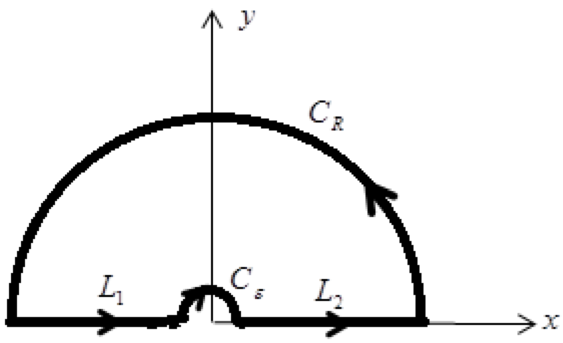
حل چند مسئله نمونه ریاضی مهندسی از انتگرالهای مختلط و سری ها

1-با استفاده از قضیه مانده ها ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x^2+4)^2}dx=\frac{\pi}{32}(\ln 2-1)$$

<u>حل1:</u> مسیر بسته زیر را در نظر میگیریم. در اینصورت میتوانیم بنویسیم:



$$\oint_C\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz=2\pi j\,\mathrm{Res}[\frac{\ln z}{(z^2+4)^2},z=2j]$$

حال ابتدا مانده در قطب $z=2j$ که داخل مسیر است را بدست می آوریم. از آنجاییکه این قطب از مرتبه دوم است میتوانیم این مانده را به صورت زیر حساب کنیم:

$$\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}=\frac{\frac{\ln z}{(z+2j)^2}}{(z-2j)^2}\to \mathrm{Res}[\frac{\frac{\ln z}{(z+2j)^2}}{(z-2j)^2},z=2j]=\frac{d}{dz}[\frac{\ln z}{(z+2j)^2}]_{z=2j}=[\frac{1}{z}(z+2j)^{-2}-2(z+2j)^{-3}\ln z]_{z=2j}=$$
$$\frac{1}{2j}(4j)^{-2}-2(4j)^{-3}\ln 2j=\frac{1}{2j(4j)^2}-\frac{2}{(4j)^3}(\ln 2+j\frac{\pi}{2})=\frac{j}{32}-\frac{j}{32}(\ln 2+j\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{64}+\frac{j}{32}(1-\ln 2)$$

بنابراین داریم:

$$\oint_C\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz=2\pi j\,\mathrm{Res}[\frac{\ln z}{(z^2+4)^2},z=2j]=2\pi j[\frac{\pi}{64}+\frac{j}{32}(1-\ln 2)]=\frac{\pi}{16}(\ln 2-1)+j\frac{\pi^2}{32}$$

حال انتگرال روی مسیر بسته را تبدیل به مسیرهای نشان داده شده روی شکل میکنیم:

$$\oint_C\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz=\int_{L_1}\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz+\int_{C_\varepsilon}\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz+\int_{L_2}\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz+\int_{C_R}\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz$$

حال روی هر مسیر حاصل انتگرال را بدست می آوریم. روی مسیر L_1 میتوانیم بنویسیم: $z=xe^{j\pi}$ در نتیجه داریم:

$$z=xe^{j\pi}\to dz=dxe^{j\pi}=-dx\to\int_{L_1}\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz=\int_{\infty}^{0}\frac{\ln x+j\pi}{(x^2+4)^2}(-dx)=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x^2+4)^2}dx+j\int_0^{\infty}\frac{\pi}{(x^2+4)^2}dx$$

روی مسیر C_ε داریم: $z=\varepsilon e^{j\theta}$ که $\varepsilon\to 0$ و $\theta:\pi\to 0$ بنابراین $dz=\varepsilon\, jd\theta e^{j\theta}$ که با جایگزینی در انتگرال روی این مسیر داریم:

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{\ln\varepsilon e^{j\theta}}{(\varepsilon^2e^{2j\theta}+4)^2}\varepsilon\, jd\theta e^{j\theta}=\int_{\pi}^{0}\frac{\ln\varepsilon+j\theta}{16}\varepsilon\, jd\theta e^{j\theta}=\frac{j}{16}\int_{\pi}^{0}\varepsilon\ln\varepsilon e^{j\theta}d\theta-\frac{1}{16}\int_{\pi}^{0}\varepsilon\theta e^{j\theta}d\theta$$

حال اگر $\varepsilon \to 0$ برود در اینصورت باید دو انتگرال سمت راست عبارت بالا را حساب کنیم:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} (-\varepsilon) = 0$$

لازم به ذکر است که برای محاسبه حد از قانون هوپیتال یعنی مشتق صورت بر مشتق مخرج استفاده کردیم.واضح است که $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{16}\int_{\pi}^{0} \varepsilon \theta e^{j\theta} d\theta = 0$ بنابراین انتگرال روی مسیر نیمدایره به شعاع ε برابر صفر میباشد. حال برای مسیر L_2 داریم: $z = x$ در نتیجه انتگرال روی این مسیر برابر است با:

$$z = x \to dz = dx \to \int_{L_2} \frac{\ln z}{(z^2+4)^2} dz = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx$$

برای مسیر نیمدایره بزرگ یعنی C_R داریم: $z = \mathrm{Re}^{j\theta}$ که $R \to \infty$ و $\theta : 0 \to \pi$ بنابراین $dz = Rjd\theta e^{j\theta}$ که با جایگزینی در انتگرال روی این مسیر داریم:

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z}{(z^2+4)^2} dz = \int_0^\pi \frac{\ln \mathrm{Re}^{j\theta}}{(R^2 e^{2j\theta}+4)^2} \varepsilon j d\theta e^{j\theta} = \int_0^\pi \frac{\ln R + j\theta}{R^4 e^{4j\theta}} Rjd\theta e^{j\theta} = j\int_0^\pi \frac{\ln R}{R^3} e^{-3j\theta} d\theta - \int_0^\pi \frac{\theta}{R^3} e^{-3j\theta} d\theta$$

واضح است که وقتی $R \to \infty$ حاصل هر دو انتگرال سمت راست صفر میشود. در نتیجه انتگرال روی مسیر بسته برابر است با:

$$\oint_C \frac{\ln z}{(z^2+4)^2} dz = \int_{L_1} \frac{\ln z}{(z^2+4)^2} dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z}{(z^2+4)^2} dz + \int_{L_2} \frac{\ln z}{(z^2+4)^2} dz + \int_{C_R} \frac{\ln z}{(z^2+4)^2} dz = \frac{\pi}{32}(\ln 2 - 1) + j\frac{\pi^2}{32} \to$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx + j\int_0^\infty \frac{\pi}{(x^2+4)^2} dx + 0 + \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx + 0 = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) + j\frac{\pi^2}{32} \to$$

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx + j\int_0^\infty \frac{\pi}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) + j\frac{\pi^2}{32} \to \begin{cases} 2\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) \\ \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32} \end{cases}$$

نتایج بالا از مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی دو طرف تساوی بدست آمد. در نتیجه داریم:

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) \to \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{32}(\ln 2 - 1)$$

2-حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید:

الف) $\oint_{|z|=3}\{(z+1)^3\sinh\frac{1}{z-2}+\frac{\sin 5\pi z}{\pi^4(2z+1)^5}+\frac{1+\bar z+\mathrm{Re}(z)}{z}\}dz$ ب) $\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}]d\theta$

ت) $\int_0^{2\pi}\frac{e^{2j\theta}}{2+\cos\theta}d\theta$ $-1<p<1$ $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$ (پ

حل 2–الف): میتوان انتگرال را به سه انتگرال تبدیل کرد:

$$I=\oint_{|z|=3}\{(z+1)^3\,sinh\frac{1}{z-2}+\frac{sin 5\pi z}{\pi^4(2z+1)^5}+\frac{1+\bar z+Re(z)}{z}\}dz=\oint_{|z|=3}(z+1)^3\,sinh\frac{1}{z-2}dz+$$

$$\oint_{|z|=3}\frac{sin 5\pi z}{\pi^4(2z+1)^5}dz+\oint_{|z|=3}\frac{1+\bar z+Re(z)}{z}\}dz=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\oint_{|z|=3}(z+1)^3\,sinh\frac{1}{z-2}dz=\oint_{|z|=3}[(z-2)+3]^3[\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{(z-2)^5}+......]dz$$

$$=\oint_{|z|=3}[(z-2)^3+9(z-2)^2+27(z-2)+27][[\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{(z-2)^5}+....]dz=$$

$$\oint_{|z|=3}[............(\frac{9}{3!}+27)\frac{1}{z-2}+.....]dz=2\pi j(\frac{9}{3!}+27)=57\pi j$$

$$I_2=\oint_{|z|=3}\frac{sin 5\pi z}{\pi^4(2z+1)^5}dz=\oint_{|z|=3}\frac{sin 5\pi z}{2^5\pi^4(z+0.5)^5}dz=\frac{2\pi j}{4!}\frac{1}{2^5\pi^4}\frac{d^4(sin 5\pi z)}{dz^4}(z=-0.5)=$$

$$\frac{2\pi j}{4!}\frac{1}{2^5\pi^4}(5\pi)^4\,sin(5\pi\times-0.5)=\frac{5^4}{4!}\frac{1}{2^5}2\pi j\times-1=-1.63\pi j$$

$$I_3=\oint_{|z|=3}\frac{1+\bar z+Re(z)}{z}dz=\oint_{|z|=3}\frac{1+\bar z+\frac{z+\bar z}{2}}{z}dz=\oint_{|z|=3}\frac{z+z\bar z+\frac{zz+\bar z z}{2}}{z^2}dz=\oint_{|z|=3}\frac{z+|z|^2+\frac{zz+|z|^2}{2}}{z^2}dz=$$

$$\oint_{|z|=3}\frac{z+9+\frac{z^2+9}{2}}{z^2}dz=\oint_{|z|=3}\frac{z^2+2z+27}{2z^2}dz=\frac{2\pi j}{2}\frac{d}{dz}(z^2+2z+27)=\frac{2\pi j}{2}(2z+2)_{(z=0)}=2\pi j$$

$$I=I_1+I_2+I_3=57\pi j-1.63\pi j+2\pi j=57.37\pi j$$

حل 2–ب):

$$\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}]d\theta\qquad z=e^{j\theta}\qquad dz=jd\theta e^{j\theta}=jd\theta z\to d\theta=\frac{dz}{jz}\qquad \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})=$$

$$\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\qquad \sin\theta=\frac{1}{2j}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})=\frac{1}{2j}(z-\frac{1}{z})\to\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3-2\times\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+\frac{1}{2j}(z-\frac{1}{z})}]\frac{dz}{jz}=$$

$$\int_0^{2\pi}[\frac{dz}{3jz-(jz^2+j)+\frac{1}{2}(z^2-1)}]=\oint_{|z|=1}\frac{2}{6jz-2(jz^2+j)+(z^2-1)}]dz=\oint_{|z|=1}\frac{2}{z^2(1-2j)+6jz-(2j+1)}]dz$$

قطبها عبارت زیر انتگرال عبارتند: $z_1 = \frac{2-j}{5}$ و $z_2 = 2-j$ که قطب دوم خارج دایره واحد است پس فقط باید مانده قطب اول را حساب کنیم یعنی:

$$\int_0^{2\pi}[\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}]d\theta = 2\pi j[\operatorname{Re}s\frac{2}{(1-2j)z^2+6jz-(1+2j)},(\frac{j-2}{5}] = 2\pi j\frac{2}{2\frac{2-j}{5}(1-2j)+6j} = \pi$$

حل 2-پ)

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} \qquad z=e^{j\theta}\to dz = jd\theta e^{j\theta} = jzd\theta \to d\theta = \frac{dz}{jz} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})\to$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\to\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z[1-2p\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+p^2]} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{[z(1+p^2)-p(z^2+1)]} =$$

$$\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{[-pz^2+z(1+p^2)-p)]} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)}$$

قطبهای تابع زیر انتگرال عبارتند $z=p$ و $z=\frac{1}{p}$ که با توجه به شرط $-1<p<1$ فقط قطب $z=p$ داخل مسیر یعنی دایره واحد است بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)} = \frac{1}{j}2\pi j[\operatorname{Re}z\frac{1}{-p(z-\frac{1}{p})(z-p)}, z=p] = 2\pi\frac{1}{-p(p-\frac{1}{p})}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

حل 2-ت)

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{2j\theta}}{2+\cos\theta}d\theta \qquad z=e^{j\theta}\to dz = jd\theta e^{j\theta} = jzd\theta\to d\theta = \frac{dz}{jz} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})\to$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\to\int_0^{2\pi}\frac{e^{2j\theta}}{2+\cos\theta}d\theta = \oint_{|z|=1}\frac{z^2}{2+2+\cos\theta}\frac{dz}{jz} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{2z^2dz}{z^2+4z+1} = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{2z^2dz}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}$$

فقط قطب $z_1 = -2+\sqrt{3}$ داخل دایره واحد است پس:

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{2j\theta}}{2+\cos\theta}d\theta = \frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{2z^2dz}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} = \frac{1}{j}\times 2\pi j\lim_{z\to -2+\sqrt{3}}(z+2-\sqrt{3})\frac{2z^2}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} =$$

$$2\pi\frac{2(-2+\sqrt{3})^2}{(-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3})}=\pi\frac{2(7-4\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=0.083\pi$$

3-با استفاده از مانده های تبدیل فوریه $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16x^6}$ را بدست آورید

<u>حل 3</u>

با استفاده از تعریف تبدیل فوریه داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega x}}{x^2-16x^6}dx$$

حال تابع $f(z)=\dfrac{e^{-j\omega z}}{z^2-16z^5}$ را در نظر میگیریم. قطبهای حقیقی این تابع عبارتند از: $z=0,\ z=-0.5, z=0.5$ و تنها قطب مختلط $z=0.5j$ میباشد حال میتوانیم بنویسیم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega x}}{x^2-16x^6}d=2\pi j[\operatorname{Re}sf(z),0.5j]+\pi j[\operatorname{Re}s\ f(z),0+\operatorname{Re}s\ f(z),-0.5+\operatorname{Re}z\ f(z),0.5]$$

حال مانده ها را محاسبه میکنیم:

$$[\operatorname{Re}sf(z),0.5j]=[\operatorname{Re}s\frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)},0.5j]=\frac{e^{-j\omega(0.5j)}}{(0.5j)^2[-64(0.5j)^3]}=\frac{e^{-0.5\omega}}{-2j}$$

$$[\operatorname{Re}sf(z),0]=\frac{d}{dz}z^2\frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)}(z=0)=\frac{d}{dz}[\frac{e^{-j\omega z}}{(1-16z^4)}]=\frac{-j\omega(e^{-j\omega z})(1-16z^4)+64z^3e^{-j\omega z}}{(1-16z^4)^2}(z=0)$$

$$[\operatorname{Re}sf(z),0]=-j\omega\qquad[\operatorname{Re}sf(z),-0.5]=[\operatorname{Re}s\frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)},-0.5]=\frac{e^{-j\omega(-0.5)}}{(-0.5)^2[-64(-0.5)^3]}=\frac{e^{0.5j\omega}}{2}$$

$$[\operatorname{Re}sf(z),0.5]=[\operatorname{Re}s\frac{e^{-j\omega z}}{z^2(1-16z^4)},-0.5]=\frac{e^{-j\omega(0.5)}}{(0.5)^2[-64(0.5)^3]}=-\frac{e^{-0.5j\omega}}{2}\rightarrow$$

$$F(\omega)=2\pi j[\operatorname{Re}sf(z),0.5j]+\pi j[\operatorname{Re}s\ f(z),0+\operatorname{Re}s\ f(z),-0.5+\operatorname{Re}z\ f(z),0.5]=$$
$$2\pi j(\frac{e^{-0.5\omega}}{-2j})+\pi j(-j\omega+\frac{e^{0.5j\omega}}{2}-\frac{e^{-0.5j\omega}}{2})=-\pi e^{-0.5\omega}+\pi j(-j\omega+j\sin 0.5\omega)=\pi(-e^{-0.5\omega}+\omega-\sin 0.5\omega)$$

ملاحظه میشود که چون تابع زوج است فوریه آن حقیقی است.

4-با استفاده از قضیه مانده ها عکس لاپلاس تابع $F(s)=\dfrac{\tanh s}{s^2}$ را بدست آورید.

حل4: در میدانیم که لاپلاس معکوس تابع $F(s)$ برابر است با: $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{Res}[e^{st}F(s),s_n]$ پس باید ماندهای تابع را بدست آوریم. در حقیقت باید مانده های تابع $F(s)=\dfrac{\tanh s}{s^2}$ را بدست آوریم زیر ضریب e^{st} قطب ندارد. حال داریم:

$$F(s)=\frac{\tanh s}{s^2}=\frac{\sinh s}{s^2\cosh s}\to s=0,\quad \cosh s=0\to\frac{e^s+e^{-s}}{2}=0\to e^{2s}=-1=e^{\pm j(2n-1)\pi}\to 2s_n=\pm j(2n-1)\pi\to$$
$$s_n=\pm(2n-1)\frac{\pi}{2}j$$

پس ظاهرا دو قطب در $s=0$ داریم و بینهایت قطب به صورت $s_n=\pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2}j$ داریم که در حقیقت قطبهای $s_n=+(2n-1)\dfrac{\pi}{2}j$ مزدوج مختلط قطبهای $\bar{s}_n=-(2n-1)\dfrac{\pi}{2}j$ ابتدا مانده را در صفر حساب میکنیم:

$$\operatorname{Res}[e^{st}F(s),s=0]=\operatorname{Res}[e^{st}\frac{\tanh s}{s^2},s=0]=\lim_{s\to 0}se^{st}\frac{\tanh s}{s^2}=1$$

لازم به ذکر است که چون $s=0$ صفر مرتبه اول $\tanh s$ است پس در حقیقت قطب $s=0$ قطب مرتبه اول تابع $\dfrac{\tanh s}{s^2}$ میباشد زیرا در صورت و مخرج ضریب s حف میشوند.

حال مانده در $s_n=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}j$ و $\bar{s}_n=-(2n-1)\dfrac{\pi}{2}j$ را بدست می آوریم:

$$\operatorname{Res}[e^{st}F(s),s=s_n]=\operatorname{Res}[e^{st}\frac{\sinh s}{s^2\cosh s},s=s_n]=\frac{e^{s_nt}\sinh s_n}{s_n^2\sinh s_n}=\frac{e^{(2n-1)j\frac{\pi}{2}t}}{-(2n-1)^2\dfrac{\pi^2}{4}}=-\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{(2n-1)j\frac{\pi}{2}t}$$

$$\operatorname{Res}[e^{st}F(s),s=\bar{s}_n]=\operatorname{Res}[e^{st}\frac{\sinh s}{s^2\cosh s},s=\bar{s}_n]=\frac{e^{\bar{s}_nt}\sinh s_n}{\bar{s}_n^2\sinh s_n}=\frac{e^{-(2n-1)j\frac{\pi}{2}t}}{-(2n-1)^2\dfrac{\pi^2}{4}}=-\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)j\frac{\pi}{2}t}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{Res}[e^{st}F(s),s_n]=\operatorname{Res}[\operatorname{Res}[e^{st}F(s),0]+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Res}[e^{st}F(s),s_n]+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Res}[e^{st}F(s),\bar{s}_n]=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{(2n-1)j\frac{\pi}{2}t}-\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)j\frac{\pi}{2}t}]=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}t$$

5-با استفاده از قضیه مانده ها لاپلاس معکوس $G(s)=\dfrac{\coth\sqrt{s}}{1+s^3}$ را بدست آورید.

حل 5: از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}s(G(s)e^{st},s_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}s(\frac{\coth\sqrt{s}}{1+s^3}e^{st},s_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}s(\frac{\cosh\sqrt{s}}{(1+s^3)\sinh\sqrt{s}}e^{st},s_i)=$$

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}s(G(s)e^{st},s_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}s(\frac{\coth\sqrt{s}}{1+s^3}e^{st},s_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}s(\frac{\cosh\sqrt{s}}{(1+s^3)\sinh\sqrt{s}}e^{st},s_i)=$$

$$\sinh\sqrt{s}=0\to\frac{e^{\sqrt{s}}-e^{-\sqrt{s}}}{2}=0\to e^{2\sqrt{s}}=1=e^{j2n\pi}\to 2\sqrt{s_n}=j2n\pi\to\sqrt{s_n}=jn\pi\to s_n=-n^2\pi^2$$

$$1+s^3=0\to s^3=-1=e^{j(2k-1)\pi}\to s=e^{\frac{j(2k-1)\pi}{3}}\to s_1=e^{j\frac{\pi}{3}},s_2=-1,\ s_3=e^{5j\frac{\pi}{3}}$$

$$\operatorname{Re}s(\frac{\cosh\sqrt{s}}{(1+s^3)\sinh\sqrt{s}}e^{st},s_1)=\frac{\cosh\sqrt{s_1}}{(3s_1^2)\sinh\sqrt{s_1}}e^{s_1t}=\frac{e^{(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})t}}{3e^{j2\frac{\pi}{3}}}\coth e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\operatorname{Re}s(\frac{\cosh\sqrt{s}}{(1+s^3)\sinh\sqrt{s}}e^{st},s_2)=\frac{\cosh\sqrt{s_2}}{(3s_2^2)\sinh\sqrt{s_2}}e^{s_2t}=\frac{e^{-t}}{3(-1)^2}\coth j$$

$$\operatorname{Re}s(\frac{\cosh\sqrt{s}}{(1+s^3)\sinh\sqrt{s}}e^{st},s_3)=\frac{\cosh\sqrt{s_3}}{(3s_3^2)\sinh\sqrt{s_3}}e^{s_3t}=\frac{e^{(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})t}}{3e^{j10\frac{\pi}{3}}}\coth e^{j\frac{5\pi}{6}}$$

$$\operatorname{Re}s(\frac{\cosh\sqrt{s}}{(1+s^3)\sinh\sqrt{s}}e^{st},s_n)=\frac{\cosh\sqrt{s_n}}{(1+s_n^3)\frac{1}{2\sqrt{s_n}}\cosh\sqrt{s_n}}e^{s_nt}=\frac{2jn\pi}{1-n^6\pi^6}e^{-n^2\pi^2t}\to$$

$$g(t)=\frac{e^{(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})t}}{3e^{j2\frac{\pi}{3}}}\coth e^{j\frac{\pi}{6}}+\frac{e^{-t}}{3(-1)^2}\coth j+\frac{e^{(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})t}}{3e^{j10\frac{\pi}{3}}}\coth e^{j\frac{5\pi}{6}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2jn\pi}{1-n^6\pi^6}e^{-n^2\pi^2t}$$

6- حاصل $\oint_{|z-1|=1}(2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1}dz$ را بدست اورید.

حل 6: چون $z=1$ نقطه تکین اساسی است و در داخل مسیر است باید عبارت داخل انتگرال را حول $z=1$ بسط دهیم که داریم:

$$2z^2+z-6=2[(z-1)+1]^2+(z-1)-5=2(z-1)^2+4(z-1)+2+(z-1)-5=2(z-1)^2+5(z-1)-3$$

$$\to(2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1}=[2(z-1)^2+5(z-1)-3][\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{(z-1)^5}-.......]=$$

$$........+[-\frac{2}{3!}-3]\frac{1}{z-1}+.....=.......(-\frac{10}{3})\frac{1}{z-1}+....\to C_{-1}=-\frac{10}{3}$$

در نتیجه حاصل انتگرال برابر است با:

$$\oint_{|z-1|=1}(2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1}dz=2\pi jC_{-1}=2\pi j(-\frac{10}{3})=-\frac{20\pi j}{3}$$

7–اگر $m=\oint_{|z|=3}\frac{z+3}{z^2(z^2-1)}dz$ باشد در اینصورت $n=\oint_{|z-1|=1.5}\frac{z+3}{z^2(z^2-1)}dz$ را بر حسب m بدست آورید

<u>حل**7**</u>: تابع زیر انتگرال سه قطب دارد که عبارتند از $z=0,\ z=-1,\ z=1$ که هر سه داخل مسیر $|z|=3$ هستند بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$m=\oint_{|z|=3}\frac{z+3}{z^2(z^2-1)}dz=2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=0)+\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=-1)+$$
$$\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=1)]$$

اما برای انتگرال دوم قطب $z=-1$ خارج مسیر است یعنی:

$$n=\oint_{|z-1|=1.5}\frac{z+3}{z^2(z^2-1)}dz=2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=0)+\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=1)]=$$
$$m-2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=-1)]$$

بنابراین باید مانده را در $z=-1$ بدست آوریم که عبارتست از:

$$\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=-1)=\frac{-1+3}{(-1)^2(2\times-1)}=\frac{2}{-2}=-1\rightarrow$$
$$m-2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{z+3}{z^2(z^2-1)},z=-1)]=m-2\pi j(-1)=m+2\pi j$$

8–حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$ را بدست آورید.

<u>حل**8**</u>: چون عبارت زیر انتگرال زوج است و حاصل انتگرال فرد میشود میتوانیم بنویسیم: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$. حال مسیر مطابق شکل زیر را در نظر میگیریم و $\oint_C\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)}dz$ را بدست می آوریم که خواهیم داشت:

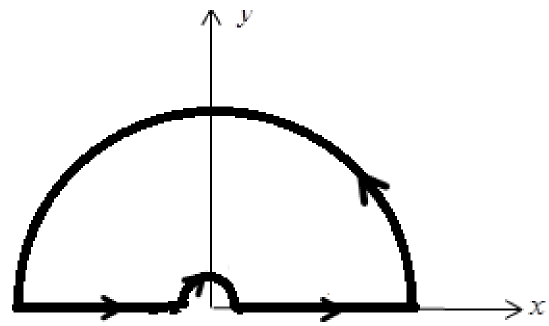
$$\oint_C\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)}dz=2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)},z=j]+\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)},z=0]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x(x^2+1)}dx$$

حال مانده ها را بدست می آوریم:

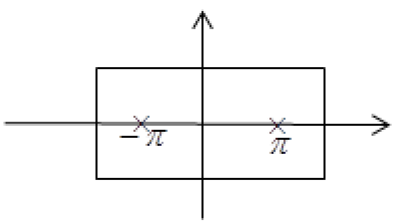
$$\operatorname{Re}s(\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)},z=j)=\frac{e^{j(j)}}{j(2j)}=-\frac{e^{-1}}{2}\qquad \operatorname{Re}s(\frac{e^{jz}}{z(z^2+1)},z=0)=\frac{e^{j(0)}}{(0^2+1)}=1$$

در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x(x^2+1)}dx=2\pi j(-\frac{e^{-1}}{2})+\pi j(1)=\pi j(1-e^{-1})\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x(x^2+1)}dx+j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\pi j(1-e^{-1})\to$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\pi(1-e^{-1})\to\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\frac{\pi(1-e^{-1})}{2}$$



9–حاصل انتگرال $\oint_C \frac{\cot z}{z^3}dz$ اگر مسیر بسته به شکل زیر باشد چقدر است؟



حل9: $\oint_C \frac{\cot z}{z^3}dz=\oint_C \frac{\cos z}{z^3 \sin z}dz$ که سه قطب در مبدا دارد و قطبهای دیگر عبارتند از:

$$\sin z=0\to z=\pm\pi,\pm 2\pi,........$$

اما چون تابع زیر انتگرال زوج است پس ضریب $\frac{1}{z}$ ندارد یعنی مانده تابع در $z=0$ صفر است از طرفی از بقیه قطبها فقط قطبهای $\pm\pi$ داخل مسیر هستند بنابراین داریم:

$$\oint_C \frac{\cot z}{z^3}dz=2\pi j[\operatorname{Re}s(\frac{\cos z}{z^3\sin z},z=-\pi)+\operatorname{Re}s(\frac{\cos z}{z^3\sin z},z=\pi)]$$
$$\operatorname{Re}s(\frac{\cos z}{z^3\sin z},z=-\pi)=\frac{\cos(-\pi)}{(-\pi)^3\cos(-\pi)}=-\frac{1}{\pi^3}\qquad \operatorname{Re}s(\frac{\cos z}{z^3\sin z},z=\pi)=\frac{\cos(\pi)}{(\pi)^3\cos(\pi)}=\frac{1}{\pi^3}$$
$$\to\oint_C \frac{\cot z}{z^3}dz=2\pi j[-\frac{1}{\pi^3}+\frac{1}{\pi^3}]=0$$

10– تبدیل فوریه تابع $g(t)=\frac{1}{(t^4-16)(t^2+1)}$ را با استفاده از قضیه مانده ها بدست اورید.

حل10:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega t}}{(t^4-16)(t^2+1)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{(t^4-16)(t^2+1)}dt-j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{(t^4-16)(t^2+1)}dt$$

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{(t^4-16)(t^2+1)}dt$$

حال اگر $f(z)=\dfrac{e^{j\omega z}}{(z^4-16)(z^2+1)}$ باشد، قطبهای داخل مسیر عبارتند از $z=j,\quad z=2j$ و قطبهای روی مسیر عبارتند از $z=-2,\ z=2$ در اینصورت داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\pi j[\mathrm{Res}(f(z),z=-2)+\mathrm{Res}(f(z),z=2)]+2\pi j[\mathrm{Res}(f(z),z=j)+\mathrm{Res}(f(z),z=2j)]\rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega x}}{(x^4-16)(x^2+1)}dx=\pi j[\mathrm{Res}(f(z),z=-2)+\mathrm{Res}(f(z),z=2)]+2\pi j[\mathrm{Res}(f(z),z=j)+\mathrm{Res}(f(z),z=2j)]$$

حال تک تک مانده ها را حساب میکنیم:

$$\mathrm{Res}(f(z),z=-2)=\frac{e^{-2j\omega}}{4(-2)^3[(-2)^2+1]}=-\frac{e^{-2j\omega}}{160}\qquad \mathrm{Res}(f(z),z=2)=\frac{e^{2j\omega}}{4(2)^3[(2)^2+1]}=\frac{e^{2j\omega}}{160}$$

$$\mathrm{Res}(f(z),z=j)=\frac{e^{j(j)\omega}}{[(j)^4-16](2j)}=\frac{e^{-\omega}}{-30j}=j\frac{e^{-\omega}}{30}\qquad \mathrm{Res}(f(z),z=2j)=\frac{e^{j(2j)\omega}}{4(2j)^3(4j^2-1)}=\frac{e^{-2\omega}}{160j}=-j\frac{e^{-2\omega}}{160}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega x}}{(x^4-16)(x^2+1)}dx=\pi j[\mathrm{Res}(f(z),z=-2)+\mathrm{Res}(f(z),z=2)]+2\pi j[\mathrm{Res}(f(z),z=j)+\mathrm{Res}(f(z),z=2j)]=$$

$$\pi j[-\frac{e^{-2j\omega}}{160}+\frac{e^{2j\omega}}{160}]+2\pi j[j\frac{e^{-\omega}}{30}-j\frac{e^{-2\omega}}{160}]=\frac{\pi j}{160}(2j\sin 2\omega)+2\pi(\frac{e^{-2\omega}}{160}-\frac{e^{-\omega}}{30})=-\frac{\pi\sin 2\omega}{80}+2\pi(\frac{e^{-2\omega}}{160}-\frac{e^{-\omega}}{30})$$

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{(t^4-16)(t^2+1)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{(x^4-16)(x^2+1)}dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega x}}{(x^4-16)(x^2+1)}dx=-\frac{\pi\sin 2\omega}{80}+\pi(\frac{e^{-2\omega}}{80}-\frac{e^{-\omega}}{15})=$$

$$\pi(\frac{e^{-2\omega}}{80}-\frac{e^{-\omega}}{15}-\frac{\sin 2\omega}{80})$$

11–با استفاده از قضیه ماندها تبدیل فوریه $f(x)=\dfrac{x}{x^4-1}$ را بدست آورید:

حل 11:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-j\omega x}}{x^4-1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\omega x}{x^4-1}dx-j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\omega x}{x^4-1}dx=0-j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\omega x}{x^4-1}dx=-j\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{j\omega x}}{x^4-1}dx$$

حال اگر $f(z)=\frac{ze^{j\omega z}}{z^4-1}$ در اینصورت قطب ها داخل و روی نیم دایره به شعاع ∞ بالای صفحه sعبارتند: $z=-1,\ z=1,\ z=j$ در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{j\omega x}}{x^4-1}dx=2\pi j[\operatorname{Re}s(f(z),j)]+\pi j[\operatorname{Re}s(f(z),-1)+\pi j[\operatorname{Re}s(f(z),1)]$$

$$\operatorname{Re}s(f(z),j)=\frac{je^{j\omega(j)}}{4(j)^3}=\frac{je^{-\omega}}{-4j}=-\frac{1}{4}e^{-\omega}\quad \operatorname{Re}s(f(z),-1)=\frac{-e^{j\omega(-1)}}{4(-1)^3}=\frac{e^{-j\omega}}{4}\qquad [\operatorname{Re}s(f(z),1]=\frac{e^{j\omega(1)}}{4(1)^3}=\frac{e^{j\omega}}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{j\omega x}}{x^4-1}dx=2\pi j(-\frac{1}{4}e^{-\omega})+\pi j(\frac{e^{-j\omega}+e^{-j\omega}}{4})=-\frac{\pi j}{2}e^{-\omega}+\frac{\pi j}{2}\cos\omega$$

$$\to F(\omega)=-j\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{j\omega x}}{x^4-1}dx=\frac{\pi j}{2}e^{-\omega}-\frac{j\pi}{2}\cos\omega$$

ملاحظه میشود که چون تابع فرد است پس تبدیل فوریه آن موهومی خالص است.

12–حاصل انتگرال $\oint_{|z|=2}(2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1}dz$ را بدست آورید.

<u>حل **12**</u>: نقطه $z=1$ تکین اساسی و داخل مسیر بسته است پس باید تابع زیر انتگرال را بسط دهیم و مانده در $z=1$ که همان ضریب $\frac{1}{z-1}$ را بدست آوریم که اگر آنرا C_{-1}بنامیم حاصل انتگرال برابر است با: $2\pi jC_{-1}$ بنابراین داریم:

$$f(z)=(2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1}=[2(z-1)^2+5(z-1)-3][\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(z-1)^5}-.....]=$$
$$........+(-\frac{2}{3!}-3]\frac{1}{z-1}+......=......+(-\frac{10}{3})\frac{1}{z-1}+......\to C_{-1}=-\frac{10}{3}\to$$
$$\oint_{|z|=2}(2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1}dz=2\pi jC_{-1}=2\pi j\times-\frac{10}{3}=-\frac{20\pi j}{3}$$

13–حاصل انتگرال $\oint_{z=1}z^m e^{\frac{1}{z}}dz$ را بدست آورید

<u>حل **13**:</u> نقطه $z=0$ تکین اساسی و داخل مسیر بسته است پس باید تابع زیر انتگرال را بسط دهیم و مانده در $z=10$ که همان ضریب $\frac{1}{z}$را بدست آوریم که اگر آنرا C_{-1}بنامیم حاصل انتگرال برابر است با: $2\pi jC_{-1}$ بنابراین داریم:

$$f(z)=z^m e^{\frac{1}{z}}=z^m(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+..........\frac{1}{m!}\frac{1}{z^m}+\frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{z^{m+1}}+.....)=$$

$$z^m + z^{m-1} + \dots\dots\dots\dots\frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{z} + \dots\dots\dots \to C_{-1} = \frac{1}{(m+1)!} \to \oint_{z=1} z^m e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{2\pi j}{(m+1)!}$$

14–حاصل انتگرال $\oint_{z=1} \frac{\sin 3z}{(2z+1)^4} dz$ را بدست آورید.

حل 14: باید مانده تابع را در $z = -0.5$ بدست آوریم. ابتدا تابع را به فرم استاندارد مینویسیم یعنی از **2** در مخرج کسر فاکتور میگیریم:

$$\oint_{z=1} \frac{\sin 3z}{(2z+1)^4} dz = \oint_{z=1} \frac{\sin 3z}{2^4 (z+0.5)^4} dz = \frac{1}{16}\oint_{z=1} \frac{\sin 3z}{(z+0.5)^4} dz = \frac{1}{16}\frac{2\pi j}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(\sin 3z)_{(z=-0.5)} = -\frac{9\pi j}{16}\cos(1.5)$$

میتوان از بسط دادن تابع و پیدا کردن ضریب $\frac{1}{z+0.5}$ که همان مانده است نیز به جواب رسید که البته طبق محاسبات زیر طولانی تر است

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{(2z+1)^4} = \frac{\sin 1.5(2z+1-1)}{(2z+1)^4} = \frac{\sin[(1.5(2z+1)-1.5]}{(2z+1)^4} = \frac{\cos 1.5 \sin 1.5(2z+1) - \sin 1.5 \cos 1.5(2z+1)}{(2z+1)^4}$$

حال بسط $\sin\frac{3}{2}(2z+1)$ و $\cos\frac{3}{2}(2z+1)$ را به صورت زیر مینویسیم:

$$\sin 1.5(2z+1) = 1.5(2z+1) - \frac{1}{3!}[1.5(2z+1)]^3 + \frac{1}{5!}[1.5(2z+1)]^5 + \dots..$$

$$\cos 1.5(2z+1) = 1 - \frac{1}{2!}[1.5(2z+1)]^2 + \frac{1}{4!}[1.5(2z+1)]^4 + \dots.$$

که با جایگزینی در تابع داریم:

$$f(z) = \frac{\cos 1.5 \sin 1.5(2z+1) - \sin 1.5 \cos 1.5(2z+1)}{(2z+1)^4} =$$

$$\frac{\cos 1.5[\frac{3}{2}(2z+1) - \frac{1}{3!}[1.5(2z+1)]^3 + \frac{1}{5!}[1.5(2z+1)]^5 + \dots..] - \sin 1.5[1 - \frac{1}{2!}[1.5(2z+1)]^2 + \frac{1}{4!}[1.5(2z+1)]^4 + \dots].}{(2z+1)^4} =$$

$$-\frac{\sin 1.5}{(2z+1)^4} + \frac{1.5\cos 1.5}{(2z+1)^3} + \frac{(1.5)^2 \sin 1.5}{2!}\frac{1}{(2z+1)^2} - \frac{(1.5)^3 \cos 1.5}{3!}\frac{1}{(2z+1)} - \frac{(1.5)^4 \sin 1.5}{4!} + \frac{(1.5)^5 \cos 1.5}{5!}(2z+1) + \dots..$$

حال براحتی میتوانیم مانده را در قطب $z = -\frac{1}{2}$ پیدا کنیم که به صورت ضریب $\frac{1}{z+\frac{1}{2}}$ میباشد که عبارتست از:

$$f(z) = \dots\dots\dots - \frac{(1.5)^3 \cos 1.5}{3!}\frac{1}{(2z+1)} + \dots.. = \dots.. - \frac{(1.5)^3 \cos 1.5}{3!}\frac{1}{2(z+\frac{1}{2})} + \dots. = \dots\dots - \frac{(1.5)^3 \cos 1.5}{2\times 3!}\frac{1}{(z+\frac{1}{2})} + \dots.. \to$$

$$C_{-1} = -\frac{27}{2^4 \times 3!}\cos 1.5 \to \oint_{z=1} \frac{\sin 3z}{(2z+1)^4} dz = 2\pi j C_{-1} = -\frac{9\pi j}{16}\cos 1.5$$

15- به کمک مانده های به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(x-x^5)(16-x^4)}$ ب) $\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta$

حل 15-الف

قطبهای تابع که باید مانده آنها را حساب کرد و در روی مسیر و یا نیم دایرهبه شعاع ∞ بالای صفحه S هستند عبارتند از:

$x=0, x=-2, x=-1, x=1, x=2, x=j, x=2j$

حال تابع $f(z)=\frac{e^{jz}}{(z-z^5)(16-z^4)}$ را در نظر میگیریم و از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin xdx}{(x-x^5)(16-x^4)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin xdx}{(x-x^5)(16-x^4)}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{(x-x^5)(16-x^4)}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[I']$$

$$I'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{(x-x^5)(16-x^4)}=2\pi j[(\mathrm{Re}\,sf(z),j)+(\mathrm{Re}\,sf(z),2j)]+\pi j[\mathrm{Re}\,sf(z),0)+\mathrm{Re}\,sf(z),-1)+$$

$$\mathrm{Re}\,sf(z),-2)+\mathrm{Re}\,sf(z),1)+\mathrm{Re}\,sf(z),2)] \qquad (\mathrm{Re}\,sf(z),j)=\frac{e^{j(j)}}{(1-5j^4)(16-j^4)}=\frac{e^{-1}}{-4\times 15}=-\frac{e^{-1}}{60}$$

$$(\mathrm{Re}\,sf(z),2j)=\frac{e^{j(2j)}}{[2j-(2j)^5][-4(2j)^3]}=\frac{e^{j(2j)}}{-30j[-4(2j)^3]}=\frac{e^{-2}}{960}$$

$$(\mathrm{Re}\,sf(z),0)=\frac{e^{j0}}{(1-5\times 0^4)(16-0^4)}=\frac{1}{16} \qquad (\mathrm{Re}\,sf(z),-1)=\frac{e^{j(-1)}}{(1-5\times -1^4)(16-(-1)^4)}=\frac{e^{-j}}{-4\times 15}=-\frac{e^{-j}}{60}$$

$$(\mathrm{Re}\,sf(z),1)=\frac{e^{j(1)}}{(1-5\times 1^4)(16-(1)^4)}=\frac{e^{j}}{-4\times 15}=-\frac{e^{j}}{60}$$

$$(\mathrm{Re}\,sf(z),-2)=\frac{e^{j(-2)}}{[-2-(-2)^5](-4(-2)^3)}=\frac{e^{-2j}}{30\times 32}=-\frac{e^{-2j}}{960}$$

$$(\mathrm{Re}\,sf(z),2)=\frac{e^{j(2)}}{[2-(2)^5](-4(2)^3)}=\frac{e^{2j}}{-30\times -32}=-\frac{e^{2j}}{960}\rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{(x-x^5)(16-x^4)}=2\pi j[-\frac{e^{-1}}{60}+\frac{e^{-2}}{960}]+\pi j[\frac{1}{16}-\frac{e^{-j}}{60}-\frac{e^{-j}}{60}-\frac{e^{-2j}}{960}-\frac{e^{-2j}}{960}]=$$

$$2\pi j[-\frac{e^{-1}}{60}+\frac{e^{-2}}{960}]+\pi j[\frac{1}{16}-\frac{1}{30}\cos 1-\frac{1}{480}\cos 2]\rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[I']=\pi[-\frac{e^{-1}}{60}+\frac{e^{-2}}{960}+\frac{1}{32}-\frac{1}{60}\cos 1-\frac{1}{960}\cos 2]$$

حل 15-ب):

میتوانیم انتگرال را به صورت زیر بنویسیم:

$$\int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta)\cos(j\sin\theta)d\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(\cos\theta+j\sin\theta)+\cos(\cos\theta-j\sin\theta)]d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(e^{j\theta})+\cos(e^{-j\theta})]d\theta$$

حال اگر $z=e^{j\theta}$ بگیریم در اینصورت $dz=jd\theta e^{j\theta}=jd\theta z\rightarrow d\theta=\frac{dz}{jz}$ در اینصورت انتگرال بالا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta==\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(e^{j\theta})+\cos(e^{-j\theta})]d\theta=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}[\cos z+\cos\frac{1}{z}]\frac{dz}{jz}=$$

$$\frac{1}{2j}\oint_{|z|=1}[\cos z+\cos\frac{1}{z}]\frac{1}{z}dz=\frac{1}{2j}\oint_{|z|=1}\{[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+.....]+[1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+.....]\}\frac{1}{z}dz=2\pi j\frac{1}{2j}C_{-1}$$

که C_{-1} ضریب $\frac{1}{z}$ عبارت زیر انتگرال است که واضح است این ضریب **2** میباشد بنابراین داریم:

$$\int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta=2\pi j\frac{1}{2j}(2)=2\pi$$

16- با استفاده از قضیه مانده ها انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{1-x^4}$ را بدست آورید

<u>حل 16</u>میتوانیم بنویسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{1-x^4}=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}$$

انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}$ را گرفته و قسمت حقیقی آنرا انتخاب میکنیم. تابع زیر انتگرال دو قطب حقیقی $x=-1$ و $x=1$ و یک قطب مختلط بالای محور $x=j$ دارد بنابراین داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}=2\pi j\,\mathrm{Re}\,s\{\frac{e^{jz}}{1-z^4},j)+\pi j\,\mathrm{Re}\,s\{\frac{e^{jz}}{1-z^4},z=-1)+\pi j\,\mathrm{Re}\,s\{\frac{e^{jz}}{1-z^4},z=1)=2\pi j\frac{e^{j(j)}}{-4(j)^3}+\pi j\frac{e^{j(-1)}}{-4(-1)^3}+$$

$$\pi j\frac{e^{j(1)}}{-4(1)^3}=2\pi j\frac{e^{-1}}{4j}+\frac{\pi j}{4}(e^{-j}-e^{j})=\frac{\pi}{2}e^{-1}+\frac{\pi j}{4}(-2j\sin 1)=\frac{\pi}{2}(e^{-1}+\sin 1)\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{1-x^4}=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}dx}{1-x^4}=\frac{\pi}{2}(e^{-1}+\sin 1)$$

17- با استفاده از مانده ها به سوالات زیر پاسخ دهید

الف) تبدیل فوریه $g(t)=\frac{1}{(t-t^5)(t^2+4)}$ ب) حاصل انتگرال $\oint_{|z|=2}z^3e^{\frac{1}{z-1}}dz$ پ) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\sin\theta}$

حل 17- الف)

تبدیل فوریه به صورت زیر است:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t-t^5)(t^2+4)}e^{-j\omega t}dt$$

حال اگر $f(z)=\frac{e^{-j\omega z}}{(z-z^5)(z^2+4)}$ بگیریم قطبهای حقیقی آن $z=0,\ \ z=-1,\ \ z=1$ و قطبهای موهومی بالای محور حقیقی آن $z=j,\ \ z=j2$ میباشدد که باید مانده ها را در این قطبها پیدا کنیم. مانده قطبهای حقیقی عبارتند از:

$$\operatorname{Re}s(f(z),z=0)=\frac{e^{j\omega(0)}}{(1-5(0)^4)(0^2+4)}=\frac{1}{4}$$
$$\operatorname{Re}s(f(z),z=-1)=\frac{e^{j\omega(-1)}}{(1-5(-1)^4)((-1)^2+4)}=-\frac{e^{-j\omega}}{20}$$
$$\operatorname{Re}s(f(z),z=1)=\frac{e^{j\omega(1)}}{(1-5(1)^4)((+1)^2+4)}=-\frac{e^{j\omega}}{20}$$

مانده قطبهای موهومی عبارتند از:

$$\operatorname{Re}s(f(z),z=j)=\frac{e^{j\omega(j)}}{(1-5(j)^4)(j^2+4)}=-\frac{e^{-\omega}}{12}$$
$$\operatorname{Re}s(f(z),z=j2)=\frac{e^{j\omega(j2)}}{(j2-(j2)^5)(2\times 2j)}=\frac{e^{-2\omega}}{120}$$

بنابراین داریم:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t-t^5)(t^2+4)}e^{-j\omega t}dt=\pi j(\frac{1}{4}-\frac{e^{-j\omega}}{20}-\frac{e^{j\omega}}{20})+2\pi j(-\frac{e^{-\omega}}{12}+\frac{e^{-2\omega}}{120})=$$
$$\pi j(0.25-0.1\cos\omega)+\pi j(-\frac{e^{-\omega}}{6}+\frac{e^{-2\omega}}{60})=\pi j(0.25-0.1\cos\omega-\frac{e^{-\omega}}{6}+\frac{e^{-2\omega}}{60})$$

ملاحظه میشود که چون تابع فرد است فوریه ان موهومی خالص است.

حل 17-ب)

$$\oint_{|z|=2} z^3 e^{\frac{1}{z-1}}dz=\oint_{|z|=2}[(z-1)+1]^3 e^{\frac{1}{z-1}}dz=\oint_{|z|=2}[(z-1)^3+3(z-1)^2+3(z-1)+1]e^{\frac{1}{z-1}}dz=$$
$$\oint_{|z|=2}[(z-1)^3+3(z-1)^2+3(z-1)+1][1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z-1})^2+\frac{1}{3!}(\frac{1}{z-1})^3+\frac{1}{4!}(\frac{1}{z-1})^4+\frac{1}{5!}(\frac{1}{z-1})^5+.....]dz$$

حال ضریب $\frac{1}{z-1}$ داخل انتگرال عبارتست از:

$$C_{-1}=(1+\frac{3}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{1}{4!})=(1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4!})=(3+\frac{1}{24})=\frac{73}{24}$$

$$\oint_{|z|=2} z^3 e^{\frac{1}{z-1}}dz=2\pi j C_{-1}=\frac{73\pi j}{12}$$

حل 17–پ)

اگر $z=e^{j\theta}$ در نتیجه داریم:

$$dz=jd\theta e^{j\theta}=jd\theta z\rightarrow d\theta=\frac{dz}{jz}\qquad \sin\theta=\frac{1}{2j}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})=\frac{1}{2j}(z-\frac{1}{z})$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{jz}}{5-4\frac{1}{2j}(z-\frac{1}{z})}=\oint_{|z|=1}-\frac{dz}{2z^2-5jz-2}=\oint_{|z|=1}-\frac{dz}{2(z-2j)(z-0.5j)}=$$

$$2\pi j\,\mathrm{Re}\,s(-\frac{1}{2(z-2j)(z-0.5j)},z=0.5j)=2\pi j\frac{-1}{2(0.5j-2j)}=\frac{2\pi}{3}$$

18–حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}e^{j(n\theta-\sin\theta)}d\theta$ را به کمک مانده ها بدست آورید.

حل 18)

$$I=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}e^{j(n\theta-\sin\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{jn\theta}e^{(\cos\theta-j\sin\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{jn\theta}e^{e^{-j\theta}}d\theta$$

حال اگر $z=e^{j\theta}$ در اینصورت $dz=jd\theta e^{j\theta}=jd\theta z\rightarrow d\theta=\frac{dz}{jz}$, $\frac{1}{z}=e^{-j\theta}$ در نتیجه:

$$I=\int_0^{2\pi}e^{jn\theta}e^{e^{-j\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}z^n e^{\frac{1}{z}}\frac{dz}{jz}=\frac{1}{j}\int_0^{2\pi}z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}dz=\frac{1}{j}\int_0^{2\pi}z^{n-1}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+........\frac{1}{n!z^n}+...)dz=$$

$$\frac{1}{j}\int_0^{2\pi}(z^{n-1}+z^{n-2}+\frac{1}{2!}z^{n-2}+........\frac{1}{n!z}+...)dz=\frac{1}{j}2\pi jC_{-1}=\frac{1}{j}2\pi j\frac{1}{n!}=\frac{2\pi}{n!}$$

که C_{-1} ضریب $\frac{1}{z}$ عبارت زیر انتگرال است که برابر است با $\frac{1}{n!}$.

19- حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}d\theta$ را به کمک مانده ها بدست آورید.

حل 19)

$$I=\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}d\theta=\int_0^{2\pi} e^{(e^{j\theta}+e^{-j\theta})}d\theta \qquad z=e^{j\theta}\to d\theta=\frac{dz}{jz}\to I=\oint_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}\frac{dz}{jz}=\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}e^{z}.e^{\frac{1}{z}}dz=$$

$$\frac{1}{j}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}.......)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}....)dz=\frac{1}{j}2\pi jC_{-1}=2\pi C_{-1}$$

که C_{-1} ضریب $\frac{1}{z}$ عبارت زیر انتگرال است که برابر است با:

$$1+1+\frac{1}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}+......=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\to I=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$$

20-حاصل انتگرال $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{0.5+\sin^2\theta}$ را بدست آورید

حل 20) اگر $z=e^{j2\theta}$ در اینصورت $dz=j2d\theta e^{j2\theta}=j2d\theta z\to d\theta=\frac{dz}{2jz}$ بنابراین داریم:

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)=\frac{1}{2}(1-\frac{e^{j2\theta}+e^{-j2\theta}}{2})=\frac{1}{2}(1-\frac{z+z^{-1}}{2})=0.5-\frac{z+z^{-1}}{4}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{0.5+\sin^2\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{2jz}}{0.5+0.5-\frac{z+z^{-1}}{4}}=\frac{2}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{4z-z^2-1}=\frac{2}{j}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{-(z-2-\sqrt{3})(z-2+\sqrt{3})}=\frac{2}{j}2\pi jC_{-1}$$

فقط قطب $z=2-\sqrt{3}$ داخل مسیر $|z|=1$ است که مانده تابع زیر انتگرال به صورت زیر است:

$$C_{-1}=\mathrm{Re}\,s(\frac{1}{4z-z^2-1},z=2-\sqrt{3})=\frac{1}{4-2(2-\sqrt{3})}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\to I=\frac{2}{j}2\pi jC_{-1}=4\pi\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

21-حاصل انتگرال $I=\oint_{|z|=1} z^2\,\mathrm{Re}(z)e^{\bar{z}}d\bar{z}$ را بدست آوریم:

حل 21) $\bar{z}=\frac{z\bar{z}}{z}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{1}{z}\to d\bar{z}=-\frac{dz}{z^2},\quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(z+\frac{z\bar{z}}{z})=\frac{1}{2}(z+\frac{|z|^2}{z})=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ در نتیجه داریم:

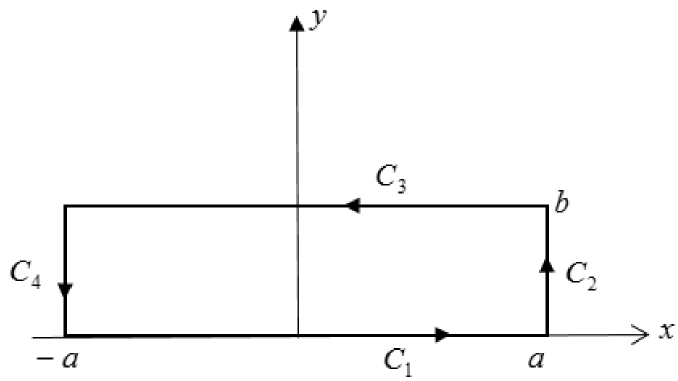
$$I=\oint\limits_{|z|=1} z^2\,\mathrm{Re}(z)e^{\bar z}d\bar z=\oint\limits_{|z|=1} z^2\,\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}(-\frac{dz}{z^2})=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}-(z+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}dz=$$

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}-(z+\frac{1}{z})(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+......)dz=-\frac{1}{2}2\pi jC_{-1}$$

C_{-1} ضریب $\frac{1}{z}$ زیر انتگرال است که برابر است با: $1+\frac{1}{2!}=\frac{3}{2}$ بنابراین:

$$I=-\frac{1}{2}2\pi jC_{-1}=-\pi jC_{-1}=-\frac{3\pi j}{2}$$

23–با انتگرال گیری از $f(z)=e^{-z^2}$ روی مسیر بسته نشان داده شده حاصل انتگرال $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx$ را بدست آورید.



<u>حل 23)</u> چون تابع $f(z)=e^{-z^2}$ قطبی داخل مسیر بسته ندارد در اینصورت $\oint_C e^{-z^2}dz=0$ حال داریم:

$$\oint_C e^{-z^2}dz=\int_{C_1}e^{-z^2}dz+\int_{C_2}e^{-z^2}dz+\int_{C_3}e^{-z^2}dz+\int_{C_4}e^{-z^2}dz=0\rightarrow\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx+\int_0^b e^{-(a+jy)^2}jdy+\int_a^{-a}e^{-(x+jb)^2}dx+$$

$$\int_b^0 e^{-(a+jy)^2}jdy=0\rightarrow\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx+\int_0^b e^{-a^2}.e^{-y^2-2ajy}jdy+\int_a^{-a}e^{-x^2}e^{b^2}.e^{-2jxb}dx+\int_b^0 e^{-a^2}.e^{-y^2-2ajy}jdy=0$$

حال وقتی $a\rightarrow\infty$ تابع $e^{-a^2}\rightarrow 0$ بنابراین انتگرالهای دوم و چهارم به سمت صفر میل میکنند بنابراین داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx+\int_{\infty}^{-\infty}e^{-x^2}e^{b^2}.e^{-2jxb}dx=0\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx-e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}.e^{-2jbx}dx=0$$

میدانیم $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx-e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}.e^{-2jbx}dx=\sqrt{\pi}-e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(\cos 2bx-j\sin 2bx)dx=0\rightarrow$$

$$\sqrt{\pi}-e^{b^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bxdx-j\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\sin 2bxdx\right)=0$$

چون $e^{-x^2}\sin 2bx$ تابع فرد است $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\sin 2bxdx=0$ از طرفی چون $e^{-x^2}\cos 2bx$ زوج است بنابراین $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bxdx=2\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bxdx$ در نتیجه داریم:

$$\sqrt{\pi}-e^{b^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bxdx-j\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\sin 2bxdx\right)=\sqrt{\pi}-2e^{b^2}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bxdx=0\rightarrow\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bxdx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

24-با استفاده از قضیه مانده ها حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید:

الف) $\oint_{|z|=1}[\mathrm{Re}(z).e^{\bar{z}}]dz$ ب) $\oint_{|z|=1}[1+\mathrm{Re}(z)]^5dz$ پ) $\oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\bar{z}d\bar{z}$

حل 24-الف)

$$\oint_{|z|=1}[\mathrm{Re}(z).e^{\bar{z}}]dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2}(z+\bar{z}).e^{\bar{z}}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2}(z+\frac{z\bar{z}}{z}).e^{\frac{z\bar{z}}{z}}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2}(z+\frac{|z|^2}{z}).e^{\frac{|z|^2}{z}}dz=$$
$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}).e^{\frac{1}{z}}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}).(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+.......)dz=\frac{1}{2}2\pi jC_{-1}$$

که C_{-1} ضریب $\frac{1}{z}$ تابع زیر انتگرال است که واضح است که برابر است با: $1+\frac{1}{2!}=\frac{3}{2}$ در نتیجه داریم:

$$\oint_{|z|=1}[\mathrm{Re}(z).e^{\bar{z}}]dz=\frac{1}{2}2\pi jC_{-1}=\frac{3\pi j}{2}$$

حل 24-ب)

$$\oint_{|z|=1}[1+\mathrm{Re}(z)]^5dz=\oint_{|z|=1}[1+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})]^5dz=\oint_{|z|=1}[\frac{(z^2+2z+1)}{2z}]^5=\oint_{|z|=1}[\frac{(z+1)^2}{2z}]^5dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{32z^5}(z+1)^{10}dz=$$
$$\frac{1}{32}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^5}\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}z^{10-k}=\frac{1}{32}\oint_{|z|=1}\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}z^{5-k}=\frac{1}{32}(2\pi j)C_{-1}$$

که C_{-1} ضریب $\frac{1}{z}$ تابع زیر انتگرال است که واضح است که برابر است با: $\binom{10}{6}$ (به ازای $k=6$) بنابراین:

$$\oint_{|z|=1}[1+\mathrm{Re}(z)]^5 dz = \frac{1}{32}(2\pi j)\binom{10}{6} = \frac{\pi j}{16}\,\frac{10!}{6!\times 4!} = 13.125\pi j$$

حل 24-پ)

$$\oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\bar{z}\,d\bar{z} = \oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\frac{z\bar{z}}{z}\,d\,\frac{z\bar{z}}{z} = \oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\frac{|z|^2}{z}\,d\,\frac{|z|^2}{z} = \oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\frac{1}{z}\,d(\frac{1}{z}) =$$

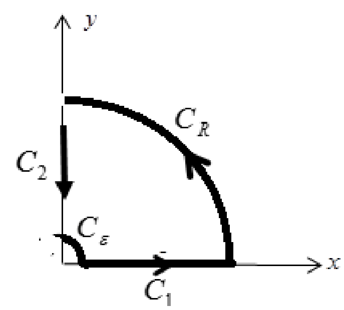
$$\oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\frac{1}{z}(-\frac{dz}{z^2}) = \oint_{|z|=1}(z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1)(1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}+......)(-\frac{1}{z^2})dz =$$

$$\oint_{|z|=1}(z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1)(-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!\,z^4}-\frac{1}{4!\,z^6}+......)dz = 2\pi j C_{-1}$$

که C_{-1} ضریب $\frac{1}{z}$ تابع زیر انتگرال است که واضح است که برابر است با: $C_{-1}=-5+\frac{10}{2!}-\frac{1}{4!}=-\frac{1}{4!}$ بنابراین:

$$\oint_{|z|=1}(z+1)^5\cos\bar{z}\,d\bar{z} = 2\pi j C_{-1} = 2\pi j(-\frac{1}{4!}) = -\frac{\pi j}{12}$$

25-با استفاده از مسیر زیر حاصل $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ را بدست آورید.



حل: شعاع نیمدایره کوچک $\varepsilon\to 0$ و روی این مسیر $dz=\varepsilon j d\theta e^{j\theta}$ $\quad z=\varepsilon e^{j\theta}$ شعاع نیمدایره بزرگ $R\to\infty$ و روی این مسیر $dz=Rjd\theta e^{j\theta}$ $\quad z=\mathrm{R}e^{j\theta}$ و روی مسیر C_1 داریم $x:0\to\infty$ $\quad z=x$. روی مسیر C_2 داریم $y:\infty\to 0$ $\quad z=jy$ حال تابع $\frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}$ هیچ قطبی داخل این مسیر بسته ندارد و در نتیجه داریم:

$$\oint_C \frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}dz = 0 \to \int_{C_\varepsilon}\frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}dz + \int_{C_1}\frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}dz + \int_{C_R}\frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}dz + \int_{C_2}\frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}dz = \int_{C_\varepsilon}\frac{e^{j(\varepsilon e^{j\theta})}}{\sqrt{\varepsilon e^{j\theta}}}\varepsilon j d\theta e^{j\theta} + \int_0^\infty \frac{e^{jx}}{\sqrt{x}}dx + \int_{C_R}\frac{e^{j(\mathrm{R}e^{j\theta})}}{\sqrt{\mathrm{R}e^{j\theta}}}\varepsilon j d\theta e^{j\theta} +$$

$$\int_\infty^0 \frac{e^{j(jy)}}{\sqrt{jy}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\varepsilon e^{j\theta}}\,e^{j\varepsilon\cos\theta}e^{-\varepsilon\sin\theta}\,jd\theta + \int_0^\infty \frac{e^{jx}}{\sqrt{x}}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\mathrm{R}e^{j\theta}}\,e^{jR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}\,jd\theta + \int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{jy}}\,jdy$$

حال وقتی $\varepsilon \to 0$ در اینصورت انتگرال اول به خاطر فاکتور $\sqrt{\varepsilon e^{j\theta}}$ به سمت صفر میل میکند. از طرفی وقتی $R \to \infty$ در اینصورت انتگرال سوم به خاطر فاکتور $e^{-R\sin\theta}$ به سمت صفر میل میکند. در نتیجه داریم:

$$\oint_C \frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}dz = \int_0^\infty \frac{e^{jx}}{\sqrt{x}}dx + \int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{jy}}jdy = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx + j\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx + e^{\frac{j\pi}{4}}\int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy =$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx + j\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx + (\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}})\int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = 0 \to \quad (\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy) +$$

$$j(\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy) = 0$$

حاصل انتگرال بالا یک عدد مختلط است که چون صفر است باید قسمت حقیقی و موهومی آن صفر باشد با صفر قرار دادن قسمت حقیقی داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = 0 \to \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\infty^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy$$

حال حاصل $\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy$ را حساب میکنیم. با تغییر متغییر $y = u^2$ داریم: $dy = 2udy$ در نتیجه داریم:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

میدانیم $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ در نتیجه: $\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

26–به سوالات زیر پاسخ دهید

الف) تمام بسطهای تابع $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ حول $z=-1$ را بدست آورید   ب) شعاع همگرایی دنباله $\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n + \sum_{n=0}^\infty [\frac{2n+6}{2n+3}]^{n^2} z^n$ را بدست آورید

حل 26–الف)

ابتدا تابع را تجزیه میکنیم:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z+1)-2}+\frac{1}{(z+1)+1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{1}{1+(z+1)}$$

$$\left|\frac{z+1}{2}\right|<1\rightarrow|z+1|<2\quad and\quad |z+1|<1\rightarrow|z+1|<1\rightarrow f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n\rightarrow$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[-(2)^{-n-1}+(-1)^n](z+1)^n\qquad |z+1|<1$$

$$\left|\frac{z+1}{2}\right|<1\rightarrow|z+1|<2\quad and\quad |z+1|>1\rightarrow 1<|z+1|<2\rightarrow f(z)=\frac{1}{(z+1)-2}+\frac{1}{(z+1)+1}\rightarrow$$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{1}{z+1}\frac{1}{1+\frac{1}{z+1}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{2})^n+\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z+1})^n\rightarrow$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(2)^{-n-1}(z+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^{-n-1}\qquad 1<|z+1|<2$$

$$\left|\frac{z+1}{2}\right|>1\rightarrow|z+1|>2\rightarrow|z+1|>1\rightarrow f(z)=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}+\frac{1}{z+1}\frac{1}{1+\frac{1}{z+1}}\rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z+1})^n+\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z+1})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(2)^n+(-1)^n](z+1)^{-n-1}\qquad |z+1|>2$$

حل26-ب)

برای تک تک دنباله ها شعاع همگرایی را بدست می آوریم. برای دنباله اول داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n\rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|<1\rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+2)!}{[(n+1!)]^2}z^{n+1}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n}\right|<1\rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{(n!)^2}{(n+1!)]^2}|z|<1\rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}{(2n)!(n!)^2(n+1)^2}|z|<1\rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}|z|<1<1\rightarrow 4|z|<1<1\rightarrow|z|<\frac{1}{4}$$

برای دنباله دوم داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{2n+6}{2n+3}]^{n^2}z^n\rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}<1\rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|[\frac{2n+6}{2n+3}]^{n^2}z^n\right|}<1\rightarrow\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+6}{2n+3})^n|z|<1\rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+3+3}{2n+3})^n|z|<1=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n+3})^n|z|<1$$

حال حد $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n+3})^n$ را بدست می آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n+3})^n=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(1+\frac{3}{2n+3})^n}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+\frac{3}{2n+3})}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(1+\frac{3}{2n+3})}{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\frac{-\frac{6}{(2n+3)^2}}{1+\frac{3}{2n+3}}}{-\frac{1}{n^2}}}=e^{1.5}$$

البته میتوانیم بنویسیم: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n+3})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1.5}{n+1.5})^n$ و میدانیم $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n+b})^n=e^a$ که در این مسئله $a=1.5$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n+3})^n|z|<1=e^{1.5}|z|<1\leftarrow|z|<e^{-1.5}=0.22$$

برای دنباله اول شعاع همگرایی $\frac{1}{4}<|z|$ و برای دوم $0.22<|z|$ که اشتراک آنها $|z|<0.22$ میباشد.

27-کلیه بسط های تیلور یا لوران توابع زیر را به مراکز نشان داده شده بدست آورید و ناحیه و یا نواحی همگرایی را مشخص کنید. همچنین بسط لوران $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ را در ناحیه $0.25<|z-1|<0.5$ را بدست آورید.

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}\quad (z=1)\qquad f(z)=\frac{1}{z(z+2)}\quad (z=-1)\qquad f(z)=\frac{z}{z^2-4}\quad (z=2)$$

<u>حل **27**-الف</u>

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-1-1}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)(1-\frac{1}{z-1})}=$$

$$\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-1}(\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}})=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-1}\sum_{n=0}(\frac{1}{1-z})^n=\frac{-1}{z-1}+2\sum_{n=0}(1-z)^{-n-1}\qquad \left|\frac{1}{z-1}\right|<1\rightarrow |z-1|>1$$

$$f(z)=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-1-1}=\frac{-1}{z-1}-\frac{2}{1-(z-1)}=\frac{-1}{z-1}-2\sum_{n=0}(z-1)^n\qquad |z-1|<1$$

در بالا هر دو بسط، بسط لوران است زیرا تابع در $z=1$ تحلیلی نیست و بسط تیلور ندارد

<u>حل **27**-ب)</u>

$$f(z)=\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{z+1-1}-\frac{1}{z+1+1})=\frac{1}{2}(-\frac{1}{1-(z+1)}-\frac{1}{1+(z+1)})=$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}(z+1)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}(-1)^n(z+1)^n\qquad |z+1|<1$$ بسط تیلور

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1-1}-\frac{1}{z+1+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}\frac{1}{1+\frac{1}{z+1}}\rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}(-1)^n(z+1)^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}(z+1)^{-n-1}(1-(-1)^n)\qquad \left|\frac{1}{z+1}\right|<1\rightarrow|z+1|>1$$

حل 27–پ)

بسط لوران

$$f(z)=\frac{z}{z^2-4}=0.5\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}\right)=0.5\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-2+4}\right)=0.5\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}\right)=$$

$$0.5\left[\frac{1}{z-2}+\frac{1}{4}\sum(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n\right]=\frac{0.5}{z-2}+\sum_{n=0}2^{-(2n+3)}(-1)^n(z-2)^n\qquad \left|\frac{z-2}{4}\right|<1\rightarrow|z-2|<4$$

$$f(z)=0.5\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-2+4}\right)=0.5\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{4}{z-2}}\right)=0.5\left[\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}(-1)^n\left(\frac{4}{z-2}\right)^n\right]$$

$$f(z)=\frac{0.5}{z-2}+\sum_{n=0}(-1)^n2^{2n}(z-2)^{-n-1}\qquad \left|\frac{4}{z-2}\right|<1\rightarrow|z-2|>4$$

در بالا هر دو بسط، بسط لوران است زیرا تابع در $z=2$ تحلیلی نیست و بسط تیلور ندارد. حال تابع $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ را در ناحیه $0.25<|z-1|<0.5$ را بسط میدهیم:

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}-\frac{1}{z-1}\right)\rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(2)^{-n-2}(-1)^n(z-1)^n-\frac{1}{2}(z-1)^{-1}\qquad \left|\frac{z-1}{2}\right|<1\rightarrow|z-1|<2$$

دقت شود که چون در بسط جمله $(z-1)^{-1}$ وجود دارد پس بسط لوران است و چون ناحیه $0.25<|z-1|<0.5$ در ناحیه $|z-1|<2$ قرار میگیرد پس بسط صحیح است.

28– بسط تیلور $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ را بدست آورده و از روی آن بسط $\arctan z$ را بدست آورید.

<u>حل28</u>: با شرط $|z^2|<1$ داریم:

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+.......=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}$$

$$\arctan z=\int\frac{dz}{1+z^2}=\int dz\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$$

29- کلیه بسطهای $f(z)=-\dfrac{3z^2-12z+11}{z^3-6z^2+11z-6}$ را حول $z=j$ نوشته و شعاع همگرایی هر بسط را تعیین کنید.مشتق دهم این تابع در $z=0.5$ چقدر است؟

<u>**حل29**</u>: تابع را به صورت زیر تجزیه میکنیم:

$$f(z)=-\frac{3z^2-12z+11}{z^3-6z^2+11z-6}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2-z}+\frac{1}{3-z}=f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)\qquad f_1(z)=\frac{1}{1-z},\quad f_2(z)=\frac{1}{2-z},\quad f_3(z)=\frac{1}{3-z}$$

$$f_1(z)=\frac{1}{1-j-(z-j)}=\frac{1}{1-j}\frac{1}{1-\frac{z-j}{1-j}}=\frac{1}{1-j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-j}{1-j})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-j)^{-(n+1)}(z-j)^n\qquad \left|\frac{z-j}{1-j}\right|<1\rightarrow|z-j|<\sqrt{2}$$

$$.f_1(z)=-\frac{1}{z-j}\frac{1}{1-\frac{1-j}{z-j}}=-\frac{1}{z-j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-j}{z-j})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(1-j)^n(z-j)^{-(n+1)}\qquad \left|\frac{1-j}{z-j}\right|<1\rightarrow|z-j|>\sqrt{2}\rightarrow$$

$$f_1(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(1-j)^{-(n+1)}(z-j)^n & |z-j|<\sqrt{2}\\ -\sum_{n=0}^{\infty}(1-j)^n(z-j)^{-(n+1)} & |z-j|>\sqrt{2}\end{cases}$$

$$f_2(z)=\frac{1}{2-j-(z-j)}=\frac{1}{2-j}\frac{1}{1-\frac{z-j}{2-j}}=\frac{1}{2-j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-j}{2-j})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2-j)^{-(n+1)}(z-j)^n\qquad \left|\frac{z-j}{2-j}\right|<1\rightarrow|z-j|<\sqrt{5}$$

$$f_2(z)=-\frac{1}{z-j}\frac{1}{1-\frac{2-j}{z-j}}=-\frac{1}{z-j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2-j}{z-j})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(2-j)^n(z-j)^{-(n+1)}\qquad \left|\frac{2-j}{z-j}\right|<1\rightarrow|z-j|>\sqrt{5}\rightarrow$$

$$f_2(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(2-j)^{-(n+1)}(z-j)^n & |z-j|<\sqrt{5}\\ -\sum_{n=0}^{\infty}(2-j)^n(z-j)^{-(n+1)} & |z-j|>\sqrt{5}\end{cases}$$

$$f_3(z)=\frac{1}{3-j-(z-j)}=\frac{1}{3-j}\frac{1}{1-\frac{z-j}{3-j}}=\frac{1}{3-j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-j}{3-j})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(3-j)^{-(n+1)}(z-j)^n\qquad \left|\frac{z-j}{3-j}\right|<1\rightarrow|z-j|<\sqrt{10}$$

$$.f_2(z)=-\frac{1}{z-j}\frac{1}{1-\frac{3-j}{z-j}}=-\frac{1}{z-j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3-j}{z-j})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(3-j)^n(z-j)^{-(n+1)}\qquad \left|\frac{3-j}{z-j}\right|<1\rightarrow|z-j|>\sqrt{10}\rightarrow$$

$$f_3(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(3-j)^{-(n+1)}(z-j)^n & |z-j|<\sqrt{10}\\ -\sum_{n=0}^{\infty}(3-j)^n(z-j)^{-(n+1)} & |z-j|>\sqrt{10}\end{cases}$$

حال از ترکیب توابع بالا داریم:

$$f(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}[(1-j)^{-(n+1)}+(2-j)^{-(n+1)}+(3-j)^{-(n+1)}](z-j)^n & |z-j|<\sqrt{2}\\ -\sum_{n=0}^{\infty}(1-j)^n(z-j)^{-(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}[(2-j)^{-(n+1)}+(3-j)^{-(n+1)})](z-j)^n & \sqrt{2}<|z-j|<\sqrt{5}\\ -\sum_{n=0}^{\infty}[(1-j)^n+(2-j)^n](z-j)^{-(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(3-j)^{-(n+1)}(z-j)^n & \sqrt{5}<|z-j|<\sqrt{10}\\ -\sum_{n=0}^{\infty}[(1-j)^n+(2-j)^n+(3-j)^n](z-j)^{-(n+1)} & |z-j|>\sqrt{10}\end{cases}$$

برای پیدا کردن مشتق دهم تابع فوق در $z=0.5$ کافیست تابع را حول $z=0.5$ بسط تیلور دهیم یعنی:

$$f(z)=-\frac{3z^2-12z+11}{z^3-6z^2+11z-6}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2-z}+\frac{1}{3-z}=\frac{1}{0.5+(0.5-z)}+\frac{1}{1.5+(0.5-z)}+\frac{1}{2.5+(0.5-z)}=$$

$$\frac{1}{0.5}\frac{1}{1+\frac{0.5-z}{0.5}}+\frac{1}{1.5}\frac{1}{1+\frac{0.5-z}{1.5}}+\frac{1}{2.5}\frac{1}{1+\frac{0.5-z}{2.5}}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{0.5-z}{0.5})^n+\frac{1}{1.5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{0.5-z}{1.5})^n$$

$$+\frac{1}{2.5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{0.5-z}{2.5})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[2^{n+1}+(1.5)^{-(n+1)}+(2.5)^{(-n+1)}](-1)^n(z-0.5)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-0.5)^n$$

$$f^{(n)}(z=0.5)=n!C_n\rightarrow f^{(10)}(z=0.5)=10!C_{10}=10![2^{11}+(1.5)^{-11}+(2.5)^{-11}](-1)^{10}\approx 10!\times 2^{11}$$

30- کلیه بسطهای تابع $f(z)=\frac{2z}{z^2-4}$ را حول $z=-1$ بدست آورید

<u>حل30:</u> تابع را به دو تابع تجزیه میکنیم:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+1-3}+\frac{1}{z+1+1}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{z+1}{3})}+\frac{1}{1+(z+1)}=$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-(3)^{-n-1}](z+1)^n \qquad \left|\frac{z+1}{3}\right|<1 \quad |z+1|<1\rightarrow|z+1|<1$$

در ناحیه $1<|z+1|<3$ میتوانیم $\left|\frac{1}{z+1}\right|<1$ و $\left|\frac{z+1}{3}\right|<1$ بنویسیم:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+1-3}+\frac{1}{z+1+1}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{z+1}{3})}+\frac{1}{z+1}\frac{1}{1+(\frac{1}{z+1})}=$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{3})^n+\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z+1})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(3)^{-n-1}(z+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^{-n-1}$$

در ناحیه $|z+1|>3$ داریم $\left|\frac{1}{z+1}\right|<1$ و $\left|\frac{3}{z+1}\right|<1$ در نتیجه داریم:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+1-3}+\frac{1}{z+1+1}=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-(\frac{3}{z+1})}+\frac{1}{z+1}\frac{1}{1+(\frac{1}{z+1})}=$$

$$\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{z+1})^n+\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z+1})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(3)^n+(-1)^n](z+1)^{-n-1}$$

در نتیجه میتوان نوشت:

$$f(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-(3)^{-n-1}](z+1)^n & |z+1|<1\\ -\sum_{n=0}^{\infty}(3)^{-n-1}(z+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^{-n-1} & 1<|z+1|<3\\ \sum_{n=0}^{\infty}[(3)^n+(-1)^n](z+1)^{-n-1} & |z+1|>3\end{cases}$$

31- با استفاده از بسط سریها به سوالات زیر پاسخ دهید

الف) ثابت کنید $|z|<4$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}=\frac{1}{4z-z^2}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(2)^{2-n}=16$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{-k}}{2k+1}=\ln 3$

ب)کلیه بسطهای $f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z-2}$ حول $z=0$ و حول $z=1$ $\qquad$ پ) شعاع همگرایی دنباله $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{n^3(2n!)}(z-2)^n$

حل 31-الف):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}=\frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{4})^n=\frac{1}{4z}\times\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=\frac{1}{4z-z^2}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\rightarrow\frac{d^2}{dz^2}(\frac{1}{1-z})=\frac{d^2}{dz^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\rightarrow\frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}\qquad |z|<1$$

$$z=0.5\qquad \frac{2}{(1-0.5)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(0.5)^{n-2}\rightarrow 16=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(2)^{-n+2}=16$$

$$\ln(1-z)=-\int\frac{dz}{1-z}=-\int\sum_{n=0}^{\infty}z^n dz=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1}\qquad z=0.5\rightarrow\ln(1-0.5)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(0.5)^{n+1}\rightarrow$$

$$\ln 0.5=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(2)^{-n-1}\qquad z=-0.5\rightarrow\qquad \ln(1+0.5)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-0.5)^{n+1}\rightarrow$$

$$\ln(1+0.5)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}(2)^{-n-1}\rightarrow\begin{cases}\ln 1.5=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}(2)^{-n-1}\\ \ln 0.5=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(2)^{-n-1}\end{cases}\rightarrow$$

$$\ln 1.5-\ln 0.5=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}(2)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(2)^{-n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}(2)^{-n-1}\rightarrow\ln 3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}(2)^{-n-1}$$

در عبارت بالا nفقط باید زوج باشد و به ازای nهای فرد عبارت صفر میشود یعنی $n=2k$ بعبارت دیگر:

$$\ln 3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}(2)^{-n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^{2k+1}}{2k+1}(2)^{-2k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+1}(2)^{-2k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^{-k}}{2k+1}$$

حل 31–ب): ابتدا تابع را حول $z=0$ بسط میدهیم.

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z-2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\qquad |z|<1\rightarrow\left|\frac{z}{2}\right|\rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n\rightarrow$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n\rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-2^{-n-1}]z^n\qquad |z|<1$$

$$1<|z|<2\rightarrow f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\qquad\left|\frac{1}{z}\right|<1\qquad\left|\frac{z}{2}\right|<1\rightarrow f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z})^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$$

$$\rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n\qquad 1<|z|<2\qquad |z|>2\rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|<1\qquad\left|\frac{2}{z}\right|<1\rightarrow$$

$$(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\rightarrow f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z})^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n+2^n](z)^{-n-1}\rightarrow$$

$$f(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-2^{-n-1}]z^n & |z|<1\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n & 1<|z|<2\\ \sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n+2^n](z)^{-n-1} & |z|>2\end{cases}$$

حالا تابع را حول $z=1$ بسط میدهیم

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z-2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1+2}+\frac{1}{z-1-1}=\frac{1}{2+z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$|z-1|<1\rightarrow\left|\frac{z-1}{2}\right|<1\rightarrow f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-1}{2})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 2^{-n-1}-1](z-1)^n$$

$$1<|z-1|<2 \rightarrow \left|\frac{z-1}{2}\right|<1, \quad \left|\frac{1}{z-1}\right|<1 \rightarrow f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-1}{2})^n+$$

$$\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z-1})^n \rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{-n-1} \quad 1<|z-1|<2$$

$$|z-1|>2 \rightarrow \left|\frac{1}{z-1}\right|<1 \quad \left|\frac{2}{z-1}\right|<1 \rightarrow f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=$$

$$\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{z-1})^n+\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z-1})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(-2)^n+1](z-1)^{-n-1} \rightarrow$$

$$f(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 2^{-n-1}-1](z-1)^n & |z-1|<1\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{-n-1} & 1<|z-1|<2\\ \sum_{n=0}^{\infty}[(-2)^n+1](z-1)^{-n-1} & |z-1|>2\end{cases}$$

.

حل 31-پ):

برای محاسبه شعاع همگرایی داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{n^3(2n!)}(z-2)^n \rightarrow lim_{n\rightarrow\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}[(n+1!)]^2}{(n+1)^3[2(n+1)!]}(z-2)^{n+1}}{\frac{3^n(n!)^2}{n^3(2n!)}(z-2)^n}\right|<1\rightarrow$$

$$lim_{n\rightarrow\infty}\left|3\frac{n^3[(n!)^2(n+1)^2\times(2n!)}{(n+1)^3(2n!)(2n+1)(2n+2)(n!)^2}(z-2)\right|=lim_{n\rightarrow\infty}\left|3\frac{(n^2+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}(z-2)\right|<1\rightarrow$$

$$\frac{3}{4}|(z-2)|<1\rightarrow|z-2|<\frac{4}{3}$$

32-کلیه بسط های توابع زیر را حول نقاط داده شده بدست آورید:

$$f(z)=\frac{1}{z-z^3} \quad (z=2j) \qquad\qquad f(z)=z^2e^z \quad (z=2)$$

با استفاده از یکی از بسطها حاصل عبارت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}$ را بدست آورید.

حل قسمت اول:

$$f(z)=\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{0.5}{1-z}-\frac{0.5}{1+z}=\frac{1}{z-2j+2j}+\frac{0.5}{1-2j-(z-2j)}-\frac{0.5}{1+2j+(z-2j)}=$$
$$\frac{1}{2j}\frac{1}{1+\dfrac{z-2j}{2j}}+\frac{0.5}{1-2j}\frac{1}{1-\dfrac{z-2j}{1-2j}}-\frac{0.5}{1+2j}\frac{1}{1+\dfrac{z-2j}{1+2j}}$$

اگر $\left|\frac{z-2j}{2j}\right|<1$ نتیجه میگیریم $|z-2j|<2$ از طرفی اگر $\left|\frac{z-2j}{1-2j}\right|<1$ و $\left|\frac{z-2j}{1+2j}\right|<1$ باشد نتیجه میگیریم $|z-2j|<\sqrt{5}$ حال

اگر $|z-2j|<2$ حتما $|z-2j|<\sqrt{5}$ بنابراین اگر $\left|\frac{z-2j}{2j}\right|<1$ حتما $\left|\frac{z-2j}{1-2j}\right|<1$ و $\left|\frac{z-2j}{1+2j}\right|<1$ در نتیجه هر سه جمله بالا

بسط تیلور دارد بنابراین:

$$f(z)=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-2j}{2j})^n+\frac{0.5}{1-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-2j}{1-2j})^n-\frac{0.5}{1+2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-2j}{1+2j})^n=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}[(2j)^{-n-1}(-1)^n+0.5(1-2j)^{-n-1}-0.5(-1)^n(1+2j)^{-n-1}](z-2j)^n \qquad |z-2j|<2$$

اگر $2<|z-2j|<\sqrt{5}$ در اینصورت داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{0.5}{1-z}-\frac{0.5}{1+z}=\frac{1}{z-2j+2j}+\frac{0.5}{1-2j-(z-2j)}-\frac{0.5}{1+2j+(z-2j)}=$$

$$\frac{1}{z-2j}\frac{1}{1+\dfrac{2j}{z-2j}}+\frac{0.5}{1-2j}\frac{1}{1-\dfrac{z-2j}{1-2j}}-\frac{0.5}{1+2j}\frac{1}{1+\dfrac{z-2j}{1+2j}}=\frac{1}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2j}{z-2j})^n+\frac{0.5}{1-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-2j}{1-2j})^n-$$
$$\frac{0.5}{1+2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-2j}{1+2j})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2j)^n(z-2j)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[0.5(1-2j)^{-n-1}-0.5(-1)^n(1+2j)^{-n-1}](z-2j)^n$$

اگر $|z-2j|>\sqrt{5}$ داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z-2j}\frac{1}{1+\dfrac{2j}{z-2j}}-\frac{0.5}{z-2j}\frac{1}{1-\dfrac{1-2j}{z-2j}}-\frac{0.5}{z-2j}\frac{1}{1+\dfrac{1+2j}{z-2j}}=$$

$$\frac{1}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2j}{z-2j})^n+-\frac{0.5}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-2j}{z-2j})^n-\frac{0.5}{z-2j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1+2j}{z-2j})^n=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}[(-2j)^n-0.5(1-2j)^n+(-1-2j)^n](z-2j)^{-n-1}$$

<u>حل قسمت دوم:</u>

$$f(z)=z^2e^z=(z-2+2)^2e^{(z-2+2)}=[(4+4(z-2)+(z-2)^2]e^2[1+(z-2)+\frac{1}{2!}(z-2)^2+.....\frac{1}{n!}(z-2)^n+...]$$

$$f(z)=z^2e^z=e^2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{n!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!})(z-2)^n=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}(z-2)^n$$

حال اگر در عبارت بالا قرار دهیم $z=3$ خواهیم داشت:

$$z^2e^z=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}(z-2)^n\to(3)^2e^3=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}(3-2)^n\to 9e^3=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}\to$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n!}=9e$$

33–**شعاع یا ناحیه همگرایی سری های زیر را بدست آورید:(راهنمایی** $lim_{n\to\infty}(an^2+b)^{\frac{1}{n}}=1$

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n^2+1}z^n\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}[Im(\frac{1}{z})]^n\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}(3+4j)^n z^{-n}+(\frac{z}{j})^n$$

حل 33–الف): شعاع همگرایی با محاسبات زیر بدست می اید:

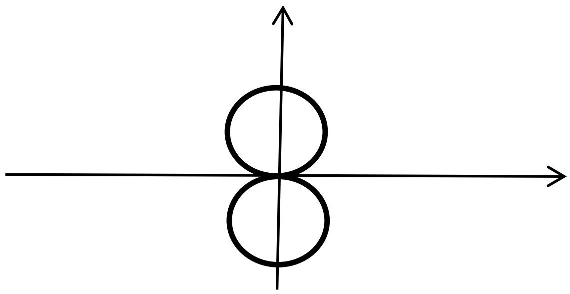
$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n^2+1}z^n}\right|<1\to\lim_{n\to\infty}\frac{[3+(-1)^n]}{(n^2+1)^{\frac{1}{n}}}|z|<1\to\begin{cases}2|z|<1\to|z|<\frac{1}{2} & n=odd\\ 4|z|<1\to|z|<\frac{1}{4} & n=even\end{cases}$$

که اشتراک دو حالت بالا $|z|<\frac{1}{4}$ میباشد یعنی شعاع همگرایی $\frac{1}{4}$ میباشد.

حل 33–ب): با استفاده از تعریف شعاع همگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\mathrm{Im}(\frac{1}{z})\right|^n}<1\to\left|\mathrm{Im}(\frac{1}{z})\right|<1\to\left|\mathrm{Im}(\frac{1}{x+jy})\right|=\left|\mathrm{Im}(\frac{x}{x^2+y^2}-j\frac{y}{x^2+y^2}\right|<1\to$$
$$\frac{|y|}{x^2+y^2}<1\to x^2+y^2>|y|\to x^2+y^2-|y|>0\to x^2+(|y|-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>0\to x^2+(|y|-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{4}\to$$
$$\begin{cases}x^2+(y-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{4} & y>0\\ x^2+(y+\frac{1}{2})^2>\frac{1}{4} & y<0\end{cases}$$

یعنی برای $y>0$ ناحیه همگرایی خارج دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و برای $y<0$ ناحیه همگرایی خارج دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $(0,-\frac{1}{2})$ میباشد یعنی در خارج دو دایره نشان داده شده در شکل زیر:



حل 33–ج): مجموعه را میتوان به صورت دو مجموعه جدا نشان داد و برای هر کدام ناحیه یا شعاع همگرایی را بدست آورده اشتراک گرفت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3+4j)^n z^{-n}+(\frac{z}{j})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(3+4j)^n z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z}{j})^n$$

برای سری اول داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{(3+4j)^n z^{-n}}\right|<1\to\left|\sqrt{3^2+4^2}z^{-1}\right|<1\to 5\left|z^{-1}\right|<1\to\left|z\right|>5$$

برای سری دوم داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{(\frac{z}{j})^n}\right|<1\to\left|z\right|<1$$

بنابراین برای سری اول شرط همگرایی $5<|z|$ و برای سری دوم شرط همگرایی $|z|<1$ که این دو شرط هیچ اشتراکی با هم ندارند بنابراین ناحیه یا شعاع همگرایی برای این دنباله وجود ندارد.

34–اولا کلیه بسطهای تابع $f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z-4}$ را حول $z=0$ بدست آورده و از روی یکی از بسط ها حاصل دنباله زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{4^{n+1}}$$

ثانیا بسط لوران تابع بالا را حول $z=-1$ بدست آورده و شعاع همگرایی آنرا تعیین کنید.

حل 34): تابع را میتوان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z-4}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+4}$$

حال برای $|z|<1$ که حتما $|z|<4$ و یا $\left|\frac{z}{4}\right|<1$ هم میباشد داریم:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z-4}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+4}=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z}{4}}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{4})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n4^{-n-1}-1]z^n \quad |z|<1$$

برای حالت $1<|z|<4$ که $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ و $\left|\frac{z}{4}\right|<1$ است داریم:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z-4}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+4}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z}{4}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{4})^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n4^{-n-1}]z^n \qquad 1<|z|<4$$

برای حالت $|z|>4$ که $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ و $\left|\frac{4}{z}\right|<1$ است داریم:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z-4}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+4}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{4}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{4}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-4)^n]z^{-n-1}$$

بنابراین سه بسط تابع به صورت زیر میباشند:

$$f(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n4^{-n-1}-1]z^n & |z|<1\\ \sum_{n=0}^{\infty}(z)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n4^{-n-1}]z^n & 1<|z|<4\\ \sum_{n=0}^{\infty}[1+(-4)^n]z^{-n-1} & |z|>4\end{cases}$$

حال برای حالت $1<|z|<4$ که بسط تابع به صورت زیر است:

$$1<|z|<4\rightarrow f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z-4}=\sum_{n=0}^{\infty}(z)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n4^{-n-1}]z^n$$

اگر قرار دهیم $z=3$ که در بازه $1<|z|<4$ میباشد در اینصورت داریم:

$$\frac{2z+3}{z^2+3z-4}=\sum_{n=0}^{\infty}(z)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 4^{-n-1}]z^n \rightarrow \frac{2(3)+3}{3^2+3(3)-4}=\sum_{n=0}^{\infty}(3)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 4^{-n-1}](3)^n \rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 4^{-n-1}](3)^n=\frac{9}{14}\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{4^{n+1}}=\frac{9}{14}$$

برای بسط لوران تابع بالا حول $z=-1$ تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z-4}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+4}=\frac{1}{z+1-2}+\frac{1}{z+1+3}$$

حال برای $|z+1|>3$ داریم $\left|\frac{3}{z+1}\right|<1$ و $\left|\frac{2}{z+1}\right|<1$ در نتیجه بسط تابع به صورت زیر است:

$$f(z)=\frac{1}{z+1-2}+\frac{1}{z+1+3}=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}+\frac{1}{z+1}\frac{1}{1+\frac{3}{z+1}}=\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z+1})^n+\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{3}{z+1})^n$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[[2^n+(-3)^n](z+1)^{-n-1} \qquad |z+1|>3$$

پس ناحیه همگرایی $|z+1|>3$ میباشد. البته برای $2<|z+1|<3$هم بسط لوران به صورت زیر داریم:

$$f(z)=\frac{1}{z+1-2}+\frac{1}{z+1+3}=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z+1}{3}}=\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z+1})^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z+1}{3})^n$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z+1)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(3)^{-n-1}(-1)^n(z+1)^n \qquad 3>|z+1|>2$$

که ناحیه همگرایی $2<|z+1|<3$ میباشد البته یکی از دو بسط بالا کافیست.

35–حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(1-j)^n$ را بدست آورید.

حل **35**) میدانیم $(|q|<1)$ $\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$ حال از طرفین مشتق میگیریم

$$\frac{d}{dq}\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{d}{dq}(\frac{1}{1-q})\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}nq^n=\frac{q}{(1-q)^2}$$

حال $q=\frac{1-j}{2}$ قرار میدهیم (دقت کنید که $|q|=\left|\frac{1-j}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$) بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \to \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1-j}{2})^n = \frac{\frac{1-j}{2}}{(1-\frac{1-j}{2})^2} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(1-j)^n = \frac{\frac{1-j}{2}}{(\frac{1+j}{2})^2} = \frac{2(1-j)}{2j} = -1-j$$

36–ضریب $(z-1)^2$ در بسط $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$ در ناحیه $|z-1| < 3$ را بدست آورید.

حل **36**) میتوانیم بنویسیم:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{z}{z-1}\frac{1}{z+2} = \frac{z-1+1}{z-1}.\frac{1}{3+z-1} = (1+\frac{1}{z-1})\frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$$

حال با فرض $|z-1| < 3 \to \left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$ میتوان تابع بالا را به صورت تیلور بسط داده یعنی:

$$f(z) = (1+\frac{1}{z-1})\frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{z-1})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-1}{3})^n = \frac{1}{3}[\sum_{0}^{\infty}3^{-n}(-1)^n(z-1)^n + \sum_{0}^{\infty}3^{-n}(-1)^n(z-1)^{n-1}]$$

ضریب $(z-1)^2$ به ازای $n=2$ در سری اول و به ازای $n=3$ در سری دوم بدست می آید یعنی

$$C_2 = \frac{1}{3}[3^{-2}(-1)^2 + 3^{-3}(-1)^3] = \frac{1}{3}[\frac{1}{9}-\frac{1}{27}] = \frac{2}{81}$$

37–ضریب $(z+2)^{-2}$ در بسط $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ در ناحیه $\frac{1}{2} < |z+2| < 1$ را بدست آورید.

حل میتوانیم بنویسیم:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(z+2)^3}\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+2)^3}\frac{1}{z+2-2} = \frac{1}{(z+2)^3}\times -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}}$$

حال با فرض $\left|\frac{z+2}{2}\right| < 1$ یعنی $|z+2| < 2$ که در ناحیه $\frac{1}{2} < |z+2| < 1$ قرار دارد میتوان تابع $\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}}$ را بسط تیلور داد

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^3}\times -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}} = \frac{1}{(z+2)^3}\times -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+2}{2})^n = -\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}(z+2)^{n-3} = \sum_{n=0}^{\infty}C_n(z+2)^{n-3}$$

ضریب $(z+2)^{-2}$ به ازای $n=1$ بدست می آید که داریم:

$$C_1 = -(2^{-1-1}) = -\frac{1}{4}$$

38-بسط لوران $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$ **حول** $z=-1$ **بدست آورید.**

حل **38**) با فرض $z+1=u \to z=u-1$ میتوان نوشت:

$$f(z)=\sin\frac{z}{z+1} \to f(u)=\sin\frac{u-1}{u}=\sin(1-\frac{1}{u})=\sin 1\cos\frac{1}{u}-\cos 1\sin\frac{1}{u}=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\frac{1}{u})^{2n}-$$
$$\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\frac{1}{u})^{2n+1}=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(u)^{-2n}-\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(u)^{-2n-1}$$
$$\to f(z)=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{-2n}-\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{-2n-1}$$

39-در بسط لوران نابع $f(z)=\dfrac{\cos(z+1)}{z-2}$ **در محدوده** $|z+1|>3$ **ضریب** $\dfrac{1}{z+1}$ **را بدست اورید.**

حل **39**) میتوانیم بنویسیم:

$$f(z)=\frac{\cos(z+1)}{z-2}=\cos(z+1)\frac{1}{z+1-3}=\cos(z+1)\times\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{3}{z+1}}$$

حال با فرض: $3<|z+1| \to \left|\dfrac{3}{z+1}\right|<1$ میتوان $\dfrac{1}{1-\frac{3}{z+1}}$ بسط داد

$$f(z)=\cos(z+1)\times\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{3}{z+1}}=\cos(z+1)\times\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{z+1})^n=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z+1)^{2m}}{(2m)!}\times\sum_{n=0}^{\infty}3^n(z+1)^{-n-1}=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2m)!}(-1)^m(z+1)^{2m-n-1}$$

ضریب $\dfrac{1}{z+1}$ به ازای $n=2m$ بدست می آید که عبارتست از:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3^{2m}}{(2m)!}(-1)^m=\cos 3$$

موفق باشید محمود محمدطاهری خرداد ماه 1401