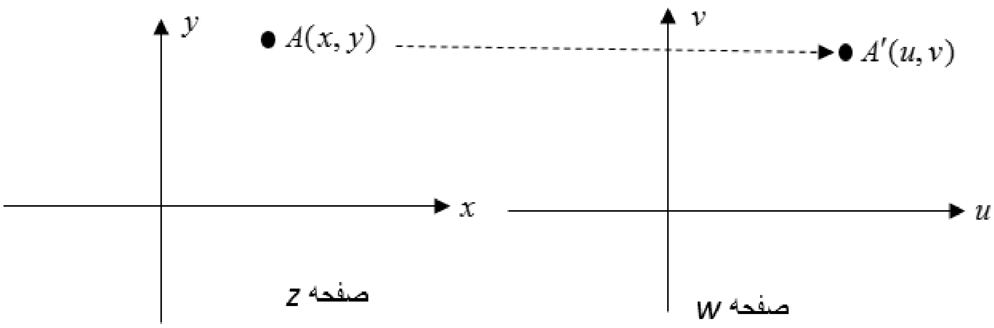
نگاشت (mapping)

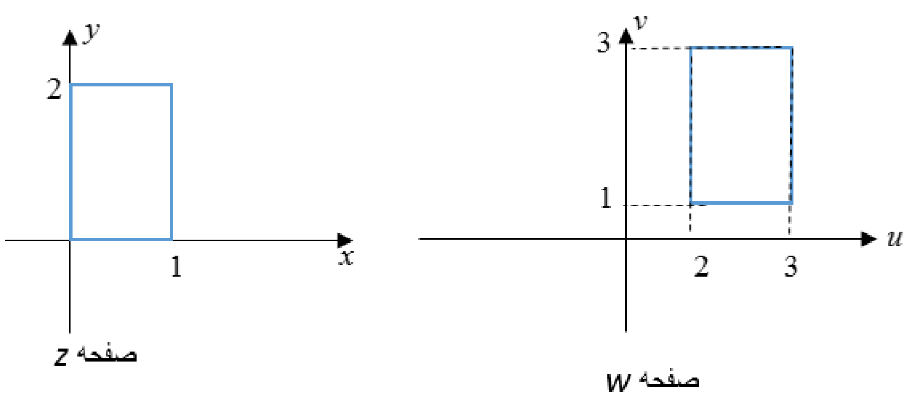
تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ را در نظر بگیرید این تابع هر نقطه در صفحه مختلط z با مختصات (x,y) را به نقطه ای در صفحه w به مختصات (u,v) تبدیل میکند. مثلا نقطه $z=3+4j$ اگر $w=f(z)=z^2$ باشد به نقطه $w=z^2=(3+4j)^2=-7+24j$ در صفحه w تبدیل میشود. اصطلاحا میگویم تحت نگاشت $w=z^2$ نقطه $z=3+4j$ به نقطه $w=-7+24j$ نگاشت میشود. حال اگر یک شکل معین در صفحه z در نظر بگیریم و هر نقطه از این شکل را به نقطه ای در صفحه w نگاشت کنیم و نقاط بدست آمده در صفحه w را به هم متصل کنیم یک شکل دیگری بدست می آید که میگویم شکلی در صفحه z تحت نگاشت $w=z^2$ به شکلی دیگری در صفحه w نگاشت شده است.شکل زیرنگاشت نقطه A در صفحه z را به نقطه A' در صفحه w نشان میدهد.



در ادامه انواع نگاشتها مورد بررسی و تجزیه تحلیل قرار میگیرد.

1–نگاشت انتقال $w=z+a$

اگر $a=a_1+jb_1$ این نگاشت هر نقطه مثل $A(x,y)$ را به نقطه ای مثل $A'(u=x+a_1, v=y+b_1)$ تبدیل میکند مثلا اگر a_1 و b_1 مثبت باشند این نگاشت نقطه را به اندازه a_1 به سمت راست و به اندازه b_1 به سمت بالا انتقال میدهد. شکل زیر انتقال یک مستطیل را تحت نگاشت انتقال $w=z+a$ نشان میدهد بطوریکه $a=2+j1$ میباشد.



2–نگاشت ضرب (scaling) $w=az$

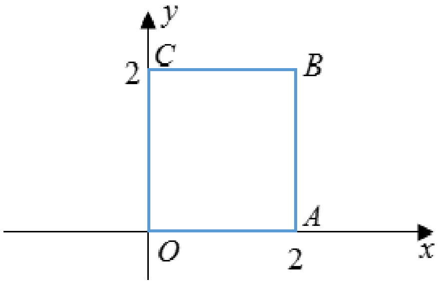
اگر $a=|a|e^{j\psi}$ باشد و $z=re^{j\phi}$ در اینصورت $w=r|a|e^{j(\phi+\psi)}$ یعنی اندازه نقاط در صفحه z در $|a|$ ضرب و زوایای این نقاط با زاویه عدد a جمع میشود بعبارت دیگر اگر زاویه عدد a مثبت باشد شکل در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه عدد a میچرخد و ابعاد آن $|a|$ برابر میشود. مثال زیر این موضوع را روشن میکند.

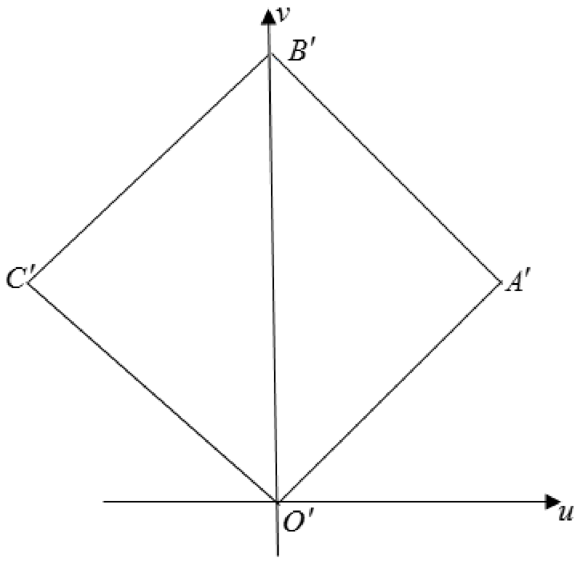
مثال **1**:شکل داده شده زیر تحت نگاشت $w=(3+j3)z$ به چه شکلی تبدیل میشود؟

حل: نقطه A با $z_A=2$ به نقطه A' به $w_{A'}=2(3+j3)=6+j6$ تبدیل میشود. نقطه B با $z_A=2+j2$ نه نقطه B' به $w_{B'}=(2+j2)(3+j3)=j12$ (بعبارت دیگر $a=2\sqrt{3}e^{j45}$ و $z_B=2\sqrt{2}e^{j45}$ در نتیجه $w_{B'}=2\sqrt{2}e^{j45^\circ}.3\sqrt{2}e^{j45^\circ}=12e^{j90^\circ}=j12$

ملاحظه میشود که نقطه B به اندازه **45** درجه در جهت مثلثاتی میچرخد و اندازه آن $2\sqrt{3}$ برابر میشود. نقطه C با $z_C=j2=2e^{j90^\circ}$ به نقطه C' به نقطه $w_{C'}=2\sqrt{2}e^{j45^\circ}.2e^{j90^\circ}=4\sqrt{2}e^{j135^\circ}$. بعبارت دیگر کل مستطیل به اندازه **45** درجه در جهت مثلثاتی چرخیده و ابعادشکل $3\sqrt{2}$ برابر

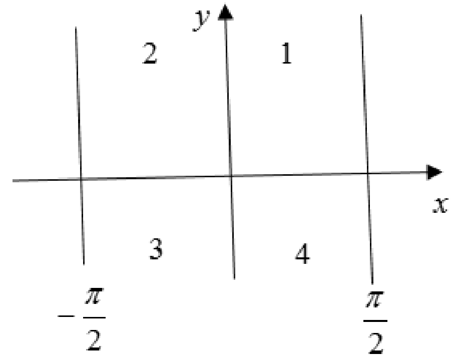
میشود. در نتیجه مستطیل نشان داده شده تحت نگاشت $w=(3+j3)z$ به شکل زیر تبدیل میشود





صفحه w

مثال **2**:تحت نگاشت $w=\sin z$ چهار ناحیه $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟



حل: میتوان نوشت:

$$w=\sin z=\sin(x+jy)=\sin x\cosh y+j\cos x\sinh y$$
$$\rightarrow u=\sin x\cosh y \qquad v=\cos x\sinh y$$

برای ناحیه **1** ، خط $x=\frac{\pi}{2},\quad 0<y<\infty$ به $0<u=\cosh y<\infty,\quad v=0$ یعنی به محور u نگاشت میشود. برای این ناحیه خط $y=0,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$ به $0<u=\sin x<1,\quad v=0$ تبدیل میشود. برای این ناحیه محور y که برای آن $x=0,\quad 0<y<\infty$ به $0<v=\sinh y<\infty,\quad u=0$ یعنی محور v نگاشت میشوددر نتیجه ناحیه **1** به ربع اول صفحه w نگاشت میشود.بعبارت دیگر چون در ناحیه **1** داریم $0<y<\infty$ و $0<x<\frac{\pi}{2},$ در نتیجه $0<u<\infty,\quad 0<v<\infty$ که همان ربع اول صفحه w است.

برای ناحیه **2** داریم $0<y<\infty$ و $-\frac{\pi}{2}<x<0,$ در نتیجه $-\infty<u<0,\quad 0<v<\infty$ که همان ربع دوم صفحه w است. برای ناحیه **3** داریم $-\infty<y<0$ و $-\frac{\pi}{2}<x<0,$ در نتیجه $-\infty<u<0,\quad -\infty<v<0$ که همان ربع سوم صفحه w است. سرانجام برای ناحیه **4** داریم $-\infty<y<0$ و $0<x<\frac{\pi}{2},$ در نتیجه $0<u<\infty,\quad -\infty<v<0$ که همان ربع چهارم صفحه w است.

3–نگاشت $w=z^n$

در این نگاشت $w=(re^{j\theta})^n=r^ne^{jn\theta}$ یعنی این نگاشت زاویه را n برابر میکند. **مثلا اگر** $w=z^3$ در اینصورت زاویه **30** درجه را تبدیل به زاویه **90** درجه میکند

مثال **3**:تحت نگاشت $w=z^2$ ناحیه داده شده زیر به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

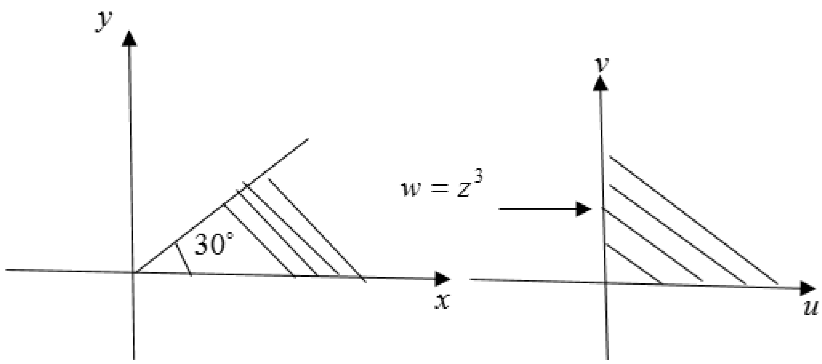
حل: میتوانیم بنویسیم:

$$w = z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$$

در اینصورت داریم:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

بنابراین برای خط $x = k$ داریم:

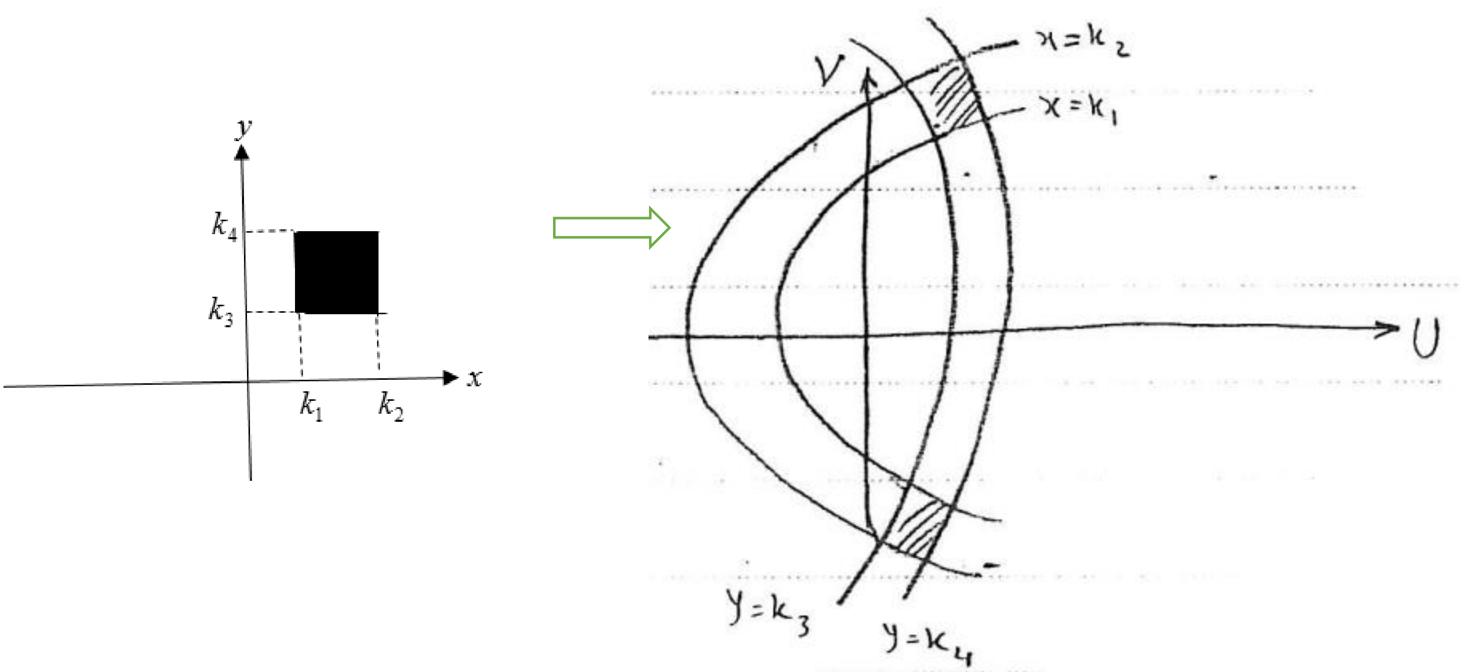


$$u = k^2 - y^2, \quad v = 2ky \rightarrow y = \frac{v}{2k} \rightarrow u = k^2 - (\frac{v}{2k})^2 \rightarrow u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}$$

که این معادله معادله یک سهمی است در نتیجه خطوط $x = k$ تبدیل به سهمی میشوند. حال برای خط $y = k$ داریم:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2ky \rightarrow x = \frac{v}{2k} \rightarrow u = (\frac{v}{2k})^2 - k^2 \rightarrow u = \frac{v^2}{4k^2} - k^2$$

که معادله سهمی است در نتیجه میتوانیم شکل زیر را رسم کنیم:



مثال **4**: ناحیه مثال قبل تحت نگاشت $w = \cos z$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل: میتوانیم بنویسیم:

$$w = \cos z = \cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \qquad u = \cos x \cosh y \quad v = -\sin x \sinh y$$

$$x = k \rightarrow u = \cos k \cosh y \qquad v = -\sin k \sinh y \rightarrow \cosh y = \frac{u}{\cos k} \quad \sinh y = -\frac{v}{\sin k}$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \rightarrow (\frac{u}{\cos k})^2 - (\frac{v}{\sin k})^2 = 1 \rightarrow \frac{u^1}{\cos^2 k} - \frac{v^2}{\sin^2 k} = 1$$

معادله بدست آمده معادله هذلولی است یعنی خطوط $x=k$ تحت نگاشت $w=\cos z$ به یک هذلولی در صفحه w یا $u-v$ تبدیل میشود. حال برای خطوط $y=k$ داریم:

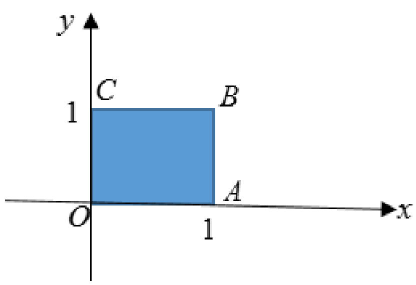
$$w=\cos z=\cos(x+jy)=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y \qquad u=\cos x\cosh y \qquad v=-\sin x\sinh y$$

$$y=k\to u=\cos x\cosh k \qquad v=-\sin x\sinh k\to \cos x=\frac{u}{\cosh k} \qquad \sin x=-\frac{v}{\sinh k}$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1\to (\frac{u}{\cosh k})^2+(\frac{v}{\sinh k})^2=1\to \frac{u^2}{\cosh^2 k}+\frac{v^2}{\sinh^2 k}=1$$

معادله بدست امده معادله بیضی است یعنی خطوط $y=k$ تحت نگاشت $w=\cos z$ به یک بیضی در صفحه w یا $u-v$ تبدیل میشود. در نتیجه منظقه داده شده در صفحه w به محل تلاقی دو بیضی و دو هذلولی تبدیل میشود.

مثال **5**:تحت نگاشت $w=(1+j)z+(2+j)$ مستطیل نشان داده شده در زیر به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

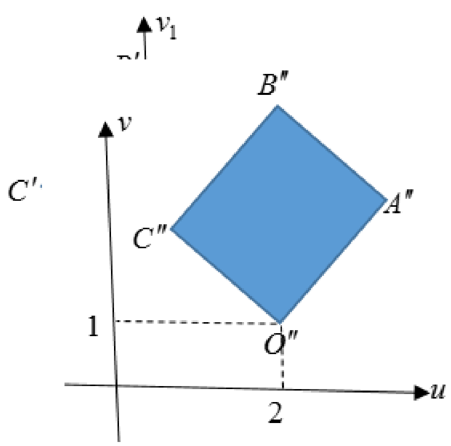


حل: نگاشت داده شده از دونگاشت تشکیل شده یکی نگاشت ضرب یا **scaling** که $w_1=(1+j)z$ دیگری نگاشت انتقال که $w=w_1+(2+j)$ ابتدا نگاشت ضرب را انجام میدهیم:

$$w_1=(1+j)z=\sqrt{2}e^{j45^0}z$$

یعنی شکل **45** درجه در جهت عقربه های ساعت میچرخد و ابعادش $\sqrt{2}$ برابر میشود که در زیر رسم شده است:

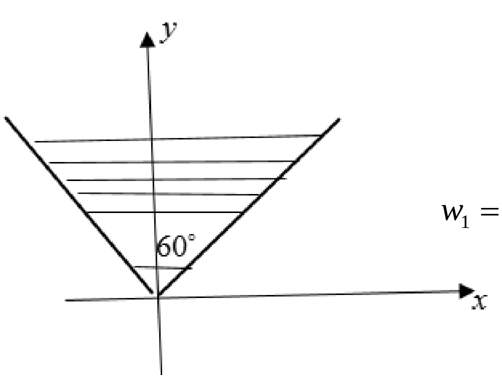
حال باید نگاشت $w=w_1+(2+j)$ اعمال کنیم یعنی شکل ایجاد شده را به اندازه **2** واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال میدهیم در نتیجه شکل نهایی به صورت زیر است:

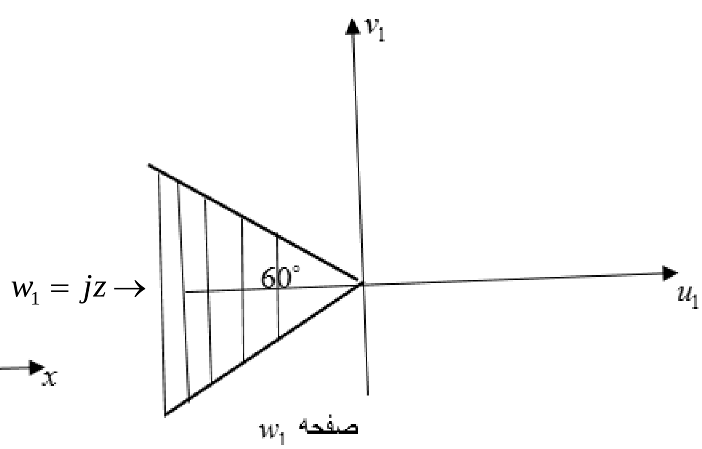


مثال **6**: ناحیه هاشور زده شده زیر تحت نگاشت $w=jz+1$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

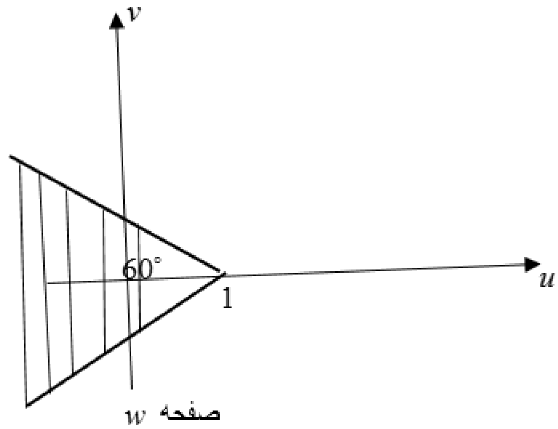
حل: نگاشت داده شده از دونگاشت تشکیل شده یکی نگاشت ضرب یا **scaling** که $w_1=jz$ دیگری نگاشت انتقال که $w=w_1+1$ ابتدا نگاشت ضرب را انجام میدهیم:

$w_1=jz=e^{j90^0}z$. این نگاشت شکل را **90** درجه در جهت مثلثاتی میچرخاند یعنی خواهیم داشت:

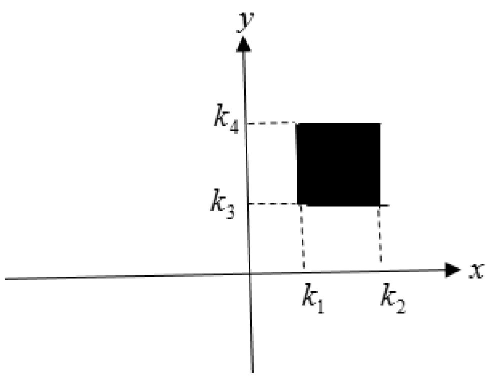




حالا شکل بدست آمده تحت نگاشت $w = w_1 + 1$ یک واحد به سمت راست شیفت داده میشود. که به شکل زیر خواهیم رسید:



مثال **7**: ناحیه مشکی نشان داده شده در زیر تحت نگاشت $w = e^z$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود.



حل: $w = e^z = e^{x+jy} = e^x . e^{jy}$ در نتیجه نگاشت خطوط $x = k$ خواهد شد $w = e^k . e^{jy} \rightarrow |w| = e^k$ یعنی این خطوط به

دایره ای به شعاع e^k تبدیل میشود در نتیجه خط $x = k_1$ به دایره ای

شعاع e^{k_1} که فاز آن $k_4 < y < k_3$ میباشد تبدیل میشود.

به همین ترتیب خط خط $x = k_1$ به دایره ای شعاع e^{k_2} که فاز آن $k_4 < y < k_3$ میباشد تبدیل میشود. حال برای خط $y = k$ داریم:

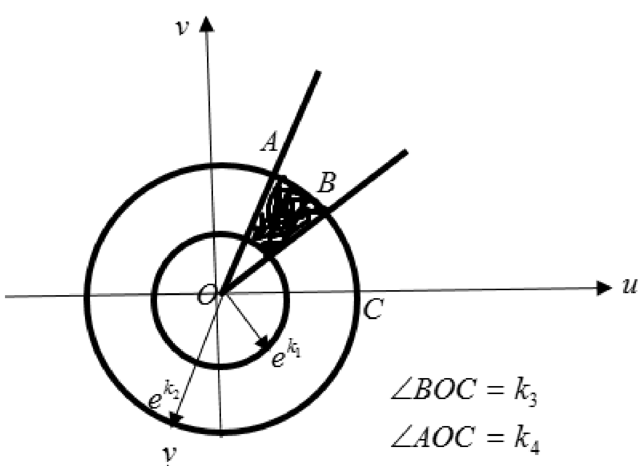
$w = e^x . e^{jk} \rightarrow \angle w = k$ که معادله یک خط شعاعی با زاویه ثابت است. بنابراین برای $y = k_3$ داریم:

$$w = e^x . e^{jk_3} \rightarrow \angle w = k_3 \qquad e^{k_2} < |w| = e^x < e^{k_2}$$

به همین ترتیب برای برای $y = k_4$ داریم:

$$w = e^x . e^{jk_4} \rightarrow \angle w = k_4 \qquad e^{k_2} < |w| = e^x < e^{k_2}$$

بنابراین ناحیه داده شده به ناحیه مشکی شده زیر نگاشت میشود.

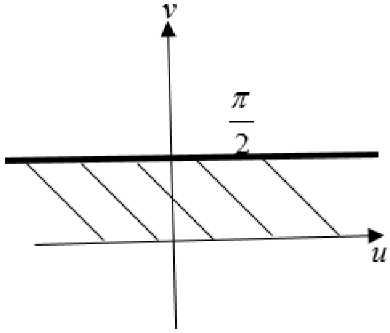


مثال **8**: نگاشت $w = \ln z$ ربع اول صفحه z را به چه ناحیه ای تبدیل میکند؟

حل: برای ربع اول داریم: $z = re^{j\theta}, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

حال داریم: $w = \ln z = \ln re^{j\theta} = \ln r + j\theta$ در نتیجه داریم:

$-\infty < u = \ln r < \infty$ و $0 < v = \theta < \dfrac{\pi}{2}$ یعنی ربع صفحه اول به نوار بین صفر و **90** درجه مطابق شکل زیر یعنی به ناحیه هاشور خورده نگاشت میشود:



مثال **9**: منحنی $xy = 1$ تحت نگاشت $w = (1-j)z + 2j$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل: داریم:

$$w=(1-j)z+2j=(1-j)(x+jy)+2j=(x+y)+j(2+y-x)\rightarrow$$

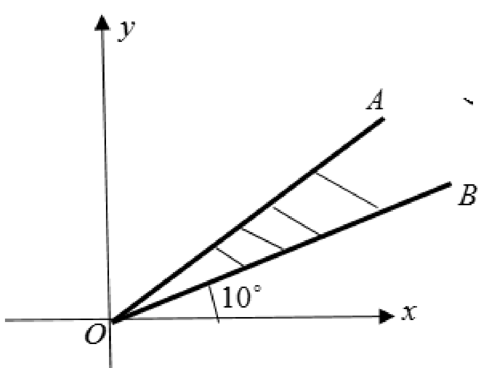
$$\begin{cases} u=x+y \\ v=2+y-x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} y=\dfrac{u+v-2}{2} \\ x=\dfrac{u+v-2}{2} \end{cases}\quad xy=1\rightarrow\frac{u+v-2}{2}\frac{u+v-2}{2}=1\rightarrow$$

$$(\frac{u}{2}+\frac{v-2}{2})(\frac{u}{2}-\frac{v-2}{2})=1\rightarrow\frac{u^2}{4}-\frac{(v-2)^2}{4}=1$$

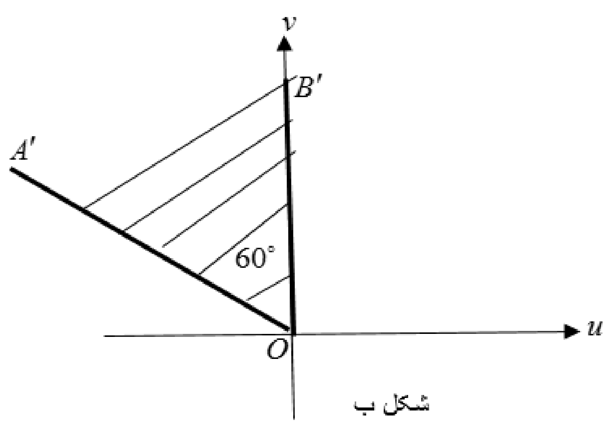
که معادله یک هذلولی است. یعنی نگاشت فوق منحنی $xy=1$ را به یک هذلولی در صفحه w تبدیل میکند.

مثال **10**: تحت چه نگاشتی ناحیه هاشور خورد شکل الف به ناحیه هاشور خورده شکل ب تبدیل میشود (زاویه $\angle AOB=20^\circ$)؟

حل: ابتدا باید زاویه هاشور خورده **20** درجه تبدیل به زاویه هاشور خورده **60** درجه شود یعنی باید زاویه **3** برابر شود پس اول باید نگاشت $w_1=z^3$ را اعمال کنیم. در اینحالت خط OA روی محور y قرار میگیرد زیرا زاویه OA که نسبت به محور x برابر با 30 درجه بوده **90** درجه میشود ولی باید زاویه OA نسبت به محور x که در شکل ب تبدیل به OA' شده **150** درجه بشود پس باید نگاشت نهایی $w=w_1e^{j60^\circ}$ باشد. بعبارت دیگر نگاشت باید به صورت $w=z^3e^{j60^\circ}$ باشد.



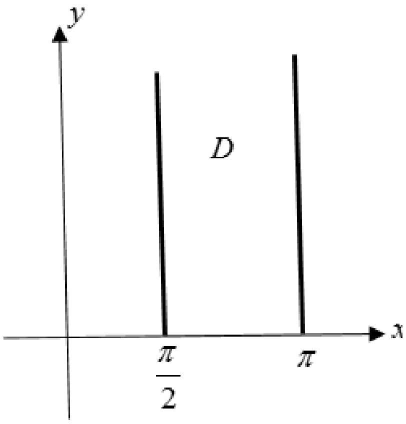
شکل الف

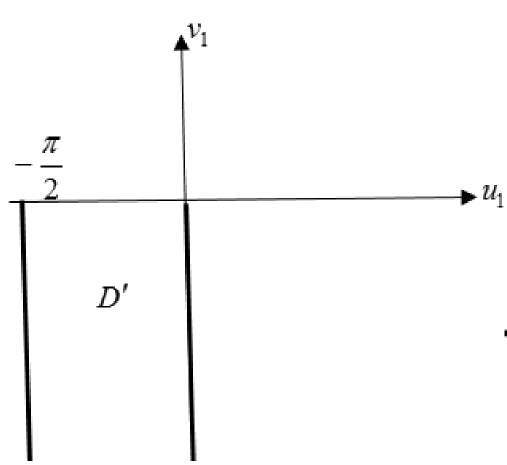


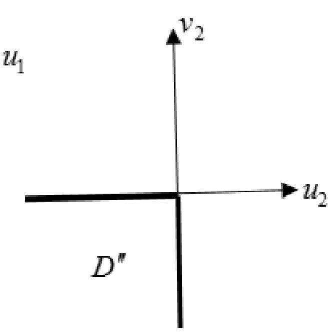
شکل ب

مثال **11**:ناحیه D تحت نگاشت $w=\dfrac{1}{\sqrt{\cos z}}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

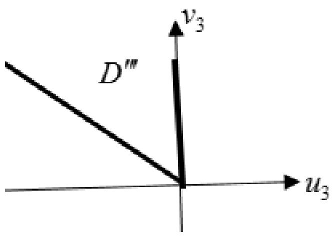
حل:ابتدا تحت نگاشت $w_1=\dfrac{\pi}{2}-z$ ناحیه D به ناحیه D' در صفحه w_1 در مختصات u_1-v_1 تبدیل میشود.. حال طبق مثال **2** نگاشت $w_2=\sin w_1=\cos z$ ناحیه D' را به ربع سوم صفحه w_2 میبرد که با ناحیه D'' در مختصات u_2-v_2 نشان داده شده اس



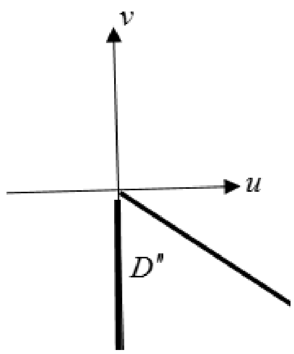




حال اگر دقت شود ناحیه D'' دارای زاویه بین **180** تا **270** درجه است که با نگاشت $w_3 = w_2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cos z}$ زاویه اش نصف میشود و به ناحیه D''' تبدیل میشود که زاویه اش مطابق شکل بین **90** تا **135** درجه است که در زیر نشان داده شده است.



حال تحت نگاشت $w = \frac{1}{w_3} = \frac{1}{\sqrt{\cos z}}$ ناحیه D''' به ناحیه D'''' تبدیل میشود که زاویه اش بین **90**- و **135**- درجه مطابق شکل زیر میباشد. بنابراین نگاشت $w = \frac{1}{\sqrt{\cos z}}$ ناحیه D را به ناحیه D'''' تبدیل میکند



4-**نگاشت** $w = \frac{1}{z}$

این نگاشت یکی از نگاشتهای پر کاربرد است که منحنی $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ که برای $A \neq 0$ یک دایره و برای $A = 0$ معادله یک خط است را میخواهیم ببینیم به چه منحنی ای تبدیل میکند. میدانیم $z = x + jy$ در نتیجه $z.\bar{z} = x^2 + y^2$ و $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z - \bar{z}}{2j}$ که با جایگزینی در معادله بالا خواهیم داشت:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 = A(z.\bar{z}) + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2} + D = 0 \rightarrow$$

$$A(\frac{1}{w}.\frac{1}{\bar{w}}) + B\frac{\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}}{2} + C\frac{\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}}{2} + D = 0 \rightarrow D(w\bar{w}) + B(\frac{w + \bar{w}}{2}) + C(\frac{\bar{w} - w}{2}) + A = 0$$

چون $w = u + jv$ در نتیجه $v = \frac{w - \bar{w}}{2j}$, $u = \frac{w + \bar{w}}{2}$, $w\bar{w} = u^2 + v^2$, که با جایگزینی در معادله بالا خواهیم داشت

$$D(w\bar{w}) + B(\frac{w + \bar{w}}{2}) + C(\frac{\bar{w} - w}{2}) + A = 0 \rightarrow D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$$

بنابراین نگاشت $w = \frac{1}{z}$ منحنی $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ در صفحه z را به منحنی $D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$ تبدیل میکند.یعنی این نگاشت دایره را به دایره (به ازای $A \neq 0,\ D \neq 0$)، دایره را به یک خط(به ازای $A \neq 0,\ D = 0$) و خط را به یک دایره (به ازای $A = 0,\ D \neq 0$) تبدیل میکند.

مثال **13**: ناحیه بین خط $y = -1$ و $y = x + 1$ تحت $w = \frac{1}{z}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل: میدانیم منحنی $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به منحنی $D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$ تبدیل میشود.

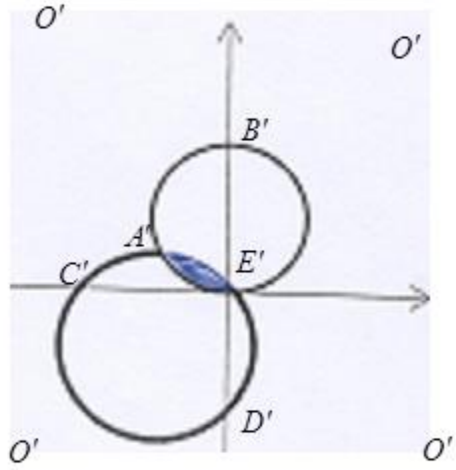
برای خط $y = -1$ یا $y + 1 = 0$ داریم:

$$y+1=0 \to A=0 \quad B=0 \quad C=1 \quad D=1 \to 1(u^2+v^2)-v=0 \to u^2+v^2-v=0 \to u^2+(v-0.5)^2=0.5^2$$

برای خط $y=x+1$ داریم:

$$x-y+1=0 \to A=0 \quad B=1 \quad C=-1 \quad D=1 \to u^2+v^2+u+v=0 \to (u+0.5)^2+(v+0.5)^2=0.5$$

پس ناحیه بین دو خط $y=-1$ و $y=x+1$ به ناحیه بین دودایره به معادله $u^2+(v-0.5)^2=0.5^2$ و $(u+0.5)^2+(v+0.5)^2=0.5$ نگاشت میشود. چون برای نقطه نزدیک مبدا میتوان $z=\varepsilon+j\delta$ نوشت در نتیجه $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\delta^2}-j\dfrac{\delta}{\varepsilon^2+\delta^2}$ در نتیجه با توجه به علامت مثبت و منفی مقادیر بسیار کوچک ε و δ (درر اطراف مبدا) هر چهار ناحیه در صفحه w که $w\to\infty$ میرود جزو جوابهای مسئله میباشد از طرفی چون وقتی $z\to\infty$ در ناحیه داده شده میباشد در اینصورت $w\to 0$ میل میکند بنابراین منطقه هاشور خورده در شکل هم جزو پاسخ است بنابراین پاسخ نقاط خارج دو دایره بعلاوه منطقه هاشور خورده میباشد.



مثال 14: تحت نگاشت $w=\dfrac{1}{z}$ ناحیه بین دو منحنی $\left|z-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$ و $\left|z+\dfrac{j}{6}\right|=\dfrac{1}{6}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

حل: برای $\left|z-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$ داریم:

$$\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4} \to \left|(x-\frac{1}{4})+jy\right|=\frac{1}{4} \to (x-\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{1}{16} \to x^2+y^2-\frac{1}{2}x=0 \to A=1 \quad B=-\frac{1}{2} \quad C=D=0$$

$$\to D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0 \to 0(u^2+v^2)-\frac{1}{2}u-0v+0=0 \to u=2$$

برای $\left|z+\dfrac{j}{6}\right|=\dfrac{1}{6}$ داریم:

$$\left|z+\frac{j}{6}\right|=\frac{1}{6} \to \left|x+j(y+\frac{1}{6})\right|=\frac{1}{6} \to x^2+(y+\frac{1}{6})^2=\frac{1}{36} \to x^2+y^2+\frac{1}{3}y=0 \to A=1 \quad C=\frac{1}{3} \quad B=D=0$$

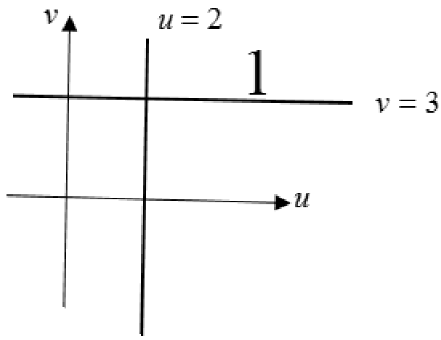
$$\to D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0 \to 0(u^2+v^2)+0u-\frac{1}{3}v+0=0 \to v=3$$

یعنی ناحیه بین دو دایره به ناحیه بین دو خط $u=2$ و $v=3$ حال برای اینکه بدانیم نگاشت در کدام از چهار ناحیه است نقطه ای در ناحیه بین دو دایره یعنی نقطه $(\dfrac{1}{8}-\dfrac{j}{12})$ انتخاب میکنیم که نگاشت آن برابر است با:

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{\frac{1}{8}-\frac{j}{12}}=\frac{24}{3-2j}=\frac{24(3+2j)}{13}=5.54+j3.7$$

یعنی ناحیه **1** جواب است

5-نگاشت $\frac{w-w_1}{w-w_3}.\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}.\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$



این رابطه $z=z_1$ را به $w=w_1$ و $z=z_2$ را به $w=w_2$ و سرانجام $z=z_3$ را به $w=w_3$ نگاشت میکند. این نگاشت که نگاشت کسری است را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}k_1=\frac{z-z_1}{z-z_3}.k_2\rightarrow\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{k_2}{k_1}\frac{z-z_1}{z-z_3}\rightarrow\frac{w-w_1}{w-w_3}=k\frac{z-z_1}{z-z_3}$$

معادله بالا را میتوان به صورت زیر ساده کرد:

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

در حالت خاص که $a=c$ داریم $w=e^{j\alpha}\frac{z+b_1}{z+d_1}$ و در حالت خاص تر میتوان نتیجه گرفت که $w=e^{j\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ نیمه بالای صفحه z (جایی که قسمت موهومی z مثبت است) را به روی دایره واحد یعنی $|w|=1$ نگاشت میکند.

مثال**15**: نگاشتی را بیابید که ربع اول صفحه z را به روی دایره واحد ببرد بطوریکه نقطه $A(1,1)$ را به مبدا نگاشت کرده و نقطه $B(0,\sqrt{2})$ را به $w=j$ نگاشت کند.

حل: ابتدا نگاشت $w_1=z^2$ ربع صفحه z را به نیم صفحه بالای محور در صفحه w_1 نگاشت میکند حالا باید نیم صفحه را تحت نگاشت $w=e^{j\alpha}\frac{w_1-z_0}{w_1-\bar{z}_0}$ به روی دایره واحد ببریم در نتیجه:

$$w=e^{j\alpha}\frac{w_1-z_0}{w_1-\bar{z}_0}=e^{j\alpha}\frac{z^2-z_0}{z^2-\bar{z}_0}$$

حال برای نقطه $A(1,1)$ داریم: $z=1+j$ که باید به $w=0$ نگاشت شود در نتیجه:

$$w=e^{j\alpha}\frac{z^2-z_0}{z^2-\bar{z}_0}\rightarrow 0=e^{j\alpha}\frac{(1+j)^2-z_0}{(1+j)^2-\bar{z}_0}\rightarrow 0=e^{j\alpha}\frac{2j-z_0}{2j-\bar{z}_0}\rightarrow z_0=2j\rightarrow w=e^{j\alpha}\frac{z^2-2j}{z^2+2j}$$

حال برای نقطه $B(0,\sqrt{2})$ داریم: $z=j\sqrt{2}$ که باید به $w=j$ نگاشت شود در نتیجه:

$$w=e^{j\alpha}\frac{z^2-2j}{z^2+2j}\rightarrow j=e^{j\alpha}\frac{(j\sqrt{2})^2-2j}{(j\sqrt{2})^2+2j}\rightarrow j=e^{j\alpha}\frac{-2-2j}{-2+2j}=e^{j\alpha}\frac{1+j}{1-j}\rightarrow j=e^{j\alpha}\frac{(1+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)}\rightarrow$$
$$j=e^{j\alpha}\frac{2j}{2}=je^{j\alpha}\rightarrow e^{j\alpha}=1\rightarrow\alpha=0\rightarrow w=\frac{z^2-2j}{z^2+2j}$$

مثال **16**: ناحیه بین خط $y=-1$ و $y=x+1$ تحت چه نگاشتی به داخل دایره واحد انتقال می یابد بطوریکه نقطه $z=0$ به مبدا برده شود و نقطه $z=-j$ به نقطه $w=j$ نگاشت شود.

حل: محل برخورد دو خط $y=-1$ و $y=x+1$ نقطه $(-2,-1)$ میباشد. ابتدا با نگاشت $w_1=z+2+j$ نقطه برخورد را به مبدا میبریم که ناحیه بین یک زاویه **45** درجه میشود. سپس با نگاشت $w_2=w_1^4$ ناحیه بدست آمده تبدیل به نیم صفحه بالای محور حقیقی صفحه w_2 و در نهایت با نگاشت $w=e^{j\alpha}\dfrac{w_2-w_0}{w_2-\overline{w}_0}$ ناحیه بدست آمده را داخل دایره واحد میبریم. در نتیجه رابطه نگاشت برابر است با:

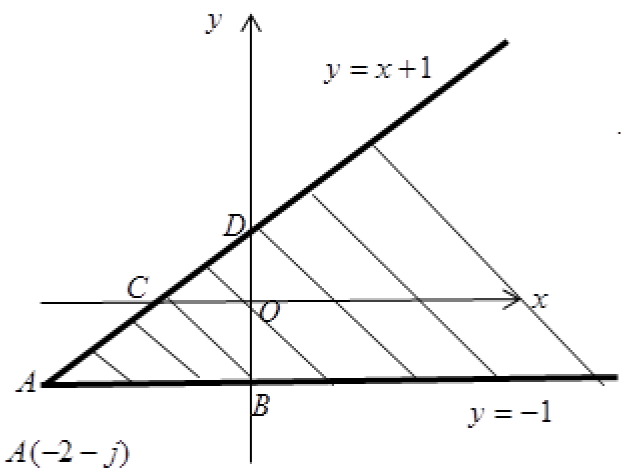
$w=e^{j\alpha}\dfrac{(z+2+j)^4-w_0}{(z+2+j)^4-\overline{w}_0}$ حال باید $z=0$ به $w=0$ و $z=-j$ به $w=j$ نگاشت شود یعنی:

$$w=e^{j\alpha}\frac{(z+2+j)^4-w_0}{(z+2+j)^4-\overline{w}_0}\qquad 0=e^{j\alpha}\frac{(0+2+j)^4-w_0}{(0+2+j)^4-\overline{w}_0}=e^{j\alpha}\frac{(2+j)^4-w_0}{(2+j)^4-\overline{w}_0}=0\to\frac{(\sqrt{5}e^{j\tan^{-1}0.5})^4-w_0}{(\sqrt{5}e^{j\tan^{-1}0.5})^4-\overline{w}_0}=0$$

$$25e^{j4\tan^{-1}0.5}-w_0=0\to w_0=-7+24j\to w=e^{j\alpha}\frac{(z+2+j)^4+7-24j}{(z+2+j)^4+7+24j}$$

$$z=-j\to w=j=e^{j\alpha}\frac{(-j+2+j)^4+7-24j}{(-j+2+j)^4+7+24j}=e^{j\alpha}\frac{23-24j}{23+24j}\to j=e^{j\alpha}e^{-j92.4^\circ}\to e^{j90^\circ}=e^{j(\alpha-92.4^\circ)}$$

$$\to\alpha-92.4^\circ=90^\circ\to\alpha=182.4^\circ\to w=e^{j182.4^\circ}\frac{(z+2+j)^4+7-24j}{(z+2+j)^4+7+24j}$$



کاربرد نگاشت در محاسبه ظرفیت خازن استوانه ای

با استفاده از نگاشت میتوان ظرفیت بین دو استوانه هم محور به شعاع داخلی a و شعاع خارجی bو طول lرا بدست آورد. میدانیم ظرفیت یک خازن مسطح به مساحت صفحات A که فاصله بین دو صفحه d میباشداز رابطه $C=\varepsilon\dfrac{A}{d}$ میباشد. حال با نگاشت $w=\ln z$ خازن استوانه ای را به خازن مسطح تبدیل میکنیم. برای دایره به شعاع $z=ae^{j\theta}$ که $0<\theta<2\pi$ داریم:

$$w=\ln z=\ln ae^{j\theta}=\ln a+j\theta\to u=\ln a\qquad 0<v=\theta<2\pi$$

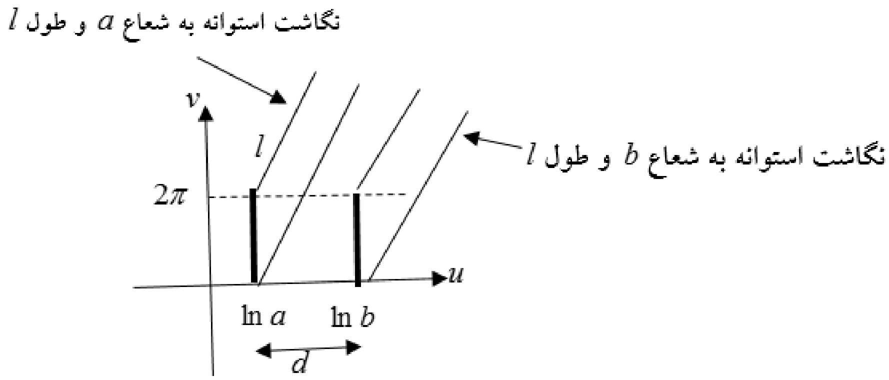
بنابراین استوانه به شعاع a تبدیل به یک صفحه میشود که ارتفاع آن 2π و طول آن l میباشد که در صفحه $u=\ln a$ قرار دارد.

برای دایره به شعاع $z=be^{j\theta}$ که $0<\theta<2\pi$ داریم:

$$w=\ln z=\ln be^{j\theta}=\ln b+j\theta\to u=\ln b\qquad 0<v=\theta<2\pi$$

بنابراین استوانه به شعاع b تبدیل به یک صفحه میشود که ارتفاع آن 2π و طول آن l میباشد که در صفحه $u=\ln b$ قرار دارد.بنابراین دو استوانه تبدیل به دو صفحه موازی میشودکه به فاصله $d=\ln b-\ln a=\ln\dfrac{b}{a}$ از هم قرار دارند و مساحت این صفحات $A=2\pi l$ میباشد. بنابراین

ظرفیت این خازن مسطح برابر است با: $C=\varepsilon\frac{A}{d}=\varepsilon\frac{2\pi l}{\ln\frac{b}{a}}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$ که همان ظرفیت بین دو استوانه هم محور به شعاعهای a و b که طول آنها l میباشد است.



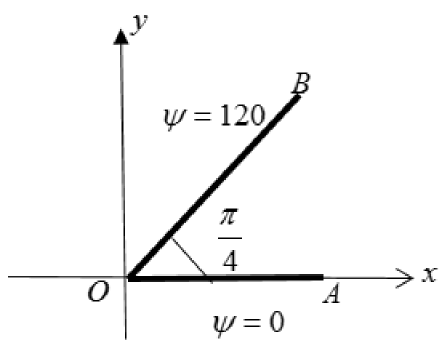
استفاده از نگاشت در حل معادله لاپلاس

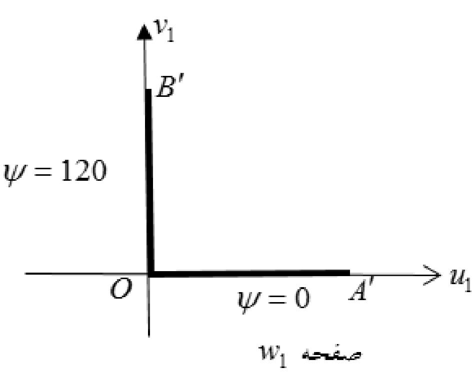
در بعضی حالتها شرایط مرزی طوری است که نمیشود معادله لاپلاس را به روش جداسازی متغییرها حل کرد و باید با استفاده از نگاشت مرزها را طوری تغییر داد که با توجه به شرایط مرزی داده شده بتوان به راحتی پاسخ معادله لاپلاس را پیدا کرد. مثالهای زیر کاربرد نگاشت

در حل معادله لاپلاس را نشان میدهد.

مثال **17**: پتانسیل روی سطوح $\phi=0$ و $\phi=\frac{\pi}{4}$ به ترتیب **0** و **120** ولت میباشد. با استفاده از نگاشت مناسب پتانسیل را بین دو سطح بدست آورید.

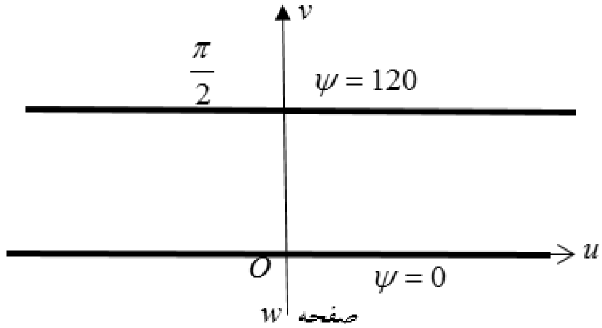
حل: ابتدا تحت نگاشت $w_1=z^2$ زاویه دو صفحه را مطابق شکل به **90** درجه تبدیل میکنیم





سپس نگاشت $w=\ln w_1$ را اعمال میکنیم که همانطوریکه قبلا دیدیم ربع صفحه اول را به نوار بین صفر و **90** درجه تبدیل میکنیم که در زیر نشان داده شده است.

همانطوریکه در بخش اعداد مختلط اثبات کردیم اگر تابع نگاشت تحلیلی باشد معادله لاپلاس در مختصات نگاشت (u و v) صادق است یعنی



$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 u}+\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 v}=0$$

اما همانطوریکه در شکل مشخص است پتانسیل تابع u نیست زیرا روی صفحه پایینی پتانسیل ثابت و صفر است در حالی که روی این صفحه u از منهای

بینهایت تا بینهایت تغییر میکند. همین مطلب برای صفحه بالایی یعنی صفحه $v=\frac{\pi}{2}$ صادق است جون در ین صفحه پتانسیل ابت و **120** ولت است در حالی که روی این صفحه هم u از منهاییبینهایت تا بینهایت تغییر میکند. در نتیجه معادله لاپلاس به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 v}=0\rightarrow\psi=Av+B \qquad \psi(v=0)=0\rightarrow B=0 \qquad \psi(v=\frac{\pi}{2})=120\rightarrow A\frac{\pi}{2}=120\rightarrow A=\frac{240}{\pi}\rightarrow$$

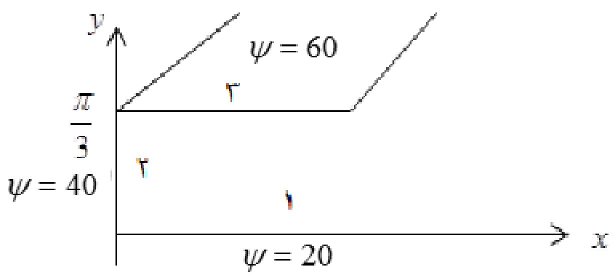
$$\psi=\frac{240}{\pi}v \qquad w=\ln w_1=\ln z^2=2\ln z=2(\ln\sqrt{x^2+y^2}e^{j\tan^{-1}\frac{y}{x}})=2\ln\sqrt{x^2+y^2}+j2\tan^{-1}\frac{y}{x}=u+jv\rightarrow$$

$$v=2\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \psi=\frac{240}{\pi}v=\frac{480}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

حال جواب را آزمایش میکنیم برای شکل اصلی پتانسیل در $y=0$ برابر صفر و در $y=x$ برابر **120** ولت است:

$$\psi=\frac{480}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \psi(y=0)=\frac{480}{\pi}\tan^{-1}0=0 \qquad \psi(y=x)=\frac{480}{\pi}\tan^{-1}1=\frac{480}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=120$$

مثال **18**: با استفاده از نگاشت $w=\cosh 3z$ تابع پتانسیل بین دو صفحه موازی $y=0$ و $y=\frac{\pi}{3}$ را با شرایط مرزی نشان داده شده بدست آورید.



حل: تابع را به صورت زیر مینویسیم:

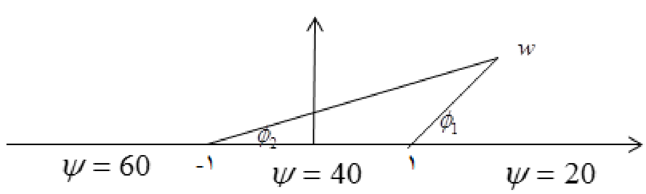
$$\cosh 3z=\cosh 3x\cos 3y+j\sinh 3x\sin 3y\rightarrow$$

$$u=\cosh 3x\cos 3y \qquad v=\sinh 3x\sin 3y \qquad 1\rightarrow(y=0,\quad 0<x<\infty)\rightarrow \quad v=0 \qquad 1<u<\infty$$

$$2\rightarrow(x=0 \quad 0<y<\frac{\pi}{3})\rightarrow v=0 \qquad -1<u<1 \qquad 3\rightarrow y=\frac{\pi}{3} \quad 0<x<\infty\rightarrow v=0 \qquad -\infty<u<-1$$

بنابراین سه صفحه نشان داده شده با **1** و **2** و **3** به صفحه $v=0$ با شرایط مرزی نشان داده شده زیرتبدیل میشوند

حال تابع پتانسیل را میتوان به صورت زیر نوشت:



$$\psi=A\phi_1+B\phi_2+C \qquad \psi(\phi_1=\phi_2=0)=20\rightarrow C=20$$

$$\psi(\phi_1=\pi,\quad \phi_2=0)=40\rightarrow \pi A+20=40\rightarrow A=\frac{20}{\pi} \qquad \psi(\phi_1=\phi_2=\pi)=60\rightarrow B=\frac{20}{\pi}\rightarrow$$

$$\psi=\frac{20}{\pi}(\phi_1+\phi_2+\pi) \qquad \rightarrow\frac{\pi\psi}{20}=\phi_1+\phi_2+\pi\rightarrow\tan\frac{\pi\psi}{20}=\tan(\phi_1+\phi_2)=\frac{\tan\phi_1+\tan\phi_2}{1-\tan\phi_1+\tan\phi_2}\rightarrow$$

$$\tan\phi_1=\frac{v}{u-1} \qquad \tan\phi_2=\frac{v}{u+1}\rightarrow\tan(\phi_1+\phi_2)=\frac{2uv}{u^2-v^2-1}=\tan\frac{\pi\psi}{20}\rightarrow\psi=\frac{20}{\pi}\tan^{-1}\frac{2uv}{u^2-v^2-1}=$$

$$\psi=\frac{20}{\pi}\tan^{-1}\frac{2\cosh 3x\cos 3y\sinh 3x\sin 3y}{(\cosh 3x\cos 3y)^2-(\sinh 3x\sin 3y)^2-1}$$

موفق باشید محمود محمدطاهری خرداد 1401