به نام خداوند قلم
دانشگاه تهران
پردیس دانشکدگان فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱	پاسخ تکلیف شماره ۴	

معادلات موج و گرما

پاسخ سوال ۱ : (۱۰ نمره)

الف) خطی، مرتبه دوم، متغیر وابسته T و متغیرهای مستقل x و t

ب) غیرخطی، مرتبه اول، متغیر وابسته U و متغیرهای مستقل x و y

ج) خطی، مرتبه سوم، متغیر وابسته S و متغیرهای مستقل u و v

پاسخ سوال ۲: (۱۵ نمره)

$$z=\frac{1}{xy}\varphi(u)\quad,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-1}{x^2y}\varphi(u)+\frac{1}{xy}\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{y^2x}\varphi(u)+\frac{1}{xy}\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(u)\left[\frac{-1}{x^2y}+\frac{-1}{y^2x}\right]\quad,\quad \varphi(u)=xyz\ \rightarrow\ xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z(x-y)$$

پاسخ سوال ۳ قسمت (الف): (۱۵ نمره)

با استفاده از روش تفکیک متغیرها داریم:

$$u=X(x).Y(y)\quad,\quad \acute{X}Y+\acute{Y}X=2(x+y)XY\ \rightarrow\ \frac{\acute{X}}{X}+\frac{\acute{Y}}{Y}=2x+2y\ \rightarrow\frac{\acute{X}}{X}-2x=-\frac{\acute{Y}}{Y}-2y$$

تابعی از x با تابعی از y در صورتی برابر است که مساوی مقدار ثابت باشند یعنی:

$$\frac{\acute{X}}{X}-2x=-\frac{\acute{Y}}{Y}-2y=C\ \rightarrow\ \begin{cases}\dfrac{\acute{X}}{X}-2x=c\ \rightarrow\ \dfrac{\acute{X}}{X}=2x+c\ \rightarrow\ X=ke^{x^2+cx}\\[2mm] -\dfrac{\acute{Y}}{Y}-2y=c\ \rightarrow\ \dfrac{\acute{Y}}{Y}=2y-c\ \rightarrow\ Y=ke^{y^2-cy}\end{cases}\quad\rightarrow u=ke^{x^2+y^2+c(x-y)}$$

ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۴

نیم‌سال دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۳ قسمت (ب): (۱۵ نمره)

با استفاده از روش تفکیک متغیرها داریم:

$$u = X(x).Y(y) \quad , \quad \acute{X}Y = 4\acute{Y}X \ \rightarrow \ \frac{\acute{X}}{X} = 4\frac{\acute{Y}}{Y}$$

تابعی از x با تابعی از y در صورتی برابر است که مساوی مقدار ثابت باشند یعنی:

$$\frac{\acute{X}}{X} = 4\frac{\acute{Y}}{Y} = C \ \rightarrow \ \begin{cases} \frac{\acute{X}}{X} = C \ \rightarrow \ \acute{X} = CX \ \rightarrow \ X = ke^{Cx} \\ 4\frac{\acute{Y}}{Y} = C \ \rightarrow \ \acute{Y} = \frac{C}{4}Y \ \rightarrow \ Y = ke^{\frac{C}{4}y} \end{cases} \ \rightarrow u = ke^{C\left(x-\frac{y}{4}\right)}$$

$$u(0,y) = e^{-3y} = ke^{C\left(-\frac{y}{4}\right)} \ \rightarrow \ C = 12\,, k = 1 \ \rightarrow \ u = e^{12\left(x-\frac{y}{4}\right)}$$

پاسخ سوال ۴ قسمت (الف): (۱۵ نمره)

$$u(x,t) = X(x)T(t) \rightarrow X''T = XT' \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \rightarrow X = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x \ , \ u(0,t) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow X = b\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$u(\pi,t) = 0 \rightarrow X(\pi) = 0 \rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \rightarrow \sqrt{\lambda} = n$$

$$\frac{T'}{T} = -\lambda \rightarrow \mathrm{Ln}T = -\lambda t \rightarrow T(t) = e^{-\lambda t} = e^{-n^2 t} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx\, e^{-n^2 t}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = \sin x + \sin 6x \rightarrow A_1 = 1\ ,\ A_6 = 1\ ,\ A_{n\neq 1,6} = 0$$

$$u(x,t) = \sin x\, e^{-t} + \sin 6x\, e^{-36t}$$

پاسخ سوال ۴ قسمت (ب): (۱۵ نمره)

با استفاده از رابطه‌ی $v(x,t) = u(x,t) - 100$ باید معادله‌ی زیر را حل نماییم:

$$\begin{cases} kv_{xx} = v_t, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = -100 \end{cases}$$

با فرض $v(x,t) = X(x)T(t)$ و $-\lambda$ به عنوان ثابت روش جداسازی، داریم:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0$$

$$T' + \lambda k T = 0$$

$$\Rightarrow X = c_2 \sin(n\pi x), \quad T = c_3 e^{-kn^2\pi^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

$$v(x,0) = -100 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x \Rightarrow A_n = 2\int_0^1 (-100) \sin n\pi x \, dx = \frac{-200}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = v(x,t) + 100 = 100 + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} e^{-kn^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱	پاسخ تکلیف شماره ۴	

پاسخ سوال ۵: (۱۵ نمره)

حل:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \Rightarrow \ddot{T}X = c^2 \ddot{X}T - kXT \xRightarrow{\div XT}$$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2\frac{\ddot{X}}{X} - k \Rightarrow \left(\frac{\ddot{T}}{T}+k\right)\frac{1}{c^2} = \frac{\ddot{X}}{X} = \begin{cases} +\lambda^2 & \times \\ 0 & \times \\ -\lambda^2 & \checkmark \end{cases}$$

① $\frac{\ddot{X}}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \ddot{X} = -\lambda^2 X \Rightarrow \ddot{X} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$

@ $u(0,t) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X(x) = A\sin(\lambda x)$

@ $u(l,t) = 0 \Rightarrow A\sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{l}}$

② $\left(\frac{\ddot{T}}{T}+k\right)\frac{1}{c^2} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = -c^2\lambda^2 - k = -p^2 \Rightarrow T(t) = C\sin pt + D\cos pt$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n'\sin(pt) + D_n'\cos(pt)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)} \quad , \quad \boxed{p = \sqrt{c^2\lambda^2 + k}}$$

@ $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D'\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}$

@ $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)C_n'p = g(x)$

$$\Rightarrow C_n'p = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \Rightarrow \boxed{C_n' = \frac{2}{lp}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}$$

موفق باشید – خان چرلی