تمرین6: PDE دوبعدی و لاپلاس

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: اشکان جعفری-محمد هادی معصومی

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه mhmasoumi@yahoo.com یا Ashkan.jafari@ut.ac.ir

مکاتبه نمایید.

1- معادله موج را برای یک پوسته مرتعش مستطیلی شکل با شرایط مرزی و اولیه زیر حل کنید.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad 0<x<a, \quad 0<y<b, \quad t>0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0,a}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0,b}=0, \quad u(x,y,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=f(x,y)$$

پاسخ: مطابق معمول با جداسازی متغیر ها برای تابع اصلی و جای گذاری در معادله به معادلات معمولی زیر می رسیم:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}+\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=-{k_x}^2 \qquad \frac{Y''}{Y}=-{k_y}^2$$

که پاسخ آنها بصورت زیر خواهد بود:

$$X(x)=Acosk_x x+Bsink_x x \qquad Y(y)=Ccosk_y y+Dsink_y y$$

$$T(t)=Ecos\omega_{mn}t+Fsin\omega_{mn}t$$

که: $\omega_{mn}=c\sqrt{{k_x}^2+{k_y}^2}$

با اعمال شروط مرزی برای بخش های X(x) و Y(y) بدست می آوریم:

$$X_m(x)=A_n cos\frac{m\pi}{a}x, \quad Y_n(y)=C_n cos\frac{n\pi}{b}y \qquad m,n=0,1,\ldots$$

بنابراین مود های تابع اصلی بصورت زیر خواهند بود:

$$u_{mn}(x,y,t)=cos\frac{m\pi}{a}x\ .\ cos\frac{n\pi}{b}y\ \left(G_{mn}cos\omega_{mn}t+H_{mn}sin\omega_{mn}t\right)$$

که ضرایب G_{mn} و H_{mn} با توجه به شروط اولیه باید بدست آیند:

$$u(x,y,0)=0=\sum_{m,n=0}^{\infty}cos\frac{m\pi}{a}x\ .\ cos\frac{n\pi}{b}y\ .G_{mn} \rightarrow G_{mn}=0$$

و همچنین برای m و n های مخالف صفر:

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} cos\frac{m\pi}{a}x \,.\, cos\frac{n\pi}{b}y \ .\omega_{mn}.H_{mn} \rightarrow$$

$$\omega_{mn}H_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)cos\frac{m\pi}{a}x \,.\, cos\frac{n\pi}{b}y\, dxdy$$

برای ضرایب H_{m0} و H_{0n} و ضریب H_{00}:

$$\omega_{m0}H_{m0} = \frac{2}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)cos\frac{m\pi}{a}x \ dxdy$$

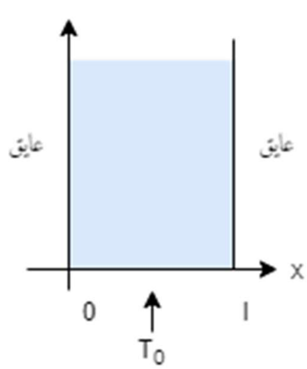
$$\omega_{0n}H_{0n} = \frac{2}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)sin\frac{n\pi}{a}y \ dxdy$$

$$H_{00} = \frac{1}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y) \ dxdy$$

2- معادله حرارت را در ناحیه دو بعدی نشان داده شده حل کنید.

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(x,0,t) = T_0 \ (constant)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, \ u(x,y,0) = f(x,y)$$



پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

پاسخ: چون شرط مرزی غیرهمگن روی مرز y = 0 داریم، تابع اصلی را به دو بخش گذرا و پایدار تقسیم می کنیم $u(x,y) = w(x,y,t) + u_s(x,y)$ و شرایط مرزی را به بخش پایدار پاسخ اختصاص می دهیم.

برای بخش پایدار یعنی u_s، جداسازی متغیر انجام می دهیم و با جایگذاری در معادله، به معادلات معمولی زیر می رسیم:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2$$

که پاسخ آنها بصورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = Acoskx + Bsinkx \qquad Y(y) = Ce^{-ky} + De^{ky}$$

که چون به ازای y > 0، نامحدود است، لازم است D = 0. با اعمال شروط مرزی برای بخش های X(x) و Y(y) بدست می آوریم:

$$X_n(x) = A_n cos\frac{n\pi}{l}x, \quad Y_n(y) = C_n e^{-(\frac{n\pi}{l})y}$$

$$u_s(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n cos\frac{n\pi}{l}x = T_0 \rightarrow E_0 = T_0 \rightarrow u_s(x,y) = T_0$$

حالا شرایط مرزی برای تابع w(x, y, t) کاملاً همگن است. اگر جداسازی متغیر ها را برای این تابع هم انجام دهیم، به معادلات معمولی زیر می رسیم:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{1}{c^2}\frac{T'}{T} = -{k_x}^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -{k_y}^2$$

که پاسخ آنها بصورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = Acosk_x x + Bsink_x x \qquad Y(y) = Ccosk_y y + Dsink_y y$$

$$T(t) = Ee^{-{\omega_{mn}}^2 t}$$

که: $\omega_{mn} = c\sqrt{{k_x}^2 + {k_y}^2}$

با اعمال شروط مرزی همگن برای بخش های X(x) و Y(y) بدست می آوریم:

$$X_m(x) = A_n cos\frac{m\pi}{l}x, \qquad Y(y) = Dsink_y y \qquad m = 0,1,\ldots$$

با این حساب تا به اینجا برای تابع w(x, y ,t):

$$w(x,y,t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} F(m;k_y)\,cos\frac{m\pi}{l}x\ .\ sink_y y.\,e^{-\omega_{mn}{}^2 t}dk_y$$

با اعمال شرط اولیه داده شده:

$$u(x,y,0) = w(x,y,t) + T_0 = f(x,y) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} F(m;k_y)\,cos\frac{m\pi}{l}x\ .\ sink_y y dk_y\ + T_0$$

$$F(m;k_y) = \frac{2}{l}\int_0^l \left[\int_0^\infty (f(x,y)-T_0)\sin(k_y y)\,dk_y\right] cos\frac{m\pi}{l}x\ dx$$

3- معادله حرارت ناهمگن $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}[1+\cos(\frac{\pi}{2}x)]$ که $0 < x < 1$ است را با شرایط مرزی $u_x(0,t) = $ $u(1,t) = 0$ و شرط اولیه $u(x,0) = 0$ حل کنید.

پاسخ: معادله با مشتقات جزئی داده شده، غیرهمگن اما دارای شرایط مرزی همگن است. با توجه به نوع شرایط مرزی، فرم این تابع بصورت زیر حدس زده می شود:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos(\frac{(2n-1)}{2}\pi x)$$

رابطه بالا را در معادله جایگذاری می کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n(t)' + T_n(t)\left(\frac{(2n-1)}{2}\pi\right)^2]\cos(\frac{(2n-1)}{2}\pi x) = e^{-t} + e^{-t}\cos(\frac{\pi}{2}x)$$

اگر تعریف کنیم $\lambda_n = \frac{(2n-1)}{2}\pi$، برای بدست آوردن ضرایب سری بالا می توانیم بنویسیم:

$$T_n(t)' + T_n(t)\lambda_n{}^2 = 2e^{-t}\int_0^1 [1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)]\cos(\lambda_n x)\,dx \rightarrow$$

$$T_n(t)' + T_n(t){\lambda_n}^2 = 2e^{-t}\left[\frac{sin\lambda_n x}{\lambda_n}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin((n-1)\pi x)}{(n-1)\pi}\right]\Big|_0^1\right]$$

عبارت $\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$ که صفر خواهد شد و عبارت $\frac{\sin((n-1)\pi x)}{(n-1)\pi}$ برای $n \neq 1$، صفر خواهد بود. بنابراین جداگانه برای n = 1 می نویسیم:

$$T_1(t)' + T_1(t)(\frac{\pi}{2})^2 = 2e^{-t}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = 2e^{-t}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}\right)$$

برای $n \neq 1$ داریم:

$$T_n(t)' + T_n(t){\lambda_n}^2 = 2e^{-t}\frac{sin\lambda_n}{\lambda_n} \qquad n \geq 2$$

اگر معادلات معمولی بالا را برای $T_1(t)$ و $n \geq 2$ $T_n(t)$ حل کنیم:

$$T_1(t) = C_1 e^{-(\frac{\pi}{2})^2 t} + \frac{e^{-t}}{(\pi^2 - 4)}(2 + \frac{16}{\pi})$$

$$T_n(t) = C_n e^{-{\lambda_n}^2 t} + e^{-t}\left(\frac{2sin\lambda_n}{{\lambda_n}^3 - \lambda_n}\right) \qquad n \geq 2$$

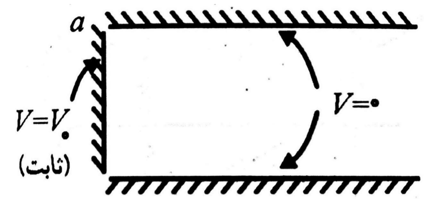
برای بدست آوردن ضریب C_1 و سایر ضرایب C_n کافیست به راحتی شرط اولیه را اعمال می کنیم:

$$u(x,0) = 0 \to C_1 = -\frac{\left(2 + \frac{16}{\pi}\right)}{(\pi^2 - 4)}, \qquad C_n = -\left(\frac{2sin\lambda_n}{{\lambda_n}^3 - \lambda_n}\right) \quad n \geq 2$$

در نهایت تمام قسمت های مجهول پاسخ معلوم شد:

$$u(x,t) = T_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(t)\cos(\lambda_n x)$$

4- معادله لاپلاس را برای تابع $v(x,y)$ در ناحیه زیر با شرایط مرزی مشخص شده در شکل حل کنید.



پاسخ: به کمک جداسازی متغیرها: $v(x,y)=X(x)Y(y)$ و جایگذاری در معادله و تقسیم بر $X(x)Y(y)$ داریم:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=p^2$$

بین مساوی قرار دادن معادله با p^2 یا $-p^2$ ، ثابتی را انتخاب می کنیم که منجر به پاسخ سینوسی و کسینوسی برای Y(y) شود چرا که Y(y) دارای دو شرط مرزی همگن است. در واقع Y(y) در دو نقطه صفر شده و ترکیب خطی توابع نمایی نمی تواند در دو نقطه صفر شود بنابراین Y(y) باید فرم سینوسی و کسینوسی داشته باشد. در نتیجه:

$$Y(y)=Acospy+Bsinpy$$

$$X(x)=Ce^{px}+De^{-p}$$

دلیل اینکه از فرم $Ce^{px}+De^{-px}$ به جای ترکیب خطی توابع sinh و cosh استفاده شد، این است که می دانیم x از یک سمت نامحدود است ($x\geq 0$) و توابع sinh و cosh هر دو با $x\to\infty$ نامحدود خواهند شد. بنابراین از این فرم استفاده می کنیم که می توانیم به راحتی با این فرض که تابع $v(x,y)$ و در نتیجه X(x) محدود خواهد بود، بگوییم $C=0$. با اعمال دو شرط مرزی همگن تابع Y(y):

$$v(x,0)=0\to Y(0)=0\to A=0$$

$$v(x,a)=0\to Y(b)=0\to Bsinpa=0\to p_n=\frac{n\pi}{a}\quad n=1,2,\dots$$

فرم نهایی تابع $v(x,y)$:

$$v_n(x,y)=E_ne^{-p_nx}sinp_ny$$

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

که چون معادله لاپلاس یک معادله خطی است، ترکیب خطی $v_n(x,y)$ ها در معادله صدق می کند و پاسخ کلی تری از معادله را به ما می دهد:

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-p_n x} sinp_n y$$

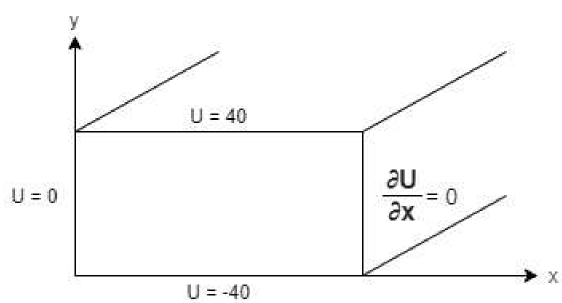
با اعمال آخرین شرط مرزی:

$$v(0,y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n sinp_n y$$

با گسترش فرد تابع ثابت V_0، تابعی متناوب با دوره تناوب 2a می سازیم تا ضرایب را بدست آوریم:

$$E_n = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 sin\frac{n\pi y}{a} dy = \frac{2V_0}{n\pi}(-cosn\pi + 1) = \begin{cases} 0 & n\ even \\ \frac{4V_0}{n\pi} & n\ odd \end{cases}$$

5- پاسخ معادله لاپلاس را در فضای داده شده زیر بدست آورید. (عرض ساختار را a و ارتفاع آن را b نامگذاری می کنیم.)



پاسخ: پاسخ معادله لاپلاس را به دو بخش تقسیم می کنیم. یک بخش شرط مرزی U = -40 ($u_1(x,y)$) را در مرز پایینی و یک بخش شرط مرزی U = 40 ($u_2(x,y)$) را در مرز بالایی برقرار می کند. برای هر کدام از این بخش ها سایر مرز ها، شرط مرزی همگن دارند. پس: $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$.

برای حل معادله لاپلاس برای تابع u_1، از روش تفکیک متغیر و جایگذاری در معادله و در نظر گرفتن ثابت k، بدست می آوریم:

$$X(x) = Asinkx + Bcoskx \qquad Y(y) = Csinhky + Dsinhk(b-y)$$

با اعمال شرط های مرزی بر روی بخش های X(x) و Y(y):

$$X(x) = A_n sin(2n-1)\frac{\pi}{2a}x \qquad n = 0,1,\ldots$$

$$Y(y) = D_n sinhk(b-y) \qquad k = (2n-1)\frac{\pi}{2a}$$

برای برقراری شرط مرزی مربوط به این تابع یعنی U =-40 برای مرز y = 0 داریم:

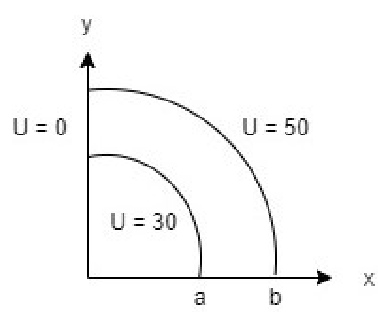
$$u_1(x,0) = -40 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\, sin(2n-1)\frac{\pi}{2a}x \ .sinhk(b-0) \rightarrow$$

$$E_n sinhkb = \frac{2}{a}\int_0^a -40 \times sin(2n-1)\frac{\pi}{2a}x\, dx$$

به همین ترتیب معادله برای تابع u_2 حل می شود. فرق آن با آنچه که در بالا آمده، این است که به جای sinhk(b-y) خود sinhky ظاهر می شود و به جای 40- در آخرین رابطه نوشته شده، 40 خواهیم داشت. پس در نهایت:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\,[sinhk(b-y) - sinhky] sin(2n-1)\frac{\pi}{2a}x$$

6- پتانسیل را با توجه به شروط مرزی در ناحیه $a < r < b$ ربع استوانه زیر بدست آورید.



پاسخ: با توجه به آنکه ربع دایره مورد نظر، مرکز یعنی r = 0 را در بر ندارد و همچنین تا بی نهایت نرفته است، پاسخ کلی معادله لاپلاس در مختصات قطبی برای چنین حالتی بصورت زیر است:

$$u(r,\varphi) = (Acosk\varphi + Bsink\varphi)(Cr^k + Dr^{-k})$$

با توجه به شروط مرزی همگن بدست می آوریم که:

$$u(r,0) = 0 \rightarrow A = 0 \qquad u\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow sink\frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow k = 2n \qquad n = 1,2,\ldots$$

حالا اگر $u(r,\varphi)$ را بصورت مجموع پاسخ های بالا به ازای n های مختلف بنویسیم:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n r^{2n} + F_n r^{-2n})sin2n\varphi$$

می توانیم باقی شروط مرزی ناهمگن را هم برقرار کنیم و ضرایب را بدست آوریم:

$$u(a,\varphi) = 30 = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n a^{2n} + F_n a^{-2n})sin2n\varphi \rightarrow (E_n a^{2n} + F_n a^{-2n}) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 30 \times sin2n\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{-120}{2n\pi}[cosn\pi - 1]$$

$$u(b,\varphi) = 50 = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n b^{2n} + F_n b^{-2n})sin2n\varphi \rightarrow (E_n b^{2n} + F_n b^{-2n}) = \frac{-200}{2n\pi}[cosn\pi - 1]$$

حل تا همینجا کفایت می کند اما با حل دو معادله دو مجهول بالا می توان ضرایب E_n و F_n را بطور کامل مشخص کرد.

7- معادله زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 4x + 2y \qquad 0 \le x \le \pi,\ \ 0 \le y \le 1$$
$$u_x(0,y) = -y, \quad u_x(\pi,y) = y$$
$$u(x,0) = x, \quad u(x,1) = 2x$$

پاسخ: حل مشابه این سوال با تغییرات جزئی، در صفحه های 118 تا 124 اسلاید های فصل دوم درس آمده است.

8- معادله غیرهمگن حرارت زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (h عددی ثابت است.)

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu \qquad \mathrm{x} \geq 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = u_0$$

پاسخ: با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{dx^2} = \left(\frac{s+h}{k}\right)U \rightarrow U(x,s) = Ae^{\sqrt{\frac{s+h}{k}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{s+h}{k}}x} \qquad U(0,s) = 0$$

با توجه به اینکه مسئله نیمه محدود است یعنی $\mathrm{x} \geq 0$ و پاسخ باید محدود باشد: A = 0

$$u(0,t) = u_0 \rightarrow U(x,s) = \frac{u_0}{s}e^{-\sqrt{\frac{s+h}{k}}x}$$

اگر لاپلاس معکوس زیر را بدانیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\sqrt{\frac{s+h}{k}}x}\right\} = \frac{xe^{-ht-\frac{x^2}{4kt}}}{2\sqrt{\pi k t^3}}$$

همچنین با توجه به اینکه $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{F(s)}{s}\}$:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{u_0 x e^{-h\tau-\frac{x^2}{4k\tau}}}{2\sqrt{\pi k \tau^3}}d\tau$$

9- معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس و با شرایط داده شده زیر حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} + x\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}} = x^2 \qquad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0$$

پاسخ: با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله نسبت به t:

$$sU(x,s) - u(x,0) + xU_x(x,s) = \frac{x^2}{s} \rightarrow \ U_x(x,s) + \ \frac{s}{x}U(x,s) = \frac{x}{s} \rightarrow$$

$$U(x,s) = C_1 x^{-s} + \frac{x^2}{s(s+2)}$$

با استفاده از شرط مرزی:

$$u(0,t) = 0 \rightarrow U(0,s) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

در نتیجه:

$$U(x,s) = \frac{x^2}{s(s+2)} = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) \rightarrow u(x,t) = \frac{x^2}{2}(1 - \ e^{-2t}) \qquad t \geq 0$$

10- معادله موج زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) \qquad 0 < x < \pi, \qquad t \geq 0$$

$$u(0,t) = g(t), \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$

پاسخ: حل این سوال در صفحه های 156 تا 158 اسلاید های درس آمده است.