حل امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

حل 1: با توجه به معادله $f(x)=\int_0^\infty (\frac{1}{\omega^2+4}\cos\omega x+\frac{\omega}{\omega^2+4}\sin\omega x)d\omega$ داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty (\frac{1}{\omega^2+4}\cos\omega x+\frac{\omega}{\omega^2+4}\sin\omega x)d\omega=\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega\rightarrow$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega^2+4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx=\pi A(\omega)$$

$$B(\omega)=\frac{\omega}{\omega^2+4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx=\pi B(\omega)$$

با استفاده از روابط $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,\ \ \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ داریم:

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x),\ \ \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$$

که باجایگزینی در معادله خواسته شده داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(2\cos^3 x+3\sin^3 x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(2\cos^3 x)dx+\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(3\sin^3 x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos 3x+3\cos x)dx+\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(3\sin x-\sin 3x)dx=$$

$$\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 3x dx+\frac{9}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x dx-\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin 3x dx=$$

$$\frac{3}{2}\pi A(\omega=1)+\frac{1}{2}\pi A(\omega=3)+\frac{9}{4}\pi B(\omega=1)-\frac{3}{4}\pi B(\omega=3)=$$

$$\pi[\frac{3}{2}\frac{1}{1^2+4}+\frac{1}{2}\frac{1}{3^2+4}+\frac{9}{4}\frac{1}{1^2+4}-\frac{3}{4}\frac{3}{3^2+4}]=$$

$$\pi[\frac{3}{10}+\frac{1}{26}+\frac{9}{20}-\frac{9}{52}]=\pi\frac{78+10+13\times 9-45}{260}=\frac{160\pi}{260}=\frac{8\pi}{13}$$

3 نمره

حل 2: از طرفین تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+5[sY(s)-y(0)]+4Y(s)=\frac{1}{s+2}\rightarrow s^2Y(s)-s(-1)-1+5[sY(s)+1]+4Y(s)=\frac{1}{s+2}$$

$$(s^2+5s+4)Y(s)+s-1+5=\frac{1}{s+2}\rightarrow(s^2+5s+4)Y(s)=\frac{1}{s+2}-s-4\rightarrow Y(s)=\frac{-s^2-6s-7}{(s+1)(s+4)(s+2)}$$

$$Y(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}\qquad A=(s+1)Y(s)_{(s=-1)}=\frac{-(-1)^2-6(-1)-7}{(-1+4)(-1+2)}=-\frac{2}{3}$$

$$B=(s+2)Y(s)_{(s=-2)}=\frac{-(-2)^2-6(-2)-7}{(-2+1)(-2+4)}=-\frac{1}{2}\qquad C=(s+4)Y(s)_{(s=-4)}=\frac{-(-4)^2-6(-4)-7}{(-4+1)(-4+2)}=\frac{1}{6}\rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{-\frac{2}{3}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{\frac{1}{6}}{s+4}\rightarrow y(t)=(-\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{-4t})u_{-1}(t)$$

3 نمره

برای حل معادله دیفرانسیل از طرفین تبدیل فوریه میگیریم:

$$(j\omega)^3Y(\omega)+6(j\omega)^2Y(\omega)+3(j\omega)Y(\omega)+24Y(\omega)=2j\omega X(\omega)+4X(\omega)\rightarrow$$
$$[(j\omega)^3+6(j\omega)^2+3(j\omega)+24]Y(\omega)=(2j\omega+4)X(\omega)\rightarrow H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{2j\omega+4}{(j\omega)^3+6(j\omega)^2+3(j\omega)+24}$$

چون فرکانس ورودی $\omega=2$ میباشد تابع تبدیل را در این فرکانس حساب میکنیم:

$$H(2)=\frac{2j(2)+4}{(j2)^3+6(j2)^2+3(j2)+24}=\frac{4j+4}{-8j-24+6j+24}=\frac{4+4j}{-2j}=-2+2j=2\sqrt{2}e^{j135^\circ}$$

بنابراین دامنه تابع تبدیل $2\sqrt{2}$ و فاز آن **135** درجه است پس دامنه خروجی برابر است با دامنه ورودی ضربدر دامنه تابع تبدیل و فاز خروجی برابر است با فاز ورودی بعلاوه فاز تابع تبدیل به عبارت دیگر:

$$y(t)=2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\cos(2t+45^\circ+135^\circ)=-12\sin 2t$$

2 نمره

حل 3-الف: ابتدا برای رسیدن به معادله همگن میتوانیم بنویسیم:

$$w(x,t)=w(x,t)-V(x)+V(x)=u(x,t)+V(x)$$

با جایگزینی در معادله داده شده داریم:

$$u_{xx}(x,t)+\frac{d^2V(x)}{dx^2}=u_{tt}(x,t)+6x\rightarrow\begin{cases}u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t)\\ \dfrac{d^2V(x)}{dx^2}=6x\rightarrow V(x)=x^3+Ax+B\end{cases}$$

حالا شرط مرزی ها را اعمال میکنیم:

$$w(x,t)=u(x,t)+V(x)\rightarrow w(0,t)=u(0,t)+V(0)=0\rightarrow u(0,t)=0\qquad V(0)=0$$
$$w(\pi,t)=u(\pi,t)+V(\pi)=\pi^3\rightarrow u(\pi,t)=0\qquad V(\pi)=\pi^3$$

با شرط مرزی های بدست آمده ابتدا $V(x)$ را بدست می آوریم:

$$V(x)=x^3+Ax+B\qquad V(0)=0\rightarrow B=0\qquad V(\pi)=\pi^3+A\pi=\pi^3\rightarrow A=0\rightarrow V(x)=x^3$$

حال برای معادله اول داریم:

$$u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t) \qquad u_t(x,0)=w_t(x,0)=4\sin^3 x \to \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=4\sin^3 x \end{cases}$$

بنابراین شرایط مرزی به شرایط مرزی همگن تغییر یافت و معادله بر حسب $u(x,t)$ به صورت همگن زیر در آمد:

$$u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t)$$

حال با روش جدا سازی متغییرها $u(x,t)=X(x)T(t)$ و جایگزینی در معادله دیفرانسیل همگن بدست آمده خواهیم داشت:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-k^2 \to u(x,t)=(a\sin kx+b\cos kx)(d\sin kt+d\cos kt)$$

$$u(0,t)=0 \to b=0 \quad u(\pi,t)=0 \to k=n \qquad u(x,0)=0 \to d=0$$

$$\to u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nt \sin nx \qquad u_t(x,0)=4\sin^3 x=\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin nx \to 3\sin x-\sin 3x=\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin nx$$

$$\to A_1=1 \qquad 3A_3=-1 \to A_3=-\frac{1}{3} \to u(x,t)=3\sin t\sin x-\frac{1}{3}\sin 3t\sin 3x \to$$

$$w(x,t)=V(x)+u(x,t)=x^3+u(x,t)=x^3+3\sin t\sin x-\frac{1}{3}\sin 3t\sin 3x$$

3 نمره

حل 3- ب:

$$\frac{d^2W(x,s)}{dx^2}=s^2W(x,s)+\frac{1}{s+1} \to \frac{d^2W(x,s)}{dx^2}-s^2W(x,s)=\frac{1}{s+1} \to$$

$$\lambda^2-s^2=0 \to \lambda=\pm s \to W_h=Ae^{sx}+Be^{-sx} \qquad -s^2W_p=\frac{1}{s+1} \to W_p=-\frac{1}{s^2(s+1)} \to$$

$$W=W_h+W_p=Ae^{sx}+Be^{-sx}-\frac{1}{s^2(s+1)}$$

برای کرانه دار بودن باید وقتی $x\to\infty$ تابع محدود باشد بنابراین $A=0$ در نتیجه:

$$W=Be^{-sx}-\frac{1}{s^2(s+1)} \qquad w(0,t)=1 \to \qquad W(0,s)=\frac{1}{s} \to B-\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s} \to B=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}$$

$$W(x,s)=(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1})e^{-sx}-\frac{1}{s^2(s+1)}=(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1})e^{-sx}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1} \to$$

$$w(x,t)=[t-x+e^{-(t-x)}]u_{-1}(t-x)-t+1-e^{-t}$$

3 نمره

حل 4-الف:

$$I_1=\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int_0^\infty \frac{dx}{[(x+0.5)^2+0.75]^2} \qquad x+0.5=y\to dx=dy\to I_1=\int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+0.75)^2}$$

فوریه تابع $f(t)=e^{-\alpha|t|}$ برابر است با:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{t(\alpha-j\omega)}dt+\int_0^\infty e^{-t(\alpha+j\omega)}dt=\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$

حال با استفاده از قضیه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|d\omega\to 2\int_0^\infty e^{-2at}dt=2\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{4\alpha^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}d\omega\to\int_0^\infty \frac{4\alpha^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}d\omega=2\pi\int_0^\infty e^{-2at}dt=$$

$$2\pi[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}]_0^\infty=\frac{\pi}{\alpha}\to\int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega^2+\alpha^2)^2}=\frac{\pi}{4\alpha^3}$$

حال در رابطه بالا قرار دهیم $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\omega=y,$ در نتیجه داریم:

$$I_1=\int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+0.75)^2}=\frac{\pi}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

2 نمره

<u>حل 4–ب:</u> فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}1-|t| & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ برابر است با:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-j\omega t}dt+\int_0^1(1-t)e^{-j\omega t}dt=$$

$$[(1+t)\frac{j}{\omega}e^{-j\omega t}]_{-1}^0-\int_{-1}^0\frac{j}{\omega}e^{-j\omega t}dt+[(1-t)\frac{j}{\omega}e^{-j\omega t}]_0^1+\int_{-1}^0\frac{j}{\omega}e^{-j\omega t}dt=\frac{j}{\omega}-[\frac{j}{-j\omega^2}e^{-j\omega t}]_{-1}^0-\frac{j}{\omega}+[\frac{j}{-j\omega^2}e^{-j\omega t}]_0^1$$

$$-\frac{e^{j\omega}}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{\omega^2}=\frac{2-(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{\omega^2}=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}=\frac{2(2\sin^2\frac{\omega}{2})}{\omega^2}=\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}\to$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)^2d\omega|\to 2\int_0^1(1-t)^2dt=2\times\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty[\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}]^2d\omega\to\int_0^\infty\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}d\omega=2\pi\int_0^1(1-t)^2dt\to$$

$$\int_0^\infty\frac{16\sin^4\frac{\omega}{2}}{\omega^4}d\omega=[-\frac{2\pi}{3}(1-t)^3]_0^1=\frac{2\pi}{3}\to\int_0^\infty\frac{\sin^4\frac{\omega}{2}}{\omega^4}d\omega=\frac{\pi}{24} \qquad \frac{\omega}{2}=x\to\omega=2x\to d\omega=2dx\to$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin^4 x}{16x^4}2dx=\frac{\pi}{24}\to I_2=\int_0^\infty\frac{\sin^4 x}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$$

2 نمره

<u>حل 4–پ:</u> حال اگر از تابع $f(t)=\begin{cases}1-|t| & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ مشتق بگیریم داریم: $g(t)=f'(t)=\begin{cases}1 & -1<t<0\\ -1 & 0<t<1\end{cases}$

حال فوریه تابع $g(t)$ را حساب میکنیم:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0} e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1} -e^{-j\omega t}dt=[\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}]_{-1}^{0}+[\frac{-1}{-j\omega}e^{-j\omega t}]_{0}^{1}=\frac{1-e^{j\omega}}{-j\omega}-\frac{e^{-j\omega}-1}{-j\omega}=$$

$$\frac{2-(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{-j\omega}=j\frac{2-2\cos\omega}{\omega}=j\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega}=j\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega}$$

حال از قضیه پارسوال استفاده میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2 d\omega \to 2\int_{0}^{1} 1dt=2\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}(\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega})^2 d\omega \to 1=\frac{16}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{\omega}{2}}{\omega^2}d\omega \to \int_{0}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{\omega}{2}}{\omega^2}=\frac{\pi}{8}$$

حال با تغییر متغیر $\frac{\omega}{2}=x \to \omega=2x \to d\omega=2dx$ داریم:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{\omega}{2}}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{8} \to \int_{0}^{\infty}\frac{\sin^4 x}{4x^2}2dx=\frac{\pi}{8} \to I_3=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

2 نمره

والسلام

موفق باشید

محمود محمدطاهری اردیبهشت 1401