



University of Tehran

## آمار و احتمالات مهندسی

تمرین دوم - احتمال شرطی و استقلال

فاطمه و آریان

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۷/۲۵

### سؤال ۱.

سه کیسه داریم که در هر کیسه ۱۰۰ مهره وجود دارد:

- کیسه اول شامل ۷۵ مهره قرمز و ۲۵ مهره آبی است.
- کیسه دوم شامل ۶۰ مهره قرمز و ۴۰ مهره آبی است.
- کیسه سوم شامل ۴۵ مهره قرمز و ۵۵ مهره آبی است.

یکی از کیسه‌ها را به طور تصادفی انتخاب کرده و یک مهره را از آن کیسه به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

### سؤال ۲.

فرض کنید فردی را به طور کاملاً تصادفی انتخاب می‌کنیم و از او تست کرونا می‌گیریم و نتیجه‌ی تست مثبت می‌شود. فرض کنید به ازای هر شخص، احتمال آنکه پاسخ تست او با وضعیت بیماری او مطابق شود برابر ۸۰ درصد است و همچنین در جامعه‌ای که این فرد را انتخاب کرده‌ایم، به طور میانگین از هر ۱۰۰۰ نفر ۱ نفر کرونا دارد. آیا احتمال این که این فرد کرونا داشته باشد ۸۰ درصد است؟ اگر پاسخ بله است توضیح دهید و در غیر این صورت احتمال آن را محاسبه کنید.

### سؤال ۳.

در یک مسابقه‌ی فوتبال ۴ تیم در مرحله‌ی گروهی حضور دارند. همه‌ی تیم‌ها دو به دو با هم بازی می‌کنند و هر دو تیم یک بازی با هم خواهند داشت. اگر بازی مساوی شود، دو تیم ۱ امتیاز خواهند گرفت و در غیر این صورت برنده ۳ امتیاز می‌گیرد و بازنده امتیازی نمی‌گیرد. می‌دانیم برد تیم اول، برد تیم دوم و مساوی هر سه احتمالشان  $\frac{1}{3}$  است. تیم‌های a, b, c, d در یک گروه‌ند و تیم a ۶ امتیاز کسب کرده است. احتمال اینکه تیم b ۴ امتیاز کسب کرده باشد چقدر است؟

## سؤال ۴.

در یک بازی، بازیکنی دو تاس را پرتاب می‌کند. اگر مجموع دو عدد ظاهر شده ۲ یا ۳ یا ۱۲ باشد، بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد، برنده است. اگر نتیجه عدد دیگری باشد بازی ادامه پیدا می‌کند تا اینکه او نتیجه قبلی را بدست آورد و یا نتیجه ۷ حاصل گردد. اگر نتیجه ۷ ابتدا ظاهر شود بازیکن بازنده است، در حالی که اگر نتیجه قبلی پیش از ۷ ظاهر شود بازیکن برنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را بدست آورید. منظور از نتیجه قبلی، همان نتیجه پرتاب اول می‌باشد.

پاسخ.

داریم:

$$P(\text{win}) = P(7) + P(11) + [P(4)P(4 \text{ before } 7)] + [P(5)P(5 \text{ before } 7)] + [P(6)P(6 \text{ before } 7)] + \\ [P(8)P(8 \text{ before } 7)] + [P(9)P(9 \text{ before } 7)] + [P(10)P(10 \text{ before } 7)]$$

که منظور از  $P(i)$  احتمال این است که مجموع پرتاب اول  $i$  باشد و منظور از  $P(i \text{ before } 7)$  احتمال این است که از پرتاب دوم به بعد، مجموع  $i$  قبل از ۷ بیاید. همچنین باید توجه داشت که اگر نتیجه پرتاب اول، ۲، ۳ یا ۱۲ باشد، ما بازی را باخته‌ایم و بازی ادامه نمی‌یابد. لذا:

$$P(\text{win}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \times \frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{36} + \frac{6}{36}} + \frac{4}{36} \times \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{6}{36}} + \frac{5}{36} \times \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36} + \frac{6}{36}} + \\ \frac{5}{36} \times \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36} + \frac{6}{36}} + \frac{4}{36} \times \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{6}{36}} + \frac{3}{36} \times \frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{36} + \frac{6}{36}} = 0.4929$$

## سؤال ۵.

استادی می‌خواهد برای درس خود تعدادی دستیار آموزشی از میان دانشجویان قدیمی انتخاب کند. برای این کار او بر اساس دو درس که نمراتشان مستقل از هم است، معیارهایی را گذاشته است. فرض می‌کنیم نمرات اعشار ندارند و همچنین احتمال گرفتن هر نمره‌ای برابر  $\frac{1}{11}$  است.

آ) می‌دانیم میانگین نمرات این دو درس برای دانشجویی بیشتر از ۱۴ شده است. احتمال اینکه او درس اول را افتاده باشد چقدر است؟ (نمره ی پایین تر از ۱۰)

ب) می‌دانیم دانشجویی نمره‌اش در یک درس ۱۰ شده است. احتمال اینکه هر دو درس را ۱۰ شده باشد چقدر است؟

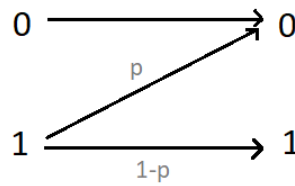
## سؤال ۶.

در یک سیستم مخابراتی، برای انتقال داده‌ها، از بیت‌های ۰ و ۱ استفاده می‌شود. این بیت‌ها از کانال زیر عبور کرده و در خروجی ظاهر می‌شوند. در ورودی، با احتمال  $0.4$  بیت ۰ ظاهر می‌شود، این بیت مستقیماً از کانال عبور کرده و به خروجی می‌رسد. اگر در ورودی بیت ۱ ظاهر شود، با احتمال  $p$  بر اثر عبور از کانال، به صورت ۰ در خروجی ظاهر می‌شود و در غیر این صورت، به شکل درست انتقال می‌یابد. مطلوب است:

آ) احتمال گرفتن بیت ۰ در خروجی

ب) احتمال خطای این مجموعه (یعنی احتمال آنکه خروجی و ورودی متفاوت باشند)

ج) اگر  $n$  تا از این کانال‌ها پشت سر هم متصل شوند (یعنی خروجی کانال اول، خود، ورودی کانال بعدی به حساب آید) احتمال خطا را بدست آورید. اگر تعداد کانال‌ها به بی‌نهایت میل کند، احتمال گرفتن بیت‌های ۰ و ۱ را در خروجی بدست آورید. عملکرد هر کدام از کانال‌ها را از یکدیگر مستقل در نظر بگیرید.



### سؤال ۷.

فرض می‌کنیم  $C_1, C_2, \dots, C_M$  افرازهای مختلف در فضای  $S$  بوده و  $A$  و  $B$  دو پیشامد در این فضا باشند.

۱.  $A$  و  $B$  به شرط  $C_i; i \in \{1, 2, \dots, M\}$  از هم مستقلند.

۲.  $B$  از تمام  $C_i$  ها مستقل است.

اثبات کنید  $A$  و  $B$  از یکدیگر مستقل اند.

### سؤال ۸.

امتیازی: نمره‌ی تکمیلی برای این مبحث به دنبال دارد.

دو فرد  $A$  و  $B$  قرار گذاشته‌اند به کرات با یکدیگر مسابقه‌ی اسب سواری بدهند. هر بار که یکی پیروز شود، از پول بازنده یک تومان کم می‌شود و به پول برنده افزوده می‌شود. احتمال پیروزی آقای  $A$  در مسابقه  $p$  و احتمال پیروزی آقای  $B$  در مسابقه  $q = 1 - p$  است. سرمایه‌ی اولیه  $A$  برابر  $i$  تومان و سرمایه‌ی اولیه آقای  $B$  برابر  $k - i$  تومان است. مسابقه زمانی تمام می‌شود که سرمایه‌ی یکی از طرفین به صفر برسد. احتمال اینکه  $A$  برنده شود را محاسبه کنید.

### سؤال ۹.

اختیاری: این تمرین تحویل ندارد. در صورت تمایل برای بحث و گفتگو پیرامون این تمرین، با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir در ارتباط باشید.

بخش دوم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع مدل‌های بیزی را می‌توانید از طریق این لینک<sup>۱</sup> دریافت کنید.

### سؤال ۱۰.

بخش سوم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع مسئله‌ی Monty Hall را می‌توانید از طریق این لینک<sup>۲</sup> دریافت کنید.

• یک کپی از فایل مذکور با نام CA2\_S3\_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.

<sup>۱</sup>[https://colab.research.google.com/drive/1dDFY0PNkvoYADXT3B2g8C7GS\\_4zsLTs?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1dDFY0PNkvoYADXT3B2g8C7GS_4zsLTs?usp=sharing)

<sup>۲</sup><https://colab.research.google.com/drive/1kkU8aeVRTylvugaubMrs6hotgnd1J4MJ?usp=sharing>

- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
  - سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ قرمز مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
  - فایل کد خود را با `ati.noorzad@gmail.com` با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
  - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.