ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰	پاسخ تکلیف شماره ۸	

آنالیز مختلط

پاسخ سوال ۱: (۲۵ نمره)

الف)

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \xrightarrow{z=x+jy} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-jy}}{2} =$$

$$= \frac{e^x(\cos(y) + j\sin(y))}{2} + \frac{e^{-x}(\cos(y) - j\sin(y))}{2} =$$

$$= \cos(y)\frac{e^x + e^{-x}}{2} + j\sin(y)\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cos(y)\cosh(x) + j\sin(y)\sinh(x)$$

$$\cosh(z) = u + jv \to u(x,y) = \cos(y)\cosh(x) \quad , v(x,y) = \sin(y)\sinh(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(y)\sinh(x) \ , \frac{\partial v}{\partial y} = \cos(y)\sinh(x) \to \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin(y)\cosh(x) \ , \frac{\partial v}{\partial x} = \sin(y)\cosh(x) \to \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \mathrm{II}$$

از I و II نتیجه میگیریم که شرایط کوشی-ریمان در همه نقاط برقرار و تابع در همه جا تحلیلی است.

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial x} = [\cos(y)\sinh(x) + j\sin(y)\cosh(x)]_{(0,0)} = 0$$

ب)

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \xrightarrow{z=x+jy} = \frac{e^{x+jy} - e^{-x-jy}}{2} =$$

$$= \frac{e^x(\cos(y) + j\sin(y))}{2} - \frac{e^{-x}(\cos(y) - j\sin(y))}{2} =$$

$$= \cos(y)\frac{e^x - e^{-x}}{2} + j\sin(y)\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(y)\sinh(x) + j\sin(y)\cosh(x)$$

$$\sinh(z) = u + jv \to u(x,y) = \cos(y)\sinh(x) \quad , v(x,y) = \sin(y)\cosh(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(y)\cosh(x) \ , \frac{\partial v}{\partial y} = \cos(y)\cosh(x) \to \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin(y)\sinh(x)\ ,\frac{\partial v}{\partial x} = \sin(y)\sinh(x) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{II}$$

از I و II نتیجه میگیریم که شرایط کوشی-ریمان در همه نقاط برقرار و تابع در همه جا تحلیلی است.

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial x} = [\cos(y)\cosh(x) + j\sin(y)\sinh(x)]_{(0,0)} = 1$$

پاسخ سوال ۲: (۲۵ نمره)

$$Re\left\{\frac{Z-j}{Z+j}\right\} = Re\left\{\frac{x+j(y-1)}{x+j(y+1)}\right\} = \left\{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}\right\}$$

$$Re\left\{\frac{Z-j}{Z+j}\right\} < 1 \rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-1 < \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2y+1$$

$$\Rightarrow 2y > -2 \rightarrow \boxed{y > -1}$$

$$Im\left\{\frac{Z-j}{Z+j}\right\} < a \Rightarrow \frac{x(y-1)-x(y+1)}{x^2+(y+1)^2} < a$$

$$\Rightarrow -\frac{2x}{a} < x^2 + (y+1)^2 \Rightarrow \boxed{(x+1/a)^2 + (y+1)^2 > 1/a^2}$$

پاسخ سوال ۳: (۲۵ نمره)

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \rightarrow \ u(r,\theta) = \frac{1}{r}\cos(\theta) \rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{-1}{r^2}\cos(\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{-1}{r}\cos(\theta) \rightarrow \ v(r,\theta) = \int \frac{-1}{r}\cos(\theta)\, d\theta + g(r)$$

$$\rightarrow \ v(r,\theta) = \frac{-1}{r}\sin(\theta) + g(r) \rightarrow \ -\frac{\partial v}{\partial r} = -\left(\frac{1}{r^2}\sin(\theta) + g'(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{-1}{r^2}\sin(\theta) - g'(r) = \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r}\sin(\theta)\right) = \frac{-1}{r^2}\sin(\theta) \rightarrow \ g'(r) = 0 \rightarrow g(r) = C$$

$$v(r,\theta) = \frac{-1}{r}\sin(\theta) + C = \frac{-r\sin(\theta)}{r^2} + C = \frac{-y}{x^2+y^2} + C = v(x,y)$$

$$f(i) = 0 \xrightarrow{z=i,\ x=0,\ y=1} u(0,1) + iv(0,1) = 0 + i(-1+C) = 0 \rightarrow C = 1$$

$$v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + 1$$

برای همساز مزدوج بودن v و u باید این دو تابع در معادلات کوشی ریمان صدق کنند که با فرض تحلیلی بودن تابع این شرط برقرار است حال باید چک کنیم تا هر کدام از این توابع به تنهایی در معادله لاپلاس نیز صدق کنند. چون فرم قطبی توابع ساده تر است معادله لاپلاس را به صورت قطبی می نویسیم:

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{-1}{r^2}\cos(\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{-1}{r}\sin(\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2}\cos(\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{-1}{r}\cos(\theta)\right) = \frac{1}{r^3}\cos(\theta) - \frac{1}{r^3}\cos(\theta) = 0$$

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{+1}{r^2}\sin(\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{-1}{r}\cos(\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{-1}{r^2}\sin(\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{-1}{r}(-\sin(\theta))\right) = \frac{-1}{r^3}\sin(\theta) + \frac{1}{r^3}\sin(\theta) = 0$$

هردو تابع v و u معادله لاپلاس را نیز اقناع کردند پس دو تابع همساز مزدوج هستند.

پاسخ سوال ۴: (۲۵ نمره)

فرض کنید $f(z)=u+iv$ یک تابع تحلیلی و $v(x,y)=axy^2-2x^3+4xy$ باشد. $f(z)$ را بیابید.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2axy+4x \Rightarrow u=ayx^2+2x^2+g(y)$$

$$\frac{-\partial v}{\partial x}=-ay^2+6x^2-4y=ax^2+g'(y) \Rightarrow g'(y)=-ay^2+(6-a)x^2-4y$$

$$\Rightarrow g(y)=-\frac{a}{3}y^3+(6-a)x^2y-2y^2 \Rightarrow u(x,y)=6yx^2+2x^2-2y^2-\frac{a}{3}y^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow 12y+\cancel{4}-\cancel{4}-2ay=0 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

$$f(x,y)=(6y+2)x^2-2y^2-2y^3+j\left(6xy^2-2x^3+4xy\right)$$

تابع f در کل صفحه تحلیلی است، در نتیجه با قرار دادن $y=0$ و $x=z$، تابع را برحسب z بدست می‌آوریم:

$$f(z)=2z^2-0-0+j\left(-2z^3\right)=\boxed{2z^2-2jz^3}$$

پاسخ سوال ۵: (۲۵ نمره)

اگر $f(z)=u(x,y)+je^x(x\sin y+y\cos y)$ تحلیلی باشد، $f'(1)$ کدام است؟

$$\left.\begin{array}{l} f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right\} \rightarrow f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+j\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f'(z)=e^x\left(x\cos y+\cos y-y\sin y\right)+e^x\left(x\sin y+y\cos y\right)+e^x\left(\sin y+0\right)$$

$$z=1 \rightarrow x=1,\ y=0 \Rightarrow f'(1)=e(1+1-0)+e(0+0)+e(0+0)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(1)=2e}$$

موفق باشید – خان چرلی