۱) وجود حد توابع زیر را هنگامی که z به صفر میل می‌کند بررسی کنید. در صورت وجود، حد آنها را بدست آورید و در صورت عدم وجود، استدلال‌تان را بنویسید.

الف)

$$f(z) = (x^2 + y^2) + i(\frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4 + y^4})$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(z)$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4+y^4} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

دو مسیر مختلف را انتخاب می‌کنیم:

مسیراول : $y = x \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} v(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin^2(x)}{x^4 + x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

مسیردوم : $y = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} v(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

می‌بینیم که حد $v(x,y)$ برای دو مسیر مختلف یکسان نیست، بنابراین $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ وجود ندارد.

ب)

$$g(z) = (x + y) + i(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2})$$

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(z)$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

دو مسیر مختلف را انتخاب می‌کنیم:

مسیراول : $y = x \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} v(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 x}{x^4 + x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$

مسیردوم : $y = x^2 \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} v(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$

می‌بینیم که حد $v(x,y)$ برای دو مسیر مختلف یکسان نیست، بنابراین $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ وجود ندارد.

ج)

$$h(z) = (x + y + 1) + i\left(\frac{2xy^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(z)$$
$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y + 1) = 1$$
$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$
$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$, $r \to 0$: خطوط گذرنده از مبدا با زوایای مختلف
$$\Longrightarrow \lim_{r\to 0} \frac{2(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} 2r\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(z) \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) + i\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = 1 + i0 = 1$$

۲) توابع مختلط زیر در چه نقاطی تحلیلی می‌باشند؟

الف)

$$f(z) = |z| - \bar{z}$$
$$z = x + iy \Longrightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - (x - iy) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right) + i(y)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x \\ v(x,y) = y \end{cases}$$
$$u_x = v_y \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2$$
$$u_y = -v_x \Longrightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Longrightarrow \boxed{y = 0} \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 2 \Longrightarrow \text{no } x \text{ satisfies this equation}$$
$$\Longrightarrow f(z) \text{is not analytical}$$

ب)

$$f(z) = e^{-(x^2+y^2)} + ie^{-x^2+0.5y^2}$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow -2x\, e^{-(x^2+y^2)} = ye^{-x^2+0.5y^2} \Rightarrow -2x\, e^{-y^2} = ye^{0.5y^2} \Rightarrow x = \frac{-y}{2}e^{1.5y^2} \\ u_y = -v_x \Rightarrow -2y\, e^{-(x^2+y^2)} = 2xe^{-x^2+0.5y^2} \Rightarrow -2y\, e^{-y^2} = 2xe^{0.5y^2} \Rightarrow x = -ye^{-1.5y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{y}{2}e^{1.5y^2} = -ye^{-1.5y^2} \Rightarrow y\left(\frac{1}{2}e^{1.5y^2} - e^{-1.5y^2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{6}} \\ y = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{6}} \end{cases}$$

بنابراین این تابع در نقاط $(0,0)$ و $\left(-\sqrt{\frac{ln2}{6}}, \sqrt{\frac{ln2}{3}}\right)$ و $\left(\sqrt{\frac{ln2}{6}}, -\sqrt{\frac{ln2}{3}}\right)$ تحلیلی می‌باشد.

۳) فرض کنید $f(z)=u+iv$ یک تابع تحلیلی است. در صورتی که $u(x,y) = 3^x\sin(y\ln 3)$ باشد، $v(x,y)$ و $f(z)$ را بیابید.

$$u(x,y) = 3^x\sin(y\ln 3) \Rightarrow u_x = \ln(3)\, 3^x \sin(y\ln(3)) = v_y \Rightarrow v(x,y) = -3^x\cos(y\ln(3)) + g(x)$$
$$u_y = -v_x = \ln(3)\, 3^x\cos(y\ln(3)) = \ln(3)\, 3^x\cos(y\ln(3)) - g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$$
$$\Rightarrow v(x,y) = -3^x\cos(y\ln(3)) + c$$
$$\Rightarrow f(z) = u(x,y) + iy(x,y) = 3^x\sin(y\ln 3) - i3^x\cos(y\ln(3)) + ic$$
$$= -i3^x(\cos(y\ln(3)) + i\sin(y\ln(3))) + ic = -i3^x e^{iy\ln(3)} + ic = -i3^x3^{iy} + ic = \boxed{-i3^z + ic}$$

۴) اگر $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد با فرض اینکه $u(r,\theta) = \frac{1}{4}r^3 \left[\cos(\theta)\cos(2\theta) - \frac{1}{2}\cos(\theta) \right]$ باشد، $v(r,\theta)$ و $f(z)$ را بیابید.**(امتیازی)**

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{4}r^3\left(\cos(\theta)\cos(2\theta) - \frac{1}{2}\cos(\theta)\right) = \frac{1}{4}r^3\cos(\theta)\left(\cos(2\theta) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}r^3\cos(\theta)\left(2(2\cos^2(\theta)-1)-2\right)$$

$$= \frac{1}{8}r^3\cos(\theta)\left(4\cos^2(\theta)-3\right) = \frac{1}{8}r^3\left(4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right) = \frac{1}{8}r^3\cos(3\theta)$$

$$\text{Cauchy-Riemann: } \begin{cases} ru_r = v_\theta \\ -rv_r = u_\theta \end{cases} \Rightarrow ru_r = r\left(\frac{3}{8}r^2\cos(3\theta)\right) = \frac{3}{8}r^3\cos(3\theta) = v_\theta \Rightarrow v(r,\theta) = \frac{1}{8}r^3\sin(3\theta) + g(r)$$

$$-rv_r = -r\left(\frac{3}{8}r^2\sin(3\theta) + g'(r)\right) = -\frac{3}{8}r^3\sin(3\theta) - rg'(r) = u_\theta = -\frac{3}{8}r^3\sin(3\theta) \Rightarrow -rg'(r) = 0 \Rightarrow g(r) = c$$

$$\Rightarrow \boxed{v(r,\theta) = \frac{1}{8}r^3\sin(3\theta) + c}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{8}r^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) + ic = \frac{1}{8}r^3e^{i3\theta} + ic = \frac{1}{8}\left(re^{i\theta}\right)^3 + ic$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \frac{1}{8}z^3 + ic}$$

۵) قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی مختلط به صورت $u(x,y) = x^3 + ax^3y + xy^3 + bxy^2 + xy + x$ می‌باشد. ابتدا a و b را طوری بدست آورید تا این تابع همساز شود. حال اگر $f(1) = 2$ باشد، قسمت موهومی آن یعنی $v(x,y)$ را نیز بدست آورید.

$$u(x,y) = x^3 + ax^3y + xy^3 + bxy^2 + xy + x \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = 6x + 6axy \\ u_{yy} = 6xy + 2bx \end{cases}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow 6x + 6axy + 6xy + 2bx = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 + 2b = 0 \\ 6a + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = x^3 - x^3y + xy^3 - 3xy^2 + xy + x}$$

$$u_x = v_y = 3x^2 - 3x^2y + y^3 - 3y^2 + y + 1 \Rightarrow v(x,y) = 3x^2y - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 + \frac{1}{2}y^2 + y + g(x)$$

$$v_x = -u_y = 6xy - 3xy^2 + g'(x) = -(-x^3 + 3xy^2 - 6xy + x) \Rightarrow g'(x) = x^3 - x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$v(x,y) = 3x^2y - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 + \frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow u(1,0) + iv(1,0) = 2 \Rightarrow v(1,0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,y) = 3x^2y - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 + \frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}}$$

۶) تابع $u(x,y) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}} \sin(xy)$ را در نظر بگیرید:

الف) همساز بودن تابع $u(x,y)$ را بررسی کنید.

ب) مزدوج همساز آن، یعنی $v(x,y)$ را بدست آورید.

ج) اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ باشد و $f(0) = -i$ باشد، آنگاه $f'(i)$ را بدست آورید.

راهنمایی :

$$\int [a \sin(at) + t\cos(at)]\, e^{\frac{a^2-t^2}{2}}\, dt = -\cos(at)\; e^{\frac{a^2-t^2}{2}}$$

الف)

$$u(x,y) = e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} \sin(xy)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x = (x\sin(xy) + y\cos(xy))e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} \\ u_y = (-y\sin(xy) + x\cos(xy))e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = (\sin(xy) + 2yx\cos(xy) - y^2\sin(xy) + x^2\sin(xy))e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} \\ u_{yy} = (-\sin(xy) - 2xy\cos(xy) - x^2\sin(xy) + y^2\sin(xy))e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{xx} + y_{yy} = 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) \text{ is harmonic}}$$

ب)

$$u_x = v_y \Rightarrow v_y = (x\sin(xy) + y\cos(xy))e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} \Rightarrow v(x,y) = -\cos(xy)\, e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} + g(x)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow (y\sin(xy) - x\cos(xy))e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} + g'(x) = -(-y\sin(xy) + x\cos(xy))e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c \Rightarrow v(x,y) = \boxed{-\cos(xy)\, e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} + c}$$

ج)

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \sin(xy)\, e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} + i\left(-\cos(xy)\, e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} + c\right)$$

$$f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = -i \Rightarrow \begin{cases} u(0,0) = 0 \\ v(0,0) = -1 \end{cases}$$

$$v(0,0) = -\cos(0)\, e^0 + c = -1 + c = -1 \Rightarrow c = 0$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}(\sin(xy) - i\cos(xy)) = -ie^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}(\cos(xy) + i\sin(xy)) = -ie^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}e^{ixy} = -ie^{\frac{1}{2}(x^2+ixy-y^2)} = \boxed{-ie^{\frac{1}{2}z^2}}$$

$$f'(z) = -ize^{\frac{1}{2}z^2} \Rightarrow f'(i) = -i^2e^{\frac{1}{2}i^2} = \boxed{e^{-\frac{1}{2}}}$$