

به نام خدا

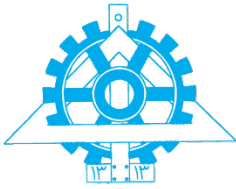
نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره ۴

دستیار آموزشی این مجموعه: علیرضا آقایی

[alirezaaghaei090@gmail.com](mailto:alirezaaghaei090@gmail.com)

تاریخ تحویل: ۱۸ آبان



(1) گرامر  $G = (V, \Sigma, R, S)$  را در نظر بگیرید که در آن  $V$ ،  $\Sigma$  و  $R$  به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$V = \{S, A\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$R = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow AA, \\ A \rightarrow AAA, \\ A \rightarrow a, \\ A \rightarrow bA, \\ A \rightarrow Ab \end{array} \}$$

(a) چه رشته‌هایی در  $L(G)$  را می‌توان با حداکثر ۴ بار استفاده از قوانین گرامر تولید کرد؟

$$S \rightarrow AA \rightarrow aA \rightarrow aa$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow aA \rightarrow abA \rightarrow aba$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow aA \rightarrow aAb \rightarrow aab$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow bAA \rightarrow baA \rightarrow baa$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow bAA \rightarrow bAa \rightarrow baa$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow AbA \rightarrow abA \rightarrow aba$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow AbA \rightarrow Aba \rightarrow aba$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow Aa \rightarrow aa$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow Aa \rightarrow bAa \rightarrow baa$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow Aa \rightarrow Aba \rightarrow aba$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow AbA \rightarrow abA \rightarrow aba$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow AbA \rightarrow Aba \rightarrow aba$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow AAb \rightarrow aAb \rightarrow aab$$

$$S \rightarrow AA \rightarrow AAb \rightarrow Aab \rightarrow aab$$

با توجه به موارد بالا، رشته‌های  $aa$ ،  $aab$ ،  $aba$  و  $baa$  را می‌توان با حداکثر ۴ بار استفاده از قوانین گرامر تولید کرد.

(b) ۴ اشتقاق متفاوت برای رشته‌ی babbab ارائه دهید.

$S \rightarrow AA \rightarrow AbA \rightarrow AbAb \rightarrow Abab \rightarrow babbab$   
 $S \rightarrow AA \rightarrow AAb \rightarrow AbAb \rightarrow Abab \rightarrow babbab$   
 $S \rightarrow AA \rightarrow bAA \rightarrow bAbA \rightarrow babA \rightarrow babbab$   
 $S \rightarrow AA \rightarrow AbA \rightarrow bAbA \rightarrow babA \rightarrow babbab$

(c) روشی ارائه دهید تا با استفاده از گرامر  $G$  بتوان رشته‌ی  $b^m ab^n ab^p$  را به ازای هر  $m, n, p > 0$  تولید کرد.

- 1 - با استفاده از قانون  $S \rightarrow AA$  شروع می‌کنیم.
- 2 - سپس  $m$  بار قانون  $A \rightarrow bA$  را روی چپ‌ترین  $A$  اعمال می‌کنیم و به  $b^m AA$  می‌رسیم.
- 3 - سپس قانون  $A \rightarrow a$  را روی چپ‌ترین  $A$  اعمال می‌کنیم و به  $b^m aA$  می‌رسیم.
- 4 - سپس  $n$  بار قانون  $A \rightarrow bA$  را روی چپ‌ترین  $A$  اعمال می‌کنیم و به  $b^m ab^n A$  می‌رسیم.
- 5 - سپس  $p$  بار قانون  $A \rightarrow Ab$  را روی چپ‌ترین  $A$  اعمال می‌کنیم و به  $b^m ab^n Ab^p$  می‌رسیم.
- 6 - سپس قانون  $A \rightarrow a$  را روی چپ‌ترین  $A$  اعمال می‌کنیم و به  $b^m ab^n ab^p$  می‌رسیم.

(2) توضیح دهید که هر کدام از گرامرهای زیر چه رشته‌هایی را تولید می‌کنند. همچنین زبان تولید شده توسط هر گرامر را با نمایش ریاضی ارائه دهید.

a)

$S \rightarrow AB$   
 $A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$   
 $B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i + k = j\}$$

b)

$S \rightarrow aY \mid bY$   
 $Y \rightarrow aYa \mid bYb \mid aYb \mid bYa \mid \varepsilon$

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \text{طول } w \text{ فرد باشد}\}$$

c)

$S \rightarrow bSa \mid bY$   
 $Y \rightarrow bY \mid aY \mid \varepsilon$

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ با } b \text{ شروع شود}\}$$

(3) برای هر یک از زبان‌های زیر، یک گرامر مستقل از متن بنویسید.

a)  $L = \{w \in \{1,2,*\} \mid w \text{ زوج باشد و حاصل ضرب اعداد، عددی زوج باشد}\}$

$$S \rightarrow 2 \mid N2 \mid S * T \mid T * S \mid S * S$$

$$T \rightarrow 1 \mid N1 \mid T * T$$

$$N \rightarrow 1 \mid 2 \mid N1 \mid N2$$

b)  $L = \{a^n b^m c^k \mid n \neq m \text{ or } m \neq k\}$

$$S \rightarrow S_1 S_3 \mid S_2 S_3 \mid S_4 S_5 \mid S_4 S_6$$

$$S_1 \rightarrow a S_1 b \mid a S_1 \mid a$$

$$S_2 \rightarrow a S_2 b \mid S_2 b \mid b$$

$$S_3 \rightarrow S_3 c \mid \varepsilon$$

$$S_4 \rightarrow a S_4 \mid \varepsilon$$

$$S_5 \rightarrow b S_5 c \mid b S_6 \mid b$$

$$S_6 \rightarrow b S_6 c \mid S_6 c \mid c$$

c)  $L = \{a^m b^{2n} c^{3n} d^p \mid p > m, \text{ and } m, n \geq 1\}$

$$S \rightarrow a X d d$$

$$X \rightarrow X d \mid a X d \mid b b Y c c c$$

$$Y \rightarrow b b Y c c c \mid \varepsilon$$

d)  $L = \{u a w b \mid u, w \in \{a, b\}^*, |u| = |w|\}$

$$S \rightarrow T b$$

$$T \rightarrow a T a \mid a T b \mid b T a \mid b T b \mid a$$

(4) گرامر مبهم  $G$  را در نظر بگیرید.

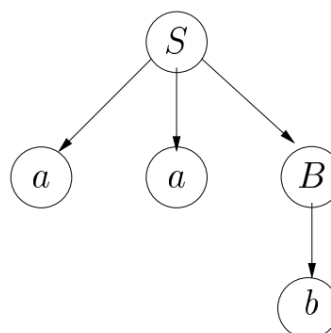
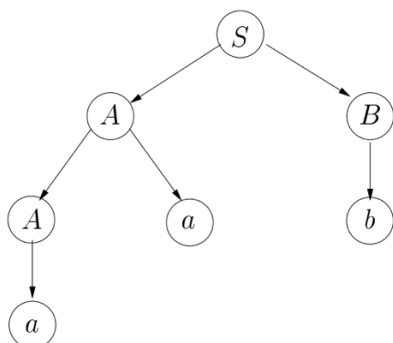
$$S \rightarrow AB \mid aaB$$

$$A \rightarrow a \mid Aa$$

$$B \rightarrow b$$

a) رشته‌ای عضو گرامر پیدا کنید که برای آن حداقل دو درخت اشتقاق متفاوت وجود داشته باشد. آن دو درخت را

ترسیم کنید.



۲ درخت بالا، ۲ درخت اشتقاق متفاوت برای رشته‌ی aab هستند.

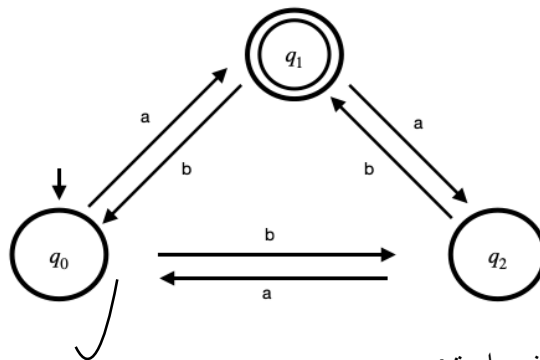
(b) گرامری غیر مبهم و معادل با گرامر  $G$  ارائه دهید.

$$S \rightarrow Ab$$

$$A \rightarrow a \mid Aa$$

(5) برای زبان‌های زیر یک Automata رسم کرده و سپس با استفاده از آن یک گرامر منظم برای آن‌ها بنویسید.

$$a) L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, (n_a(w) - n_b(w)) \bmod 3 = 1\}$$



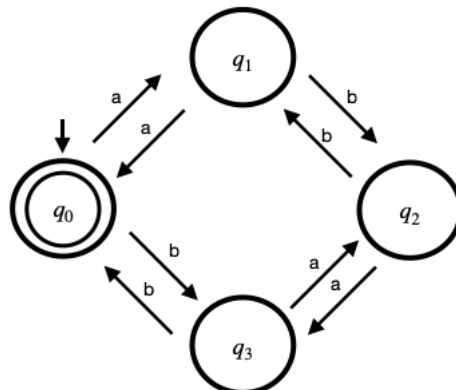
گرامر مربوط به این زبان به شکل زیر است:

$$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_2$$

$$q_1 \rightarrow aq_2 \mid bq_0 \mid \varepsilon$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 \mid bq_1$$

$$b) L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) \bmod 2 = 0, n_b(w) \bmod 2 = 0\}$$



گرامر مربوط این زبان به شکل زیر است:

$$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_1 \rightarrow aq_0 \mid bq_2$$

$$q_2 \rightarrow bq_1 \mid aq_3$$

$$q_3 \rightarrow aq_2 \mid bq_1$$

(6) با فرض این که اگر دو زبان  $L_1$  و  $L_2$  گرامر مستقل از متن داشته باشند آنگاه زبان  $L_1 \cup L_2$  نیز گرامر مستقل از متن دارد، اثبات کنید که برای زبان  $B$  گرامری مستقل از متن وجود دارد. (امتیازی)

$$A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$B = \bar{A}$$

زبان‌های  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L_1 = \{\overline{a^* b^*}\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m \mid n > m\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n < m\}$$

با توجه به تعریف زبان  $B$  خواهیم داشت که  $B = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ . حال برای اثبات وجود گرامری مستقل از متن برای  $B$ ، کافی است برای زبان‌های  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  گرامری مستقل از متن بنویسیم:

$L_1$ :

$$S_1 \rightarrow T_1 b a T_1$$

$$T_1 \rightarrow a T_1 \mid b T_1 \mid \varepsilon$$

$L_2$ :

$$S_2 \rightarrow a S_2 b \mid a S_2 \mid a$$

$L_3$ :

$$S_3 \rightarrow a S_3 b \mid S_3 b \mid b$$

بنابراین خواسته‌ی مسأله اثبات شد.