برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com، bakhtazad.v@gmail.com مکاتبه نمایید.

۱)

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2+6x+10}=\frac{x+3}{(x+3)^2+1}\Longrightarrow F(\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{x+3}{(x+3)^2+1}\right\}=e^{j3\omega}\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+1}\right\}$$

$$\mathcal{F}\{e^{-a|x|}\}=\frac{2a}{\omega^2+a^2}\Longrightarrow\frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\omega^2+1}\Longrightarrow\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+1}\right\}=\pi e^{-|\omega|}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+1}\right\}=j\frac{d}{d\omega}\pi e^{-|\omega|}=-j\pi\,\mathrm{sign}(\omega)e^{-|\omega|}$$

$$\Longrightarrow\boxed{F(\omega)=-j\pi\,\mathrm{sign}(\omega)e^{-|\omega|+j3\omega}}$$

۲)

الف)

$$\Lambda(t)=\Pi(t)*\Pi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\Pi(t-\tau)d\tau$$

$$t<-1\Longrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}0d\tau=0$$

$$-1<t<0\Longrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}d\tau=t+1$$

$$0<t<1\Longrightarrow\int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}d\tau=1-t$$

$$1<t\Longrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}0d\tau=0$$

$$\Longrightarrow\Pi(t)*\Pi(t)=\Lambda(t)$$

ب)

$$\mathcal{F}\{\Pi(t)\}=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\Longrightarrow\mathcal{F}\{\Lambda(t)\}=\mathcal{F}\{\Pi(t)*\Pi(t)\}=\mathcal{F}\{\Pi(t)\}\mathcal{F}\{\Pi(t)\}=\boxed{sinc^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)}$$

۳)

$$(j\omega)^2Y(\omega)+5(j\omega)Y(\omega)+4Y(\omega)=\frac{1}{j\omega+4}$$

$$\Longrightarrow Y(\omega)((j\omega)^2+5(\omega)+4)=\frac{1}{j\omega+4}\Longrightarrow Y(\omega)(j\omega+4)(j\omega+1)=\frac{1}{j\omega+4}\Longrightarrow Y(\omega)=\frac{1}{(j\omega+4)^2(j\omega+1)}$$

$$=\frac{A}{(j\omega+4)^2}+\frac{B}{j\omega+4}+\frac{C}{j\omega+1}$$

$$\Longrightarrow Y(\omega)=\frac{-\frac{1}{3}}{(j\omega+4)^2}+\frac{-\frac{1}{9}}{j\omega+4}+\frac{\frac{1}{9}}{j\omega+1}\Longrightarrow\boxed{y(t)=\left(-\frac{1}{9}e^{-4t}+\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{1}{3}te^{-4t}\right)u(t)}$$

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: وصال بخت زاد- هلیا حسینی
برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com،bakhtazad.v@gmail.com مکاتبه نمایید.

۴)

الف)

$$F(j\omega)=\frac{5+j3\omega}{2-3\omega^2+j(3\omega-\omega^3)}=\frac{5+j3\omega}{(2+j\omega)(1-\omega^2+j\omega)}=\frac{5+j3\omega}{(2+j\omega)(1+j\omega+(j\omega)^2)}$$

$$=\frac{A}{2+j\omega}+\frac{B}{\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)+j\omega}+\frac{C}{\left(\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)+j\omega}\Rightarrow A=-\frac{1}{3},\qquad B=\frac{1}{6}+j\frac{5\sqrt{3}}{6},\qquad C=\frac{1}{6}-j\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t)=\left[-\frac{1}{3}e^{-2t}+\left(\frac{1}{6}+j\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)e^{-\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)t}+\left(\frac{1}{6}-j\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)e^{-\left(\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)t}\right]u(t)}$$

ب)

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{\omega}\sin(4\omega)\right\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{24\frac{\sin(4\omega)}{4\omega}\right\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{24\mathrm{sinc}\left(\frac{8\omega}{2\pi}\right)\right\}$$

$$\mathcal{F}\{\Pi(x)\}=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\Rightarrow\mathcal{F}^{-1}\left\{24\mathrm{sinc}\left(\frac{8\omega}{2\pi}\right)\right\}=3\Pi\left(\frac{x}{8}\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{\omega}\sin(4\omega)\,e^{j2\omega}\right\}=3\Pi\left(\frac{x+2}{8}\right)}$$

۵)

الف) فوریه تابع داده شده برابر است با:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}\,e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t(a+j\omega)}\,dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}-(jt)f(t)e^{-j\omega t}dt\Rightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

بنابراین تبدیل فوریه $g(t)=tf(t$ برابر است با $G(w)=j\frac{dF(w)}{dw}$ در نتیجه تبدل فوریه $g(t)=te^{-2t}u(t)$ برابر است با:

$$G(\omega)=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)=\boxed{\frac{1}{(2+j\omega)^2}}$$

حال از قضیه پارسوال استفاده میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{4-\omega^2+j4\omega}\right|^2d\omega\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}[te^{-2t}u_{-1}(t)]^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+4)^2}d\omega$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+4)^2}d\omega=2\pi\int_{0}^{\infty}t^2e^{-4t}dt$$

انتگرال آخر را از طریق جز به جز حل میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+4)^2}d\omega=2\pi\left(\left[-\frac{t^2}{4}e^{-4t}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}te^{-4t}dt\right)=2\pi\left(\left[-\frac{t^2}{4}e^{-4t}-\frac{t}{8}e^{-4t}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{8}\int_0^{\infty}e^{-4t}dt\right)=\frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow\boxed{\int_0^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+4)^2}d\omega=\frac{\pi}{32}}$$

۶)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

الف)

$$I_0 = X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 11$$

ب)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 2\pi x(0) = 2\pi\frac{0+2}{2} = 2\pi$$

ج)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(\omega)d\omega$$
$$x(t) * x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)x(\tau)d\tau$$
$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(\omega)d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)x(\tau)d\tau = 0$$

د)

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 X(\omega)e^{j6\omega}d\omega$$
$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\} = (j\omega)^n X(\omega) \Longrightarrow \omega^2 X(\omega) = -\mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\}$$
$$\Longrightarrow -\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$
$$\Longrightarrow I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 X(\omega)e^{j6\omega}d\omega = -2\pi\frac{d^2}{dt^2}x(t)\bigg|_{t=6} = 2\pi\delta(t-6)|_6 = 2\pi\delta(0) = \infty$$

ه)

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$
$$\text{Parseval: } \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$
$$\Longrightarrow I_4 = 2\pi\left(\int_0^1 4dt + \int_1^2 9dt + \int_2^4 4dt + \int_4^6 (36 - 12t + t^2)dt\right) = \frac{142\pi}{3}$$

برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com،bakhtazad.v@gmail.com مکاتبه نمایید.

و)

$$I_5=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\{X(\omega)\}e^{j\omega}d\omega$$

$$\mathrm{even}\{x(t)\}=x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\{X(\omega)\}e^{j\omega t}d\omega$$

$$I_5=2\pi x_e(1)=\pi x(1)=\pi\frac{3+2}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

۷)

الف) از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$((j\omega)^3+6(j\omega)^2+11(j\omega)+6)Y(\omega)=\frac{12}{j\omega+4}$$

$$(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)Y(\omega)=\frac{12}{j\omega+4}$$

$$Y(\omega)=\frac{12}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+4)}=\frac{A}{j\omega+1}+\frac{B}{j\omega+2}+\frac{C}{j\omega+3}+\frac{D}{j\omega+4}$$

$$A=Y(\omega)(j\omega+1)|_{j\omega=-1}=\frac{12}{(-1+2)(-1+3)(-1+4)}=2$$

$$B=Y(\omega)(j\omega+2)|_{j\omega=-2}=\frac{12}{(-2+1)(-2+3)(-2+4)}=-6$$

$$C=Y(\omega)(j\omega+3)|_{j\omega=-3}=\frac{12}{(-3+1)(-3+2)(-3+4)}=6$$

$$D=Y(\omega)(j\omega+4)|_{j\omega=-4}=\frac{12}{(-4+1)(-4+2)(-4+3)}=-2$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{2}{j\omega+1}+\frac{-6}{j\omega+2}+\frac{6}{j\omega+3}+\frac{-2}{j\omega+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=(2e^{-t}-6e^{-2t}+6e^{-3t}-2e^{-4t})u(t)}$$

ب)

$$|Y(\omega)|=\frac{12}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}\sqrt{16+\omega^2}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}y^2(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{144d\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)(16+\omega^2)}=2\pi\int_{0}^{\infty}(2e^{-t}-6e^{-2t}+6e^{-3t}-2e^{-4t})^2dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)(16+\omega^2)}$$

$$=\frac{\pi}{72}\left[-2e^{-2t}+8e^{-3t}-15e^{-4t}+16e^{-5t}-10e^{-6t}+\frac{24}{7}e^{-7t}-\frac{1}{2}e^{-5t}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{1008}$$

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: وصال بخت آزاد- هلیا حسینی
برای سوالات خود درخصوص این تمرین با رایانامه helia.ho3eini@gmail.com، bakhtazad.v@gmail.com مکاتبه نمایید.

۸)

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\cos(\omega x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\cos\big((b+\omega)x\big)+\cos\big((b-\omega)x\big)}{2}dx$$

انتگرال را به روش جزء به جزء حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\int e^{-ax}\cos(bx)\,dx &= \frac{1}{b}e^{-ax}\sin(bx)+\frac{a}{b}\int e^{-ax}\sin(bx)\,dx\\ &= \frac{1}{b}e^{-ax}\sin(bx)+\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{-ax}\cos(bx)-\frac{a}{b}\int e^{-ax}\cos(bx)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{b}e^{-ax}\sin(bx)-\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos(bx)-\frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\cos(bx)\,dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow F_c(\omega) = \frac{a}{a^2+(b+\omega)^2}+\frac{a}{a^2+(b-\omega)^2} = \frac{a^3+ab^2+a\omega^2}{a^4+2a^2b^2+2a^2\omega^2+b^4+\omega^4-2b^2\omega^2}$$

۹)

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)$$

$$\mathrm{comb}(x)\text{ is a periodic function with } T=1$$

$$\Rightarrow c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\delta(x)e^{-i2n\pi x}dx = 1 \Rightarrow \mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i2n\pi x} \Rightarrow \mathcal{F}\{\mathrm{comb}(x)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i2n\pi x}\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-2n\pi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{\omega-2n\pi}{2\pi}\right) = \mathrm{comb}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$