پاسخ تمرین 8: اعداد مختلط و نگاشت

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله - حل تمرین: مهسا مسعود-دنا عربی

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com مکاتبه نمایید.

1- تابع $(1+j)(x-y)^2$ در چه نقاطی تحلیلی است؟

حل 1:

تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(z) = (1+j)(x-y)^2 = (x-y)^2 + j(x-y)^2 = u(x,y) + jv(x,y)$$

حال شرط کوشی-ریمان را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2(x-y) = -2(x-y) \rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2(x-y) = -2(x-y)$$

پس فقط به ازای $x = y$ تحلیلی است.

2- مشتق توابع زیر را در نقاطی که مشتق پذیر هستند بدست آورید:

a) $f(z) = |x| + j|y|$ b) $f(z) = \frac{\bar{Z}}{|Z|}$ c) $f(z) = [Re(Z)]^2 - j[Im(Z)]^2$

حل 2:

حل 2-a) برای اولی داریم:

$$u = |x|, v = |y| \rightarrow u_x = v_y \rightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \rightarrow \frac{x^2}{|x|} = \frac{xy}{|y|} \rightarrow xy > 0$$
$$\rightarrow first\ and\ third\ quarters$$
$$v_x = -u_y \rightarrow 0 = 0$$

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

پس در ربع اول و سوم تحلیلی است بنابراین مشتق پذیر است. حال تابع را می‌توان به صورت زیر نوشت که تحلیلی خواهد بود.

$$f(z) = |x| + j|y| = \frac{x|y|}{y} + jy \to f'_{(z)} = u_x + jv_x = \frac{|y|}{y}$$

حل b-2) برای دومی داریم:

$$f(z) = \frac{\bar{Z}}{|Z|} = \frac{x - jy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - j\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\to u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad v = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$u_x = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}}$$

$$v_y = \frac{-\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}}$$

$$u_x = v_y \to \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}} = \frac{-x^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}} \to x^2 + y^2 = 0 \to |Z| = 0$$

پس تنها تابع در مبدا تحلیلی است و مشتق تابع صفر است.

حل c-2) برای سومی داریم:

$$f(z) = [Re(Z)]^2 - j[Im(Z)]^2 = x^2 - jy^2 \to u = x^2, v = -y^2$$

$u_x = 2x, v_y = -2y \rightarrow u_x = v_y \rightarrow 2x = -2y \rightarrow x = -y$

$v_x = 0, u_y = 0 \rightarrow v_x = -u_y$

پس برای $x = -y$ یعنی روی نیمساز ربع دوم و چهارم تحلیلی است.

$f(z) = x^2 - jy^2$
$x = -y \rightarrow f(z) = x^2 - jx^2 \rightarrow f'_{(z)} = u_x + jv_x = 2x - j2x$

3- قسمت موهومی یک تابع تحلیلی مختلط به صورت

$V(x,y) = 4y^3 - 4xy^3 + bx^3y + dx^2y + 12xy - 4y$

می‌باشد. اگر $f(1) = 0$ باشد مطلوبست $f(z)$

حل 3:

ابتدا با توجه به اینکه قسمت موهومی باید در معادله لاپلاس صدق کند ضرایب را بدست می‌آوریم:

$V_{xx} + V_{yy} = 0 \rightarrow (6b - 24)xy + (24 + 2d)y = 0 \rightarrow b = 4, d = -12$

$V(x,y) = 4y^3 - 4xy^3 + 4x^3y - 12x^2y + 12xy - 4y$

حال با استفاده از قضیه کوشی-ریمان قسمت حقیقی تابع را بدست می‌آوریم:

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 12y^2 - 12xy^2 + 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$
$\rightarrow U = 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + g(y)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow 24xy - 12x^2y + g'_{(y)} = -(-4y^3 + 12x^2y - 24xy + 12y)$$

$$\rightarrow g'(y) = 4y^3 - 12y \rightarrow g(y) = y^4 - 6y^2 + k$$

$$U(x,y) = 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + y^4 - 6y^2 + k$$

$$f = U(x,y) + jV(x,y)$$

$$= 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + y^4 - 6y^2 + k$$

$$+j(4y^3 - 4xy^3 + 4x^3y - 12x^2y + 12xy - 4y)$$

$$x \rightarrow z, y \rightarrow 0 \Rightarrow f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + k, f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = (1)^4 - 4(1)^3 + 6(1)^2 - 4(1) + k = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = (z-1)^4$$

4- اگر $u(r,\theta)$ و $v(r,\theta)$ قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی $f(z)$ باشند بطوریکه $u(r,\theta) = r^2\cos 2\theta + 2r\cos\theta + 1$ اگر $f(z)$ و $v(r,\theta)$ مطلوبست $f(0) = 1$

حل 4:

از اصل کوشی-ریمان در دستگاه قطبی استفاده میکنیم که خواهیم داشت:

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r}v_\theta(r,\theta) \rightarrow 2r\cos 2\theta + 2\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$\rightarrow v(r,\theta) = r^2\sin 2\theta + 2r\sin\theta + f(r)$$

$$u_\theta(r,\theta) = -rv_r(r,\theta)$$

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

$$\Rightarrow\ -2r^2\sin 2\theta - 2r\sin\theta = -2r^2\sin 2\theta - 2r\sin\theta - rf'_{(r)} \rightarrow\ f'_{(r)} = 0$$

$$\rightarrow\ f(r) = k\ \rightarrow f(z) = u(r,\theta) + jv(r,\theta)$$

$$f(z) = (r^2\cos 2\theta + 2r\cos\theta + 1) + j(r^2\sin 2\theta + 2r\sin\theta + k)$$

برای بدست آوردن $f(z)$ باید در بالا قرار دهیم: $r = z, \theta = 0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$f(z) = (z^2 +\ 2z + 1) + jk, f(0) = 1 \rightarrow f(z) =\ z^2 + 2z + 1$$

5) تحت نگاشت $w = z^k + \frac{1}{z^k}$ دایره $|z| = d$ به چه شکلی تبدیل میشود؟ (k عدد طبیعی و $d > 1$)

حل 5:

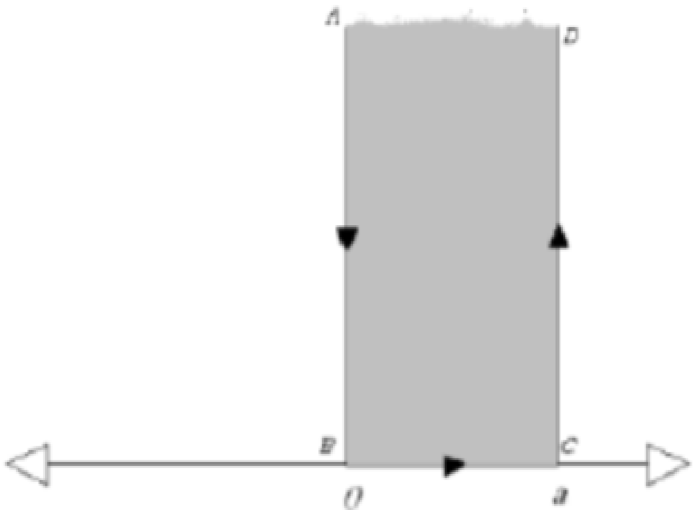
با توجه به نگاشت ژوکوفسکی خواهیم داشت:

$$w1 =\ z^k\ and\ w = w1 + \frac{1}{w1}$$

ابتدا نگاشت $w1$ دایره $|z| = d$ را بر روی دایره $|z| =\ d^k$ و سپس نگاشت w(ژوکوفسکی) دایره‌ای به شعاع $R =\ d^k$ را بر روی بیضی با نیم‌قطرهای $R + \frac{1}{R}$ و $R - \frac{1}{R}$ و کانون‌های 2+ و 2- تصویر مینماید.

6) نگاشت $w=\sin(\frac{\pi z}{2a})$ ناحیه نشان‌داده شده در شکل زیر را به چه ناحیه‌ای تبدیل میکند؟

حل 6:



$$w=\sin\left[\frac{\pi}{2a}(x+iy)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)\cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{j\pi}{2a}y\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cosh\left(\frac{xy}{2a}\right)+jcos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sinh\left(\frac{xy}{2a}\right)=u+jv$$

$$x=0\,,0<y<\infty=>u=0\,,0<v<\infty$$

$$y=0\,,0<x<a\;=>\;0<u<1\,,v=0$$

$$x=a\,,0<y<\infty=>\;0<u<\infty\,,v=0$$

باتوجه به نتایج به ربع اول مدل میشود.

پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: مهسا مسعود- دنا عربی

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com مکاتبه نمایید.

7) تصویر ناحیه $D = \{(x,y)|0.5 < x \le 5; y \ge 1.5\}$ را تحت نگاشت $w = \frac{i}{z-1}$ بیان کنید.

حل 7:

$$w1 = z - 1 \ and \ w2 = \frac{1}{w3} \ and \ w3 = iw2$$

$w1 \rightarrow$ نگاشت انتقال به اندازه یک واحد خلاف جهت محور اعداد حقیقی

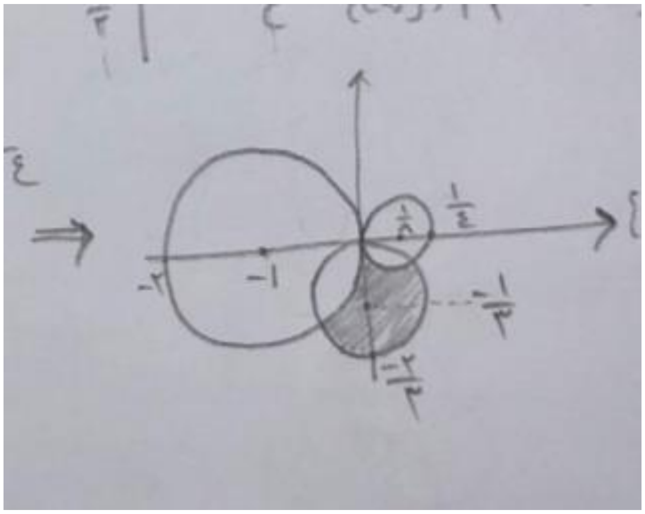
$\rightarrow D = \{(x,y)| -0.5 < x \le 4; y \ge 1.5\}$

$w2 \rightarrow$ نگاشت کسری

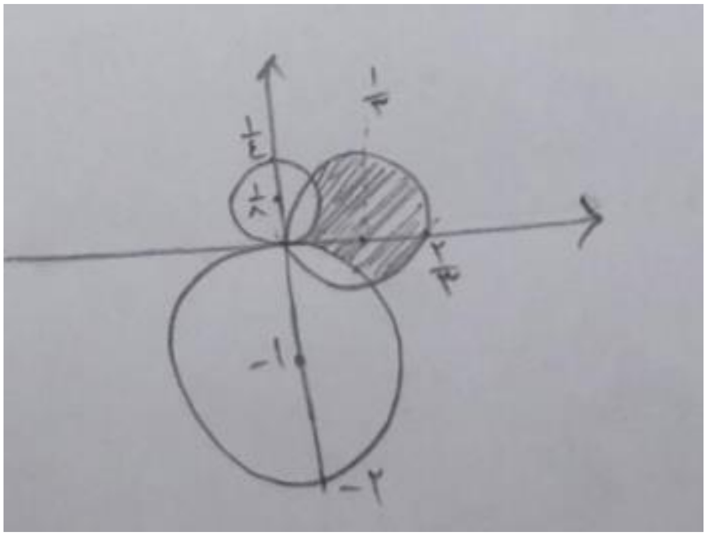
$$-\frac{1}{2} < \frac{u}{u^2+v^2} \le 4$$

$$1.5 \le \frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\rightarrow (u+1)^2 + v^2 > 1 \, , (u - \frac{1}{8})^2 + v^2 \ge \frac{1}{64} \, , \left(v + \frac{1}{3}\right)^2 + u^2 \le \frac{1}{9}$$



$w3 \rightarrow$ دورانی به اندازه 90 درجه

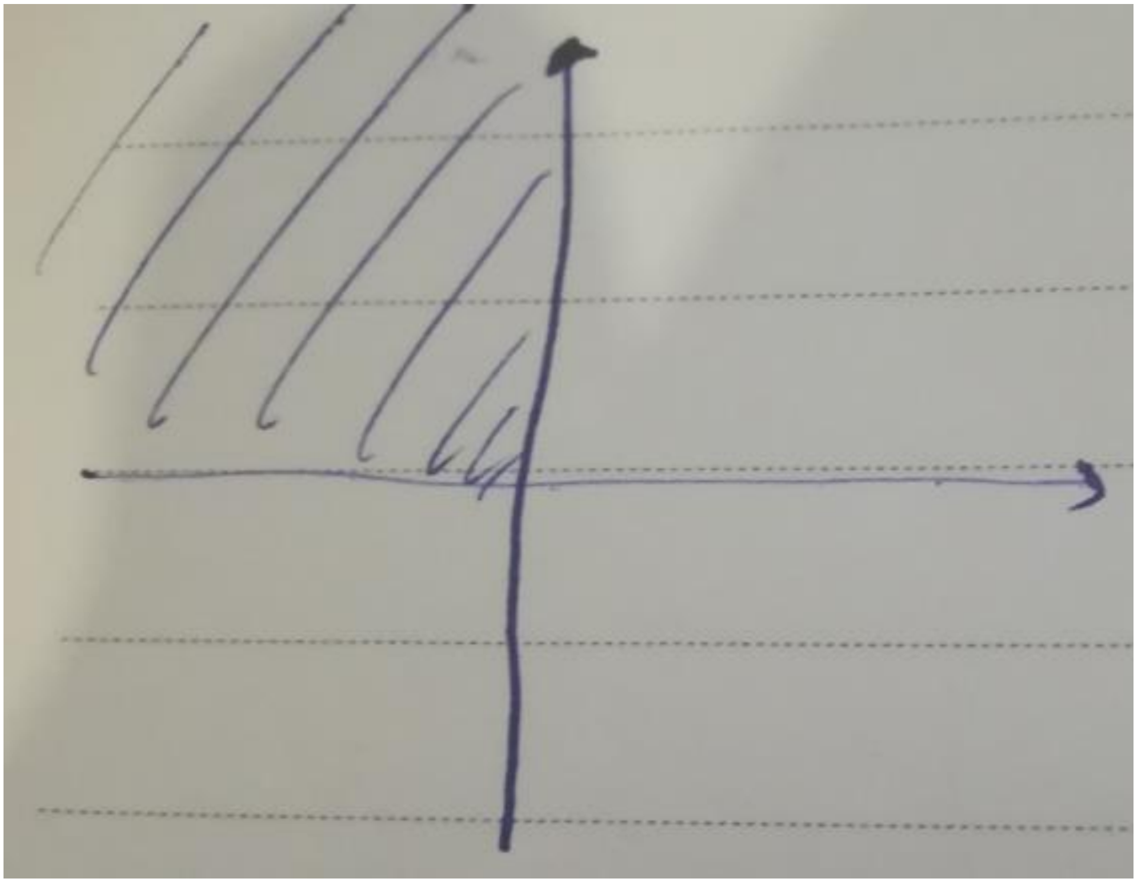


8) نوار $\frac{\pi}{2} < Im\{z\} < \pi$ تحت نگاشت $w = \frac{1+e^z}{1-e^z}$ به چه ناحیه‌ای در صفحه w تبدیل میشود؟

حل 8:

$$w = \frac{1 + ez}{1 - ez} = -1 += \frac{2}{1 - ez}$$

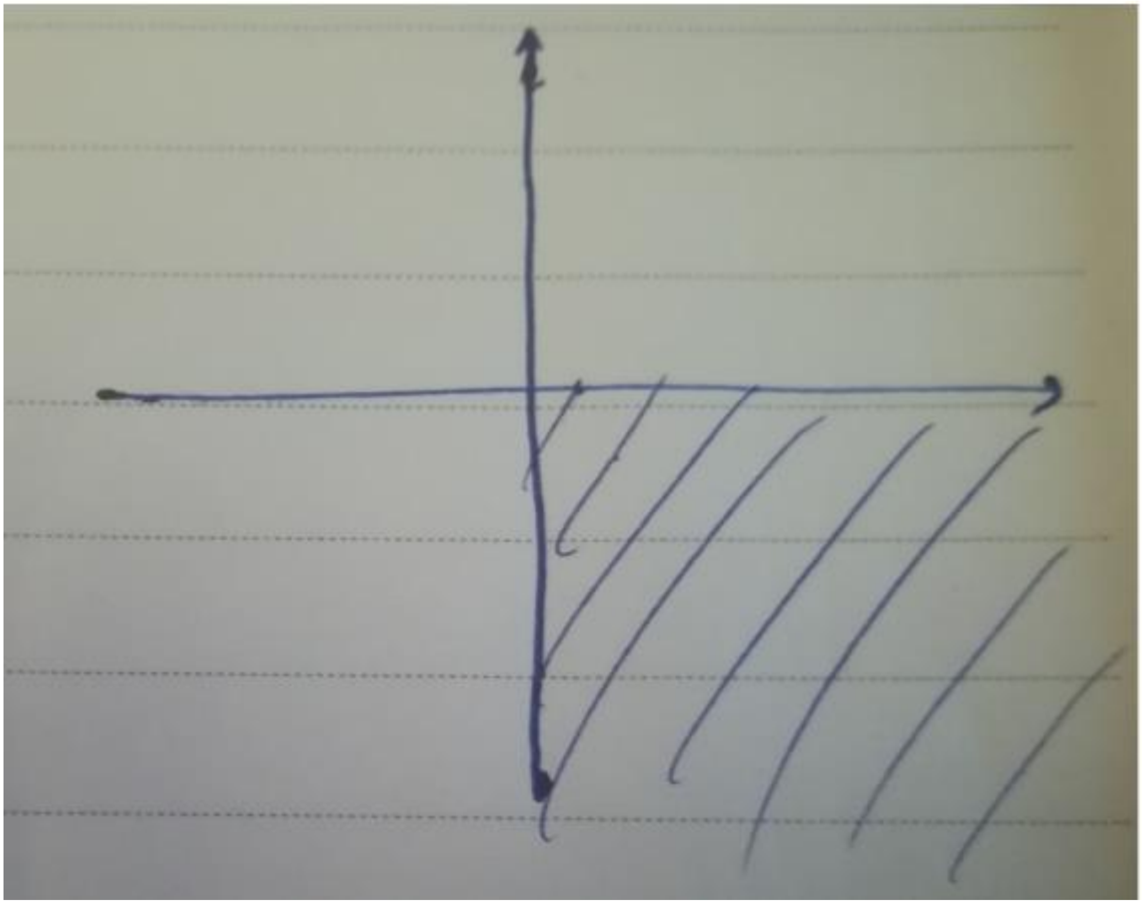
ابتدا تبدیل $w1 = e^z$ را روی ناحیه z انجام میدهیم. برای نگاشت نمایی $rw = e^x$ و $\theta w = y$ پس ناحیه جدید به‌صورت زیر است:



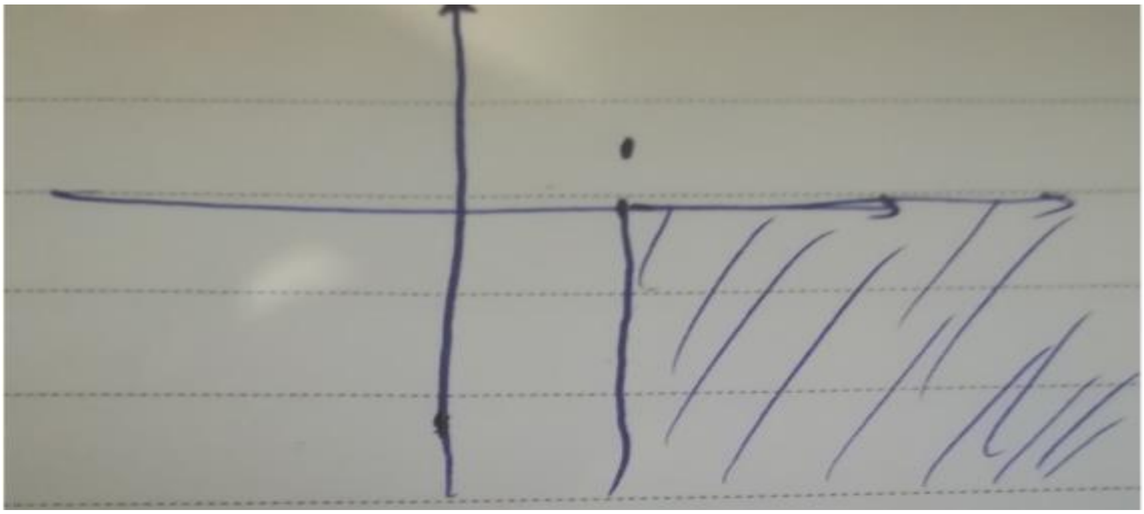
پشت رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com مکاتبه نمایید.

حال تبدیل $w2 = -w1$ را انجام میدهیم که معادل دوران 180 است:



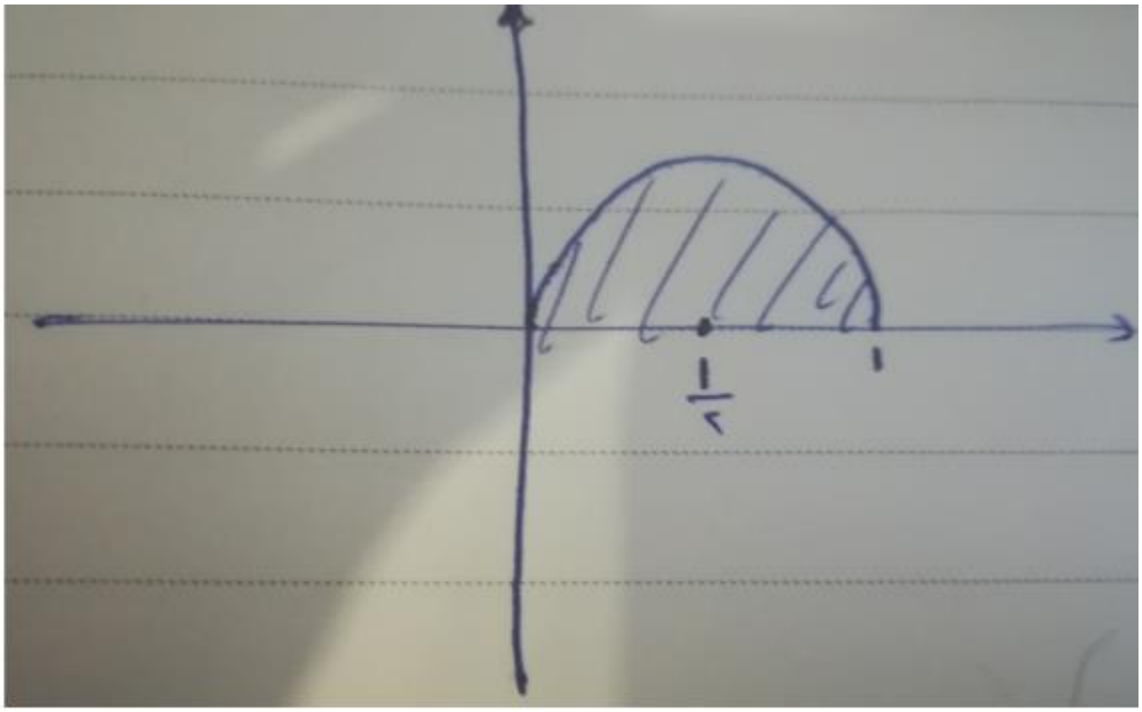
حال تبدیل $w3 = w2 + 1$ را که یک انتقال است انجام میدهیم:



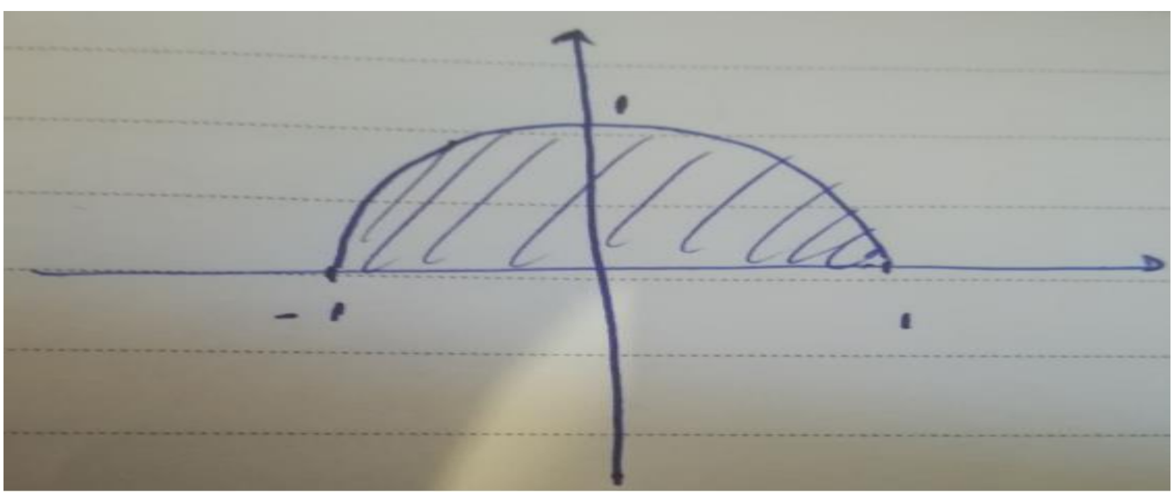
پس از آن تبدیل کسری $w4 = \frac{1}{w3}$ را انجام میدهیم که فرمول x و y مشابه سوال هفت دارد:

$$\frac{u}{u^2+v^2} \geq 1 \rightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$y<0 \quad \frac{-v}{u^2+v^2} < 0 \rightarrow v > 0$$



سرانجام شکل مرحله قبل را دو برابر کرده و یک واحد به چپ شیفت میدهیم:



9)

الف) یک تبدیل خطی کسری پیدا کنید که سه نقطه‌ی $w1 = -1, w2 = 0, w3 = 1$ را به‌ترتیب به سه نقطه نظیر آن یعنی: $z1 = -1, z2 = -j, z3 = 1$ تبدیل کند و آن‌را $z = f(w)$ بنامید.

ب) تابع زیر را که در ناحیه بالای محور $u = 0$ همساز است، در نظر میگیریم:

$$H(u, v) = 1 + \frac{2}{\pi} Img(ln\frac{w+1}{w-1})$$

نشان دهید که با تبدیل قسمت الف تابع $H(u, v)$ از صفحه‌ی w، در صفحه Z به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$H'(x, y) = \frac{2}{\pi}[\arg(1+z) - \arg(1-z)]$$

حل 9:

$$w1 = -1\,, w2 = 0, w3 = 1 \qquad and \quad z1 = -1, \qquad z2 = -j, \qquad z3 = 1$$

الف)

$$\frac{w-w1}{w-w3} * \frac{w2-w3}{w2-w1} = \frac{z-z1}{z-z3} * \frac{z2-z3}{z2-z1} => \frac{w+1}{w-1} * \left(\frac{0-1}{0-(-1)}\right) = \frac{z+1}{z-1} * \left(\frac{-j-1}{-j+1}\right)$$

$$=> \frac{w+1}{w-1} = \frac{z+1}{z-1} * j$$

$$=> w = \frac{-(1+j)z+(1-j)}{(1-j)z-(1+j)} = \frac{-jz+1}{z-j}$$

$$z = \frac{(1+j)w+(1-j)}{(1-j)w+(1+j)} = \frac{jw+1}{w+j}$$

ب)

$$H(u,v) = 1+\frac{2}{\pi}Im\left(ln\frac{w+1}{w-1}\right) = 1+\frac{2}{\pi}Im\left(ln\frac{-jz+1+z-j}{-jz+1-z+j}\right)$$

$$= 1+\frac{2}{\pi}Im\left(ln\frac{w+1}{w-1}\right) = 1+\frac{2}{\pi}Im\left(ln\frac{z+1}{-jz+j}\right)$$

$$= 1+\frac{2}{\pi}Im(\ln(z+1)-\ln(-jz+j))$$

$$= 1+\frac{2}{\pi}Im(\ln(z+1)-\ln(-z+1)-lnj) \ and \ lnj = lne^{j\frac{\pi}{2}} = j\frac{\pi}{2}$$

$$=> \frac{2}{\pi}Im(\ln(z+1)-\ln(-z+1))$$

$$H'(x,y) = \frac{2}{\pi}\left(ln\frac{z+1}{z-1}\right) \ and \ 1+z = r1*e^{j\theta 1} \ and \ 1-z = r2*e^{j\theta 2}$$

$$=> \frac{2}{\pi}\left(ln\frac{r1}{r2}+j(\theta 1-\theta 2)\right)$$

پشت و رو چاپ شود. برگه اضافه تصحیح نخواهد شد.

$$= \frac{2}{\pi}(\theta 1 - \theta 2) = \frac{2}{\pi}(\arg(z+1) - \arg(z-1))$$

موفق باشید.