پاسخ کوئیز چهارم ریاضی مهندسی

حل ۱: میتوانیم بنویسیم: $u(x,t)=w(x,t)+V(x)$ که با جایگزینی در معادله داده شده داریم:

$$4\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+4\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+24x \rightarrow \begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \\ 4\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=24x \end{cases}$$

حال برای دو معادله دیفرانسیل بدست آمده شرایط اولیه و مرزی را بدست می آوریم:

$$u(0,t)=w(0,t)+V(0)=2\rightarrow w(0,t)=0 \qquad V(0)=2$$
$$u(2,t)=w(2,t)+V(2)=10\rightarrow w(2,t)=0 \qquad V(2)=10$$

حال معادله دوم را با شرایط اولیه بدست آمده حل میکنیم:

$$4\frac{d^2V(x)}{dx^2}=24x\rightarrow \frac{d^2V(x)}{dx^2}=6x\rightarrow V(x)=x^3+Ax+B \qquad V(0)=2\rightarrow B=2 \qquad V(2)=10\rightarrow$$
$$(2)^3+Ax+2=10\rightarrow A=0\rightarrow V(x)=x^3+2$$

حال برای معادله اول شرایط اولیه را بدست می آوریم:

$$u(x,0)=12+x^3=w(x,0)+V(x)=w(x,0)+x^3+2\rightarrow w(x,0)=10 \qquad u_t(x,0)=2=w_t(x,0)$$

بنابراین معادله اول با شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر نوشته میشود:

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \\ w(x,0)=10 \qquad w_t(x,0)=2 \\ w(0,t)=0 \qquad w(2,t)=0 \end{cases}$$

$$w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin\frac{m\pi c}{L}t+B_m\cos\frac{m\pi c}{L}t)\sin\frac{m\pi}{L}x=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin\frac{m\pi(2)}{2}t+B_m\cos\frac{m\pi(2)}{2}t)\sin\frac{m\pi}{2}x=$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin m\pi t+B_m\cos m\pi t)\sin\frac{m\pi}{2}x \qquad w(x,0)=10=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{2}x\rightarrow B_m=\int_0^2 10\sin\frac{m\pi}{2}xdx=\frac{20}{m\pi}(1-\cos m\pi)$$
$$w_t(x,0)=2=\sum_{m=1}^{\infty}A_m m\pi\sin\frac{m\pi}{2}x\rightarrow A_m m\pi=\int_0^2 2\sin\frac{m\pi}{2}xdx=\frac{4}{m\pi}(1-\cos m\pi)\rightarrow A_m=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-\cos m\pi)\rightarrow$$
$$w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin m\pi t+B_m\cos m\pi t)\sin\frac{m\pi}{2}x=\sum_{m=1}^{\infty}(1-\cos m\pi)[\frac{4}{m^2\pi^2}\sin m\pi t+\frac{20}{m\pi}\cos m\pi t)]\sin\frac{m\pi}{2}x\rightarrow$$
$$u(x,t)=V(x)+w(x,t)=x^3+2+\sum_{m=1}^{\infty}(1-\cos m\pi)[\frac{4}{m^2\pi^2}\sin m\pi t+\frac{20}{m\pi}\cos m\pi t)]\sin\frac{m\pi}{2}x$$