

دانشخاه تمران- دانمشکه مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریمختلط مدرس: دکترمهدی طالع ماسوله- حل تمرین: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص اين تمرين ارايانه ه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه نايد.

(1

الف)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 0 \le x \le 2\\ 0, & 2 < x \le 4 \end{cases}$$
 $T = 4$

$$c_n = \frac{1}{4} \int_0^2 \sin \pi x \, e^{-j\frac{n\pi}{2}x} \, dx = \frac{1}{8j} \int_0^2 \left(e^{j\left(\pi - \frac{n\pi}{2}\right)x} - e^{-j\left(\pi + \frac{n\pi}{2}\right)x} \right) dx = \frac{(-1)^n - 1}{(\pi - \pi^{\frac{n^2}{4}})} \qquad n \neq 2, -2$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \int_0^2 \sin \pi x \, e^{-j\pi x} \, dx = \frac{1}{4j}$$

$$c_{-2} = \frac{1}{4} \int_{0}^{2} \sin \pi x \, e^{+j\pi x} \, dx = \frac{-1}{4j}$$

ر ب

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 e^{-jn\pi x} dx = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-x^2}{jn\pi} e^{-jn\pi} \right) \Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{jn\pi} \int_{-1}^{1} x e^{-jn\pi x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{jn\pi} \int_{-1}^{1} x e^{-jn\pi x} dx = \frac{1}{jn\pi} \left(\left(\frac{-x}{jn\pi} e^{-jn\pi} \right) \Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{jn\pi} \int_{-1}^{1} e^{-jn\pi x} dx \right) = \frac{2(-1)^{n}}{\pi^{2} n^{2}} \qquad n \neq 0$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$



دانشخاه تهران- دانشگره مهندی برق و کاپپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مختلط مدرس: دکترمدی طالع ماسوله- مل تمرن: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص اين تمرين ارايانه ه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه نايد.

ج)

$$h(x) = e^{-|x|}\cos(20\pi x) \qquad -2 < x < 2 \qquad T = 4$$

$$c_{n=\frac{1}{8}} \left(\int_{-2}^{0} e^{x} \left(e^{j20\pi x} + e^{-j20\pi x} \right) e^{-j\frac{n\pi}{2}x} dx + \int_{0}^{2} e^{-x} \left(e^{j20\pi x} + e^{-j20\pi x} \right) e^{-j\frac{n\pi}{2}x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{\left(1+20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)x}}{\left(1+20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{e^{\left(1-20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)x}}{\left(1-20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)} \right) \Big|_{-2}^{0}$$

$$+ \frac{1}{8} \left(\frac{e^{\left(-1+20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)x}}{\left(-1+20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{e^{\left(-1-20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)x}}{\left(-1-20j\pi-j\frac{n\pi}{2}\right)} \right) \Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{(e^{-2}+1)}{2(1+400\pi^{2}+\frac{n^{2}\pi^{2}}{2}-20\pi^{2}n)}$$

(٢

الف)

$$T=4 \Rightarrow \omega_0 = rac{k\pi}{2}$$
 $c_n = \left\{ egin{array}{ll} jk & , & |k| < 3 \ 0 & , & |k| < 3 \end{array}
ight.$ در غیر این صورت

$$f(x) = -2je^{-j\pi x} + -je^{-j\frac{\pi}{2}x} + 0 + je^{j\frac{\pi}{2}x} + 2je^{j\pi x} = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 4\sin\left(\pi x\right)$$



دانشخاه تهران- دانمشگره مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مختلط مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله- حل تمرن: وصال بخت آزاد



رای بوالات نود درخصوص این تمرین ما را مالمه می <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه نامد .

ب)

$$c_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{9k\pi}{40}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{40}\right), & m = 0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{k\pi}, & m = 0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} c_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right), & m = 0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} c_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right), & m = 0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} c_k = \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right), & m = 0 \end{cases}$$

$$c_k = c_1 + c_2$$

$$c_{1k}=\left\{ egin{array}{ll} 0 & , & k=0 \ & \displaystyle rac{k\pi}{4} \end{array}
ight. & , & \displaystyle c_{1k}=0 \end{array}$$
 در غیر این صورت $c_{1k}=\left\{ egin{array}{ll} 0 & , & c_{1k}=0 \end{array}
ight.$

با توجه به اسلاید ۱۷۵ می دانیم:

$$f(x) = \begin{cases} A, & x < \left| \frac{d}{2} \right| \\ 0, & \left| \frac{d}{2} \right| < x < \left| \frac{T}{2} \right| \end{cases} \iff c_k = \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\frac{n\pi d}{T}}$$

پس داريم:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x < \left| \frac{1}{2} \right| \\ 0, & \left| \frac{1}{2} \right| < x < |2| \end{cases} \Leftrightarrow c_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} \qquad c_0 = \frac{1}{4}$$

با جمع کردن این تابع با تابعی که تنها افست متفاوتی با این تابع دارد می توان مقدار c_0 را صفر کرد:



دانشخاه تهران- دانشگره مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریمختلط مدرس: دکترمهدی طالع ماسوله- حل تمرین: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص این تمرین ما رایامه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه ناید.

$$g_1(x) = f_1(x) - \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} \qquad c_0 = -\frac{1}{4}$$

$$h_1(x) = \frac{f_1(x) + g_1(x)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c_{1k}$$

به همین ترتیب برای c_{2k} داریم:

$$c_{2k}=\left\{ egin{array}{ccc} 0 & , & k=0 \ \dfrac{\sin{(rac{k\pi}{5})}}{k\pi} & , & \end{array}
ight.$$
 در غیر این صورت $c_{2k}=\left\{ egin{array}{ccc} 0 & , & k=0 \ \end{array}
ight.$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & x < \left| \frac{4}{5} \right| \\ 0, & \left| \frac{4}{5} \right| < x < |2| \end{cases} \iff c_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{k\pi} \qquad c_0 = \frac{2}{5}$$

با جمع کردن این تابع با تابعی که تنها افست متفاوتی با این تابع دارد می توان مقدار c_0 را صفر کرد:

$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{4}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} \qquad c_0 = -\frac{2}{5}$$

$$h_2(x) = \frac{f_2(x) + g_2(x)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c_{2k}$$



دانشخاه تهران- دانسگره مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مخلط مدرس: دکترمهدی طالع ماسوله- حل تمرین: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص اين تمرين ما رايامه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتب مايد.

(٣

الف)

$$(t) = \sum_{k}^{odd} C_k e^{jk\frac{2\pi t}{T}}$$

$$x\left(t + \frac{T}{2}\right) = \sum_{k=0}^{odd} C_k e^{jk\frac{2\pi(t + \frac{T}{2})}{T}} = \sum_{k=0}^{odd} C_k e^{jk\frac{2\pi t}{T}} e^{jk\pi}$$

As we know: $e^{jk\pi} = -1 \rightarrow x(t + T/2) = -x(t)$

ب)



دانشخاه تهران- دانمشکه ههندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مختلط مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - حل تمرن: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص اين تمرين ما رايامه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه نايد.

(4

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jnx} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-jn)x} dx + \int_{-\pi}^{0} e^{-(a+jn)x} dx \right)$$

$$2\pi \left(\int_0^{\epsilon} ux \right) \int_{-\pi}^{\epsilon} ux$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{a - jn} \left(e^{(a - jn)\pi} - 1 \right) + \frac{1}{a + jn} \left(e^{(a + jn)\pi} - 1 \right) \right]$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi(a^2 + n^2)} \left[(a + jn)e^{(a-jn)\pi} - (a + jn) + (a - jn)e^{(a+jn)\pi} - (a - jn) \right]$$

As you know $e^{jn\pi} = (-1)^n$ so we have:

$$c_n = \frac{1}{2\pi (a^2 + n^2)} (2a(-1)^n e^{a\pi} - 2a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n e^{5\pi} - 1}{n^2 + 25} \right]^2 = Y \qquad (a = 5)$$

از رابطه پارسوال می دانیم

$$\frac{1}{T} \int_{T} |f(x)|^{2} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n}|^{2} = c_{0}^{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_{n}|^{2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2a|x|} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} e^{-2ax} dx + \int_{0}^{\pi} e^{2ax} dx \right) = c_{0}^{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|c_{n}|)^{2}$$



دانشخاه تهران- دانشگره مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریمخلط مدرس: دکترمدی طالع ماسوله- حل تمرن: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص اين تمرين ارايانه مه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه نايد.

$$= \frac{1}{10\pi} (e^{10\pi} - 1) = \frac{(e^{5\pi} - 1)^2}{25\pi^2} + \frac{50}{\pi^2} Y$$

$$Y = \frac{e^{10\pi}(2.5\pi - 1) + 2e^{5\pi} - (2.5\pi + 1)}{1250}$$

(Δ

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^3 = \frac{e^{3jx} - 3e^{jx} + 3e^{-jx} - e^{-3jx}}{-8j}$$

$$\frac{1}{T} \int_{T} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^6(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^6(x) dx = \left(\left| \frac{1}{-8j} \right| \right)^2 + \left(\left| \frac{3}{8j} \right| \right)^2 + \left(\left| \frac{-3}{8j} \right| \right)^2 + \left(\left| \frac{1}{8j} \right| \right)^2$$



دانشخاه تهران- دانشگره مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریمخلط مدرس: دکترمدی طالع ماسوله- حل تمرین: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص اين تمرين ما رايامه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه نايد.

(8

$$f'(x) = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot in}{(a-in)} e^{inx}$$

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{2ix}dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$= 2\pi \times \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^{-2} \cdot (-2)i}{(a-i(-2))} + 2\pi \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sinh(a\pi)}{\pi(a-in)} \right|^{2}$$

$$=2\pi\times\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\times\frac{-2i}{(a+2i)}+2\pi\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh^2(a\pi)}{\pi^2(a^2+n^2)}$$

(\)

$$f(x,y) = x^2y - xy^2$$

$$0 < x < \pi \quad , \quad 0 < y < \pi$$

$$f(x,y) = A_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(y)\cos(2nx) + B_n(y)\sin(2nx)]$$

$$A_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 y - xy^2 dx = \frac{\pi^2}{3} y - \frac{\pi}{2} y^2$$

$$A_n(y) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (x^2 y - xy^2) \cos(2nx) \, dx$$



دانشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مختلط مدرس: دکترمه دی طالع ماموله- حل تمرین: وصال بخت آزاد



راى موالات خود دخصوص اين تمرين بارايا ماسه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه مايد.

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi} x^{2} y \cos(2nx) \, dx + \int_{0}^{\pi} x y^{2} \cos(2nx) \, dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(y \int_{0}^{\pi} x^{2} \cos(2nx) \, dx + y^{2} \int_{0}^{\pi} x \cos(2nx) \, dx \right)$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$A_n(y) = \frac{y}{n^2}$$

$$B_n(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 y - xy^2) \sin(2nx) \, dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} x^2 y \sin(2nx) \, dx + \int_0^{\pi} xy^2 \sin(2nx) \, dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(y \int_{0}^{\pi} x^{2} \sin(2nx) \, dx + y^{2} \int_{0}^{\pi} x \sin(2nx) \, dx \right)$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$B_n(y) = \frac{-\pi y}{n} + \frac{y^2}{n}$$



دانشخاه تهران - دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی - نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مختلط مدرس: دکترمدی طالع ماموله - حل تمرین: وصال بخت آزاد



راى موالات خود دخصوص اين تمرينها رايانامه <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> محاتبه ناييد.

$$A_0(y) = a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m0}\cos(2my) + b_{m0}\sin(2my)]$$

$$a_{00} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi^{2}}{3} y - \frac{\pi}{2} y^{2} dy = 0$$

$$a_{m0} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi^{2}}{3} y - \frac{\pi}{2} y^{2} \right) \cos(2my) \, dy$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$a_{m0} = \frac{-\pi}{2m^2}$$

$$b_{m0} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} y - \frac{\pi}{2} y^2 \right) \sin(2my) \, dy$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$b_{m0} = \frac{\pi^2}{6m}$$

$$A_n(y) = a_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mn}\cos(2my) + b_{mn}\sin(2my)]$$

$$a_{0n} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{y}{n^2} dy = \frac{\pi}{2n^2}$$



دانشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰–۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مختلط مدرس: دکترمه دی طالع ماموله- حل تمرین: وصال بخت آزاد



براى بوالات نود درخصوص اين تمرين ارايانامه bakhtazad.v@gmail.com محاتب نايد.

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{y}{n^2} \cos(2my) \, dy$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$a_{mn}=0$$

$$b_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{y}{n^2} \sin(2my) \, dy$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$b_{mn} = \frac{-1}{mn^2}$$

$$B_n(y) = c_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{mn}\cos(2my) + d_{mn}\sin(2my)]$$

$$c_{0n} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{-\pi y}{n} + \frac{y^{2}}{n} \right) dy = \frac{-\pi^{2}}{6n}$$

$$c_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{-\pi y}{n} + \frac{y^2}{n} \right) \cos(2my) \, dy$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$c_{mn} = \frac{1}{m^2 n}$$



دانشخاه تهران- دانسگره مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال دوم سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تمرین ۲: سری فوریه مخلط مدرس: دکترمهدی طالع ماسوله- حل تمرین: وصال بخت آزاد



براى بوالات خود دخصوص اين تمرينها رايامه bakhtazad.v@gmail.com محاتبه ناييد.

$$d_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{-\pi y}{n} + \frac{y^{2}}{n} \right) \sin(2my) \, dy$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$d_{mn} = 0$$

و در آخر ضرایب بدست آمده را در رابطه ی زیر جایگذاری می کنیم:

$$f(x,y) = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n}\cos(2nx) + c_{0n}\sin(2nx))$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0}\cos(2my) + b_{m0}\sin(2my))$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn}\cos(2nx)\cos(2my) + b_{mn}\cos(2nx)\sin(2my)$$

$$+ c_{mn}\sin(2nx)\cos(2my) + d_{mn}\sin(2nx)\sin(2my))$$

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n^2}\cos(2nx) - \frac{\pi^2}{6n}\sin(2nx)\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2m^2}\cos(2my) + \frac{\pi^2}{6m}\sin(2my)\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{mn^2}\cos(2nx)\sin(2my) + \frac{1}{m^2n}\sin(2nx)\cos(2my)\right)$$