

دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندی- نیم سال اول سال ۱۳۹۹ ۳ تمرین ۳: انتخرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله- حل تمرین: وصال بخت آزاد- آرمان اکسری- نمکین سفاری رای موالات خود دخصوص ان تمرین ما رامانامه <u>arr3 aan @gmail.com</u> کانیه نامد .



a)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$
 (fourier **cosine** integral)

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv \, dv = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos wv \, dv = \frac{2 \sin w}{\pi w}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2 \sin w}{\pi w} \cos wx \, dw$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$
 (fourier **cosine** integral)

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv \, dv = \frac{2}{\pi} \int_0^1 x^2 \cos wv \, dv$$

$$= \frac{2((w^2 - 2)\sin w + 2w\cos w)}{\pi w^3}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2((w^2 - 2)\sin w + 2w\cos w)}{\pi w^3} \cos wx \, dw$$



دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندس - نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ حل تمرین ۳: انگرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - حل تمرین: وصال بخت آزاد - آرمان اکسری - نکمین سفاری برای سوالات خود درخصوص این تمرین با رایا نامه میرای عوالات خود درخصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود درخصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود درخصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود درخصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایا نامه میرای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایا نامه میرای در این میرای با رایا نامه میرای در این در این میرای در این در این میرای در این در این میرای در این در این



$$c) f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x, \ x > 0 \quad (fourier \ sine \ integral)$$

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \sin wv \ dv = \int_0^\infty e^{-v} \cos v \sin wv \ dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-v} \ 0.5 \left(\sin(w - 1)v + \sin(w + 1)v \right) dv$$

$$= 0.5 Laplace \left\{ \sin(w - 1)v + \sin(w + 1) \right\}_s = 1$$

$$= 0.5 \left(\frac{w - 1}{1 + (w - 1)^2} + \frac{w + 1}{1 + (w + 1)^2} \right) = \frac{w^3}{w^4 + 4}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{w^3}{w^4 + 4} \sin wx \ dw$$

I)
$$f(ax) = \frac{1}{a} \int_{0}^{\infty} A\left(\frac{w}{a}\right) \cos wx \ dw \quad (a > 0)$$

$$wa = p \rightarrow f(ax) = \int_{0}^{\infty} A(w) \cos wax \ dw = \int_{0}^{\infty} A\left(\frac{p}{a}\right) \cos px \ \frac{dp}{a}$$

replacing
$$p$$
 with $w \to f(ax) = \frac{1}{a} \int_{0}^{\infty} A\left(\frac{w}{a}\right) \cos wx \ dw$



دانشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندی - نیم سال اول سال ۱۳۹۹- ۱۴۰۰ ^{طل تم}رین ۳: انگرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - تل تمرین: وصال بخت آزاد - آرمان اکسری - نگمین سفاری برای موالات خود دخصوص این تمرین با رایانامه <u>arr3 aan @gmail.com</u> کانیه ناید د.



II)
$$xf(x) = \int_{0}^{\infty} -\frac{dA}{dw} \sin wx \ dw$$

replacing f(v) with $vf(v) \to B^*(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty vf(v) \sin wv \, dv = -\frac{dA}{dw} \to$

$$xf(x) = \int_{0}^{\infty} -\frac{dA}{dw} \sin wx \ dw$$

III)
$$x^2 f(x) = \int_0^\infty -\frac{d^2 A}{dw^2} \cos wx \ dw$$

differentiating $A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv \, dv$ twice with respect to w:

$$\frac{d^2 A(w)}{dw^2} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty v^2 f(v) \cos wv \, dv \to x^2 f(x) = \int_0^\infty -\frac{d^2 A}{dw^2} \cos wx \, dw$$

$$1a \rightarrow A(w) = \frac{2\sin w}{\pi w} \rightarrow A'' = \frac{2}{\pi} (\frac{2}{w^3} \sin w - \frac{2}{w^2} \cos w - \frac{1}{w} \sin w)$$

$$III \to x^{2}.f(x)$$

$$= \int_{0}^{\infty} -\frac{2}{\pi} (\frac{2}{w^{3}} \sin w - \frac{2}{w^{2}} \cos w - \frac{1}{w} \sin w) \cos wx \, dw$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{2((w^{2} - 2) \sin w + 2w \cos w)}{\pi w^{3}} \cos wx \, dw$$



دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپپوتر ریانسیات مهندی- نیم سال اول سال ۱۳۹۹ ۳ تمرین ۴: انتخرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع مامولد- تال تمرین: وصال بخت آزاد- آرمان اکسری- نگمین سفاری برای موالات خود دخصوص این تمرین مارایانامه <u>arr3 aan@gmail.com</u> کاتبه نامید.



$$f(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-w} \cos wx \, dw = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad x => w$$

$$\rightarrow f(w) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos wx \, dx$$

$$g(x) = \int_{0}^{\infty} \arctan w \sin wx \, dw = \int_{0}^{\infty} B(w) \sin wx \, dw$$

$$g(x) \operatorname{is} \operatorname{odd} \rightarrow g(x) = \begin{cases} k(x) & x > 0 \\ -k(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin wx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} k(x) \sin wx \, dx = \arctan w$$

$$\operatorname{differentiating} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} k(x) \sin wx \, dx = \arctan w \quad \text{with respect to } w$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} x \, k(x) \cos wx \, dx = \frac{1}{1+w^2} = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos wx \, dx$$

$$x \, k(x) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-x}}{x} \rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{e^{-x}}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{e^{x}}{x} & x < 0 \end{cases}$$



دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹- ۱۴۰۰ حل تمرین ۳: انگرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع ما مولد- حل تمرین: وصال بخت آزاد-آرمان اکسری- کمین سفاری رای موالات خود دخصوص ان تمرین ما را مانامه arr3 aan@gmail.com کانیه نامید.



 $\int_{0}^{\infty} x f(x) \cos ax \, dx + 2 \int_{0}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f(x) \cos ax \, dx$ $y = \int_{a}^{b} f(x) \sin ax \, dx \quad \rightarrow \quad y' + 2y = -\int y \, da = >$ $y_1=c.e^{-a}$, $y_2=d.ae^{-a}$ $y_1=c.e^{-a}$: $ce^{-a} = \int_{0}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx \rightarrow ce^{-a} = \int_{0}^{\infty} f(w) \sin aw \, dw = g(a)$ $f1(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \sin aw \, da = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ce^{-a} \sin aw \, da = \frac{2c}{\pi} \frac{w}{1 + w^2}$ $f1(w) = \frac{2c}{\pi} \frac{w}{1 + w^2} \rightarrow f1(x) = \frac{2c}{\pi} \frac{x}{1 + x^2}$ $dae^{-a} = \int_{0}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx \rightarrow dae^{-a} = \int_{0}^{\infty} f(w) \sin aw \, dw = g(a)$ $f2(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(a) \sin aw \, da = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ce^{-a} \sin aw \, da = \frac{4d}{\pi} \frac{w}{(1+w^2)^2}$ $f2(w) = \frac{4d}{\pi} \frac{w}{(1+w^2)^2} \rightarrow f2(x) = \frac{4d}{\pi} \frac{x}{(1+x^2)^2}$ $f(x) = f1(x) + f2(x) = \frac{2c}{\pi} \frac{x}{1 + x^2} + \frac{4d}{\pi} \frac{x}{(1 + x^2)^2}, \ f(2) = 0.8$ f(1) = 1=> d=0, $c=\pi$ $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$



دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپپوتر ریانسیات مهندی- نیم سال اول سال ۱۳۹۹- ۱۴۰۰ ^{عل تم}رین ۳: انگرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله- ^عل تمرین: وصال بخت آزاد- آرمان اکسری- نگمین سفاری رای موالات خود دخصوص ان تمرین ما رامانامه <u>arr3 aan @gmail.com</u> کانیه نامید.

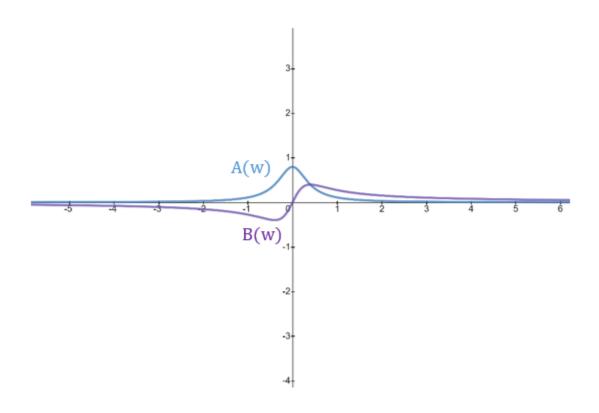


$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(\omega x) \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin(\omega x) \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\omega^2 + a^2} \cos(\omega x) + \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} \sin(\omega x) \, d\omega$$





دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹- ۱۴۰۰ حل تمرین ۳: انگرال فوریه مدرس: دکترمهدی طالع ماموله- حل تمرین: وصال بخت آزاد-آرمان اکسری- نگمین سفاری برای سوالات خود درخصوص این تمرین ما را بانامه مهر arr3aan@gmail.com کانسه نامد د.

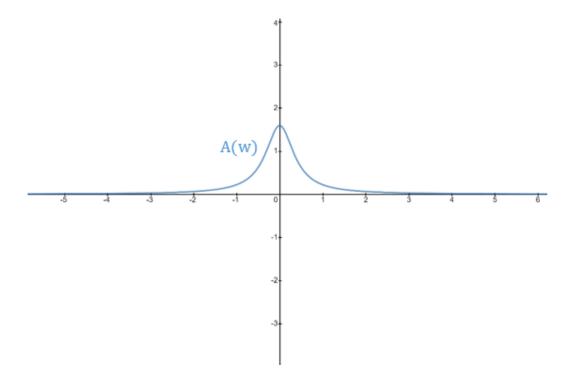


II)

$$g(x) = \begin{cases} e^{ax} & x < 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases}$$

Function is even $\rightarrow B(\omega) = 0$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(\omega x) \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$
$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\omega^2 + a^2} \cos(\omega x) \, d\omega$$





دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹- ۱۴۰۰ ^{عل} تمرین ۳: انگرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله- ^عل تمرین: وصال بخت آزاد-آرمان اکسری- نگمین سفاری رای موالات خود دخصوص ان تمرین ما را مانامه <u>arr3 aan @gmail.com</u> کانید نامید.



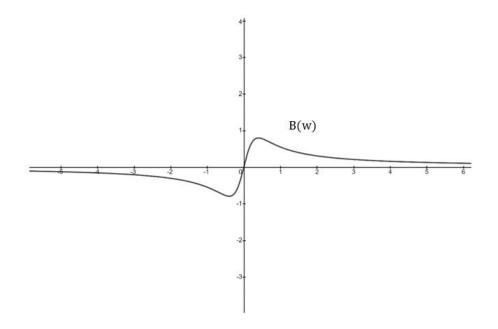
III)

$$h(x) = \begin{cases} -e^{ax} & x < 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases}$$

Function is even $\rightarrow A(\omega) = 0$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin(\omega x) \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} \sin(\omega x) \, d\omega$$



با توجه به شکل نمودار ها، میبینم که A(w) ها در کل زودتر میرا میشوند و به صفر میل میکنند، بنابراین از یک جمله مشخص به بعد می توانیم صفر لحاظش کنیم.

بین سه تابعی که داریم، تابع دوم، g(x) ، که فقط A(w) دارد، ساده تر محاسبه می شود.



دانشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپپوتر ریانسیات مهندی- نیم سال اول سال ۱۳۹۹ ۳ تمرین ۴: انتخرال فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع مامولد- تال تمرین: وصال بخت آزاد- آرمان اکسری- نگمین سفاری برای موالات خود دخصوص این تمرین مارایانامه <u>arr3 aan@gmail.com</u> کاتبه نامید.



6.

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos wt \, dt = \int_{-1}^{1} (1 - t) \cos wt \, dt = \frac{2}{w} \sin w$$

$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin wt \, dt = \int_{-1}^{1} (1 - t) \sin wt \, dt = \frac{2}{w} \cos w - \frac{2}{w^2} \sin w$$
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\frac{2}{w} \sin w \cos wx + \left(\frac{2}{w} \cos w - \frac{2}{w^2} \sin w \right) \sin wx \right] dw$$

at x=0, we have

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} \ dw \ \to \ \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} \ dw$$

7.

$$A(w) = \int_0^\infty f(x) \cos wx \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos x \cos wx \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4} (\cos(w+1)x + \cos(-1+w)x \, dx = \frac{\pi}{2(1-w^2)} (\cos\frac{w\pi}{2})$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1-w^2)} \cos(\frac{w\pi}{2}) \cos wx \, dw , \ w => a$$

Therefore:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{a\pi}{2})\cos(ax)}{1 - a^2} da = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(x), & |x| \le \pi/2\\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$