حل تمرین تبدیل فوریه

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله - حل تمرین: نگین سفاری- وصال بخت آزاد- آرمان اکبری

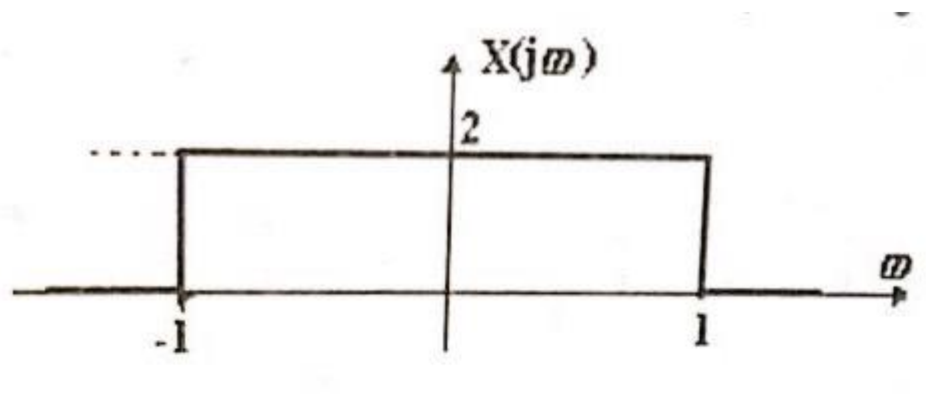
1) $g(t) = x(t)\cos(t) \Rightarrow G(j\omega) = f\{x(t)\cos(t)\} = \frac{1}{2\pi} f\{x(t)\} * f\{\cos(t)\}$

$= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * f\left\{\frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt}\right\} = \frac{1}{4\pi} X(j\omega) * [2\pi\delta(\omega+1) + 2\pi\delta(\omega-1)]$

$= \frac{1}{2} X\big(j(\omega+1)\big) + \frac{1}{2} X(j(\omega-1))$

دیده می شود که $G(j\omega)$ معادل ترکیب خطی انتقال یافته های $X(j\omega)$ به چپ و راست در اینصورت

کافیست $X(j\omega)$ به شکل زیر شود:



یا می توان نوشت:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| < 1 \\ 0, & elsewhere \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{2\sin(t)}{\pi t}$$

نکته:این مساله را می توان به روش دیگر و به صورت زیر حل کرد:

$$x(t)\cos(t) = g(t) \Longrightarrow x(t) = \frac{g(t)}{\cos(t)} = \frac{f^{-1}\{G(j\omega)\}}{\cos(t)} = \frac{\sin(2t)}{\pi t \cos(t)} = \frac{2\sin(t)}{\pi t}$$

2)

با فرض $Y(j\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} e^{2j\omega}$ خواهیم داشت:

$$y(t) = f^{-1}\left\{\frac{\sin(\omega)}{\omega} e^{2j\omega}\right\} = S_P(t+2)$$

که در آن $S_p(t)$ یک پالس مستطیلی به ارتفاع 1 و با T=1 می باشد.بدین ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin(\omega)}{\omega} e^{2j\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega 0}d\omega$$

$$= 2\pi f^{-1}\{X(j\omega)Y(j\omega)\}|_{t=0} = 2\pi\{x(t) * y(t)\}|_{t=0} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)(0-\tau)d\tau = 7\pi$$

3)

ابتدا تبدیل فوریه سیگنال z(t) را بدست آوریم:

$$Z(j\omega) = f\{z(t)\} = f\{e^{-t}u(t) + 3\delta(t)\} = \frac{1}{1+j\omega} + 3 = \frac{4+3j\omega}{1+j\omega}$$

حال با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل سیستم داریم:

$$f\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t)\right\} = f\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau - x(t)\} = f\{x(t) * z(t) - x(t)\}$$

$$\Rightarrow j\omega Y(j\omega) + 10Y(j\omega) = X(j\omega)Z(j\omega) - X(j\omega)$$

$$\Longrightarrow H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{Z(j\omega)-1}{10+j\omega}=\frac{\left(\frac{4+3j\omega}{1+j\omega}\right)-1}{10+j\omega}=\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$$

$$h(t)=f^{-1}\{H(j\omega)\}=f^{-1}\left\{\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}\right\}=\frac{1}{9}(e^{-t}+e^{-10t})u(t)$$

4) A)

سیگنال $x(t)$ و مشتق آن $z(t)$ در شکل زیر رسم شده اند:

حال تبدیل فوریه سیگنال $z(t)$ را می نویسیم:

$$Z(j\omega)=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}=\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

با توجه به خاصیت انتگرال گیری می توان نوشت:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} z(t)dt$$

$$\Longrightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}Z(j\omega)+\pi Z(0)\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left(\frac{2sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}\right)+\pi\delta(\omega)=\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)$$

B)

برای این سیگنال خواهیم داشت:

$$G(j\omega) = f\{g(t)\} = f\{x(t) - \frac{1}{2}\}$$

$$= f\{x(t)\} - \frac{1}{2}f\{1\} = X(j\omega) - \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega)\right) = X(j\omega) - \pi\delta(\omega) = \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{j\omega^2}$$

5)

I)

$$X(j\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 2\omega + 2} = \frac{1}{(\omega - 1)^2 + 1}$$

As we know: $e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{\omega^2+1}$ Frequency Shifting: $e^{jt}e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{(\omega-1)^2+1}$

$$X(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{2}e^{jt}e^{-|t|}$$

II) $X(j\omega) = \frac{j\omega-1}{j\omega+2}$

$$X(j\omega) = 1 - \frac{3}{j\omega + 2}$$

$$X(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} \delta(t) - 3\, e^{-2t}u(t)$$

III) $X(j\omega) = \frac{4b\sin(\pi\omega)}{\omega b^2+\omega^3}$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin(\pi\omega)}{\omega}\frac{2b}{b^2 + \omega^2}$$

$$f^{-1}\left\{\frac{\sin(\pi\omega)}{\omega}\right\} = \begin{cases}1, & |t| < \pi \\ 0, & |t| > \pi\end{cases}, f^{-1}\left\{\frac{2b}{b^2+\omega^2}\right\} = e^{-b|t|}$$

$$\Rightarrow Convlution: x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-b|t-\tau|}d\tau$$

1) If $t \le -\pi \;\Rightarrow f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{b(t-\tau)}d\tau = \frac{\sinh(\pi b)}{b}e^{bt}$
2) If $|t| < \pi \;\Rightarrow f(t) = \int_{-\pi}^{x} + \int_{x}^{\pi} = \frac{2(1-e^{-\pi b}\cosh(bx)}{b}$
3) If $t \ge \pi \;\Rightarrow f(t) = \frac{\sinh(\pi b)}{b}e^{-bt}$

6)

a)

$$f(t) = e^{-t}(\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t))u(t)$$
$$= e^{-t}u(t)\cos(2\pi t) + e^{-t}u(t)\sin(2\pi t)$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega+1}$$

Modulation:

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]$$

$$x(t)\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2j}[X(\omega-\omega_0)-X(\omega+\omega_0)]$$

$$\to F(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega-2\pi)+1}+\frac{1}{j(\omega+2\pi)+1}\right]+\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j(\omega-2\pi)+1}-\frac{1}{j(\omega+2\pi)+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1-j}{j(\omega-2\pi)+1}-\frac{1+j}{j(\omega+2\pi)+1}\right]$$

b)

Parseval Equation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dx \ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Time Shifting:

$$f(t-a) \xrightarrow{F} F(\omega)e^{-ja\omega}$$

$$F(\omega)e^{-ja\omega} = \frac{e^{-ja\omega}}{2j}\left[\frac{1-j}{j(\omega-2\pi)+1}-\frac{1+j}{j(\omega+2\pi)+1}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)^2 dx \ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)e^{-ja\omega}|^2 d\omega$$

7)

$f(t) = e^{-2t}u(t)$

$g(t) = tf(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(2+j\omega)}dt = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)f(t)e^{-j\omega t}dt \to j\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$g(t) = tf(t) \to G(\omega) = j\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{(j\omega + 2)^2} \to |G(\omega)| = \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

Parseval Equation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \to \int_{-\infty}^{\infty} |te^{-2t}u(t)|^2 dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{\omega^2 + 4})^2 d\omega \to \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{\omega^2 + 4})^2 d\omega = 2\pi\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-4t}dt$$

$$\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-4t}dt = \frac{1}{32} \to 2\pi\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-4t}dt = \frac{\pi}{16}$$

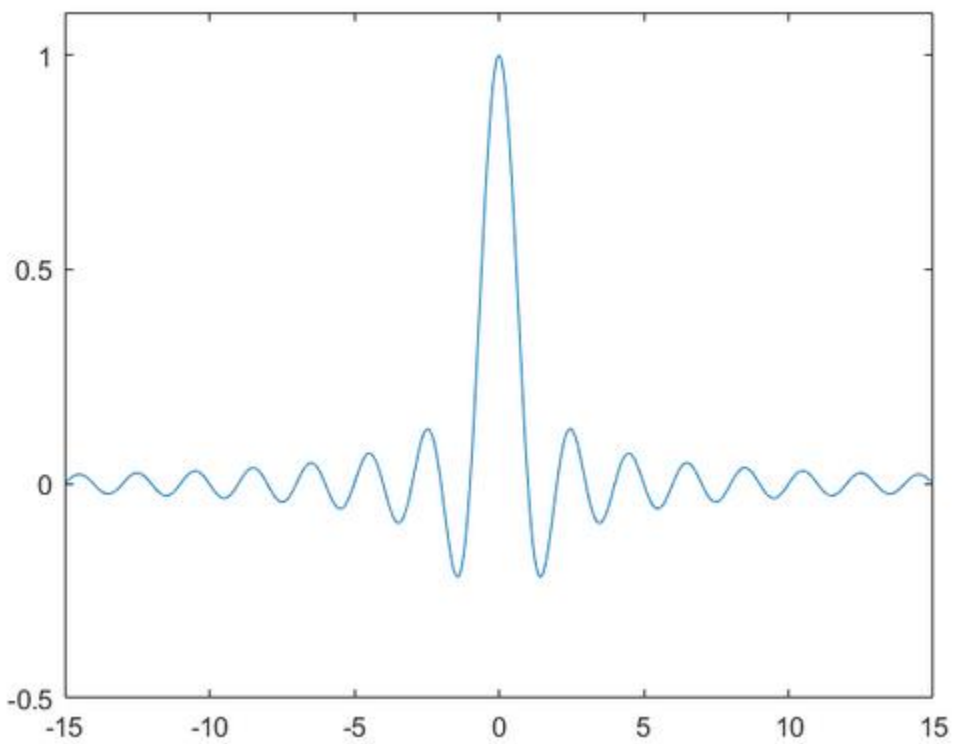
$$\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{\omega^2 + 4})^2 d\omega = \frac{\pi}{16} \to \int_{0}^{\infty} (\frac{1}{\omega^2 + 4})^2 d\omega = \frac{\pi}{32}$$

8)

a.

$Sinc(t) \triangleq \frac{Sin(\pi t)}{\pi t}$ (normalized form)

Graph:



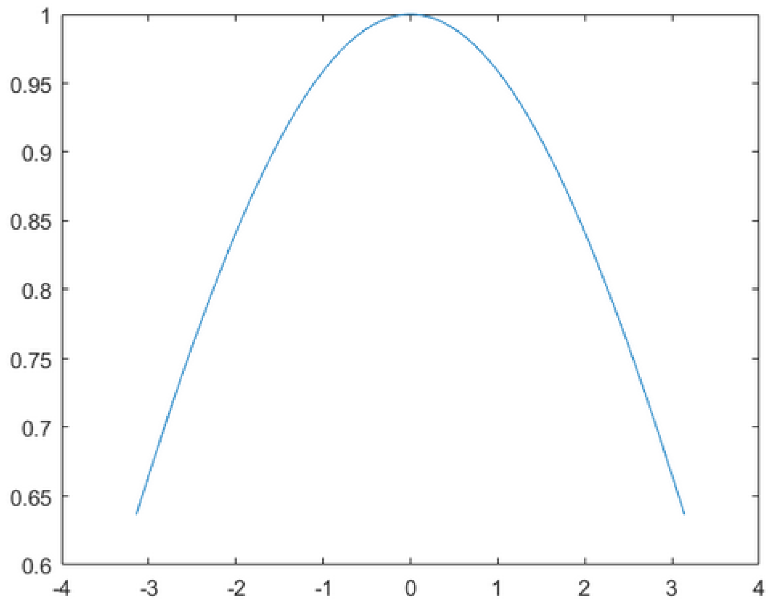
$Sinc(t) \xrightarrow{F} rect(\frac{\omega}{2\pi})$

b.

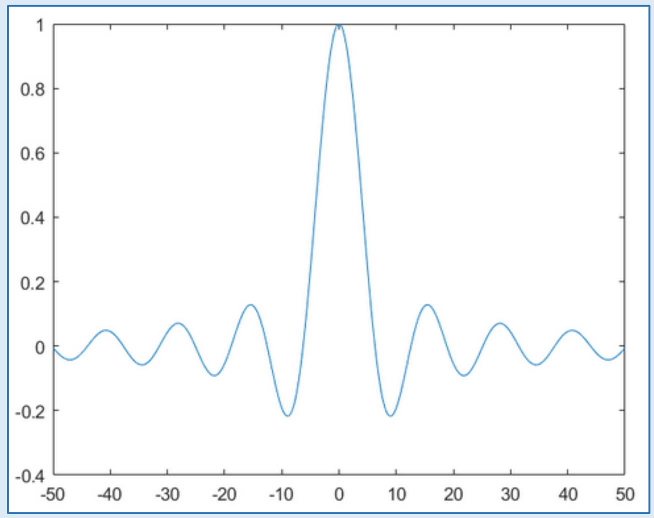
$$g(t) = rect(t) * Sinc(t) \rightarrow G(\omega) = Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right).rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \omega > |\pi| \\ Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) & \omega < |\pi| \end{cases}$$

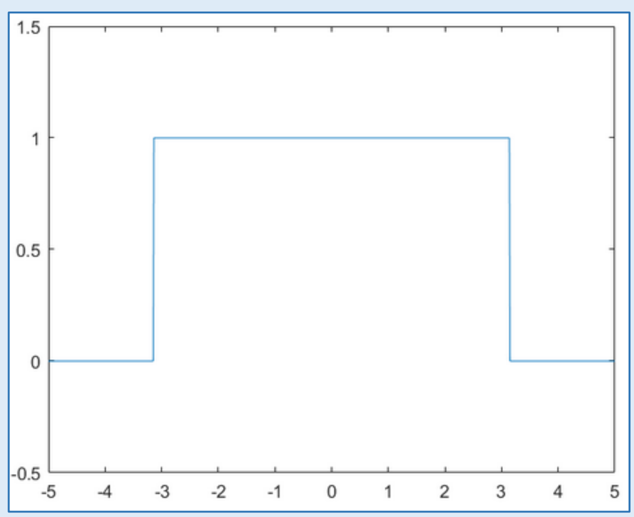
Graph:



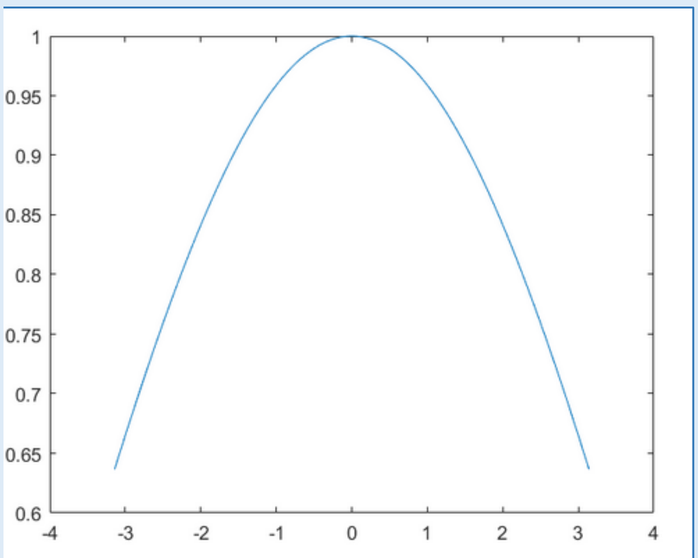
حال بیایید به نمودار $Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ به تنهایی نگاه بیندازیم:



همان طور که از فرم تابع $Sinc$ انتظار داریم، میبینیم که این تابع از سمت مثبت و منفی تا بینهایت ادامه دارد و مقدار آن به صفر میل می کند. حال به نمودار $rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ به تنهایی نگاه کنیم.



می بینیم که با ضرب $rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ در $Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ در واقع مقادیر $\omega < |\pi|$ از سیگنال $Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ را حفظ می کنیم و باقی مقادیر را دور میریزیم. با توجه به اینکه ω نماینده فرکانس است ($\omega = 2\pi f$)، در واقع فرکانس های بالا دور ریخته می شود و فرکانس های پایین نگه داشته می شود.



این یکی از کاربرد های تبدیل فوریه است، با کانوالو کردن تابعی مانند $Sinc(t)$ که تبدیل فوریه آن را میدانیم در تابعی دلخواه، میتوانیم در حوزه فرکانس مقادیر مورد نظر خود از تابع را اصطلاحا فیلتر کنیم.