به نام خداوند قلم

دانشگاه تهران

پردیس دانشکدگان فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱	پاسخ تکلیف شماره ۱۰	

دنباله و سری-مانده و کاربردها

پاسخ سوال ۱ : (۱۵ نمره)

تمرین هفتم ، ۱۰

۵ $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)z e^{-(n+1)z^2}}{nz e^{-nz^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}e^{-z^2}\right| = |e^{-z^2}|<1 \Rightarrow |e^{y^2-x^2-j2xy}|<1 \Rightarrow |e^{y^2-x^2}|<1 \Rightarrow y^2-x^2<0$$

$$\Rightarrow x^2>y^2 \Rightarrow |x|>|y|$$

۵ $$S=\sum_{n=1}^{\infty} nze^{-nz^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-z^2})^n\right) \overset{|e^{-z^2}|<1}{=} -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-e^{-z^2}}\right) = \frac{ze^{-z^2}}{(1-e^{-z^2})^2} = \frac{ze^{z^2}}{(e^{z^2}-1)^2}$$

پاسخ سوال ۲: (۱۵ نمره)

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)} \quad ; \quad z=-1$$

$$f(z)=\frac{-1}{z+1}+\frac{2}{z+2} = \frac{-1}{z+1}+\frac{2}{(z+1)+1} = \frac{-1}{z+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+z)^n \qquad 0<|z+1|<1$$

$$f(z)=\frac{-1}{z+1}+\frac{2}{1+(1+z)} = \frac{-1}{z+1}+\frac{2}{(1+z)\left[1+\frac{1}{1+z}\right]} = \frac{-1}{z+1}+\frac{2}{1+z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1+z}\right)^n \qquad |z+1|>1$$

$$= \frac{-1}{z+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(1+z)^{n+1}}$$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱	پاسخ تکلیف شماره ۱۰	

پاسخ سوال ۳ الف: (۲۰ نمره)

$$(7)\quad I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+2x\cos(3x)+1}{x^9-5x^5+4x}dx=\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^9-5x^5+4x}dx}}_{\to 0}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\cos 3x}{x^9-5x^5+4x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\cos 3x}{x^8-5x^4+4}$$

تابع فرد

$$=Re\left[2\pi i\sum_{\text{قطب‌های بالای محور}} Res\left[\frac{2e^{i3z}}{z^8-5z^4+4}\right]+\pi i\sum_{\text{قطب‌های روی محور}} Res\left[\frac{2e^{i3z}}{z^8-5z^4+4}\right]\right]$$

$$z^8-5z^4+4=0\Rightarrow(z^4-1)(z^4-4)=0\Rightarrow(z^2-1)(z^2+1)(z^2-2)(z^2+2)=0\Rightarrow\begin{array}{l}z=\pm 1,\ z=\pm i\\ z=\pm\sqrt{2},\ z=\pm i\sqrt{2}\end{array}$$

قطب‌های حقیقی: $z=\pm 1$, $z=\pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow I=Re\left[2\pi i\left(\underset{z=i}{Res}\frac{2e^{i3z}}{z^8-5z^4+4}+\underset{z=i\sqrt{2}}{Res}\frac{2e^{i3z}}{z^8-5z^4+4}\right)+\pi i\left(\underset{z=1}{Res}\frac{2e^{i3z}}{z^8-5z^4+4}+\underset{z=-1}{Res}[f(z)]+\underset{z=\sqrt{2}}{Res}[f(z)]+\underset{z=-\sqrt{2}}{Res}[f(z)]\right)\right]$$

$$=Re\left[2\pi i\left(-\frac{i}{6}e^{-3}+\frac{i\sqrt{2}}{24}e^{-3\sqrt{2}}\right)+\pi i\left(\underbrace{-\frac{e^{3i}}{6}+\frac{e^{-3i}}{6}}_{-\frac{i}{3}\sin 3}+\underbrace{\frac{1}{12\sqrt{2}}e^{i3\sqrt{2}}-\frac{1}{12\sqrt{2}}e^{-i3\sqrt{2}}}_{\frac{i}{6\sqrt{2}}\sin(3\sqrt{2})}\right)\right]$$

چون همه قطب‌ها ساده هستند، $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$

$$Res[f(z),z=z_0]=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}=\frac{2e^{i3z_0}}{8z_0^7-20z_0^3}$$

$$=Re\left[\frac{\pi}{3}e^{-3}-\frac{\pi\sqrt{2}}{12}e^{-3\sqrt{2}}+\frac{\pi}{3}\sin 3-\frac{\pi}{6\sqrt{2}}\sin(3\sqrt{2})\right]$$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰	پاسخ تکلیف شماره ۱۰	

پاسخ سوال ۳ ب: (۱۵ نمره)

$$(4)\quad I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+2}\,dx=\operatorname{Im}\Bigg[2\pi i\underbrace{\sum}_{\text{قطب‌های بالای محور}}\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2+2z+2}\right]+\pi i\underbrace{\sum{}'}_{\text{قطب‌های روی محور}}\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2+2z+2}\right]\Bigg]$$

$$z^2+2z+2=0\Rightarrow z=-1\pm i\quad\Rightarrow\quad\operatorname*{Res}_{z=-1+i}\left[\frac{z\,e^{iz}}{(z+1-i)(z+1+i)}\right]=\frac{(-1+i)\,e^{i(-1+i)}}{2i}=\frac{(i+1)\,e^{-1}e^{-i}}{2}$$

$$=\frac{i+1}{2e}(\cos 1-i\sin 1)=\frac{\cos 1}{2e}+\frac{\sin 1}{2e}+i\left(\frac{\cos 1-\sin 1}{2e}\right)$$

$$\Rightarrow I=\operatorname{Im}\left[2\pi i\left(\frac{\cos 1+\sin 1}{2e}+i\,\frac{\cos 1-\sin 1}{2e}\right)\right]=\frac{\pi}{e}(\cos 1+\sin 1)$$

پاسخ سوال ۳ ج: (۱۵ نمره)

$$(4)\quad I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}=\frac{-2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2\sqrt{2}z+1}=\frac{-2}{i}\oint\frac{dz}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}$$

$$=-\frac{2}{i}(2\pi i)\left[\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1}f(z)\right]=-4\pi\left(\frac{1}{(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)}\right)=2\pi$$

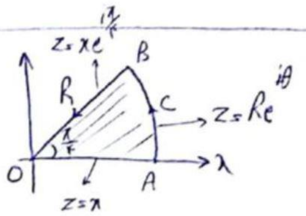
به نام خداوند قلم
دانشگاه تهران
پردیس دانشکدگان فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۱۰

نیم‌سال دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۴: (۲۰ نمره)



$$2)\quad I=\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \longrightarrow I'=\oint_C e^{iz^2}dz=0$$

هیچ نقطه تکین در ناحیه C ندارد.

$$\int_{OA} e^{iz^2}dz+\int_{AB} e^{iz^2}dz+\int_{BO} e^{iz^2}dz=0=\int_{x=0}^{R} e^{ix^2}dx+\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(e^{i\theta})^2}(iRe^{i\theta}d\theta)+\int_R^0 e^{ix^2(e^{i\frac{\pi}{4}})^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dx=0$$

$$\Rightarrow \int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta+\int_R^0 e^{-x^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dx=0$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}R\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{R}{e^{R^2\sin 2\theta}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0 \qquad 0\le 2\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin 2\theta\ge 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx+\int_\infty^0 e^{-x^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dx=0\Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx=-e^{i\frac{\pi}{4}}\int_\infty^0 e^{-x^2}dx=e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I=\int_0^\infty \sin(x^2)dx=\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty e^{ix^2}dx\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

موفق باشید – خان چرلی