



درس ریاضی مهندسی

تاریخ ۱۴۰۱/۰۱/۲۹	پاسخ کوئیز ۳	نیم سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱
---------------------	--------------	--------------------------

پاسخ سوال ۱: (۵۰ نمره)

میدانیم برای $e^{-\alpha x}$ انتگرال کسینوسی فوریه برابر است با: $A(\omega) = \frac{2\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$ یعنی:

$$e^{-\alpha x} = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha \cos \omega x}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} d\omega \rightarrow \frac{de^{-\alpha x}}{d\alpha} = -xe^{-\alpha x} = \int_0^{\infty} \frac{2(\omega^2 + \alpha^2) - 4\alpha^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} \cos \omega x d\omega \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^{-\alpha x} = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha \cos \omega x}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} d\omega \\ -xe^{-\alpha x} = \int_0^{\infty} \frac{2(\omega^2 + \alpha^2) - 4\alpha^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} \cos \omega x d\omega \end{cases}$$

حال دو رابطه را با هم جمع میکنیم:

$$e^{-\alpha x} - xe^{-\alpha x} = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha \cos \omega x}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{2(\omega^2 + \alpha^2) - 4\alpha^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} \cos \omega x d\omega = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha(\omega^2 + \alpha^2) + 2(\omega^2 + \alpha^2) - 4\alpha^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} \cos \omega x d\omega$$

$$\rightarrow (1-x)e^{-\alpha x} = \int_0^{\infty} \frac{2\omega^2(\alpha+1) + 2\alpha^3 - 2\alpha^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} \cos \omega x d\omega \quad \alpha = 3 \rightarrow$$

$$(1-x)e^{-3x} = \int_0^{\infty} \frac{4(2\omega^2 + 9)}{\pi(\omega^2 + 9)^2} \cos \omega x d\omega \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{(2\omega^2 + 9)}{(\omega^2 + 9)^2} \cos \omega x d\omega = \frac{\pi}{4} (1-x)e^{-3x}$$

پاسخ سوال ۲ قسمت (الف): (۳۰ نمره)

$$\text{even} \rightarrow b_n = 0, a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi^3(-1)^n}{(n\pi)^2} \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

پاسخ سوال ۲ قسمت (ب): (۲۰ نمره)

$$\text{if } x = 0 : f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$