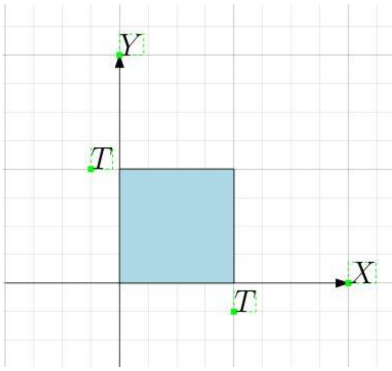
1. الف) تابع مورد نظر یک تابع Uniform می باشد.

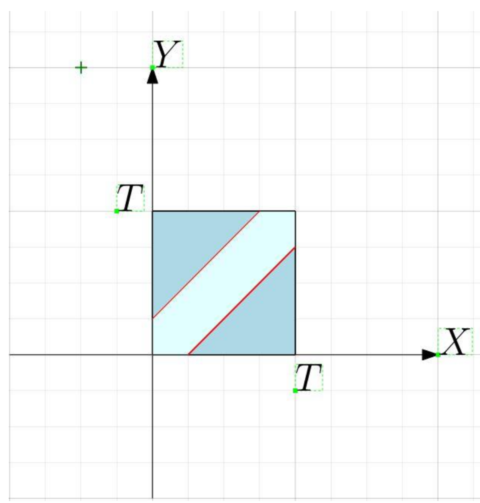
$$X\sim U(0,T)\ \ Y\sim U(0,T) \rightarrow P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \le x \le T \\ 0 & else \end{cases} \quad P_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \le x \le T \\ 0 & else \end{cases}$$



$$P_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{T^2} & 0 \le x \le T \ \ 0 \le y \le T \\ 0 & else \end{cases}$$

ب) دو بسته قرار است که با هم برخورد داشته باشند این به آن معناست که فاصله ی زمانی رسیدن این دو بسته کمتر از δ می باشد این دو حالت دارد حالت یکیش در حالتی هست که بسته X زود تر از بسته Y برسد حالت دیگری دقیقا بر عکس ای ن می باشد.

$|x-y| \le \delta \rightarrow \begin{cases} x-y \le \delta \\ y-x \le \delta \end{cases} \rightarrow$ باید هر دو این شرط را داشته باشد تا با هم بخورد کرده باشد



ما دو نمودار را رسم می کنیم

حال می بایست مساحت ناحیه بین دو نمودار قرمز رنگ را حساب کنیم

مساحت ناحیه بین دو نمودار قرمز = مساحت دو مثلث – مساحت کل فضا مربع

$$S' = (T^2) - \left(2 \times \frac{(T-\delta)^2}{2}\right) = T^2 - (T^2 - 2T\delta + \delta^2) = 2T\delta - \delta^2 \rightarrow$$

احتمال بر خورد دو دسته داده برابر $\frac{1}{T^2} \times (2T\delta - \delta^2)$ خواهد بود.

2.

$$X_i = 1 \;\; if\; n_i = 1\; else\; 0 \quad , \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Y_i = 1 \;\; if\; n_i = 5\; else\; 0 \quad , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$Cov(X_i, Y_j) = E[X_i, Y_j] - E[X_i]E[Y_j] = -\frac{1}{25} \;\; if\; i = j \;\; else\; 0$$

$$Cov(X, Y) = Cov\left(\sum X_i, \sum Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, Y_j) = -\frac{n}{25}$$

$$Var(X_i) = p(1-p) = \frac{4}{25} \;\rightarrow\; Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{4n}{25} \quad , \; Var(Y) = Var(X) = \frac{4n}{25}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = -\frac{1}{4}$$

.3

الف) فرض می کنیم که $Y = 1 - X$ می باشد و میدانیم که توضیع X از نوع بتا هست

$$g(x) = 1 - X \rightarrow g'(x) = -1$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_0)}{|g'(x)|} \rightarrow y = 1 - x \rightarrow x = 1 - y$$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du} \rightarrow f_Y(y) = \frac{f_X(x_0)}{|g'(x)|} = \frac{f_x(x_0)}{1} \rightarrow x_0 = 1 - y$$

$$f(y, \alpha, \beta) = \frac{(1-y)^{\alpha-1}(y)^{\beta-1}}{\int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du}$$

مشخص است از تابع توزیع که از نوع Beta می باشد با این تفاوت که $Y \sim Beta(b, a)$

$$if\; X \sim Beta(a, b) \rightarrow \quad 1 - X \sim Beta(b, a)$$

ب)

$$Y = X^{\frac{1}{a}} \rightarrow g(X) = X^{\frac{1}{a}} \rightarrow g'(X) = \frac{1}{a} X^{\frac{1-a}{a}} = \frac{1}{a} Y^{1-a}$$

$$f_Y(y) = \frac{f_x(x_0)}{|g'(x)|} \rightarrow f_x(x_0) = 1$$

چون که هم توزیع یکنواخت و توزیع بتا در حدود ۰ تا ۱ تعریف شده اند

$$f_Y(y) = \frac{1}{|g'(x)|} = aY^{a-1} \rightarrow f(y, a', b') = \frac{y^{a'-1}(1-y)^{b'-1}}{\int_0^1 u^{a'-1}(1-u)^{b'-1} du} \rightarrow b' = 0 \rightarrow$$

$$\frac{y^{a'-1}}{\int_0^1 u^{a'-1} du} = (a')y^{a'-1} = aY^{a-1} \rightarrow a' = a \rightarrow Y \sim Beta(a, 1)$$

4.

الف)

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[V^2 + VW + ZV + ZW] - 2\lambda * 2\lambda =$$
$$\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 - 4\lambda^2 = \lambda$$

ب)

کواریانس X , Y در λ غیر صفر ، غیر صفر است و در نتیجه از هم مستقل نیستند.

$$P(X = x, Y = y|V = v) = P(W + V = x, Z + V = y|V = v) = P(W = x - v, Z = y - v)$$
$$= P(W = x - v)P(Z = y - v) = P(W = x - V|V = v)P(Z = y - V|V = v)$$
$$= P(X = x|V = v)P(Y = y|V = v)$$

در نتیجه به شرط V از هم مستقل هستند.

ج)

از نتیجه بدست آمده در قسمت ب استفاده می‌کنیم.

$$P(X = x, Y = y) = \sum P(X = x|V = v)P(Y = y|V = v)P(V = v)$$
$$= \sum P(W = x - v)P(Z = y - v)P(V = v) = \sum \frac{\lambda^{x-v}e^{-\lambda}}{(x-v)!} * \frac{\lambda^{y-v}e^{-\lambda}}{(y-v)!}$$

5. الف)

$$f_{WV}(w,v) = f_W(w)f_V(v) = \begin{cases} \frac{e^{-w}}{2\pi} & 0 \le v \le 2\pi \ \ and \ \ w \ge 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$J(w,v) = \begin{vmatrix} g_w & g_v \\ h_w & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2w}}\cos(v) & -\sqrt{2w}\sin(v) \\ \frac{1}{\sqrt{2w}}\sin(v) & \sqrt{2w}\cos(v) \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad w_1 = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad , v_1 = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$0 \le v \le 2\pi \ \ \rightarrow \ \ 0 \le \tan^{-1}\frac{y}{x} \le 2\pi \ \ \rightarrow \ \ x, y \in R$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{f_{wv}(w_1, v_1)}{|J(w_1, v_1)|} = \frac{e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}}{2\pi} \quad \rightarrow \ \ F_{XY}(x,y) = G(x;0,1)\ G(y;0,1)$$

ب)

بله مستقل هستند-چون تابع توزیع یا چگالی مشترک آن ها را می توان به صورت ضرب دو تابع یکی برحسب x و و یکی برحسب y نوشت.

پ)

$$F_X(x) = G(x;0,1) \quad , \quad F_Y(y) = G(y;0,1)$$

6. الف)

$$F_L(l) = \Pr\{L \le l\} = \Pr\{\min(U_1, U_2, U_3) \le l\} = 1 - \Pr\{U_1 \ge l, U_2 \ge l, U_3 \ge l\}$$

$$= \begin{cases} 1 & l \ge 1 \\ 1 - (1-l)^3 & 0 \le l \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$f_L(l) = \begin{cases} 3(1-l)^2 & 0 \le l \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$F_M(m) = \Pr\{M \le m\} = \Pr\{\max(U_1, U_2, U_3) \le m\}$$

$$= \Pr\{U_1 \le m\}\Pr\{U_2 \le m\}\Pr\{U_3 \le m\} = \begin{cases} 1 & m > 1 \\ m^3 & 0 \le m \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$f_M(m) = \begin{cases} 3m^2 & 0 \le m \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

ب)

$$F_{ML} = \Pr\{M \le m , L \le l\} = \Pr\{\max(U_1, U_2, U_3) \le m, \min(U_1, U_2, U_3) \le l\}$$

$$= \Pr\{\min(U_1, U_2, U_3) \le l\} - \Pr\{\max(U_1, U_2, U_3) \ge m, \min(U_1, U_2, U_3) \le l\}$$

$$F_L(l) - \Pr\{m \le U_1 \le l\}\Pr\{m \le U_2 \le l\}\Pr\{m \le U_3 \le l\}$$

$$= \begin{cases} m^3 - (m-l)^3 & 0 \le m \le 1 \quad and \ \ 0 \le l \le 1 \quad and \ \ m \ge l \\ f(l) \ \ or \ \ f(m) \ \ or \ \ cnte & o.w. \end{cases}$$

$$f_{ML}(m, l) = \begin{cases} 6(m-l) & 0 \le m \le 1 \ \ and \ \ 0 \le l \le 1 \ \ and \ \ m \ge l \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

پ)

$$f_{M|L}(m, l) = \frac{f_{ML}}{f_L} = \frac{2(m-l)}{(1-l)^2} \quad ; \quad 0 \le m \le 1 \quad and \ \ 0 \le l \le 1 \quad and \ \ m \ge l$$

.7

$$M_{Bin}(t, n) = (q + pe^t)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^t\right)^n$$

$$M_{Poi}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Bin}(t, n) \xrightarrow{\text{رابطه اویلر}} \lim_{n\to\infty}((1 + \frac{1}{\frac{n}{\lambda(e^t-1)}})^{(\frac{n}{\lambda(e^t-1)})})^{\lambda(e^t-1)} = e^{\lambda(e^t-1)} = M_{Poi}(t)$$

.8

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$E[Y] = M_x(1) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = M_X(2) - M_X(1)^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

$$m_n = E[Y^n] = E[e^{nX}] = M_X(n) = e^{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2}$$

.9 الف)

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^y (4x + y)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x^2 + xy)\Big|_0^y dy = \int_0^{\frac{1}{2}} 3y^2 dy = y^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

ب)

$$f_{X,Y|A}(x, y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{P(A)} = 32x + 8y \quad ; \quad 0 \le x \le y \le \frac{1}{2}$$

$$f_{X|A}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY|A}dy=\int_{x}^{\frac{1}{2}}(32x+8y)dy=(32xy+4y^2)\Big|_{x}^{\frac{1}{2}}=16x+1-(32x^2+4x^2)$$

$$=-36x^2+16x+1\ ;\ 0\le x\le\frac{1}{2}$$

$$f_{Y|A}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY|A}dx=\int_{0}^{y}(32x+8y)dx=(16x^2+8xy)\Big|_{0}^{y}=24y^2\quad;\quad 0\le y\le\frac{1}{2}$$

پ)

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}dy=\int_{x}^{1}(4x+y)dy=\left(4xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x}^{1}=4x+\frac{1}{2}-\left(4x^2+\frac{x^2}{2}\right)=-4.5x^2+4x+0.5\ ;\ 0\le x\le 1$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}dx=\int_{0}^{y}(4x+y)dx=(2x^2+xy)\Big|_{0}^{y}=3y^2\quad;\quad 0\le y\le 1$$

$$f_{Y|X}=\frac{f_{xy}}{f_x}=\frac{(4x+y)}{-4.5x^2+4x+0.5}\quad;0\le x\le y\le 1\qquad f_{X|Y}=\frac{f_{xy}}{f_y}=\frac{(4x+y)}{3y^2}\quad;0\le x\le y\le 1$$

ت)

$$\begin{cases}W=X=g(X,Y)\\ Z=\dfrac{X}{Y}=h(X,Y)\end{cases}\rightarrow J(x,y)=\begin{vmatrix}g_x & g_y\\ h_x & h_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2}\end{vmatrix}=-\frac{x}{y^2}$$

$$x_1=w\quad,\quad y_1=\frac{w}{z}\quad\rightarrow\quad f_{zw}(z,w)=\frac{f_{xy}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|}=\frac{4w+\frac{w}{z}}{\frac{w}{\left(\frac{w}{z}\right)^2}}=\frac{4w^2}{z^2}+\frac{w^2}{z^3}\quad;\quad 0\le w\le\frac{w}{z}\le 1$$

$$f_Z(z)=\int_{0}^{z} f_{zw}dw=\frac{w^3}{3}\left(\frac{4}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)\Big|_{0}^{z}=\frac{4}{3}z+\frac{1}{3}\quad;\quad 0\le z\le 1$$