

انشگاه تهران- دانشگده مهندسی برق و کاپپوتر

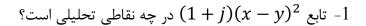
ریاضیات مهندس-نیم سال اول سال ۱۳۹۹

ياسخ تمرين 8: اعداد مختلط و محاثت

. مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - حل تمرن: مهسامعود-د ناعر بی







حل 1:

تابع را به صورت زیر مینویسیم:

$$f(z) = (1+j)(x-y)^2 = (x-y)^2 + j(x-y)^2 = u(x,y) + jv(x,y)$$

حال شرط کوشی-ریمان را بررسی می کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2(x - y) = -2(x - y) \rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2(x - y) = -2(x - y)$$

پس فقط به ازای x=y تحلیلی است.

2- مشتق توابع زیر را در نقاطی که مشتق پذیر هستند بدست آورید:

a)
$$f(z) = |x| + j|y|$$
 b) $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$ c) $f(z) = [Re(Z)]^2 - j[Im(Z)]^2$

حل 2:

حل a-2) برای اولی داریم:

$$u = |x|, v = |y| \to u_x = v_y \to \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \to \frac{x^2}{|x|} = \frac{xy}{|y|} \to xy > 0$$

$$\to first \ and \ third \ quarters$$

$$v_x = -u_y \to 0 = 0$$



انشگاه تهران- دانشگده مهندی برق و کامپیوتر

ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹

ياسخ تمرين 8: اعداد مخلط و محاشت

. مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - عل تمرن: مهسامعود-د ناعر بی



mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com

ىكاتىەنلىد.

پس در ربع اول و سوم تحلیلی است بنابراین مشتق پذیر است. حال تابع را میتوان به صورت زیر نوشت که تحلیلی خواهد بود.

$$f(z) = |x| + j|y| = \frac{x|y|}{y} + jy \rightarrow f'_{(z)} = u_x + jv_x = \frac{|y|}{y}$$

حل b-2) برای دومی داریم:

$$f(z) = \frac{\bar{Z}}{|Z|} = \frac{x - jy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - j\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\to u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$u_x = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}}$$

$$v_y = \frac{-\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}}$$

$$u_x = v_y \to \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}} = \frac{-x^2}{(x^2 + y^2)^{1.5}} \to x^2 + y^2 = 0 \to |Z| = 0$$

پس تنها تابع در مبدا تحلیلی است و مشتق تابع صفر است.

حل c-2) برای سومی داریم:

$$f(z) = [Re(Z)]^2 - j[Im(Z)]^2 = x^2 - jy^2 \rightarrow u = x^2, v = -y^2$$



انشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریانسیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ پاخ ترین 8: اعداد مختلط و کاشت مدرس: دکتر مهدی طالع مالوله - تل تیرن: مسامعود- د مامر بی



mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com

مكاتبه نابيد.

$$u_x = 2x, v_y = -2y \rightarrow u_x = v_y \rightarrow 2x = -2y \rightarrow x = -y$$

$$v_x = 0$$
, $u_y = 0 \rightarrow v_x = -u_y$

پس برای x=-yیعنی روی نیمساز ربع دوم و چهارم تحلیلی است.

$$f(z) = x^{2} - jy^{2}$$

$$x = -y \to f(z) = x^{2} - jx^{2} \to f'_{(z)} = u_{x} + jv_{x} = 2x - j2x$$

3- قسمت موهومی یک تابع تحلیلی مختلط به صورت

$$V(x,y) = 4y^3 - 4xy^3 + bx^3y + dx^2y + 12xy - 4y$$

$$f(z)$$
 مے باشد. اگر $f(1) = 0$ باشد مطلوبست

حل 3:

ابتدا با توجه به اینکه قسمت موهومی باید در معادله لاپلاس صدق کند ضرایب را بدست می آوریم:

$$V_{xx} + V_{yy} = 0 \rightarrow (6b - 24)xy + (24 + 2d)y = 0 \rightarrow b = 4, d = -12$$

$$V(x,y) = 4y^3 - 4xy^3 + 4x^3y - 12x^2y + 12xy - 4y$$

حال با استفاده از قضیه کوشی-ریمان قسمت حقیقی تابع را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 12y^2 - 12xy^2 + 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$$

$$\Rightarrow U = 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + g(y)$$



انشگاه تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹

ياسخ تمرين 8: اعداد مختلط و مُكاثب

مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - حل تمرن: مهمامعود- د ناعربی



mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com راى بوالات وود دخصوص اين تمرين ارابالمه

كاتبه نابيد.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow 24xy - 12x^2y + g'_{(y)} = -(-4y^3 + 12x^2y - 24xy + 12y)$$

$$\rightarrow g'(y) = 4y^3 - 12y \rightarrow g(y) = y^4 - 6y^2 + k$$

$$U(x,y) = 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + y^4 - 6y^2 + k$$

$$f = U(x, y) + jV(x, y)$$

$$= 12xy^2 - 6x^2y^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + y^4 - 6y^2 + k$$

$$+i(4y^3-4xy^3+4x^3y-12x^2y+12xy-4y)$$

$$x \to z, y \to 0 \implies f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + k, f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = (1)^4 - 4(1)^3 + 6(1)^2 - 4(1) + k = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = (z - 1)^4$$

اگر
$$u(r,\theta)$$
 و $u(r,\theta)$ قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی $u(r,\theta)$ و باشند بطوریکه $u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta+2r\cos \theta+1$ و $v(r,\theta)=r^2\cos 2\theta+2r\cos \theta+1$ مطلوبست $v(r,\theta)=r^2\cos 2\theta+2r\cos \theta+1$ مطلوبست

حل 4:

از اصل کوشی-ریمان در دستگاه قطبی استفاده میکنیم که خواهیم داشت:

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r}v_{\theta}(r,\theta) \rightarrow 2r\cos 2\theta + 2\cos \theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\rightarrow v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta + 2r \sin \theta + f(r)$$

$$u_{\theta}(r,\theta) = -rv_r(r,\theta)$$



انشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کامپیتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ پاسخ تمرین 8: اعداد مختلط و کاشت مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - تل تمرین: مسامعود- د مامر بی



راى والات نود دخصوص ان ترن ما راماله مي mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com

كاتبه نابيد.

$$\Rightarrow -2r^2 \sin 2\theta - 2r \sin \theta = -2r^2 \sin 2\theta - 2r \sin \theta - rf'_{(r)} \rightarrow f'_{(r)} = 0$$

$$\rightarrow f(r) = k \rightarrow f(z) = u(r, \theta) + jv(r, \theta)$$

$$f(z) = (r^2 \cos 2\theta + 2r \cos \theta + 1) + j(r^2 \sin 2\theta + 2r \sin \theta + k)$$

برای بدست آوردن f(z) باید باید در بالا قرار دهیم: $r=z,\, heta=0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$f(z) = (z^2 + 2z + 1) + jk, f(0) = 1 \rightarrow f(z) = z^2 + 2z + 1$$

$$(d>1)$$
 اتحت نگاشت k) (عدد طبیعی و $|z|=d$ به چه شکلی تبدیل میشود $w=z^k+rac{1}{z^k}$ (5) اتحت نگاشت

حل 5:

با توجه به نگاشت ژو کوفسکی خواهیم داشت:

$$w1 = z^k \text{ and } w = w1 + \frac{1}{w1}$$

ابتدا نگاشت w1 دایره z|=d را بر روی دایره $z|=d^k$ و سپس نگاشت w1 دایره یا دایره ای به $R=d^k$ و کانونهای $R=d^k$ را بر روی بیضی با نیمقطرهای $R+\frac{1}{R}$ و $R+\frac{1}{R}$ و کانونهای $R=d^k$ شعاع



انشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ بایخ ترین 8: اعداد مختلط و ککاشت مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - تل تمرن: مهامعود- د ماعر بی

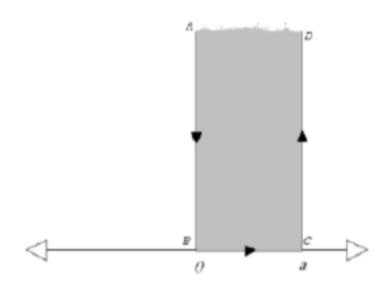


mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com

ىكاتبەنلىد.

% ناحیه ناحیه ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را به چه ناحیه ای تبدیل میکند
$$w=\sin(\frac{\pi z}{2a})$$
 نگاشت (6

حل 6:



$$w = \sin\left[\frac{\pi}{2a}(x+iy)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)\cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{j\pi}{2a}y\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cosh\left(\frac{xy}{2a}\right) + j\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sinh\left(\frac{xy}{2a}\right) = u + jv$$

$$x = 0$$
 , $0 < y < \infty => u = 0$, $0 < v < \infty$

$$y = 0$$
, $0 < x < a = 0$, $0 < u < 1$, $v = 0$

$$x = a$$
, $0 < y < \infty = > 0 < u < \infty$, $v = 0$

باتوجه به نتایج به ربع اول مدل میشود.



انشگاه تسران- دانشگده مهندی برق و کامپوتر ریانسات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ باخ تسرن 8: اعداد مختلط و کاشت



مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - حل تمرن: مهسامعود-و ناعر بی

mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com راى بوالات وود دخصوص اين تمرين ارابالمه

ىكاتىەنلىد.

را تحت نگاشت
$$w=\frac{i}{z-1}$$
 بیان کنید. $D=\{(x,y)|0.5< x\leq 5; y\geq 1.5\}$ بیان کنید. حل $\frac{i}{z-1}$

$$w1 = z - 1 \text{ and } w2 = \frac{1}{w3} \text{ and } w3 = iw2$$

w1 o 6نگاشت انتقال به اندازه یک واحد خلاف جهت محور اعداد حقیقی

$$\rightarrow D = \{(x, y) | -0.5 < x \le 4; y \ge 1.5\}$$

$$w2 \rightarrow 3$$
نگاشت کسری

$$-\frac{1}{2} < \frac{u}{u^2 + v^2} \le 4$$

$$1.5 \le \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

$$\rightarrow (u+1)^2 + v^2 > 1$$
, $(u - \frac{1}{8})^2 + v^2 \ge \frac{1}{64}$, $\left(v + \frac{1}{3}\right)^2 + u^2 \le \frac{1}{9}$

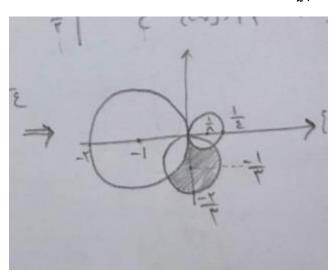


انشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ پایخ تمرین 8: اعداد مخلط و محاشت مدرس: دکتر مهدی طامع ما مولد- مل تمرین: مساسعود- د نامر بی

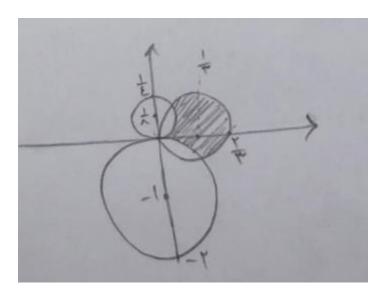


mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com براى بوالات تود در فصوص اين تمرين باراياليد

كاتبه نايد.



w3 o 90 درجه دورانی به اندازه





انشخاه تهران- دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ باخ تمرین 8: اعداد مختلط و کاثت مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - تل تمرین: مسامعود- د ناعر بی



mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com

ىكاتىەنلىد.

به چه ناحیهای در صفحه
$$w=rac{1+e^z}{1-e^z}$$
 تحت نگاشت $\frac{\pi}{2} < Im\{z\} < \pi$ نوار (8) خوا دور صفحه ناحیهای در صفحه ناحیهای دو ناحیهای دو کنید نگاشت نگ نگاشت نگل نگاشت نگل نگاشت نگل نگاشت نگا

$$w = \frac{1 + ez}{1 - ez} = -1 + = \frac{2}{1 - ez}$$

ابتدا تبدیل $w1=e^x$ و w=y انجام میدهیم. برای نگاشت نمایی $w=e^x$ و w=y ابتدا تبدیل ناحیه جدید به صورت زیر است:





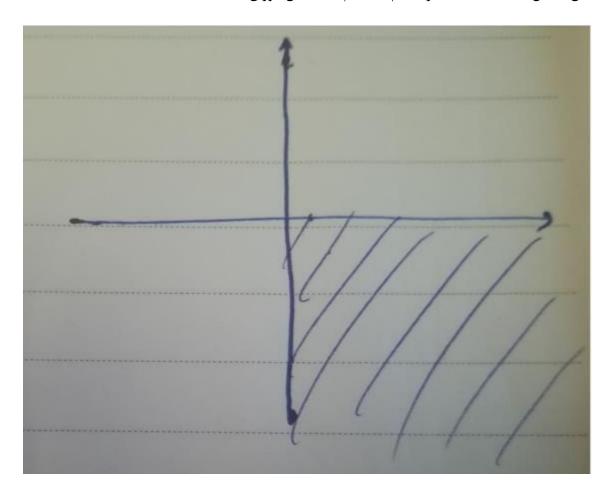
انشخاه تبران- دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندی-نیم مال اول مال ۱۳۹۹ پاخ تمرین 8: اعداد مخلط و محاشت مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - عل تمرین: مساسعود- د ماعر بی



mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com

كاتبه نابيد.

حال تبدیل w2 = -w1 را انجام میدهیم که معادل دوران 180 است:



حال تبدیل w3=w2+1 را که یک انتقال است انجام میدهیم:



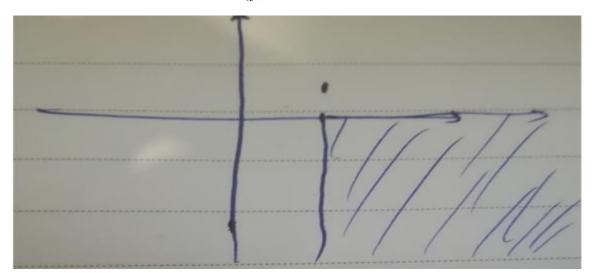
انشخاه تهران- دانشکده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹



پاسخ ترین 8: اعداد مخلط و کاشت مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - حل تیرن: مهمامعود - د ماعر بی

mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com





یس از آن تبدیل کسری $w4=rac{1}{w3}$ را انجام میدهیم که فرمول x و y مشابه سوال هفت دارد:

$$\frac{u}{u^2 + v^2} \ge 1 \to \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \le \frac{1}{4}$$

$$y < 0$$
 $\frac{-v}{u^2 + v^2} < 0 \rightarrow v > 0$

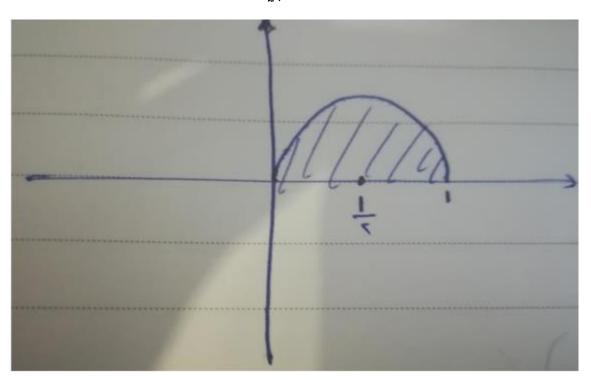


انشگاه تیران- دانشگده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ پاخ تمرین 8: اعداد مختلط و محاشت مدرس: د کتر مهدی طالع مامولد - عل تمرین: مساسعود- د نامر بی

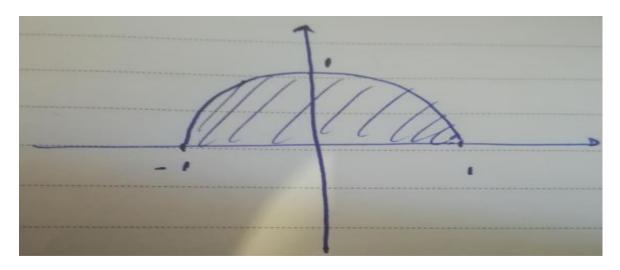


mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com براى بوالات خود دفعوس اين ترين الميالله

كاتبه نابيد.



سرانجام شکل مرحله قبل را دو برابر کرده و یک واحد به چپ شیفت میدهیم:





انشگاه تهران- دانشکده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹ باخ تمرین 8: اعداد مختلط و کاشت



پ مدرس: دکتر مهدی طالع ماموله - تل تمرن: مهمامعود - د ناعر بی

mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com راى بوالات وود دخصوص اين تمرين ارابالمه

ىكاتبەنلىد.

(9

الف) یک تبدیل خطی کسری پیدا کنید که سه نقطه یw1=-1,w2=0,w3=1 را بهترتیب به سه نقطه نظیر آن یعنی: z=f(w) بنامید. تقطه نظیر آن یعنی: z=f(w) بنامید.

ب) تابع زیر را که در ناحیه بالای محور u=0 همساز است، در نظر میگیریم:

$$H(u,v) = 1 + \frac{2}{\pi} Img(ln \frac{w+1}{w-1})$$

نشان دهید که با تبدیل قسمت الف تابع H(u,v) از صفحهی w، در صفحه Z بهصورت زیر درمی آید.

$$H'(x,y) = \frac{2}{\pi} [\arg(1+z) - \arg(1-z)]$$

حل <u>9:</u>

$$w1 = -1$$
, $w2 = 0$, $w3 = 1$ and $z1 = -1$, $z2 = -j$, $z3 = 1$

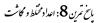
$$\frac{w - w1}{w - w3} * \frac{w2 - w3}{w2 - w1} = \frac{z - z1}{z - z3} * \frac{z2 - z3}{z2 - z1} = > \frac{w + 1}{w - 1} * \left(\frac{0 - 1}{0 - (-1)}\right)$$
$$= \frac{z + 1}{z - 1} * \left(\frac{-j - 1}{-j + 1}\right)$$

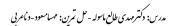
$$=> \frac{w+1}{w-1} = \frac{z+1}{z-1} * j$$



انشگاه تهران- دانشگده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۳۹۹







mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com راى بوالات وود دخصوص اين تمرين ارابالمه

كاتبه نابيد.

$$=> w = \frac{-(1+j)z + (1-j)}{(1-j)z - (1+j)} = \frac{-jz+1}{z-j}$$

$$z = \frac{(1+j)w + (1-j)}{(1-j)w + (1+j)} = \frac{jw+1}{w+j}$$

(ب

$$H(u,v) = 1 + \frac{2}{\pi} Im \left(ln \frac{w+1}{w-1} \right) = 1 + \frac{2}{\pi} Im \left(ln \frac{-jz+1+z-j}{-jz+1-z+j} \right)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi} Im \left(ln \frac{w+1}{w-1} \right) = 1 + \frac{2}{\pi} Im \left(ln \frac{z+1}{-jz+j} \right)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi} Im (ln(z+1) - ln(-jz+j))$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi} Im(\ln(z+1) - \ln(-z+1) - \ln j) \text{ and } \ln j = \ln e^{j\frac{\pi}{2}} = j\frac{\pi}{2}$$
$$= > \frac{2}{\pi} Im(\ln(z+1) - \ln(-z+1))$$

$$H'(x,y) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z+1}{z-1} \right) \quad and \quad 1+z = r1 * e^{j\theta 1} \quad and \quad 1-z = r2 * e^{j\theta 2}$$
$$= > \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} + j(\theta 1 - \theta 2) \right)$$



انشگاه تیران - دانشگده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی - نیم سال اول سال ۱۳۹۹ پاخ تمرین 8: اعداد تخلط و کثاشت مدرس: دکتر مهدی طالع مامولد - مل تمرین: مهما صوود - د ماعر بی



mahsamassoud@gmail.com & arabidona13@gmail.com

كاتبه نابيد.

$$= \frac{2}{\pi}(\theta 1 - \theta 2) = \frac{2}{\pi}(\arg(z+1) - \arg(z-1))$$

موفق باشيد.