سوال ۱)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = \int_{-1}^{0}(1+x)e^{-j\omega x}dx + \int_{0}^{1}(1-x)e^{-j\omega x}dx$$
$$= \left[\frac{-(1+x)e^{-j\omega x}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega x}}{\omega^2}\right]\begin{matrix}0\\-1\end{matrix} + \left[\frac{-(1-x)e^{-j\omega x}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega x}}{\omega^2}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$
$$= \frac{-1}{j\omega} + \frac{1-e^{j\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{j\omega} + \frac{1-e^{-j\omega}}{\omega^2} = \frac{2-e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{\omega^2}$$

اکنون تلاش می کنیم که $F(\omega)$ را به $G(\omega)$ تبدیل کرده و از روی آن g(x) را پیدا کنیم.

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2-e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{\omega^2} \quad \xrightarrow{\text{شیفت زمانی}} \quad f(x-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2e^{-j\omega}-e^{-2j\omega}-1}{\omega^2}$$
$$\xrightarrow{\text{مشتق زمانی}} \quad \frac{d}{dx}\big(f(x-1)\big) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\,\frac{2e^{-j\omega}-e^{-2j\omega}-1}{\omega}$$
$$\xrightarrow{\text{شیفت فرکانسی}} \quad e^{jx}\frac{d}{dx}\big(f(x-1)\big) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad j\,\frac{2e^{-j(w-1)}-e^{-2j(\omega-1)}-1}{\omega-1}$$

پس می توان گفت که:

$$g(x) = e^{jx}\frac{d}{dx}\big(f(x-1)\big)$$

مسیر طی شده را به ترتیب روی f(x) اعمال می کنیم تا به g(x) برسیم.

$$f(x-1) = \begin{cases} 1-|x-1| & |x-1|<1 \\ 0 & o.w \end{cases} \rightarrow f(x-1) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x-1)\big) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ -1 & 1<x<2 \\ 0 & o.w \end{cases} \rightarrow g(x) = e^{jx}\frac{d}{dx}\big(f(x-1)\big)$$
$$= \begin{cases} e^{jx} & 0<x<1 \\ -e^{jx} & 1<x<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

با فرض اینکه تابع $G(\omega)$ به صورت زیر باشد،خواهیم داشت:

$$G(\omega) = \quad j\,\frac{2e^{-j(w-1)}-e^{-2j(\omega-1)}-1}{(\omega-1)^2}$$

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2-e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{\omega^2} \quad \xrightarrow{\text{شیفت زمانی}} \quad f(x-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2e^{-j\omega}-e^{-2j\omega}-1}{\omega^2}$$
$$\xrightarrow{\text{شیفت فرکانسی}} \quad e^{jx}\big(f(x-1)\big) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{2e^{-j(w-1)}-e^{-2j(\omega-1)}-1}{(\omega-1)^2}$$

$$je^{jx}\big(f(x-1)\big) \ \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\ j\frac{2e^{-j(w-1)}-e^{-2j(\omega-1)}-1}{(\omega-1)^2}$$

پس می توان گفت که:

$$g(x)=\ je^{jx}\big(f(x-1)\big)$$

مسیر طی شده را به ترتیب روی f(x) اعمال می کنیم تا به g(x) برسیم.

$$f(x-1)=\begin{cases}1-|x-1| & |x-1|<1\\ 0 & o.w\end{cases} \ \rightarrow\ f(x-1)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$e^{jx}\big(f(x-1)\big)=\begin{cases}xe^{jx} & 0<x<1\\ (2-x)e^{jx} & 1\le x<2\\ 0 & o.w\end{cases} \ \rightarrow\ g(x)=je^{jx}\big(f(x-1)\big)$$

$$=\begin{cases}jxe^{jx} & 0<x<1\\ j(2-x)e^{jx} & 1\le x<2\\ 0 & o.w\end{cases}$$

سوال ۲)

$$F(\omega)=\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\ e^{-j\omega x}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{jx(1-\omega)}}{j(1-\omega)}+\frac{e^{-jx(1+\omega)}}{j(1+\omega)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\omega\pi}-e^{-j\omega\pi}}{j(1-\omega)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\omega\pi}-e^{-j\omega\pi}}{j(1+\omega)}\right]=\sin\pi\omega\times\left[\frac{1}{(1-\omega)}-\frac{1}{(1+\omega)}\right]$$

$$=\frac{2\omega\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$$

اکنون با استفاده از فرمول تبدیل فوریه و داشتن تبدیل f(x) می توانیم مقدار انتگرال داده شده را حساب کنیم.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega\sin\omega\pi}{1-\omega^2}e^{j\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega\sin\omega\pi}{1-\omega^2}j\sin\omega x\,d\omega}_{0}$$

$$=\frac{-2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega\pi\cos\omega x\,d\omega}{\omega^2-1}=f(x)$$

با یک تغییر نوتیشن می توان نوشت:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x\pi\cos\omega x\,dx}{x^2-1}=I=\frac{-\pi}{2}f(\omega)=\begin{cases}\frac{-\pi}{2}\cos\omega & |\omega|<\pi\\ 0 & o.w\end{cases}$$

البته باید توجه داشته باشیم که تابع در نقطه ی $\omega = \pm\pi$ ناپیوسته است.پس با استفاده از قضیه ی دیریکله برای تبدیل فوریه می توان نوشت:

$$\omega = \pm\pi \;\rightarrow\; I = \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \;\rightarrow\; I = \begin{cases} \frac{-\pi}{2}\cos\omega & |\omega| < \pi \\ 0 & o.w \\ \frac{\pi}{4} & |\omega| = \pi \end{cases}$$

سوال ۳)

ابتدا باید تابع $f(x)$ را بیابیم.سمت راست، کانولوشن دو تابع $f(x)$ و $e^{-|x|}$ است.لذا می توان با استفاده از تبدیل فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد.

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(t)dt\right\} = \mathcal{F}\left\{(1+|x|)e^{-|x|}\right\} \rightarrow F(\omega) \times \frac{2}{1+\omega^2} = \mathcal{F}\left\{(1+|x|)e^{-|x|}\right\}$$

$$\mathcal{F}\left\{(1+|x|)e^{-|x|}\right\} = \mathcal{F}\left\{e^{-|x|}\right\} + \mathcal{F}\left\{|x|e^{-|x|}\right\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{|x|e^{-|x|}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-|x|}e^{-j\omega x}dx = \int_{-\infty}^{0} -xe^{x(1-j\omega)}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x(1+j\omega)}dx \\ &= \left[\frac{-xe^{x(1-j\omega)}}{1-j\omega} + \frac{e^{x(1-j\omega)}}{(1-j\omega)^2}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{xe^{-x(1+j\omega)}}{-(1+j\omega)} - \frac{e^{-x(1+j\omega)}}{(1+j\omega)^2}\right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{(1-j\omega)^2} + \frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\left\{(1+|x|)e^{-|x|}\right\} = \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2} = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}$$

$$F(\omega) \times \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{4}{(1+\omega^2)^2} \;\rightarrow\; F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

با استفاده از رابطه ی داده شده می توان نوشت:

$$f(t) \;\rightarrow\; f(t-5) \;\rightarrow\; f(2t-5) \;\rightarrow\; f(2t-5) \times e^{-j2t} = g(t)$$

$$F(\omega) \;\rightarrow\; e^{-5j\omega}F(\omega) \rightarrow \frac{1}{2}\, e^{-\frac{5}{2}j\omega} F\left(\frac{\omega}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}\, e^{-\frac{5}{2}j(\omega+2)} F\left(\frac{\omega+2}{2}\right) = G(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{5}{2}j(\omega+2)} \times \frac{2}{1 + \frac{(\omega+2)^2}{4}}$$

سوال ۴)

طرف راست را یک تابع می گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(x) & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos((\alpha+1)\,x) + \cos((\alpha-1)x)]dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1-\ \alpha^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos(\alpha x)\,d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1-\ \alpha^2}\cos(\alpha x)\,d\alpha$$

سوال ۵)

$$f(x) = \int_0^\infty A(a)\cos(ax)\,, A(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(ax)\,dx$$

$$A'(a) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xf(x)\sin(ax)\,dx \to \frac{\pi}{2}\big(3A(a) + A'(a)\big) = 0 \to A(a) = ce^{-3a}$$

$$f(x) = \int_0^\infty ce^{-3a}\cos(ax)\,da = c\,\frac{3}{9+x^2} \to c = 3\ (f(0)=1) \to f(x) = \frac{9}{9+x^2}$$

سوال ۶)

$$f(t) = \int_0^\infty (A(w)\cos(wt) + B(w)\sin(wt))dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty (f(t^*)\cos(wt^*)\,dt^*$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty (f(t^*)\sin(wt^*)\,dt^*$$

$$f(t) = \int_0^\infty (\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t^*)\cos(wt^*)\,dt^*\cos(wt)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t^*)\sin(wt^*)\,dt^*\sin(wt))dw$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\int_{-\infty}^{\infty} f(t^*)\cos(wt^*)\cos(wt)\,dt^* + \int_{-\infty}^{\infty} f(t^*)\sin(wt^*)\sin(wt)\,dt^*\,)\,dw$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(t^*)\,(\cos(wt^*)\cos(wt) + \sin(wt^*)\sin(wt)dt^*)dw$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(t^*)\ \cos w(t^* - t)dt^*dw = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t^*)\ \frac{\sin(w(t^*-t)}{t^*-t}\Big]_{\infty}^{0} dt^* =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t^*)\lim_{w\to\infty}\frac{\sin(w(t^*-t)}{t^*-t}\ dt^*$$