حل معادله لاپلاس دو متغییره در دستگاه قائم

اگر پتانسیل تابع دو متغیر x و y باشد در اینصورت معادله لاپلاس به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

حال با استفاده از روش جداسازی متغییر ها میتوان معادله بالا را حل کنیم. اگر تابعی که به صورت حاصلضرب دو تابع نوشته میشود در معادله لاپلاس بالا صدق کند و شرط مرزی را ارضا کند در اینصورت این تابع پاسخ یکتای معادله لاپلاس است. بنابراین

تابع پتانسیل را بصورت: $V(x,y) = f(x)g(y)$ مینویسیم که با جایگزینی این تابع در معادله لاپلاس بالا خواهیم داشت:

$$g(y)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x)\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = 0$$

با تقسیم طرفین رابطه بالا بر $f(x)g(y)$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{g(y)}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = 0$$

جمله اول سمت راست رابطه بالا فقط تابع x و جمله دوم آن فقط تابع y است و مجموع این دو عبارت نمیتواند صفر باشد مگر اینکه هرکدام از این جملات ثابت باشند. بنابراین دو حالت زیر را میتوان در نظر گرفت:

$$1- \quad \frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = k^2 \qquad \frac{1}{g(y)}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -k^2$$

$$2- \quad \frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k^2 \qquad \frac{1}{g(y)}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = k^2$$

برای حالت اول پاسخها بصورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \qquad g(y) = C\sin ky + D\cos ky$$

و برای حالت دوم پاسخها بصورت زیر خواهند بود:

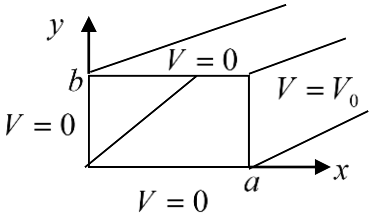
$$f(x) = A\sin kx + B\cos kx \qquad g(y) = Ce^{ky} + De^{-ky}$$

البته جملات اکسپوتانسیلی را میتوان بصورت توابع هیپوربولیک نیز نشان داد در نتیجه برای حالت اول و دوم پاسخ تابع پتانسیل بصورت زیر میباشند:

$$V(x,y) = (A_1 \sinh kx + A_2 \cosh kx)(C\sin ky + D\cos ky)$$

$$V(x,y) = (A\sin kx + B\cos kx)(C_1 \sinh ky + C_2 \cosh ky)$$

حال با استفاده از شرایط مرزی میتوان ضرایب مجهول را بدست آورد. مثلا فرض کنید دیواره های یک تونلی مطابق شکل زیر دارای پتانسیلهای داده شده است. میخواهیم تابع پتانسیل را در داخل تونل بدست آوریم. فرض کنید طول تونل بینهایت است بنابراین پتانسیل تابع z نیست و تنها تابع x و y میباشد. با توجه به پتانسیل دیوارها مشخص است



که تابعیت پتانسیل در جهت y سینوسی میباشد بنابراین تابعیت پتانسیل در جهت x باید بصورت هیپوربولیک باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$V(x,y) = (A_1 \sinh kx + A_2 \cosh kx)(C \sin ky + D \cos ky)$$

حال شروط مرزی را به تابع پتانسیل اعمال میکنیم:

$$V(0,y) = 0 \rightarrow A_2 (C \sin ky + D \cos ky) = 0 \rightarrow A_2 = 0$$
$$V(x,0) = 0 \rightarrow (A_1 \sinh kx + A_2 \cosh kx) D = 0 \rightarrow D = 0$$
$$V(x,b) = 0 \rightarrow A_1 C \sinh kx \sin kb = 0 \rightarrow kb = m\pi \rightarrow k = \frac{m\pi}{b}$$

در نتیجه تابع پتانتسیل در داخل تونل بصورت $A \sinh \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{b} y$ خواهد بود. حال شرط مرزی روی دیواره سمت راست را اعمال میکنیم که بصورت زیر خواهد شد:

$$V(a,y) = A \sinh \frac{m\pi}{b} a \sin \frac{m\pi}{b} y = V_0$$

این تساوی امکان ندارد زیرا سمت چپ تابع y و سمت راست عدد ثابتی است. برای حل مشکل باید تابع پتانسیل را بصورت مجموعه بنویسیم تا با استفاده از بسط سری فوریه ضریب تابع پتانسیل را بدست آوریم. همین طور که میدانیم یک تابع با دامنه ثابت را میتوان با استفاده از بسط سری فوریه بصورت بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی نوشت. بنابراین تابع پتانسیل را بصورت زیر مینویسیم:

$$V(x,y) = \sum_{m=1} A_m \sinh \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

حال شرط مرزی دیواره بالایی را اعمال میکنیم که خواهیم داشت:

$$V(a,y) = \sum_{m=1} A_m \sinh \frac{m\pi}{b} a \sin \frac{m\pi}{b} y = V_0 \rightarrow V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \sin \frac{m\pi}{b} y$$

برای بدست آوردن ضرایب k_m میدانیم این ضرایب سری فوریه یک تابع با پریود $T = 2b$ میباشد که از رابطه زیر بدست می آید:

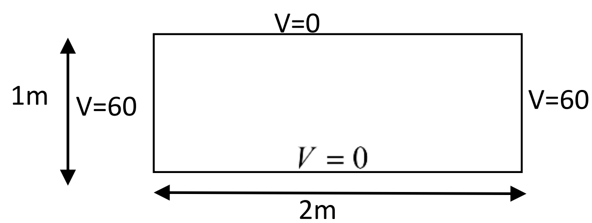
$$k_m = A_m \sinh\frac{m\pi}{b}a = \frac{2}{b}\int_0^b V_0 \sin\frac{m\pi}{b}y\,dy \to A_m \sinh\frac{m\pi}{b}a = [-\frac{2V_0}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{b}y]_0^b = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{m\pi} & m= \text{فرد} \\ 0 & m= \text{زوج} \end{cases}$$

$$A_m = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{m\pi \sinh\dfrac{m\pi}{b}a} & m= \text{فرد} \\ 0 & m= \text{زوج} \end{cases}$$

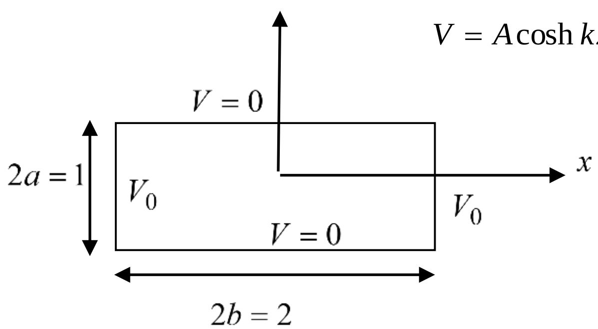
بنابراین تابع پتانسیل درداخل تونل بصورت زیر خواهد بود:

$$V(x,y) = \sum_{m=1} \frac{4V_0}{m\pi \sinh\dfrac{m\pi}{b}a}\sinh\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{m\pi}{b}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2n+1)\pi \sinh\dfrac{(2n+1)\pi}{b}a}\sinh\frac{(2n+1)\pi}{b}x \sin\frac{(2n+1)\pi}{b}y$$

مثال 1: یک تونل به سطح مقطع مستطیل مطابق شکل دارای پتانسیلهای داده شده میباشد. تابع پتانسیل داخل تونل را بدست آورید



حل: برای این اگر دستگاه مختصات را در وسط سطح مقطع تونل بگیریم در اینصورت مطابق شکل زیر مشخص است که پتانسیل در جهت y به فرم سینوسی و در جهت x به فرم کسینوس هیپوربولیک میباشد یعنی $V = A\cosh kx \sin ky$



حال شرایط مرزی را اعمال میکنیم

$$V(y=a) = 0 \to \sin ka = 0 \to ka = m\pi \to k = \frac{m\pi}{a} = \frac{m\pi}{0.5} = 2m\pi \to$$
$$V = A\cosh 2m\pi x \sin 2m\pi y \to V(x=b) = A\cosh 2m\pi b \sin 2m\pi y = V_0$$

عبارت آخر هرگز برقرار نیست چون سمت چپ معادله متغییر و تابع y و سمت راست ثابت و برابر V_0 میباشد پس باید پتانسیل را بصورت مجموعه بگیریم:

$$V = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m \cosh 2m\pi x \sin 2m\pi y \to V(x=b=1) = V(x=-b=-1) = V_0 \to$$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m \cosh 2m\pi(1) \sin 2m\pi y = V_0 = 60 \to \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m \cosh 2m\pi \sin 2m\pi y = V_0 = 60 \to$$

$$60 = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} k_m \sin 2m\pi y$$

در عبارت بالا $k_m = A_m \cosh 2m\pi$ فرض شده است. حالا طرفین معادله بالا را در $\sin 2n\pi\, y$ ضرب کرده و از $y=0$ تا $y=0.5$ انتگرال میگیریم:

$$\int_0^{0.5} 60\sin 2n\pi\, y dy = \int_0^{0.5} [\sin 2n\pi\, y \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} k_m \sin 2m\pi\, y]dy = \int_0^{0.5} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} 0.5k_m[\cos 2(n-m)\pi y -$$
$$\cos(n+m)\pi y]dy = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \{\frac{k_m}{4(n-m)\pi}\sin 2(n-m)\pi y - \frac{k_m}{4(n+m)\pi}\sin 2(n+m)\pi y\}_0^{0.5}$$

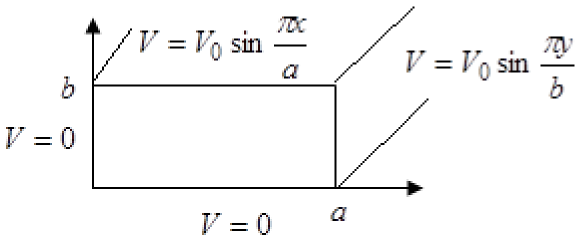
عبارت داخل $\{\}$ همواره صفر است مگر به ازای $m=n$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$\{-\frac{60}{2n\pi}\cos 2n\pi\, y\}_0^{0.5} = 0.25k_n \rightarrow k_n = \begin{cases} 0 & m=\text{زوج} \\ \dfrac{240}{n\pi} & m=\text{فرد} \end{cases} \rightarrow \qquad A_n = \begin{cases} 0 & m=\text{زوج} \\ \dfrac{240}{n\pi \cosh 2n\pi} & m=\text{فرد} \end{cases}$$

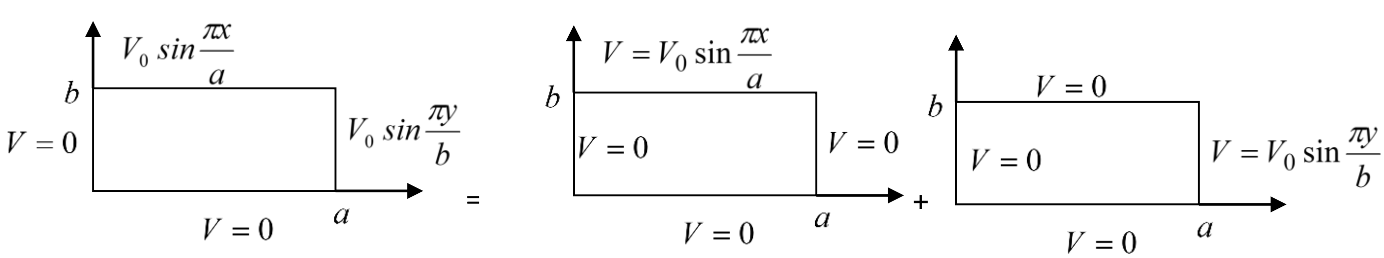
بنا براین با جایگزینی A_n در معادله پتانسیل خواهیم داشت:

$$V = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m \cosh 2m\pi x \sin 2m\pi y = V = \sum_{m=1(m=odd)}^{m=\infty} \frac{240}{m\pi \cosh 2m\pi} \cosh 2m\pi x \sin 2m\pi y$$

مثال **2**:برای تونل نشان داده شده در زیر با مقطع مستطیل که مطابق شکل دارای پتانسیلهای داده شده میباشد تابع پتانسیل داخل تونل را بدست آورید. برای محاسبه میدان باید از تابع پتانسیل گرادیان بگیریم:



حل: میتوان شکل را بصورت مجموع دو حالت مطابق شکل زیر در آورد



برای اولین شکل از دو شکل پتانسیل در جهت x تابع سینوسی و در جهت y سینوس هیپوربولیک میباشد بنابراین داریم:

$$V_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{a}x \sinh\frac{m\pi}{a}y \rightarrow V_1(y=b) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{a}x \sinh\frac{m\pi}{a}b = V_0 \sin\frac{\pi}{a}x$$

این تساوی نشان میدهد که جمله مجموع تنها یک جمله به ازای $m=1$ دارد پس داریم:

$$A_1 \sin\frac{\pi}{a}x \sinh\frac{\pi}{a}b = V_0 \sin\frac{\pi}{a}x \to A_1 = \frac{V_0}{\sinh\frac{\pi}{a}b} \to V_1 = \frac{V_0}{\sinh\frac{\pi}{a}b}\sin\frac{\pi}{a}x \sinh\frac{\pi}{a}y$$

برای دومین شکل از دو شکل پتانسیل در جهت y تابع سینوسی و در جهت x سینوس هیپوربولیک میباشد بنابراین داریم:

$$V_2 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sinh\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{m\pi}{b}y \to V_1(x=a) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sinh\frac{m\pi}{b}a \sin\frac{m\pi}{b}y = V_0 \sin\frac{\pi}{b}y$$

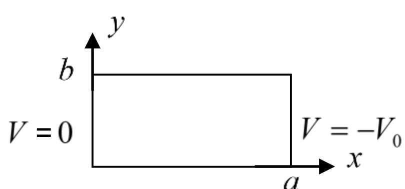
این تساوی نشان میدهد که جمله مجموع تنها یک جمله به ازای $m=1$ دارد، پس داریم:

$$B_1 \sinh\frac{\pi}{b}a \sin\frac{\pi}{b}y = V_0 \sin\frac{\pi}{b}y \to B_1 = \frac{V_0}{\sinh\frac{\pi}{b}a} \to V_2 = \frac{V_0}{\sinh\frac{\pi}{b}a}\sinh\frac{\pi}{b}x \sin\frac{\pi}{b}y$$

بنابراین پتانسیل جمع دو پتانسیل محاسبه شده است یعنی:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{V_0}{\sinh\frac{\pi}{a}b}\sin\frac{\pi}{a}x \sinh\frac{\pi}{a}y + \frac{V_0}{\sinh\frac{\pi}{b}a}\sinh\frac{\pi}{b}x \sin\frac{\pi}{b}y$$

مثال **3**: در داخل یک تونل به عرض a و ارتفاع b پتانسیل در دیواره سمت چپ $(x=0)$ صفر و در دیواره سمت راست $(x=a)$ برابر $-V_0$ میباشد. برای کف تونل $(y=0)$ و سقف تونل $(y=b)$ پتانسیل دارای شرط مرزی $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ میباشد. معادله پتانسیل داخل تونل را بدست آورید.



با توجه به پتانسیل دیواره های تونل شکل کلی پتانسیل داخل تونل که پاسخ معادله لاپلاس دو متغییره است بصورت زیر است:

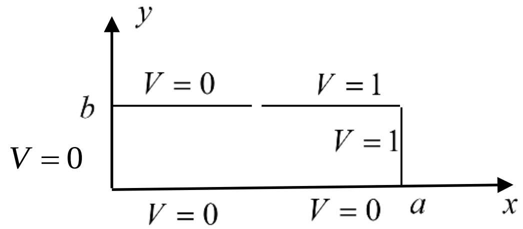
$$V(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sinh\frac{m\pi}{b}x \cos\frac{m\pi}{b}y \to V(a,y) = -V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sinh\frac{m\pi}{b}a \cos\frac{m\pi}{b}y \to$$

$$A_m \sinh\frac{m\pi}{b}a = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} -V_0 \cos\frac{m\pi}{b}y\,dy \to A_m \sinh\frac{m\pi}{b}a = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ -V_0 & m = 0 \end{cases}$$

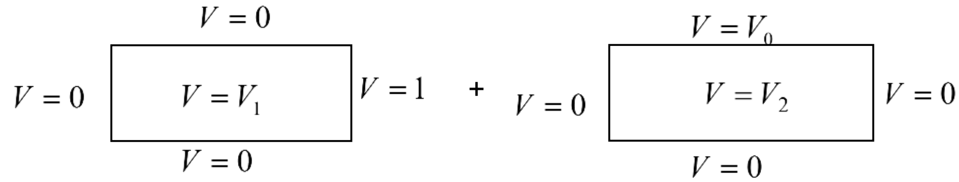
پس فقط پتانسیل یک جمله به ازای $m=0$ دارد در نتیجه خواهیم داشت:

$$V(x,y) = -\frac{V_0}{\sinh\frac{m\pi}{b}a}\sinh\frac{m\pi}{b}x \quad (m \to 0) = -\frac{V_0}{a}x$$

مثال **4**: برای شکل زیر تابع پتانسیل در داخل تونل را بدست آورید.



حل: مسئله را میتوان به دو شکل زیر تبدیل کرد:



که در شکل دوم داریم: $V_0 = \begin{cases} 0 & 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ 1 & \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}$ برای شکل اول پاسخ بصورت زیر است:

$$V_1 = \sum_{m=-\infty\,(odd)}^{\infty} \frac{4V_0}{\sinh \frac{m\pi}{b} a} \sinh \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{b} y = \sum_{m=-\infty\,(odd)}^{\infty} \frac{4}{\sinh \frac{m\pi}{b} a} \sinh \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

برای شکل دوم پاسخ کلی به صورت زیر است:

$$V_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sinh \frac{m\pi}{a} y \rightarrow V_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sinh \frac{m\pi}{a} b \rightarrow$$

$$\int_0^a V_0 \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sinh \frac{m\pi}{a} b dx \rightarrow$$

$$\int_{\frac{a}{2}}^a \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sinh \frac{m\pi}{a} b dx \rightarrow$$

$$\{-\frac{a}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{a} x\}_{\frac{a}{2}}^{a} = \int_0^a \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} B_m \sinh \frac{m\pi}{a} b [\cos \frac{(m-n)\pi}{a} x - \cos \frac{(m+n)\pi}{a} x] dx \rightarrow$$

$$-\frac{a}{n\pi} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} B_m \sinh \frac{m\pi}{a} b \{[\frac{a}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi}{a} x - \frac{a}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi}{a} x]\}_0^a$$

عبارت سمت راست به ازای تمام مقادیر m صفر است مگر $m = n$ بنابراین خواهیم داشت:

$$-\frac{a}{n\pi} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2} a B_n \sinh \frac{n\pi}{a} b \rightarrow B_n = \frac{2[\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n]}{\sinh \frac{n\pi}{a} b}$$

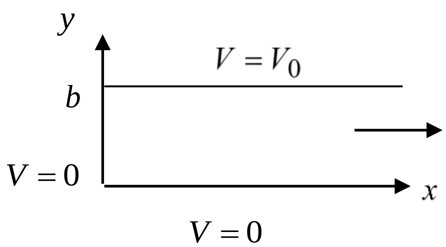
بنا براین تابع پتانسیل برای شکل دوم عبارتست از:

$$V_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi}{a}x \sinh\frac{m\pi}{a}y = V_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2[\cos\frac{m\pi}{2}-(-1)^m]}{\sinh\frac{m\pi}{a}b} \sin\frac{m\pi}{a}x \sinh\frac{m\pi}{a}y$$

بنابراین تابع کل پتانسیل عبارتست از:

$$V = V_1 + V_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2[1-(-1)^m]}{\sinh\frac{m\pi}{b}a} \sinh\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{m\pi}{b}y + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2[\cos\frac{m\pi}{2}-(-1)^m]}{\sinh\frac{m\pi}{a}b} \sin\frac{m\pi}{a}x \sinh\frac{m\pi}{a}y$$

مثال **5**: برای شکل زیر تابع پتانسیل بین صفحات را بدست آورید.



حل: با توجه به شرایط مرزی داده شده تابع پتانسیل را بصورت زیر میتوان نوشت:

$$V = \frac{V_0}{b}y + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{m\pi}{b}x} \sin\frac{m\pi}{b}y \rightarrow V(x=0) = \frac{V_0}{b}y + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{b}y = 0 \rightarrow$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{b}y = -\frac{V_0}{b}y \rightarrow A_m = \frac{2}{b}\int_0^b -\frac{V_0}{b}y \sin\frac{m\pi}{b}y\,dy = -\frac{2V_0}{b^2}\{[-y\frac{\cos\frac{m\pi}{b}}{\frac{m\pi}{b}}]_0^b +$$

$$\int_0^b \frac{\cos\frac{m\pi}{b}}{\frac{m\pi}{b}}dy\} = (-1)^m\frac{2V_0}{m} \rightarrow V = \frac{V_0}{b}y + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2V_0}{m}e^{-\frac{m\pi}{b}x}\sin\frac{m\pi}{b}y$$

حل معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای در حالت دو متغییره

در اینحالت شرایط مرزی پتانسیل طوری است که پتانسیل تابع دو متغیر R و ϕ میباشد. در اینحالت نیز با استفاده از جداسازی متغیرها میتوان تابع پتانسیل را بدست آورد. اگر تابع پتانسیل را بصورت $u(R,\phi) = f(R)g(\phi)$ بنویسیم و آنرا در معادله لاپلاس جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\frac{\partial u}{\partial R}) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{R}g(\phi)\frac{df(R)}{dR} + g(\phi)\frac{d^2 f(R)}{dR^2} + \frac{1}{R^2}f(R)\frac{d^2 g(\phi)}{d\phi^2} \rightarrow \frac{R}{f(R)}\frac{df(R)}{dR} + \frac{R^2}{f(R)}\frac{d^2 f(R)}{dR^2} + \frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2 g(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

همانطوریکه ملاحظه میشود، مجموع دو جمله اول در عبارت آخر، تنها تابع R و جمله سوم تنها تابع ϕ میباشد و مجموع این سه جمله موقعی صفر میشود که مجموع دو جمله اول و جمله سوم ثابت باشند که در اینصورت دو حالت خواهیم داشت:

$$a)\begin{cases} \frac{R}{f(R)}\frac{df(R)}{dR}+\frac{R^2}{f(R)}\frac{d^2f(R)}{dR^2}=k^2 \\ \frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2}=-k^2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} \frac{R}{f(R)}\frac{df(R)}{dR}+\frac{R^2}{f(R)}\frac{d^2f(R)}{dR^2}=-k^2 \\ \frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2}=k^2 \end{cases}$$

پاسخ معادله اول سمت چپ (a) به صورت $f(R)=R^\gamma$ میباشد که با جایگزینی در معادله اول داریم:

$$\frac{R}{R^\gamma}(\gamma R^{\gamma-1})+\frac{R^2}{R^\gamma}\gamma(\gamma-1)R^{\gamma-2}=k^2\rightarrow\gamma+\gamma(\gamma-1)=k^2\rightarrow\gamma^2=k^2\rightarrow\gamma=\pm k$$

در نتیجه $f(R)=AR^k+BR^{-k}$. پاسخ معادله دوم سمت چپ (a) به صورت زیر است:

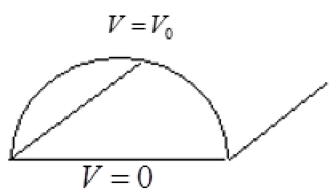
$$g''=-k^2g\rightarrow g(\phi)=C\sin k\phi+D\cos k\phi$$

در نتیجه پاسخ معادله لاپلاس در حالت دو متغییره به صورت زیر است:

$$u(R,\phi)=f(R)g(\phi)=(AR^k+BR^{-k})(C\sin k\phi+D\cos k\phi)$$

حالت دوم یعنی معادلات سمت راست (b) که در آن $\frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2}=k^2$ میباشد از نظر فیزیکی امکان ندارد زیر پاسخ به صورت $g(\phi)=ce^{k\phi}+De^{-k\phi}$ امکان ندارد زیرا تابع $g(\phi)$ باید پریودیک باشد و این بدان علت است که باید $g(2\pi)=g(0)$ باشد زیرا $\phi=0$ و $\phi=2\pi$ یک نقطه میباشد در حالی که $g(2\pi)\neq g(0)$ و این یک تناقض است.

مثال **6**:یک تونل با سطح مقطع نیم استوانه مطابق شکل دارای پتانسیل های داده شده است. تابع پتانسیل در داخل تونل را بدست آورید.



حل: فرم کلی تابع پتانسیل بصورت زیر است:

$$u(R,\phi)=(AR^k+BR^{-k})(C\sin k\phi+D\cos k\phi)$$

حال شرایط مرزی را که صفر بودن پتانسیل روی کف تونل است را بصورت زیر اعمال میکنیم تا ضرایب مجهول بدست آید:

$$u(R,0)=(AR^k+BR^{-k})(D)=0\rightarrow D=0$$

$$u(R,\pi)=(AR^k+BR^{-k})(C\sin k\pi)=0\rightarrow k=\text{int}\,eger$$

با توجه به اینکه پتانسیل در $R=0$ نباید بینهایت باشد بنابراین ضریب B باید صفر باشد در اینصورت تابع پتانسیل بصورت زیر خواهد شد:

$$u(R,\phi)=ER^k\sin k\phi$$

حال شرط مرزی سقف تونل را روی تابع پتانسیل اعمال میکنیم تا ضریب مجهول بدست آید:

$$u(a,\phi)=Ea^k\sin k\phi=V_0$$

تساوی بالا امکان ندارد زیر طرف سمت چپ تابع ϕ و طرف سمت راست ثابت است. جهت حل این مشکل باید تابع پتانسیل را با استفاده از بسط سری فوریه بصورت مجموع بنویسیم. بنابراین تابع پتانسیل بصورت زیر خواهد شد:

$$u(R,\phi)=\sum_{k=1}^{\infty}E_kR^k\sin k\phi$$

حال شرط مرزی را اعمال میکنیم:

$$u(a,\phi)=\sum_{k=1}^{\infty}E_ka^k\sin k\phi=V_0$$

در رابطه بالا E_ka^k ضرایب بسط فوریه سینوسی تابع پریودیک با پریود 2π میباشد که بصورت فرد بسط یافته است و مقدار آن در نیم پریود اول V_0 و در نیم پریود دوم $-V_0$ است. بنابراین ضریب E_ka^k از رابطه زیر بدست می آید:

$$E_ka^k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}V_0\sin k\phi d\phi=[-\frac{2V_0}{k\pi}\cos k\phi]_0^{\pi}=\begin{cases}\dfrac{4V_0}{k\pi} & k=\text{فرد}\\ 0 & k=\text{زوج}\end{cases}$$

$$\rightarrow E_k=\begin{cases}\dfrac{4V_0}{k\pi a^k} & k=\text{فرد}\\ 0 & k=\text{زوج}\end{cases}$$

در نتیجه تابع پتانسیل داخل تونل از رابطه زیر بدست می آید:

$$u(R,\phi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4V_0}{(2k+1)\pi}(\frac{R}{a})^{2k+1}\sin(2k+1)\phi$$

واضح است که اگر در پاسخ کلی معادله لاپلاس $k=0$ باشد پاسخ به حالت یک متغیره تابعیت بر حسب R تبدیل میشود که به صورت $A\ln R+B$ بود در نتیجه پاسخ کلی معادله لاپلاس در دستگاه استوانه ای به صورت زیر است:

$$u(R,\phi)=A\ln R+B+\sum_{k=1}^{\infty}(A_kR^k+B_kR^{-k})(C_k\sin k\phi+D_k\cos k\phi)\qquad(1)$$

مثال **7**:پتانسیل روی یک استوانه طویل به شعاع c برابر است با $u(c,\phi)=f(\phi)$. تابع پتانسیل در داخل و خارج استوانه را بدست آورید.

حل: برای داخل استوانه چون شامل $r=0$ میشود بنابراین باید $A=0$ و $B_k=0$ در غیر اینصورت پتانسیل در $r=0$ صفر میشود. برای خارج استوانه چون شامل $r=\infty$ میشود در نتیجه باید $A=0$ و $A_k=0$ در غیر اینصورت پتانسیل در $r=\infty$ بینهایت میشود. در نتیجه پتانسیل در داخل و خارج استوانه به صورت زیر خواهد شد:

$$u(R,\phi)=B+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k \sin k\phi+F_k \cos k\phi)R^k \qquad R<c \qquad (2)$$

$$u(R,\phi)=B+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k' \sin k\phi+F_k \cos k\phi)R^{-k} \qquad R>c \qquad (3)$$

در (**2**) $E_k=A_kC_k,\quad F_k=A_kD_k$ و در (**3**) $E_k'=B_kC_k,\quad F_k'=B_kD_k$. حال شرط $u(c,\phi)=f(\phi)$ را اعمال میکنیم.

برای $R<c$ داریم:

$$u(c,\phi)=f(\phi)=B+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k \sin k\phi+F_k \cos k\phi)c^k=B+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k c^k \sin k\phi+F_k c^k \cos k\phi) \qquad (4)$$

اگر این معادله را با بسط سری فوریه $f(\phi)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k \cos k\phi+b_k \sin k\phi$ مقایسه کنیم در اینصورت میتوانیم بنویسیم:

$$B=a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)d\phi \qquad E_kc^k=b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\sin k\phi \to E_k=\frac{1}{\pi c^k}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\sin k\phi d\phi$$

$$F_kc^k=a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\cos k\phi \to F_k=\frac{1}{\pi c^k}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\cos k\phi$$

برای داریم $R>c$ داریم:

$$u(c,\phi)=f(\phi)=B+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k' \sin k\phi+F_k' \cos k\phi)c^{-k}=B+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k c^{-k} \sin k\phi+F_k c^{-k} \cos k\phi) \qquad (5)$$

اگر این معادله را با بسط سری فوریه $f(\phi)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k \cos k\phi+b_k \sin k\phi$ مقایسه کنیم در اینصورت میتوانیم بنویسیم:

$$B=a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)d\phi \qquad E_k'c^{-k}=b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\sin k\phi \to E_k'=\frac{c^k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\sin k\phi d\phi$$

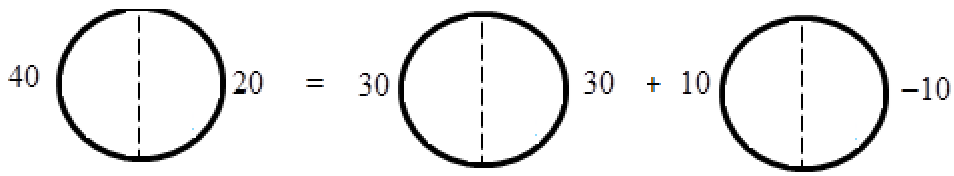
$$F_k'c^{-k}=a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\cos k\phi \to F_k'=\frac{c^k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\cos k\phi$$

بنابراین با داشتن ضرایب مجهول E_k, F_k, E_k', F_k' و جایگزینی در معادلات (**2**) و (**3**) توابع پتانسیل در داخل و خارج استوانه بدست می آیند.

مثال **8**: پتانسیل در داخل و خارج یک فضای لایتناهی با سطع مقطع استوانه ای به شعاع **50** سانتیمتر اگر پتانسیل در $-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$

برابر **20** ولت و در $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$ برابر **40** ولت میباشد را بدست آورید:

حل: استوانه را میتوان به صورت زیر نشان داد:



برای استوانه اول سمت راست $U = 30$ و برای دومین استوانه سمت راست معادله پتانسیل داخل و خارج استوانه به صورت زیر است:

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} (A_k \sin k\phi + B_k \cos k\phi) R^k \qquad r < a \qquad u_o = \sum_{n=0}^{\infty} (A'_k \sin k\phi + B'_k \cos k\phi) R^{-k} \qquad r > a$$

چون پتانسیل در ربع دوم و سوم منفی و برای ربع اول و چهارم مثبت است پس تابعیت پتانسیل بر حسب ϕ به صورت کسینوسی است یعنی $A'_k = A_k = 0$. حال شرط مرزی را به صورت زیر مینویسیم:

$$u_i(R = a) = \sum_{n=1}^{\infty} B_k a^k \cos k\phi = f(\phi) = \begin{cases} -10 & -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \\ 10 & \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$B_k a^k = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\phi) \cos k\phi d\phi = \frac{1}{\pi} [\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -10 \cos k\phi d\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 10 \sin k\phi d\phi] = \frac{1}{k\pi} [-10(2 \sin \frac{k\pi}{2}) +$$

$$10(\sin \frac{3k\pi}{2} - \sin \frac{k\pi}{2}] = \frac{10}{k\pi} (\sin \frac{3k\pi}{2} - 3 \sin \frac{k\pi}{2}) = -\frac{40}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \to B_k = -\frac{40}{k\pi a^k} \sin \frac{k\pi}{2}$$

در نتیجه معادله پتانسیل داخل استوانه به صورت زیر است:

$$u_i = 30 + \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{40}{k\pi a^k} \sin \frac{k\pi}{2} \cos k\phi) R^k \qquad R < a$$

همانطوریکه ازفرم پتانسیل در داخل و خارج استوانه معلوم است برای محاسبه ضریب تابع پتانسیل خارج استوانه کافیست در معادله پتانسیل داخل کره به جای a^k قرار دهیم a^{-k} یعنی پتانسیل در خارج استوانه برابر است با:

$$u_o = 30 + \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{40}{k\pi a^{-k}} \sin \frac{k\pi}{2} \cos k\phi) R^{-k} \qquad R > a$$

مسئله را میتوان به صورت زیر هم حل کرد. فرم کلی پتانسیل داخل و خارج استوانه بصورت زیر است:

$$u(R,\phi)=\sum_{k=0}(A_k\cos k\phi+B_k\sin k\phi)R^k \qquad R\le a$$
$$u(R,\phi)=\sum_{k=0}(A'_k\cos k\phi+B'_k\sin k\phi)R^{-k} \qquad R\ge a$$

حال شرایط مرزی را اعمال میکنیم:

$$u(a,\phi)=\sum_{k=0}(A_k\cos k\phi+B_k\sin k\phi)a^k\ =f(\phi) \qquad r\le a$$
$$u(a,\phi)=\sum_{k=0}(A'_k\cos k\phi++B'_k\sin k\phi)a^{-n}\ =f(\phi) \qquad r\ge a$$

سپس ضرایب مجهول را که بسط سری فوریه تابع داده شده $f(\phi)$ است را با روابط زیر بدست می آوریم:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(\phi)d\phi=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}20d\phi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}40d\phi]=30 \qquad A_ka^k=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(\phi)\cos k\phi d\phi\rightarrow$$

$$A_k=\frac{1}{\pi a^k}[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}20\cos k\phi d\phi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}40\cos k\phi d\phi]=\frac{1}{\pi a^k}[\frac{20}{k}(2\sin\frac{k\pi}{2})+\frac{40}{k}(\sin\frac{3k\pi}{2}-\sin\frac{k\pi}{2})]=\frac{40}{n\pi a^k}\sin\frac{3k\pi}{2}$$

$$B_k=\frac{1}{\pi a^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(\phi)\sin k\phi d\phi \qquad B_k=\frac{1}{\pi a^k}[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}20\sin k\phi d\phi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}40\sin k\phi d\phi]=\frac{1}{\pi a^k}[\frac{40}{k}(\cos\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{3k\pi}{2})]=0$$

$$\rightarrow u(R,\phi)=30+\sum_{k=1}(\frac{40}{\pi a^k}\sin\frac{3k\pi}{2}\cos k\phi)R^k \qquad R<a \qquad u(R,\phi)=30+\sum_{n=1}(\frac{40a^k}{\pi k}\sin\frac{3k\pi}{2}\cos k\phi)R^{-k} \qquad R>a$$

که همان معاد لاتی است که قبلا بدست آوردیم ولی با استفاده از جمع آثار و بسیار ساده تر!

مثال**9**: مثال بالا را برای شرط مرزی $u=\begin{cases}\cos^2\phi & 0<\phi<\pi\\ \sin^2\phi & \pi<\phi<2\pi\end{cases}$ تکرار کنید.

حل: برای این مثال کافیست در محاسبات بالا قرار دهیم: $f(\phi)=\begin{cases}cos^2\phi & 0<\phi<\pi\\ sin^2\phi & \pi<\phi<2\pi\end{cases}$

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)d\phi=\frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi}\cos^2\phi d\phi+\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2\phi d\phi]=0.5 \qquad A_ka^k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\cos k\phi d\phi\rightarrow$$

$$A_k=\frac{1}{\pi a^k}[\int_0^{\pi}\cos^2\phi\cos k\phi d\phi+\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2\phi\cos k\phi d\phi]=\frac{1}{2\pi a^k}[\int_0^{\pi}(1+\cos 2\phi)\cos k\phi d\phi+\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos 2\phi)\cos k\phi d\phi]=$$

$$\frac{1}{2\pi a^k}\{\int_0^{\pi}(\cos k\phi+0.5\cos(k-2)\phi+0.5\cos(k+2)\phi]d\phi+\int_{\pi}^{2\pi}(\cos k\phi-0.5\cos(k-2)\phi-0.5\cos(k+2)\phi]d\phi\}=$$

$$\frac{1}{2\pi a^k}\{[\frac{1}{k}\sin k\phi+\frac{1}{2(k-2)}\sin(k-2)\phi+\frac{1}{2(k+2)}\sin(k+2)\phi]_0^{\pi}+[\frac{1}{k}\sin k\phi-\frac{1}{2(k-2)}\sin(k-2)\phi-$$

$$\frac{1}{2(k+2)}\sin(k+2)\phi]_{\pi}^{2\pi}=0 \qquad B_k a^k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\sin k\phi d\phi \rightarrow B_k=\frac{1}{\pi a^k}[\int_0^{\pi}\cos^2\phi\sin k\phi d\phi+\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2\phi\sin k\phi d\phi]=$$

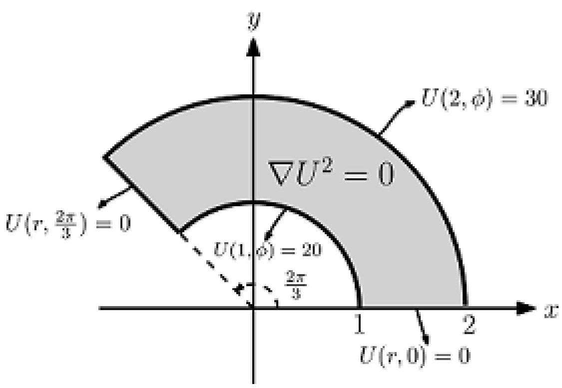
$$B_k=\frac{1}{2\pi a^k}[\int_0^{\pi}(1+\cos 2\phi)\sin k\phi d\phi+\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos 2\phi)\sin k\phi d\phi]=\frac{1}{2\pi a^k}\{\int_0^{\pi}(\sin k\phi+0.5\sin(k-2)\phi+0.5\sin(k+2)\phi]d\phi$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin k\phi-0.5\sin(k-2)\phi-0.5\sin(k+2)\phi]d\phi=\frac{1}{2\pi a^k}\{[-\frac{1}{k}\cos k\phi-\frac{1}{2(k-2)}\cos(k-2)\phi-$$

$$\frac{1}{2(k+2)}\cos(k+2)\phi]_0^{\pi}+[-\frac{1}{k}\cos k\phi+\frac{1}{2(k-2)}\cos(k-2)\phi+\frac{1}{2(k+2)}\cos(k+2)\phi]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{2k(1-\cos k\pi)}{(k^2-4)2\pi a^k}\rightarrow u(R,\phi)=0.5+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{2k(1-\cos k\pi)}{(k^2-4)2\pi a^k}\sin k\phi]R^k$$

مثال 10: پاسخ معادله لاپلاس در فضای استونه ای در محدوده $1m<r<2m$ و $0<\phi<\frac{2\pi}{3}$ را بدست بیاورید اگر شرایط مرزی $U(1,\phi)=20,\quad U(2,\phi)=30,\quad U(r,0)=U(r,\frac{2\pi}{3})=0$ برقرار باشد.



حل: پاسخ کلی معادله لاپلاس به صورت زیر است:

$$U(r,\phi)=(A\cos k\phi+B\sin k\phi)(Cr^k+Br^{-k}) \qquad U(r,0)=0\rightarrow A=0$$

$$U(r,\frac{2\pi}{3})=0\rightarrow \sin k\frac{2\pi}{3}=0\rightarrow k\frac{2\pi}{3}=n\pi\rightarrow k=\frac{3n}{2}$$

بنابراین پاسخ را برای ارضای شروط مرزی باقیمانده به صورت زیر تعریف میکنیم(لازم به ذکر است که پریود تابع برابر است با $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$ است):

$$U(r,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}(E_n r^{\frac{3n}{2}}+F_n r^{-\frac{3n}{2}})\sin\frac{3n}{2}\phi \quad U(1,\phi)=20\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(E_n+F_n)\sin\frac{3n}{2}\phi=20\rightarrow$$

$$E_n+F_n=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}20\sin\frac{3n}{2}\phi d\phi=\frac{40}{\pi n}(1-\cos n\pi) \qquad U(2,\phi)=30\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(E_n(2)^{\frac{3n}{2}}+F_n(2)^{-\frac{3n}{2}})\sin\frac{3n}{2}\phi=30$$

$$\rightarrow E_n(2)^{\frac{3n}{2}}+F_n(2)^{-\frac{3n}{2}}=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}30\sin\frac{3n}{2}\phi d\phi=\frac{60}{\pi n}(1-\cos n\pi)\rightarrow\begin{cases}E_n+F_n=\frac{40}{\pi n}(1-\cos n\pi)\\ E_n(2)^{\frac{3n}{2}}+F_n(2)^{-\frac{3n}{2}}=\frac{60}{\pi n}(1-\cos n\pi)\end{cases}$$

با حل دو معادله دو مجهول بالا E_n و F_n بدست می آید.

حال فرض کنید پتانسیل تابع R و z باشد یعنی طول استوانه محدود و L باشد در اینصورت پتانسیل را به صورت $u(R,z)=g(R)h(z)$ مینویسیم که با جایگزینی در معادله لاپلاس خواهیم داشت:

$$\nabla^2 u=\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR})h+g\frac{d^2h}{dz^2}=0$$

اگر طرفین را بر $g(R)h(z)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR})h+g\frac{d^2h}{dz^2}=0\rightarrow\frac{1}{gR}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR})+\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2}=0$$

حال فرض کنید شرایط اولیه به صورت $u(a,z)=0$ و $u(R,0)=f_1(R)$ و $u(R,L)=f_2(R)$ باشند. در معادله بدست آمده ملاحظه میشود که جمله اول سمت چپ فقط تابع R و جمله دوم فقط تابع z است که مجموع این دو جمله نمیتواند صفر باشد مگر اینکه تک تک آنها ثابت و مختلف العلامه باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{gR}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR})=-k^2\rightarrow\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR})+k^2g=0\rightarrow\frac{d^2g}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dg}{dR}+k^2g=0\\ \frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2}=k^2\rightarrow\frac{d^2h}{dz^2}=k^2h(z)\end{cases}$$

پاسخ معادله دوم یعنی $\frac{d^2h}{dz^2}=k^2h(z)$ قبلا بدست آمده که برابر است با: $h(z)=A\sinh kz+B\sinh k(L-z)$. برای حل معادله دوم تغییر متغییر $x=kR$ را اعمال میکنیم بنابراین داریم:

$$x=kR\rightarrow\frac{dg}{dR}=\frac{dg}{dx}\frac{dx}{dR}=k\frac{dg}{dx}\qquad\frac{d^2g}{dR^2}=\frac{d}{dR}(\frac{dg}{dR})=\frac{d}{dR}(k\frac{dg}{dx})=k\frac{d}{dR}(\frac{dg}{dx})=k(k\frac{d^2g}{dx^2})=k^2\frac{d^2g}{dx^2}$$

حال با جایگزینی $\frac{dg}{dR}=k\frac{dg}{dx}$ و $\frac{d^2g}{dR^2}=k^2\frac{d^2g}{dx^2}$ در معادله $\frac{d^2g}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dg}{dR}+k^2g=0$ داریم:

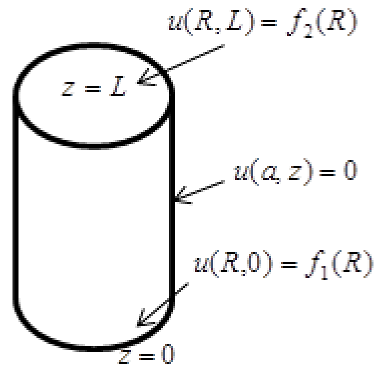
$$\frac{d^2g}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dg}{dR}+k^2g=0\rightarrow k^2\frac{d^2g}{dx^2}+\frac{1}{R}k\frac{dg}{dx}+k^2g=0\rightarrow k^2R^2\frac{d^2g}{dx^2}+kR\frac{dg}{dx}+k^2R^2g=0\rightarrow$$
$$x^2\frac{d^2g}{dx^2}+x\frac{dg}{dx}+x^2g=0$$

این همان معادله بسل است که به فرم کلی : $x^2g''+xg'+(x^2-n^2)=0$ و دارای پاسخ به صورت $CJ_n(x)+DN_n(x)$ میباشد که برای حالت ما $n=0$ و $x=kR$ میباشد در نتیجه پاسخ معادله $\frac{d^2g}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dg}{dR}+k^2g=0$ به صورت $g(R)=CJ_0(kR)+DN_0(kR)$ میباشد.

البته چون تابع $N_0(kR)$ در داخل استوانه و روی محور آن یعنی $R=0$ بینهایت میشود بنابراین نمیتواند جواب باشد و جواب معادله لاپلاس به صورت: $u(R,z)=[(A\sinh kz+B\sinh k(L-z)]J_0(kR)$ میباشد. حال شرط مرزی را اعمال میکنیم:

$$u(a,z)=0 \rightarrow J_0(ka)=0 \rightarrow ka=\alpha_m \rightarrow k=\frac{\alpha_m}{a}$$

که α_mریشه mام تابع بسل $J_0(x)$ میباشد. در نتیجه فرم کلی پاسخ معادله لاپلاس در دستگاه استوانه ای در اینحالت به صورت زیر است:



$$U(R,z)=\sum_{m=1}^{\infty}[(A_m \sinh\frac{\alpha_m}{a}z+B_m \sinh\frac{\alpha_m}{a}(L-z)]J_0(\frac{\alpha_m}{a}R) \qquad (6)$$

حال شرایط مرزی را اعمال میکنیم تا ضرایب مجهول بدست آیند:

$$u(R,0)=f_1(R)=\sum_{m=1}^{\infty}[B_m \sinh\frac{\alpha_m}{a}L]J_0(\frac{\alpha_m}{a}R) \qquad (7)$$

توابع بسل بر هم عمودند یعنی خاصیت زیر را دارند:

$$\int_0^a J_0(\frac{\alpha_m}{a}R)J_0(\frac{\alpha_n}{a}R)RdR=\begin{cases} 0 & n\neq m \\ \frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_n) & n=m \end{cases}$$

حال اگر طرفین رابطه (**7**) را در $J_0(\frac{\alpha_n}{a}R)R$ ضرب و از دو طرف از صفر تا a انتگرال بگیریم داریم:

$$\int_0^a f_1(R)J_0(\frac{\alpha_n}{a}R)RdR=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^a B_m \sinh\frac{\alpha_m}{a}LJ_0(\frac{\alpha_m}{a}R)J_0(\frac{\alpha_n}{a})RdR$$

سمت راست عبارت بالا همواره صفر است مگر جمله nام مجموع که یعنی $m=n$ در نتیجه معادله بالا به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_0^a f_1(R)J_0(\frac{\alpha_n}{a}R)RdR=B_n \sin\frac{\alpha_n}{a}L\int_0^a J_0(\frac{\alpha_n}{a}R)J_0(\frac{\alpha_n}{a})RdR=B_n \sinh\frac{\alpha_n}{a}L[\frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_n)]\rightarrow$$

$$B_n = \frac{\int_0^a f_1(R) J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) R dR}{\sinh \frac{\alpha_n}{a} L [\frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n)]} = \frac{2\int_0^a f_1(R) J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) R dR}{a^2 J_1^2(\alpha_n) \sinh \frac{\alpha_n}{a} L} \to B_m = \frac{2\int_0^a f_1(R) J_0(\frac{\alpha_m}{a} R) R dR}{a^2 J_1^2(\alpha_m) \sinh \frac{\alpha_m}{a} L}$$

حال شرط مرزی قاعده بالا را در معادله میگذاریم یعنی:

$$u(R, L) = f_2(R) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \sinh \frac{\alpha_m}{a} L] J_0(\frac{\alpha_m}{a} R) \qquad (8)$$

حال اگر طرفین رابطه (7) را در $J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) R$ ضرب و از دو طرف از صفر تا a انتگرال بگیریم داریم:

$$\int_0^a f_2(R) J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) R dR = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a A_m \sinh \frac{\alpha_m}{a} L J_0(\frac{\alpha_m}{a} R) J_0(\frac{\alpha_n}{a}) R dR$$

سمت راست عبارت بالا همواره صفر است مگر جمله nام مجموع که یعنی $m = n$ در نتیجه معادله بالا به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_0^a f_2(R) J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) R dR = A_n \sin \frac{\alpha_n}{a} L \int_0^a J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) J_0(\frac{\alpha_n}{a}) R dR = A_n \sinh \frac{\alpha_n}{a} L [\frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n)] \to$$

$$A_n = \frac{\int_0^a f_2(R) J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) R dR}{\sinh \frac{\alpha_n}{a} L [\frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n)]} = \frac{2\int_0^a f_2(R) J_0(\frac{\alpha_n}{a} R) R dR}{a^2 J_1^2(\alpha_n) \sinh \frac{\alpha_n}{a} L} \to A_m = \frac{2\int_0^a f_2(R) J_0(\frac{\alpha_m}{a} R) R dR}{a^2 J_1^2(\alpha_m) \sinh \frac{\alpha_m}{a} L}$$

با داشتن ضرایب A_m و B_m و جایگزینی آنها در معادله (6) تابع پتانسیل داخل استوانه بدست می آید.

حال اگر شرایط مرزی به صورت زیر باشند:

$$u(0, R) = 0 \qquad u(L, R) = 0 \qquad u(a, z) = f(z)$$

در اینصورت معادله لاپلاس بعد از جداسازی متغییرها به صورت زیر تبدیل میشود:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR})h + g\frac{d^2h}{dz^2} = 0 \to \frac{1}{gR}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR}) + \frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2} = 0 \to \begin{cases} \frac{1}{gR}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR}) = k^2 \\ \frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2} = -k^2 \end{cases}$$

که پاسخهای آنها به صورت زیر خواهند شد:

$$\begin{cases} \frac{1}{gR}\frac{d}{dR}(R\frac{dg}{dR}) = k^2 \to g(R) = I_0(kR) \\ \frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2} = -k^2 \to h(z) = A\sin kz + B\cos kz \end{cases} \to u(R,z) = I_0(kR)(A\sin kz + B\cos kz)$$

که I_0 تابع بسل اصلاح شده است. حال شرایط مرزی را اعمال میکنیم:

$$u(0,R) = 0 \to (A\sin 0 + B\cos 0)I_0(kR) = 0 \to B = 0 \qquad u(L,R) = 0 \to A\sin kL = 0 \to KL = m\pi \to k = \frac{m\pi}{L}$$

بنابراین پاسخ معادله لاپلاس به فرم زیر خواهد شد:

$$u(R,z) = AI_0(\frac{m\pi}{L}R)\sin\frac{m\pi}{L}z$$

برای اینکه شرط مرزی سوم یعنی $u(a,z) = f(z)$ برقرار باشد با توجه به اینکه $f(z)$ یک تابع اختیاری است باید معادله بالا را به صورت مجموع و به شکل زیر بنویسیم:

$$u(R,z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m I_0(\frac{m\pi}{L}R)\sin\frac{m\pi}{L}z \qquad (9)$$

حال شرط مرزی $u(a,z) = f(z)$ را اعمال میکنیم:

$$u(a,z) = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m I_0(\frac{m\pi}{L}a)\sin\frac{m\pi}{L}z$$

سمت راست عبارت بالا همان بسط سری فوریه سینوسی تابع با پریود $T = 2L$است بنابراین ضرایب سینوس ضرایب بسط سینوسی تابع $f(z)$ خواهند بود یعنی:

$$A_m I_0(\frac{m\pi}{L}a) = \frac{2}{L}\int_0^L f(z)\sin\frac{m\pi}{L}zdz \to A_m = \frac{2}{LI_0(\frac{m\pi}{L}a)}\int_0^L f(z)\sin\frac{m\pi}{L}zdz$$

بنابراین با جایگزینی A_m در معادله (**9**) پاسخ معادله لاپلاس در دستگاه استوانه ای بدست می آید.

حل معادلات لاپلاس دو متغیره در دستگاه کروی

در اینحالت پتانسیل تابع دو متغییر r و θمیباشد. مثلا فرض کنید پتانسیل روی قسمتی از کره که در محدوده $\theta_1 < \theta < \theta_2$ است V_1 و روی قسمتی از کره که در محدوده $\theta_2 < \theta < \theta_3$ قرار دارد V_2 باشد در اینصورت پتانسیل در داخل و خارج کره تابع r و θخواهد بود که

میتوان با استفاده از اصل جداسازی متغیرها بصورت حاصلضرب دو تابع r و θ نوشت. بنابراین با قرار دادن $V(r,\theta)=f(r)g(\theta)$ در معادله لاپلاس در دستگاه کروی خواهیم داشت:

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0$$

اگر طرفین رابطه بالا را بر $f(r)g(\theta)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr}(r^2\frac{df}{dr})+\frac{1}{g(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dg}{d\theta})=0$$

همانطوریکه ملاحظه میشود در عبارت بدست آمده جمله اول تابع r و جمله دوم تابع θ میباشند که صفر شدن مجموع این دو جمله امکانپذیر نیست و تنها حالت ممکن ثابت بودن جمله اول و دوم می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{f(r)}\dfrac{d}{dr}(r^2\dfrac{df}{dr})=k\\[2mm] \dfrac{1}{g(\theta)}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta\dfrac{dg}{d\theta})=-k\end{cases}$$

معادله دیفرانسیل دوم را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dg}{d\theta})+kg(\theta)=0$$

اگر فرض کنیم $x=\cos\theta$ در اینصورت خواهیم داشت:

$$\frac{dg}{d\theta}=\frac{dg}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\frac{dg}{dx}\rightarrow\frac{1}{\sin\theta}(\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dg}{d\theta})+kg=\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta\frac{dg}{d\theta}+\sin\theta\frac{d^2g}{d\theta^2})+kg=0\rightarrow$$
$$\frac{1}{\sin\theta}[\cos\theta(-\sin\theta)\frac{dg}{dx}+\sin\theta\frac{d^2g}{d\theta^2}]+kg=0\rightarrow-\cos\theta\frac{dg}{dx}+\frac{d^2g}{d\theta^2}+kg=0$$

$$\frac{d^2g}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}(\frac{dg}{d\theta})=\frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\frac{dg}{dx})=-\cos\theta\frac{dg}{dx}-\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\frac{dg}{dx})=-\cos\theta\frac{dg}{dx}-\sin\theta(\frac{d^2g}{dx^2}\frac{dx}{d\theta})=$$
$$-\cos\theta\frac{dg}{dx}-\sin\theta(\frac{d^2g}{dx^2}\times-\sin\theta)=-\cos\theta\frac{dg}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2g}{dx^2}\rightarrow\frac{d^2g}{d\theta^2}=-\cos\theta\frac{dg}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2g}{dx^2}\rightarrow$$
$$-\cos\theta\frac{dg}{dx}+\frac{d^2g}{d\theta^2}+kg=-\cos\theta\frac{dg}{dx}-\cos\theta\frac{dg}{dx}+\sin^2\theta\frac{d^2g}{dx^2}+kg=0\rightarrow(1-\cos^2\theta)\frac{d^2g}{dx^2}-2\cos\theta\frac{dg}{dx}+kg=0$$

معادله بالا در نقاط تکین $x=\pm1$ که متناظر با $\theta=0$ و $\theta=\pi$ هستند باید جواب داشته باشد زیرا در مسئله ما موجود هستند. ثابت میشود برای ایجاد چنین شرایطی k باید بصورت $k=n(n+1)$ باشد، بنابراین معادله دیفرانسیل بالا بصورت زیر خواهد شد:

$$(1-x^2)\frac{d^2g}{dx^2}-2x\frac{dg}{dx}+n(n+1)g=0$$

معادله فوق معادله لژاندر میباشد که پاسخ کلی آن بصورت $g(x)=P_n(x)=P_n(\cos\theta)$ خواهد بود بطوریکه:

$$P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x \qquad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$

فرم کلی این تابع بصورت زیر خواهد بود:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

حال معادله دیفرانسیل اول را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$r^2\frac{d^2 f}{dr^2}+2r\frac{df}{dr}-kf=0$$

اگر جواب کلی بصورت $f=r^{\alpha}$ باشد در اینصورت با جایگزینی در معادله بالا خواهیم داشت:

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+2r\alpha r^{\alpha-1}-n(n+1)r^{\alpha}=0\rightarrow r^{\alpha}(\alpha^2+\alpha-n^2-n)=0\rightarrow\begin{cases}\alpha=n\\ \alpha=-(n+1)\end{cases}$$

بنابراین پاسخ کلی تابع پتانسیل در دستگاه کروی دو متغییره بصورت زیر است:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$$

لازم به ذکر است که توابع لژاندر بر هم عمودند و میتوان نوشت:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

اگر تغییرمتغییر $x=\cos\theta$ را اعمال کنیم در اینصورت خاصیت عمودی بودن توابع لژاندر به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_{0}^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

البته داخل چون شامل $r=0$ میشود جمله $r^{-(n+1)}$ نمیتواند در پاسخ معادله لاپلاس وجود داشته باشد زیرا پتانسیل در $r=0$ بینهایت میشود. همینطور خارج کره چون شامل $r=\infty$ میشود جمله r^n نمیتواند در پاسخ معادله لاپلاس وجود داشته باشد زیرا پتانسیل در $r=\infty$ بینهایت میشود. بنابراین پتانسیل در داخل و خارج کره به صورت زیر خواهد شد:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad r<a$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \qquad r>a$$

مثال 11: پتانسیل روی کره به شعاع a به صورت $u(a,\theta)=f(\theta)$ داده شده است. پتانسیل در داخل و خارج کره را بدست آورید.

حل: پتانسیل در داخل کره به صورت زیر نوشته میشود:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

حال شرط مرزی را اعمال میکنیم:

$$u(a,\theta)=f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

حال طرفین را در $P_m(\cos\theta)\sin\theta$ ضرب و از صفر تا π انتگرال میگیریم. بنابراین د اریم:

$$\int_0^{\pi} f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)\sin\theta\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

انتگرال سمت راست فقط به ازای $n=m$ جواب دارد یعنی باید فقط جمله mام عبارت $\sum$ را در نظر گرفت یعنی:

$$\int_0^{\pi} f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)A_m a^m P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2}{2m+1}A_m a^m \rightarrow$$

$$A_m=\frac{2m+1}{2a^m}\int_0^{\pi} f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

بنابراین با داشتن تابع $f(\theta)$ میتوان ضریب مجهول تابع پتانسیل را بدست آورید.

پتانسیل در خارج کره به صورت زیر نوشته میشود:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

حال شرط مرزی را اعمال میکنیم:

$$u(a,\theta)=f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

حال طرفین را در $P_m(\cos\theta)\sin\theta$ ضرب و از صفر تا π انتگرال میگیریم. بنابراین د اریم:

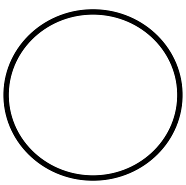
$$\int_0^\pi f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^\pi P_m(\cos\theta)\sin\theta\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

انتگرال سمت راست فقط به ازای $n=m$ جواب دارد یعنی باید فقط جمله m ام عبارت $\sum$ را در نظر گرفت یعنی:

$$\int_0^\pi f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^\pi P_m(\cos\theta)B_m a^{-(m+1)}P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2m+1}B_m a^{-(m+1)} \rightarrow$$

$$B_m = \frac{(2m+1)a^{(m+1)}}{2}\int_0^\pi f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

بنابراین با داشتن تابع $f(\theta)$ میتوان ضریب مجهول تابع پتانسیل را بدست آورید. جالب است که رابطه ضرایب پتانسیل در داخل و خارج کره شبیه یکدیگر است با این فرق که در ضرایب پتانسیل داخل کره (ضرایب A_m) عبارت a^m در مخرج عبارت است در حالی که در ضرایب پتانسیل خارج کره (ضرایب B_m) عبارت a^{m+1} در صورت عبارت است.



مثال **12**: در شکل زیر که یک کره به شعاع **2** متر میباشد معادله پتانسیل درداخل کره و خارج را بدست آورید

$$f(\theta) = U(a,\theta) = \cos 3\theta + 6\cos^3\theta + \cos 2\theta$$

راهنمایی: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ $\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), P_1(x) = x$

<u>حل</u>: ابتدا پتانسیل روی کره را به صورت توابع لژاندر مینویسیم:

$$U(a,\theta) = \cos 3\theta + 6\cos^3\theta + \cos 2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 6\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 1 \rightarrow$$

$$U(a,\theta) = -1 - 3\cos\theta + 2\cos^2\theta + 10\cos^3\theta$$

حال داریم:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \rightarrow P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \rightarrow \cos^2\theta = \frac{2P_2(\cos\theta)+1}{3}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \rightarrow P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}[5\cos^3\theta - 3P_1(\cos\theta)] \rightarrow \cos^3\theta = \frac{2P_3(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)}{5}$$

بنابراین پتانسیل روی کره برابر است با:

$$U(a,\theta) = -1 - 3\cos\theta + 2\cos^2\theta + 10\cos^3\theta = -1 - 3P_1(\cos\theta) + 2\frac{2P_2(\cos\theta)+1}{3} + 10\frac{2P_3(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)}{5} =$$

$$-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)$$

پتانسیل در داخل کره که پاسخ معادله لاپلاس است را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)\to U(a,\theta)\to U(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n P_n(\cos\theta)$$
$$=A_0P_0(\cos\theta)+A_1aP_1(\cos\theta)+A_2a^2P_2(\cos\theta)+A_3a^3P_3(\cos\theta)+......=$$
$$-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)\to A_0=-\frac{1}{3}\quad A_1a=3\to A_1=\frac{3}{a}=\frac{3}{2}=1.5\quad A_2a^2=\frac{4}{3}\to$$
$$A_2=\frac{4}{3a^2}=\frac{4}{3(2)^2}=\frac{1}{3}\qquad A_3a^3=4\to A_3=\frac{4}{a^3}=\frac{4}{(2)^3}=\frac{1}{2}\qquad A_i=0\quad i\ge 4\to$$

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{3}A_n r^n P_n(\cos\theta)=-\frac{1}{3}+1.5rP_1(\cos\theta)+\frac{1}{3}r^2P_2(\cos\theta)+\frac{1}{2}r^3P_3(\cos\theta)\to$$
$$U(r,\theta)=-\frac{1}{3}+1.5r\cos\theta+\frac{1}{3}r^2\times\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)+\frac{1}{2}r^3\frac{1}{2}(5\cos\theta^3-3\cos\theta)\to$$
$$U(r,\theta)=-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}r^2)+(1.5r-\frac{3}{4}r^3)\cos\theta+\frac{1}{2}r^2\cos^2\theta+\frac{5}{4}r^3\cos^3\theta$$

البته میتوان از خاصیت بر هم عمود بودن توابع لژاندر به صورت زیر استفاده کرد:

$$A_m=\frac{2m+1}{2a^m}\int_0^{\pi}f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta\to$$
$$A_0=\frac{2\times 0+1}{2a^0}\int_0^{\pi}[-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)]P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

حاصل انتگرال حاصلضرب تمام توابع لژاندر داخل براکت در $P_0(\cos\theta)$ صفر است مگر حاصلضرب $-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$ در $P_0(\cos\theta)$ بنابراین داریم:

$$A_0=\frac{2\times 0+1}{2a^0}\int_0^{\pi}[-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)]P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}\times-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}P_0(\cos\theta)P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta=-\frac{1}{6}\times\frac{2}{2\times 0+1}=-\frac{1}{3}$$

$$A_m=\frac{2m+1}{2a^m}\int_0^{\pi}f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta\to$$
$$A_1=\frac{2\times 1+1}{2a^1}\int_0^{\pi}[-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)]P_1(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

حاصل انتگرال حاصلضرب تمام توابع لژاندر داخل براکت در $P_1(\cos\theta)$ صفر است مگر حاصلضرب $3P_1(\cos\theta)$ در $P_1(\cos\theta)$ بنابراین داریم:

$$A_1=\frac{2\times1+1}{2a^1}\int_0^{\pi}[3P_1(\cos\theta)]P_1(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{3}{2a}\times3\int_0^{\pi}P_1(\cos\theta)P_1(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{9}{2a}\times\frac{2}{2\times1+1}=\frac{3}{a}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$A_m=\frac{2m+1}{2a^m}\int_0^{\pi}f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta\rightarrow$$

$$A_2=\frac{2\times2+1}{2a^2}\int_0^{\pi}[-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)]P_2(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

حاصل انتگرال حاصلضرب تمام توابع لژاندر داخل براکت در $P_2(\cos\theta)$ صفر است مگر حاصلضرب $\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)$ در $P_2(\cos\theta)$ بنابراین داریم:

$$A_2=\frac{2\times2+1}{2a^2}\int_0^{\pi}[\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)]P_2(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{5}{2a^2}\times\frac{4}{3}\int_0^{\pi}P_2(\cos\theta)P_2(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{10}{3a^2}\times\frac{2}{2\times2+1}=\frac{4}{3a^2}=$$

$$\frac{4}{3(2)^2}=\frac{1}{3}\qquad A_m=\frac{2m+1}{2a^m}\int_0^{\pi}f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta\rightarrow$$

$$A_3=\frac{2\times3+1}{2a^3}\int_0^{\pi}[-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)]P_3(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

حاصل انتگرال حاصلضرب تمام توابع لژاندر داخل براکت در $P_3(\cos\theta)$ صفر است مگر حاصلضرب $4P_3(\cos\theta)$ در $P_3(\cos\theta)$ بنابراین داریم:

$$A_3=\frac{2\times3+1}{2a^3}\int_0^{\pi}[4P_3(\cos\theta)]P_3(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{7}{2a^3}\times4\int_0^{\pi}P_3(\cos\theta)P_3(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{14}{a^3}\times\frac{2}{2\times3+1}=\frac{4}{a^3}$$

$$A_3=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$$

که همان جوابهای حالت قبل است. لازم به ذکر است که چون در تابع $f(\theta)$ لژاندر بالاتر از مرتبه **3** نداریم لذا ضرایب A_4 به بعد صفر میباشد پتانسیل در خارج کره که پاسخ معادله لاپلاس است را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)\rightarrow U(a,\theta)\rightarrow U(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

$$=B_0a^{-1}P_0(\cos\theta)+B_1a^{-2}P_1(\cos\theta)+B_2a^{-3}P_2(\cos\theta)+B_3a^{-4}P_3(\cos\theta)+......=$$

$$-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+3P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)+4P_3(\cos\theta)\rightarrow B_0a^{-1}=-\frac{1}{3}\rightarrow B_0=\frac{a}{3}=\frac{2}{3}\qquad B_1a^{-2}=3\rightarrow$$

$$B_1=3a^2=12\qquad B_2a^{-3}=\frac{4}{3}\rightarrow B_2=\frac{4a^3}{3}=\frac{32}{3}\qquad B_3a^{-4}=4\rightarrow B_3=4a^4=64\qquad B_i=0\quad i\geq4\rightarrow$$

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{3}B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=\frac{2}{3r}+\frac{12}{r^2}P_1(\cos\theta)+\frac{32}{3r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{64}{r^4}P_3(\cos\theta)\rightarrow$$

$$U(r,\theta)=\frac{2}{3r}+\frac{12}{r^2}\cos\theta+\frac{32}{3r^3}\times\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)+\frac{64}{r^4}\frac{1}{2}(5\cos\theta^3-3\cos\theta)$$

. حال برای تست کردن جواب، پتانسیل روی کره را حساب میکنیم:

$$U(r,\theta)=-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}r^2)+(1.5r-\frac{3}{4}r^3)\cos\theta+\frac{1}{2}r^2\cos^2\theta+\frac{5}{4}r^3\cos^3\theta\rightarrow$$
$$U(a,\theta)=U(2,\theta)=-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}2^2)+(1.5\times2-\frac{3}{4}2^3)\cos\theta+\frac{1}{2}2^2\cos^2\theta+\frac{5}{4}3^3\cos^3\theta\rightarrow$$
$$U(a,\theta)=-1-3\cos\theta+2\cos^2\theta+10\cos^3\theta$$

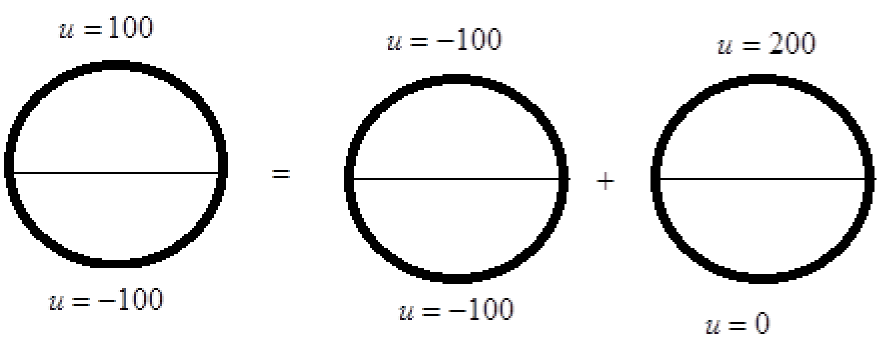
که همان شرط مرزی بالا میباشد. اگر پتانسیل روی کره ثابت باشد یعنی $f(\theta)=U_0$ در اینحالت ضرایب به صورت زیر بدست می آیند:

$$A_m=\frac{2m+1}{2a^m}\int_0^\pi U_0P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{(2m+1)U_0}{2a^m}\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

بنابراین باید انتگرال $\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ را بدست آوریم. این انتگرال به صورت زیر است:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)}\qquad M=\begin{cases}\frac{n}{2} & n=even\\ \frac{n-1}{2} & n=nodd\end{cases}$$

مثال**13**: پتانسیل روی کره به صورت $u(a,\theta)=f(\theta)=\begin{cases}100 & \frac{\pi}{2}>\theta>0\\ -100 & \pi>\theta>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ داده شده است. تابع پتانسیل داخل کره را بدست آورید.



حل: کره را با استفاده از جمع آثار میتوان به صورت زیر نشان داد:

برای کره اول از دو کره سمت راست چون پتانسیل در سرتاسر روی کره برابر است با $u=-100$ در نتیجه پتانسیل در داخل کره همواره $u_1=-100$ میباشد. برای کره دوم اگر پتانسیل داخل این کره را u_2 بنامیم میتوان نوشت:

$$u_2(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta)\qquad u_2(a,\theta)=f(\theta)=\begin{cases}200 & \frac{\pi}{2}>\theta>0\\ 0 & \pi>\theta>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$u_2(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n P_n(\cos\theta = f(\theta)=\begin{cases}200 & \frac{\pi}{2}>\theta>0\\ 0 & \pi>\theta>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

که با توجه به روابطی که قبلا بدست آوردیم داریم:

$$A_n=\frac{2n+1}{2a^n}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{(2n+1)}{2a^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}200P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\rightarrow$$

$$A_n=\frac{200(2n+1)}{2a^n}\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)} \qquad u(r,\theta)=-100+\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

مثال **14**: پتانسیل در داخل و خارج یک کره به شعاع $a=50cm$ سانتیمتراگر پتانسیل در روی کره به صورت زیر باشد را به دست آورید.

$$u(a,\theta)=f(\theta)=1+3\cos\theta+2\cos 2\theta+3\cos 3\theta+4\cos 4\theta$$

حل: : ابتدا پتانسیل روی کره را به صورت توابع لژاندر مینویسیم

$$f(\theta)=1+3cos\theta+2cos2\theta+3cos3\theta+4cos4\theta=1+3cos\theta+2(2cos^2\theta-1)+3(4cos^3\theta-3cos\theta)$$
$$+4(2cos^2 2\theta-1)=-1-6cos\theta+4cos^2\theta+12cos^3\theta+4[2(2cos^2\theta-1)^2-1]=$$
$$-1-6cos\theta+4cos^2\theta+12cos^3\theta+4[8cos^4\theta-8cos^2\theta+1]=3-6cos\theta-28cos^2\theta+12cos^3\theta+32cos^4\theta$$

حال داریم:

$$P_0(cos\theta)=1 \quad P_1(cos\theta)=cos\theta \quad P_2(cos\theta)=\frac{1}{2}(3cos^2\theta-1), P_3(cos\theta)=\frac{1}{2}(5cos^3\theta-3cos\theta)$$
$$P_4(cos\theta)=\frac{35cos^4\theta-30cos^2\theta+3}{8}\rightarrow cos\theta=P_1(cos\theta) \qquad cos^2\theta=\frac{2P_2(cos\theta)+1}{3}$$
$$cos^3\theta=\frac{2P_3(cos\theta)+3P_1(cos\theta)}{5} \qquad cos^4\theta=\frac{8P_4(cos\theta)+30(\frac{2P_2(cos\theta)+1}{3})-3}{35}$$
$$=\frac{8P_4(cos\theta)+20P_2(cos\theta)+7}{35} \rightarrow f(\theta)=3-6P_1(cos\theta)-28\frac{2P_2(cos\theta)+1}{3}+12\frac{2P_3(cos\theta)+3P_1(cos\theta)}{5}+$$
$$32\frac{8P_4(cos\theta)+20P_2(cos\theta)+7}{35}=\frac{1}{15}P_0(cos\theta)+\frac{6}{5}P_1(cos\theta)-\frac{8}{21}P_2(cos\theta)+\frac{24}{5}P_3(cos\theta)+\frac{256}{35}P_4(cos\theta)$$

پاسخ معادله لاپلاس در داخل و خارج استوانه به صورت زیر است:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(cos\theta) \quad r<a \qquad u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(cos\theta) \quad r>a$$

حال شرط مرزی را روی کره مینویسیم:

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n P_n(cos\theta)= f(\theta)=\frac{1}{15}P_0(cos\theta)+\frac{6}{5}P_1(cos\theta)-\frac{8}{21}P_2(cos\theta)+\frac{24}{5}P_3(cos\theta)+\frac{256}{35}P_4(cos\theta)$$

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n a^{-(n+1)}P_n(cos\theta)= f(\theta)=\frac{1}{15}P_0(cos\theta)+\frac{6}{5}P_1(cos\theta)-\frac{8}{21}P_2(cos\theta)+\frac{24}{5}P_3(cos\theta)+\frac{256}{35}P_4(cos\theta)$$

با مقایسه ضرایب توابع لژاندر در دو طرف مشخص است که عبارت مجموع فقط تا $n=4$ جملات غیر صفر دارد حال با مقایسه ضرایب لژاندر در دو طرف ضرایب به صورت زیر بدست می اید:

$$A_0=\frac{1}{15}\qquad A_1=\frac{6}{5a}=\frac{12}{5}\qquad A_2=-\frac{8}{21a^2}=-\frac{32}{21}\qquad A_3=\frac{24}{5a^3}=\frac{192}{5}\qquad A_4=\frac{256}{35a^4}=\frac{4096}{35}$$

$$B_0=\frac{a}{15}=\frac{1}{30}\quad B_1=\frac{6a^2}{5}=\frac{3}{10}\qquad B_2=-\frac{8a^3}{21}=-\frac{1}{21}\qquad B_3=\frac{24a^4}{5}=-\frac{3}{10}\qquad B_4=\frac{256a^5}{35}=\frac{8}{35}$$

با جایگزینی ضرایب در توابع پتانسیل تابع پتانسیل در داخل و خارج کره به شعاع **50** سانتیمتر بدست می آید.

والسلام موفق باشید

محمود محمدطاهری–اردیبهشت 1401