

دان همی تیران - دانسگده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی - نیم سال اول سال ۱۴۰۰–۱۴۰۱ تیرین ۹: حل معادلات PDE به کمک تبدیل لاپلاس و فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - حل تیرین: نیکامامی - سروش من فروش - کلمبر خسرو خاور



برای بوالات خود درخصوص این تمرین بارایانامه <u>gkhosrokhavar@gmail.com</u>, <u>sorush.mes@gmail.com</u>, <u>emami.nika@gmail.com</u> مخلفه نیاید .

۱) معادله موج زير را به كمك تبديل لاپلاس حل كنيد

$$u_{xx} - u_{tt} = -\sin(\pi x)\sin(t)$$
,
 $u(0,t) = u(1,t) = 0$
 $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$

 $0 \le x \le 1$,

 $0 \le t$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$

$$\Rightarrow U_{xx} - \left(s^2U - su(x,0) - u_t(x,0)\right) = -\frac{\sin(\pi x)}{s^2 + 1} \Rightarrow U_{xx} - s^2U = -\frac{\sin(\pi x)}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow U(x,s) = c_1 e^{-sx} + c_2 e^{sx} + \frac{\sin(\pi x)}{(s^2 + 1)(s^2 + \pi^2)}$$

$$\text{BC: } \begin{cases} u(0,t) = 0 \Rightarrow U(0,s) = 0 \\ u(1,t) = 0 \Rightarrow U(1,s) = 0 \end{cases}$$

$$U(0,s) = c_1 + c_2 = 0$$

$$U(1,s) = c_1 e^{-s} + c_2 e^{s} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\Rightarrow U(x,s) = \frac{\sin(\pi x)}{(s^2 + 1)(s^2 + \pi^2)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2 - 1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + \pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2 - 1} \left(\sin(t) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right)$$

۲) معادله حرارت زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$u_{xx} - u_t = \sin(\pi t),$$
 $0 \le x \le 1,$ $0 \le t$ $u_t(0,t) = -\sin(\pi t),$ $u(1,t) = \frac{1}{\pi}(\cos(\pi t) - 1)$ $u(x,0) = \sin(\pi x)$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$

$$\frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \Rightarrow U_{xx} - sU = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} - \sin(\pi x)$$

$$\Rightarrow U(x,s) = c_1 e^{-\sqrt{s}x} + c_2 e^{\sqrt{s}x} - \frac{\pi}{(s^2 + \pi^2)s} + \frac{\sin(\pi x)}{s + \pi^2}$$

$$U(1,t) = -\sin(\pi t) \Rightarrow sU(0,s) = -\frac{\pi}{s^2 + \pi^2}$$

$$U(1,t) = \frac{1}{\pi}(\cos(\pi t) - 1) \Rightarrow U(1,s) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{s^2 + \pi^2} - \frac{1}{s}\right)$$

$$U(0,s) = c_1 + c_2 - \frac{\pi}{(s^2 + \pi^2)s} = -\frac{(s^2 + \pi^2)s}{\pi}$$

$$U(1,s) = c_1 e^{-\sqrt{s}} + c_2 e^{\sqrt{s}} - \frac{\pi}{(s^2 + \pi^2)s} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{s^2 + \pi^2} - \frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\Rightarrow U(x,s) = -\frac{\pi}{(s^2 + \pi^2)s} + \frac{\sin(\pi x)}{s + \pi^2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{s^2 + \pi^2} - \frac{1}{s}\right) + \frac{\sin(\pi x)}{s + \pi^2}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi t) - \frac{1}{\pi} + e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$$



دانشگو تهران- دانشگره مهندس برق و کامپیوتر ریاضیات مهندس نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۰ تمرین ۹: حل معادلات PDE به کک تبدیل لاپلاس و فوریه مدرس: دکترمه دی طالع ماموله - حل تمرن: نیکامامی - سروش مس فروش - کلمهر خسرو خاور



برای بوالات خود در خصوص این تمرین بارا لیامه wkhosrokhavar@gmail.com و gkhosrokhavar@gmail.com مگلته نامید .

۳) معادله حرارت زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

 $u_{xx} - u_t = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le t$ $u(x, 0) = e^{-x} \cos(\omega_0 x) u(x)$

$$\begin{split} \mathcal{F}\{u(x,t)\} &= U(\omega,t) \\ \Rightarrow -\omega^2 U - U_t &= 0 \\ \Rightarrow U(\omega,t) &= c_1 e^{-\omega^2 t} \\ u(x,0) &= e^{-x} \cos(\omega_0 x) \, u(x) \Rightarrow U(\omega,0) = \frac{i\omega + 1}{(i\omega + 1)^2 + \omega_0^2} = c_1 \\ \Rightarrow U(\omega,t) &= \frac{i\omega + 1}{(i\omega + 1)^2 + \omega_0^2} e^{-\omega^2 t} \\ \Rightarrow u(x,t) &= e^{-x} \cos(\omega_0 x) \, u(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{split}$$

۴) معادله زير را به كمك تبديل لاپلاس حل كنيد.

 $\begin{array}{ll} u_x + x u_t = 0, & 0 \leq x, & 0 \leq t \\ u(x,0) = 0 & \\ u(0,t) = t & \end{array}$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$

$$\Rightarrow U_x + xsU - xu(x,0) = 0 \Rightarrow U_x + xsU = 0$$

$$\Rightarrow U(x,s) = c_1 e^{-s\frac{x^2}{2}}$$

$$u(0,t) = t \Rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow U(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-s\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \boxed{u(x,t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right)u\left(t - \frac{x^2}{2}\right)}$$

۵) معادله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$u_{xx} - u_{tt} = 4e^{-2t}, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le t$$

 $u(0,t) = 1 - 2t - e^{-2t}, \quad u(2,t) = 3 - 2t - e^{-2t}$
 $u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$

$$\Rightarrow U_{xx} - \left(s^2U - su(x,0) - u_t(x,0)\right) = \frac{4}{s+2}$$

$$U_{xx} - s^2U^2 + sx = \frac{4}{s+2}$$

$$U(x,s) = c_1 e^{-sx} + c_2 e^{sx} + \frac{x+1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2}$$

$$u(0,t) = 1 - 2t - e^{-2t} \Rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2} = c_1 + c_2 + \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2}$$

$$u(2,t) = 3 - 2t - e^{-2t} \Rightarrow U(2,s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2} = c_1 e^{-2s} + c_2 e^{2s} + \frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\Rightarrow U(x,s) = \frac{x+1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = (x+1)u(t) - 2tu(t) - e^{-2t}u(t)$$



دانشگو تهران- دانشگره مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۰ تمرین ۹: حل معادلات PDE به کمک تبدیل لاپلاس و فوریه مدرس: دکترمهدی طالع مامولد - عل تمرین: نیکامامی - سروش مس فروش - کلممر خسروخاور



برای بوالات خود درخصوص این تمرین بارایا نامه <a href="mail.com/gm

۶) معادله لاپلاس زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & -\infty < x < \infty, & 0 \le y \\ u(x,0) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2\pi}\right), & u_y(x,0) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{u(x,y)\} = U(\omega,y)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 U + U_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow U(\omega,y) = c_1 e^{-\omega y} + c_2 e^{\omega y}$$

$$BC: \begin{cases} u(x,0) = \Pi(x) \Rightarrow U(\omega,0) = \Pi(\omega) = c_1 + c_2 \\ u_y(x,0) = \Lambda(x) \Rightarrow U_y(\omega,0) = \Lambda(\omega) = -c_1 \omega + c_2 \omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}\Pi(\omega) - \frac{1}{2\omega}\Lambda(\omega) \\ c_2 = \frac{1}{2}\Pi(\omega) + \frac{1}{2\omega}\Lambda(\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(\omega,y) = \left(\frac{1}{2}\Pi(\omega) - \frac{1}{2\omega}\Lambda(\omega)\right) e^{-\omega y} + \left(\frac{1}{2}\Pi(\omega) + \frac{1}{2\omega}\Lambda(\omega)\right) e^{\omega y}$$