سوال ۱)

ابتدا شرایط مرزی را در یک راستا همگن سازی می کنیم.برای انجام این کار،به نوعی پاسخ مسئله را به دو بخش حالت پایدار و گذرا تبدیل می کنیم.

$$u(x,y) = \underbrace{v(x,y)}_{\text{حالت گذرا}} + \underbrace{w(x,y)}_{\text{حالت پایدار}}$$

با توجه به اینکه شرایط مرزی در راستای x ساده تر است،این راستا را برای همگن سازی شرایط مرزی استفاده می کنیم.

$$u(x,y) = v(x,y) + ax + b$$

$$u(0,y) = \underbrace{v(0,y)}_{0} + b \to y = 0 + b \to b = y$$

$$u(1,y) = \underbrace{v(1,y)}_{0} + a + b \to 1 = 0 + a + y \to a = 1 - y$$

$$u(x,y) = v(x,y) + (1-y)x + y$$

اکنون معادله حالت گذرا را پیدا می کنیم.با جایگذاری در معادله ی اصلی خواهیم داشت:

$$v_{xx} + v_{yy} = xy$$

$$u_y(x,y) = v_y(x,y) - x + 1$$

$$u_y(x,0) = v_y(x,0) - x + 1 \to \ \ v_y(x,0) = 2x - 1$$

$$u_y(x,1) = v_y(x,1) - x + 1 \to \ \ v_y(x,1) = 2x$$

پس معادله ی لاپلاس حالت گذرا را به همراه شرایط مرزی آن بازنویسی می کنیم:

$$v_{xx} + v_{yy} = xy; \quad 0 < x < 1 \ ; \ 0 < y < 1$$

$$\begin{cases} v(0,y) = 0 \\ v(1,y) = 0 \end{cases} , \begin{cases} v_y(x,0) = 2x - 1 \\ v_y(x,1) = 2x \end{cases}$$

از جواب حدسی استفاده می کنیم.با توجه به اینکه در راستای x شرایط مرزی همگن است،می توان نوشت:

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \sin(n\pi x)$$

با جایگذاری در معادله ی اصلی $v(x,y)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(G''_n(y)-(n\pi)^2G_n(y)\right)\sin(n\pi x)=xy$$

$$G''_n(y)-(n\pi)^2G_n(y)=2\int_0^1 xy\sin(n\pi x)\,dx\to G''_n(y)-(n\pi)^2G_n(y)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}y$$

$$G_n(y)=C_n\sinh(n\pi y)+D_n\cosh(n\pi y)+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}y$$

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sinh(n\pi y)+D_n\cosh(n\pi y)+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}y\right)\sin(n\pi x)$$

$$v_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\pi C_n\cosh(n\pi y)+n\pi D_n\sinh(n\pi y)+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}\right)\sin(n\pi x)$$

$$v_y(x,0)=2x-1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\pi C_n+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}\right)\sin(n\pi x)\to$$

$$n\pi C_n+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}=2\int_0^1(2x-1)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$C_n=-\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^4}+\frac{4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}+\frac{2(-1)^n-2}{(n\pi)^2}$$

$$v_y(x,1)=2x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\pi C_n\cosh(n\pi)+n\pi D_n\sinh(n\pi)+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}\right)\sin(n\pi x)$$

$$n\pi C_n\cosh(n\pi)+n\pi D_n\sinh(n\pi)+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}=2\int_0^1 2x\sin(n\pi x)\,dx$$

$$D_n=\frac{1}{n\pi\sinh(n\pi)}\left(\frac{4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}-\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}-n\pi C_n\cosh(n\pi)\right)$$

پس پاسخ مسئله به صورت زیر خواهد شد که در آن تمامی ضرایب مشخص هستند.

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sinh(n\pi y)+D_n\cosh(n\pi y)+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}y\right)\sin(n\pi x)+(1-y)x+y$$

سوال ۲)

ابتدا شرایط مرزی را در یک راستا همگن سازی می کنیم.برای انجام این کار،به نوعی پاسخ مسئله را به دو بخش حالت پایدار و گذرا تبدیل می کنیم.

$$u(x,y) = \underbrace{v(x,y)}_{\text{حالت گذرا}} + \underbrace{w(x,y)}_{\text{حالت پایدار}}$$

به نظر می رسد که شرایط مرزی در راستای y ساده تر است.لذا شرایط مرزی را در این راستا همگن سازی می کنیم.

$$u(x,y) = v(x,y) + ay + b$$

$$u(x,0) = \underbrace{v(x,0)}_{0} + b \to x = 0 + b \to b = x$$

$$u(x,\pi) = v(x,\pi) + a\pi + b \to 2 = 0 + a\pi + x \to a = \frac{2-x}{\pi} \to \ u(x,y) = v(x,y) + \left(\frac{2-x}{\pi}\right)y + x$$

اکنون معادله حالت گذرا را پیدا می کنیم.با جایگذاری در معادله ی اصلی خواهیم داشت:

$$v_{xx} + v_{yy} = x + 2y$$

$$u(0,y) = v(0,y) + \frac{2}{\pi}y \to \ \ v(0,y) = y\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$u(\pi,y) = v(\pi,y) + \left(\frac{2-\pi}{\pi}\right)y + \pi \to \ \ v(\pi,y) = \cos y - \pi - \left(\frac{2-\pi}{\pi}\right)y$$

پس معادله ی لاپلاس حالت گذرا را به همراه شرایط مرزی آن بازنویسی می کنیم:

$$v_{xx} + v_{yy} = x + 2y; \quad 0 < x < \pi \ ; \ 0 < y < \pi$$

$$\begin{cases} v(0,y) = y\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \\ v(\pi,y) = \cos y - \pi - \left(\frac{2-\pi}{\pi}\right)y \end{cases} , \ \begin{cases} v(x,0) = 0 \\ v(x,\pi) = 0 \end{cases}$$

از جواب حدسی استفاده می کنیم.با توجه به اینکه در راستای y شرایط مرزی همگن است،می توان نوشت:

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x) \sin ny$$

با جایگذاری در معادله ی اصلی $v(x,y)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n''(x) - n^2 G_n(x)\right) \sin ny = x + 2y$$

$$G_n''(x) - n^2 G_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+2y) \sin ny \, dy = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)$$

$$G_n(x) = C_n \sinh nx + D_n \cosh nx - \frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{x}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)$$

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sinh nx + D_n \cosh nx - \frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{x}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)\right) \sin ny$$

$$v(0,y) = y\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n - \frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)\right) \sin ny$$

$$D_n - \frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(y\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right) \sin ny \, dy = \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)$$

$$D_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\right)$$

$$v(\pi,y) = \cos y - \pi - \left(\frac{2-\pi}{\pi}\right) y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sinh n\pi + D_n \cosh n\pi - \frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{\pi}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)\right) \sin ny$$

$$\begin{aligned} C_n \sinh n\pi + D_n \cosh n\pi - \frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{\pi}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right) \\ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\cos y - \pi - \left(\frac{2-\pi}{\pi}\right) y\right) \sin ny \, dy \end{aligned}$$

با محاسبه ی عبارت بالا و جایگذاری مقدار D_n می توان مقدار C_n را نیز بدست آورد.بنابراین با داشتن این ضرایب می توان مقدار $u(x,y)$ را از رابطه ی زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned} u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sinh nx + D_n \cosh nx - \frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{x}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)\right) \sin ny \\ + \left(\frac{2-x}{\pi}\right) y + x \end{aligned}$$

سوال ۳)

ابتدا شرایط مرزی را در یک راستا همگن سازی می کنیم.برای انجام این کار،به نوعی پاسخ مسئله را به دو بخش حالت پایدار و گذرا تبدیل می کنیم.

$$u(x,y) = \underbrace{v(x,y)}_{\text{حالت گذرا}} + \underbrace{w(x,y)}_{\text{حالت پایدار}}$$

با توجه به اینکه شرایط مرزی در راستای x ساده تر است،این راستا را برای همگن سازی شرایط مرزی استفاده می کنیم.

$$u(x,y) = v(x,y) + ax + b$$

$$u(0,y) = \underbrace{v(0,y)}_{0} + b \to 0 = 0 + b \to b = 0$$

$$u(1,y) = \underbrace{v(1,y)}_{0} + a + b \to \cos y = 0 + a + 0 \to a = \cos y$$

$$u(x,y) = v(x,y) + x\, cos\, y$$

اکنون معادله حالت گذرا را پیدا می کنیم.با جایگذاری در معادله ی اصلی خواهیم داشت:

$$v_{xx} + v_{yy} = 1 + 2xy$$

$$u_y(x,y) = v_y(x,y) - xsin\, y$$

$$u_y(x,0) = v_y(x,0) - x\sin 0 \to \quad v_y(x,0) = x$$

$$u_y(x,\pi) = v_y(x,\pi) - x\sin\pi \to \quad v_y(x,\pi) = 2 + x$$

پس معادله ی لاپلاس حالت گذرا را به همراه شرایط مرزی آن بازنویسی می کنیم:

$$v_{xx} + v_{yy} = 1 + 2xy; \quad 0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < \pi$$

$$\begin{cases} v(0,y) = 0 \\ v(1,y) = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} v_y(x,0) = x \\ v_y(x,\pi) = 2 + x \end{cases}$$

از جواب حدسی استفاده می کنیم.با توجه به اینکه در راستای x شرایط مرزی همگن است،می توان نوشت:

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y)\sin(n\pi x)$$

با جایگذاری در معادله ی لاپلاس تابع $v(x,y)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(G''_n(y)-(n\pi)^2G_n(y)\right)\sin(n\pi x)=1+2xy$$

$$G''_n(y)-(n\pi)^2G_n(y)=2\int_0^1(1+2xy)\sin(n\pi x)\,dx=2\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}y\right)$$

$$G_n(y)=C_n\sinh(n\pi y)+D_n\cosh(n\pi y)-\frac{2}{(n\pi)^2}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}y\right)$$

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sinh(n\pi y)+D_n\cosh(n\pi y)-\frac{2}{(n\pi)^2}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}y\right)\right)\sin(n\pi x)$$

$$v_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\pi C_n\cosh(n\pi y)+n\pi D_n\sinh(n\pi y)+\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3}\right)\sin(n\pi x)$$

$$v_y(x,0)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\pi C_n+\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3}\right)\sin(n\pi x)\rightarrow$$

$$n\pi C_n+\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3}=2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx$$

$$C_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}-\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^4}$$

$$v_y(x,\pi)=2+x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\pi C_n\cosh(n\pi^2)+n\pi D_n\sinh(n\pi^2)+\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3}\right)\sin(n\pi x)$$

$$n\pi C_n\cosh(n\pi^2)+n\pi D_n\sinh(n\pi^2)+\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3}=2\int_0^1(2+x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$D_n=\frac{1}{n\pi\sinh(n\pi^2)}\left(2\left(\frac{2-2(-1)^n}{n\pi}+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)-\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3}-n\pi C_n\cosh(n\pi^2)\right)$$

پس پاسخ مسئله به صورت زیر خواهد شد که در آن تمامی ضرایب مشخص هستند.

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sinh(n\pi y)+D_n\cosh(n\pi y)-\frac{2}{(n\pi)^2}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}y\right)\right)\sin(n\pi x)$$
$$+\,x\cos y$$

سوال ۴)

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)\rightarrow\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\ddot{\Theta}(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda=k^2$$

$$\ddot{\Theta}(\theta)+k^2\Theta(\theta)=0\rightarrow\begin{cases}k\neq 0\rightarrow\Theta_k(\theta)=A_k\cos(k\theta)+B_k\sin(k\theta)\\ k=0\rightarrow\Theta_0(\theta)=A_0\theta+B_0\end{cases}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0\rightarrow\begin{cases}k=0\rightarrow R_0(r)=C_0\ln r+D_0\\ k\neq 0\rightarrow R_k(r)=C_kr^k+D_kr^{-k}\end{cases}$$

با جایگذاری شرایط مرزی داده شده:

$$u_\theta(r,0)=0\rightarrow R(r)\dot{\Theta}(0)=0\rightarrow\ \dot{\Theta}(0)=0\rightarrow A_0=0\,,B_k=0$$

$$u_\theta(r,\pi)=0\rightarrow R(r)\dot{\Theta}(\pi)=0\rightarrow\ \dot{\Theta}(\pi)=0\rightarrow A_kk\sin\,(k\pi)=0\rightarrow k\pi=n\pi\rightarrow k=n$$

$$\rightarrow\Theta(\theta)=\begin{cases}k\neq 0\rightarrow\Theta_n(\theta)=A_n\cos n\theta\\ k=0\rightarrow\Theta_0(\theta)=B_0\end{cases}$$

$$u(a,\theta)=0\rightarrow R(a)\Theta(\theta)=0\rightarrow R(a)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}R_0(a)=C_0\ln a+D_0=0\rightarrow D_0=-C_0\ln a\rightarrow R_0(r)=C_0\ln\left(\frac{r}{a}\right)\\ R_n(a)=C_na^n+D_na^{-n}=0\rightarrow D_n=-C_na^{2n}\rightarrow R_n(r)=C_n(r^n-a^{2n}r^{-n})\end{cases}$$

اکنون با مقادیر به دست آمده می توان نوشت:

$$u(r,\theta)=A_0\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(r^n-a^{2n}r^{-n})\cos n\theta$$

$$u(b,\theta)=A_0\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(b^n-a^{2n}b^{-n})\cos n\theta=f(\theta)$$

$$\rightarrow\begin{cases}A_0\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)d\theta\rightarrow A_0=\frac{1}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\\ C_n(b^n-a^{2n}b^{-n})=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta\,d\theta\rightarrow C_n=\frac{-2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n(b^n-a^{2n}b^{-n})}\end{cases}$$

سوال ۵)

$$F(u_{xx})=2\left[(n-1)^{n+1}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}e^{-3t}\right)+n\left(\frac{1}{8}e^{-8t}-\frac{1}{8}\right)\right]-n^2U(n,t)$$

$$F(u_t)=U_t(n,t)$$

$$F(\cos(at)\, e^{-2ax}) = 2n\pi\ \frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2a}}{n^2\pi^2+4a^2}$$

$$U_t(n,t) = a\left[2\left[n(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}e^{-3t}\right)+n\ \left(\frac{1}{8}e^{-8t}-\frac{1}{8}\right)\right]-n^2U(n,t)\right]+c_n$$

$$U_t(n,t)+n^2aU(n,t) = \frac{-an}{4}(1+(-1)^n)+\frac{an}{4}e^{-8t}+\frac{an}{4}(-1)^ne^{-3t}+c_n$$

$$U(n,t) = A_ne^{-n^{2at}}-\frac{1}{4n}(1+(-1)^n)+\frac{an}{4(-8+n^2a)}\ e^{-8t}$$
$$-\frac{an}{(4(-3+n^{2a})}\ e^{-3t}-\frac{c_n}{n^2a}$$

$$U(n,0)=0 \rightarrow A_n = \frac{1}{4n}(1+(-1)^n)-\frac{an}{4(-8+n^2a)}-\frac{an}{(4(-3+n^{2a})}-\frac{c_n}{n^2a}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U(n,t)\sin(n\pi x)$$

سوال۶)

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-\left(s^2U(x,s)-su(x,0)-\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right)=\frac{4}{s+2}$$
$$\rightarrow \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-s^2U(x,s)=\frac{4}{s+2}-sx$$

$$U_h(x,s) = Ae^{st}+Be^{-st}, U_p(x,s) = C$$

$$-s^2C = \frac{4}{s+2}-sx \rightarrow C = \ -\frac{4}{s^{2(s+2)}}+\frac{x}{s}=\frac{1+x}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2}$$

$$U(x,s) = Ae^{st}+Be^{-st}+\frac{1+x}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2}$$

$$U(0,s) = \frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2} \rightarrow A+B+\frac{1}{s}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2}$$

$$A+B = 0$$

$$U(2,s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2} \rightarrow A = B = 0$$

$$u(x,t) = 1 + x - 2t - e^{-2t}; t > 0$$