ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱	**پاسخ تکلیف شماره ۶**	

معادلات لاپلاس

پاسخ سوال ۱ : (۳۰ نمره)

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \to XY'' + X''Y = 0 \to \frac{-Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \to X(x)Y(0) = 0 \xrightarrow{X(x)\neq 0} Y(0) = 0 \\ u(x,\pi) = 0 \to X(x)Y(\pi) = 0 \xrightarrow{X(x)\neq 0} Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

توضیح: قبلا گفته شد که معادله لاپلاس شرایط اولیه نداشته و بر روی هر دو متغیر شرایط, مرزی میباشند. از آنجا که شرایط مرزی بر روی y همگن است, ثابت داده شده را برابر λ انتخاب کردیم تا به $Y'' + \lambda Y = 0$ برسیم. هرچند میتوانستیم آنرا بصورت $-\lambda = \frac{-X''}{X} = \frac{Y''}{Y}$ نیز بنویسیم.

۲- حل معادله اول یعنی $Y(y)$ (مساله مقدار مرزی, مساله اشتورم-لیوویل)

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad ; \quad Y(0) = Y(\pi) = 0$$

$$\xrightarrow{SLP(1)} \lambda_n = \alpha_n^2 \,;\, \alpha_n = \frac{n\pi}{\pi} = n \,;\, Y_n(y) = a_n\varphi_n(y) = a_n sin(\alpha_n y) \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

۳- حل معادله دوم یعنی $X(x)$ و تعیین فرم کلی جواب

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2 \to X'' - \alpha_n^2 X = 0 \to X_n(x) = c_n\, cosh(nx) + d_n\, sinh(nx)$$

از آنجا که یک شرط روی $X(x)$ برابر صفر است, میتوان با استفاده از آن یکی از ضرایب را حذف کرد. یعنی:

$$u(6,y) = 0 \to X(6)Y(y) = 0 \xrightarrow{Y(y)\neq 0} X(6) = 0 \to c_n = -tanh(6n)d_n$$

$$\to X_n(x) = d_n(sinh(nx) - tanh(6n)\, cosh(nx)) = \underbrace{\frac{d_n}{cosh(6n)}}_{A_n} sinh[n(x-6)]$$

$$u(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = A_n\, sin(ny)\, sinh[n(x-6)] \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots$$

۴- تعیین جواب نهایی با استفاده از شرایط مرزی غیر صفر مساله

تنها یک شرط مرزی باقی مانده است. از آنجا که شرط مرزی غیرهمگن باقیمانده یعنی $u(0,y)=ysiny$ بصورت مجموع k تابع به فرم تابع ویژه نیست, جواب را بصورت بیشمار جواب به فرم $u(x,y)$ انتخاب میکنیم.

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(ny)\sinh[n(x-6)]$$

$$u(0,y)=ysiny\rightarrow ysiny=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{-A_n sinh(6n)}_{c_n}sin(ny)\,;\quad 0\le y\le\pi$$

$$\rightarrow\underbrace{-A_n sinh(6n)}_{c_n}=\frac{\langle ysiny,sin(ny)\rangle}{\|sin(ny)\|^2}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & n=1\\[2mm] \dfrac{-4n(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)^2} & n=2,3,\cdots\end{cases}$$

و یا میتوان گفت $-A_n sinh(6n)$ همان b_n سری فوری $ysiny$ ای است که گسترش فرد یافته است. که با محاسبه b_n به همان نتیجه بالا خواهیم رسید. با توجه به توان n^3 در مخرج کسر سری ایجاد شده, بدیهی است همگرایی جواب بالا بوده و با نوشتن چند جمله ابتدایی سری میتوان به دقت بالایی رسید.

توضیح: فرض کنید شرایط مرزی در دو سمت چپ و راست بصورت زیر داده شده باشد:

$$u(0,y)=f(y)\;\;;\;\;u(6,y)=g(y)$$

در اینصورت هر دوشرط بالا در گام ۴ بکار گرفته میشود.

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n cosh(nx)+B_n sinh(nx)]\,sin(ny)$$

$$\underbrace{u(0,y)}_{f(y)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,sin(ny)=f(y)\rightarrow A_n\;\boxed{\surd}$$

$$\underbrace{u(6,y)}_{g(y)}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{[A_n cosh(6n)+B_n sinh(6n)]}_{c_n}sin(ny)=g(y)\xrightarrow{(5)}c_n\;\boxed{\surd}$$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰	پاسخ تکلیف شماره ۶	

پاسخ سوال ۲: (۳۰ نمره)

از روش تفکیک متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$u(r,\theta) = F(r)\cdot G(\theta)$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

اکنون $u(r,\theta)$ را در معادله لاپلاس فوق جایگذاری می‌کنیم.

$$F''(r)\,G(\theta) + \frac{1}{r}F'(r)\,G(\theta) + \frac{1}{r^2}F(r)\,G''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{r^2\frac{F''(r)}{F(r)} + r\frac{F'(r)}{F(r)}}_{\text{فقط تابعی از } r} = \underbrace{-\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}}_{\text{فقط تابعی از } \theta} = K$$

ثابتی مستقل از r و θ

(I) if $K=0 \Rightarrow G''(\theta)=0 \Rightarrow G(\theta) = c_1\theta + c_2$

مهم: توجه کنید که $u(r,\theta)$ باید نسبت به θ با دوره تناوب 2π متناوب باشد پس $G(\theta)$ هم باید نسبت به θ با دوره تناوب 2π متناوب باشد در واقع باید $G(\theta+2\pi)=G(\theta)$ باشد.

پس باید $c_1=0$ باشد تا $G(\theta+2\pi)=G(\theta)$ و لذا $G(\theta)=c_2$

$$r^2\frac{F''(r)}{F(r)} + r\frac{F'(r)}{F(r)} = 0 \Rightarrow rF''(r) + F'(r) = 0 \Rightarrow (rF'(r))' = 0$$

$$\Rightarrow rF'(r) = c_3 \Rightarrow F(r) = c_3\ln(r) + c_4$$

چون $r=0$ در دامنه $F(r)$ نیست باید $c_3=0$ باشد تا $F(r)=c_4$ شود.

$$\Rightarrow u(r,\theta) = F(r)\cdot G(\theta) = c_4\cdot c_2 = C$$ مقدار ثابت

(II) if $K<0 \Rightarrow K=-\omega^2,\ \omega\in\mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = -\omega^2 \Rightarrow G''(\theta) - \omega^2 G(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow G(\theta) = c_1 e^{+\omega\theta} + c_2 e^{-\omega\theta}$$

این $G(\theta)$ تنها درصورتی متناوب است که $c_1=c_2=0$ باشد که در این حالت $G(\theta)=0$ و $u(r,\theta)=0$ می‌شود که جواب بدیهی معادله است. ※

(III) if $K>0 \Rightarrow K=+\omega^2,\ \omega\in\mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow G''(\theta) + \omega^2 G(\theta) = 0 \Rightarrow G(\theta) = c_1\cos(\omega\theta) + c_2\sin(\omega\theta)$$

این $G(\theta)$ درصورتی که $\omega \in \mathbb{N}$ باشد با دوره تناوب 2π متناوب است. لذا ω را
اعداد طبیعی
به فرم $n \in \mathbb{N}$ در نظر بگیریم.

$$G_n(\theta) = c_{1n}\cos(n\theta) + c_{2n}\sin(n\theta)$$

$$r^2\frac{F''(r)}{F(r)} + r\frac{F'(r)}{F(r)} = \cancel{\omega^2} \rightarrow n^2 \Rightarrow \underbrace{r^2F''(r) + rF'(r) - n^2F(r) = 0}$$

این معادله از نوع معادلات کوشی-اویلر است و دو پاسخ مستقل خطی آن به شکل r^α قابل محاسبه هستند (در واقع در تمرین سری قبل هم که حل آن برایتان ارسال شده بود به این فرم معادله برخوردیم و راه حل آن را گفتیم) اکنون r^α را در معادله جایگذاری می‌کنیم تا مقادیر مجاز α بدست آیند.

$$r^2\cdot(r^\alpha)'' + r(r^\alpha)' - n^2r^\alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1)\cancel{r^\alpha} + \alpha\cancel{r^\alpha} - n^2\cancel{r^\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = n^2 \Rightarrow \alpha = \pm n \Rightarrow F_n(r) = c_{3n}r^{+n} + c_{4n}r^{-n}$$

برای اینکه $r=0$ در دامنه $F(r)$ باشد باید $c_{4n}=0$ باشد.

$$\Rightarrow F_n(r) = c_{3n}r^{+n} \Rightarrow \boxed{\underset{n\in\mathbb{N}}{u_n(r,\theta)} = c_{3n}r^{+n}\left(c_{1n}\cos(n\theta) + c_{2n}\sin(n\theta)\right)}$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\gamma_n u_n(r,\theta)\right] + \gamma_0 C$$

ترکیب خطی همه پاسخ‌های بدست آمده

ضرایب دلخواه

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{+n}\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{+n}\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)}$$

اکنون ضرایب A_n و B_n را به کمک شرط مرزی بدست می‌آوریم.

$$u(R,\theta) = f(\theta) \Rightarrow A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R^{+n}\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right) = f(\theta)$$

ضرایب کسینوسی سری فوریه $f(\theta)$: $\underset{n\in\mathbb{N}}{R^{+n}A_n} = \frac{1}{\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \Rightarrow \boxed{\underset{n\in\mathbb{N}}{A_n} = \frac{1}{\pi R^{+n}}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta}$

مقدار متوسط $f(\theta)$: $A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(\theta)\,d\theta \Rightarrow \boxed{A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(\theta)\,d\theta}$

ضرایب سینوسی سری فوریه $f(\theta)$: $R^{+n}B_n = \frac{1}{\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \Rightarrow \boxed{\underset{n\in\mathbb{N}}{B_n} = \frac{1}{\pi R^{+n}}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta}$

پاسخ سوال ۳: (۲۰ نمره)

پتانسیل در داخل کره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

حال شرط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$U(a,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

حال طرفین را در $P_m(\cos\theta)\sin\theta$ ضرب و از صفر تا π انتگرال می‌گیریم. پس داریم:

$$\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)\sin\theta \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

انتگرال سمت راست فقط به ازای $n=m$ جواب دارد یعنی باید فقط جمله mام عبارت Σ را در نظر گرفت یعنی:

$$\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) A_m a^m P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \rightarrow$$

$$= \frac{2}{2m+1} A_m a^m \rightarrow A_m = \frac{2m+1}{2a^m}\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

بنابراین با داشتن $f(\theta)$ می‌توان ضریب مجهول تابع پتانسیل را به دست آورد.

پتانسیل در خارج کره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

حال شرط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$U(a,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

حال طرفین را در $P_m(\cos\theta)\sin\theta$ ضرب و از صفر تا π انتگرال می‌گیریم. پس داریم:

$$\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)\sin\theta \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

انتگرال سمت راست فقط به ازای $n=m$ جواب دارد یعنی باید فقط جمله mام عبارت Σ را در نظر گرفت یعنی:

$$\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) B_m a^{-(m+1)} P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{2m+1} B_m a^{-(m+1)} \rightarrow B_m = \frac{(2m+1)a^{m+1}}{2}\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

بنابراین می‌توان با داشتن $f(\theta)$ ضریب مجهول را به دست آورد.

ریاضی مهندسی

پاسخ تکلیف شماره ۶

نیم‌سال دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱

پاسخ سوال ۴: (۲۰ نمره)

$$\Phi(\varphi) = A\sin(k\varphi)$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow k\frac{\pi}{4} = n\pi \Rightarrow k = 4n$$

$$\Rightarrow r^2R'' + rR' - 16n^2R = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 4n \xrightarrow[\text{در ناحیه حل قرار دارد}]{r=0} \alpha = 4n$$

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=1} A_n \sin(4n\varphi)\, r^{4n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{4n}\sin(4n\varphi) = U_0 \Rightarrow A_n a^{4n} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} U_0 \sin(4n\varphi)\,d\varphi = \frac{2U_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\Rightarrow U(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_0(1-\cos n\pi)}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{4n}\sin(4n\varphi)$$

موفق باشید – خان چرلی