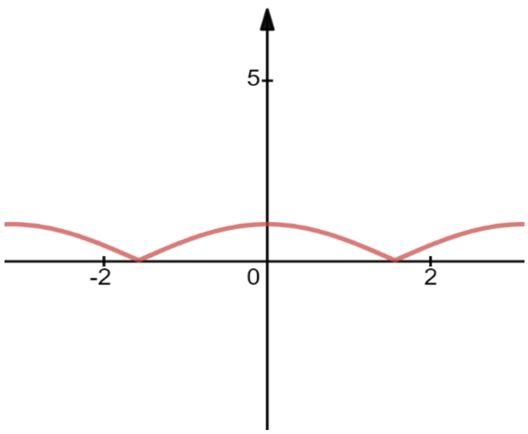
۱)

الف)



تابع $|\cos(x)|$ زوج است بنابراین: $b_n = 0$.

برای به دست آوردن سری فوریه تابع باید ضرایب a_n و a_0 را محاسبه کنیم.

$$T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(x)|dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[sinx\left|{}^{\pi/2}_{0}\right.\right] - \left[sinx\left|{}^{\pi}_{\pi/2}\right.\right]\right) = \frac{1}{\pi}\,(1-(-1)) = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(nx)dx \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(x)|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|\cos(x)|\cos(nx)\,dx$$

از رابطه ضرب به جمع می‌دانیم:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\rightarrow \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(nx)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-nx) + \cos(x+nx)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x-nx) + \cos(x+nx)\,dx\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1}$$

با توجه به اینکه $n \in N$ می‌باشد، بنابراین به ازای n های فرد عبارت داخل کسینوس مضرب $\frac{\pi}{2}$ و حاصل کل عبارت برابر صفر می‌شود، البته به ازای مورد خاص $n = 1$ چون مخرج یک کسر برابر صفر می‌شود باید جداگانه محاسبه شود تا مقدار a_1 بدست بیاید. برای مقادیر زوج n هم دو حالت داریم که جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x)|\cos(x)\,dx = 0$$

$$\rightarrow a_1 = 0$$

$$a_n = -\frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1} \xrightarrow{n=2m} a_m = -\frac{4}{\pi}\frac{\cos(m\pi)}{4m^2-1} = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{4m^2-1}$$

سری فوریه : $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, b_n = 0, a_m = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{4m^2-1} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{even}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n^2-1}\cos(nx)$$

ب)

$$\mathrm{T} = \pi$$

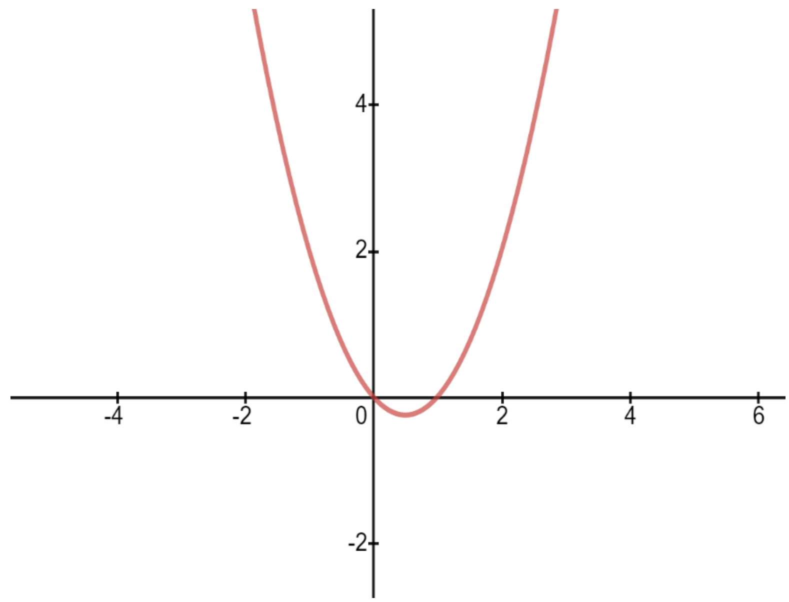
$$x^2 - x$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{x}^2\, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{x}\, dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left([\mathrm{x}^2]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - [x]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} - 0\right) = \frac{\pi^2}{12}$$



$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x)\cos(2nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2nx)\, dx - \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2nx)\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{(2n^2x^2 - 1)\sin(2nx) + 2nx\cos(2nx)}{4n^3}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2nx\sin(2nx) + \cos(2nx)}{4n^2}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n^2}(-1)^n - 0\right) = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x)\sin(2nx)\,dx$$

با توجه به اینکه حاصل ضرب x^2 در سینوس عبارتی فرد است و بازه انتگرال گیری متقارن است، حاصل انتگرال ترم اول برابر صفر می‌باشد. (در محاسبه a_0 و a_n هم برای ترم x می‌توانستیم چنین استدلالی کنیم و صرفا برای نشان دادن این نکته حل کامل نوشته شده است.)

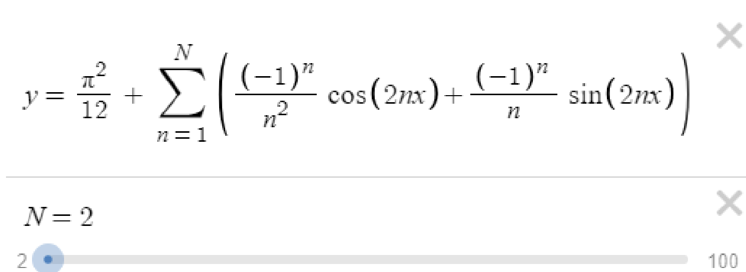
$$\to b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-x)\sin(2nx)\,dx = \frac{-4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x)\sin(2nx)\,dx$$

$$= \frac{-4}{\pi}\left[\frac{\sin(2nx) - 2nx\cos(2nx)}{4n^2}\right]\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^n}{n}$$

بنابر این سری فوریه برابر می‌شود با:

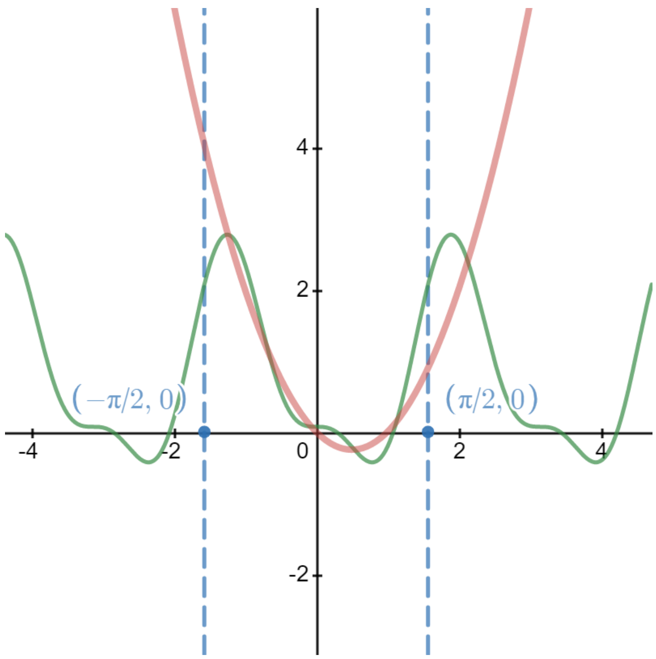
$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2nx) + b_n\sin(2nx) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2nx) + \frac{(-1)^n}{n}\sin(2nx)$$

حال برای بررسی صحت جواب بدست آمده در ابزار رسم نمودار، نمودار سری فوریه و اصل تابع را رسم می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم: (* لازم به ذکر است که انجام این قسمت جزو موارد تمرین دانشجویان نبوده و صرفا برای ملموس تر شدن موضوع آورده شده است)

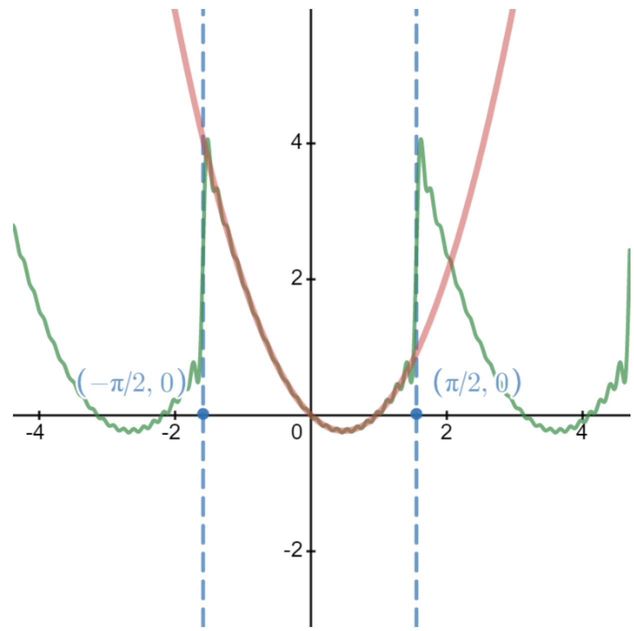


N را به مرور از ۲ به سمت ۱۰۰ افزایش میدهیم، مورد انتظار است که با افزایش مقدار آن شکل تابع حاصل از سری فوریه به تابع اولیه نزدیک تر شود.

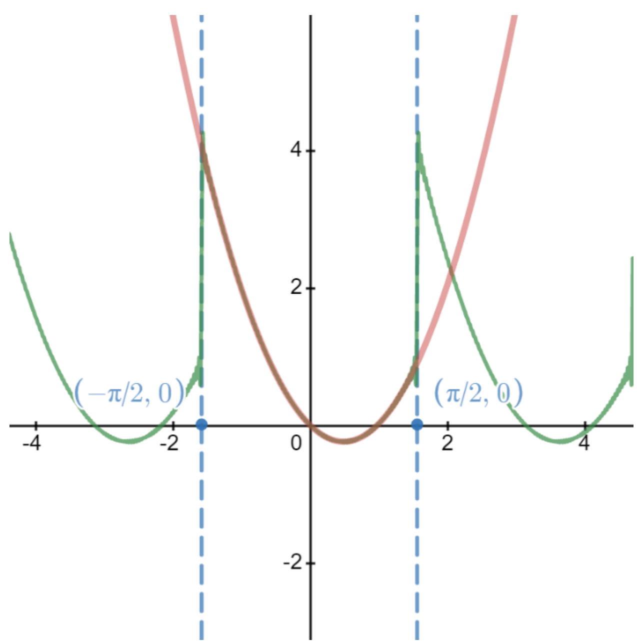
* نمودار سبز رنگ مربوط به سری فوریه و
نمودار قرمز مربوط به تابع اولیه می‌باشد.



N = 2

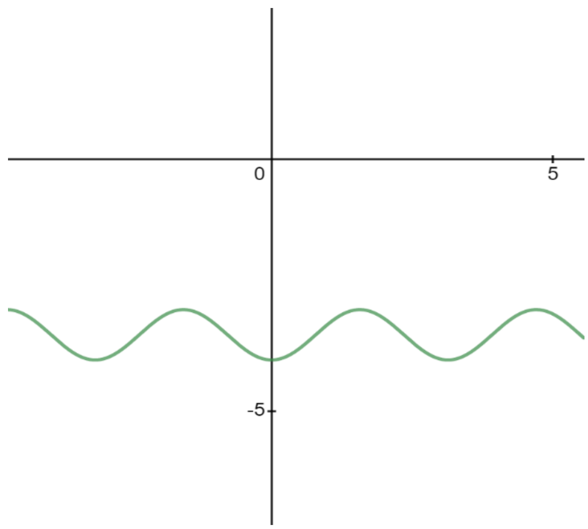


N = 18



N = 72

ج)



$$h(x) = \sin^2(x) - 4$$

$$\mathrm{T} = \pi$$

$$\sin^2(\mathrm{x}) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\rightarrow h(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} - 4 = -\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{7}{2}$$

$$h(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx)$$

این عبارت خود برابر سری فوریه تابع $h(x)$ می باشد به ازای مقادیر زیر:

$$a_0 = -\frac{7}{2}$$
$$b_n = 0$$
$$a_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ -\frac{1}{2} & n = 1 \end{cases}$$

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: آرمان اکبری
برای سوالات خود در خصوص این تمرین با رایانامه arr3aan@gmail.com مکاتبه نمایید.

د)

$$z(x) = \sinh(ax) \qquad 0 < x < \pi \;,\; a > 0 \qquad T = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sinh(ax)\,dx = \frac{1}{\pi a}\left(\cosh(ax)\,|_0^{\pi}\right) = \frac{\cosh(a\pi) - 1}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sinh(ax)\cos(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}Re\left(\int_0^{\pi} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}.e^{2inx}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}Re\left(\int_0^{\pi} e^{(a+2in)x} - e^{-(a-2in)x}\,dx\right) = \frac{1}{\pi}Re\left(\left(\frac{e^{(a+2in)x}}{(a+2in)} + \frac{e^{-(a-2in)x}}{(a-2in)}\right)|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2a.\cosh(a\pi) - 2a}{\pi(a^2 + 4n^2)}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sinh(ax)\sin(2nx)\,dx = \frac{1}{\pi}Im\left(\left(\frac{e^{(a+2in)x}}{(a+2in)} + \frac{e^{-(a-2in)x}}{(a-2in)}\right)|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{-4n.\sinh(a\pi)}{\pi(a^2 + 4n^2)}$$

۵)

$$x(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 3 \end{cases} \qquad T = 3$$

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 \mathrm{x(t)}dt = \frac{2 \times 1 + 1 \times 1}{3} = 1$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{x(t)} \cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt = \int_0^1 2\cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt + \int_1^2 \cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt$$

$$= \frac{1}{n\,\pi}\left(\sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) + \sin\,(\frac{4n\pi t}{3})\right) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{x(t)} \sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt = \int_0^1 2\sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt + \int_1^2 \sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt$$

$$= \frac{2 - 2(-1)^n \cos\,(\frac{n\pi}{3})}{n\pi}$$

۲)

$$g(x) = x^2 \quad f(x) = |x|$$

الف)

ابتدا سری فوریه را برای $f(x)$ بدست می‌آوریم.

از آنجا که تابع زوج است پس $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{odd}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

حال سری فوریه $g(x)$ را محاسبه میکنیم.

از آنجا که تابع زوج است پس $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(n^2x^2-2)\sin(nx)}{n^3} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

ب)

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx$$

قضیه پارسوال :

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2} \xrightarrow{T=2\pi} A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx =$$

$$\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{odd}\frac{\left(-\frac{4}{\pi n^2}\right)^2}{2}\right) - \left(\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n\right)^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^4}{9} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{odd}\frac{1}{n^4} - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

۳)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \ , \ b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\sin(2.5x) + \cos(2.5x))^2 \cos(5x)\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ (\cos 5x + 0.5 \sin 10x) dx = \ \pi a_5 + 0.5\ \pi\ b_{10} = -\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{200} = \frac{-39\pi}{200}$$

۴)

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x).dx = \frac{1}{l}\int_0^{l}(l-x).dx = \frac{1}{l}[l^2 - \frac{l^2}{2}] = \frac{l}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x).\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).dx = \frac{1}{l}\int_0^{l}(l-x).\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).dx = \frac{1}{l}.\frac{l^2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x).\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).dx = \frac{1}{l}\int_0^{l}(l-x).\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).dx = \frac{1}{l}(\frac{l^2}{n\pi}) = \frac{l}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) + \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right)$$

$$x = l \ \rightarrow \ f(l) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{nl\pi}{l}\right) + \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{nl\pi}{l}\right)$$

$$\frac{l}{4} + \frac{2l}{n^2}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n = 0$$

$$\frac{2l}{\pi^2}\left[-1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \cdots\right] = -\frac{l}{4} \qquad \rightarrow \ B = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$x = \frac{l}{2} \rightarrow f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{nl\pi}{2l}\right) + \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{nl\pi}{2l}\right)$$

$$l - \frac{l}{2} = \frac{l}{4} + 0 + \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right] = \frac{l}{4} \qquad \rightarrow A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

۵)

الف)

$$f(x) = x^2 + x = {\pi^2}/{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx) - \frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)\right)$$

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty}\big((B_n \times n)\cos nx + (-A_n \times n)\sin nx\big)$$

$$y' + 4y = x^2 + x \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nB_n\cos(nx) - nA_n\sin(nx)) + 4A_0 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(\mathrm{nx}) + B_n\sin(nx))$$

$$= {\pi^2}/{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx) - \frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} nB_n + 4A_n = (-1)^n \times {}^4\!/_{n^2} \\ -nA_n + 4B_n = (-1)^n \times {}^{-2}\!/_{n} \end{cases} \qquad \& \qquad A_0 = \pi^2 / 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n = \frac{16+2n^2}{n^2(n^2+16)}(-1)^n \\ B_n = \frac{-4(-1)^n}{n(n^2+16)} \end{cases}$$

ب)

$$y'' + 50y = f(t)$$

و چون f(t) یک تابع فرد است داریم:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(nt)\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{2(1+(-1)^{n+1})}{n\pi}$$

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty}\big((B_n \times n)\cos nt + (-A_n \times n)\sin nt\big)$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty}((-A_n \times n^2)\cos nt + (-B_n \times n^2)\sin nt)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}((-A_n \times n^2)\cos nt + (-B_n \times n^2)\sin nt) + 50A_0 + 50\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

$\rightarrow \quad -n^2 B_n + 50B_n = \frac{2}{n\pi}(1 + (-1)^{n+1})$

$\rightarrow \quad B_n = \frac{2(1+(-1)^{n+1})}{n\pi(50-n^2)}$

۶)

الف) $a_n = 0$

ب) $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi t)$

ج) $x(t) = b_1 \sin(\pi t)$

د) طبق قضیه پارسوال و با توجه به بند های قبل داریم:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$b_1^2 = 1 \rightarrow b_1 = \pm 1$$

$$\rightarrow x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{cases}$$