تمرین ۱۱: نگاشت

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: حمیدرضا علی اکبری خویی
برای سوالات خود درخصوص این تمرین بارایانامه hamidreza.khoyi99@gmail.com مکاتبه نمایید.

۱) ناحیه $Im(z) > \ln(2)$، تحت نگاشت $w = e^{jz}\sin(z)$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

$$w = e^{jz}sinz = e^{j(x+jy)}\sin(x+jy) = e^{-y}e^{jx}(\sin(x)\cosh(y) + jcos(x)\sinh(y)) =$$
$$= e^{-y}(cosx + jsin\, x)(\sin(x)\cosh(y) + jcos(x)\sinh(y))$$
$$= e^{-y}(cosxsinxcoshy - sinx\, cosx \sinh y) + e^{-y}j(\cos^2 x \sinh y + \sin^2 x \cosh y)$$

$$Im(z) = y > \frac{1}{2}Ln2 = Ln\sqrt{2} \to e^y > e^{Ln\sqrt{2}} = \sqrt{2} \to e^{2y} > 2$$
$$u = e^{-y}(cosxsinxcoshy - sinx\, cosx \sinh y)\ v = e^{-y}(\cos^2 x \sinh y + \sin^2 x \cosh y)$$
$$v = e^{-y}[e^y(\cos^2 x + \sin^2 x) - e^{-y}(\cos^2 x - \sin^2 x)] \to v = e^{-y}[e^y(1) - e^{-y}\cos(2x)] = (1 - e^{-2y}cos2x)$$
$$same\ as\ before: sin2x = 2u$$
$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 4u^2 + e^{4y}(1-2y)^2 = 1 \qquad e^{2y} > 2 \to e^{4y} > 4$$
$$4u^2 + e^{4y}(1-2y)^2 = 1 > 4u^2 + 4(1-2v)^2 = 4u^2 + 16v^2 - 16v + 4$$
$$4u^2 + 16v^2 - 16v + 4 < 1 \to \frac{u^2}{0.25} + \frac{(v-0.5)^2}{0.0625} < 1$$

پس ناحیه مذکور داخل بیضی که مختصات مرکز آن $(0, 0.5j)$ بوده و اقطارش $2a = 1, 2b = 0.5$ در صفحه w میباشد قرار میگیرد.

۲) منحنی $y = Ln[sinx + \sqrt{1+\sin^2 x}]$، تحت نگاشت $w = \cos(z)$ به چه منحنی تبدیل میشود؟

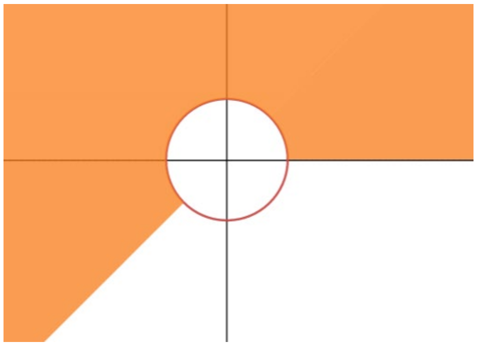
$$e^y = sinx + \sqrt{(1+\sin^2 x} \to (e^y - sinx)^2 = 1 + \sin^2 x \to e^{2y} - 2e^y sinx + \sin^2 x = 1 + \sin^2 x$$
$$sinx = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = sinhy \to sinx = \sinh y\ , w = \cos(x+jy) = cosxcoshy - jsin^2x$$
$$u = cosxcoshy \qquad v = -sin^2x$$
$$u^2 + v^2 = \cos^2 x(1 + \sinh^2 y) + \sin^4 x = \cos^2 x(1 + \sin^2 x) + \sin^4 x = (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) + \sin^4 x = 1$$

پس نگاشت منحنی $y = Ln[sinx + \sqrt{1+\sin^2 x}]$ در صفحه z دایره به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ در صفحه W میشود که چون $v = -\sin^2 x$ همواره منفی است پس نیمدایره ای که در زیر محور حقیقی در صفحه W است جواب مسئله است.

۳) ناحیه $D = \{x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}\}$، با نگاشت $w = e^{3z-\bar{z}}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

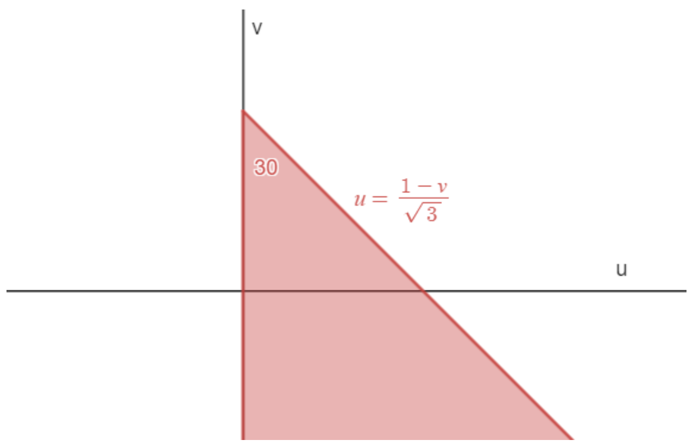
$$w = e^{3z-\bar{z}} = e^{3(x+jy)-(x-jy)} = e^{2x}e^{4jy} \to |w| = e^{2x} \quad , x \geq 0 \to |w| < \infty\ , \deg(w) = 4y$$
$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \to 0 \leq \deg(w) \leq \frac{4\pi}{3}$$

بنابراین ناجیه به خارج دایره ای به شعاع واحد در زاویه بین صفر و ۲۴۰ درجه نگاشت میشود که در زیر نشان داده شده است:

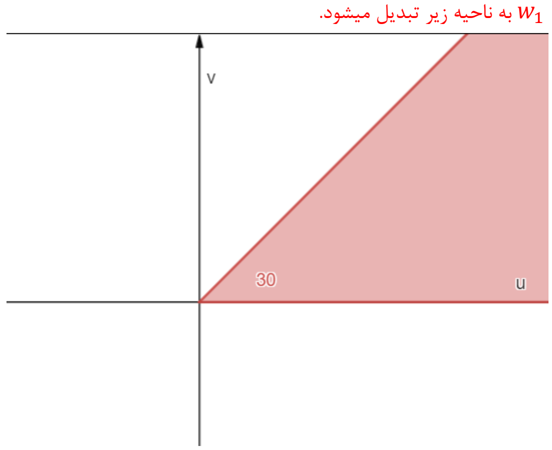


مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: حمیدرضا علی اکبری خویی
برای سوالات خود در خصوص این تمرین بار ایانامه hamidreza.khoyi99@gmail.com مکاتبه نمایید.

۴) نگاشتی بیابید که نیم صفحه بالای محور حقیقی در صفحه z را به ناحیه $0 \le u \le \frac{1-v}{\sqrt{3}}$ همانند شکل زیر تبدیل کند.

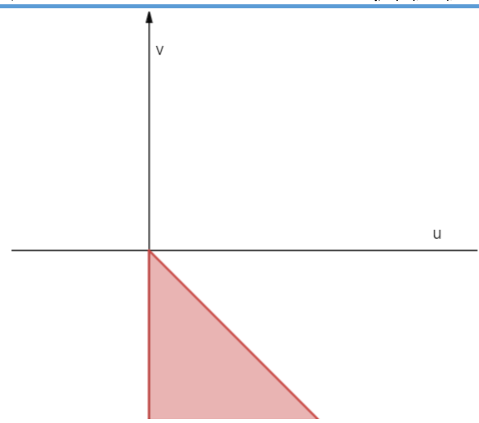


ناحیه اول بالای محور حقیقی است که با نگاشت $w_1 = z^{\frac{1}{6}}$ به ناحیه زیر تبدیل میشود.



حال با نگاشت $w_2 = w_1 e^{-\frac{j\pi}{2}} = -jw_1$ شکل بالا به شکل زیر تبدیل میشود.

مدرس: دکتر مهدی طالع ماسوله- حل تمرین: حمیدرضا علی اکبری خوئی
برای سوالات خود در خصوص این تمرین بار ایانامه hamidreza.khoyi99@gmail.com مکاتبه نمایید.

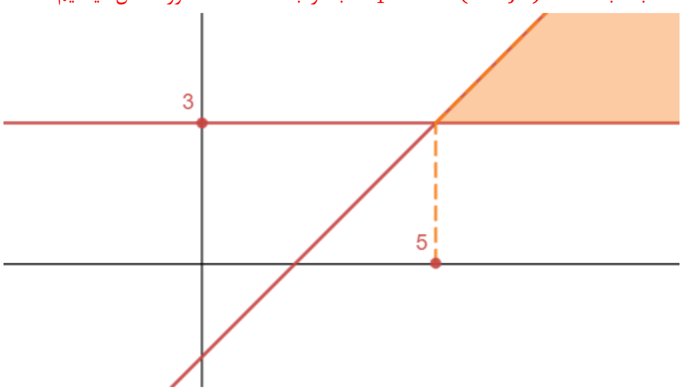


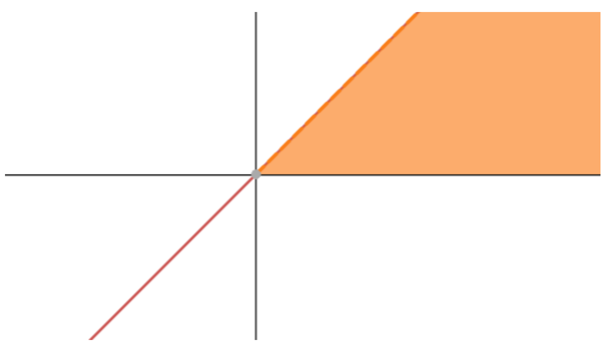
سپس با نگاشت $w = w_2 + j$ نگاشت نهایی خواسته شده حاصل میشود پس نگاشت به صورت زیر است:

$$w = -jz^{\frac{1}{6}} + j = j\left(1 - z^{\frac{1}{6}}\right)$$

۵) نگاشتی بیابید که ناحیه $3 \le y \le x - 2$ را به داخل دایره واحد بنگارد.

ناحیه $3 \le y \le x - 2$ در زیر رسم شده است، ابتدا با نگاشت $w_1 = z - (5 + j3)$ مبدا را به مختصات مذکور منتقل میکنیم.





حال زاویه راس A ۴۵ دره است و با نگاشت $w_2 = w_1^4$ به نیم صفحه بالای محور حقیقی نگاشت میشود و حال با نگاشت $w = \frac{e^{ja}(w_2 - z_0)}{w_2 - \overline{z_0}}$ به داخل دایره واحد نگاست میشود.

۶) ناحیه $|z-1|<2|z|$ با نگاشت $w=\frac{z-1}{z+1}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

$$w=\frac{z-1}{z+1}\to z=\frac{w+1}{1-w}\quad |z-1|<2|z|\to\left|\frac{w+1}{1-w}-1\right|<2\left|\frac{w+1}{1-w}\right|\to|w|<|1+w|\qquad(1)$$

روی خط $u=-0.5$ شرط $|w|=|w+1|$ برقرار است و بنابر این مقدار نامساوی (۱) سمت چپ این خط برقرار است. یعنی ناحیه داده شده تحت نگاشت فوق به سمت راست خط $u=-0.5$ در صفحه w تصویر میشود. میتوان مسئله را به صورت زیر هم اثبات کرد:

$$|w|<|w+1|\to\sqrt{u^2+v^2}<\sqrt{(u+1)^2+v^2}\to 1+2u>0\to u>-0.5$$

۷) تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ ناحیه بین دو منحنی $\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ و $\left|z+\frac{j}{6}\right|=\frac{1}{6}$ به چه ناحیه ای تبدیل میشود؟

برای $\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ داریم:

$$\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}\to\left|\left(x-\frac{1}{4}\right)+jy\right|=\frac{1}{4}\to\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}\to x^2+y^2-\frac{1}{2}x=0\to A=1,B=-\frac{1}{2}.\ C=D=0$$
$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0\to u=2$$

برای $\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ داریم:

$$\left|z+\frac{j}{6}\right|=\frac{1}{6}\to\left|x+j\left(y+\frac{1}{6}\right)\right|=\frac{1}{6}\to x^2+\left(y+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}\to x^2+y^2+\frac{1}{3}y=0\to A=1,B=0.\ C=\frac{1}{3},D=0$$
$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0\to v=3$$

یعنی احیه بین دو دایره بین ناحیه بین دو خط u=2, v=3 حال برای اینکه بدانیم در کدام از چهار ناحیه است نقطه ای در ناحیه بین دو دایره یعنی نقطه $\left(\frac{1}{8}-\frac{j}{12}\right)$ انتخاب میکنیم که نگاشت آن برابر است با:

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{\frac{1}{8}-\frac{j}{12}}=\frac{24}{3-2j}=5.54+j3.7$$

پس ناحیه جواب به صورت زیر است: