

## دانشه تران- دانشگده مهندسی برق و کامپوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۰ تمرین ۴: تبدیل فوربی مدرس: دکترمهدی طالع مامولد- حل تمرین: وصال بخت از اد- هلیا حسینی



رای بوالات خود دخصوص این تمرین بارایامامه bakhtazad.v@gmail.com با bakhtazad.v@gmail.com مکته ماید.

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+10} = \frac{x+3}{(x+3)^2+1} \Rightarrow F(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{x+3}{(x+3)^2+1}\right\} = e^{j3\omega}\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+1}\right\}$$

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|x|}\right\} = \frac{2a}{\omega^2+a^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\omega^2+1} \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+1}\right\} = \pi e^{-|\omega|}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+1}\right\} = j\frac{d}{d\omega}\pi e^{-|\omega|} = -j\pi \mathrm{sign}(\omega)e^{-|\omega|}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(\omega) = -j\pi \mathrm{sign}(\omega)e^{-|\omega|+j3\omega}}$$

à11

$$\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t - \tau) \Pi(\tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Pi(t - \tau) d\tau$$

$$t < -1 \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 0 d\tau = 0$$

$$-1 < t < 0 \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{t + \frac{1}{2}} d\tau = t + 1$$

$$0 < t < 1 \Rightarrow \int_{t - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau = 1 - t$$

$$1 < t \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 0 d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \Pi(t) * \Pi(t) = \Lambda(t)$$

 $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \Longrightarrow \mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi(t) * \Pi(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi(t)\}\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \left|\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right|$ 

$$(j\omega)^{2}Y(\omega) + 5(j\omega)Y(\omega) + 4Y(\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)((j\omega)^{2} + 5(\omega) + 4) = \frac{1}{j\omega + 4} \Rightarrow Y(\omega)(j\omega + 4)(j\omega + 1) = \frac{1}{j\omega + 4} \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 4)^{2}(j\omega + 1)}$$

$$= \frac{A}{(j\omega + 4)^{2}} + \frac{B}{j\omega + 4} + \frac{C}{j\omega + 1}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{-\frac{1}{3}}{(j\omega + 4)^{2}} + \frac{-\frac{1}{9}}{j\omega + 4} + \frac{\frac{1}{9}}{j\omega + 4} \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{9}e^{-4t} + \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{3}te^{-4t}\right)u(t)$$

ب)

صفحه | 1



## دانشهد تران- دانسگده مهندسی برق و کاپپوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۰ تمرین ۴: تبدیل فوریه مدرس: دکترمهدی طالع ما بولد - حل تمرین: وصال بخت از اد - هلیا حسینی



براي موالات خود درخصوص اين تمرين بارايامله helia.ho3eini@gmail.com مكله بناييد.

الف)

$$F(j\omega) = \frac{5 + j3\omega}{2 - 3\omega^2 + j(3\omega - \omega^3)} = \frac{5 + j3\omega}{(2 + j\omega)(1 - \omega^2 + j\omega)} = \frac{5 + j3\omega}{(2 + j\omega)(1 + j\omega + (j\omega)^2)}$$

$$= \frac{A}{2 + j\omega} + \frac{B}{\left(\frac{1 + j\sqrt{3}}{2}\right) + j\omega} + \frac{C}{\left(\frac{1 - j\sqrt{3}}{2}\right) + j\omega} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{6} + j\frac{5\sqrt{3}}{6}, \quad C = \frac{1}{6} - j\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow f(t) = \left[ -\frac{1}{3}e^{-2t} + \left(\frac{1}{6} + j\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)e^{-\left(\frac{1 + j\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left(\frac{1}{6} - j\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)e^{-\left(\frac{1 - j\sqrt{3}}{2}\right)t} \right]u(t)$$

ب)

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{\omega}\sin(4\omega)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{24\frac{\sin(4\omega)}{4\omega}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{24\mathrm{sinc}\left(\frac{8\omega}{2\pi}\right)\right\}$$
$$\mathcal{F}\{\Pi(x)\} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{24\mathrm{sinc}\left(\frac{8\omega}{2\pi}\right)\right\} = 3\Pi\left(\frac{x}{8}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{\omega}\sin(4\omega)e^{j2\omega}\right\} = 3\Pi\left(\frac{x+2}{8}\right)}$$

(Δ

الف) فوریه تابع داده شده برابر است با:

$$\begin{split} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} \, e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+j\omega)} \, dt = \frac{1}{a+j\omega} \\ \frac{dF(\omega)}{d\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} -(jt) f(t) e^{-j\omega t} dt \Longrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-j\omega t} \, dt \end{split}$$

بنابراین تبدیل فوریه g(t)=tf(t) برابر است باg(t)=tf(t) در نتیجه تبدل فوریه:

برابر است با:  $g(t) = te^{-2t}u(t)$ 

$$G(\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{2 + j\omega} \right) = \boxed{\frac{1}{(2 + j\omega)^2}}$$

حال از قضیه یارسوال استفاده میکنیم

$$\begin{split} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{4 - \omega^2 + j4\omega} \right|^2 d\omega \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [te^{-2t}u_{-1}(t)]^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + 4)^2} d\omega \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + 4)^2} d\omega = 2\pi \int_{0}^{\infty} t^2 e^{-4t} dt \end{split}$$

انتگرال آخر را از طریق جز به جز حل میکنیم:

$$\begin{split} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + 4)^2} d\omega &= 2\pi \left( \left[ -\frac{t^2}{4} e^{-4t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t e^{-4t} dt \right) = 2\pi \left( \left[ -\frac{t^2}{4} e^{-4t} - \frac{t}{8} e^{-4t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-4t} dt \right) &= \frac{\pi}{16} \\ \Rightarrow \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + 4)^2} d\omega = \frac{\pi}{32} \right] \end{split}$$



# دانشهو تعران- دانشگده مهندی برق و کاپیوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۱ تمرین ۴: تبدیل فوریه مدرس: دکتر مهدی طالع مامولد - حل تمرین: وصال بخت از اد- هلیا حسینی



رای موالات خود درخصوص این تمرین بارایالمه helia.ho3eini@gmail.com مکله بایید.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$I_0 = X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 11$$

الف)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 2\pi \frac{0+2}{2} = 2\pi$$

$$I_{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} X^{2}(\omega) d\omega$$

$$x(t) * x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^{2}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X^{2}(\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau) x(\tau) d\tau = 0$$

$$I_{3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2} X(\omega) e^{j6\omega} d\omega$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^{n}}{dt^{n}} x(t)\right\} = (j\omega)^{n} X(\omega) \Rightarrow \omega^{2} X(\omega) = -\mathcal{F}\left\{\frac{d^{2}}{dt^{2}} x(t)\right\}$$

$$\Rightarrow -\frac{d^{2}}{dt^{2}} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow I_{3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2} X(\omega) e^{j6\omega} d\omega = -2\pi \frac{d^{2}}{dt^{2}} x(t) \Big|_{t=6} = 2\pi \delta(t-6)|_{6} = 2\pi \delta(0) = \infty$$

$$I_{4} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^{2} d\omega$$
Parseval:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^{2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^{2} dt$ 

$$\Rightarrow I_{4} = 2\pi \left( \int_{0}^{1} 4dt + \int_{1}^{2} 9dt + \int_{2}^{4} 4dt + \int_{4}^{6} (36 - 12t + t^{2}) dt \right) = \frac{142\pi}{3}$$



## دانشه تیران- دانشگده مهندی برق و کامپوتر ریاضیات مهندی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۰ تمرین ۴: تبدیل فوریه مدرس: دکترمهدی طالع ماموله - حل تمرین: وصال بخت از او - هلیا حسینی



براي موالات خود درخصوص اين تمرين بارايالمه مهمين مايي مايين مايين مين بارايالمه مهمين مين بارايالمه من <u>bakhtazad.v@gmail.com</u> ممكنه باييد .

و)

$$I_{5} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}\{X(\omega)\}e^{j\omega}d\omega$$

$$\text{even}\{x(t)\} = x_{e}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\{X(\omega)\}e^{j\omega t}d\omega$$

$$I_{5} = 2\pi x_{e}(1) = \pi x(1) = \pi \frac{3+2}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

(۲

الف) از طرفین تبدیل فوریه می گیریم:

$$((j\omega)^{3} + 6(j\omega)^{2} + 11(j\omega) + 6)Y(\omega) = \frac{12}{j\omega + 4}$$

$$(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)Y(\omega) = \frac{12}{j\omega + 4}$$

$$Y(\omega) = \frac{12}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)(j\omega + 4)} = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 2} + \frac{C}{j\omega + 3} + \frac{D}{j\omega + 4}$$

$$A = Y(\omega)(j\omega + 1)|_{j\omega = -1} = \frac{12}{(-1 + 2)(-1 + 3)(-1 + 4)} = 2$$

$$B = Y(\omega)(j\omega + 2)|_{j\omega = -2} = \frac{12}{(-2 + 1)(-2 + 3)(-2 + 4)} = -6$$

$$C = Y(\omega)(j\omega + 3)|_{j\omega = -3} = \frac{12}{(-3 + 1)(-3 + 2)(-3 + 4)} = 6$$

$$D = Y(\omega)(j\omega + 4)|_{j\omega = -4} = \frac{12}{(-4 + 1)(-4 + 2)(-4 + 3)} = -2$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{2}{j\omega + 1} + \frac{-6}{j\omega + 2} + \frac{6}{j\omega + 3} + \frac{-2}{j\omega + 4}$$

$$\Rightarrow y(t) = (2e^{-t} - 6e^{-2t} + 6e^{-3t} - 2e^{-4t})u(t)$$

( )

$$|Y(\omega)| = \frac{12}{\sqrt{1 + \omega^2} \sqrt{4 + \omega^2} \sqrt{9 + \omega^2} \sqrt{16 + \omega^2}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{144d\omega}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(9 + \omega^2)(16 + \omega^2)} = 2\pi \int_{0}^{\infty} (2e^{-t} - 6e^{-2t} + 6e^{-3t} - 2e^{-4t})^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(9 + \omega^2)(16 + \omega^2)}$$

$$= \frac{\pi}{72} \left[ -2e^{-2t} + 8e^{-3t} - 15e^{-4t} + 16e^{-5t} - 10e^{-6t} + \frac{24}{7}e^{-7t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \right]_{0}^{\infty} = \frac{\pi}{1008}$$



## دانشه تران- دانشگده مهندسی برق و کامپوتر ریاضیات مهندسی-نیم سال اول سال ۱۴۰۰-۱۴۰۰ تمرین ۴: تبدیل فوربی مدرس: دکترمهدی طالع مامولد- حل تمرین: وصال بخت از اد- هلیا حسینی



براي موالات خود درخصوص ان تمرين مارايالمه معلى مايين مارايالمه bakhtazad.v@gmail.com مكله مناسد.

(λ

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) \cos(\omega x) dx = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos((b+\omega)x) + \cos((b-\omega)x)}{2} dx$$

انتگرال را به روش جزء به جزء حل می کنیم.

$$\int e^{-ax} \cos(bx) \, dx = \frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) + \frac{a}{b} \int e^{-ax} \sin(bx) \, dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) + \frac{a}{b} \left( -\frac{1}{b} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a}{b} \int e^{-ax} \cos(bx) \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{-ax} \cos(bx) \, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow F_c(\omega) = \frac{a}{a^2 + (b + \omega)^2} + \frac{a}{a^2 + (b - \omega)^2} = \frac{a^3 + ab^2 + a\omega^2}{a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2\omega^2 + b^4 + \omega^4 - 2b^2\omega^2}$$

$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$$

comb(x) is a periodic function with T = 1

$$\Rightarrow c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \delta(x) e^{-i2n\pi x} dx = 1 \Rightarrow \operatorname{comb}(x) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} e^{i2n\pi x} \Rightarrow \mathcal{F}\{\operatorname{comb}(x)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n = -\infty}^{+\infty} e^{i2n\pi x}\right\}$$
$$= \sum_{n = -\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - 2n\pi) = 2\pi \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2n\pi) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{\omega - 2n\pi}{2\pi}\right) = \operatorname{comb}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$