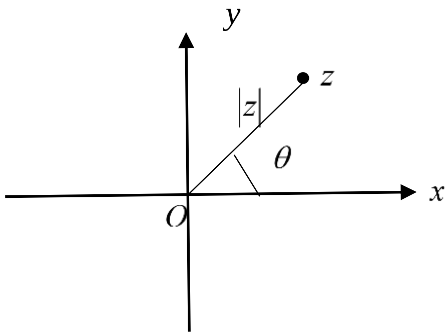
اعداد مختلط و توابع مختلط

الف) اعداد مختلط

عدد مختلط را به صورت $z = x + jy$ نشان میدهند که $x = \mathrm{Re}(z)$ قسمت حقیقی عدد مختلط z و $y = \mathrm{Im}(z)$ قسمت موهومی عدد مختلط z و $j = \sqrt{-1}$ میباشد. در حقیقت z معرف یک نقطه به مختصات (x, y) در صفحه مختصات xy که همان صفحه z است میباشد. شکل زیر عدد مختلط را در صفحه مورد نظر نشان میدهد. فاصله هر نقطه که نشان دهنده عدد مختلط است تا مبدا مختصات را اندازه عدد مختلط میگویند و به $|z|$ نشان میدهند. حال قسمتهای حقیقی و موهومی عدد مختلط را میتوان با رابطه زیر نشان داد:



$$x = |z|\cos\theta \qquad y = |z|\sin\theta \qquad (1)$$

عدد مختلط z را میتوان به صورت زیر نشان داد:

$$z = x + jy = |z|\cos\theta + j|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + j\sin\theta)$$

با استفاده از رابطه اولر $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ رابطه بالا را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$z = |z|e^{j\theta} \qquad (2)$$

رابطه (**2**) همان فرم قطبی عدد مختلط میباشد. از روی شکل معلوم است که:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (3)$$

البته اگر قسمت حقیقی عدد مختلط منفی و قسمت موهومی آن مثبت باشد در اینصورت عدد مختلط در ربع دوم است و $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ در حالی که اگر هردو قسمت حقیقی و موهومی منفی باشند در اینصورت عدد مختلط در ربع سوم میباشد و $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$. اگر قسمت حقیقی عدد مختلط مثبت و قسمت موهومی منفی باشد در اینصورت عدد مختلط در ربع چهارم است و $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$.

مثال **1**: اعدادمختلط زیر را به فرم قطبی نشان دهید:

الف) $z = 3 + j4$ ب) $z = 3 - j4$ پ) $z = -4 + j4$ ت) $z = -6 - j8$

حل الف) عدد مختلط در ربع اول است بنابراین:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53^\circ \rightarrow z = |z|e^{j\theta} = 5e^{j53^\circ}$$

حل ب) عدد مختلط در ربع چهارم است بنابراین:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = -\tan^{-1}\frac{4}{3} = -53^\circ \rightarrow z = |z|e^{j\theta} = 5e^{-j53^\circ}$$

حل پ) عدد مختلط در ربع دوم است بنابراین:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \qquad \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \pi - \tan^{-1}1 = 135^\circ \rightarrow z = |z|e^{j\theta} = 4\sqrt{2}e^{j135^\circ}$$

حل ت) عدد مختلط در ربع سوم است بنابراین:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \qquad \theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \pi + \tan^{-1}\frac{8}{6} = 233^\circ \rightarrow z = |z|e^{j\theta} = 10e^{j233^\circ}$$

مزدوج مختلط عدد مختلط z را به صورت $\bar{z} = x - jy$ در نتیجه اگر $z = |z|e^{j\theta}$ در اینصورت $\bar{z} = |z|e^{-j\theta}$ در اینصورت

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \qquad (4)$$

عملیات مختلط

الف) جمع و تفریق دو عدد مختلط

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$
$$z = z_1 - z_2 = x_1 + jy_1 - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

ب) ضرب و تقسیم دو عدد مختلط

برای ضرب و تقسیم دو عدد مختلط بهتر است ابتدا آنها را به فرم قطبی تبدیل کرد یعنی

$$z = z_1 z_2 = |z_1|e^{j\theta_1}|z_2|e^{j\theta_2} = |z_1||z_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)} = |z_1||z_2|\cos(\theta_1 + \theta_2) + j|z_1||z_2|\sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{j\theta_1}}{|z_2|e^{j\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\frac{|z_1|}{|z_2|}\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

راه دیگر تقسیم دو عدد مختلط ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج مخرج است که در اینصورت مخرج تبدیل به عدد حقیقی میشود یعنی:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

جذر یک عدد مختلط

فرض کنید بخواهیم که جذرعدد مختلط $z = x + jy = re^{j\theta}$ را حساب کنیم در اینصورت میتوانیم بنویسیم:

$$\sqrt{z} = \sqrt{re^{\pm j\theta}} = \sqrt{r}e^{\pm j\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} \pm j\sin\frac{\theta}{2}) = \sqrt{r}(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \pm j\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}) =$$

$$\sqrt{\frac{r + r\cos\theta}{2}} \pm j\sqrt{\frac{r - r\cos\theta}{2}} \rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{x \pm jy} = \sqrt{\frac{|z| + x}{2}} \pm j\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}$$

مثال **2**: برای $z_1 = 3 + j4$ و $z_2 = 8 - j6$ مطلوبست

الف) $z = z_1 + z_2$ ب) $z = z_2 - z_1$ پ) $z = z_1 z_2$ ت) $z = \dfrac{z_2}{z_1}$ ث) $z = \sqrt{z_2}$

حل الف)

$$z = z_1 + z_2 = 3 + j4 + 8 - j6 = 11 - j2$$

حل ب)

$$z = z_2 - z_1 = 8 - j6 - (3 + j4) = 5 - j10$$

حل پ)

$$z_1 = 3 + j4 \to |z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53^\circ \to z_1 = 5e^{j53^\circ}$$

$$z_2 = 8 - j6 \to |z_2| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \qquad \theta_2 = -\tan^{-1}\frac{6}{8} = -37^\circ \to z_2 = 10e^{-j37^\circ}$$

$$z = z_1 z_2 = |z_1|e^{j\theta_1}|z_2|e^{j\theta_2} = |z_1||z_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)} = 5\times 10 e^{j53^\circ}e^{-j37^\circ} = 50e^{j16^\circ} = 50\cos 16^\circ + j50\sin 16^\circ \to$$
$$z \approx 48 + j14$$

البته میتوان بدون تبدیل به قطبی هم حاصلضرب را حساب کرد:

$$z = z_1 z_2 = (3 + j4)(8 - j6) = (3\times 8 + j4\times -j6) + j(8\times 4 - 3\times 6) = (24 + 24) + j(32 - 18) = 48 + j14$$

حل ت)

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|e^{j\theta_2}}{|z_1|e^{j\theta_1}} = \frac{|z_2|}{|z_1|}e^{j(\theta_2-\theta_1)} = \frac{10}{5}e^{j(-37^\circ-53^\circ)} = 2e^{-j90^\circ} = 2[\cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ)] = -2j$$

راه دیگر تقسیم دو عدد مختلط ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج مخرج است یعنی:

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{8 - j6}{3 + j4} = \frac{(8 - j6)(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = \frac{(8\times 3 - j6\times -j4) - j(8\times 4 + 6\times 3)}{3^2 + 4^2} =$$
$$\frac{(24 - 24) - j(32 + 18)}{25} = \frac{-j50}{25} = -j2$$

حل ث) برای جذر گرفتن باید اندازه عدد مختلط را بدست آوریم:

$$z_2 = 8 - j6 \to |z_2| = \sqrt{36 + 64} = 10 \qquad x = 8 \to z = \sqrt{z_2} = \sqrt{\frac{|z_2| + x}{2}} - j\sqrt{\frac{|z_2| - x}{2}} =$$
$$\sqrt{\frac{10 + 8}{2}} - j\sqrt{\frac{10 - 8}{2}} = 3 - j1 \to z = 3 - j1$$

میتوان از راه زیر هم جذر را حساب کرد:

$$z_2 = 8 - j6 = 10e^{-j37^\circ} \rightarrow z = \sqrt{z_2} = \sqrt{10e^{-j37^\circ}} = \sqrt{10}e^{-j18.5^\circ} = \sqrt{10}\cos 18.5^\circ - j\sqrt{10}\sin 18.5^\circ \rightarrow z = 3 - j1$$

که همان جواب بالا است.

مثال **3**: پاسخ عبارات زیر را بدست آورید:

الف) $z = j^j$ ب) $z = (6 + j6)^{(3+j4)}$

حل الف) چون $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ در نتیجه داریم:

$$z = j^j = (e^{j\frac{\pi}{2}})^j = e^{j\frac{\pi}{2}j} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

البته میتوان نوشت: $j = e^{j(2k\pi + \frac{\pi}{2})}$ در اینصورت داریم:

$$z = j^j = (e^{j(2k\pi + \frac{\pi}{2})})^j = e^{j(2k\pi + \frac{\pi}{2})j} = e^{-(2k\pi + \frac{\pi}{2})}$$

حل ب) میدانیم $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$ در نتیجه داریم:

$$z = (6 + j6)^{(3+j4)} = e^{(3+j4)\ln(6+j6)}$$

اما $\ln(6 + j6) = \ln(6\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}) = \ln 6\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4} = 2.14 + j0.78$ در نتیجه:

$$z = (6 - j6)^{(3+j4)} = e^{(3+j4)\ln(6+j6)} = e^{(3+j4)(2.14+j0.78)} = e^{(3.3+j6.22)} = e^{3.3}e^{j10.9} = e^{3.3}(\cos 10.9 + j\sin 10.9)$$
$$z = -2.6 - j27$$

ب) توابع مختلط

قبل از معرفی توابع مختلط به نکات زیر توجه میکنیم:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \rightarrow \cos jx = \frac{e^{j(jx)} + e^{-j(jx)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$
$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \rightarrow \sin jx = \frac{e^{j(jx)} - e^{-j(jx)}}{2j} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2j} = \frac{-2\sinh x}{2j} = j\sinh x$$
$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \rightarrow \cosh jx = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$$
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \rightarrow \sinh jx = \frac{e^{jx} - e^{-jjx}}{2} = \frac{2j\sin x}{2j} = j\sin x$$

$$\tan jx = \frac{\sin jx}{\cos jx} = \frac{j\sinh x}{\cosh x} = j\tanh x \qquad \tanh jx = \frac{\sinh jx}{\cosh jx} = \frac{j\sin x}{\cos x} = j\tan x$$
$$\cot jx = \frac{\cos jx}{\sin jx} = \frac{\cosh x}{j\sinh x} = -j\coth x \qquad \coth jx = \frac{\cosh jx}{\sinh jx} = \frac{\cos x}{j\sin x} = -j\cot x$$

حال با توجه به روابط بالا میتوانیم بنویسیم:

$$\cos z = \cos(x + jy) = \cos x \cos jy - \sin x \sin jy = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$$
$$\sin z = \sin(x + jy) = \sin x \cos jy + \cos x \sin jy = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$$
$$\cosh z = \cosh(x + jy) = \cosh x \cosh jy + \sinh x \sinh jy = \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y$$
$$\sinh z = \sinh(x + jy) = \sinh x \cosh jy + \cosh x \sinh jy = \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y$$

مثال **4**: پاسخ معادله $\cos z = 5$ را بدست آورید:

حل: با توجه به روابط بالا خواهیم داشت:

$$\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y = 5 \to \begin{cases} \cos x \cosh y = 5 \\ \sin x \sinh y = 0 \to \sin x = 0 \to \cos x = 1 \end{cases} \to \cosh y = 5$$
$$\cosh y = 5 \to \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 5 \to (e^y)^2 - 10(e^y) + 1 = 0 \to e^y = 5 \pm \sqrt{24} \to y = \ln(5 \pm \sqrt{24})$$
$$\sin x = 0, \quad \cos x = 1 \to x = 2k\pi \to z = x + jy = 2k\pi + j\ln(5 \pm \sqrt{24})$$

لازم به ذکر است که از رابطه $\sin x \sinh y = 0$ نمیتوان نتیجه گرفت $\sinh y = 0$ زیرا اگر $\sinh y = 0$ باشد در اینصورت $\cosh y = 1$ و ازرابطه $\cos x \cosh y = 5$ نتیجه میشود $\cos x = 5$ که امکانپذیر نیست. از طرف دیگر از رابطه $\sin y = 0$ نمیتوان نتیجه گرفت $y = k\pi$ زیرا اگر k فرد باشد در اینصورت $\cos x = -1$ در اینصورت از رابطه $\cos x \cosh y = 5$ نتیجه میشود $\cosh y = -5$ که امکانپذیر نیست زیرا $\cosh y$ همواره مثبت است بنابراین پاسخ معادله $\cos z = 5$ برابر است با: $z = 2k\pi + j\ln(5 \pm \sqrt{24})$ از این مسئله میتوان نتیجه گرفت که اگر $\cos z > 1$ باشد در اینصورت حتما z یک عدد مختلط است. از طرفی دیگر چون کسینوس هیپوربولیک هر عدد حقیقی همواره از **1** بزرگتر است در اینصورت اگر کسینوس هیپوبولیک عددی از **1** کمتر باشد حتما آن عدد مختلط است مثال زیر این مسئله را روشن میکند

مثال **5**: پاسخ معادله $\cosh z = 0.5$ را بدست آورید:

حل: با توجه به روابط بالا خواهیم داشت:

$$\cosh z = \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y = 0.5 \to \begin{cases} \cosh x \cos y = 0.5 \to \cosh 0 \times \cos y = 0.5 \to \cos y = 0.5 \\ \sinh x \sin y = 0 \to \sinh x = 0 \to x = 0 \end{cases} \to$$
$$y = (2k\pi - \frac{\pi}{3}) = (6k - 1)\frac{\pi}{3} \to z = x + jy = j(6k - 1)\frac{\pi}{3}$$

باز از رابطه $\sinh x \sin y = 0$ نمیتوان نتیجه گرفت $\sin y = 0$ زیرا در اینصورت $\cos y = 1$ و از رابطه $\cosh x \cos y = 0.5$ نتیجه میشود $\cosh x = 0.5$ که امکانپذیر نیست زیرا کسینوس هیپوربولیک هر عدد حقیقی همواره از **1** بزرگتر است.

حل معادله مختلط $z^n = A$

فرض کنید که A یک عدد حقیقی مثبت است در اینصورت $A = Ae^{j2k\pi}$ بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$z^n = A = Ae^{j2k\pi} \to z_k = A^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0,1,2,.........n-1$$

حال فرض کنید که A یک عدد حقیقی منفی است در اینصورت $A = Ae^{j(2k+1)\pi}$ بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$z^n = A = Ae^{j(2k+1)\pi} \to z_k = A^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{(2k+1)\pi}{n}} \qquad k = 0,1,2,\dots\dots\dots n-1$$

مثلا ریشه های معادله $z^5 = 32$ برابر است با:

$$z^5 = 32 = 2^5 e^{j2k\pi} \to z_k = 2e^{j\frac{2k\pi}{5}} \to z_0 = 1, \quad z_1 = 2e^{j\frac{2\pi}{5}}, \; z_2 = 2e^{j\frac{4\pi}{5}} \;, \quad z_3 = 2e^{j\frac{6\pi}{5}}, \quad z_4 = 2e^{j\frac{8\pi}{5}}$$

و ریشه های معادله $z^5 = -32$ برابر است با:

$$z^5 = -32 = 2^5 e^{j(2k+1)\pi} \to z_0 = 2e^{j\frac{\pi}{5}} \to z_0 = 1, \quad z_1 = 2e^{j\frac{3\pi}{5}}, \; z_2 = -2 \;, \quad z_3 = 2e^{j\frac{7\pi}{5}}, \quad z_4 = 2e^{j\frac{9\pi}{5}}$$

مشتق تابع مختلط

مشتق یک تابع مختلط $f(z)$ را بدست می آوریم. این تابع را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$f(z) = f(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y)$$

حال از تعریف مشتق استفاده میکنیم:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + jv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + jv(x,y)]}{\Delta x + j\Delta y} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + jv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - jv(x,y)]}{\Delta x + j\Delta y} \to$$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)]}{\Delta x + j\Delta y} + j\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + j\Delta y}$$

حال ابتدا فرض میکنیم که $\Delta y = 0$ و $\Delta x \to 0$ که خواهیم داشت:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)]}{\Delta x} + j\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} = u_x + jv_x$$

در حالت دوم فرض میکنیم که $\Delta x = 0$ و $\Delta y \to 0$ که خواهیم داشت:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)]}{j\Delta y} + j\lim_{\Delta y \to 0} \frac{[v(x, y+) - v(x,y)]}{j\Delta y} = -ju_y + v_y = v_y - ju_y$$

شرط اینکه تابع تحلیلی باشد یعنی مشتق پذیر باشد اینست که دو مشتق بدست آمده با هم برابر باشند یعنی:

$$u_x + jv_x = v_y - ju_y \to \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

این قضیه را قضیه کوشی-رومان میگویند. در این حالت مشتق تابع هم از رابطه $f'(z) = u_x + jv_x$ بدست می آید و هم از رابطه $f'(z) = v_y - ju_y$ بدست می آید. مثال زیر این مسئله را روشن میکند.

مثال**6**: مشتق تابع $f(z)=\cos z$ را با استفاده از قضیه کوشی بدست آورید.

حل: ابتدا این تابع را به صورت قسمت حقیقی و موهومی مینویسیم:

$$f(z)=\cos z=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y\rightarrow u(x,y)=\cos x\cosh y\qquad v(x,y)=-\sin x\sinh y$$
$$u_x=-\sin x\cosh y\qquad v_x=-\cos x\sinh y\rightarrow f'(z)=u_x+jv_x=-\sin x\cosh y-\sin x\sinh y\rightarrow$$
$$f'(z)=-(\sin x\cosh y+\sin x\sinh y)=-\sin z$$

حال از تعریف دوم مشتق استفاده میکنیم:

$$f(z)=\cos z=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y\rightarrow u(x,y)=\cos x\cosh y\qquad v(x,y)=-\sin x\sinh y$$
$$v_y=-\sin x\cosh y\qquad u_y=\cos x\sinh y\rightarrow f'(z)=v_y-ju_y=-\sin x\cosh y-\sin x\sinh y\rightarrow$$
$$f'(z)=-(\sin x\cosh y+\sin x\sinh y)=-\sin z$$

همانطوریکه از مثال بالا دیده شد رابطه $\begin{cases}u_x=v_y\\ v_x=-u_y\end{cases}$ برقرار است یعنی تابع $f(z)=\cos z$ تحلیلی و مشتق پذیر است.

مثال**7**: با استفاده از قضیه کوشی مشتق $f(z)=\dfrac{1}{z}$ را بدست آورید.

حل: ابتدا این تابع را به صورت قسمت حقیقی و موهومی مینویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+jy}=\frac{x-jy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-j\frac{y}{x^2+y^2}\rightarrow u=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad v=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

حال از تعریف مشتق داریم:

$$u_x=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad v_x=\frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'(z)=u_x+jv_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+j\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2+j2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(y+jx)^2}{[(x+jy)(x-jy)]^2}\rightarrow$$
$$f'(z)=\frac{(y+jx)^2}{[(x+jy)]^2[(-j)(y+jx)]^2}=\frac{(y+jx)^2}{(x+jy)^2(-j)^2(y+jx)^2}=-\frac{1}{(x+jy)^2}=-\frac{1}{z^2}$$

نکته مهم اینست که اگر تابع مختلط تحلیلی باشد قسمت حقیقی و موهومی در معادله لاپلاس صدق میکنید زیرا:

$$\begin{cases}u_x=v_y\rightarrow u_{xx}=v_{yx}\\ v_x=-u_y\rightarrow u_{yy}=-v_{xy}\end{cases}\rightarrow u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0\rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$
$$\begin{cases}u_x=v_y\rightarrow v_{yy}=u_{xy}\\ v_x=-u_y\rightarrow v_{xx}=-u_{yx}\end{cases}\rightarrow v_{xx}+v_{yy}=u_{xy}-u_{yx}=0\rightarrow v_{xx}+v_{yy}=0$$

مثال**8**: اولا مشتق تابع $f(z)=\ln z$ را بدست آورده و ثانیا ثابت کنید قسمت حقیقی و موهومی این تابع در معادله لاپلاس صدق میکند.

حل: ابتدا تابع را به صورت قسمت حقیقی و موهومی مینویسیم:

$$f(z)=\ln z=\ln(\sqrt{x^2+y^2}e^{j\tan^{-1}\frac{y}{x}})=\ln\sqrt{x^2+y^2}+j\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+j\tan^{-1}\frac{y}{x}\to$$

$$u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\qquad v=\tan^{-1}\frac{y}{x}\qquad u_x=\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad v_x=\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{y}{x}=$$

$$\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}\to f'(z)=u_x+jv_x=\frac{x}{x^2+y^2}-j\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x-jy}{x^2+y^2}=\frac{x-jy}{(x+jy)(x-jy)}\to$$

$$f'(z)=\frac{1}{x+jy}=\frac{1}{z}\qquad u_{xx}=\frac{d}{dx}(\frac{x}{x^2+y^2})=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad u_y=\frac{d}{dy}\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u_{yy}=\frac{d}{dy}(\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\to u_{xx}+u_{yy}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

$$v_x=-\frac{y}{x^2+y^2}\qquad v_{xx}=\frac{d}{dx}(-\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad v_y=\frac{d}{dy}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v_{yy}=\frac{d}{dy}\frac{x}{x^2+y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\to v_{xx}+v_{yy}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

پس قسمتهای حقیقی و موهومی تابع داده شده در معادله لاپلاس صدق میکنند.

حال با استفاده از اعداد مختلط میتوان اندازه جمع و تفریق دو بردار را بدست آورد. فرض کنید مطابق شکل عدد مختلط $z_1=|z_1|e^{j\theta_1}$ و $z_2=|z_2|e^{j\theta_2}$ باشد. در اینصورت میتوان نوشت:

$$|z_1+z_2|=\left||z_1|e^{j\theta_1}+|z_2|e^{j\theta_2}\right|=\left||z_1|\cos\theta_1+j|z_1|\sin\theta_1+|z_2|\cos\theta_2+j|z_2|\sin\theta_2\right|=$$

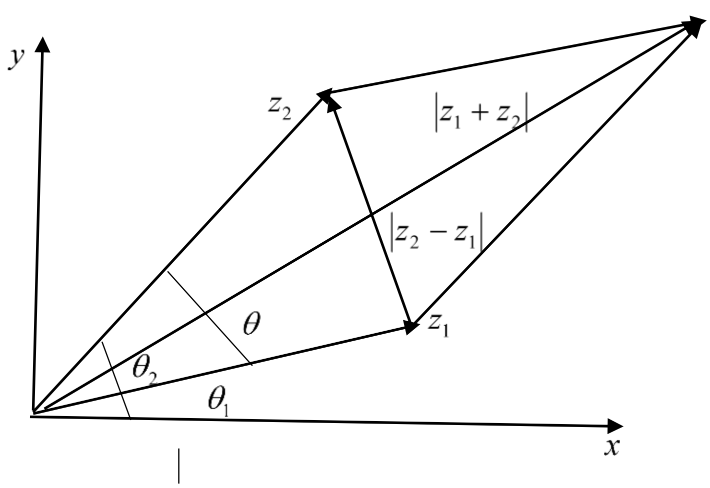
$$\sqrt{(|z_1|\cos\theta_1+|z_2|\cos\theta_2)^2+(|z_1|\sin\theta_1+|z_2|\sin\theta_2)^2}=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(\theta_2-\theta_1)}\to$$

$$|z_1+z_2|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos\theta}$$

$$|z_2-z_1|=\left||z_2|e^{j\theta_2}-|z_1|e^{j\theta_1}\right|=\left||z_2|\cos\theta_2+j|z_2|\sin\theta_2-|z_1|\cos\theta_1-j|z_1|\sin\theta_1\right|=$$

$$\sqrt{(|z_2|\cos\theta_2-|z_1|\cos\theta_1)^2+(|z_2|\sin\theta_2-|z_1|\sin\theta_1)^2}=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos(\theta_2-\theta_1)}\to$$

$$|z_2-z_1|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos\theta}$$



حال اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد در اینصورت میتوان نوشت:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \rightarrow \oint_C (u + jv)(dx + jdy) = \oint_C (udx - vdy) + j\oint_C (vdx + udy) = 0 \rightarrow$$

$$\oint_C (udx - vdy) = 0 \qquad \oint_C (vdx + udy) = 0$$

از معادلات بالا واضح است که اگر $\oint_C (udx - vdy) = 0$ باید تابع تحلیلی g وجود داشته باشد بطوریکه $udx - vdy = dg$ در اینصورت داریم:

$$udx - vdy = dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy \rightarrow u = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial g}{\partial y} \rightarrow u_y = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \qquad v_x = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \rightarrow v_x = -u_y$$

همچنین از معادلات بالا واضح است که اگر معادله $\oint_C (vdx + udy) = 0$ در اینصورت باید تابع تحلیلی h وجود داشته باشد بطوریکه $dh = vdx + udy$ در اینصورت داریم:

$$dh = vdx + udy \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy \rightarrow v = \frac{\partial h}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial h}{\partial y} \rightarrow v_y = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} \qquad u_x = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \rightarrow u_x = v_y$$

عبارات بدست آمده یعنی $u_x = v_y$ و $v_x = -u_y$ همان روابط کوشی-ریمان است که قبلا برای تابع تحلیلی $f(z)$ اثبات شده بود. واضح است که اگر در طرف دوم رابطه $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ به جای x پارامتر z و به جای y صفر قرار دهیم در اینصورت تابع $f(z)$ بدست می آید.

مثلا برای تابع $f(z) = z^2$ داریم:

$$f(z) = z^2 \rightarrow f(x + jy) = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$$

بنابراین اگر تابع به صورت $(x^2 - y^2) + j2xy$ داداه شده باشد برای اینکه این تابع را بر حسب z بیان کنیم داریم:

$$(x^2 - y^2) + j2xy]_{(x=z,\ y=0)}) = [z^2 - 0^2) + j2z \times 0] = z^2$$

قضیه کوشی-ریمان را میتوان از قضیه استوک و قضیه گرین هم بدست آورد. قضیه استوکس برای انتگرال یک بردار روی مسیر بسته به صورت زیر است:

$$\oint_C \overline{A}.d\overline{l} = \int_S (\overline{\nabla} \times \overline{A}).d\overline{s} \rightarrow \oint_C [A_x(x,y)\hat{x} + A_y(x,y)\hat{y}].(dx\hat{x} + dy\hat{y}) = \int_S (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_{xy}}{\partial y})dxdy \rightarrow$$

$$\oint_C A_x(x,y)dx + A_y(x,y)dy = \int_S (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_{xy}}{\partial y})dxdy$$

در حقیقت قضیه $\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_S (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy$ همان قضیه مشهور گرین است. حال برای تابع مختلط $f(z)$ داریم:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u + jv)(dx + jdy) = \oint_C udx - vdy + j\oint_C vdx + udy$$

اگر برای انتگرالهای سمت راست از قضیه گرین استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + j\oint_C vdx + udy = \int_S (\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + j\int_S (\frac{\partial(u)}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy \to$$
$$\oint_C f(z)dz = -\int_S (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + j\int_S (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy$$

حال اگر تابع تحلیلی باشد باید داشته باشیم:

$$\oint_C f(z)dz = -\int_S (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + j\int_S (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy = 0 \to \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \to v_x = -u_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \to u_x = v_y \end{cases}$$

که همان قضیه کوشی-ریمان است.

مثال 9: قسمت موهومی یک تابع تحلیلی مختلط به صورت $V(x,y) = 4y^3 - 4xy^3 + bx^3y + dx^2y + 12xy - 4y$ میباشد. اگر $f(1) = 0$ باشد مطلوبست $f(z)$

حل: ابتدا با توجه به اینکه قسمت موهومی باید در معادله لاپلاس صدق کند ضرایب را بدست بدست می آوریم:

$$V_{xx} + V_{yy} = 0 \to (6b - 24)xy + (24 + 2d)y = 0 \to b = 4 \quad d = -12 \to$$
$$V(x) = 4y^3 - 4xy^3 + 4x^3y - 12x^2y + 12xy - 4y$$

حال با استفاده از قضیه کوشی-ریمان قسمت حقیقی تابع را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \to \frac{\partial u}{\partial x} = 12y^2 - 12xy^2 + 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \to u = 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + g(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \to 24xy - 12x^2y + g'(y) = -(-4y^3 + 12x^2y - 24xy + 12y) \to g'(y) = 4y^3 - 12y \to$$
$$g(y) = y^4 - 6y^2 + k \to U(x,y) = 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + y^4 - 6y^2 + k \to$$
$$f = u(x,y) + jv(x,y) = 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + y^4 - 6y^2 + k +$$
$$j(4y^3 - 4xy^3 + 4x^3y - 12x^2y + 12xy - 4y) \qquad x \to z \quad y \to 0 \to f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + k$$
$$f(1) = 0 \to 1^4 - 4(1)^3 + 6(1)^2 - 4(1) + k = 0 \to k = 1 \to f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + +1 = (z-1)^4$$

مثال 10: اگر تابع مختلط به صورت $f = u(y) + jv(x)$ تحلیلی باشد این تابع را بدست آورید.

حل: از قضیه کوشی برای شرط تحلیلی بودن استفاده میکنیم:

$$u_x = v_y \to \frac{\partial u(y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x)}{\partial y} \to 0 = 0$$

پس شرط اول قضیه کوشی برقرار است حال شرط دوم را بررسی میکنیم:

$$v_x = -u_y \to \frac{\partial v(x)}{\partial x} = -\frac{\partial u(y)}{\partial y}$$

سمت چپ معادله تابع x و سمت راست آن تابع y است و این تساوی موقعی برقرار است که دو طرف عدد ثابت باشند یعنی:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x}=-\frac{\partial u(y)}{\partial y}=k\rightarrow\frac{\partial v(x)}{\partial x}=k\rightarrow v(x)=kx+c\qquad\frac{\partial u(y)}{\partial y}=-k\rightarrow u(y)=-ky+d\rightarrow$$
$$f=u(y)+jv(x)=-ky+d+j(kx+c)=kj(x+jy)+(d+jc)=kjz+e\rightarrow f(z)=kjz+e$$

که e و k عدد ثابت هستند.

مثال **11**: در رابطه زیر α را طوری تعیین کنید تا تابع در $z=0$ پیوسته باشد

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2\bar{z}+\mathrm{Im}(z)}{z+\mathrm{Re}(z)} & z\neq 0\\ \alpha & z=0\end{cases}$$

باید این تابع در $z=0$ حد داشته باشد و حدش مساوی مقدارش در $z=0$ باشد. ابتدا حد این تابع را در $z=0$ بدست می آوریم:

$$f(z)=\frac{2(x-jy)+y}{x+jy+x}=\frac{2x+y-2jy}{2x+jy}\rightarrow\lim_{z\to 0}\frac{2x+y-2jy}{2x+jy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x+y-2jy}{2x+jy}$$

برای محاسبه این حد یکبار $y=0$ فرض میشود و $x\rightarrow 0$ میل داده میشود در اینصورت داریم:

$$\lim_{z\to 0}\frac{2x+y-2jy}{2x+jy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{2x+y-2jy}{2x+jy}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x}=1$$

حال یکبار $x=0$ وفرض میشود و $y\rightarrow 0$ میل داده میشود در اینصورت داریم:

$$\lim_{z\to 0}\frac{2x+y-2jy}{2x+jy}=\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\frac{2x+y-2jy}{2x+jy}=\lim_{x\to 0}\frac{y(1-2j)}{jy}=-(j+2)$$

ملاحظه میشود که حد در دوحالت یکی نیست بنابراین تابع در $z=0$ حد ندارد در نتیجه در این نقطه پیوسته نیست. بنابراین به ازای هیچ مقداری از α تابع داده شده پیوسته نیست.

مثال **12**:ثابت کنید تابع $f(z)=2\,\mathrm{Re}(z)+3\bar{z}+3\,\mathrm{Im}(z)+z^2$ تحلیلی نیست.

حل:ابتدا تابع را به فرم $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ در می آوریم:

$$f(z)=2\,\mathrm{Re}(z)+3\bar{z}+3\,\mathrm{Im}(z)+z^2=2x+3(x-jy)+3y+(x+jy)^2=(x^2-y^2+5x+3y)+j(2xy-3y)$$
$$\rightarrow u(x,y)=x^2-y^2+5x+3y\qquad v(x,y)=2xy-3y\qquad u_x=2x+5\qquad v_y=2x-3$$
$$\rightarrow u_x\neq v_y$$

چون $u_x\neq v_y$ در نتیجه تابع تحلیلی نیست.

حال فرض کنید تابع $f(z)$ در مختصات قطبی نوشته شده باشد. به عبارت دیگری داریم:

$$f(z)=f(re^{j\theta})=u(r,\theta)+jv(r,\theta)$$

در این رابطه $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$. اگر این تابع تحلیلی باشد باید شرط کوشی ریمان برقرار باشد. حال این شرط را روی این تابع اعمال

میکنیم:

$$u_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta$$
$$v_\theta=\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=v_x(-r\sin\theta)+v_y r\cos\theta=r(-v_x\sin\theta+v_y\cos\theta)$$

چون تابع تحلیلی است باید داشته باشیم: $v_x=-u_y \qquad v_y=u_x$ **که با جایگزینی در** v_θ **داریم:**

$$v_\theta=r(-v_x\sin\theta+v_y\cos\theta)=r(u_y\sin\theta+u_x\cos\theta)$$

مشاهه میشود که داخل پرانتز همان u_r **است در نتیجه داریم:**

$$v_\theta=r(u_y\sin\theta+u_x\cos\theta)=ru_r\to u_r=\frac{1}{r}v_\theta$$

که این اولین معادله کوش است که معادل حالت $u_x=v_r$ **میباشد. حال معادله دوم کوشی را بدست می آوریم:**

$$v_r=\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta$$
$$u_\theta=\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=u_x(-r\sin\theta)+u_y r\cos\theta=r(-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta)$$

چون تابع تحلیلی است باید داشته باشیم: $v_x=-u_y \qquad v_y=u_x$ **که با جایگزینی در** u_θ **داریم:**

$$u_\theta=r(-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta)=r(-v_y\sin\theta-v_x\cos\theta)=-r(v_y\sin\theta+v_x\cos\theta)$$

مشاهده میشود که داخل پرانتز همان v_r **است در نتیجه داریم:**

$$u_\theta=-r(v_y\sin\theta+v_x\cos\theta)=-rv_r\to v_r=-\frac{1}{r}u_\theta$$

که این معادله دوم کوشی-ریمان است در نتیجه اگر تابع تحلیلی باشد باید دو شرط زیربرقرار باشد:

$$\begin{cases}u_r=\dfrac{1}{r}v_\theta\\[2mm] v_r=-\dfrac{1}{r}u_\theta\end{cases}$$

لازم به ذکر است که اگر تابع به صورت $u(r,\theta)+jv(r,\theta)$ **باشد جهت نوشتن تابع بر حسب** z **کافیست به جای** r **قرار دهیم** z **و به جای** θ **قرار دهیم صفر.**

مثال 13: اگر v **قسمت موهومی یک تابع مختلط تحلیلی** $f(z)$ **باشد با استفاده از قضیه کوشی تابع** $f(z)$ **را بدست آورید.**

$$f(0)=2j \text{ و } v(r,\theta)=\sin\theta(3r^3+7r+8r^2\cos\theta)-4r^3\sin^3\theta+2$$

حل: تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$v(r,\theta)=\sin\theta(3r^3+7r+8r^2\cos\theta)-4r^3\sin^3\theta+2=r^3(3\sin\theta-4\sin^3\theta)+8r^2\sin\theta\cos\theta$$
$$7r\sin\theta+2=r^3\sin 3\theta+4r^2\sin 2\theta+7r\sin\theta+2$$

حال از قضیه کوشی-ریمان استفاده میکنیم:

$$u_r=\frac{1}{r}v_\theta \to u_r=\frac{1}{r}(3r^3\cos 3\theta+8r^2\cos 2\theta+7r\cos\theta)=3r^2\cos 3\theta+8r\cos 2\theta+7\cos\theta \to$$
$$u=r^3\cos 3\theta+4r^2\cos 2\theta+7r\cos\theta+f(\theta)\to$$
$$f(r,\theta)=u(r,\theta)+jv(r,\theta)=r^3\cos 3\theta+4r^2\cos 2\theta+7r\cos\theta+f(\theta)+$$
$$j(r^3\sin 3\theta+4r^2\sin 2\theta+7r\sin\theta+2)\qquad r\to z\qquad \theta=0\to f(z)=z^3+4z^2+7z+f(\theta)+j2$$

$$f(0)=j2\to f(\theta)+j2=j2\to f(\theta)=0\to f(z)=z^3+4z^2+7z+j2$$

حل چند مسئله مختلط

1-ثابت کنید $\sin^{-1}z=-j\ln(jz+\sqrt{1-z^2})$

حل:با استفاده از تعریف تابع سینوس داریم:

$$\sin^{-1}z=A\to\sin A=z\to\frac{e^{jA}-e^{-jA}}{2j}=z\to(e^{jA})^2-2jze^{jA}-1=0\to e^{jA}=jz+\sqrt{(jz)^2+1}\to$$
$$e^{jA}=jz+\sqrt{-z^2+1}\to jA=\ln(jz+\sqrt{-z^2+1})\to A=\sin^{-1}z=-j\ln(jz+\sqrt{1-z^2})$$

مثلا $\sin^{-1}3$ برابر است با:

$$\sin^{-1}z=-j\ln(jz+\sqrt{1-z^2})\to\sin^{-1}3=-j\ln(j3+\sqrt{1-9})=-j\ln(j3+j2\sqrt{2})=-j\ln[j(3+2\sqrt{2})]=$$
$$-j[\ln j+\ln(2+2\sqrt{2})]=-j[\ln e^{j(2k\pi+\frac{\pi}{2})}+\ln(2+2\sqrt{2})]=-j[j(2k\pi+\frac{\pi}{2})+\ln(2+2\sqrt{2})]=$$
$$2k\pi+\frac{\pi}{2}-j\ln(2+2\sqrt{2})$$

2-ثابت کنید $\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$

حل:

$$\tanh^{-1}z=A\to\tanh A=z\to\frac{e^A-e^{-A}}{e^A+e^{-A}}=z\to\frac{e^{2A}-1}{e^{2A}+1}=z(e^{2A}+1)=e^{2A}-1\to e^{2A}(1-z)=1+z\to$$
$$e^{2A}=\frac{1+z}{1-z}\to 2A=\ln\frac{1+z}{1-z}\to A=\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

3- ثابت کنید اگر تابع $w=f(z)=u+jv$ تحلیلی باشد آنگاه در صفحه w معادله لاپلاس برقرار است (یعنی اگر تابع پتانسیل ψ در صفحه z در معادله لاپلاس صدق کند که به معنی $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$ در اینصورت $\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=0$)

حل:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=u_x\frac{\partial\psi}{\partial u}+v_x\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\psi}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(u_x\frac{\partial\psi}{\partial u}+v_x\frac{\partial\psi}{\partial v})=u_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial u}+u_x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\psi}{\partial u})+v_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial v}+v_x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\psi}{\partial v})\rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=u_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial u}+u_x(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}u_x+\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}v_x)+v_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial v}+v_x(\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}u_x+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}v_x)$$

به همین ترتیب برای $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ کافیست به جای x قرار دهیم y بنابراین:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=u_{yy}\frac{\partial\psi}{\partial u}+u_y(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}u_y+\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}v_y)+v_{yy}\frac{\partial\psi}{\partial v}+v_y(\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}u_y+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}v_y)$$

حال داریم:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=u_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial u}+u_x(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}u_x+\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}v_x)+v_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial v}+v_x(\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}u_x+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}v_x)+$$

$$u_{yy}\frac{\partial\psi}{\partial u}+u_y(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}u_y+\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}v_y)+v_{yy}\frac{\partial\psi}{\partial v}+v_y(\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}u_y+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}v_y)=$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u_{xx}+u_{yy})+\frac{\partial\psi}{\partial v}(v_{xx}+v_{yy})+2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}(u_xv_x+v_yu_y)+\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u_x^2+u_y^2)+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}(v_x^2+v_y^2)=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(0)+\frac{\partial\psi}{\partial v}(0)+2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}(u_x\times -u_y+u_xu_y)+\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u_x^2+u_y^2)+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}(u_y^2+u_x^2)=0\rightarrow$$

$$0+0+0+(u_x^2+u_y^2)(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2})=0\rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=0$$

موفق باشید

محمود محمدطاهری-اردیبهشت 1401