به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره ۶

دستیار آموزشی این مجموعه: امیرحسین علیزاد

aalizad79@gmail.com

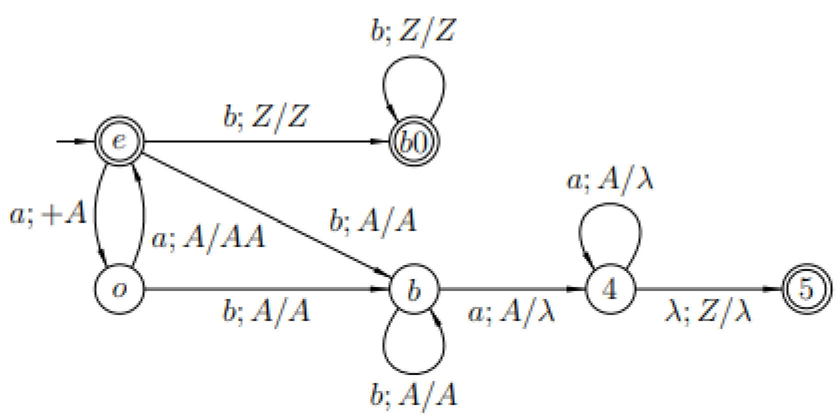
تاریخ تحویل : پایان روز ۱ آذر

---

1) برای زبان های زیر PDA متناظر آن را رسم کنید.

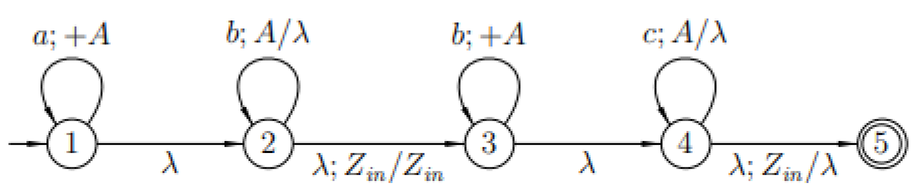
a) $L_1 = \{a^n b^m a^n | n, m \in N\}$

3 حالت در نظر می گیریم: ورودی تنها از a تشکیل شده باشد، ورودی تنها از b تشکیل شده باشد، و ورودی شامل a و b باشد.



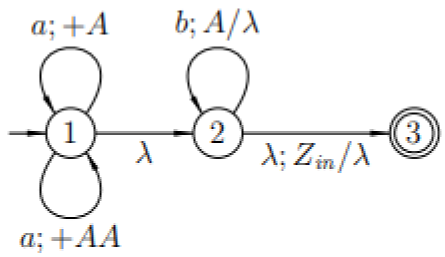
b) $\{a^i b^j c^k | i, j, k \in N, i + k = j\}$

ابتدا زبان را به صورت $a^i b^i b^j c^j$ می نویسیم(چرا؟). سپس اتوماتای زیر را برای این زبان ارائه می دهیم.



c) $\{ a^n b^m \mid n \le m \le 2n \}$

به ازای هر a به صورت non-deterministic یک یا دو نماد a روی استک می گذاریم و به اضای هر b یک نماد از روی استک برمیداریم.



2) یک DFA معادل PDA خواسته شده ارائه دهید و در صورتی این مورد امکان پذیر نیست پاسخ خود را توجیه کنید.

$$M = (\{q0,\ q1\},\ \{a,\ b\},\{z\},\ \sigma,\ q0,\ z,\ \{q1\})$$

به طوری که

$$\sigma(q0,\ a,\ z) = \{(q1,\ z)\}$$
$$\sigma(q0,\ b,\ z) = \{(q0,\ z)\}$$
$$\sigma(q1,\ a,\ z) = \{(q1,\ z)\}$$
$$\sigma(q1,\ b,\ z) = \{(q0,\ z)\}$$

با اندکی توجه می توان متوجه شد که این اتوماتا از استک استفاده ای نمی کند، و بنابراین یک زبان است که می توان transition های آن را به این صورت نوشت:

$$\sigma(q0,\ a) = \{q1\}$$
$$\sigma(q0,\ b) = \{q0\}$$
$$\sigma(q1,\ a) = \{q1\}$$
$$\sigma(q1,\ b) = \{q0\}$$

با توجه به تعریف، استیت نهایی q1 است و این زبان، شامل تمام رشته هایی است که به a ختم می شوند.

3) زبانی که توسط PDA مورد پذیرش است را مشخص کنید.

$$M = (\{q0, q1, q2\}, \{a, b\}, \{a, b, z\}, \delta, q0, z, \{q2\})$$

به طوری که

$$\sigma(q0, a, z) = \{(q1, a), (q2, \epsilon)\}$$
$$\sigma(q1, b, a) = \{(q1, ab)\}$$
$$\sigma(q1, b, a) = \{(q1, b)\}$$
$$\sigma(q1, a, b) = \{(q2, \epsilon)\}$$

در این اتوماتا، تبدیل از q0 به q2 تنها با یک a قابل انجام است. راه دیگری برای رسیدن از q0 به q2 خواندن یک a به همراه یک b یا بیشتر است که در نهایت با یک a به q2 می رسد. تنها از این 2 حالت به استیت نهایی که q2 است می توان رسید. زبان مورد نظر به صورت زیر است:

$$L = \{a\} \cup (abb * a)$$

4) برای زبان زیر PDA با حداکثر 2 حالت رسم کنید.

$$L = \{a^n b^{n+1} | n \geq 0\}$$

این زبان را به فرم گرامر آن می نویسیم:

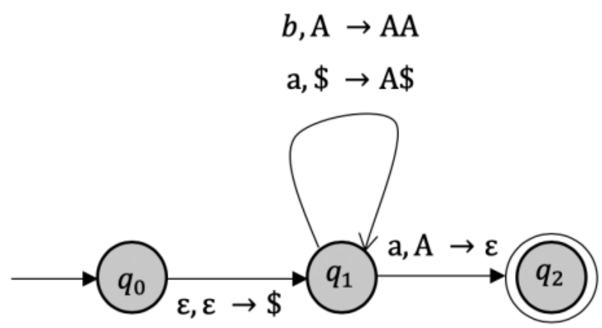
$S \rightarrow aSB|b$

$B \rightarrow b$

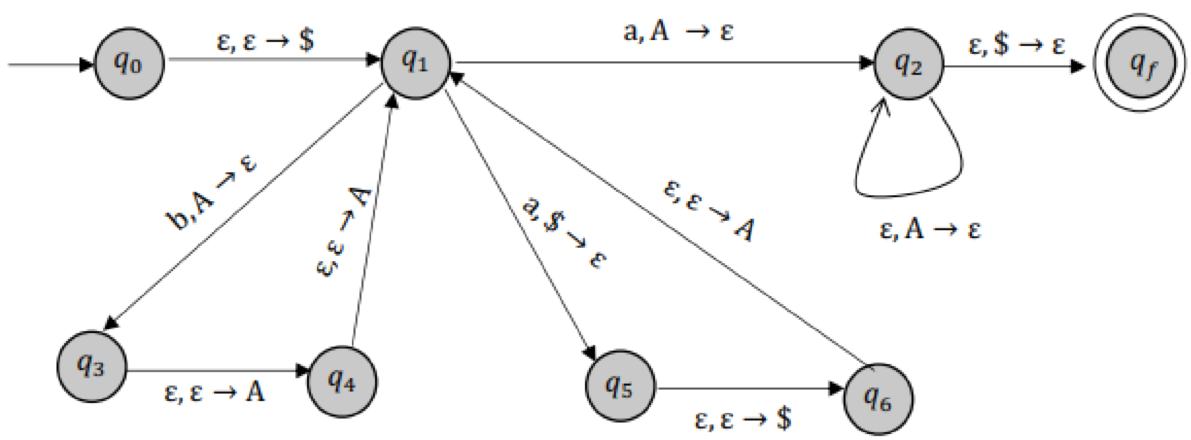
PDA این زبان را به کمک 2 استیت q0 و q1 تبدیل می کنیم که q1 استیت نهایی است.در این PDA علامت z علامت کمکی است که در ابتدا در استک وجود دارد.

$$\sigma(q0, \epsilon, z) = \{(q0, Sz)\}$$
$$\sigma(q0, a, S) = \{(q0, SB)\}$$
$$\sigma(q0, b, S) = \{(q0, \epsilon)\}$$
$$\sigma(q0, b, B) = \{(q0, \epsilon)\}$$
$$\sigma(q0, \epsilon, z) = \{(q1, \epsilon)\}$$

5) PDA زیر را به گرامر متناظرش تبدیل کنید.



برای تبدیل PDA به گرامر از روند توضیح داده شده در لم 2.27 از کتاب sipser استفاده می کنیم. ابتدا PDA را تغییر می دهیم به شکلی که قبل از قبول رشته استک را خالی کند و همچنین هر گذار یا تنها یک سمبل به استک پوش کند و یا تنها یک سمبل از استک پاپ کند و این دو کار را همزمان انجام ندهد. در نهایت به PDA زیر می رسیم.



در ادامه طبق اثبات لم قواعد گرامر را تعریف می کنیم:

start variable: A_{q0qf}

1. For each p,q,r,s ∈ Q, u ∈ Γ, and a,b ∈ Σε, if δ(p,a,ε) contains (r,u) and δ(s, b, u) contains (q, ε), put the rule Apq → aArsb in G.

مقدار U	گذاری که u را پوش می‌کند	گذاری که u را پاپ می‌کند	قاعده گرامر متناظر
$\$$	$q0 \rightarrow q1$	$q2 \rightarrow qf$	$A_{q_0q_f} \rightarrow A_{q_1q_2}$
$\$$	$q0 \rightarrow q1$	$q1 \rightarrow q5$	$A_{q_0q_5} \rightarrow A_{q_1q_1}a$
$\$$	$q5 \rightarrow q6$	$q2 \rightarrow qf$	$A_{q_5q_f} \rightarrow A_{q_6q_2}$
$\$$	$q5 \rightarrow q6$	$q1 \rightarrow q5$	$A_{q_5q_5} \rightarrow A_{q_6q_1}a$
A	$q3 \rightarrow q4$	$q1 \rightarrow q3$	$A_{q_3q_3} \rightarrow A_{q_4q_1}b$
A	$q3 \rightarrow q4$	$q1 \rightarrow q2$	$A_{q_3q_2} \rightarrow A_{q_4q_1}a$
A	$q3 \rightarrow q4$	$q2 \rightarrow q2$	$A_{q_3q_2} \rightarrow A_{q_4q_2}$
A	$q4 \rightarrow q1$	$q1 \rightarrow q3$	$A_{q_4q_3} \rightarrow A_{q_1q_1}b$
A	$q4 \rightarrow q1$	$q1 \rightarrow q2$	$A_{q_4q_2} \rightarrow A_{q_1q_1}a$
A	$q4 \rightarrow q1$	$q2 \rightarrow q2$	$A_{q_4q_2} \rightarrow A_{q_1q_2}$
A	$q6 \rightarrow q1$	$q1 \rightarrow q3$	$A_{q_6q_3} \rightarrow A_{q_1q_1}b$
A	$q6 \rightarrow q1$	$q1 \rightarrow q2$	$A_{q_6q_2} \rightarrow A_{q_1q_1}a$
A	$q6 \rightarrow q1$	$q2 \rightarrow q2$	$A_{q_6q_2} \rightarrow A_{q_1q_2}$

سپس طبق مدل دوم قواعد را می نویسیم:

2. For each p, q, r ∈ Q , put the rule Apq →AprArq in G.

در این مرحله قواعد زیر که تعداد زیادی هستند و ما به صورت نمادی آن هارا نوشته ایم تولید می شوند.

$$\forall i,\ j,\ k:\ A_{qiqj} \rightarrow A_{qjqk}$$

$$i,\ j,\ k\ are\ distinct\ and\ q_i,\ q_j,\ q_k \in Q$$

در نهایت طبق مدل سوم قواعد را می نویسیم:

3. Finally, for each p∈Q, put the rule App →ε in G.

که در نتیجه آن قواعد زیر تولید می شوند.

$$A_{q1q1} \rightarrow \epsilon$$

$$A_{q3q3} \rightarrow \epsilon$$

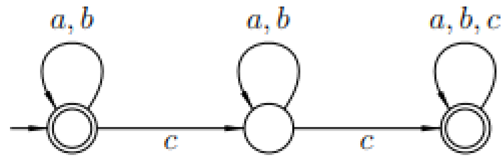
$$A_{q5q5} \rightarrow \epsilon$$

6) با رسم یک PDA ثابت کنید که زبان زیر مستقل از متن است.

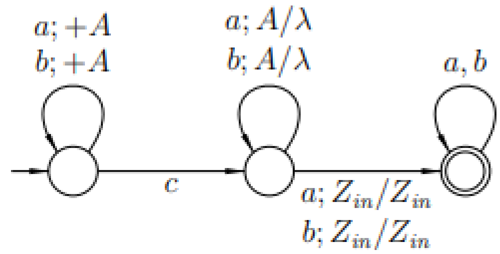
$$L = \{ w \in \{a,\ b,\ c\} \mid w \textit{ is not in the form of } L'cL' \textit{ where } L' \in \{a, b\}^* \}$$

زبان را به صورت اجتماعی از زبان های زیر می نویسیم:

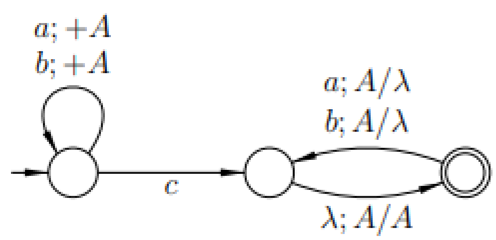
$L1 = \{ w \in \{a,\ b,\ c\}* \mid \#c(w) \neq 1\}$



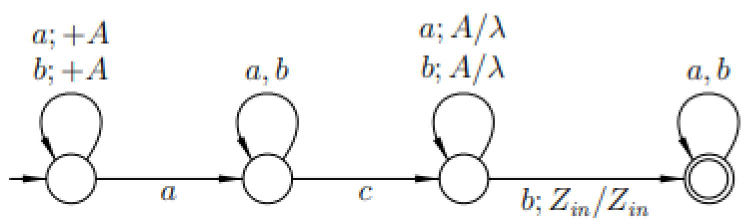
$L2 = \{ x1cx2 \mid x1,\ x2 \in \{a,\ b\}*,\ |x1| < |x2| \}$



$L3 = \{ x1cx2 \mid x1,\ x2 \in \{a,\ b\}*,\ |x1| > |x2| \}$



$L4 = \{ x1ay1cx2by2 \mid x1,\ x2,\ y1,\ y2 \in \{a,\ b\}*,\ |x1| = |x2| \}$



و در نهایت L5 که مانند L4 است اما رشته های آن به فرم $x1by1cx2ay2$ هستند. با اجتماع تمامی این PDA ها و پیوند دادن آن ها توسط استیت آغازین جدید q0 و گذار $(q0,\ \epsilon,\ z) \rightarrow (q,\ z)$ می توان PDA مد نظر را ایجاد کرد.

7) (امتیازی*) با استفاده از PDA نشان دهید که زبان های مستقل از متن تحت عملگر * بسته هستند.

فرض کنیم که یک PDA برای زبان L داریم و می خواهیم PDA برای زبان *L بکشیم. به ازای یک ورودی x باید بتوانیم x را به زیر رشته های xn...x1x2 تبدیل کنیم به صورتی که xi توسط L پذیرفته شود. پس PDA ای که می سازیم به این صورت است که به صورت غیر قطعی مرز بین این زیر رشته ها را تشخیص می دهد. هنگامی که مرز تشخیص داده شد، چک می کند که این زیر رشته توسط L پذیرفته شود. سپس استک را خالی کرده و به استیت اولیه می رود و همین مراحل را تکرار می کند.