دانشگاه تهران- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضیات مهندسی -نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹

تمرین ۶ : معادلات با مشتقات نسبی در دو بعد

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله - حل تمرین: میکا امامی - گلمهر خسروخاور - حسین عطرسایی

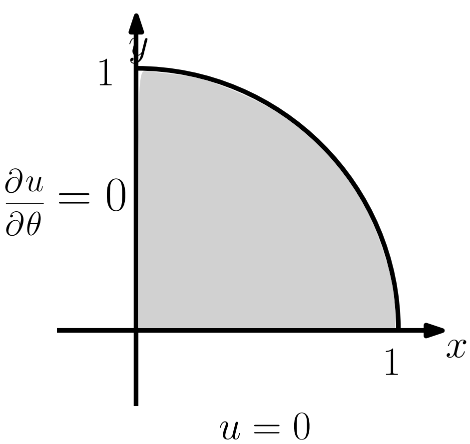
۱) معادله لاپلاس زیر را حل کنید. (**راهنمایی:** راستای x را برای همگن سازی انتخاب کنید.)

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=x+۲y\,; \qquad ۰\le x\le ۱\,;\ ۰\le y\le ۱$$
$$u(۰,y)=y;\quad u(۱,y)=۱\,;$$
$$u_y(x,۰)=x;\quad u_y(x,۰)=x+۱;$$

۲) معادله لاپلاس را در ناحیه مستطیلی $۰\le y\le H$ و $۰\le x\le L$ با شرایط مرزی دادهشده حل کنید.

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=۰\,;$$
$$u_x(۰,y)=u_x(L,y)=۰$$
$$u(x,۰)=۰;\quad u(x,H)=f(x)$$

۳) معادله لاپلاس قطبی زیر را با شرایط داده شده حل کنید. (درصورت رسم نمودار پاسخ معادله، برای شما **نمره امتیازی** درنظر گرفته می‌شود.)

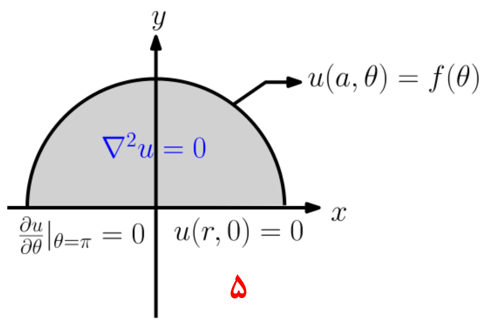


$$۰\le r<۱,\qquad ۰\le\theta<\frac{\pi}{۲}$$
$$u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta}=۰$$
$$u(r,۰)=۰\ ,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(r,\frac{\pi}{۲}\right)=۰$$
$$u(۱,\theta)=۱$$

توجه: اگر در حل مسئله به مشکل برخورد کردید می توانید فرض رو به رو را لحاظ کنید $u(۱,\theta)=f(\theta)$:

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

۴) معادله لاپلاس قطبی زیر را با شرایط داده شده حل کنید. (درصورت رسم نمودار پاسخ معادله، برای شما **نمره امتیازی** درنظر گرفته می‌شود.)



$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$
$$u(r,0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) = 0$$
$$u(a,\theta) = f(\theta)$$

۵) معادله زیر با با کمک **تبدیل لاپلاس** حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x \leq 0, t \geq 0) \\ u(0,t) = u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = sin\dfrac{\pi x}{l}, u_t(x,0) = -sin\dfrac{\pi x}{l} \end{cases}$$

۶) پاسخ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را به کمک **تبدیل لاپلاس** بدست آورید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x \leq 0, t \geq 0) \\ u(0,t) = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = e^{-x}, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

۷) به کمک **تبدیل فوریه** معادله حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

۸) معادله حرارت زیر با شرایط داده شده را با استفاده از **تبدیل فوریه** حل کنید.

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} = e^{-5|x|} & -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = f(x) \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

توجه: تفاوتی نمی‌کند از چه نرم افزاری برای رسم استفاده می‌کنید؛ صرفا باید شکل سه بعدی در محدوده مشخص شده، نشان داده شود.

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.