سری ها و دنباله های اعداد مختلط

یک تابع مختلط $f(z)$ را میتوان به دو صورت کلی حول نقطه $z=z_0$ بسط داد که عبارتند از:

1–بسط تیلور: در این بسط تابع به صورت توانهای مثبت از $(z-z_0)$ و به صورت زیر بسط داده میشود:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \qquad C_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n f(z)}{dz^n}(z=z_0)$$

در حالت خاص که $z_0=0$ است بسط فوق را بسط مک لوران میگویند. بسط مک لورن چند تابع که کاربرد زیادی در ریاضی دارند در زیر داده شده است:

$$f(z)=e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\frac{z^n}{n!}+\ldots..=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$f(z)=\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\ldots\ldots(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z)=\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\ldots\ldots(-1)^{n+1}\frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z)=\sinh z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\ldots\ldots\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z)=\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\ldots\ldots\frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

البته برای توابع کسری (توابعی که قطب دارند) اگر $|q|<1$ میتوان تابع را بسط مک لورن داد بعبارت دیگر:

$$f(z)=\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots\ldots\sum_{n=0}^{\infty}q^n \qquad |q|<1 \qquad (1-a)$$

$$f(z)=\frac{1}{1+q}=1-q+q^2-q^3+\ldots\ldots\ldots\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n \qquad |q|<1 \qquad (1-b)$$

با توجه به روابط (**1**)، توابع $f(z)=\dfrac{1}{z\pm p}$ را میتوان به صورت زیر بسط تیلور داد:

$$f(z)=\frac{1}{z-p}=-\frac{1}{p}\frac{1}{1-\frac{z}{p}}=-\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{p})^n \qquad \left|\frac{z}{p}\right|<1 \quad (|z|<p)\rightarrow f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(p)^{-n-1}z^n$$

$$f(z)=\frac{1}{z+p}=\frac{1}{p}\frac{1}{1+\frac{z}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{p})^n \qquad \left|\frac{z}{p}\right|<1 \quad (|z|<p)\rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(p)^{-n-1}(-1)^n z^n$$

مثال **1**: بسط تیلور تابع $f(z)=\dfrac{1}{z-1+2j}$ را حول نقطه $z=2-3j$ بدست آورید.

حل: تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z-1+2j}=\frac{1}{z-2+3j+1-j}=\frac{1}{[z-(2-3j)]+1-j}=\frac{1}{1-j}\frac{1}{1+\dfrac{z-(2-3j)}{1-j}}$$

حال اگر $\left|\frac{z-(2-3j)}{1+j}\right|<1$ باشد یعنی $|z-(2-3j)|<\sqrt{2}$ باشد در اینصورت با استفاده از رابطه $(1-b)$ میتوانیم بنویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{1-j}\frac{1}{1+\dfrac{z-(2-3j)}{1-j}}=\frac{1}{1-j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{z-(2-3j)}{1-j}]^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-j)^{-n-1}[z-(2-3j)]^n$$

مثال **2**: بسط تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$ حول $z=0$ و حول $z=1$ بدست آورید.

حل: ابتدا تابع را به دو کسر تجزیه میکنیم:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}=\frac{1}{2-z}-\frac{1}{3-z}$$

حال حول $z=0$ بسط میدهیم. برای اینکار خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{1}{2-z}-\frac{1}{3-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}}$$

حال اگر $|z|<2$ باشد در اینصورت حتما $\left|\frac{z}{2}\right|<1\rightarrow|z|<3$ خواهد بود بنابراین برای هر دو جمله طبق رابطه $(1-a)$ میتوانیم بسط تیلور بنویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[2^{-n-1}-3^{-n-1}]z^n \qquad |z|<2$$

حال تابع را حول $z=1$ بسط میدهیم. در اینصورت باید تابع را به صورت توانهای مثبت $(z-1)$ بسط دهیم. برای اینکار تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{2-z}-\frac{1}{3-z}=\frac{1}{1-(z-1)}+\frac{1}{-2+(z-1)}=\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}$$

حال اگر $|z-1|<1$ باشد در اینصورت حتما $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1\rightarrow|z-1|<2$ هم خواهد بود بنابراین هردوجمله را با استفاده از رابطه $(1-a)$ میتوانیم

بسط تیلور بدهیم که به صورت زیر خواهد شد:

$$f(z)=\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[1-2^{-n-1}](z-1)^n \qquad |z-1|<1$$

مثال **3**: با استفاده از رابطه (**1**) بسط تیلور (مک لوران) تابع $f(z)=\ln(1+z)$ را بدست آورید:

$$f(z)=\ln(1+z)=\int\frac{dz}{1+z}=\int dz\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}z^{n+1} \qquad |z|<1$$

مثال **4**: با استفاده از مثال بالا حاصل عبارت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(0.5)^{n+1}$ را بدست آورید.

حل: از بسط تابع $f(z)=\ln(1-z)$ استفاده میکنیم

$$f(z)=\ln(1-z)=-\int\frac{dz}{1-z}=-\int dz\sum_{n=0}^{\infty}z^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1}=-\ln(1-z)\rightarrow \qquad |z|<1$$

حال چون $|z|=|0.5|<1$ است در رابطه بالا قرار میدهیم: $z=0.5$ که خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1}=-\ln(1-z)\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(0.5)^{n+1}=-\ln(1-0.5)=\ln 2\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(0.5)^{n+1}=\ln 2$$

مثال **5**: در بسط مک لوران $f(z)=(\sin z)\ln(1-z)$ ضریب z^4 را بدست اورید.

حل با توجه به مثال قبل و بسط $\sin z$ میتوانیم بنویسیم:

$$f(z)=(\sin z)\ln(1-z)=[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-......][-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^n]=[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-......][-z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\frac{z^4}{4}.....]=$$

$$-z^2-\frac{1}{2}z^3+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3!})z^4+\frac{1}{2\times 3!}z^5+......=-z^2-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{6}z^4......$$

پس ضریب z^4 برابر است با $-\frac{1}{6}$.

2-بسط لوران: در این بسط سری علاوه برتوانهای مثبت دارای توانهای منفی میباشد در حالت کلی بسط لوران یک تابع به صورت زیر است:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

برای توابع کسری (توابعی که قطب دارند) اگر $|z|>|p|$ که p قطب سیستم است میتوان تابع را به صورت زیر بسط لوران داد:

$$f(z)=\frac{1}{z-p}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{p}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{p}{z})^{n} \qquad \left|\frac{p}{z}\right|<1 \ \ (|z|>p)\rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(p)^{n}z^{-n-1}$$

$$f(z)=\frac{1}{z+p}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{p}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{p}{z})^{n} \qquad \left|\frac{p}{z}\right|<1 \ \ (|z|>p)\rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(p)^{n}(-1)^{n}z^{-n-1}$$

مثال 6: بسط لوران تابع مثال **2** را بدست آورید.

حل: مثل حالت قبل تابع را به صورت زیر تجزیه میکنیم:

$$f(z)=\frac{1}{z^{2}-5z+6}=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

حال اگر $\left|\frac{2}{z}\right|<1\rightarrow |z|>2$ و $\left|\frac{z}{3}\right|<1\rightarrow |z|<3$ بعبارت دیگر $2<|z|<3$ در اینصورت کسر اول و دوم را میتوان با استفاده از رابطه $(1-a)$ بسط داد که خواهیم داشت:

$$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^{n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^{n}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n-1}z^{n}$$

چون بسط تابع دارای توانهای منفی z پس بسط داده شده بسط لوران است. حال تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z^{2}-5z+6}=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

حال اگر $\left|\frac{3}{z}\right|<1\rightarrow |z|>3$ باشد حتما $\left|\frac{2}{z}\right|<1\rightarrow |z|>2$ هم میباشد. در اینصورت تابع بالا را به صورت زیر با استغاده از رابطه $(1-a)$ بسط میدهیم:

$$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^{n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{z})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}[-2^{n}+3^{n}]z^{-n-1}$$

حال تابع را حول $z=1$ بسط لورن میدهیم. در اینصورت تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{2-z}-\frac{1}{3-z}=\frac{1}{1-(z-1)}+\frac{1}{-2+(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$$

حال اگر $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1\rightarrow |z-1|>1$ و $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1\rightarrow |z-1|<2$ باشد یعنی $1<|z-1|<2$ در اینصورت هر دو جمله سمت راست را میتوان بر

اساس رابطه $(1-a)$ بسط داد

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z-1})^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}(z-1)^n$$

حال بر اساس شرط جدید بسط میدهیم

$$f(z)=\frac{1}{2-z}-\frac{1}{3-z}=\frac{1}{1-(z-1)}+\frac{1}{-2+(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}$$

حال اگر $|z-1|>2$ $\rightarrow 1 > \left|\frac{2}{z-1}\right|$ در اینصورت حتما $|z-1|>1 \rightarrow 1 > \left|\frac{1}{z-1}\right|$ میباشد در اینصورت اینصورت هر دو جمله سمت راست را میتوان بر اساس رابطه $(1-a)$ بسط داد.

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z-1})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)(z-1)^{-n-1}$$

تعریف قطب و نقاط تکین یک تابع:

اگر $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجود و مخالف صفر باشد (یک عدد باشد) آنگاه $z=z_0$ قطب مرتبه mام تابع $f(z)$ میباشد در غیر اینصورت $z=z_0$ تکین اساسی میباشد. مثلا تابع زیرا را در نظر بگیرید:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+..........\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+.........$$

همواره $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ به ازای تمام مقادیر m برابر با بینهایت میشود در اینصورت $z=z_0$ نقطه تکین اساسی میباشد. همچنین برای تابع $f(z)=\sin\frac{1}{z-1}$ داریم:

$$f(z)=\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+........(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n-1}}+.......$$

نقطه $z=1$ تکین اساسی است.

مثال **7**: برای تابع $f(z)=\frac{1-e^{z^3}}{z^7}$ نقطه $z=0$ چه نقطه ای است؟

حل ابتدا $\lim_{z\to 0} z^m f(z)$ را به ازای m های مختلف حساب میکنیم اگر عددی غیر صفر شد در اینصورت مرتبه قطب همان عدد m میباشد

$$\lim_{z\to 0} z^7 f(z)=\lim_{z\to 0} z^7\frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim_{z\to 0}(1-e^{z^3})=\lim_{z\to 0}[1-(1+z^3+\frac{z^6}{2!}+....)]=0$$

پس قطب مرتبه هفتم نمیباشد

$$\lim_{z\to 0} z^6 f(z)=\lim_{z\to 0} z^6\frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim_{z\to 0}(\frac{1-e^{z^3}}{z})=\lim_{z\to 0}[\frac{1-(1+z^3+\frac{z^6}{2!}+....)}{z}]=0$$

پس قطب مرتبه ششم هم نمیباشد. اگر اینکار را ادامه دهیم به ازای $m=5$ باز حد صفر میشود. حال برای $m=4$ داریم:

$$\lim_{z\to 0} z^4 f(z)=\lim_{z\to 0} z^4\frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim_{z\to 0}(\frac{1-e^{z^3}}{z^3})=\lim_{z\to 0}[\frac{1-(1+z^3+\frac{z^6}{2!}+....)}{z^3}]=-1\neq 0$$

بنابراین $z=0$ قطب مرتبه چهارم میباشد.

مثال**8**: برای تابع $f(z)=\frac{\sin(\frac{1}{z-1})\sin^4(z+1)}{(z^2-1)^3 z^7}$ نقاط $z=0$، $z=-1$ و $z=1$ چه نقاطی هستند.

حل: برای تابع $\sin\frac{1}{z-1}$ نقطه $z=1$ همانطوریکه قبلا ذکر شد تکین اساسی است و همواره $\lim_{z\to 1}(z-1)^m f(z)$ به ازای همه مقادیر m بینهایت میشود بنابراین نقطه $z=1$ برای تابع داده شده تکین اساسی است. از طرفی نقطه $z=-1$ چون صورت را صفر و در نتیجه تابع را صفر میکند و توان تابعی که صفر میشود **4** میباشد این نقطه برای صورت تابع صفر مرتبه **4** میباشداز طرفی این نقطه مخرج را صفر میکند و قطب مرتبه **3** میباشد بنابراین در مجموع $z=-1$ صفر مرتبه اول است. از طرفی داریم:

$$\lim_{z\to 0} z^7 f(z)=\lim_{z\to 0} z^7\frac{\sin(\frac{1}{z-1})\sin^4(z+1)}{(z^2-1)^3 z^7}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(\frac{1}{z-1})\sin^4(z+1)}{(z^2-1)^3}=\sin^4 1\neq 0$$

بنابراین میتوان نتیجه گرفت $z=0$ قطب مرتبه هفتم است. در نتیجه $z=0$ قطب مرتبه هفت، $z=-1$ صفر مرتبه اول و $z=1$ تکین اساسی است.

حال تابع $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ را در نظر میگیریم. بسط این تابع حول $z=0$ به صورت زیراست:

$$f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+........)=z^3+z^2+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z^{-1}+\frac{1}{5!}z^{-2}+........$$

چون تابع دارای توانهای منفی است پس بسط داده شده بسط لورن است و چون بالاترین توان منفی دیده نمیشود در نتیجه $z=0$ تکین اساسی تابع میباشد. از طرفی برای تابع $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$ میتوانیم بنویسیم:

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-.........)}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}z^2+\frac{1}{6!}z^6-.....$$

چون توانهای منفی از z دیده نمیشود بسط تابع از نوع تیلور (مک لوران) است و تابع همواره تحلیلی است. در حقیقت $z=0$ یک قطب برداشتنی است زیرا برای تابع اگرچه $z=0$ ظاهرا قطب مرتبه **2** میباشدولی صفر مرتبه **2** نیز میباشد. زیرا $z=0$ ریشه صورت تابع و ریشه مشتق صورت تابع میباشد در اینصورت این نقطه صفر مرتبه دوم $1-\cos z$ میباشد بعبارت دیگر:

$$1-\cos z=0\rightarrow z=0 \qquad \frac{d}{dz}(1-\cos z)=\sin z=0\rightarrow z=0 \qquad \frac{d^2}{dz^2}(1-\cos z)=\cos z=0\rightarrow z\neq 0$$

برای تابع $f(z)$ که به صورت لوران حول نقطه $z=z_0$ بسط داده شده است ضریب $(z-z_0)^{-1}$ را مانده تابع در نقطه $z=z_0$ مینامند. مثلا برای تابع $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}$ میتوانیم بنویسیم:

$$f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}=z^3(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}-\frac{1}{6!}\frac{1}{z^6}.+......)=z^3-\frac{z}{2!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z}-\frac{1}{6!}\frac{1}{z^3}+....$$

بسط داده شده از نوع لوران است و نقطه $z=0$ تکین اساسی است (زیرا بالاترین توان منفی دیده نمیشود) و مانده تابع در نقطه $z=0$ برابر است باضریب z^{-1} یعنی $\frac{1}{4!}$ که به صورت $\operatorname{Re}s[f(z),z=0]=\frac{1}{4!}$ نوشته میشود.

مثال**9**: مانده تابع $f(z)=(z-1)^5\cos\frac{1}{z-1}$ را بدست آورید.

حل: تابع را به صورت زیر بسط میدهیم:

$$f(z)=(z-1)^5\cos\frac{1}{z-1}=(z-1)^5[1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^4}-\frac{1}{6!}\frac{1}{(z-1)^6}.+.....]=$$
$$(z-1)^5-\frac{1}{2!}(z-1)^3+\frac{1}{4!}(z-1)-\frac{1}{6!}\frac{1}{(z-1)}+......\rightarrow \operatorname{Re}s[f(z),z=1]=-\frac{1}{6!}$$

مثال **10**: مانده تابع $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-1}$ در نقطه $z=1$ را بدست آورید.

حل: تابع را به صورت زیر بسط میدهیم:

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-1}=[(z-1)+1]^2\sin\frac{1}{z-1}=[(z-1)^2+2(z-1)+1]\sin\frac{1}{z-1}\rightarrow$$
$$f(z)=[(z-1)^2+2(z-1)+1][\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+......]=(z-1)+2+(1-\frac{1}{3!})\frac{1}{z-1}+.....$$

همانطوریکه دیده میشود ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر است با: $1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6}$ یعنی $\operatorname{Re}s[f(z),z=1]=\frac{5}{6}$. بنابراین بهترین راه برای پیدا کردن مانده یک تابع در نقطه $z=z_0$ بسط لوران دادن آن تابع حول نقطه $z=z_0$ و پیدا کردن ضریب $(z-z_0)^{-1}$ میباشد که این ضریب همان مانده تابع میباشد.

روش پیدا کردن مانده برای یک تابع

الف) قطب مرتبه اول

مانده به صورت زیر محاسبه میشود:

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=z_0] = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

با توجه به رابطه بالا اگر تابع را به صورت $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)......(z-z_n)}$ **در اینصورت مانده تابع در** $z=z_1$ **برابر است با:**

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=z_1] = \lim_{z\to z_0} (z-z_1) f(z) = \frac{P(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)......(z_1-z_n)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}$$

ب)قطب مرتبه mام

برای این قطب مانده به صورت زیر حساب میشود:

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=z_0] = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)$$

مثلا فرض کنید تابع به صورت زیر باشد:

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{(z-z_0)^m}=\frac{A_1}{z-z_0}+\frac{A_2}{(z-z_0)^2}+\frac{A_3}{(z-z_0)^3}+........\frac{A_m}{(z-z_0)^m}.=$$
$$\frac{A_1(z-z_0)^{m-1}+A_2(z-z_0)^{m-2}+..........+A_m}{(z-z_0)^m}=\frac{P(z)}{(z-z_0)^m}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=z_0] = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)=$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[A_1(z-z_0)^{m-1}+A_2(z-z_0)^{m-2}+..........+A_m]=A_1$$

یعنی همیشه ضریب $(z-z_0)^{-1}$ **در بسط لوران تابع** $f(z)$ **را مانده تابع در** $z=z_0$ **میگویند.**

مثال11: مانده تابع $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)}$ **را در** $z=j2$ **بدست آورید.**

حل: از رابطه کلی استفاده میکنیم:

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \to \operatorname{Re}s[f(z), z=j2] = \lim_{z\to z_0}(z-j2)\frac{2z+3}{(z-1)(z-j2)(z+j2)}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=j2] = \frac{2(j2)+3}{(j2-1)(j2+j2)} = \frac{3+j4}{-8-j4} = \frac{(3+j4)(-8+j4)}{80} = -0.5-j0.25$$

حال میتوان از رابطه $\frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}$ استفاده کرد برای اینکار ابتدا تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z) = \frac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)} = \frac{\frac{2z+3}{z-1}}{(z^2+4)} = \frac{P(z)}{Q(z)} \to \operatorname{Re}s[f(z), z=j2] = \frac{P(j2)}{Q'(j2)} = \frac{\frac{2(j2)+3}{j2-1}}{2(j2)} = \frac{3+j4}{j4(j2-1)} = \frac{3+j4}{-8-j4}$$

که همان جواب قبل است.

مثال **12**: مانده تابع $f(z) = \frac{\sin 4\pi z}{(2z+1)^4}$ در $z=-\frac{1}{2}$ بدست اورید.

حل: قطب از مرتبه چهارم است البته باید مخرج را به فرم $(z-z_0)^m$ در بیاوریم و سپس از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$f(z) = \frac{\sin 4\pi z}{2^4(z+\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{16}\frac{\sin 4\pi z}{(z+\frac{1}{2})^4}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=-\frac{1}{2}] = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z+\frac{1}{2})^m f(z) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{1}{(4-1)!}\frac{d^{4-1}}{dz^{4-1}}(z+\frac{1}{2})^4 \frac{1}{16}\frac{\sin 4\pi z}{(z+\frac{1}{2})^4}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z), z=-\frac{1}{2}] = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{1}{3!}\frac{1}{16}\frac{d^3 \sin 4\pi z}{dz^3}(z=-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3!}\frac{1}{16}[-(4\pi)^3\cos(-2\pi)] = -\frac{2\pi^3}{3}$$

مثال **12**: مانده $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ در نقطه $z=0$ را بدست آورید.

حل: بسط لوران تابع را حول $z=0$ مینویسیم:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = e^{\frac{1}{z}} \times \frac{1}{1-z} = (1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\frac{1}{2!}+\dots\dots)(1+z+z^2+z^3+\dots\dots) =$$
$$(1+1+\frac{1}{2!}+\dots\dots)+\frac{1}{z}(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\dots)+\dots\dots$$

مانده تابع در نقطه $z=0$ همان ضریب $\frac{1}{z}$ است که برابر است با:

$$(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\dots)+\dots\dots = e^1-1$$

دقت کنید که $e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+......$ در نتیجه

$$e^1 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+......\rightarrow 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+......=e^1-1$$

منطقه و شعاع همگرایی

شعاع همگرایی شعاع دایره ای است که در داخل آن دایره سری همگرا میشود و میتوان برای آن یک رابطه بسته نوشت. مثلا روابط (**1**) موقعی برقرار هستند که $|z|<1$ باشد بعبارت دیگر تحت این شرط حاصل عبارت: $1+z+z^2+.......$ به عبارت $\frac{1}{1+z}$ همگرا میشود. در اینصورت شعاع همگرایی به صورت $|z|<1$ بیان میشود. منطقه همگرایی هم منطقه ای است که به ازای z های واقع در آن منطقه سری به یک رابطه بسته همگرا میشود. برای بدست آوردن یک دنباله که به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نوشته میشود میتوانی از یکی از دو شرط زیر استفاده کرد:

$$1)\qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|<1 \qquad\qquad 2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}<1$$

مثال **13**:شعاع همگرایی دنباله $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{n^3(2n)!}(z-2)^n$ را بدست آورید.

حل: از ضابطه **1** استفاده میکنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|<1\rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}[(n+1)!]^2(z-2)^{n+1}}{(n+1)^3(2n+2)!}(z-2)^{n+1}}{\frac{3^n[n!]^2(z-2)^n}{n^3(2n)!}(z-2)^n}\right|<1\rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(n+1)^2n^3}{(2n+1)(2n+2)(n+1)^3}\right||z-2|<1$$

$$\frac{3}{4}|z-2|<1\rightarrow |z-2|<\frac{4}{3}$$

مثال **14**: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n^2+1}z^n$ را بدست آورید.

حل: از ضابطه **2** استفاده میکنیم

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}<1\rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n^2+1}z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3+(-1)^n}{(n^2+1)^{\frac{1}{n}}}\right||z|<1$$

حال $\lim_{n\to\infty}(an^2+b)^{\frac{1}{n}}$ را بدست می آوریم که حالت خاص آن به ازای $a=b=1$ در مخرج کسر قرار دارد

$$\lim_{n\to\infty}(an^2+b)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(an^2+b)^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{1}{n}\ln(an^2+b)}$$

حال $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(an^2+b)$ را بدست می آوریم . عبارت را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(an^2+b)=\frac{\infty}{\infty}$$

پس از قانون هوپیتال استفاده میکنیم که حد مشتق صورت و مخرج را به ازای $n\to\infty$ بدست می آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(an^2+b)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(an^2+b)}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2an}{an^2+b}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2an}{an^2+b}=0$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(an^2+b)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(an^2+b)^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{1}{n}\ln(an^2+b)}=e^0=1$$

بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}<1\to\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n^2+1}z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3+(-1)^n}{(n^2+1)^{\frac{1}{n}}}\right||z|<1=\left|3+(-1)^n\right||z|<1\to$$
$$\begin{cases}2|z|<1 & n=Odd\\ 4|z|<1 & n=Even\end{cases}\to\begin{cases}|z|<0.5 & n=Odd\\ |z|<0.25 & n=Even\end{cases}$$

که اشتراک دو حالت بالا $|z|<0.25$ میباشد یعنی شعاع همگرایی **0/25** است.

موفق باشید

محمود محمدطاهری خرداد 1401