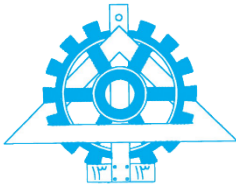


به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - پاییز ۱۴۰۱

پاسخ تمرین شماره ۲

دستیار آموزشی این مجموعه: پریا خوش‌تاب

paria.khoshtab2019@gmail.com



تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۸/۱

1) برای هر یک از زبان‌های زیر عبارت منظم بنویسید. (30 نمره)

الف) رشته‌هایی که شامل زیررشته aaa نمی‌باشند. ($\Sigma = \{a, b\}$)

پاسخ به دو صورت قابل بیان است:

$$(\varepsilon + a + aa)(b(\varepsilon + a + aa))^*$$

$$(b + ab + aab)^*(\varepsilon + a + aa)$$

ب) رشته‌هایی که تعداد a های متوالی در آن‌ها، مضرب 3 می‌باشند. ($\Sigma = \{a, b, c\}$)

$$(b + c)^*(aaa(b + c)^*)^*$$

ج) رشته‌هایی که شامل دقیقاً یک aa یا دقیقاً یک bb می‌باشند. ($\Sigma = \{a, b\}$)

$$(\varepsilon + b)(ab)^*aa(ba)^*(\varepsilon + b) + (\varepsilon + a)(ba)^*bb(ba)^*(\varepsilon + a)$$

د) رشته‌هایی که تمام اندیس‌های فرد آن‌ها (با فرض شروع اندیس‌ها از 1) a می‌باشند. ($\Sigma = \{a, b\}$)

$$(a(a + b)^*)^*(\varepsilon + a)$$

ه) رشته‌هایی که شامل زیررشته bba نمی‌باشند. ($\Sigma = \{a, b\}$)

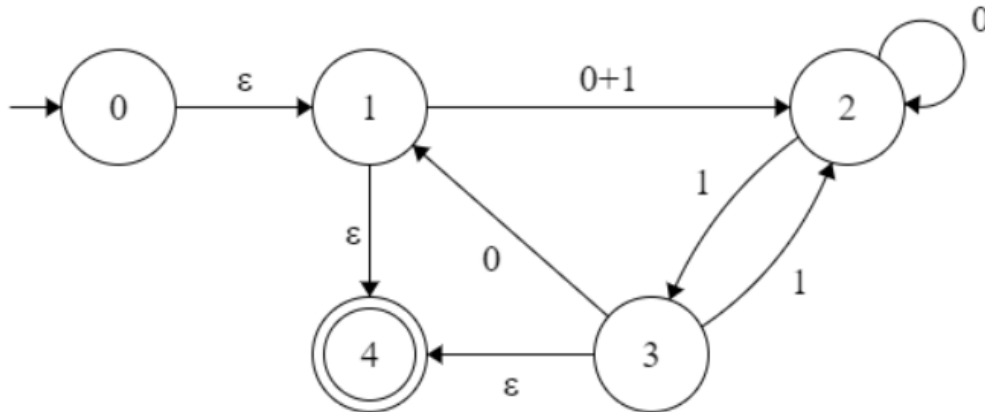
$$(a + ba)^*b^*$$

و) (امتیازی) رشته‌هایی که شامل دقیقاً دو زیررشته aa می‌باشند. ($\Sigma = \{a, b\}$)

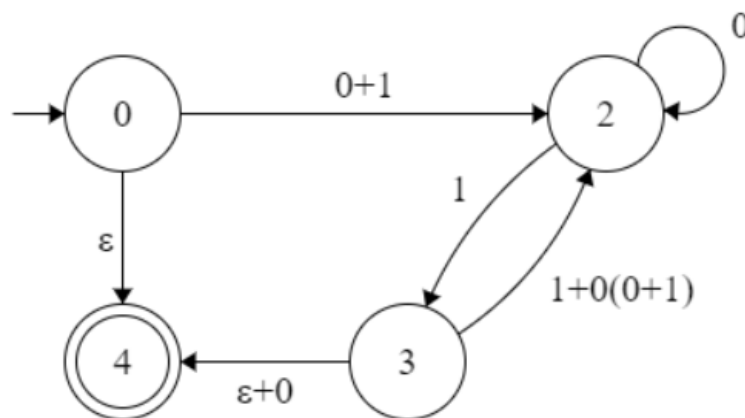
$$(b + ab)^*aaa(b + ba)^* + (b + ab)^*aab(b + ab)^*aa(b + ba)^*$$

2) عبارت منظم متناظر با هر یک از NFA های زیر را بنویسید و مراحل تبدیل و حذف هر state را نیز رسم کنید. (30 نمره)

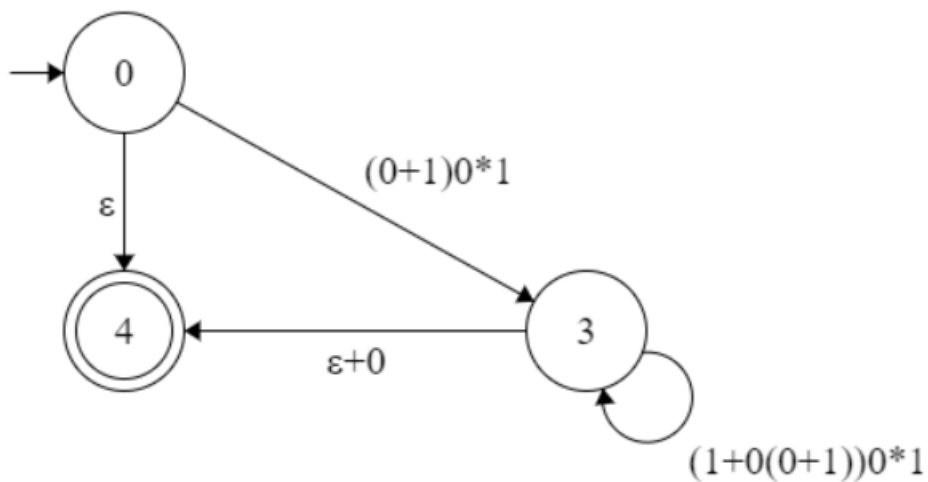
الف) ابتدا تبدیل به GNFA را انجام می‌دهیم:



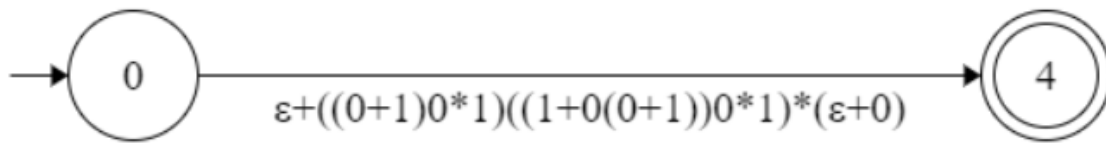
سپس استیت 1 را حذف می‌کنیم:



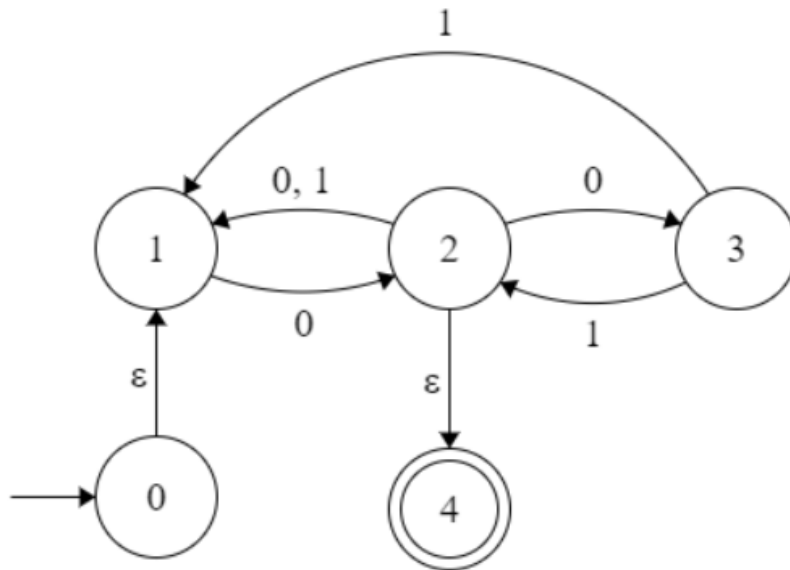
سپس استیت 2 را حذف می‌کنیم:



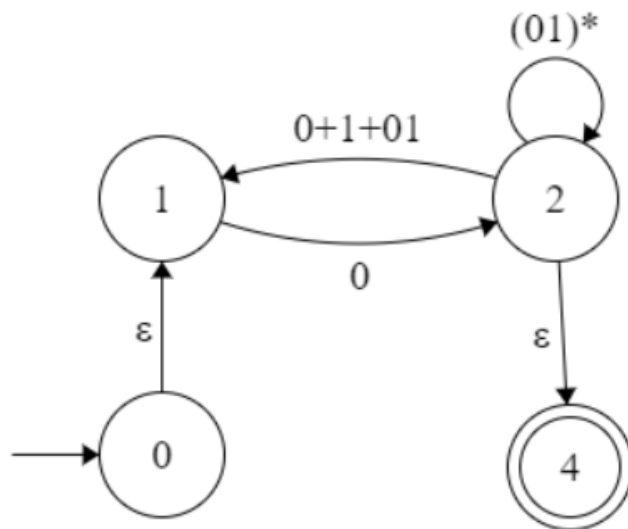
سپس استیت 3 را حذف می‌کنیم:



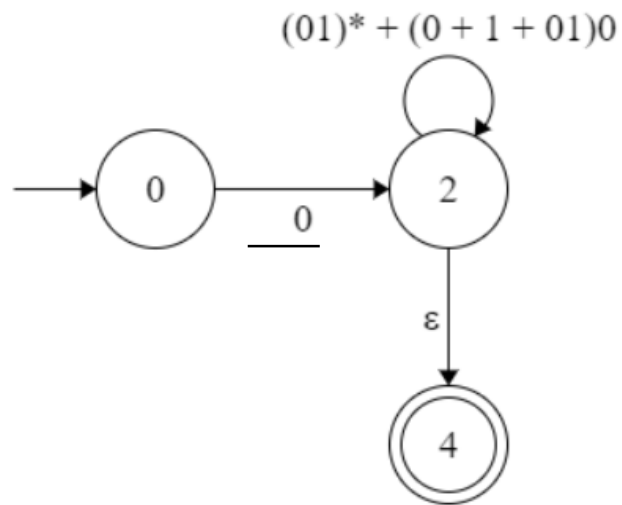
ب) ابتدا تبدیل به GNFA را انجام می‌دهیم:



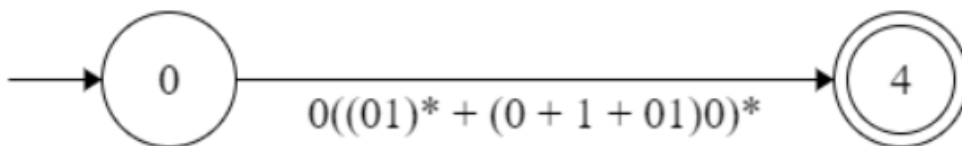
سپس استیت 3 را حذف می‌کنیم:



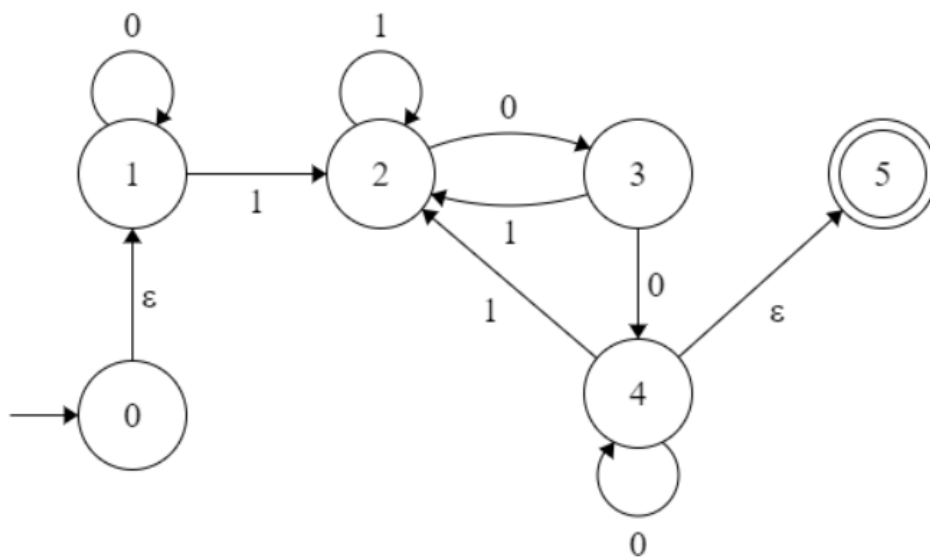
سپس استیت 1 را حذف می‌کنیم:



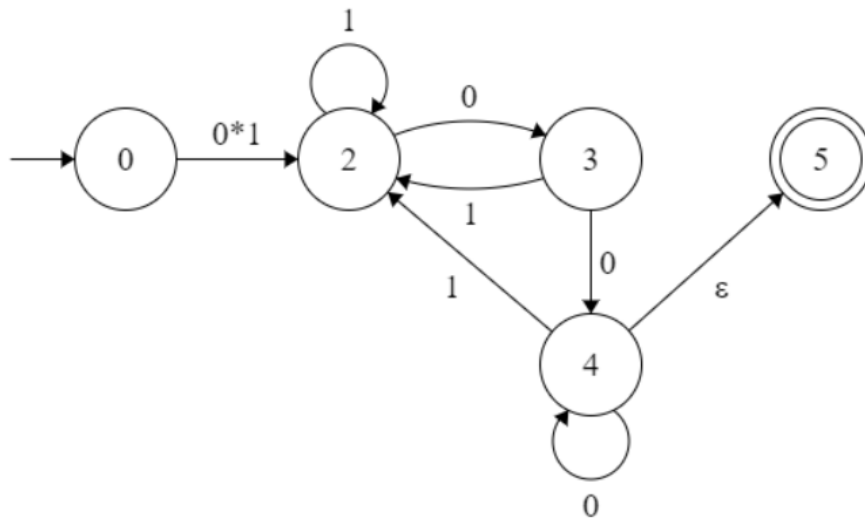
سپس استیت 2 را حذف می‌کنیم:



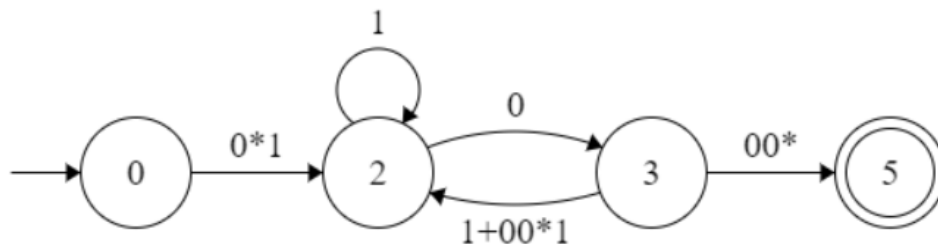
ج) ابتدا تبدیل به GNFA را انجام می‌دهیم:



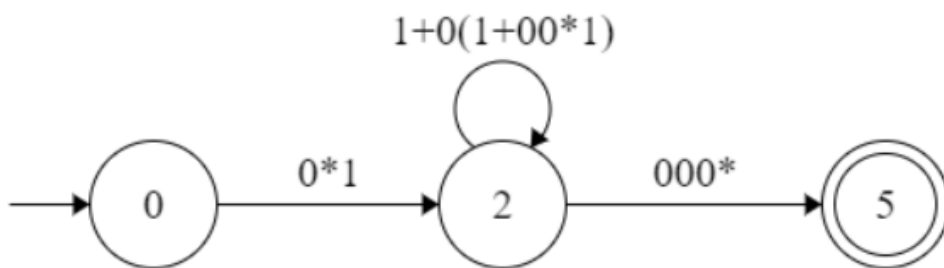
سپس استیت 1 را حذف می‌کنیم:



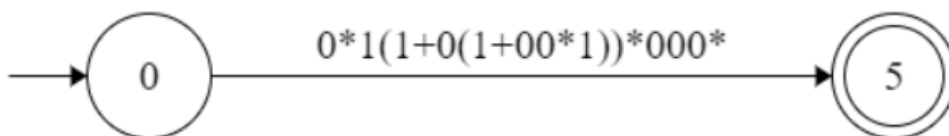
سپس استیت 4 را حذف می‌کنیم:



سپس استیت 3 را حذف می‌کنیم:

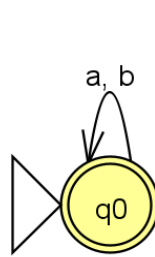


سپس استیت 2 را حذف می‌کنیم:

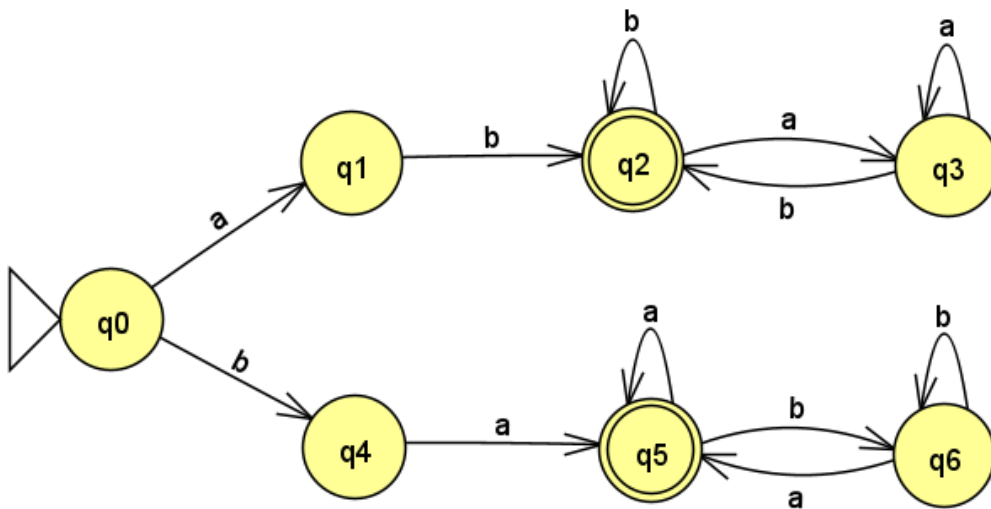


3) برای عبارات منظم زیر DFA رسم کنید. (20 نمره) (استیت Trap به منظور ساده‌سازی رسم نشده است)

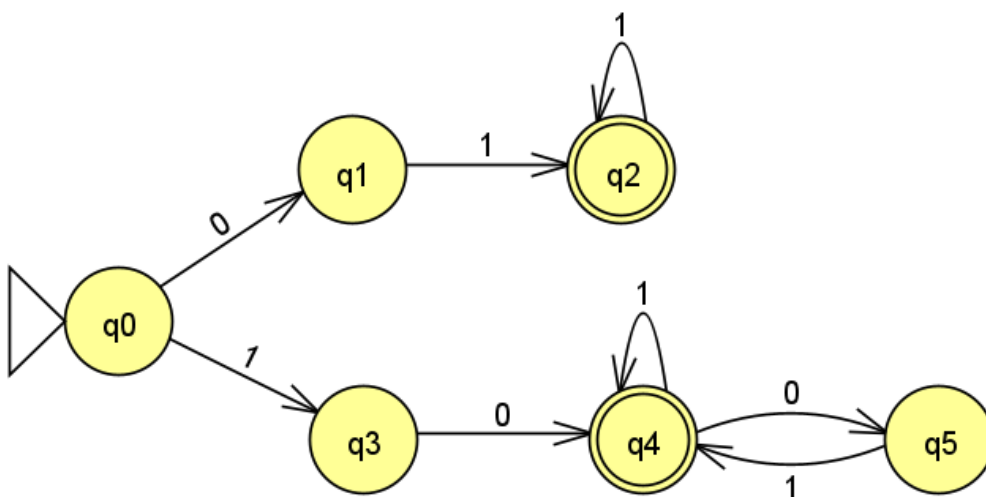
الف) $(a^*b^* + ba)^*$



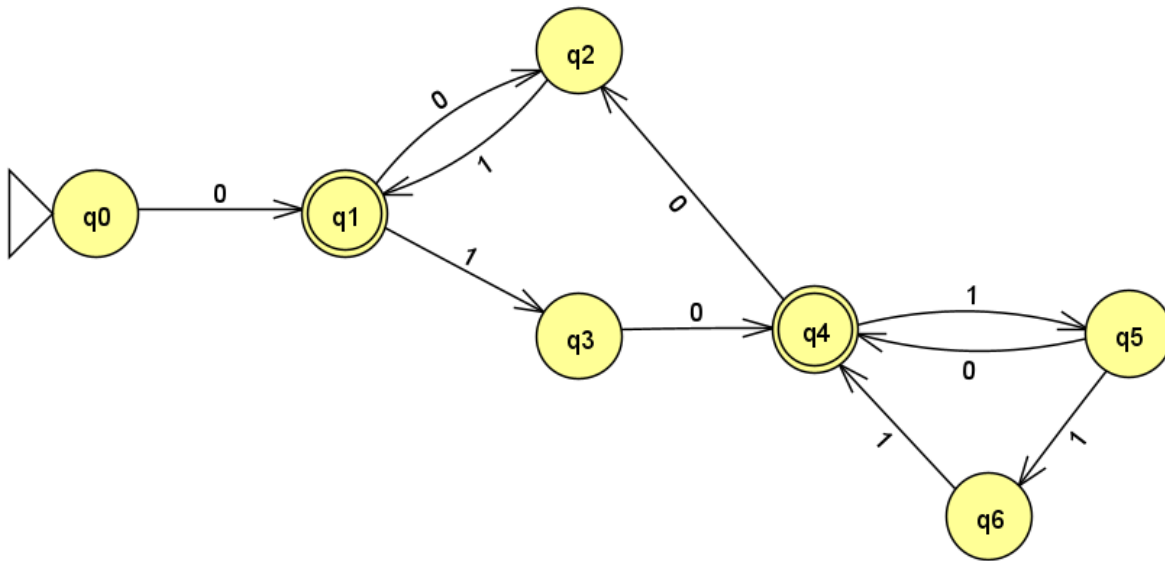
ب) $ab(a^*b)^* + ba(b^*a)^*$



ج) $011^* + 10(1 + 01)^*$



د) (امتیازی) $0(10(111)^* + 01)^*$



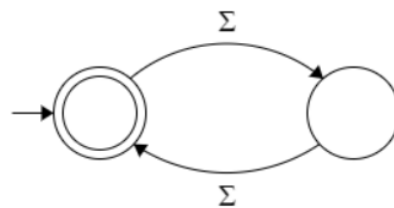
4) درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید. (در صورت نادرست بودن مثال نقض و در صورت درستی اثبات ارائه دهید.) (20 نمره)

الف) اگر زبان L منظم باشد، زبان شامل رشته‌های عضو این زبان با طول زوج نیز منظم است. درست؛ اثبات:

زبان شامل رشته‌های عضو زبان L با طول زوج را $E(L)$ می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(L) = \{w \mid w \in L \text{ and } |w| = 2k \text{ for some } k \geq 0\}$$

می‌دانیم زبانی که رشته‌های با طول زوج را می‌پذیرد (L_{even}) منظم می‌باشد زیرا می‌توان DFA معادل این زبان را به صورت زیر رسم کرد:



واضح است که $E(L) = L \cap L_{\text{even}}$ بنابراین از آنجایی که اشتراک دو زبان منظم یک زبان منظم است، زبان $E(L)$ نیز منظم است.

ب) اگر L_2 ، $L_1 L_2$ و $L_2 L_1$ زبان‌های منظم باشند، زبان L_1 نیز منظم است. نادرست؛ مثال نقض:

$$L_1 = \{0^{2^i} : i > 0\}, L_2 = \{0\}^* = \{a^i : i \geq 0\}$$

ج) اگر R_1 و R_2 دو عبارت منظم باشند، هم‌ارزی $(R_1 + R_2)^* \equiv (R_1^* R_2^*)^*$ برقرار است.
درست؛ اثبات:

از یک طرف داریم:

$$L((R_1^* R_2^*)^*) \subseteq L(((R_1 + R_2)^* (R_2 + R_1)^*)^*) = L(((R_1 + R_2)^*)^*) = L((R_1 + R_2)^*)^*$$

از طرف دیگر داریم:

$$L(R_1) \subseteq L(R_1^* R_2^*) \text{ and } L(R_2) \subseteq L(R_1^* R_2^*) \Rightarrow L(R_1 + R_2) \subseteq L(R_1^* R_2^*) \\ \Rightarrow L((R_1 + R_2)^*) \subseteq L((R_1^* R_2^*)^*)$$

بنابراین اثبات می‌شود: $L((R_1 + R_2)^*) = L((R_1^* R_2^*)^*)$

د) زبان $L = \{uvu^R : u, v \in \Sigma^+\}$ منظم می‌باشد.

درست؛ اثبات:

از آنجایی که هیچ محدودیتی بر طول رشته u نداریم، می‌توانیم در نظر بگیریم که $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ و $u = a_i$ می‌باشد. در واقع از آنجایی که $a_i^R = a_i$ می‌باشد و همچنین u و v کاملاً مستقل هستند، می‌توانیم در نظر بگیریم که این زبان شامل رشته‌های با طول حداقل 3 می‌باشد که با یک سمبل (a_i) شروع و تمام می‌شوند. بنابراین زبان L معادل عبارت منظم زیر می‌باشد:

$$a_1(a_1 + \dots + a_n)^+ a_1 + a_2(a_1 + \dots + a_n)^+ a_2 + \dots + a_n(a_1 + \dots + a_n)^+ a_n$$

پس این زبان منظم می‌باشد.

5) فرض می‌کنیم L یک زبان منظم تحت الفبای $\{0, 1\}$ باشد. ثابت کنید $OP(L)$ با تعریف زیر نیز منظم می‌باشد. (10 نمره)

$$OP(L) = \{notOdds(w) \mid w \in L\}$$

$notOdds(w)$ بیت‌های در اندیس‌های فرد رشته w (با فرض شروع اندیس‌ها از 1) را نقیض می‌کند. به عنوان مثال داریم: $notOdds(00001111) = 10100101$

L یک زبان منظم می‌باشد، بنابراین یک DFA به نام M وجود دارد که زبان L را می‌پذیرد.

فرض می‌کنیم داریم: $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

برای این که ثابت کنیم $OP(L)$ یک زبان منظم است باید یک DFA بسازیم که زبان L را بپذیرد. این DFA به نام M' را به صورت زیر می‌سازیم:

* هر استتیت $(q, flip)$ در M' نشان می‌دهد که M در استتیت q است و نیاز داریم بیت ورودی بعدی را نقیض کنیم اگر $flip = 1$ باشد.

- $M' = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$
- $Q' = Q \times \{0, 1\}$
- $\Sigma' = \Sigma$
- $\delta'((q, flip), a) = (\delta(q, a \oplus flip), \neg flip)$

- $\delta'((q, 0), 0) = (\delta(q, 0), 1)$
 - $\delta'((q, 1), 0) = (\delta(q, 1), 0)$
 - $\delta'((q, 0), 1) = (\delta(q, 1), 1)$
 - $\delta'((q, 1), 1) = (\delta(q, 0), 0)$
- $q_0' = (q_0, 1)$
- $F' = F \times \{0, 1\}$