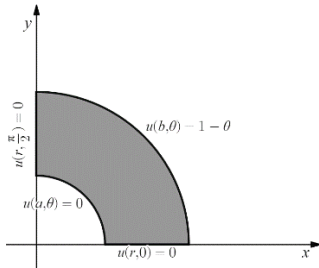


برای سوالات خود در خصوص این تمرین با ایمانمه [nimahashemi57@gmail.com](mailto:nimahashemi57@gmail.com) یا گلنار [gkhosrokhavar@gmail.com](mailto:gkhosrokhavar@gmail.com) یا نیما [nimahashemi57@gmail.com](mailto:nimahashemi57@gmail.com) مکاتبه کنید.

۱) معادله لاپلاس را در ناحیه مشخص شده و با شرایط مرزی زیر حل کنید.

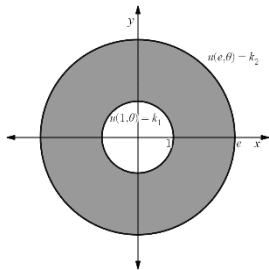


$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$u(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = 1 - \theta$$

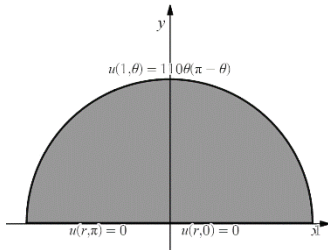
۲) معادله زیر را حل کنید.



$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 \leq r \leq e, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u(1, \theta) = k_1, \quad u(e, \theta) = k_2$$

۳) می‌دانیم که پتانسیل الکترواستاتیک، معادله لاپلاس  $\nabla^2 u = 0$  را در هر منطقه‌ای که بار الکتریکی در آن صفر باشد، ارضا می‌کند. پتانسیل الکتریکی را در شکل زیر بدست آورید.



$$\nabla^2 u = 0, \quad r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0$$

$$u(1, \theta) = 110\theta(\pi - \theta)$$

۴) معادله لاپلاس زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u_{\theta}(r, 0) = 0, \quad u_{\theta}(r, 2\pi) = 0$$

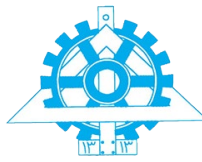
$$u(1, \theta) = 1 - \Pi\left(\frac{\theta - \pi}{\pi}\right), \quad u(2, \theta) = \theta$$

۵) معادله لاپلاس زیر را حل کنید. (امتیازی)

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_{\theta}(r, 0) = u_{\theta}(r, 2\pi)$$

$$u(1, \theta) = |\cos(2\theta)| + \cos(2\theta)$$



برای سوالات خود در خصوص این تمرین با ایمانامه [nimahashemi57@gmail.com](mailto:nimahashemi57@gmail.com) یا گلنهر [gkhosrokhavar@gmail.com](mailto:gkhosrokhavar@gmail.com) مکاتبه کنید.

۶) معادله لاپلاس زیر را حل کنید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$u_{\theta}(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \theta\right) = \Pi\left(\frac{\theta}{\pi}\right), \quad u(2, \theta) = 1 - \Pi\left(\frac{\theta}{\pi}\right)$$

۷) معادله لاپلاس زیر را حل کنید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u_{\theta}\left(r, \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$u(1, \theta) = \Lambda\left(\frac{\theta - \frac{3\pi}{4}}{\frac{3\pi}{2}}\right), \quad u(2, \theta) = \Pi\left(\frac{\theta}{\frac{3\pi}{2}}\right)$$

۸) معادله لاپلاس زیر را حل کنید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u(2, \theta) = \Lambda\left(\frac{\theta - \pi}{2\pi}\right)$$

۹) معادله لاپلاس زیر را حل کنید. (امتیازی)

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$u(r_0, \theta) = \theta\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \quad u(r_1, \theta) = \theta^2$$

موفق باشید.