمت چپ معادله یعنی $\frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}$ تنها تابع y میباشد و تساوی امکان ندارد مگر اینکه هر دو طرف عدد ثابت باشند بعبارت دیگر:

$$\begin{cases} \frac{x}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = k \rightarrow \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{kx}{dx} \rightarrow \ln\ f(x) = k\ln(c_1 x) = \ln(c_1 x)^k \rightarrow f(x) = (c_1 x)^k = Ax^k \\ \qquad \frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy} = k \rightarrow \frac{dg(y)}{g(y)} = kdy \rightarrow \ln g(y) = ky + c_2 \rightarrow g(y) = e^{ky+c_2} = c_3 e^{ky} \end{cases}$$

در نتیجه $u(x,y) = f(x)g(y) = Ax^k c_3 e^{ky} = cx^k e^{ky}$. با داشتن شرایط اولیه ضرایب ثابتهای c و k بدست می آیند.

مثال **3** معادله دیفرانسیل زیر را به روش جداسازی متغییرها حل کنید

$$2u_y + \frac{3}{x}u_x = 6(4y^3 + 3x^2)u$$

حل: تابع مجهول $u(x,y)$ را به صورت $u(x,y) = f(x)g(y)$ مینویسیم که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$2u_y + \frac{3}{x}u_x = 6(4y^3 + 6x^2)u \rightarrow 2f(x)\frac{dg(y)}{dy} + \frac{3}{x}g(y)\frac{df(x)}{dx} = 6(4y^3 + 6x^2)f(x)g(y)$$

حال اگر طرفین معادله بدست آمده را بر $f(x)g(y)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{2}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy} + \frac{3}{xf(x)}\frac{df(x)}{dx} = 24y^3 + 36x^2$$

توابع همنام در دوطرف رابطه باید با هم برابر باشند یعنی جمله اول عبارت سمت چپ $\frac{2}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}$ که تابع y است باید با جمله اول عبارت سمت راست $24y^3$ که تابع y است برابر و جمله دوم عبارت سمت چپ $\frac{3}{xf(x)}\frac{df(x)}{dx}$ که تابع x است باید با جمله دوم عبارت سمت راست $36x^2$ که تابع x است برابرباشد. به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} \frac{2}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}=24y^3 \rightarrow \frac{dg(y)}{g(y)}=12y^3dy \rightarrow \ln g(y)=3y^4+c_1 \rightarrow g(y)=e^{3y^4+c_1}=k_1e^{3y^4} \\ \frac{3}{xf(x)}\frac{df(x)}{dx}=36x^2 \rightarrow \frac{df(x)}{f(x)}=12x^3dx \rightarrow \ln f(x)=3x^4+c_2 \rightarrow f(x)=e^{3x^4+c_2}=k_2e^{3x^4} \end{cases}$$

در نتیجه $u(x,y)=f(x)g(y)=k_2e^{3x^4}k_2e^{3y^4}=ke^{3(x^4+y^4)}$**. با داشتن شرایط اولیه ثابت** k**بدست می آید.**

مثال 4 معادله دیفرانسیل زیر را به روش جداسازی متغییرها حل کنید

$$4x^3u_{xy}-5y^4u=0$$

حل: تابع مجهول $u(x,y)$ **را به صورت** $u(x,y)=f(x)g(y)$**مینویسیم که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:**

$$4x^3u_{xy}-5y^4u=0 \rightarrow 4x^3\frac{df(x)}{dx}\frac{dg(y)}{dy}-5y^4f(x)g(y)=0$$

حال اگر طرفین معادله بدست آمده را بر $f(x)g(y)$ **تقسیم کنیم خواهیم داشت:**

$$\frac{4x^3}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}\frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}-5y^4=0 \rightarrow \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}\frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}=\frac{1}{4x^3}(5y^4)$$

حال ملاحظه میشود که عبارت سمت چپ حاصلضرب یک تابع از x **و یک تابع از** y **و عبارت سمت راست نیز حاصلضرب یک تابع از** x **و یک تابع از** y **میباشد برای اینکه تساوی همواره برقرار باشد عبارت هم تابع دو طرف باید برابر باشند یعنی:**

$$\begin{cases} \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{4x^3} \rightarrow \frac{df(x)}{f(x)}=\frac{dx}{4x^3} \rightarrow \ln f(x)=-\frac{1}{8x^2}+c_1 \rightarrow f(x)=e^{-\frac{1}{8x^2}+c_1}=k_1e^{-\frac{1}{8x^2}} \\ \frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}=5y^4 \rightarrow \frac{dg(y)}{g(y)}=5y^4dy \rightarrow \ln g(y)=y^5+c_2 \rightarrow g(y)=e^{y^5+c_2}=k_2e^{y^5} \end{cases}$$

در نتیجه $u(x,y)=f(x)g(y)=k_1e^{-\frac{1}{8x^2}}k_2e^{y^5}=ke^{(-\frac{1}{8x^2}+y^5)}$**. با داشتن شرایط اولیه ثابت** k**بدست می آید.**

حل معادلات دیفرانسیل به روش تغییر متغییر

تمام معادله دیفرانسیل را نمیتوان به روش جدا سازی حل کرد باید از روش تغییر متغییر حل کرد. مثلا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی را در نظر بگیرید:

$$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0 \qquad u=f(x,y)$$

حال تغییر متغییرهای زیر را اعمال میکنیم:

$$\begin{cases} v=t \\ z=x+y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=z-t \end{cases} \rightarrow u=f(t,z)$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=u_t\times 1+u_z\times 1=u_t+u_z$$

$$u_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u_t+u_z)=(\frac{\partial u_t}{\partial x})+(\frac{\partial u_z}{\partial x})=(\frac{\partial u_t}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})+(\frac{\partial u_z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})=(u_{tt}\times 1+u_{tz}\times 1)+$$
$$(u_{tz}\times 1+u_{zz}\times 1)=u_{tt}+2u_{tz}+u_{zz}$$

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=u_t\times 0+u_z\times 1=u_z \qquad u_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(u_t+u_z)=\frac{\partial u_t}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial y}=(\frac{\partial u_t}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y})+$$
$$(\frac{\partial u_z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y})=(u_{tt}\times 0+u_{tz}\times 1)+(u_{tz}\times 0+u_{zz})=u_{tz}+u_{zz}$$

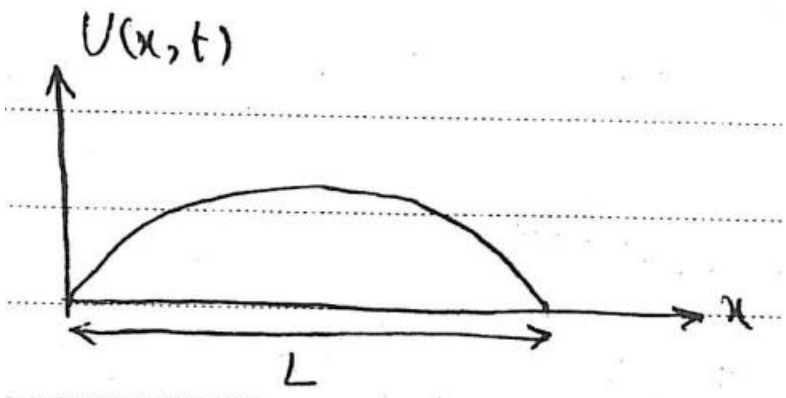
$$u_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial u_z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=u_{tt}\times 0+u_{zz}\times 1=u_{zz}$$

حال با جایگزینی u_{xx}، u_{xy} و u_{yy} در معادله $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$ خواهیم داشت:

$$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0\rightarrow u_{tt}+2u_{tz}+u_{zz}-2(u_{tz}+u_{zz})+u_{zz}=0\rightarrow u_{tt}=0\rightarrow\frac{\partial u_t}{\partial t}=0\rightarrow u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=k\rightarrow$$
$$u=kt+c\rightarrow u=kx+c$$

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی برای تار مرتعش (معادله موج یا دامنه ارتعاش)

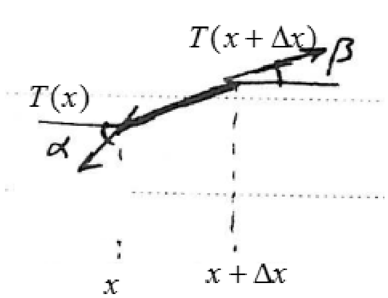
فرض کنید تار مرتعش دارای طول L روی محور x میباشد. در اینصورت $u(x,t)$ معادله دامنه تارمرتعش در فاصله x از ابتدای تار و در لحظه t میباشد.



شرایط مرزی برای تار نشان داده شده به صورت زیر است:

$$\begin{cases}u(0,t)=0\\u(L,t)=0\end{cases}$$

حال فرض کنید دامنه تار در لحظه $t=0$ که همان مقدار اولیه میباشد به صورت $u(x,0)=f(x)$ و سرعت اولیه یعنی در لحظه $t=0$ به صورت $u_t(x,0)=g(x)$ داده شده باشند.حال باید معادله دیفرانسیل دامنه ارتعاش تار را با استفاده از قانون نیوتن مطابق شکل زیر بدست آوریم. اگر طول Δx از تار را در نظر بگیریم و نیروی کشش در ابتدای این تار $T(x)$ (یعنی به فاصله x از ابتدای تار) و در فاصله $x+\Delta x$ از ابتدای تار به صورت $T(x+\Delta x)$ باشد در اینصورت برآیند نیروهای وارد بر این قطعه از تار در جهت افقی صفر و در جهت عمودی برابر جرم تار در شتاب آن در جهت عمودی میباشد یعنی:



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \to T(x+\Delta x)\cos\beta - T(x)\cos\alpha = 0 \to T(x+\Delta x)\cos\beta = T(x)\cos\alpha = T \to T(x+\Delta x) = \dfrac{T}{\cos\beta} \\ \qquad T(x) = \dfrac{T}{\cos\alpha} \qquad \sum F_y = \Delta m \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to T(x+\Delta x)\sin\beta - T(x)\sin\alpha - \Delta mg = \Delta m \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to \\ \qquad \dfrac{T}{\cos\beta}\sin\beta - \dfrac{T}{\cos\alpha}\sin\alpha - \rho\Delta xg = \rho\Delta x \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to \dfrac{T}{\rho}\dfrac{1}{\Delta x}(\tan\beta - T\tan\alpha) = g + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

میدانیم تانژانت هر زاویه برابر است با ضریب زاویه مماس در نقطه تماس و یا مشتق تابع در نقطه تماس میباشد در اینصورت میتوانیم بنویسیم:

$$\frac{T}{\rho}\frac{1}{\Delta x}(\tan\beta - T\tan\alpha) = g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{1}{\Delta x}[\frac{\partial u(x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(x)}{\partial x}] = g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to \frac{T}{\rho}\frac{u_x(x+\Delta x) - u_x(x)}{\Delta x} = g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\to \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

اگر از وزن تار صرفنظر کنیم در اینصورت میتوان از جمله Δmg در معادلات بالا صرفنظر کرد که معادله بالا به صورت زیر خواهد شد:

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

معادله بالا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای دامنه موج در تار مرتعش میباشد که میتوان آنرا به روش جدا سازی متغییرها حل کرد که در ادامه خواهد آمد.

حل معادله تار مرتعش

تابع $u(x,t)$ را میتوان به صورت $u(x,t) = f(x)g(t)$ نوشت که با جایگزینی در معادله تار مرتعش خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to g(t)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\, f(x)\frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

حال اگر طرفین معادله بدست آمده را بر $f(x)g(t)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

سمت چپ معادله بالا یعنی $\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ فقط تابع x و سمت راست این معادله یعنی $\frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2}$ فقط تابع t میباشند و این معادله امکان ندارد برقرار باشد مگر هر دو طرف ثابت باشند. حالا سه حالت را بررسی میکنیم:

الف) دو طرف صفر باشند یعنی:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 \to \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 \to f(x) = Ax + B \qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = 0 \to \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = 0 \to g(t) = Ct + D$$

در نتیجه داریم:

$$u(x,t)= f(x)g(t)=(Ax+B)(Ct+D)$$

حال برای محاسبه ضرایب شرایط مرزی را اعمال میکنیم که خواهیم داشت:

$$u(0,t)=0 \to (A\times 0+B)(Ct+D)=0 \to B(Ct+D)=0 \to B=0 \to u(x,t)=Ax(Ct+D)$$
$$u(L,t)=0 \to AL(Ct+D)=0 \to A=0 \to u(x,t)=(Ax+B)(Ct+D)=0$$

بنابراین دوطرف نمیتوانند صفر باشند

ب) دو طرف مثبت باشند یعنی:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=k^2 \to \frac{d^2 f(x)}{dx^2}=k^2 f(x) \to f(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2}=k^2$$
$$\to \frac{d^2 g(t)}{dt^2}=(kc)^2 g(t) \to g(t)=Ce^{kct}+De^{-kct} \to u(x,t)= f(x)g(t)=(Ae^{kx}+Be^{-kx})(Ce^{kct}+De^{-kct})$$

حال برای محاسبه ضرایب شرایط مرزی را اعمال میکنیم که خواهیم داشت:

$$u(0,t)=0 \to (A+B)(Ce^{kct}+De^{-kct})=0 \to A+B=0$$
$$u(L,t)=0 \to (Ae^{kL}+Be^{-kL})(Ce^{kct}+De^{-kct})=0 \to Ae^{kL}+Be^{-kL}=0 \to \begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{kL}+Be^{-kL}=0 \end{cases} \to$$
$$B=-A \qquad Ae^{kL}+Be^{-kL}=0 \qquad Ae^{kL}-Ae^{-kL}=0 \to A(e^{kL}-e^{-kL})=0 \to 2A\sinh kL=0 \to A=0$$
$$B=-A=0 \to u(x,t)=(Ae^{kx}+Be^{-kx})(Ce^{kct}+De^{-kct})=0$$

بنابراین دوطرف نمیتوانند مثبت باشند

پ) دو طرف منفی باشند یعنی:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=-k^2 \to \frac{d^2 f(x)}{dx^2}=-k^2 f(x) \to f(x)=A_1\cos kx+B_1\sin kx \qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2}=-k^2$$
$$\to \frac{d^2 g(t)}{dt^2}=-(kc)^2 g(t) \to g(t)=A_2\cos kct+B_2\sin kct \to$$
$$u(x,t)= f(x)g(t)=(A_1\cos kx+B_1\sin kx)(A_2\cos kct+B_2\sin kct)$$

حال برای محاسبه ضرایب شرایط مرزی را اعمال میکنیم که خواهیم داشت:

$$u(0,t)=0 \to (A_1\cos 0+B_1\sin 0)(A_2\cos kct+B_2\sin kct)=0 \to A_1=0 \to u(x,t)=B_1\sin kx(A_2\cos kct+B_2\sin kct)$$
$$u(x,t)=(A\sin kct+B\cos kct)\sin kx \qquad u(L,t)=0 \to (A\sin kct+B\cos kct)\sin kL=0 \to \sin kL=0$$
$$\to kL=m\pi \to k=\frac{m\pi}{L} \to u(x,t)=(A\sin\frac{m\pi c}{L}t+B\cos\frac{m\pi c}{L}t)\sin\frac{m\pi}{L}x$$

حال برای محاسبه ضرایب مجهول شرایط اولیه را اعمال میکنیم:

$$u(x,0)=(A\sin\frac{m\pi c}{L}(0)+B\cos\frac{m\pi c}{L}(0))\sin\frac{m\pi}{L}x=f(x)\rightarrow B\sin\frac{m\pi}{L}x=f(x)$$

تساوی بالا امکان ندارد زیرا سمت چپ یک تابع سینوسی با پریود $2L$ ولی سمت راست یک تابع اختیاری $f(x)$ میباشد. تنها راه حل این مشکل اینست که تابع بدست امده را به صورت مجموع بینهایت تابع سینوسی بنویسیم که طبق قانون سری فوریه هر تابع اختیاری پریودیک را میتوان به صورت بینهایت جمله سینوس و کسینوس نوشت حال اگر فرض کنیم که تابع اختیاری $f(x)$ به صورت پریودیک با پریود $2L$ گسترش فرد یافته بطوریکه در طول میله دارای تابع با شرایط اولیه داده شده است میتوان این تابع را به صورت مجموع نشان داد یعنی نوشت:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x$$

بنابراین میتوان پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی تار مرتعش را به صورت کلی زیر نوشت:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin\frac{m\pi c}{L}t+B_m\cos\frac{m\pi c}{L}t)\sin\frac{m\pi}{L}x$$

واضح است که چون به ازای هر مقدار m جواب بدست آمده درمعادله دیفرانسیل صدق میکند مجموع پاسخها که هر پاسخ به ازای یک مقدار m میباشد نیز جواب است.

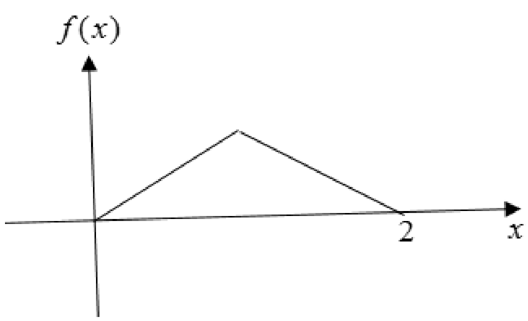
$$u(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x=f(x)\rightarrow B_m=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx$$

$$u_t(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\frac{m\pi c}{L})\sin\frac{m\pi}{L}x=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\sin\frac{m\pi}{L}x=g(x)\rightarrow D_m=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx\rightarrow$$

$$A_m\frac{m\pi c}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx\rightarrow A_m=\frac{2}{m\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx$$

لازم به ذکر است که B_m و D_m همان ضرایب بسط سینوسی فوریه توابع $f(x)$ و $g(x)$ میباشند که قبلا در بحث سری فوریه روابط آنها داده شده است.

مثال **5**: یک تارمرتعش به طول **2** متر که سرعت اولیه آن صفر و وضعیت اولیه ان در شکل زیر نشان داده شده است را در نظر بگیرید. اگر دو انتهای تار در وضعیت صفر نگه داشته شده باشد معادله تارمرتعش را بدست آورید.



$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$$

حل: چون سرعت اولیه $g(x)=0$ است بنابراین طبق معادلات بالا $A_m=\frac{2}{m\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx=0$ در نتیجه پاسخ معادله تار مرتعش به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\cos\frac{m\pi c}{L}t\sin\frac{m\pi}{L}x \qquad u(x,0)=f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x\rightarrow$$

$$B_m=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{m\pi}{2}xdx=\int_0^1 x\sin\frac{m\pi}{2}xdx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{m\pi}{2}xdx=$$

$$[(x\times\frac{-2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}x)_0^1+\int_0^1\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}x]+(-\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}x)_1^2-[(x\times\frac{-2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}x)_1^2+\int_1^2\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}xdx]=$$

$$\frac{8}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}\rightarrow u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi c}{2}t\sin\frac{m\pi}{2}x$$

در محاسبات بالا از روش انتگرال جز به جز استفاده کردیم که محاسبات طولانی بود برای اجتناب از این روش کافیست از طرفین رابطه مشتق بگیریم یعنی:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x\rightarrow f'(t)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ -1 & 1<x<2\end{cases}=h(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\frac{m\pi}{L}\cos\frac{m\pi}{L}x\rightarrow$$

$$B_m\frac{m\pi}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L h(x)\cos\frac{m\pi}{L}xdx=\frac{2}{2}\int_0^2 h(x)\cos\frac{m\pi}{2}xdx=\int_0^1 1\times\cos\frac{m\pi}{2}xdx+\int_1^2(-1)\cos\frac{m\pi}{2}xdx\rightarrow$$

$$B_m\frac{m\pi}{2}=[\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{2}x]_0^1-[\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{2}x]_1^2=\frac{4}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{2}\rightarrow B_m=\frac{8}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}$$

که همان پاسخ بالا است. دقت کنید در حالتی که سرعت اولیه صفر است پاسخ معادله تار مرتعش به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\cos\frac{m\pi c}{L}t\sin\frac{m\pi}{L}x=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}(x-ct)+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}(x+ct)$$

حال با توجه به اینکه $u(x,0)=f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x$ معادله بالا را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}(x-ct)+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}(x+ct)=\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2}f(x+ct)$$

حال همین پاسخ را به روش دالامبر بدست می آوریم. دقت کنید که پاسخ بالا را با حل معادله تار مرتعش به روش جداسازی متغییرها بدست آوردیم در حالی که در روش دالامبر نیازی به حل معادله به روش جداسازی متغییرها ندارد

حل معادله موج در تار مرتعش به روش تغییر متغییر (روش دالامبر)

در این روش از دو متغییر جدید به صورت زیر استفاده میکنیم:

$$\begin{cases}y=x+ct\\ z=x-ct\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}(y+z)\\ t=\frac{1}{2c}(y-z)\end{cases}\rightarrow u(x,t)=u(y,z)$$

حال از روابط زیر استفاده میکنیم:

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=u_y\times 1+u_z\times 1=u_y+u_z \qquad u_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u_y+u_z)=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial x}=$$
$$(\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})+(\frac{\partial u_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})=(u_{yy}\times 1+u_{yz}\times 1)+(u_{zy}\times 1+u_{zz}\times 1)=u_{yy}+2u_{yz}+u_{zz}$$
$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=u_y\times c+u_z\times -c=c(u_y-u_z) \qquad u_{tt}=\frac{\partial u_t}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}c(u_y-u_z)=c(\frac{\partial u_y}{\partial t}-\frac{\partial u_z}{\partial t})=$$
$$c(\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t})-c(\frac{\partial u_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t})=c(u_{yy}\times c+u_{yz}\times -c)-c(u_{zy}\times c+u_{zz}\times -c)=c^2(u_{yy}-2u_{yz}+u_{zz})$$

حالا روابط بدست آمده را در معادله تارمرتعش میگذاریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rightarrow u_{xx}=\frac{1}{c^2}u_{tt}\rightarrow u_{yy}+2u_{yz}+u_{zz}=\frac{1}{c^2}\times c^2(u_{yy}-2u_{yz}+u_{zz})\rightarrow 4u_{yz}=0\rightarrow u_{yz}=0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial y})=0\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=f(y)\rightarrow u(y,z)=\int f(y)dy+\phi(z)=\psi(y)+\phi(z)=\psi(x+ct)+\phi(x-ct)\rightarrow$$
$$u(x,t)=\psi(x+ct)+\phi(x-ct)$$

حال شرایط اولیه را اعمال میکنیم:

$$u(x,t)=\psi(x+ct)+\phi(x-ct)\rightarrow u(x,0)=f(x)=\psi(x)+\phi(x)$$
$$u_t(x,0)=g(x)=c\psi'(x)-c\phi'(x)\rightarrow \psi(x)-\phi(x)=\frac{1}{c}\int g(x)dx+k\rightarrow \begin{cases}\psi(x)+\phi(x)=f(x)\\ \psi(x)-\phi(x)=\frac{1}{c}\int g(x)dx+k\end{cases}\rightarrow$$
$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int g(x)dx+\frac{k}{2} \qquad \phi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int g(x)dx-\frac{k}{2}$$

با توجه به صفر بودن سرعت اولیه $g(x)=0$ در نتیجه داریم:

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{k}{2} \qquad \phi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{k}{2} \qquad u(x,t)=\psi(x+ct)+\phi(x-ct)\rightarrow$$
$$u(x,t)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{k}{2}=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)$$

که همان جوابی است که قبلا به روش جدا سازی متغییرها بدست آورده بودیم.

حال فرض کنید که ابتدا و انتهای میله در دامنه صفر نباشد مثلا $u(0,t)=u_0, \quad u(L,t)=u_L$ در اینصورت با توجه به اینکه پاسخ معادله تارمرتعش در حالت کلی به صورت: $u(x,t)=(A_1\cos kx+B_1\sin kx)(A_2\cos kct+B_2\sin kct)$ میباشد برای محاسبه ضرایب باید بنویسیم:

$$u(0,t)=(A_1\cos kx+B_1\sin kx)(A_2\cos kct+B_2\sin kct)=A_1(A_2\cos kct+B_2\sin kct)=u_0$$
$$u(L,t)=(A_1\cos kL+B_1\sin kL)(A_2\cos kct+B_2\sin kct)=u_L$$

ملاحظه میشود که معادلات بالا غیر قابل حل هستند زیرا طرف چپ معادلات تابع زمان و طرف راست معادلات اعداد ثابت هستند بنابراین نمیشودضرایب را بدست آورد. فرض کنید شرایط اولیه برای تار مرتعش به صورت $u(x,0)=f(x),\ \ u_t(x,0)=g(x)$ و شرایط مرزی برای تار به صورت $u(L,t)=u_L \quad u(0,t)=u_0,$ باشند.برای حل این مشکل به صورت زیر عمل میکنیم:

$$u(x,t)=u(x,t)-V(x)+V(x)=\psi(x,t)+V(x)$$

حال با جایگزینی در معادله تار داریم:

$$c^2u_{xx}=u_{tt}\rightarrow c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi(x,t)+V(x))=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi(x,t)+V(x))\rightarrow c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+c^2\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

ملاحظه میشود که سمت چپ مجموع یک تابع از (x,t)و یک تابع از (x)در حالی که سمت راست فقط یک جمله و تابعی از (x,t) است پس باید جملات هم تابع برابر باشند یعنی:

$$\begin{cases} c^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} \\ c^2\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=0 \end{cases}$$

حال شرایط مرزی و شرایط اولیه را برای معادلات بالا بدست می آوریم:

$$u(0,t)=u_0=\psi(0,t)+V(0)\rightarrow\psi(0,t)=0\ \ ,\ \ V(0)=u_0\quad u(L,t)=u_L=\psi(L,t)+V(L)\rightarrow$$
$$\psi(L,t)=0,V(L)=u_L\qquad u(x,0)=f(x)=\psi(x,0)+V(x)\rightarrow\psi(x,0)=f(x)-V(x)$$
$$u_t(x,0)=\psi_t(x,0)$$

بنابراین معادلات بالا همراه با شرایط مرزی و اولیه اشان به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{cases} c^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2},\quad \psi(0,t)=\psi(L,t)=0\quad \psi(x,0)=f(x)-V(x)=h(x)\quad \psi_t(x,0)=g(x) \\ c^2\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=0\rightarrow V(x)=Ax+B\quad V(0)=u_0\quad V(L)=u_L\rightarrow B=u_0\quad A=\dfrac{u_L-u_0}{L}\rightarrow V(x)=\dfrac{u_L-u_0}{L}x+u_0 \end{cases}$$

معادله اول همان معادله قبلی با شرایط مرزی صفر در ابتدا و انتهای تار مرتعش میباشد که پاسخ ان قبلا بدست آمده که به صورت زیر است:

$$\psi(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin\frac{m\pi c}{L}t+B_m\cos\frac{m\pi c}{L}t)\sin\frac{m\pi}{L}x\qquad \psi(x,0)=f(x)-V(x)=h(x)\quad \psi_t(x,0)=g(x)$$

$$\psi(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x=h(x)\rightarrow B_m=\frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx$$

$$\psi_t(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\frac{m\pi c}{L})\sin\frac{m\pi}{L}x=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\sin\frac{m\pi}{L}x=g(x)\rightarrow D_m=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx\rightarrow$$

$$A_m\frac{m\pi c}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx\rightarrow A_m=\frac{2}{m\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx$$

که با داشتن $V(x)$ که از حل معادله دوم بدست آمده میتوان $f(x)-V(x)=h(x)$ را بدست آورده و ضریب B_m را در بالا بدست آورد. با داشتن $\psi(x,t)$ و $V(x)$ میتوان $u(x,t)=\psi(x,t)+V(x)$ را بدست آورد.

مثال **6**:یک تار مرتعش با معادله زیر و شرایط مرزی و اولیه زیر داده شده است پاسخ معادله را بدست آورید.

$$4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-12x \qquad u(0,t)=u(10,t)=10 \qquad u(x,0)=-\frac{1}{2}x^3+40x \qquad u_t(x,0)=10$$

حل: تابع را به صورت $u(x,t)=\psi(x,t)+V(x)$ نوشته و در معادله بالا جایگزین میکنیم:

$$4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-12x \rightarrow 4\frac{\partial^2[\psi(x,t)+V(x)]}{\partial x^2}=\frac{\partial^2[\psi(x,t)+V(x)]}{\partial t^2}-12x \rightarrow$$

$$4\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}+4\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}-12x \rightarrow \begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \\ 4\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=-12x \end{cases} \qquad u(0,t)=w(0,t)+V(0)=10 \rightarrow$$

$$\rightarrow u(0,t)=0 \quad V(0)=10 \qquad u(10,t)=w(10,t)+V(10) \rightarrow w(10,t)=0 \qquad V(10) \rightarrow \begin{cases} 4\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=-12x \\ V(0)=V(10)=10 \end{cases}$$

$$4\frac{d^2V(x)}{dx^2}=-12x \rightarrow V(x)=-\frac{1}{2}x^3+Ax+B \qquad V(0)=10 \rightarrow B=10 \qquad V(10)=-\frac{1}{2}(10)^3+10A+10=10 \rightarrow$$

$$A=50 \quad \rightarrow V(x)=-\frac{1}{2}x^3+50x+10 \qquad u(x,0)=-\frac{1}{2}x^3+40x=\psi(x,0)+V(x)=\psi(x,0)-\frac{1}{2}x^3+50x+10 \rightarrow$$

$$\psi(x,0)=-10x-10 \qquad u_t(x,0)=10=\psi_t(x,0)$$

در نتیجه معادله تار به صورت زیر ساده میشود:

$$4\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \qquad \psi(0,t)=\psi(10,t)=0 \qquad \psi(x,0)=-10x-10=h(x) \qquad \psi_t(x,0)=10=g(x)$$

که پاسخ آن به صورت زیر است. لازم به ذکر است که با توجه به معادلات داده شده $L=10$ $\quad c^2=4 \rightarrow c=2$

$$\psi(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin\frac{m\pi c}{L}t+B_m\cos\frac{m\pi c}{L}t)\sin\frac{m\pi}{L}x \qquad \psi(x,0)=-10x-10=h(x) \qquad \psi_t(x,0)=g(x)=10$$

$$\psi(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{10}x=-10x-10 \rightarrow B_m=\frac{2}{10}\int_0^{10}(-10-10x)\sin\frac{m\pi}{10}xdx=\frac{50}{m\pi}(-1)^m$$

$$\psi_t(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\frac{m\pi c}{10})\sin\frac{m\pi}{10}x=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\sin\frac{m\pi}{L}x=10 \rightarrow D_m=\frac{2}{10}\int_0^{10}10\sin\frac{m\pi}{10}xdx \rightarrow$$

$$A_m\frac{m\pi(2)}{10}=\frac{2}{10}\int_0^{10}10\sin\frac{m\pi}{L}xdx \rightarrow A_m=\frac{1}{m\pi}\int_0^{10}10\sin\frac{m\pi}{10}xdx=\frac{100}{m^2\pi^2}[1-\cos m\pi] \rightarrow$$

$$\psi(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin\frac{m\pi c}{L}t+B_m\cos\frac{m\pi c}{L}t)\sin\frac{m\pi}{L}x=\sum_{m=1}^{\infty}\{\frac{100}{m^2\pi^2}[1-\cos m\pi]\sin\frac{m\pi}{5}t+\frac{50}{m\pi}(-1)^m\cos\frac{m\pi}{5}t\}\sin\frac{m\pi}{10}x$$

در نتیجه:

$$u(x,t)=V(x)+\psi(x,t)-\frac{1}{2}x^3+50x+10+\sum_{m=1}^{\infty}\{\frac{100}{m^2\pi^2}[1-\cos m\pi]\sin\frac{m\pi}{5}t+\frac{50}{m\pi}(-1)^m\cos\frac{m\pi}{5}t\}\sin\frac{m\pi}{10}x$$

حل معادله گرما

فرض کنید میله ای به طول L که روی محور x قرار دارد اگر دمای میله در فاصله x از ابتدای میله در هر لحظه $u(x,t)$ باشد.و دمای اولیه میله را $u(x,0)=f(x)$ فرض کنیم و دمای میله در ابتدا و انتهای میله صفر باشد یعنی $u(0,t)=u(L,t)=0$ در اینصورت میتوان با محاسبات زیر معادله دیفرانسیل دما را در میله بدست آورد. فرض کنید گرمای داده شده بر واحد زمان بر واحد سطح در فاصله x از ایتدای میله $q(x,t)$ و در فاصله $x+\Delta x$ برابر $q(x+\Delta x,t)$ باشد. در اینصورت گرمای ورودی به میله برابر است با گرمای خروجی بعلاوه گرمایی که صرف افزایش دمای میله میشود. حال اگر میله ای به طول Δx که ابتدای آن در مختصات x و انتهای ان در $x+\Delta x$ قرار دارد میتوانیم بنویسیم:

گرمایی که صرف افزایش دمای میله در واحد زمان میشود+گرمای خروجی در واحد زمان=گرمای ورودی بر واحد زمان

$$q(x,t)A=q(x+\Delta x,t)A+\Delta m\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\to q(x,t)A=q(x+\Delta x,t)A+\rho A\sigma\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\to\frac{q(x,t)-q(x+\Delta x,t)}{\Delta x}=\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\to$$

$$-\frac{dq}{dx}=\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}$$

در بالا Δm جرم میله به طول Δx، ρ چگالی میله ، σ گرمای ویژه میله و A سطح مقطع میله میباشد. همچنین $\frac{\partial u}{\partial t}$ تغییر دمای میله بر واحد زمان میباشد. حال اگر رسانایی گرمایی میله k باشد در اینصورت $q=-k\frac{\partial u}{\partial x}$ در نتیجه داریم:

$$-\frac{dq}{dx}=\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{d}{dx}(-k\frac{\partial u}{\partial x})=\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\to k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\to\frac{k}{\rho\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\to c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

معادله بدست آمده را معادله دما یا گرمای میله مینامند.

حل معادله گرما در میله

تابع $u(x,t)$ را میتوان به صورت $u(x,t)=f(x)g(t)$ نوشت که با جایگزینی در معادله دما خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\to g(t)\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\ f(x)\frac{dg(t)}{dt}$$

حال اگر طرفین معادله بدست آمده را بر $f(x)g(t)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt}$$

سمت چپ معادله بالا یعنی $\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ فقط تابع x و سمت راست این معادله یعنی $\frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt}$ فقط تابع t میباشند و این معادله امکان ندارد برقرار باشد مگر هر دو طرف ثابت باشند. حالا سه حالت را بررسی میکنیم:

الف) دو طرف صفر باشند یعنی:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=0\to\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=0\to f(x)=A_1x+B_1 \qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt}=0\to\frac{dg(t)}{dt}=0\to g(t)=A_2$$

در نتیجه داریم:

$$u(x,t)=f(x)g(t)=(A_1x+B_1)(A_2)=Ax+B$$

حال برای محاسبه ضرایب شرایط مرزی را اعمال میکنیم که خواهیم داشت:

$$u(0,t)=0\to(A\times 0+B)=0\to B=0\to u(x,t)=Ax$$
$$u(L,t)=0\to AL=0\to A=0\to u(x,t)=Ax+B=0$$

بنابراین دوطرف نمیتوانند صفر باشند

ب) دو طرف مثبت باشند یعنی:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=k^2\to\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=k^2 f(x)\to f(x)=A_1e^{kx}+B_1e^{-kx} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt}=k^2$$
$$\to\frac{dg(t)}{dt}=(kc)^2 g(t)\to g(t)=A_2e^{(kc)^2 t}\to u(x,t)=f(x)g(t)=(A_1e^{kx}+B_1e^{-kx})(A_2e^{(kc)^2 t})=(Ae^{kx}+Be^{-kx})e^{(kc)^2 t}$$

حال برای محاسبه ضرایب شرایط مرزی را اعمال میکنیم که خواهیم داشت:

$$u(0,t)=0\to(A+B)e^{(kc)^2 t}=0\to A+B=0 \qquad u(L,t)=0\to(Ae^{kL}+Be^{-kL})e^{(kc)^2 t}=0\to Ae^{kL}+Be^{-kL}=0$$
$$\to\begin{cases} A+B=0\\ Ae^{kL}+Be^{-kL}=0\end{cases}\to B=-A \qquad Ae^{kL}+Be^{-kL}=0 \qquad Ae^{kL}-Ae^{-kL}=0\to A(e^{kL}-e^{-kL})=0$$
$$\to 2A\sinh kL=0\to A=0 \qquad B=-A=0\to u(x,t)=(Ae^{kx}+Be^{-kx})e^{(kc)^2 t}=0$$

بنابراین دوطرف نمیتوانند مثبت باشند

پ) دو طرف منفی باشند یعنی:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=-k^2\to\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=-k^2 f(x)\to f(x)=A_1\cos kx+B_1\sin kx \qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt}=-k^2$$

$$\rightarrow \frac{dg(t)}{dt} = -(kc)^2 g(t) \rightarrow g(t) = A_2 e^{-(kc)^2 t} \rightarrow u(x,t) = f(x)g(t) = (A_1 \cos kx + B_1 \sin kx)(A_2 e^{-(kc)^2 t}) =$$
$$(A\cos kx + B\sin kx)e^{-(kc)^2 t}$$

حال برای محاسبه ضرایب شرایط مرزی را اعمال میکنیم که خواهیم داشت:

$$u(0,t) = 0 \rightarrow (A\cos 0 + B\sin 0)e^{-(kc)^2 t} = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow u(x,t) = B\sin kx e^{-(kc)^2 t}$$
$$u(L,t) = 0 \rightarrow e^{-(kc)^2 t} \sin kL = 0 \rightarrow \sin kL = 0 \rightarrow kL = m\pi \rightarrow k = \frac{m\pi}{L} \rightarrow u(x,t) = Be^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t} \sin \frac{m\pi}{L} x$$

حال برای محاسبه ضریب مجهول شرایط اولیه را اعمال میکنیم:

$$u(x,0) = B\sin \frac{m\pi}{L} x = f(x) \rightarrow B\sin \frac{m\pi}{L} x = f(x)$$

تساوی بالا امکان ندارد زیرا سمت چپ یک تابع سینوسی با پریود $2L$ ولی سمت چپ یک تابع اختیاری $f(x)$ میباشد. تنها راه حل این مشکل اینست که تابع بدست آمده را به صورت مجموع بینهایت تابع سینوسی بنویسیم که طبق قانون سری فوریه هر تابع اختیاری پریودیک را میتوان به صورت بینهایت جمله سینوس و کسینوس نوشت حال اگر فرض کنیم که تابع اختیاری $f(x)$ به صورت پریودیک با پریود $2L$ گسترش فرد یافته بطوریکه در طول میله دارای تابع با شرایط اولیه داده شده است میتوان این تابع را به صورت مجموع نشان داد یعنی نوشت:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi}{L} x$$

بنابراین میتوان پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی میله را به صورت کلی زیر نوشت:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t} \sin \frac{m\pi}{L} x$$

واضح است که چون به ازای هر مقدار m جواب بدست آمده درمعادله دیفرانسیل صدق میکند مجموع پاسخها که هر پاسخ به ازای یک مقدار m میباشد نیز جواب است.

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi}{L} x = f(x) \rightarrow B_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin \frac{m\pi}{L} x dx$$

لازم به ذکر است که B_m همان ضریب بسط سینوسی فوریه توابع $f(x)$ میباشد که قبلا در بحث سری فوریه روابط آنها داده شده است.

میله عایق پوش شده

میله ای که دوطرف آن عایق پوش شده یعنی تغییر دمای میله در دو طرف صفر باشد به عبارت دیگر $\frac{\partial u}{\partial x}(x=0) = \frac{\partial u}{\partial x}(L=0) = 0$ در اینصورت با اعمال این دو شرط مرزی میتوان ضرایب را به صورت زیر را حساب کرد:

$$u_x(0,t) = 0 \rightarrow (-Ak\sin 0 + Bk\cos 0)e^{-(kc)^2 t} = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow u(x,t) = A\cos kx e^{-(kc)^2 t}$$

$$u_x(L,t)=0 \to -Ake^{-(kc)^2 t}\sin kL=0 \to \sin kL=0 \to kL=m\pi \to k=\frac{m\pi}{L} \to u(x,t)=Ae^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\cos\frac{m\pi}{L}x$$

حال برای محاسبه ضریب مجهول شرایط اولیه را اعمال میکنیم:

$$u(x,0)=A\cos\frac{m\pi}{L}x=f(x) \to A\cos\frac{m\pi}{L}x=f(x)$$

تساوی بالا امکان ندارد زیرا سمت چپ یک تابع کسینوسی با پریود $2L$ ولی سمت راست یک تابع اختیاری $f(x)$ میباشد. تنها راه حل این مشکل اینست که تابع بدست آمده را به صورت مجموع بینهایت تابع کسینوسی بنویسیم که طبق قانون سری فوریه هر تابع اختیاری پریودیک را میتوان به صورت بینهایت جمله سینوسی و کسینوسی نوشت حال اگر فرض کنیم که تابع اختیاری $f(x)$ به صورت پریودیک با پریود $2L$ گسترش فرد یافته بطوریکه در طول میله دارای تابع با شرایط اولیه داده شده است میتوان این تابع را به صورت مجموع نشان داد یعنی نوشت:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi}{L}x$$

بنابراین میتوان پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی میله را به صورت کلی زیر نوشت:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\cos\frac{m\pi}{L}x$$

واضح است که چون به ازای هر مقدار m جواب بدست آمده درمعادله دیفرانسیل صدق میکند مجموع پاسخها که هر پاسخ به ازای یک مقدار m میباشد نیز جواب است.

$$u(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi}{L}x=f(x) \to A_m=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx$$

لازم به ذکر است که A_m همان ضریب بسط کسینوسی فوریه توابع $f(x)$ میباشد که قبلا در بحث سری فوریه روابط آنها داده شده است.

مثال **7**:دمای اولیه میله ای به طول **50** سانتیمتر برابر با $20\sin\frac{\pi x}{50}$ میباشد و دو انتهای آن در صفر نگه داشته شده است. چه مدت طول میکشد تا حداکثر دمای میله به **10** درجه برسد؟ پارامترهای میله عبارتند از: $k=096cal/c^{\circ}$, $\sigma=0.08cal/g.c^{\circ}$, $\rho=6gr/cm^3$.

حل: $c^2=\frac{k}{\rho\sigma}=\frac{0.96}{6\times0.08}=2$. معادله دمای میله در حالت کلی برابر است با:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\sin\frac{m\pi}{L}x \qquad u(x,0)=f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{50}x=20\sin\frac{\pi x}{50}$$

از معادله بدست آمده معلوم میشود که جمله مجموع فقط یک جمله به ازای $m=1$ دارد یعنی:

$$\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{50}x=20\sin\frac{\pi x}{50} \to m=1 \quad B_1=20 \to u(x,t)=20e^{-(\frac{\pi c}{50})^2 t}\sin\frac{\pi}{50}x=20e^{-(\frac{\pi^2c^2}{2500})t}\sin\frac{\pi}{50}x$$

$$u(x,t)=20e^{-\frac{\pi^2\times 2}{2500}t}\sin\frac{\pi}{50}x=20e^{-\frac{\pi^2}{1250}t}\sin\frac{\pi}{50}x\rightarrow u_{\max}=20e^{-\frac{\pi^2}{1250}t}=10\rightarrow e^{-\frac{\pi^2}{1250}t}=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{\pi^2}{1250}t=\ln 2\rightarrow$$
$$t=\frac{1250\ln 2}{\pi^2}\approx 88\sec$$

مثال 8: میله ای به طول L که دو طرف آن در دمای صفر نگه داشته شده است دارای دمای اولیه داده شده در زیر است را در نظر بگیرید. معادله دما را بدست آورید $u(x,0)=f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\frac{L}{2}\\ L-x & \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$.

حل: معادله کلی دما همانطوریکه قبلا بدست آوردیم معادله گرما برای میله که دو طرف آن در دمای صفر نگه داشته شده است به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\sin\frac{m\pi}{L}x\rightarrow u(x,0)=f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x\rightarrow B_m=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx$$

برای آسانی بدست آوردن انتگرال بالا از عبارت $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x$ انتگرال میگیریم:

$$h(x)=f'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{L}{2}\\ -1 & \frac{L}{2}<x<L\end{cases}=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\frac{m\pi}{L}\cos\frac{m\pi}{L}x\rightarrow B_m\frac{m\pi}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L h(x)\cos\frac{m\pi}{L}xdx=$$
$$\frac{2}{L}[\int_0^{\frac{L}{2}}(1)\cos\frac{m\pi}{L}xdx+\int_{\frac{L}{2}}^{L}(-1)\cos\frac{m\pi}{L}xdx]\rightarrow B_m\frac{m\pi}{L}=\frac{2}{L}[\frac{L}{m\pi}(\sin\frac{m\pi}{2})-\frac{L}{m\pi}(-\sin\frac{m\pi}{2})]=\frac{4}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{2}$$
$$\rightarrow B_m=\frac{4L}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}\rightarrow u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\sin\frac{m\pi}{L}x=u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

مثال 9: مثال بالا را برای میله دو طرف عایق پوش شده تکرار کنید.

حل: برای این میله پاسخ کلی دما به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\cos\frac{m\pi}{L}x\rightarrow u(x,0)=f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi}{L}x\rightarrow A_m=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{m\pi}{L}xdx$$

برای آسانی بدست آوردن انتگرال بالا از عبارت $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi}{L}x$ انتگرال میگیریم:

$$h(x)=f'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{L}{2}\\ -1 & \frac{L}{2}<x<L\end{cases}=\sum_{m=1}^{\infty}-A_m\frac{m\pi}{L}\sin\frac{m\pi}{L}x\rightarrow -A_m\frac{m\pi}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx=$$

$$\frac{2}{L}[\int_0^{\frac{L}{2}}(1)\sin\frac{m\pi}{L}xdx+\int_{\frac{L}{2}}^{L}(-1)\sin\frac{m\pi}{L}xdx]\to -A_m\frac{m\pi}{L}=\frac{2}{L}[-\frac{L}{m\pi}(\cos\frac{m\pi}{2}-1)+\frac{L}{m\pi}(\cos m\pi-\cos\frac{m\pi}{2})]=$$

$$\frac{2}{m\pi}[1+\cos m\pi-2\cos\frac{m\pi}{2}]\to A_m=-\frac{2L}{m^2\pi^2}[1+\cos m\pi-2\cos\frac{m\pi}{2}]$$

$$\to u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\cos\frac{m\pi}{L}x=u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{2L}{m^2\pi^2}[1+\cos m\pi-2\cos\frac{m\pi}{2}]e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\cos\frac{m\pi}{L}x$$

حال فرض کنید که ابتدا و انتهای میله در دامنه صفر نباشد مثلا $u(0,t)=T_0,\quad u(L,t)=T_L$ در اینصورت با توجه به اینکه پاسخ معادله میله در حالت کلی به صورت: $u(x,t)=(A\cos kx+B\sin kx)e^{-(kc)^2 t}$ میباشد برای محاسبه ضرایب باید بنویسیم:

$$u_x(0,t)=T_0\to(A\cos 0+B\sin 0)e^{-(kc)^2 t}=T_0\to Be^{-(kc)^2 t}=T_0$$
$$u_x(L,t)=T_L\to(A\cos kL+B\sin kL)e^{-(kc)^2 t}=T_L$$

ملاحظه میشود که معادلات بالا غیر قابل حل هستند زیرا طرف چپ معادلات تابع زمان و طرف راست معادلات اعداد ثابت هستند بنابراین نمیشودضرایب را بدست آورد. فرض کنید شرط اولیه برای میله به صورت $u(x,0)=f(x)$ و شرایط مرزی برای میله به صورت $u(0,t)=T_0,\quad u(L,t)=T_L$ باشند.برای حل این مشکل به صورت زیر عمل میکنیم:

$$u(x,t)=u(x,t)-V(x)+V(x)=\psi(x,t)+V(x)$$

حال با جایگزینی در معادله میله داریم:

$$c^2u_{xx}=u_t\to c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi(x,t)+V(x))=\frac{\partial}{\partial t}(\psi(x,t)+V(x))\to c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+c^2\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

ملاحظه میشود که سمت چپ مجموع یک تابع از (x,t) و یک تابع از (x) در حالی که سمت راست فقط یک جمله و تابعی از (x,t) است پس باید جملات هم تابع برابر باشند یعنی:

$$\begin{cases} c^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\\ c^2\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=0\end{cases}$$

حال شرایط مرزی و شرایط اولیه را برای معادلات بالا بدست می آوریم:

$$u(0,t)=T_0=\psi(0,t)+V(0)\to\psi(0,t)=0\ ,\quad V(0)=T_0\qquad u(L,t)=T_L=\psi(L,t)+V(L)\to$$
$$\psi(L,t)=0,V(L)=T_L\qquad u(x,0)=f(x)=\psi(x,0)+V(x)\to\psi(x,0)=f(x)-V(x)$$

بنابراین معادلات بالا همراه با شرایط مرزی و اولیه اشان به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{cases} c^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}, \quad \psi(0,t)=\psi(L,t)=0 \quad \psi(x,0)=f(x)-V(x)=h(x) \\ c^2\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=0\to V(x)=Ax+B \quad V(0)=T_0 \quad V(L)=T_L\to B=T_0 \quad A=\dfrac{T_L-T_0}{L}\to V(x)=\dfrac{T_L-T_0}{L}x+T_0 \end{cases}$$

معادله اول همان معادله قبلی با شرایط مرزی صفر در ابتدا و انتهای میله میباشد که پاسخ ان قبلا بدست آمده که به صورت زیر است:

$$\psi(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m e^{-(\frac{m\pi c}{L})^2 t}\sin\frac{m\pi}{L}x \qquad \psi(x,0)=f(x)-V(x)=h(x)$$
$$\psi(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{L}x=h(x)\to B_m=\frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx$$

که با داشتن $V(x)$ که از حل معادله دوم بدست آمده میتوان $f(x)-V(x)=h(x)$ را بدست آورده و ضریب B_m را در بالا بدست آورد. با داشتن $\psi(x,t)$ و $V(x)$ میتوان $u(x,t)=\psi(x,t)+V(x)$ را بدست آورد.

مثال **10**: دمای میله ای به طول **2** متر که دمای ابتدا و انتهای آن به ترتیب **4** و **14** درجه سانتیگراد است با معادله غیر همگن زیر بیان میشود.

اگر دمای اولیه میله با معادله $u(x,0)=2x^4-3x^3-5x^2+11x+5$ داده شده باشد معادله دمای میله را بدست آورید.

$$u_{xx}(x,t)=u_t(x,t)+24x^2-18x-10$$

حل: تابع را به صورت $u(x,t)=w(x,t)+V(x)$ مینویسیم که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$u_{xx}(x,t)=u_t(x,t)+24x^2-18x-10\to w_{xx}(x,t)+V_{xx}(x)=w_t(x,t)+24x^2-18x-10$$
$$\to w_{xx}(x,t)=w_t(x,t) \qquad V_{xx}(x)=24x^2-18x-10\to V(x)=2x^4-3x^3-5x^2+k_1x+k_2$$
$$u(0,t)=4=w(0,t)+V(0)=w(0,t)+k_2\to w(0,t)=0 \qquad k_2=4 \qquad u(2,t)=14=w(2,t)+V(2)\to$$
$$w(2,t)=0 \quad V(2)=14\to 2(2)^4-3(2)^3-5(2)^2+2k_1+4=14\to k_1=11\to$$
$$V(x)=2x^4-3x^3-5x^2+11x+4 \qquad u(x,0)=w(x,0)+V(x)\to$$
$$2x^4-3x^3-5x^2+11x+5=w(x,0)+2x^4-3x^3-5x^2+11x+4\to w(x,0)=1$$

بنابراین معادله دیفرانسیل بر حسب $w(x,t)$ به صورت همگن زیر خواهد شد:

$$w_{xx}(x,t)=w_t(x,t) \qquad w(0,t)=0 \qquad w(2,t)=0 \qquad w(x,0)=1$$

که با توجه به شرایط مرزی پاسخ کلی آن به صورت $w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-(\frac{m\pi}{L}c)^2 t}\sin\frac{m\pi}{L}x$ خواهد بود که $c=1, \quad L=2$ میباشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-(\frac{m\pi}{2})^2 t}\sin\frac{m\pi}{2}x \qquad w(x,0)=1=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{2}x\to A_m=\frac{2}{2}\int_0^2 1\times\sin\frac{m\pi}{2}xdx\to$$
$$A_m=\frac{2}{m\pi}(1-\cos m\pi)=\begin{cases}\dfrac{4}{m\pi} & m=odd\\ 0 & m=even\end{cases}\to w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)}e^{-(\frac{2m-1}{2}\pi)^2 t}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}x\to$$

$$u(x,t)=V(x)+w(x,t)=2x^4-3x^3-5x^2+11x+4+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)}e^{-(\frac{2m-1}{2}\pi)^2 t}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}x$$

پایان قسمت اول

محمود محمدطاهری فروردین 1401