به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده برق و کامپیوتر

درس آمار و احتمال

پاسخ‌نامه تمرین شماره ۱

آبان ماه ۱۳۹۹

پاسخ سوال ۱

برای آنکه $f(x)$ یک تابع pdf باشد باید ویژگی های زیر را داشته باشد:

$$1-\ f(x)\ \geq\ 0, \qquad x\in R$$

$$2-\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

می دانیم که λ طبق صورت سوال مثبت است.همچنین e به توان هر عددی هم مثبت است.و لذا $f(x)$ مثبت خواهد بود.پس شرط اول را داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}\,dx\ =\frac{1}{2}e^{\lambda x}|_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{2}e^{-\lambda x}|_{0}^{\infty}$$
$$=\frac{1}{2}-0+0-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

لذا شرط دو را هم داریم.پس تابع $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال است.

حال میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x)$ را محاسبه می کنیم.

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx=\ 0$$

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

پس میانگین برابر 0 و واریانس برابر $E[X^2]-E^2[X]=\ \frac{2}{\lambda^2}-0=\frac{2}{\lambda^2}$ است.

پاسخ سوال ۲

الف) ابتدا احتمال $P(x>10)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(x>10)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}dx=\left(-e^{-\frac{x}{80}}\right)|_{10}^{\infty}=e^{-\frac{1}{8}}$$

برای محاسبه‌ی احتمال $P(X>90|X>80)$ داریم:

$$P(x>80)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}dx=\left(-e^{-\frac{x}{80}}\right)|_{80}^{\infty}=e^{-1}$$

$$P(x>90)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}dx=\left(-e^{-\frac{x}{80}}\right)|_{90}^{\infty}=e^{-\frac{9}{8}}$$

$$P(X>90|X>80)=\frac{P(X>90\cap X>80)}{P(x>80)}=\frac{P(X>90)}{P(x>80)}=\frac{e^{-\frac{9}{8}}}{e^{-1}}=e^{-\frac{1}{8}}$$

در نتیجه همانگونه که دیده می‌شود، $P(X>90|X>80)$ برابر با $P(x>10)$ می‌شود.

ب) داریم:

$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{a}{b}\right)(e^{bx}-1)\right]\to f(x)=F'(x)=$$
$$-\left(-\left(\frac{a}{b}\right)(be^{bx})\right)\exp\left[-\left(\frac{a}{b}\right)(e^{bx}-1)\right]=a\mathrm{e}^{bx-\left(\frac{a}{b}\right)(e^{bx}-1)}$$

پاسخ سوال ۳

الف) برای حل این سوال ابتدا مقادیر را با توجه به μ و σ ی داده شده به مقادیر توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از جدول احتمال توزیع نرمال استاندارد، مقادیر را محاسبه می‌کنیم:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{10-8.8}{2.8}\approx 0.43$$
$$P(X\geq 10)=P(Z>0.43)=1-P(Z<0.43)=1-0.67=0.33$$
$$P(X>10)=P(Z>0.43)=1-P(Z<0.43)=1-0.67=0.33$$

ب)

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{20-8.8}{2.8}\approx 4.00$$
$$P(X>20)=P(Z>4.00)=1-P(Z<4.00)\approx 1-1=0$$

پ)

$z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma}=\frac{5-8.8}{2.8}\approx -1.36$ $\qquad$ $z_2=\frac{x_2-\mu}{\sigma}=\frac{10-8.8}{2.8}\approx 0.43$

$$P(5 < X < 10) = P(-1.36 < Z < 0.43) = P(Z < 0.43) - P(Z < -1.36)$$
$$\approx 0.66 - 0.08 = 0.5795$$

ت) در صورت سوال خواسته شده ۹۸ درصد مقادیر در این بازه قرار بگیرند. با توجه به این که بازه‌ی مربوطه بازه‌ای متقارن حول میانگین است و با توجه به تقارن توزیع نرمال حول میانگین، نتیجه می‌گیریم که ۱ درصد مقادیر باید بیشتر از حد بالای بازه و ۱ درصد هم کمتر از حد پایین بازه باشند. با توجه به این مورد با در نظر گرفتن توزیع نرمال استاندارد باید به دنبال مقداری باشیم که احتمال معادل آن ۱ درصد یا در واقع ۰.۰۱ باشد. با بررسی مقادیر در جدول می‌بینیم که $z = 2.33$. در نتیجه:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad , \quad c = x - \mu \rightarrow c = z\sigma = 2.33 \times 2.8 = 6.524$$

ت) با توجه به این که درختان به طور مستقل از هم انتخاب شده‌اند، احتمال این که حداقل یک درخت قطری بیشتر از ۱۰ اینچ را داشته باشد، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(at\ least\ one\ of\ four\ trees \geq 10) = 1 - P(all\ for\ trees < 10)$$
$$= 1 - P(X < 10) \times P(X < 10) \times P(X < 10) \times P(X < 10)$$

از طرفی با توجه به مورد الف:

$$P(X < 10) = P(Z < 0.43) \approx 0.66 \rightarrow P(at\ least\ one\ of\ four\ trees \geq 10) = 1 - \left(P(X < 10)\right)^4 = 1 - (0.66)^4 = 1 - 1.1972 \approx 0.80$$

پاسخ سوال ۴

الف) در 400 ساعت 2 بار به مشکل خورده ایم و لذا با استفاده از تناسب در می یابیم که در 3 ساعت 0.015 بار به مشکل میخوریم.از توزیع پوآسون استفاده می کنیم.

$X \sim Poi(\lambda = 0.015)$

فرض میکنیم X متغیر تصادفی نمایانگر تعداد دفعات بروز مشکل است. احتمالی که ما میخواهیم محاسبه کنیم برابر است با:

$$1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0 e^{-0.015}}{0!} = 1 - e^{-0.015}$$

ب) توزیع نرمال ما با مشخصات زیر خواهد بود.

$N\left(10^4 p, 10^4 p(1-p)\right)$

$P(X > 180) = 1 - P(X \leq 180)$

چون توزیع گسسته را با توزیع پیوسته تخمین میزنیم از تصحیح پیوستگی استفاده میکنیم لذا عبارت زیر را محاسبه میکنیم.

$$1-P(X\le 180.5)=1-\ \phi\left(\frac{180.5-10^4p}{\sqrt{10^4p(1-p)}}\right)$$

پاسخ سوال ۵

الف)

احتمال اینکه، H_1، مقدار اندیس ۰ آرایه را به ازای یک ورودی خاص، ۱ نکند برابر است با:

$$p(H_1(inputStr)\neq 0)=\frac{8999}{9000}$$

احتمال اینکه به ازای یک ورودی خاص، هیچ کدام از ۳ تابع Hash، مقدار اندیس ۰ آرایه را ۱ نکنند برابر است با:

$$p(H_1(inputStr)\neq 0\wedge H_2(inputStr)\neq 0\wedge H_3(inputStr)\neq 0)=(\frac{8999}{9000})^3$$

احتمال اینکه به ازای ۱۰۰۰ ورودی قبلی، مقدار اندیس ۰ آرایه همچنان ۰ باقی مانده‌باشد برابر است با:

$$((\frac{8999}{9000})^3)^{1000}=(\frac{8999}{9000})^{3000}$$

ب)

احتمال اینکه مقدار هر ۳ اندیس‌های بدست آمده از توابع Hash در آرایه ۱ باشند برابر است با:

$$p(i_0=1,i_1=1,i_2=1)=1-p(i_0=0\vee i_1=0\vee i_2=0)$$

$$\begin{aligned}p(i_0=0\vee i_1=0\vee i_2=0)=p(i_0=0)+p(i_1=0)+p(i_2=0)-p(i_0\\=0\wedge i_1=0)-p(i_0=0\wedge i_2=0)-p(i_1=0\wedge i_2\\=0)+p(i_0=0\wedge i_1=0\wedge i_2=0)\end{aligned}$$

دقت شود i_0,i_1,i_2 سه اندیس بدست آمده از توابع Hash می‌باشند و می‌توانند هر مقداری بین ۰ تا ۸۹۹۹ داشته‌باشند.

$p(i_0=0),p(i_1=0),p(i_2=0)$ در قسمت الف، محاسبه شده‌اند.

$p(i_0=0\wedge i_1=0),p(i_0=0\wedge i_2=0),p(i_1=0\wedge i_2=0)$ نیز مشابه قسمت الف می‌باشند و ۲ بیت باید ۰ باشند در نتیجه صورت کسر، به جای ۸۹۹۹ برابر با ۸۹۹۸ می‌شود.

$p(i_0 = 0 \wedge i_1 = 0 \wedge i_2 = 0)$ نیز همانند قسمت الف می‌باشد و صرفا ۳ بیت آن باید ۰ باشد در نتیجه صورت کسر، به جای ۸۹۹۹ برابر با ۸۹۹۷ می‌باشد.

$$p(i_0 = 0 \vee i_1 = 0 \vee i_2 = 0) = 3(\frac{8999}{9000})^{3000} - 3(\frac{8998}{9000})^{3000} + (\frac{8997}{9000})^{3000}$$

$$p(i_0 = 1, i_1 = 1, i_2 = 1) = 1 - (p(i_0 = 0 \vee i_1 = 0 \vee i_2 = 0)) = 0.022765$$

پ)

در صورتی که تنها از یک تابع Hash استفاده کنیم، احتمال اینکه مقدار آرایه در یک اندیس پس از هزار رشته، ۰ باشد برابر است با:

$$(\frac{8999}{9000})^{1000}$$

حال احتمال اینکه اندیس بدست آمده از تابع Hash، ۱ باشد، برابر است با:

$$p(i_0 = 1) = 1 - p(i_0 = 0) = 1 - (\frac{8999}{9000})^{1000} = 0.105$$

همانطور که مشاهده می‌شود، با کم کردن تعداد توابع Hash، میزان خطا به مقدار زیادی افزایش یافت. پس استفاده از تعداد بیشتری از توابع Hash الزامی می‌باشد.

پاسخ سوال ۶

الف) با توجه به این به ازای هر تابع pdf، حاصل انتگرال بر روی تمام مقادیر ممکن برابر با ۱ می‌شود، بنابراین داریم (با توجه به ساختار تابع بدیهی است که α باید از ۱ بزرگتر باشد تا انتگرال همگرا شود.):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{5}^{\infty} \frac{k}{x^{\alpha}} dx = \left(\frac{k}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right)|_5^{\infty} = \frac{k}{(\alpha-1)5^{\alpha-1}}$$

حاصل این انتگرال باید برابر با ۱ شود، در نتیجه:

$$\frac{k}{(\alpha-1)5^{\alpha-1}} = 1 \rightarrow k = (\alpha-1)5^{\alpha-1}$$

همچنین در مورد α اشاره شد که باید بزرگتر از ۱ باشد تا انتگرال همگرا شود. در نتیجه محدوده‌ی آن نیز به صورت $\alpha > 1$ است.

ب) می‌دانیم:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

داریم:

$$F(x) = \int_{5}^{x} \frac{(\alpha-1)5^{\alpha-1}}{x^{\alpha}} dx = \left(\frac{(\alpha-1)5^{\alpha-1}}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right)|_5^x$$
$$= (\alpha-1)5^{\alpha-1}(\frac{x^{1-\alpha}-5^{1-\alpha}}{1-\alpha}) = -5^{\alpha-1}(x^{1-\alpha}-5^{1-\alpha})$$
$$= 1-\left(\frac{x}{5}\right)^{1-\alpha}$$

در نتیجه:

$$F(x) = \begin{cases} 1-\left(\frac{x}{5}\right)^{1-\alpha} & x \geq 5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

پ) با توجه به رابطه‌ی امید ریاضی، داریم:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{5}^{\infty} \frac{(\alpha-1)5^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} dx = \left(\frac{(\alpha-1)5^{\alpha-1}}{(2-\alpha)x^{\alpha-2}}\right)|_5^{\infty}$$
$$= (\alpha-1)5^{\alpha-1}\left(\frac{-5^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right) = \frac{5(\alpha-1)}{\alpha-2}$$

دقت کنید که انتگرال بالا تنها به ازای مقادیر $\alpha > 2$ همگراست.

ت) برای یافتن توزیع این عبارت، ابتدا cdf آن را می‌یابیم و سپس با مشتق گرفتن از آن به pdf می‌رسیم. داریم:

$$U = \ln\left(\frac{X}{5}\right) \rightarrow F_U(u) = P(U \leq u) = P\left(ln(\frac{x}{5}) \leq u\right) = P\left(\frac{x}{5} \leq e^u\right)$$
$$= P(X \leq 5e^u) = F(5e^u) = 1-5^{\alpha-1}(5e^u)^{1-\alpha} = 1-e^{-u(\alpha-1)}$$

با توجه به cdf به دست آمده داریم:

$$f_U(u) = \frac{d}{du}F_U(u) = \frac{d}{du}\left(1-e^{-u(\alpha-1)}\right) = (\alpha-1)e^{-u(\alpha-1)}$$

در نتیجه با توجه به این که فرم pdf توزیع نمایی نیز به صورت $\lambda e^{-\lambda x}$ است، می‌توان گفت که U توزیع نمایی با پارامتر $\alpha - 1$ دارد.

پاسخ سوال ۷

الف)

$Marginal\ PMF\ of\ Y$:

$pY(12) = 0.05 + 0.05 + 0 = 0.1$
$pY(15) = 0.05 + 0.1 + 0.2 = 0.35$
$pY(20) = 0.1 + 0.35 + 0.1 = 0.55$

$Marginal\ PMF\ of\ X$:

$pX(12) = 0.05 + 0.05 + 0.1 = 0.2$
$pX(15) = 0.05 + 0.1 + 0.35 = 0.5$
$pX(20) = 0 + 0.2 + 0.1 = 0.3$

ب)

$$P(X \leq 15 and Y \leq 15) = p(12,12) + p(12,15) + p(15,12) + p(15,15) = 0.25$$

پ)

خیر. مستقل از یکدیگر نمی‌باشند. چرا که برای مستقل بودن، باید داشته‌باشیم:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

که این شرط برقرار نمی‌باشد.

ت)

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum (x+y)p(x,y) \\ &= (12+12)\times 0.05 + (12+15)\times 0.05 + (12+20)\times 0.1 \\ &+ (15+12)\times 0.05 + (15+15)\times 0.1 + (15+20)\times 0.35 \\ &+ (20+12)\times 0 + (20+15)\times 0.2 + (20+20)\times 0.1 \\ &= 33.35 \end{aligned}$$

ث)

$$\begin{aligned} E(|X-Y|) &= \sum (|x-y|)p(x,y) \\ &= (12-12)\times 0.05 + (12-15)\times 0.05 + (12-20)\times 0.1 \\ &+ (15-12)\times 0.05 + (15-15)\times 0.1 + (15-20)\times 0.35 \\ &+ (20-12)\times 0 + (20-15)\times 0.2 + (20-20)\times 0.1 = 3.85 \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۸

الف) برای آنکه f یک تابع pdf باشد باید ویژگی های زیر را داشته باشد:

$1-\ f(x)\ \geq\ 0, \qquad x \in R$

$2-\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

فرض میکنیم X یک متغیر پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x) \geq 0, x \in R$ باشد آنگاه داریم:

۱- احتمال آنکه X از یک مقدار x کوچکتر باشد برابر است با $F(x) = P(X \leq x)$

۲- امید ریاضی X برابر است با:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

حال ما باید بررسی کنیم که آیا تابع ما دو خاصیت مذکور را دارد یا نه.

۱- برای x های کوچکتر از صفر که داریم $f(x) = 0$ و برای x های مثبت هم f(x) مثبت است فلذا ویژگی اول را تابع ما دارد.

۲- حال انتگرال f را در بازه منفی بی نهایت تا بی نهایت محاسبه میکنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\, dx$$

$$t = \lambda_i x, \qquad dt = \lambda_i dx$$

$$= p\int_{0}^{\infty} e^{-t}dt + (1-p)\int_{0}^{\infty} e^{-t}dt = p + (1-p) = 1$$

پس هر دو شرط را داریم.پس f(x) یک تابع pdf است.

ب)

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

اگر x منفی باشد چون تابع *f(x)* برای x های منفی صفر است مقدار انتگرال مذکور نیست صفر می شود.اما اگر مثبت باشد از منفی بی نهایت تا صفر که انتگرال آن صفر می شود.برای باقی آن داریم:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt$$

$$u = \lambda_i t, \qquad du = \lambda_i dt$$

$$= p\int_0^{\lambda_1 x} e^{-u}du + (1-p)\int_0^{\lambda_2 x} e^{-u}du = 1 - (pe^{-\lambda_1 x} + (1-p)e^{-\lambda_2 x})$$

و لذا برای تابع CDF داریم:

$$F(x;\, \lambda_1, \lambda_2, p) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \left(pe^{-\lambda_1 x} + (1-p)e^{-\lambda_2 x}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

پ) برای محاسبه امید ریاضی داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x;\, \lambda_1, \lambda_2, p)dx = \int_{-\infty}^{0} x.0dx + \int_0^{\infty} x.\left(p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\right)dx$$

$$= p\int_0^{\infty} x\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx + (1-p)\int_0^{\infty} x\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx = p.E(X_1) + (1-p).E(X_2)$$

چون X_1 و X_2 هر دو توزیع نمایی دارند عبارت بالا برابر است با:

$$\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2}$$

ت) برای این بخش ابتدا $E(X^2)$ را محاسبه می کنیم.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x;\, \lambda_1, \lambda_2, p)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2.0dx + \int_0^{\infty} x^2\left(p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\right)dx$$

$$= p\int_0^{\infty} x^2\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx + (1-p)\int_0^{\infty} x^2\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx = p.E(X_1^2) + (1-p).E(X_2^2)$$

چون X_1 و X_2 هر دو توزیع نمایی دارند عبارت بالا برابر است با:

$$\frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} - \left(\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2}\right)^2$$

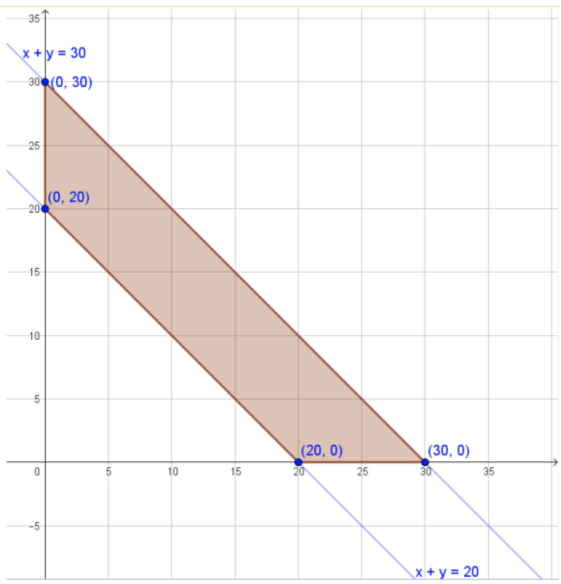
ث) برای محاسبه ضریب تغییرات برای X داریم:

$$CV = \frac{\sqrt{\frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} - \left(\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2}\right)^2}}{\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2}}$$

که چون λ_1 و λ_2 برابر نیستند مقدار این عبارت برابر ۱ نمی شود در حالی که اگر X متغیری با توزیع نمایی بود ضریب تغییرات آن برابر با ۱ می شد.

پاسخ سوال ۹

الف)



ب)

$$\int_0^{20}\int_{20-x}^{30-x} f(x,y)dy\,dx = \int_0^{20}\int_{20-x}^{30-x} kxydydx = \int_0^{20}(\frac{kxy^2}{2})|_{20-x}^{30-x}dx$$
$$= (125kx^2 - \frac{10}{3}kx^3)|_0^{20} = \frac{70000}{3}x$$

$$\int_{20}^{30}\int_0^{30-x} f(x,y)dydx = \int_{20}^{30}\int_0^{30-x} kxydydx = \int_{20}^{30}(\frac{kxy^2}{2})|_0^{30-x}dx$$
$$= (225kx^2 - 10kx^3 + \frac{1}{8}kx^4)|_{20}^{30} = 3750k$$

پ)

ابتدا، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای را برای X و Yمحاسبه می‌کنیم.

ابتدا برای بازه‌ی $0 \le x \le 20$ داریم:

$$f_X(x) = \int_{20-x}^{30-x} f(x,y)dy = \int_{20-x}^{30-x} kxydy = \frac{kx(30-x)^2}{2} - \frac{kx(20-x)^2}{2}$$
$$= 250kx - 10kx^2$$

سپس برای بازه‌ی $20 < x \le 30$ داریم:

$$f_X(x) = \int_{0}^{30-x} f(x,y)dy = \int_{0}^{30-x} kxydy = \frac{kx(30-x)^2}{2}$$
$$= 450kx - 30kx^2 + \frac{1}{2}kx^3$$

در نتیجه داریم:

$$f_X(x) = \begin{cases} 250kx - 10kx^2 & 0 \le x \le 20 \\ 450kx - 30kx^2 + \frac{1}{2}kx^3 & 20 < x \le 30 \end{cases}$$

حال، با توجه به اینکه با جابجایی X و Y در تابع چگالی احتمال، خود تابع و بازه‌ها هیچ تغییری نمی‌کنند، بدیهتا داریم:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 250ky - 10ky^2 & 0 \le y \le 20 \\ 450ky - 30ky^2 + \frac{1}{2}ky^3 & 20 < y \le 30 \end{cases}$$

X و Y از یکدیگر مستقل نمی‌باشند چرا که ضرب تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آن‌ها، برابر با تابع چگالی احتمال مشترک آن‌ها نمی‌باشد.

ت)

ابتدا برای بازه‌ی $0 \le x \le 20$ داریم:

$$P(X+Y \le 25 | 0 \le X \le 20) = \int_0^{20}\int_{20-x}^{25-x} f(x,y)dydx$$
$$= \int_0^{20}\int_{20-x}^{25-x} kxydydx = \int_0^{20} (\frac{kxy^2}{2})|_{20-x}^{25-x} dx$$
$$= (\frac{225}{4}kx^2 - \frac{5}{3}kx^3)|_0^{20} = \frac{27500}{3}k$$

سپس برای بازه‌ی $20 < x \leq 30$ داریم:

$$P(X+Y \leq 25|20 < X \leq 30) = \int_{20}^{25}\int_{0}^{25-x} f(x,y)dydx$$
$$= \int_{20}^{25}\int_{0}^{25-x} kxydydx = \int_{20}^{30} (\frac{kxy^2}{2})|_0^{25-x} dx$$
$$= (\frac{625}{4}kx^2 - \frac{25}{3}kx^3 + \frac{1}{8}kx^4)|_{20}^{30} = \frac{10625}{24}k$$

حال داریم:

$$P(X+Y \leq 25) = \frac{27500}{3}k + \frac{10625}{24}k = \frac{76875}{8}\frac{3}{81250} = 35.48\%$$

ث)

ابتدا برای بازه‌ی $0 \leq x \leq 20$ داریم:

$$\int_{0}^{20}\int_{20-x}^{30-x} (x+y)f(x,y)dydx = \int_{0}^{20}\int_{20-x}^{30-x} kx^2y + kxy^2dydx$$
$$= \int_{0}^{20} (\frac{kx^2y^2}{2} + \frac{kxy^3}{3})|_{20-x}^{30-x} dx = (\frac{19000}{6}kx^2 - \frac{250}{3}kx^3)|_0^{20}$$
$$= 600000k$$

سپس برای بازه‌ی $20 \leq x \leq 30$ داریم:

$$\int_{20}^{30}\int_{0}^{30-x} (x+y)f(x,y)dydx = \int_{20}^{30}\int_{0}^{30-x} kx^2y + kxy^2dydx$$
$$= \int_{20}^{30} (\frac{kx^2y^2}{2} + \frac{kxy^3}{3})|_0^{30-x} dx$$
$$= (4500kx^2 - 150kx^3 + \frac{1}{30}kx^5)|_{20}^{30} = \frac{310000}{3}k$$

حال داریم:

$$E(X+Y) = 600000k + \frac{310000}{3}k = \frac{2110000}{3}\frac{3}{81250} = 25.96\%$$