مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: نیکا امامی- سروش مس فروش- گلمهر خسروخاور

برای سوالات خود در خصوص این تمرین بار ایانامه emami.nika@gmail.com، sorush.mes@gmail.com، gkhosrokhavar@gmail.com مکاتبه نمایید.

۱) معادله موج زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$u_{xx} - u_{tt} = -\sin(\pi x)\sin(t)\,, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le t$
$u(0,t) = u(1,t) = 0$
$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$
$$\Longrightarrow U_{xx} - \left(s^2U - su(x,0) - u_t(x,0)\right) = -\frac{\sin(\pi x)}{s^2+1} \Longrightarrow U_{xx} - s^2U = -\frac{\sin(\pi x)}{s^2+1}$$
$$\Longrightarrow U(x,s) = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx} + \frac{\sin(\pi x)}{(s^2+1)(s^2+\pi^2)}$$
$$\text{BC: } \begin{cases} u(0,t) = 0 \Longrightarrow U(0,s) = 0 \\ u(1,t) = 0 \Longrightarrow U(1,s) = 0 \end{cases}$$
$$U(0,s) = c_1 + c_2 = 0$$
$$U(1,s) = c_1e^{-s} + c_2e^{s} = 0$$
$$\Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$$
$$\Longrightarrow U(x,s) = \frac{\sin(\pi x)}{(s^2+1)(s^2+\pi^2)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2-1}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right)$$
$$\Longrightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2-1}\left(\sin(t) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right)}$$

۲) معادله حرارت زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$u_{xx} - u_t = \sin(\pi t)\,, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le t$
$u_t(0,t) = -\sin(\pi t)\,, \qquad u(1,t) = \frac{1}{\pi}(\cos(\pi t) - 1)$
$u(x,0) = \sin(\pi x)$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$
$$\Longrightarrow U_{xx} - \left(sU - u(x,0)\right) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} \Longrightarrow U_{xx} - sU = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} - \sin(\pi x)$$
$$\Longrightarrow U(x,s) = c_1e^{-\sqrt{s}x} + c_2e^{\sqrt{s}x} - \frac{\pi}{(s^2+\pi^2)s} + \frac{\sin(\pi x)}{s+\pi^2}$$
$$\text{BC: } \begin{cases} u_t(0,t) = -\sin(\pi t) \Longrightarrow sU(0,s) = -\frac{\pi}{s^2+\pi^2} \\ u(1,t) = \frac{1}{\pi}(\cos(\pi t) - 1) \Longrightarrow U(1,s) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\pi^2} - \frac{1}{s}\right) \end{cases}$$
$$U(0,s) = c_1 + c_2 - \frac{\pi}{(s^2+\pi^2)s} = -\frac{\pi}{(s^2+\pi^2)s}$$
$$U(1,s) = c_1e^{-\sqrt{s}} + c_2e^{\sqrt{s}} - \frac{\pi}{(s^2+\pi^2)s} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\pi^2} - \frac{1}{s}\right)$$
$$\Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$$
$$\Longrightarrow U(x,s) = -\frac{\pi}{(s^2+\pi^2)s} + \frac{\sin(\pi x)}{s+\pi^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\pi^2} - \frac{1}{s}\right) + \frac{\sin(\pi x)}{s+\pi^2}$$
$$\Longrightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi t) - \frac{1}{\pi} + e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)}$$

۳) معادله حرارت زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

$u_{xx} - u_t = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad 0 \le t$
$u(x,0) = e^{-x}\cos(\omega_0 x)\,u(x)$

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(\omega,t)$$
$$\Rightarrow -\omega^2 U - U_t = 0$$
$$\Rightarrow U(\omega,t) = c_1 e^{-\omega^2 t}$$
$$u(x,0) = e^{-x}\cos(\omega_0 x)\,u(x) \Rightarrow U(\omega,0) = \frac{i\omega+1}{(i\omega+1)^2+\omega_0^2} = c_1$$
$$\Rightarrow U(\omega,t) = \frac{i\omega+1}{(i\omega+1)^2+\omega_0^2}e^{-\omega^2 t}$$
$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = e^{-x}\cos(\omega_0 x)\,u(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

۴) معادله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$u_x + x u_t = 0, \qquad 0 \le x, \qquad 0 \le t$
$u(x,0) = 0$
$u(0,t) = t$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$
$$\Rightarrow U_x + xsU - xu(x,0) = 0 \Rightarrow U_x + xsU = 0$$
$$\Rightarrow U(x,s) = c_1 e^{-s\frac{x^2}{2}}$$
$$u(0,t) = t \Rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{s^2}$$
$$\Rightarrow U(x,s) = \frac{1}{s^2}e^{-s\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \boxed{u(x,t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right)u\left(t - \frac{x^2}{2}\right)}$$

۵) معادله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$u_{xx} - u_{tt} = 4e^{-2t}, \qquad 0 \le x \le 2, \qquad 0 \le t$
$u(0,t) = 1 - 2t - e^{-2t}, \qquad u(2,t) = 3 - 2t - e^{-2t}$
$u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0) = 0$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$
$$\Rightarrow U_{xx} - \left(s^2 U - su(x,0) - u_t(x,0)\right) = \frac{4}{s+2}$$
$$U_{xx} - s^2 U^2 + sx = \frac{4}{s+2}$$
$$U(x,s) = c_1 e^{-sx} + c_2 e^{sx} + \frac{x+1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2}$$
$$\text{BC:}\begin{cases} u(0,t) = 1 - 2\mathrm{t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \Rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2} = c_1 + c_2 + \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2} \\ u(2,t) = 3 - 2\mathrm{t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \Rightarrow U(2,s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2} = c_1 e^{-2s} + c_2 e^{2s} + \frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$
$$\Rightarrow U(x,s) = \frac{x+1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = (x+1)u(t) - 2tu(t) - e^{-2t}u(t)}$$

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: نیکا امامی- سروش مس فروش- گلمهر خسروخاور

برای سوالات خود درخصوص این تمرین با رایانامه emami.nika@gmail.com، sorush.mes@gmail.com، gkhosrokhavar@gmail.com مکاتبه نمایید.

۶) معادله لاپلاس زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad -\infty<x<\infty,\qquad 0\le y$$
$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2\pi}\right),\qquad u_y(x,0)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$

$$\mathcal{F}\{u(x,y)\}=U(\omega,y)$$
$$\Longrightarrow -\omega^2U+U_{yy}=0$$
$$\Longrightarrow U(\omega,y)=c_1e^{-\omega y}+c_2e^{\omega y}$$
$$\text{BC:}\begin{cases}u(x,0)=\Pi(x)\Longrightarrow U(\omega,0)=\Pi(\omega)=c_1+c_2\\ u_y(x,0)=\Lambda(x)\Longrightarrow U_y(\omega,0)=\Lambda(\omega)=-c_1\omega+c_2\omega\end{cases}$$
$$\Longrightarrow\begin{cases}c_1=\dfrac{1}{2}\Pi(\omega)-\dfrac{1}{2\omega}\Lambda(\omega)\\ c_2=\dfrac{1}{2}\Pi(\omega)+\dfrac{1}{2\omega}\Lambda(\omega)\end{cases}$$
$$\Longrightarrow U(\omega,y)=\left(\frac{1}{2}\Pi(\omega)-\frac{1}{2\omega}\Lambda(\omega)\right)e^{-\omega y}+\left(\frac{1}{2}\Pi(\omega)+\frac{1}{2\omega}\Lambda(\omega)\right)e^{\omega y}$$