

## دانشه تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰–۱۴۰۱ تمرين ١٠: توابع مختلط مدرس: وكترمهدي طالع ماموله - حل تمرين: ارشاد حسن يور



## برای بوالات نود درخصوص این تمرین مارا با مامه <u>ershad.hasanpour.ut.ac.ir</u> مرکقه منامید.

١) وجود حد توابع زير را بررسي كنيد. در صورت وجود حد آنها را بدست آوريد.

الف 
$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

الف 
$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$
ب) 
$$\lim_{z \to -1} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z + 1}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$$
s) 
$$\lim_{z \to 0} \frac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$$

د) 
$$\lim_{z \to \infty} \frac{z \operatorname{Re}(z)}{|z|}$$

. معادلات کوشی-ریمان را برای تابع f(z) در نقطه (0,0) بررسی کنید و با توجه به آن بگویید که آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر میباشد یا خیر.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{y^3 + ix^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۳) بررسی کنید توابع مختلط زیر در چه نقاطی تحلیلی میباشند.

(الف) 
$$f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - y^2) + i \tan^{-1} \left(\frac{y}{x}\right)$$

(ب) 
$$f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \cot^{-1} \left(\frac{x}{y}\right)$$

معادلات کوشی ریمان را برای تابع f(z) بررسی کنید و سپس ناحیهای که در آن f(z) تحلیلی میباشد را مشخص کرده و f'''(i) را حساب کنید.

$$f(z) = \frac{x^3 + xy^2 + x + i(x^2y + y^3 - y)}{x^2 + y^2}$$

مشتق پذیر z=0 مشتق یدیر که معادلات کوشی-ریمان برای تابع f(z)، در کل صفحهی مختلط برقرار میباشند اما همچنان تابع نمی باشد. (امتیازی)

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4}), & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

۶) قسمت حقیقی یک تابع مختلط به صورت

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2 + 30x + cxy^2 + 29y^2 - 10$$

مے باشد

الف) ضرایب a و b را به گونهای بدست آورید که این تابع همساز شود.

ب) قسمت موهومی آن یعنی v(x,y) را بدست آورید.

ج) اگر 
$$f''(i)$$
 باشد، آنگاه  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$  باشد،  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$  باشد، آورید.

v(r, heta) و v(r, heta) باشد،  $u(r, heta)=r\cos( heta)\ln(r)-r heta\sin( heta)$  اگر  $v(r, heta)=r\cos( heta)\ln(r)-r heta\sin( heta)$  باشد، باشد با فرض اینکه  $v(r, heta)=r\cos( heta)$ بیابید و سیس با توجه به آن f'''(i) را بدست آورید.

موفق باشيد.