حل چند تمرین نمونه از مطالب میان ترم

1-سری فوریه توابع زیر را بدست آورید

الف) $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x\le 0\\ x^2 & 0<x\le \pi\end{cases} \qquad f(x+2\pi)=f(x)$

ب) $-\pi<x\le\pi \qquad f(x)=e^{-|x|}$

حل 1-الف: $T=2\pi$ پس داریم $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$ بنابراین:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0}1\times dx+\int_{0}^{\pi}x^2dx]=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{6} \qquad f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0}1\times\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx]=\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0}1\times\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x^2\sin nxdx]=\frac{1}{\pi}[-\frac{1}{n}(1-(-1)^n)+\frac{1}{n^3}(2(-1)^n-2-\pi^2n^2(-1)^n]=$$

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{n} & n=even\\ \frac{\pi^2-n}{n}-\frac{4}{n^3} & n=odd\end{cases}$$

حل 1-ب: $T=2\pi$ پس داریم $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$ تابع زوج است بنابراین:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^{x}dx+\int_{0}^{\pi}e^{-x}dx]=\frac{1}{2\pi}[(1-e^{-\pi})+(1-e^{-\pi})]=\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^{x}\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}e^{-x}\cos nxdx]=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^{x}\frac{1}{2}(e^{jnx}+e^{-jnx})dx+\int_{0}^{\pi}e^{-x}\frac{1}{2}(e^{jnx}+e^{-jnx})dx]=$$

$$\frac{1}{2\pi}[(\frac{1}{1+jn}e^{x(1+jn)}+\frac{1}{1-jn}e^{x(1-jn)})_{-\pi}^{0}+(\frac{1}{jn-1}e^{x(-1+jn)}-\frac{1}{jn+1}e^{-x(1+jn)})_{0}^{\pi}]=\frac{1}{2\pi}[(\frac{1}{1+jn}+\frac{1}{1-jn})-(\frac{1}{1+jn}e^{-\pi(1+jn)}+$$

$$\frac{1}{1-jn}e^{-\pi(1-jn)})+(\frac{1}{jn-1}e^{\pi(-1+jn)}-\frac{1}{jn+1}e^{-\pi(1+jn)})-(\frac{1}{jn-1}-\frac{1}{jn+1})]=\frac{1}{\pi(1+n^2)}[(1-(-1)^ne^{-\pi}]$$

2--اگر سری فوریه تابع $f(x)$ برابر با $1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx$ باشد حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{\pi}f(x)\sin^3xdx$ را بدست اورید

حل 2: میدانیم: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$$I = \int_0^\pi f(x)\sin^3 x dx = \int_0^\pi [1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx](\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x)dx =$$

$$\int_0^\pi (\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x)dx + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx(3\sin x - \sin 3x)dx =$$

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{(-1)^n}{n^2}\sin x \sin nx dx - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{(-1)^n}{n^2}\sin 3x \sin nx dx$$

انتگرال $\int_0^\pi \frac{(-1)^n}{n^2}\sin x \sin nx dx$ فقط به ازای $n=1$ غیر صفر است و انتگرال $\int_0^\pi \frac{(-1)^n}{n^2}\sin 3x \sin nx$ فقط به ازای $n=3$ غیر صفر است

بنابراین داریم:

$$I = \int_0^\pi f(x)\sin^3 x dx = \frac{4}{3} + \frac{3}{4}\int_0^\pi \frac{(-1)^1}{1^2}\sin^2 x dx - \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{(-1)^3}{3^2}\sin^2 3x dx = \frac{4}{3} - \frac{3}{4}(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{36}(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3} - \frac{13\pi}{36}$$

3–اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)$ برابر با $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{1+\omega^4}\sin \omega x d\omega$ باشد حاصل انتگرال $I = \int_0^\infty (1+x^2) f(x)\sin x dx$ را بدست اورید:

حل 3: با توجه به صورت مسئله داریم:

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin \omega x dx = \frac{\omega}{\pi(1+\omega^4)} \qquad I = \int_0^\infty (1+x^2) f(x)\sin x dx = \int_0^\infty f(x)\sin x dx + \int_0^\infty x^2 f(x)\sin x dx$$

$$\to I = I_1 + I_2 \qquad I_1 = \int_0^\infty f(x)\sin x dx = \frac{\pi}{2}B(1) = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{\pi(1+1^2)} = \frac{1}{4} \qquad \frac{d^2B(\omega)}{d\omega^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x^2 f(x)\sin x dx \to$$

$$B''(\omega) = \frac{d^2}{d\omega^2}(\frac{\omega}{\pi(1+\omega^4)}) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x^2 f(x)\sin x dx = -\frac{2}{\pi}I_2 \to I_2 = -\frac{\pi}{2}B''(1) = \frac{1}{2} \to I = I_1 + I_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

4–با استفاده انتگرال فوریه مناسب، درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(\omega k) - \omega k\cos(\omega k)}{\omega^2}\sin(\omega x)d\omega = \begin{cases} \pi x & 0 < x < k \\ \frac{\pi}{2}k & x = k \\ 0 & x > k \end{cases}$$

حل 4: اگر تابع $f(x)$ را به صورت $f(x) = \begin{cases} x & x < k \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ تعریف شود در اینصورت میتوانیم بنویسیم:

در اینصورت داریم: $f(x) = \begin{cases} x & x < k \\ \frac{k}{2} & x = k \\ 0 & x > k \end{cases}$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^k x\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}[(-\frac{x}{\omega}\cos\omega x)+\int_0^k\frac{\cos\omega x}{\omega}dx]=\frac{2}{\pi}[-\frac{x}{\omega}\cos\omega x+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x]_0^k$$

$$\to B(\omega)=\frac{2}{\pi}[-\frac{k}{\omega}\cos\omega k+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega k]=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega k-\omega k\cos\omega k}{\omega^2}\qquad f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega\to$$

$$\begin{cases}x & x<k\\ \frac{k}{2} & x=k\\ 0 & x>k\end{cases}=\int_0^\infty\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega k-\omega k\cos\omega k}{\omega^2}\sin\omega x d\omega\to\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin(\omega k)-\omega k\cos(\omega k)}{\omega^2}\sin(\omega x)d\omega=\begin{cases}\pi x & x<k\\ \frac{k\pi}{2} & x=k\\ 0 & x>k\end{cases}$$

5--اگر لاپلاس تابع $f(x)$ برابر با $F(s)$ باشد اولا ثابت کنید $\int_0^\infty\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^\infty F(s)ds$ و با استفاده از این رابطه تبدیل فوریه سینوسی $f(x)=\frac{sixax}{x},\ a>0$ را بدست آورید.

حل 5: از قضیه لاپلاس استفاده میکنیم:

$$Laplas(f(x)=xg(x))=-\frac{dG(s)}{ds}=F(s)=-G'(s)\qquad g(x)=\frac{f(x)}{x}\qquad G(s)=\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx=\int_0^\infty\frac{f(x)}{x}e^{-sx}dx$$

$$G'(s)=\int_0^\infty\frac{f(x)}{x}(-x)e^{-sx}dx=-\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx=-F(s)\to\int_s^\infty G'(s)ds=\int_s^\infty -F(s)ds\to\int_s^\infty F(s)ds=-\int_s^\infty G'(s)ds=G(s)-G(\infty)$$

$$G(s)=\int_s^\infty F(s)ds\to G(s)=Laplas(g(x))=\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx=\int_0^\infty\frac{f(x)}{x}e^{-sx}dx=\int_s^\infty F(s)ds\qquad s=0\to\int_0^\infty\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^\infty F(s)ds$$

لازم به ذکر است که $\lim_{s\to\infty}G(s)=0$ میباشد. حال با استفاده از قضیه بالا داریم:

$$F_s(f(x))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\sin ax\sin\omega x}{x}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{g(x)}{x}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty G(s)ds\qquad G(s)=Laplas(\sin ax\sin\omega x)$$

$$\sin ax\sin\omega x=\frac{1}{2}\cos(\omega-a)x-\frac{1}{2}\cos(\omega+a)x\to G(s)=Laplas(\sin ax\sin\omega x)=$$

$$\frac{1}{2}Laplas[\cos(\omega-a)x]-\frac{1}{2}Laplas[\cos(\omega+a)x]=\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+(\omega-a)^2}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+(\omega+a)^2}$$

$$F_s(f(x))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty G(s)ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{2}[\frac{s}{s^2+(\omega-a)^2}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+(\omega+a)^2}]ds=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\{\frac{1}{4}\ln[s^2+(\omega-a)^2]-\frac{1}{4}\ln[s^2+(\omega+a)^2]\}_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[\frac{1}{4}\ln\frac{s^2+(\omega-a)^2}{s^2+(\omega+a)^2}]_0^\infty=\frac{1}{2}\ln\frac{\omega+a}{\omega-a}$$

6-تبدیل فوریه سینوسی توابع $f(x)=\frac{x}{x^2+a^2},\ a>0$ و $f(x)=\frac{e^{-ax}}{x},\ a>0$ و تبدیل فوریه کسینوسی توابع $f(x)=xe^{-x}\sin x$ و $f(x)=\frac{e^{-x}\sin x}{x}$ را بدست آورید.

حل 6-الف: طبق تعریف داریم:

$$F_s(f(x))=F_s(\frac{x}{x^2+a^2})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}\sin\omega x dx$$

قبلا اثبات کردیم که انتگرال سینوسی $g(x)=e^{-ax}$ برابر بود با $B(\omega)=\frac{2\omega}{\pi(\omega^2+a^2)}$ یعنی:

$$g(x)=e^{-ax}=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega=\int_0^\infty \frac{2\omega}{\pi(\omega^2+a^2)}\sin\omega x d\omega\rightarrow\int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2+a^2}\sin\omega x d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

انتگرال $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}\sin\omega x dx$ همان $\int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2+a^2}\sin\omega x d\omega$ که متغییر انتگرال از x به ω تغییر کرده پس:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}\sin\omega x dx=\frac{\pi}{2}e^{-a\omega}\rightarrow F_s(f(x))=F_s(\frac{x}{x^2+a^2})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}\sin\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\pi}{2}e^{-a\omega}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\omega}$$

حل 6-ب:

$$F_s(f(x))=F_s(\frac{e^{-ax}}{x})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\sin\omega x dx\rightarrow\frac{dF_s(f(x))}{\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x\frac{e^{-ax}}{x}\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x dx$$

میدانیم برای $g(x)=e^{-ax}$ انتگرال کسینوسی برابر است با $\frac{2a}{\pi(\omega^2+a^2)}$ $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x dx=$ در نتیجه:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x dx=\frac{2a}{\pi(\omega^2+a^2)}\rightarrow\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x dx=\frac{a}{\omega^2+a^2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{dF_s(f(x))}{\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x\frac{e^{-ax}}{x}\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}\rightarrow F_s(f(x)=\int\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

حل 6-پ: تبدیل فوریه کسینوسی توابع $f(x)=xe^{-x}\sin x$ برابر است با:

$$F_c\ (xe^{-x}\sin x)=F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty xe^{-x}\sin x\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty xg(x)e^{-x}dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{ds}\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx\ (s=1)=$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{dG(s)}{ds}(s=1)\qquad G(s)=Laplas(\sin x\cos\omega x)=Laplas[\frac{1}{2}\sin(\omega+1)x-\sin(\omega-1)]=$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\omega+1}{s^2+(\omega+1)^2}-\frac{\omega-1}{s^2+(\omega-1)^2})=\frac{1}{2}(\frac{-2s(\omega+1)}{[s^2+(\omega+1)^2]^2}-\frac{-2s(\omega-1)}{[s^2+(\omega-1)^2]^2})$$

$$F_c(\omega)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{dG(s)}{ds}(s=1)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}(\frac{-2(\omega+1)}{[1^2+(\omega+1)^2]^2}-\frac{-2(\omega-1)}{[1^2+(\omega-1)^2]^2})=$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{-(\omega+1)}{[\omega^2+2\omega+2]^2}+\frac{(\omega-1)}{[\omega^2-2\omega+2]^2})$$

حل 6-ت:تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\dfrac{e^{-x}\sin x}{x}$ برابر است با:

$$F_c\left(\frac{e^{-x}\sin x}{x}\right)=F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x}\cos\omega x dx\to\frac{dF_c(\omega)}{d\omega}=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x}\sin x\sin\omega x dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}Laplas(\sin x\sin\omega x)_{(s=1)}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}Laplas[\frac{1}{2}\cos(\omega-1)x-\cos(\omega+1)x]=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}[\frac{s}{s^2+(\omega-1)^2}-\frac{s}{s^2+(\omega+1)^2}]_{(s=1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}[\frac{1}{1^2+(\omega-1)^2}-\frac{1}{1^2+(\omega+1)^2}]=\frac{dF_c(\omega)}{d\omega}\to F_c(\omega)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\frac{1}{1^2+(\omega-1)^2}-\frac{1}{1^2+(\omega+1)^2}=$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}[\tan^{-1}(\omega-1)-\tan^{-1}(\omega+1)]$$

با استفاده از رابطه $\tan^{-1}\alpha-\tan^{-1}\beta=\tan^{-1}\dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$ داریم:

$$F_c\left(\frac{e^{-x}\sin x}{x}\right)=F_c(\omega)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}[\tan^{-1}(\omega-1)-\tan^{-1}(\omega+1)]=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{(\omega-1)-(\omega+1)}{1+(\omega-1)(\omega+1)}$$

$$F_c\left(\frac{e^{-x}\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{2}{\omega^2}$$

7- یک سیستم خطی با معادله دیفرانسیل $y'''+8y''+37y'+50y=9x'+35x$ داده شده است:

الف) با استفاده از تبدیل فوریه پاسخ این معادله را برای ورودی $x(t)=2\cos(5t+150^{\circ})$ بدست آورید.

ب) با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه این سیستم را بدست آورید. راهنمایی: $(x^3+8x^2+37x+50=(x+2)(x^2+6x+25)$

حل 7-الف: از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل فوریه میگیریم:

$$[(j\omega)^3+8(j\omega)^2+37(j\omega)+50]Y(\omega)=[9j\omega+35]X(\omega)\to H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{9j\omega+35}{(j\omega)^3+8(j\omega)^2+37(j\omega)+50}$$

برای فرکانس ورودی $\omega=5$ تابع تبدیل را بدست می آوریم:

$$H(5)=\frac{45j+35}{-125j-200+185j+50}=\frac{45j+35}{-150+60j}=\frac{7+9j}{-30+12j}=\frac{11.4\angle 52.1^{\circ}}{32.3\angle 158.2^{\circ}}=0.35\angle-106.1$$

حال دامنه خروجی را باضرب کردن اندازه تابع تبدیل در دامنه ورودی و فاز خروجی را با جمع کردن فاز ورودی با فاز تابع تبدیل بدست می آوریم:

$$H(5)=0.35\angle-106.1\qquad x(t)=2\cos(5t+150^{\circ})\to y(t)=0.7\cos(5t+43.9^{\circ})$$

حل 7-ب: با جایگزینی $s=j\omega$ در قسمت قبل تابع تبدیل در حوزه لاپلاس برابر است با:

$$H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{9s+35}{s^3+8s^2+37s+50}=\frac{9s+3}{(s+2)(s^2+6s+25)}$$

پاسخ ضربه یعنی $x(t)=\delta(t)$ و $X(s)=1$ در نتیجه داریم:

$$Y(s)=H(S)=\frac{9s+3}{(s+2)(s^2+6s+25)}=\frac{1}{s+2}-\frac{s-5}{s^2+6s+25}=\frac{1}{s+2}-[\frac{s+3}{(s+3)^2+16}-\frac{8}{(s+3)^2+16}]$$

$$Y(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{8}{(s+3)^2+16}-\frac{s+3}{(s+3)^2+16}$$

حال با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس $e^{-at}u_{-1}(t)$ برابر است با $\frac{1}{s+2}$، تبدیل لاپلاس $A\cos\omega_0 tu_{-1}(t)$ برابر است با $\frac{As}{s^2+\omega_0^2}$ و تبدیل لاپلاس $A\sin\omega_0 tu_{-1}(t)$ برابر است با $\frac{A\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ و با استفاده از تبدیل لاپلاس $f(t)e^{-\alpha t}$ که برابر است با $F(s+\alpha)$ لاپلاس معکوس عبارت بالا برابر است با:

$$y(t)=[e^{-2t}+2e^{-3t}\sin 4t-e^{-3t}\cos 4t]u_{-1}(t)$$

8- ثابت کنید: $$\int_0^\infty[-\ln(4+\omega^2)(1+\omega^2)\cos\omega x+\tan^{-1}\frac{3\omega}{2-\omega^2}\sin\omega x)d\omega=\begin{cases}\frac{2\pi e^{2x}}{x} & x<0\\ \frac{\pi e^{-x}}{x} & x>0\end{cases}$$

حل 8) : فرض کنید $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x}}{x} & x<0\\ \frac{e^{-x}}{x} & x>0\end{cases}$ در اینصورت داریم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega xdx\rightarrow\frac{dA(\omega)}{d\omega}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-xf(x)\sin\omega xdx=-\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}e^{2x}\sin\omega xdx+\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega xdx]=$$

$$-\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}e^{2x}\frac{1}{2j}(e^{j\omega x}-e^{-j\omega x})dx+\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{2j}(e^{j\omega x}-e^{-j\omega x})dx]=-\frac{1}{2\pi j}[\int_{-\infty}^{0}(e^{x(2+j\omega)}-e^{x(2-j\omega)})dx$$

$$+\int_0^\infty(e^{-x(1-j\omega)}-e^{-x(1+j\omega)})dx]=-\frac{1}{2\pi j}[(\frac{1}{2+j\omega}e^{x(2+j\omega)}-\frac{1}{2-j\omega})_{-\infty}^{0}+(-\frac{1}{1-j\omega}e^{-x(1-j\omega)}+\frac{1}{1+j\omega}e^{-x(1+j\omega)})_0^\infty]$$

$$=-\frac{1}{2\pi j}[\frac{1}{2+j\omega}-\frac{1}{2-j\omega}+\frac{1}{1-j\omega}-\frac{1}{1+j\omega}]=-\frac{1}{2\pi j}[\frac{2j\omega}{4+\omega^2}+\frac{2j\omega}{1+\omega^2}]=-\frac{1}{\pi}[\frac{\omega}{4+\omega^2}+\frac{\omega}{1+\omega^2}]\rightarrow$$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=-\frac{1}{\pi}[\frac{\omega}{4+\omega^2}+\frac{\omega}{1+\omega^2}]\rightarrow A(\omega)=-\frac{1}{\pi}[\frac{1}{2}\ln(4+\omega^2)+\frac{1}{2}\ln(1+\omega^2)]=-\frac{1}{2\pi}\ln(4+\omega^2)(1+\omega^2)$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega xdx\rightarrow\frac{dB(\omega)}{d\omega}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\cos\omega xdx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}e^{2x}\cos\omega xdx+\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega xdx]=$$

$$\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}e^{2x}\frac{1}{2}(e^{j\omega x}+e^{-j\omega x})dx+\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{2}(e^{j\omega x}+e^{-j\omega x})dx]=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{0}(e^{x(2+j\omega)}+e^{x(2-j\omega)})dx$$

$$+\int_0^\infty(e^{-x(1-j\omega)}+e^{-x(1+j\omega)})dx]=\frac{1}{2\pi j}[(\frac{1}{2+j\omega}e^{x(2+j\omega)}+\frac{1}{2-j\omega})_{-\infty}^{0}+(-\frac{1}{1-j\omega}e^{-x(1-j\omega)}-\frac{1}{1+j\omega}e^{-x(1+j\omega)})_0^\infty]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{2+j\omega}+\frac{1}{2-j\omega}+\frac{1}{1-j\omega}+\frac{1}{1+j\omega}]=\frac{1}{2\pi}[\frac{4}{4+\omega^2}+\frac{2}{1+\omega^2}]=\frac{1}{\pi}[\frac{2}{4+\omega^2}+\frac{1}{1+\omega^2}]\rightarrow$$

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega}=\frac{1}{\pi}[\frac{2}{4+\omega^2}+\frac{1}{1+\omega^2}]\rightarrow B(\omega)=\frac{1}{\pi}[\tan^{-1}\frac{\omega}{2}+\tan^{-1}\omega]=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{3\omega}{2-\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega=\int_0^\infty[-\frac{1}{2\pi}\ln(4+\omega^2)(1+\omega^2)\cos\omega x+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{3\omega}{2-\omega^2}\sin\omega x)]d\omega\rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{e^{2x}}{x} & x<0\\ \frac{e^{-x}}{x} & x>0\end{cases}=\int_0^\infty[-\frac{1}{2\pi}\ln(4+\omega^2)(1+\omega^2)\cos\omega x+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{3\omega}{2-\omega^2}\sin\omega x)d\omega\rightarrow$$

$$\int_0^\infty[-\ln(4+\omega^2)(1+\omega^2)\cos\omega x+\tan^{-1}\frac{3\omega}{2-\omega^2}\sin\omega x)d\omega=\begin{cases}\frac{2\pi e^{2x}}{x} & x<0\\ \frac{\pi e^{-x}}{x} & x>0\end{cases}$$

9- پاسخ معادله $\begin{cases}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\delta(t-x)\\ u(0,t)=e^t-1 \quad u(x,0)=0 \quad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0\end{cases}$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورید.

حل 9: از طرفین در حوزه زمان لاپلاس میگیریم:

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-[sU(x,s)-u(x,0)]=e^{-sx}\rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-[sU(x,s)-0]=e^{-sx}\rightarrow$$
$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-sU(x,s)=e^{-sx}$$

این معادله یک پاسخ هموژن به صورت $U_h(x,s)=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$ میباشد که $\lambda^2-s=0\rightarrow\lambda_1=\sqrt{s}\quad\lambda_2=-\sqrt{s}$ اما پاسخ خصوصی از جنس طرف دوم است که بصورت $U_p(x,s)=Ce^{-sx}$ که با جایگزینی در معادله داریم:

$$s^2Ce^{-sx}-sCe^{-sx}=e^{-sx}\rightarrow Ce^{-sx}(s^2-s)=e^{-sx}\rightarrow C=\frac{1}{s^2-s}\rightarrow U_p(x,s)=\frac{1}{s^2-s}e^{-sx}$$

$$U(x,s)=U_h(x,s)+U_p(x,s)=Ae^{\sqrt{s}x}+Be^{-\sqrt{s}x}+\frac{1}{s^2-s}e^{-sx}\qquad u(0,t)=e^t-1\rightarrow U(0,s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}=$$
$$\frac{1}{s^2-s}\qquad u(0,s)=A+B+\frac{1}{s^2-s}=\frac{1}{s^2-s}\rightarrow A+B=0\qquad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0\rightarrow\lim_{x\to\infty}U(x,s)=0\rightarrow$$
$$A=0\rightarrow B=0\rightarrow U(x,s)=\frac{1}{s^2-s}e^{-sx}=(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s})e^{-sx}\rightarrow u(x,t)=(e^{(t-x)}-1)u_{-1}(t-x)$$

10- با استفاده از روش جداسازی متغییرها پاسخ معادله لاپلاس زیر را با شروط مرزی داده شده بدست آورید:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0\qquad u(0,y)=u_x(a,y)=0\qquad u(x,0)=40\qquad \lim_{y\to\infty}u(x,y)=0\quad 0<x<a\quad y>0$$

حل 10: تابع را به صورت $u=A(x)B(y)$ در نظر میگیریم با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$B(y)\frac{d^2A(x)}{dx^2}+A(x)\frac{d^2B(y)}{dy^2}=0\rightarrow\frac{1}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{dx^2}+\frac{1}{B(y)}\frac{d^2B(y)}{dy^2}=0$$

با توجه به اینکه جمله اول فقط تابع x و جمله دوم فقط تابع y است تنها امکان برقراری معادله با توجه به شروط مرزی داده شده به صورت زیر است:

$$\frac{1}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{dx^2}=-\frac{1}{B(y)}\frac{d^2B(y)}{dy^2}=-k^2\rightarrow A(x)=a\sin kx+b\cos kx\qquad B(y)=ce^{-ky}+de^{ky}\rightarrow$$

$$u=A(x)B(y)=(a\sin kx+b\cos kx)(ce^{-ky}+de^{ky})\qquad u(0,y)=0\rightarrow b=0$$

$$u(x,\infty)=0\rightarrow d=0\rightarrow u=E\sin kxe^{-ky}\qquad u_x(a,y)=0\rightarrow\cos ka=0\rightarrow ka=(n+\frac{1}{2})\pi\rightarrow$$

$$k=(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}\rightarrow u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}xe^{-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}y}\qquad u(x,0)=40=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}x$$

بنابراین ضریب E_n ضریب بسط سری فوریه سینوسی عدد 40 با پریود $T=4a$ میباشد بنابراین داریم:

$$E_m=\frac{1}{a}\int_0^{2a}40\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{a}=\frac{40}{a}[-\frac{a}{\pi(n+\frac{1}{2})}\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{a}]_0^{2a}=\frac{160}{\pi(2n+1)}\rightarrow$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{160}{\pi(2n+1)}\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}xe^{-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}y}$$

11- با استفاده از تبدیل فوریه پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y'''+6y''+11y'+6y=12e^{-4t}u_{-1}(t)$$

راهنمایی: $x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$

11-ب) با استفاده از قانون پارسوال حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)(x^2+16)}$ را بدست آورید.

<u>حل 11-الف</u>: از طرفین تبدیل فوریه میگیریم:

$$[(j\omega)^3+6(j\omega)^2+11(j\omega)+6]Y(\omega)=\frac{12}{j\omega+4}\rightarrow(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)Y(\omega)=\frac{12}{j\omega+4}$$

$$Y(\omega)=\frac{12}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+4)}=\frac{A}{j\omega+1}+\frac{B}{j\omega+2}+\frac{C}{j\omega+3}+\frac{D}{j\omega+4}$$

$$A=Y(\omega)(j\omega+1)_{(j\omega=-1)}=\frac{12}{(-1+2)(-1+3)(-1+4)}=2\qquad B=Y(\omega)(j\omega+2)_{(j\omega=-2)}=\frac{12}{(-2+1)(-2+3)(-2+4)}=-6$$

$$C=Y(\omega)(j\omega+3)_{(j\omega=-3)}=\frac{12}{(-3+1)(-3+2)(-3+4)}=6\quad D=Y(\omega)(j\omega+4)_{(j\omega=-4)}=\frac{12}{(-4+1)(-4+2)(-4+3)}=-2$$

$$Y(\omega)=\frac{2}{j\omega+1}+\frac{-6}{j\omega+2}+\frac{6}{j\omega+3}+\frac{-2}{j\omega+4}\rightarrow y(t)=(2e^{-t}-6e^{-2t}+6e^{-3t}-2e^{-4t})u_{-1}(t)$$

<u>حل 11-الف</u>):حال داریم:

$$|Y(\omega)| = \frac{12}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}\sqrt{16+\omega^2}} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{144\,d\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)(16+\omega^2)} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)(16+\omega^2)} = \frac{\pi}{72}\int_0^{\infty}(2e^{-t}-6e^{-2t}+6e^{-3t}-2e^{-4t})^2 dt \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)(16+\omega^2)} =$$

$$\frac{\pi}{72}\int_0^{\infty}(4e^{-2t}+36e^{-4t}+36e^{-6t}+4e^{-8t}-24e^{-3t}+24e^{-4t}-8e^{-5t}-72e^{-5t}+24e^{-6t}-24e^{-7t})dt =$$

$$\frac{\pi}{72}\int_0^{\infty}(4e^{-2t}-24e^{-3t}+60e^{-4t}-80e^{-5t}+60e^{-6t}-24e^{-7t}+4e^{-8t})dt =$$

$$\frac{\pi}{72}[-2e^{-2t}+8e^{-3t}-15e^{-4t}+16e^{-5t}-10e^{-6t}+\frac{24}{7}e^{-7t}-\frac{1}{2}e^{-8t}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{72}(2-8+15-16+10-\frac{24}{7}+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{1008}$$

12-با استفاده از انتگرال فوریه $f(x)=\begin{cases} x & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$ و $f(x)=e^{-x}$ ($x>0$) حاصل انتگرالها زیر را بدست آورید:

الف $I_1=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3\omega}{\omega}d\omega$ ب) $I_2=\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega^n}{\omega}d\omega$ پ) $I_3=\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$

<u>حل 12-الف):</u> تابع زوج است پس فقط $A(\omega)$ داریم که برابر است با:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}(1)\cos\omega x dt=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega a$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega=\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega a\cos\omega x d\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}f(0)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega a}{\omega}d\omega \rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin\omega a}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

ملاحظه میشود پاسخ به a بستگی ندارد. حال انتگرال خواسته شده را به صورت زیر مینویسیم:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3\omega}{\omega}d\omega=\int_0^{\infty}\frac{0.25(3\sin\omega-\sin3\omega)}{\omega}d\omega=\frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega-\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin3\omega}{\omega}d\omega=\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

<u>حل 12-ب):</u> از قسمت الف داشتیم $A(\omega)=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega a$ بنابراین داریم:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega \rightarrow \int_0^{\infty}\frac{2\sin\omega a}{\pi\omega}\cos\omega x d\omega \rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin\omega a}{\omega}\cos\omega x d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

حال به ازای $x=0$ سمت راست $\frac{\pi}{2}$ و سمت چپ تبدیل به $\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega a}{\omega}d\omega$ میشود بنابراین داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega a}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

با تغییر متغییر $\omega a = t^n$ را در عبارت بدست آمده داریم:

$$\omega a = t^n \to a d\omega = n t^{n-1} dt, \quad \omega = \frac{t^n}{a}, \quad d\omega = \frac{n t^{n-1} dt}{a} \to \int_0^\infty \frac{\sin t^n}{\frac{t^n}{a}} \frac{n t^{n-1} dt}{a} = \frac{\pi}{2} \to$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t^n}{t^n} n t^{n-1} dt = \frac{\pi}{2} \to \int_0^\infty \frac{\sin t^n}{t} dt = \frac{\pi}{2n}$$

که کافیست به جای t قرار دهیم ω یعنی $\int_0^\infty \frac{\sin \omega^n}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2n}$

حل 12–پ): برای e^{-x} انتگرالهای سینوسی و کسینوسی را بدست می آوریم(چون تابع برای مقادیر منفی صفر است پس به جای از $-\infty$ تا ∞ از **0** تا ∞ انتگرال میگیریم)

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{2}(e^{j\omega x} + e^{-j\omega x})dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty (e^{-(1-j\omega)x} + e^{-(1+j\omega)x})dx$$

$$\frac{1}{2\pi}[-\frac{1}{1-j\omega}(e^{-(1-j\omega)x} - \frac{1}{1+j\omega}(e^{-(1-j\omega)x}]_0^\infty = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{2j}(e^{j\omega x} - e^{-j\omega x})dx = \frac{1}{2\pi j}\int_0^\infty (e^{-(1-j\omega)x} - e^{-(1+j\omega)x})dx$$

$$\frac{1}{2\pi}[-\frac{1}{1-j\omega}(e^{-(1-j\omega)x} + \frac{1}{1+j\omega}(e^{-(1-j\omega)x}]_0^\infty = \frac{\omega}{\pi(1+\omega^2)}$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]d\omega \to e^{-x} = \int_0^\infty [\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}\cos\omega x + \frac{\omega}{\pi(1+\omega^2)})\sin\omega x]d\omega \to$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{1+\omega^2} d\omega = \pi e^{-x}$$

13–معادله انتگرالی $\int_0^\infty Y(x)\sin xt dx = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$ را برای $Y(x)$ حل کنید

حل 13): اگر سمت راست را تابع $f(t)$ بگیریم در اینصورت بسط فوریه سینوسی آن عبارتست از:

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt = \frac{1}{\pi}[\int_0^1 \sin\omega t dt + \int_1^2 2\sin\omega t dt] = \frac{1}{\pi}\{[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t]_0^1 + [-\frac{2}{\omega}\cos\omega t]_1^2\} \to$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\{[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega}\cos\omega] + [\frac{2}{\omega}\cos\omega - \frac{2}{\omega}\cos 2\omega]\} = \frac{1}{\omega\pi}[1 + \cos\omega - 2\cos 2\omega] \to$$

$$f(t)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega t d\omega \to f(t)=\int_0^\pi \frac{1}{\omega\pi}[1+\cos\omega-2\cos 2\omega]\sin\omega t d\omega=\begin{cases} 1 & 0\le t<1 \\ 2 & 1\le t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

اگر در انتگرال بالا بجای ω قرار دهیم x خواهیم داشت:

$$\int_0^\pi \frac{1}{x\pi}[1+\cos x-2\cos 2x]\sin xt dx=\begin{cases} 1 & 0\le t<1 \\ 2 & 1\le t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$Y(x)=\frac{1}{x\pi}[1+\cos x-2\cos 2x]$$

14-معادلات زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید

$$a)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+x & x>0 \\ u(0,t)=0 & t>0 \\ u(1,t)=1-0.5t^2 \quad u(x,0)=x \quad u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\delta(t-x) & x>0 \\ u(0,t)=e^t-1 & t>0 \\ \lim_{x\to\infty} u(x,t)=0 \end{cases}$$

حل a: از طرفین رابطه در حوزه زمان لاپلاس میگیریم که خواهیم داشت:

$$u_{xx}=u_{tt}+x\to\frac{d^2U(x,S)}{dx^2}=S^2U(x,S)-su(x,0)-u_t(x,0)+\frac{x}{S}\to\frac{d^2U(x,S)}{dx^2}=S^2U(x,S)-Sx-0+\frac{x}{S}$$
$$\to\frac{d^2U(x,S)}{dx^2}-S^2U(x,S)=x(\frac{1}{S}-S)$$

حال از شرایط مرزی لاپلاس میگیریم:

$$u(0,t)=0\to U(0,S)=0 \qquad u(1,t)=1-0.5t^2\to U(1,S)=\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3}$$

معادله دیفرانسیل بدست آمده $\frac{d^2U(x,S)}{dx^2}-S^2U(x,S)=x(\frac{1}{S}-S)$ دارای جوابهای هموژن و خصوصی است که جواب هموژن آن برابر است با:

$$\lambda^2-S^2=0\to\lambda_1=S \quad \lambda_2=-S \qquad U_h(x,S)=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}=Ae^{Sx}+Be^{-Sx}$$

اما پاسخ خصوصی باید از جنس طرف دوم باشد. چون طرف دوم تابع خطی از x است بنابراین پاسخ خصوصی را به صورت $U_P(x,S)=Kx$ مینویسیم(دقت کنید که فاکتور $(\frac{1}{S}-S)$ نسبت به x ثابت است و بعنوان یک ضریب عمل میکند) که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل بدست آمده داریم:

$$\frac{d^2U(x,S)}{dx^2}-S^2U(x,S)=x(\frac{1}{S}-S)\rightarrow 0-S^2Kx=x(\frac{1}{S}-S)\rightarrow K=\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3}\rightarrow U_P(x,S)=(\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3})x$$

بنابراین پاسخ کامل معادله دیفرانسیل $\frac{d^2U(x,S)}{dx^2}-S^2U(x,S)=x(\frac{1}{S}-S)$ به صورت زیر است:

$$U(x,S)=U_h(x,S)+U_P(x,S)=Ae^{Sx}+Be^{-Sx}+(\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3})x$$

حال برای بدست اوردن ضرایب مجهول شرایط اولیه را اعمال میکنیم:

$$U(0,S)=0\rightarrow A+B+0=0 \qquad U(1,S)=\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3}\rightarrow Ae^S+Be^{-S}+(\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3})=\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3}\rightarrow Ae^S+Be^{-S}=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ Ae^S+Be^{-S}=0\end{cases}\rightarrow A=0 \quad B=0$$

پاسخ معادله بصورت زیر است:

$$U(x,S)=Ae^{Sx}+Be^{-Sx}+(\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3})x=(\frac{1}{S}-\frac{1}{S^3})x\rightarrow u(x,t)=(1-0.5t^2)x$$

حل b): از طرفین رابطه با استفاده از شرایط مرزی تبدیل لا پلاس میگیریم:

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\delta(t-x)\rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-[sU(x,s)-u(x,0)]=e^{-sx}\rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-sU(x,s)=e^{-sx}$$

حال یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت داریم که دارای پاسخ هموژن و جواب خصوصی به صورت زیر میباشد:

$$\lambda^2-s=0\rightarrow\lambda=\pm\sqrt{s}\rightarrow U_h(x,s)=Ae^{-\sqrt{s}x}+Be^{\sqrt{s}x}$$

پاسخ خصوصی از جنس طرف دوم است یعنی $U_p(x,s)=Ce^{-sx}$حال با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\frac{d^2U_p(x,s)}{dx^2}-sU_p(x,s)=e^{-sx}\rightarrow s^2Ce^{-sx}-sCe^{-sx}=e^{-sx}\rightarrow(s^2-s)Ce^{-sx}=e^{-sx}\rightarrow C=\frac{1}{s^2-s}\rightarrow$$

$$U_p(x,s)=Ce^{-sx}=\frac{1}{s^2-s}e^{-sx}$$

بنابراین پاسخ کامل به صورت زیر است:

$$U(x,s)=Ae^{-\sqrt{s}x}+Be^{\sqrt{s}x}+\frac{1}{s^2-s}e^{-sx}$$

حال شرایط مرزی را بدست آورده و اعمال میکنیم:

$$u(0,t)=e^t-1\rightarrow U(0,s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2-s} \qquad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0\rightarrow\lim_{x\to\infty}U(x,s)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}[Ae^{-\sqrt{s}x}+Be^{\sqrt{s}x}+\frac{1}{s^2-s}e^{-sx}]=0\rightarrow B=0 \qquad U(0,s)=(A+\frac{1}{s^2-s})=\frac{1}{s^2-s}\rightarrow A=0\rightarrow$$

$$U(x,s)=\frac{1}{s^2-s}e^{-sx}=(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s})e^{-sx}\rightarrow u(x,t)=[e^{(t-x)}-1]u_{-1}(t-x)$$

15- با استفاده از قوانین تبدیل فوریه و قضیه پارسوال حاصل انتگرالهای $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 4x}{x^2}dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+8x^2+16}$ را بدست آورید

<u>حل 15):</u> تبدیل فوریه $f(t)=e^{-a|t|}$ برابر است با $F(\omega)=\frac{2a}{\omega^2+a^2}$. حال با استفاده از قضیه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2a|t|}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4a^2}{(\omega^2+a^2)^2}d\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+a^2)^2}d\omega=\frac{\pi}{a^2}\int_{0}^{\infty}e^{-2at}dt=\frac{\pi}{2a^3}$$

حال اگر $a=2$ باشد داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+4)^2}d\omega=\frac{\pi}{2(2)^3}=\frac{\pi}{16}\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^4+8\omega^2+16}d\omega=\frac{\pi}{2(2)^3}=\frac{\pi}{16}$$

برای انتگرال دوم با استفاده از اینکه فوریه $g(t)=rect(\frac{t}{\tau})$ برابر است با $G(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$ و با استفاده از قضیه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}g^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2d\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}rect^2(\frac{t}{\tau})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2})^2d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2})^2d\omega$$

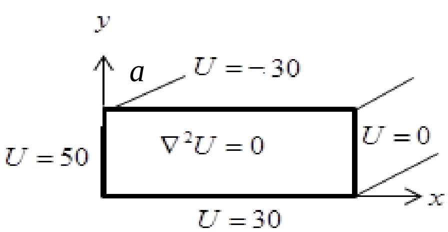
حال اگر $\tau=8$ باشد داریم:

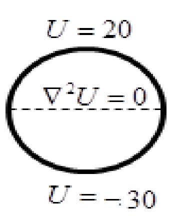
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}^2(\frac{t}{8})dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\omega}\sin 4\omega)^2d\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 4\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}^2(\frac{t}{8})dt=\frac{\pi}{2}\int_{-4}^{4}1^2dt=4\pi$$

که همان انتگرال خواسته شده است با جایگزینی ω با x یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 4x}{x^2}dx=4\pi$$

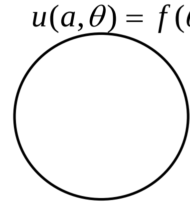
16- پاسخ معادله لاپلاس را در فضاهای داده شده زیر بدست آورید





سطح مقطع استوانه

$u(a,\theta)=f(\theta)$

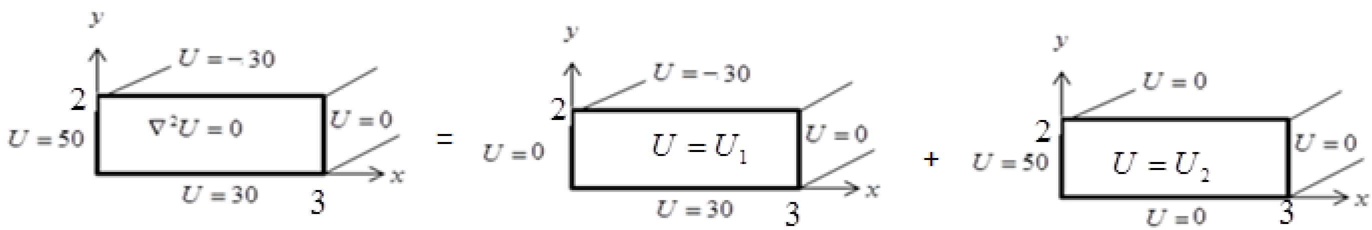


پتانسیل در خارج کره ای به شعاع $a=2m$

$$f(\theta)=\cos 3\theta+6\cos^3\theta+\cos 2\theta$$

<u>حل 16):</u> شکل سمت چپ را میتوان به صورت مجموع دو شکل مطابق زیر نشان داد:

حال برای شکل اول داریم:



$$U_1(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{3}x\sinh\frac{m\pi}{3}(1-y)\qquad U_1(x,0)=30=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{3}x\sinh\frac{m\pi}{3}\rightarrow$$

$$A_m\sinh\frac{m\pi}{3}=\frac{2}{3}\int_0^3 30\sin\frac{m\pi}{3}xdx=\frac{2}{m\pi}(1-\cos m\pi)\rightarrow A_m=\frac{60(1-\cos m\pi)}{\sinh\frac{m\pi}{3}}\rightarrow$$

$$U_1(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{60(1-\cos m\pi)}{\sinh\frac{m\pi}{3}}\sin\frac{m\pi}{3}x\sinh\frac{m\pi}{3}(1-y)$$

برای شکل دوم میتوانیم پاسخ معادله لاپلاس را به صورت زیر بنویسیم:

$$U_2(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sinh\frac{m\pi}{2}(3-x)\sin\frac{m\pi}{2}y\qquad U_2(0,y)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sinh\frac{3m\pi}{2}\sin\frac{m\pi}{2}y=50\rightarrow$$

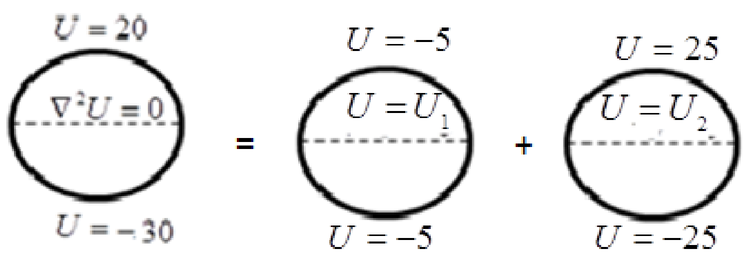
$$B_m\sinh\frac{3m\pi}{2}=\int_0^2 50\sin\frac{m\pi}{2}ydy=\frac{2}{m\pi}(1-\cos m\pi)\rightarrow B_m=\frac{100(1-\cos m\pi)}{m\pi\sinh\frac{3m\pi}{2}}$$

بنابراین پاسخ معادله به صورت زیر است:

$$U_2(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{100(1-\cos m\pi)}{m\pi\sinh\frac{3m\pi}{2}}\sinh\frac{m\pi}{2}(3-x)\sin\frac{m\pi}{2}y\qquad U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{60(1-\cos m\pi)}{\sinh\frac{m\pi}{3}}\sin\frac{m\pi}{3}x\sinh\frac{m\pi}{3}(1-y)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{100(1-\cos m\pi)}{m\pi\sinh\frac{3m\pi}{2}}\sinh\frac{m\pi}{2}(3-x)\sin\frac{m\pi}{2}y$$

شکل با سطح مقطع استوانه را میتوان به صورت مجموع دو شکل نشان داد:



برای شکل اول $U_1(\rho,\phi)=-5$ و برای شکل دوم با توجه به فرد بودن تابع فرم کلی به صورت $U_2(\rho,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^n\sin n\phi$ می باشد. حال داریم:

$$U_2(a,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n \sin n\phi=\begin{cases}25 & 0<\phi<\pi\\ -25 & \pi<\phi<2\pi\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A_n a^n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}25\sin n\phi d\phi=\frac{50}{n\pi}(1-\cos n\pi)\to A_n=\frac{50}{n\pi a^n}(1-\cos n\pi)=\frac{100}{(2n-1)\pi a^{(2n-1)}}$$

در نتیجه پتانسیل داخل استوانه برابر است با:

$$U(\rho,\phi)=U_1(\rho,\phi)+U_2(\rho,\phi)=-5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{(2n-1)\pi}(\frac{\rho}{a})^{2n-1}\sin(2n-1)\phi$$

برای شکل سوم که کره به شعاع **2** متر است پاسخ کلی پتانسیل در خارج کره برابر است با: $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$. حال پتانسیل روی کره را به صورت مجموع توابع لژاندر مینویسیم:

$$u(a,\theta)=\cos3\theta+6\cos^3\theta+\cos2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta+6\cos^3\theta+2\cos^2\theta-1=$$
$$-1-3\cos\theta+2\cos^2\theta+10\cos^3\theta$$

حال توانهای کسینوس را بر حسب توابع لژاندر مینویسیم:

$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\to\cos^2\theta=\frac{2P_2(\cos\theta)+1}{3}$$
$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}[5\cos^3\theta-3P_1(\cos\theta)]\to\cos^3\theta=\frac{2P_3(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)}{5}$$

$$u(a,\theta)=-1-3\cos\theta+2\cos^2\theta+10\cos^3\theta=-1-3P_1(\cos\theta)+2\frac{2P_2(\cos\theta)+1}{3}+$$
$$10\frac{2P_3(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)}{5}=-\frac{2}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)$$

حال شرایط مرزی را مینویسیم:

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=-\frac{2}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)\to$$
$$A_0a^{-1}=-\frac{2}{3}\to A_0=\frac{-2a}{3}=-\frac{4}{3}\qquad A_1a^{-2}=3\to A_1=3a^2=12\qquad A_2a^{-3}=\frac{4}{3}$$
$$\to A_2=\frac{4a^3}{3}=\frac{32}{3}\qquad A_3a^{-4}=4\to A_3=4a^4=64\qquad A_n(n\geq4)=0$$

بنابراین تابع پتانسیل در خارج کره برابر است با:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=\frac{A_0}{r}+\frac{A_1}{r^2}P_1(\cos\theta)+\frac{A_2}{r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{A_3}{r^4}P_3(\cos\theta)=$$
$$-\frac{4}{3r}+\frac{12}{r^2}\cos\theta+\frac{32}{3r^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)+\frac{64}{r^3}\frac{1}{2}[5\cos^3\theta-3\cos\theta]$$

17- معادله دیفرانسیل غیر همگن زیر را با شرایط مرزی و اولیه داده شده حل کنید. راهنمایی: $\sin^3 x = 0.25(3\sin x - \sin 3x)$

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) + 12x \qquad u(0,t)=0 \qquad u(\pi,t) = 2\pi^3 + 2\pi \quad u(x,0) = 2x^3 + 2x$$
$$u_t(x,0) = 5\sin x + 3\sin 2x + 5\sin 4x + 12\sin^3 x$$

حل 17: تابع $u(x,t) = w(x,t) + V(x)$ را در نظر میگیریم و در معادله دیفرانسیل جایگزین میکنیم که خواهیم داشت:

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) + 12x \to \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 12x \to$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \frac{d^2 V}{dx^2} = 12x \to \frac{dV}{dx} = 6x^2 + k \to V(x) = 2x^3 + k_1 x + k_2$$
$$u(0,t) = 0 = w(0,t) + V(0) \to w(0,t) + k_2 = 0 \to w(0,t) = 0 \qquad k_2 = 0$$
$$u(\pi,t) = 2\pi^3 + 2\pi = w(\pi,t) + V(\pi) \to 2\pi^3 + 2\pi = w(\pi,t) + 2\pi^3 + 2\pi \to$$
$$w(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = w(x,0) + V(x) \to 2x^3 + 2x = w(x,0) + 2x^3 + 2x \to w(x,0) = 0$$

بنابراین معادله همگن زیر با شرایط اولیه و مرزی زیر را خواهیم داشت:

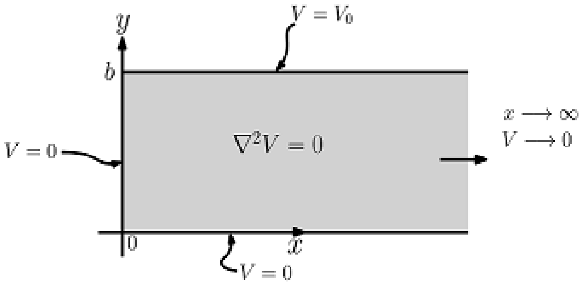
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad w(0,t)=0 \qquad w(\pi,t) = 0 \qquad w_t(x,0) = u_t(x,0) = 5\sin x + 3\sin 2x + 5\sin 4x + 12\sin^3 x$$
$$w_t(x,0) = 5\sin x + 3\sin 2x + 5\sin 4x + 12\times 0.25(3\sin x - \sin 3x) = 14\sin x + 3\sin 2x - 3\sin 3x + 5\sin 4x$$
$$w(x,0) = 0$$

حال اگر $w(x,t) = f(x)g(t)$ در اینصورت داریم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \to g(t)\frac{d^2 f}{dx^2} = f(x)\frac{d^2 g}{dt^2} \to \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dt^2} = -k^2 \to$$
$$f = A\sin kx + B\cos kx \qquad g = C\sin kt + D\cos kt \to$$
$$w(x,t) = f(x)g(t) = (A\sin kx + B\cos kx)(C\sin kt + D\cos kt) \qquad w(0,t) = 0 \to B = 0$$
$$w(x,0) = 0 \to D = 0 \to w(x,t) = E\sin kx \sin kt \qquad w(\pi,t) = 0 \to \sin k\pi = 0 \to k = n$$
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{n} E_n \sin nt \sin nx \to w_t(x,0) = \sum_{n=1}^{n} nE_n \sin nx = 14\sin x + 3\sin 2x - 3\sin 3x + 5\sin 4x \to$$
$$1\times E_1 = 14 \qquad 2E_2 = 3 \qquad 3E_3 = -3 \qquad 4E_4 = 5 \to E_1 = 14 \qquad E_2 = 1.5 \qquad E_3 = -1 \qquad E_4 = 1.25$$
$$E_n = 0 \quad (n \ge 5) \to u(x,t) = V(x) + w(x,t) = 2x^3 + 2x + \sum_{n=1}^{4} E_n \sin nt \sin nx \to$$
$$u(x,t) = 2x^3 + 2x + 14\sin t \sin x + 1.5\sin 2t \sin 2x - \sin 3t \sin 3x + 1.25\sin 4t \sin 4x$$

18- برای شکل زیر تابع پتانسیل بین صفحات را بدست آورید.

حل 18: با توجه به شرایط مرزی داده شده تابع پتانسیل را بصورت زیر میتوان نوشت:

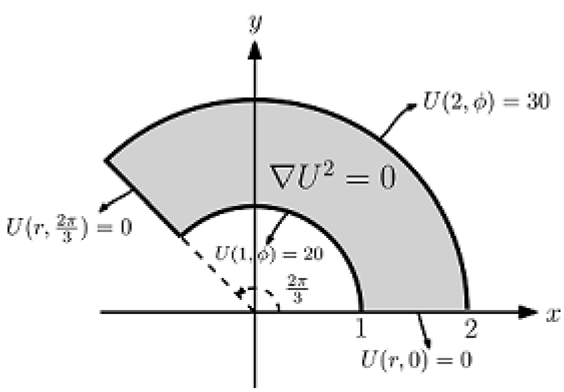


$$V=\frac{V_0}{b}y+\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-\frac{m\pi}{b}x}\sin\frac{m\pi}{b}y\rightarrow V(x=0)=\frac{V_0}{b}y+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{b}y=0\rightarrow$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{b}y=-\frac{V_0}{b}y\rightarrow A_m=\frac{2}{b}\int_0^b-\frac{V_0}{b}y\sin\frac{m\pi}{b}ydy=-\frac{2V_0}{b^2}\{[-y\frac{\cos\frac{m\pi}{b}}{\frac{m\pi}{b}}]_0^b+$$

$$\int_0^b\frac{\cos\frac{m\pi}{b}}{\frac{m\pi}{b}}dy\}=(-1)^m\frac{2V_0}{m}\rightarrow V=\frac{V_0}{b}y+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2V_0}{m}e^{-\frac{m\pi}{b}x}\sin\frac{m\pi}{b}y$$

19- پاسخ معادله لاپلاس در فضای استونه ای در محدوده $1m<r<2m$ و $0<\phi<\frac{2\pi}{3}$ را بدست بیاورید اگر شرایط مرزی $U(r,0)=U(r,\frac{2\pi}{3})=0$ $U(1,\phi)=20,\quad U(2,\phi)=30,$ برقرار باشد



حل 19: پاسخ کلی معادله لاپلاس به صورت زیر است:

$$U(r,\phi)=(A\cos k\phi+B\sin k\phi)(Cr^k+Br^{-k})\qquad U(r,0)=0\rightarrow A=0$$

$$U(r,\frac{2\pi}{3})=0\rightarrow\sin k\frac{2\pi}{3}=0\rightarrow k\frac{2\pi}{3}=n\pi\rightarrow k=\frac{3n}{2}$$

بنابراین پاسخ را برای ارضای شروط مرزی باقیمانده به صورت زیر تعریف میکنیم(لازم به ذکر است که پریود تابع برابر است با $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$

است):

$$U(r,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}(E_n r^{\frac{3n}{2}}+F_n r^{-\frac{3n}{2}})\sin\frac{3n}{2}\phi \quad U(1,\phi)=20\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(E_n+F_n)\sin\frac{3n}{2}\phi=20\rightarrow$$

$$E_n+F_n=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}20\sin\frac{3n}{2}\phi d\phi=\frac{40}{\pi n}(1-\cos n\pi) \qquad U(2,\phi)=30\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(E_n(2)^{\frac{3n}{2}}+F_n(2)^{-\frac{3n}{2}})\sin\frac{3n}{2}\phi=30$$

$$\rightarrow E_n(2)^{\frac{3n}{2}}+F_n(2)^{-\frac{3n}{2}}=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}30\sin\frac{3n}{2}\phi d\phi=\frac{60}{\pi n}(1-\cos n\pi)\rightarrow\begin{cases}E_n+F_n=\frac{40}{\pi n}(1-\cos n\pi)\\ E_n(2)^{\frac{3n}{2}}+F_n(2)^{-\frac{3n}{2}}=\frac{60}{\pi n}(1-\cos n\pi)\end{cases}$$

با حل دو معادله دو مجهول بالا E_n و F_n بدست می آید.

20- با استفاده از تبدیل فوریه $g(t)=e^{-b|t|}$ و استفاده از قضیه $F(tg(t))=j\frac{dG(\omega)}{d\omega}$ و پارسوال ثابت کنید $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+0.25)^4}=\frac{\pi}{4}$

<u>حل **20**:</u> تبدیل فوریه $g(t)=e^{-b|t|}$ برابر است با $G(\omega)=\frac{2b}{\omega^2+b^2}$ و تبدیل فوریه $h(t)=te^{-b|t|}$ برابر است با

$$H(\omega)=j\frac{d}{d\omega}(\frac{2b}{\omega^2+b^2})$$

که برابر است با: $H(\omega)=\frac{-4j\omega b}{(\omega^2+b^2)^2}$ با استفاده از قضیه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2d\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}(te^{-b|t|})^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{16\omega^2b^2}{(\omega^2+b^2)^4}d\omega\rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2d\omega}{(\omega^2+b^2)^4}=\frac{\pi}{8b^2}\int_{-\infty}^{\infty}(te^{-b|t|})^2dt=\frac{\pi}{4b^2}\int_0^{\infty}t^2e^{-2bt}$$

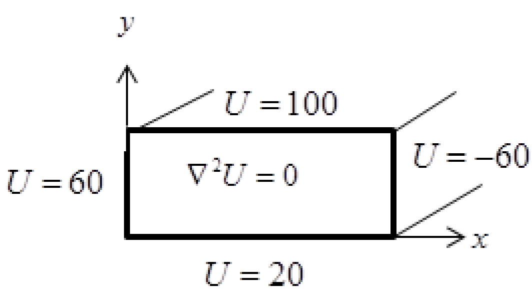
با دو بار استفاده از قضیه جزء به جزء میتوان براحتی ثابت کرد که $\int_0^{\infty}t^2e^{-2bt}dt=\frac{1}{4b^3}$ در نتیجه:

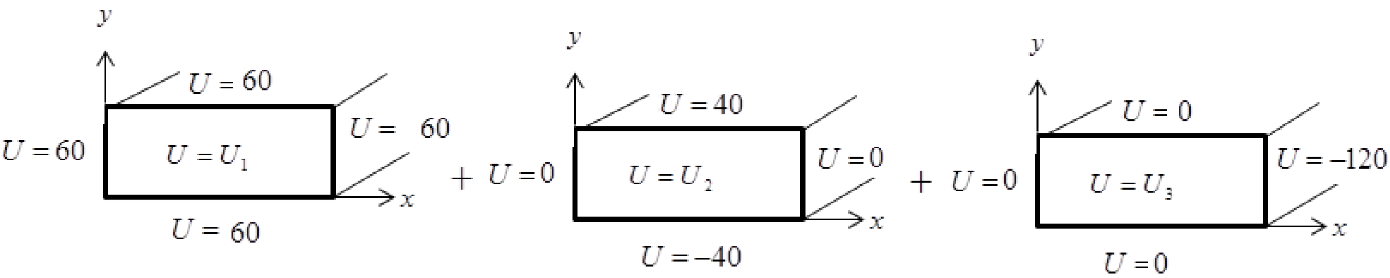
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}d\omega=\frac{\pi}{4b^2}\int_0^{\infty}(te^{-b|t|})^2dt=\frac{\pi}{4b^2}\times\frac{1}{4b^3}=\frac{\pi}{16b^5}\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}d\omega=\frac{\pi}{16b^5}\rightarrow$$

$$2\int_0^{\infty}\frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}d\omega=\frac{\pi}{16b^5}\rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}d\omega=\frac{\pi}{32b^5} \qquad b=0.5\rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\omega^2d\omega}{(\omega^2+0.25)^4}=\pi\rightarrow\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+0.25)^4}=\pi$$

21- معادله پتانسیل در داخل تونل بینهایت نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید عرض تونل **4** متر و ارتفاع آن **2** متر میباشد (با کوتاه ترین روش ممکن)

<u>حل **21**:</u>شکل را به اشکال زیر تبدیل میکنیم:





حال اگر عرض را $a=4$ و ارتفاع را $b=2$ بگیریم با استفاده از جمع آثار میتوانیم بنویسیم:

$$U=U_1+U_2+U_3=60+\sum_{n=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{a}x\sinh\frac{m\pi}{a}(y-\frac{b}{2})+\sum_{n=1}^{\infty}B_m\sinh\frac{m\pi}{b}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$U_2(x,b)=40=\sum_{n=1}^{\infty}A_m\sinh\frac{m\pi b}{2a}\sin\frac{m\pi}{a}x\to A_m\sinh\frac{m\pi b}{2a}=\frac{2}{a}\int_0^a 40\sin\frac{m\pi}{a}xdx=\frac{80}{a}[-\frac{a}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{a}x]_0^a$$

$$A_m\sinh\frac{m\pi b}{2a}=\frac{80}{m\pi}(1-\cos m\pi)=\frac{160}{(2m-1)\pi}\to A_m=\frac{160}{(2m-1)\pi\sinh\frac{(2m-1)\pi b}{2a}}=\frac{160}{(2m-1)\pi\sinh\frac{(2m-1)\pi}{4}}$$

$$U_3(a,y)=-120=\sum_{n=1}^{\infty}B_m\sinh\frac{m\pi}{b}a\sin\frac{m\pi}{b}y\to B_m\sinh\frac{m\pi}{b}a=\frac{2}{b}\int_0^b(-120)\sin\frac{m\pi}{b}ydy=$$

$$\frac{-240}{b}[-\frac{b}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{b}y]_0^b\to B_m\sinh\frac{m\pi}{b}a=\frac{240}{m\pi}(\cos m\pi-1)\to B_m=\frac{-480}{(2m-1)\pi\sinh\frac{m\pi}{b}a}\to$$

$$U(x,y)=60+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{160}{(2m-1)\pi\sinh\frac{(2m-1)\pi}{4}}\sin\frac{m\pi}{a}x\sinh\frac{m\pi}{a}(y-\frac{b}{2})+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-480}{(2m-1)\pi\sinh\frac{m\pi}{b}a}\sinh\frac{m\pi}{b}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

22- به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) با استفاده از تبدیل فوریه $f(t)=\begin{cases}1 & |t|<a\\ 0 & |t|>a\end{cases}$ حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3\omega}{\omega}d\omega$ را بدست آورده و رسم کنید.

ب)با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه داده شده بدست آورید

$$y'''+4y''+5y'+2y=e^{-3t}u_{-1}(t)\qquad y(0)=1\qquad y'(0)=-4\qquad y''(0)=11$$

راهنمایی: $x^3+4x^2+5x+2=(x+1)^2(x+2)$

حل 22–الف) تابع زوج است پس فقط $A(\omega)$ داریم که برابر است با:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega tdt=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}(1)\cos\omega tdt=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega a$$

حال میتوانیم بنویسیم:

$$f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t d\omega=\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega a\cos\omega t d\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}f(0)=\int_0^\infty \frac{\sin\omega a}{\omega}d\omega \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega a}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

ملاحظه میشود پاسخ به a بستگی ندارد. حال انتگرال خواسته شده را به صورت زیر مینویسیم:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3\omega}{\omega}d\omega=\int_0^\infty \frac{0.25(3\sin\omega-\sin 3\omega)}{\omega}d\omega=\frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega-\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin 3\omega}{\omega}d\omega=\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

حل 22–ب): از طرفین معادله تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$y'''+4y''+5y'+2y=e^{-3t}u_{-1}(t) \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=-4 \qquad y''(0)=11$$

$$S^3Y(s)-S^2y(0)-Sy'(0)-y''(0)+4[S^2Y(s)-Sy(0)-y'(0)]+5[SY(S)-y(0)]+2Y(S)=\frac{1}{S+3}$$

$$(S^3+4S^2+5S+2)Y(S)-[S^2y(0)+Sy'(0)+y''(0)+4Sy(0)+4y'(0)-5y(0)]=\frac{1}{S+3}\rightarrow$$

$$(S^3+4S^2+5S+2)Y(S)-[S^2-4S+11+4S-16-5]=\frac{1}{S+3}\rightarrow(S^3+4S^2+5S+2)Y(S)=S^2+\frac{1}{S+3}$$

$$Y(S)=\frac{S^3+3S^2+1}{(S+1)^2(S+2)(S+3)}=\frac{A}{S+1}+\frac{B}{(S+1)^2}+\frac{C}{S+2}+\frac{D}{S+3}$$

$$A=\frac{d}{dS}(S+1)^2Y(S)_{(S=-1)}=\frac{d}{dS}\frac{S^3+3S^2+1}{(S+2)(S+3)}=\frac{d}{dS}\frac{S^3+3S^2+1}{(S^2+5S+6)}=$$

$$\frac{(3S^2+6S)(S^2+5S+6)-(2S+5)(S^3+3S^2+1)}{(S^2+5S+6)^2}(S=-1)=\frac{-3\times2-(3)(3)}{(2)^2}=-\frac{15}{4}$$

$$B=(S+1)^2Y(S)_{(S=-1)}=\frac{S^3+3S^2+1}{(S+2)(S+3)}(S=-1)=\frac{3}{2} \qquad C=(S+2)Y(S)_{(S=-2)}=5$$

$$D=(S+3)Y(S)_{(S=-3)}=-\frac{1}{4}\rightarrow Y(S)=-\frac{15}{4}\frac{1}{S+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(S+1)^2}+\frac{5}{S+2}-\frac{1}{4}\frac{1}{S+3}\rightarrow$$

$$y(t)=[-\frac{15}{4}e^{-t}+\frac{3}{2}te^{-t}+5e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-3t}]u_{-1}(t)$$

23– دمای میله ای به طول **2** متر که دمای ابتدا و انتهای آن به ترتیب **4** و **14** درجه سانتیگراد است با معادله غیر همگن زیر بیان میشود. اگر دمای اولیه میله با معادله $u(x,0)=2x^4-3x^3-5x^2+11x+5$ داده شده باشد معادله دمای میله را بدست آورید.

$$u_{xx}(x,t)=u_t(x,t)+24x^2-18x-10$$

حل 23): تابع را به صورت $u(x,t)=w(x,t)+V(x)$ مینویسیم که با جایگزینی در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$u_{xx}(x,t)=u_t(x,t)+24x^2-18x-10\rightarrow w_{xx}(x,t)+V_{xx}(x)=w_t(x,t)+24x^2-18x-10$$
$$\rightarrow w_{xx}(x,t)=w_t(x,t) \qquad V_{xx}(x)=24x^2-18x-10\rightarrow V(x)=2x^4-3x^3-5x^2+k_1x+k_2$$

$u(0,t)=4=w(0,t)+k_2 \to w(0,t)=0 \qquad k_2=4 \qquad u(2,t)=14=w(2,t)+V(2)\to$

$w(2,t)=0 \quad V(2)=14 \to 2(2)^4-3(2)^3-5(2)^2+2k_1+4=14 \to k_1=11 \to$

$V(x)=2x^4-3x^3-5x^2+11x+4 \qquad u(x,0)=w(x,0)+V(x)\to$

$2x^4-3x^3-5x^2+11x+5=w(x,0)+2x^4-3x^3-5x^2+11x+4 \to w(x,0)=1$

بنابراین معادله دیفرانسیل بر حسب $w(x,t)$ به صورت همگن زیر خواهد شد:

$$w_{xx}(x,t)=w_t(x,t) \qquad w(0,t)=0 \qquad w(2,t)=0 \qquad w(x,0)=1$$

که با توجه به شرایط مرزی پاسخ کلی آن به صورت $w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-(\frac{m\pi}{L}c)^2 t}\sin\frac{m\pi}{L}x$ خواهد بود که $c=1,\quad L=2$ میباشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-(\frac{m\pi}{2})^2 t}\sin\frac{m\pi}{2}x \qquad w(x,0)=1=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{2}x \to A_m=\frac{2}{2}\int_0^2 1\times\sin\frac{m\pi}{2}x\,dx \to$$

$$A_m=\frac{2}{m\pi}(1-\cos m\pi)=\begin{cases}\dfrac{4}{m\pi} & m=odd\\ 0 & m=even\end{cases} \to w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)}e^{-(\frac{2m-1}{2}\pi)^2 t}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}x \to$$

$$u(x,t)=V(x)+w(x,t)=2x^4-3x^3-5x^2+11x+4+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)}e^{-(\frac{2m-1}{2}\pi)^2 t}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}x$$

موفق باشید

محمود محمدطاهری

فروردین 1401