به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- پاییز ۱۴۰۱

پاسخ تمرین شماره 3

دستیار آموزشی این مجموعه: سپهر آزردار
sepehr81sepehr@gmail.com

تاریخ تحویل : ۱۴۰۱/۸/۸ (8آبان)

---

1) ثابت کنید زبان های زیر نامنظم اند.

a) $w = \{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$

b) $w = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k\}$

c) $w = \{s\,s\,s \mid s \in \{a, b\}^*\}$

پاسخ

a)

a) $w = \{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$

1. devil: picks p

2. you: $0^{2P} 1^p$

3.devil: $0^{2P} 1^p = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y|$!= 0 => $x = 0^l$, $y = 0^j$

4. you: i = 0 => $xy^iz = xz$ =>

از انجایی که y اندازه اش 0 نیست. پس قطعا از مقدار 0 ها کم میشود و فقط از 0 ها کم میشود. پس دیگر تعداد 0 ها 2 برابر 1 ها نیست و رشته عضو L نیست. پس نامنظم است.

b)

b) $w = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k\}$

1. devil: picks p

2. you: $w = a^p b^p c^{2p}$, $|w| \geq p$

3.devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y|$!= 0 => $x = a^l$, $y = a^u$

4. you: i = 0 => $xy^iz = xz$ =>

در نتیجه مانند بالا، با حذف y، قطعا و فقط تعدادی a، حذف میشوند و رابطه بین a,b,c بهم میخورد بنابراین نامنظم است.

c)

c) $w = \{s\,s\,s \mid s \in \{a, b\}^*\}$

1. devil: picks p

2. you: $w = a^p b^p a^p b^p a^p b^p$, $|w| \geq p$

3.devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y|$!= 0 => $x = a^l$, $y = a^u$

4. you: I = 0 => $xy^iz = xz$ =>

در نتیجه مانند بالا، با حذف y، قطعا و فقط تعدادی a، حذف میشوند و رشته جدید عضو زبان نیست، بنابراین نامنظم است.

2) منظم بودن یا نبودن زبانهای زیر را مشخص کنید.(پاسخ خود را اثبات کنید)

$L = \{a^k \mid \exists i \geq 0, k = 2^i\}$

$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) - n_b(w) = 1\}$

$L = \{a^m b^a n \mid n \equiv m \pmod 5 \text{ and } n, m \geq 0\}$

پاسخ:

$L = \{a^k \mid \exists i \geq 0, k = 2^i\}$

1. devil: picks p
2. you: w =a^(2^p) , |w|≥ p
3.devil: w = xyz , |xy| ≤ p, |y| != 0 => $x = a^l$, $y = a^u$
4. you: I = 2 => xy^2z = a^(2^p+u)

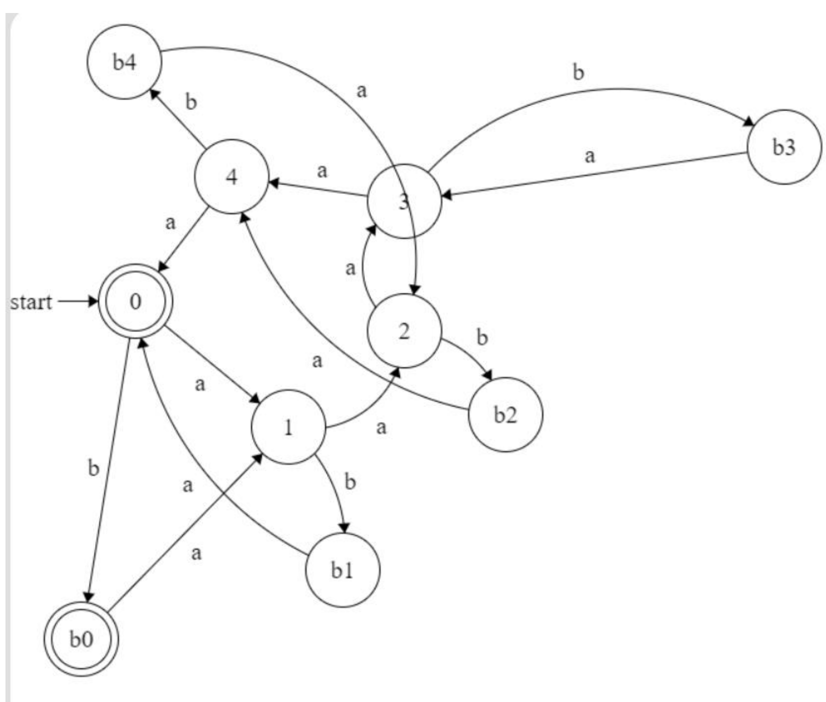
از آنجایی که اندازه رشته جدید از قبلی بزرگتر است پس، رشته جدید باید حداقل سایزی برابر با، اولین رشته بزرگتر از W داشته باشد که در واقع چون همه رشته ها عضو زبان توانی از 2 هستند پس رشته بعدی(از لحاظ سایز) دوبرابر رشته قبلی است. ازطرفی u، که در واقع اندازه y میباشد بین 1 تا p هست و ما میدانیم که همواره (به ازای p≥0) $2^p > p$
پس همواره 2^p+u از $2^{(p+1)}$ پس رشته جدید عضو زبان نمیباشد و در نتیجه زبان نامنظم است.

$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) - n_b(w) = 1\}$

1. devil: picks p
2. you: w =$a^p b^{p-1}$, |w|≥ p
3.devil: w = xyz, |xy| ≤ p , |y| != 0 => $x = a^l$, $y = a^u$
4. you: i = 0 => xz =>

در نتیجه با حذف y، قطعا و فقط تعدادی a، حذف میشوند و اختلاف بین a,b بیشتر از 1 میشود ، بنابراین نامنظم است.

$L = \{a^m b a^n \mid n \equiv m \pmod 5 \text{ and } n, m \geq 0\}$



3) منظم بودن یا نبودن زبان زیر را مشخص کنید.(پاسخ خود را اثبات کنید)

$L = \{0^k 1s 0^K \mid k \geq 1 \text{ and } s \in \{0, 1\}^* \}$

پاسخ:

$L = \{0^k 1s 0^K \mid k \geq 1 \text{ and } s \in \{0, 1\}^* \}$

1. devil: picks p
2. you: $w = 0^p\ 1\ 1\ 0^p$, $|w| \geq p$, $(s = 1)$
3.devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y|$!= 0 => $x = 0^l$, $y = 0^u$
4. you: $i = 0$ => $w` = xz$ =>

در نتیجه با حذف y، قطعا و فقط تعدادی0، حذف میشوند و در نتیجه تعداد 0 ها قبل از 1، با 0 های اخر رشته برابر نیست .بنابراین رشته جدید عضو زبان نیست. پس زبان نامنظم است.

4) ثابت کنید کنید زبان های زیر نامنظم اند.

$L = \{a^k \mid k \text{ is perfect square}\}$ (رشته هایی که طولشان برابر با یک عدد مربع کامل میباشد)

$L = \{a^p \mid p \text{ is a prime number}\}$(رشته هایی که طولشان یک عدد اول است)

پاسخ:

$L = \{a^k \mid k \text{ is perfect square}\}$

1. devil: picks p
2. you: w =a^(p^2) , $|w| \geq p$
3.devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y|$!= 0 => $x = a^l$, $y = a^u$
4. you: $i = 2$ => $w` = xy^2z$ =>

$$|w`| \leq P^2 + p < (p + 1)^2$$

اندازه w` بزرگتر از w است ولی به اندازه اولین رشته بزرگتر از w نمیرسد چون حداکثر سایز y، pمیباشد که در اون صورت حداکثر اندازه w` برابر با P^2+pمیشود که باز هم از سایز رشته بعدی عضو زبان کوچک تر است پس زبان داده شده نامنظم میباشد.

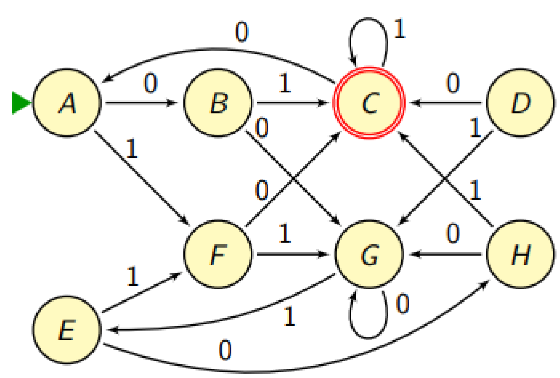
$L = \{a^p \mid p \text{ is a prime number}\}$

1. devil: picks p
2. you: $w = a^p$, $|w| \geq p$
3.devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y|$!= 0 => $x = a^l$, $y = a^u$ => $|y| = u$;
4. you: $i = p+1$ => $w` = xy^{p+1}z$ => $|w`| = |xyz| + |y^p| = p + u*p = p(u+1)$;

در نتیجه رشته جدید حاصل ضرب دو عدد بزرگتر از 1 است پس عدد اول نیست و عضو زبان نیستو پس زبان نامنظم است.

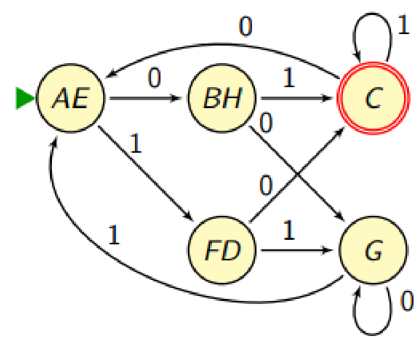
5) DFA های داده شده را کمینه کنید.

الف)

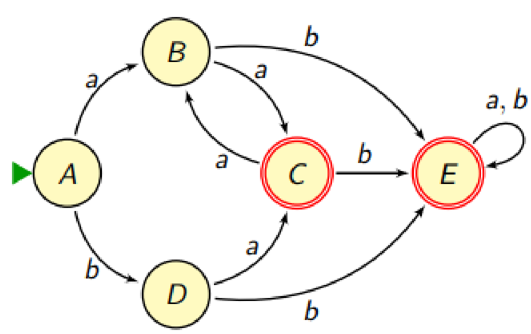


پاسخ:

A							
*	B						
*	*	C					
*	*	*	D				
A0	*	*	*	E			
*	*	*	A2	*	F		
*	*	*	*	*	*	G	
*	A1	*	*	*	*	*	H

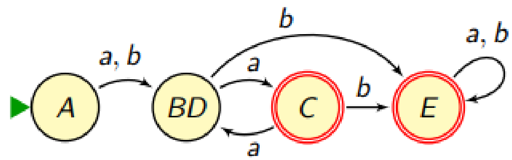


ب)

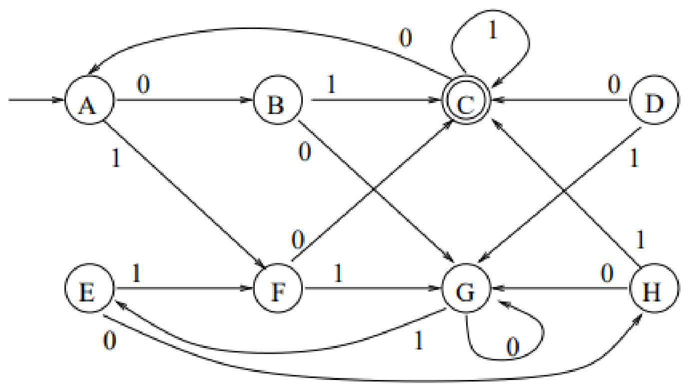


پاسخ:

A				
*	B			
*	*	C		
*	A0	*	D	
*		*	*	E

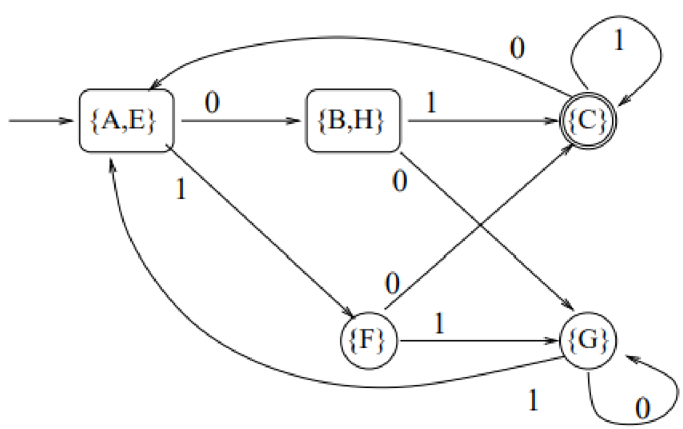


پ)



پاسخ:

A							
*	B						
*	*	C					
*	*	*	D				
A0	*	*	*	E			
*	*	*	*	*	F		
*	*	*	*	*	*	G	
*	A1	*	*	*	*	*	H



*6)(امتیازی)زبان نامتناهی و منظم L داده شده است L .را با عدد طبیعی k جور میگوییم اگر بتوان kزبان منظم نامتناهی پیدا کرد که دوبدو جدا از هم باشند(اشتراکی نداشته باشند) و اجتماعشان Lرا بدهد. ثابت کنید L با بی نهایت عدد طبیعی جور است

پاسخ)

لم:

اگر L زبانی منظم باشد. K عددی طبیعی و L_i مجموعه رشته های موجود در Lباشد که طولشان به پیمانه ی k برابر i باشد، L_i منظم است.
اثبات: اگر D یک DFA برای L باشد، kکپی از آن ایجاد میکنیم و در k دسته قرار میدهیم دسته های (0,1,...,k-1)حال ارتباط بین استیت هارا به این شکل تنظیم میکنیم که مثال اگر در دسته ی i ام بودیم و در استیت qj ، با دیدن کاراکتر a به استیت qj+1 در دسته ی i+1ام میرویم. i+1 را به پیمانه ی k بگیرید(توجه کنید که qj+1 همان استیت متناظر در D است که اگر در qj بودیم با دیدن a به آن میرفتیم .) حال استیت های پایانی را در DFA جدید استیت های پایانی متناظر D در دسته ی i ام در نظر میگیریم و به این ترتیب تنها رشته هایی که طولشان به پیمانه ی k برابر i است توسط این زبان پذیرفته میشوند و از طرفی تمامی این رشته ها در این زبان وجود دارند. بنابراین لم اثبات شد .در ادامه از ایده ی اصلی موجود برای lemma pumping استفاده میکنیم. فرض کنید xyz یک رشته در زبان است که در آن y تشکیل یک لوپ میدهد.(با توجه به این که زبان نامتناهی است قطعا چنین لوپی وجود دارد.) بنابراین تمام رشته های به فرم xy^iz هم در این زبان خواهند بود که طولشان به فرم |xz| + i|y| است که i عددی بزرگتر مساوی 0 است.(|xz| = a , |y| = b) حال سعی میکنیم یک عدد مناسب مثل q پیدا کنیم که دنباله ی فوق از همه ی باقی مانده های ممکن برای q به تعداد نامتناهی تولید کند و به این ترتیب با توجه به لم ابتدای سوال هر کدام از زبان های تولید شده متناظر با هر باقی مانده هم نامتناهی شود و هم منظم.(توجه کنید که k باید بزرگ تر از a,bباشد و همین طور نسبت به b اول باشد.).برای این امر کافی است که kرا عددی اول و بزرگ تر از b,a,بدهیم. بدین ترتیب b,a نسبت به kاول میشوند و دنباله ی حسابی فوق همه ی باقی مانده های ممکن برای k را به تعداد نامتناهی تولید میکند