

دانشهو تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندس نیم سال اول سال ۱۴۰۰–۱۴۰۱ تمرین ۵: معادله ترارت و موج بمکن مدرس: دکترهدی طالع ماموله - ^{عل} تمرِن: نیکامامی - سروش من فروش - حسین عطرسانی



برای بوالات نود درخصوص این تمرین در ایان مرسی معادله موج زیر را حل کنید. (۱) معادله موج زیر را حل کنید

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} - \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}} = 0, \quad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = e^{-x}, \quad u_{t}(x,0) = 0$$

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X''(x)T(x) - \frac{1}{c^{2}} X(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T(t)}{c^{2}T(t)} = -k^{2} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^{2}X(x) = 0 & \text{(I)} \\ T(t) + c^{2}k^{2}T(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

$$BC1: u(0,t) = 0 \Rightarrow A = 0, BC2: u(l,t) = 0 \Rightarrow B\sin(kl) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow X_{n}(x) = B_{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$(11) \Rightarrow T_{n}(t) = C_{n}\cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + D_{n}\sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n}\cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_{n}\sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$IC1: u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = e^{-x}$$

$$a_{n} = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} e^{-x}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \left[-\frac{2e^{-x}\left(n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + l\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)\right]_{0}^{l} = \frac{2n\pi((-1)^{n+1}e^{-l} + 1)}{l^{2} + n^{2}\pi^{2}}$$

$$IC2: u_{t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n}cn\pi}{l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \Rightarrow b_{n} = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi((-1)^{n+1}e^{-l} + 1)}{l^{2} + n^{2}\pi^{2}}\cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$



دانشهه تهران- دانشگده مهندسی *برق و کامپ*وتر ریاضیات مهندس نیم سال اول سال ۱۴۰۰–۱۴۰۱ تمرین ۵: معادله تزارت و موج بمکن مدرس: دکترمدی طالع ماموله - عل ترن: نیکامامی - سروش من فروش - حسین عطرسانی



برای بوالات نود درخصوص این تمرین بار ایا نامه hatrsaei@gmail.com بorush.mes@gmail.com مخله ناید. ۲) معادله موج زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$u_{x}(0,t) = 0, \qquad u_{x}(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = x^{2}, \qquad u_{t}(x,0) = e^{-x}$$

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X(x)^{\frac{n}{2}}(t) = 9X''(x)T(x) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{9T(t)} = -k^{2} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^{2}X(x) = 0 & (1) \\ T(t) + 9k^{2}T(t) = 0 & (11) \end{cases}$$

$$(I) \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

$$BC1: u_{x}(0,t) = 0 \Rightarrow B = 0, BC2: u_{x}(\pi,t) = 0 \Rightarrow -Ak\sin(k\pi) = 0 \Rightarrow k = n$$

$$\Rightarrow X_{n}(x) = A_{n}\cos(nx)$$

$$(II) \Rightarrow \begin{cases} n \neq 0 \Rightarrow \ddot{T}_{n}(t) + 9n^{2}T_{n}(t) = 0 \Rightarrow T_{n}(t) = C_{n}\cos(3nt) + D_{n}\sin(3nt) \\ n = 0 \Rightarrow \ddot{T}_{n}(t) = 0 \Rightarrow T_{n}(t) = C_{0} + D_{0}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = a_{0} + b_{0}t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n}\cos(3nt) + b_{n}\sin(3nt))\cos(nx)$$

$$IC1: u(x,0) = a_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}\cos(nx) = x^{2}$$

$$a_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^{2} dx = \frac{\pi^{2}}{3}$$

$$a_{n} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^{2} \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^{2}}{n}\sin(nx) + \frac{2x}{n^{2}}\cos(nx) - \frac{2}{n^{3}}\sin(nx) \right]_{0}^{\pi} = \frac{4(-1)^{n}}{n^{2}}$$

$$IC2: u_{t}(x,0) = b_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} 3b_{n}n\cos(nx) = e^{-x}$$

$$b_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-x} dx = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}$$

$$b_{n} = \frac{2}{3n\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-x}\cos(nx) dx = \frac{2}{3n\pi} \left[\frac{e^{-x}(n\sin(nx) - \cos(nx))}{1 + n^{2}} \right]_{0}^{\pi} = \frac{2(1 - e^{-\pi}(-1)^{n})}{3n\pi(1 + n^{2})}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\pi^{2}}{3} + \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^{n}}{n^{2}}\cos(3nt) + \frac{2(1 - e^{-\pi}(-1)^{n})}{3n\pi(1 + n^{2})}\sin(3nt) \right) \cos(nx)$$



دانشهه تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۱ . تمرين ۵: معادله ۶زارت وموج بمکن مدرس: دکترمهدی طالع مالوله - مل تمرن: نیکامامی - سروش مس فروش - حسن عطرسانی



یاست. می میران مرسی میران مرسی میران الماره hatrsaei@gmail.com,sorush.mes@gmail.com,emami.nika@gmail.com محقه نامید.

"") معادله گرمای زیر را حل کنید.

$$u(t) = 2u_{xx}, \quad 0 \le x \le \pi$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_{x}(\pi,t) = 0$$

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X(x)\dot{T}(t) = 2X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{2T(t)} = -k^{2} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^{2}X(x) = 0 & \text{(I)} \\ \dot{T}(t) + 2k^{2}T(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$(I) \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

$$BC1: u(0,t) = 0 \Rightarrow A = 0, BC2: u_{x}(\pi,t) = 0 \Rightarrow Bk\cos(k\pi) = 0 \Rightarrow k = \frac{2n-1}{2}$$

$$\Rightarrow X(x) = B_{n}\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$(II) \Rightarrow \dot{T}_{n}(t) + 2\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{2}T_{n}(t) = 0 \Rightarrow T_{n}(t) = C_{n}e^{-2\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{2}t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}e^{-2\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{2}t}\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$IC: u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = \Pi\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$a_{n} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Pi\left(\frac{x}{\pi}\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{2n-1}\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{(2n-1)\pi}\left(1-\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\left(1-\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)\right)e^{-2\left(\frac{2n-1}{2}x\right)^{2}t}\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$



دانشهه تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر رياضيات مهندس-نيم سال اول سال ١٤٠٠-١۴٠١ " تمرین ۵: معادله ترارت و موج بمکن مدرس: دکترهدی طالع مالوله - مل تمرن: نیکاهامی - سروش مس فروش - حسین عطرسانی



برای بوالات خود درخصوص این تمرین بار آیا نامه hatrsaei@gmail.com, sorush.mes@gmail.com, emami.nika@gmail.com مختر نامید. **) معادله موج زیر را حل کنید

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} - \frac{1}{16} \frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}} = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$u_{x}(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_{t}(x,0) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X''(x)T(t) - \frac{1}{16}X(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T(t)}{16T(t)} = -k^{2} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^{2}X(x) = 0 & \text{(I)} \\ T(t) + 16k^{2}T(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$(I) \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

$$BC!: u_{x}(0,t) = 0 \Rightarrow B = 0, BC2: u(1,t) = 0 \Rightarrow A\cos(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$\Rightarrow X_{n}(x) = A_{n}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$$

$$(II) \Rightarrow T_{n}(t) + 16\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^{2}T_{n}(t) = 0 \Rightarrow T_{n}(t) = C_{n}\cos\left((2n-1)2\pi t\right) + D_{n}\sin\left((2n-1)2\pi t\right)\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n}\cos((2n-1)2\pi t) + b_{n}\sin((2n-1)2\pi t))\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$$

$$IC1: u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) = 0$$

$$a_{n} = 0$$

$$IC2: u_{t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n}(2n-1)2\pi\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$b_{n} = \frac{1}{(2n-1)\pi}\int_{0}^{1} \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) dx = \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)}{(2n-1)\pi}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)2\pi t)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$$



دانشه تهران- دانشکده مهندسی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندس نیم سال اول سال ۱۴۰۰–۱۴۰۱ تمرین ۵: معاوله ترارت و موج بمکن مدرس: دکتر مدی طالع ماموله - حل ترین: نیکامامی - سروش من فروش - حسین عطرسایی



براى بوالات خودور خصوص اين تمرين بار ليا كمه hatrsaei@gmail.com, sorush.mes@gmail.com, emami.nika@gmail.com محقه بأيد.

۵) معادله حرارت زير را حل كنيد.

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx}, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ u_x(0,t) &= u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) &= \cos(2x) \\ u(x,t) &= X(x)T(t) \Rightarrow X(x)\dot{T}(t) = 4X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{4T(t)} = -k^2 \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^2X(x) = 0 & \text{(I)} \\ \dot{T}(t) + 4k^2T(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases} \\ & \text{(I)} \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \\ & \text{BC1: } u_x(0,t) = 0 \Rightarrow B = 0, \text{ BC2: } u_x(2\pi,t) = 0 \Rightarrow -Ak\sin(k2\pi) = 0 \Rightarrow k = \frac{n}{2} \\ & \Rightarrow X_n(x) = A_n\cos\left(\frac{n}{2}x\right) \\ & \text{(II)} \Rightarrow \begin{cases} n \neq 0 \Rightarrow \dot{T}_n(t) + n^2T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = C_ne^{-n^2t} \\ n = 0 \Rightarrow \dot{T}_0(t) = 0 \Rightarrow T(0) = C_0 \end{cases} \\ & \Rightarrow u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2t}\cos\left(\frac{n}{2}x\right) \\ & \text{IC: } u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \cos(2x) \\ & a_0 = 0 \\ & a_n = \begin{cases} 0, & n \neq 4 \\ 1, & n = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow \overline{u(x,t)} = e^{-16t}\cos(2x) \end{aligned}$$



دانشهه تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندس-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۱ ترین ۵: معادله قرارت وموج بمکن مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - حل تمرن: نیکاهامی - سروش مس فروش - حسین عطرسانی



برای موالات نود در خصوص این تمرین بار لیا که می معادله گرمای زیر را حل کنید.

**Phatrsaei@gmail.com, sorush.mes@gmail.com, emami.nika@gmail.com محلمه ناید.
**Phatrsaei@gmail.com محلماً معادله گرمای زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 16u_t &= u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= x \cos(\pi x) \end{aligned}$$

$$u(x,t) &= X(x)T(t) \Rightarrow 16X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = 16\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -k^2 \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^2X(x) = 0 & \text{(I)} \\ \dot{T}(t) + \frac{k^2}{16}T(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$(I) \Rightarrow X(x) &= A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

$$BC1: u_x(0,t) &= 0 \Rightarrow B = 0, BC2: u(1,t) = 0 \Rightarrow A \cos(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$\Rightarrow X_n(x) &= A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$$

$$(II) \Rightarrow \dot{T}_n(t) + \left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$$

$$IC: u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) = x \cos(\pi x)$$

$$a_n &= 2\int_0^1 x \cos(\pi x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) dx = \int_0^1 x \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) dx + \int_0^1 x \cos\left(\frac{(2n-3)\pi}{2}x\right) dx$$

$$&= \left[\frac{2x}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) + \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) + \frac{2x}{(2n-3)\pi} \sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2}x\right)\right]$$

 $+\frac{4}{(2n-3)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2n-3)\pi}{2}x\right)\bigg|^1 = (-1)^n\left(\frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{(2n-3)\pi}\right) - \left(\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} + \frac{4}{(2n-3)^2\pi^2}\right)$

 $\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{(2n-3)\pi} \right) - \left(\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} + \frac{4}{(2n-3)^2\pi^2} \right) \right) e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{8} \right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x \right)$



دانشه تهران- دانشگده مهندسی *برق و کامپ*وتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۸ ترین ۵: معادلهٔ ۶ ارت وموج بمکن مدرس: دکتر مهدی طالع مالوله - عل تمرن: نیکاهامی - سروش مس فروش - حسین عطرسانی



برای بوالات نود درخصوص این تمرین بار ایا نامه hatrsaei@gmail.com بorush.mes@gmail.com مخله ناید. ۷) معادله موج زیر را حل کنید

$$\begin{split} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) &= u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= 0, \qquad u_t(x,0) = 4x(1-x) \\ u(x,t) &= X(x)T(t) \Rightarrow X''(x)T(t) - \frac{1}{4}X(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T(t)}{4T(t)} = -k^2 \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^2X(x) = 0 & (1) \\ T(t) + 4k^2T(t) = 0 & (II) \end{cases} \\ &= (1) \Rightarrow X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \\ &= BC!: u(0,t) = 0 \Rightarrow A = 0, BC2: u_x(1,t) = 0 \Rightarrow Bk \cos(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{(2n-1)\pi}{2} \\ &\Rightarrow X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) \end{cases} \\ (II) &\Rightarrow T_n(t) + 4\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = C_n \cos((2n-1)\pi t) + D_n \sin((2n-1)\pi t) \right) \\ &\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos((2n-1)\pi t) + b_n \sin((2n-1)\pi t)) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) \right) \\ &= 1C1: u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) = 0 \\ &a_n = 0 \end{cases} \\ &= C1: u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(2n-1)\pi \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) + 4x(1-x) \\ &= \frac{2}{(2n-1)\pi} \left[\frac{8(x-1)x}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) + \frac{16(1-2x)}{(2n-1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) - \frac{64}{(2n-1)^3\pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)\right] = \frac{2}{(2n-1)\pi} \left(\frac{16(1-1)^n}{(2n-1)^2\pi^2} + \frac{64}{(2n-1)^3\pi^3}\right) = \frac{32(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^3} + \frac{128}{(2n-1)^4\pi^4} \\ &\Rightarrow \left[u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{32(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^3} + \frac{128}{(2n-1)^3\pi^3}\right) \sin\left((2n-1)\pi t\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)\right] \end{cases}$$



دانشخد تهران- دانسگده مهندی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۰ تمرین ۵: معادله تزارت و موج بمکن



مدرس: دکترمدی طالع ماموله - حل تمرین: نیکامامی - سروش من فروش - حسین عطرسایی

براي بوالات نود د. خصوص اين تمرين ماراما مامه <u>hatrsaei@gmail.com, sorush.mes@gmail.com, emami.nika@gmail.com</u> متحكة منامد .

ا بتدا و انتهای یک میله به طول
$$U(x,0)=\Lambda\left(rac{x-rac{l}{2}}{rac{l}{2}}
ight)$$
 باتدا و انتهای یک میله به صورت $U(x,0)=0$ باشد، دما در میانه میله ($C^2=1$) باشد، دما در میانه میله ($C^2=1$)

$$u_{t} = u_{xx}, \qquad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = \Lambda\left(\frac{x-\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}}\right)$$

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -k^{2} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^{2}X(x) = 0 & (1) \\ \dot{T}(t) + k^{2}T(t) = 0 & (II) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

$$BC1: u(0,t) = 0 \Rightarrow A = 0, BC2: u(l,t) = 0 \Rightarrow B\sin(kl) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow X_{n}(x) = B_{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$(11) \Rightarrow \dot{T}_{n}(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2}T_{n}(t) = 0 \Rightarrow T_{n}(t) = C_{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2}t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$IC: u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \Lambda\left(\frac{x-\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}}\right)$$

$$a_{n} = \frac{2}{l}\int_{0}^{l}\Lambda\left(\frac{x-\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{2}{l}x\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx + \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{2}{l}(l-x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \frac{4}{l^{2}}\left[\frac{l^{2}}{n^{2}\pi^{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) - \frac{lx}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_{0}^{\frac{l}{2}} + \frac{4}{l^{2}}\left[-\frac{l^{2}}{n^{2}\pi^{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) - \frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_{\frac{l}{2}}^{l} = \frac{8}{n^{2}\pi^{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{2}\pi^{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) - \frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_{\frac{l}{2}}^{l} = \frac{8}{n^{2}\pi^{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{2}\pi^{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) - \frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_{\frac{l}{2}}^{l} = \frac{8}{n^{2}\pi^{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$



دانشهه تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۱ تمرین ۵: معادله تزارت و موج بمکن مدرس: دکترمه دی طالع ماموله - عل تمرن: نیکاهامی - سروش من فروش - حسین عطرسانی



برای بوالات نود درخصوص این تمرین بار لیانامه hatrsaei@gmail.com, sorush.mes@gmail.com, emami.nika@gmail.com محقه نایید. ۹) معادله حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{split} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &- \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1 \\ u(-1,t) &= u(1,t), \qquad u_x(-1\ t) = u_x(1\ t) \\ u(x,0) &= |x| \\ u(x,t) &= X(x)T(t) \Rightarrow X''(x)T(t) - \frac{1}{2}X(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T(t)}{2T(t)} = -k^2 \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + k^2X(x) = 0 & \text{(I)} \\ T(t) + 2k^2T(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases} \\ & \text{(I)} \Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \\ & \text{BC1: } u(-1,t) = u(1,t) \Rightarrow k = n\pi \text{ or } B = 0 \\ & \text{BC2: } u_x(-1,t) = u_x(1,t) \Rightarrow A = 0 \text{ or } k = n\pi \\ &\Rightarrow X_n(x) = A_n\cos(n\pi x) + B_n\sin(n\pi x) \end{cases} \\ & \text{(II)} \Rightarrow \begin{cases} n \neq 0 \Rightarrow \tilde{T}_n(t) + 2(n\pi)^2T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = C_ne^{-2n^2\pi^2t} \\ n = 0 \Rightarrow \tilde{T}_0(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = C_0 \end{cases} \\ \Rightarrow u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x))e^{-2n^2\pi^2t} \\ & \text{IC: } u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x) = |x| \\ a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x| dx = \int_{0}^{1} x dx = \frac{1}{2} \\ a_n = \int_{-1}^{1} |x| \cos(n\pi x) dx = 2 \int_{0}^{1} x \cos(n\pi x) dx = 2 \left[\frac{x}{n\pi} \sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \right]_{0}^{1} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \\ b_n = 0 \\ \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) e^{-2n^2\pi^2t} \end{cases}$$