



در طول امتحان استفاده از ماشین حساب، تلفن همراه، جزوه، کتاب یا برگه‌ی فرمول به هیچ عنوان مجاز نمی‌باشد

۱- در یک جعبه ۳ توپ قرمز و ۲ توپ آبی وجود دارد. به طور کاملاً تصادفی توپی را از جعبه خارج کرده و رنگ آن را مشاهده می‌کنیم. اگر رنگ توپ آبی بود، آن را به جعبه باز می‌گردانیم ولی اگر رنگ آن قرمز بود، توپ را کنار می‌گذاریم (توپ را به جعبه باز نمی‌گردانیم). این کار را سه بار به صورت مستقل از یکدیگر تکرار می‌کنیم.

الف) احتمال آن که سومین توپ خارج شده از جعبه، قرمز باشد را بیابید. پاسخ نهایی را به صورت یک کسر بیان کنید. [۳ نمره]
ب) اگر بدانیم دومین توپ خارج شده قرمز است، احتمال آن که اولین توپ خارج شده نیز قرمز باشد چقدر است؟ پاسخ نهایی را ساده کرده و به صورت یک کسر بیان نمایید. [۳ نمره]

۲- می‌خواهیم ۱۰ کتاب را بین ۴ دانشجو تقسیم کنیم.
الف) اگر کتاب‌ها کاملاً مشابه باشند، احتمال آن که دانشجوی اول دقیقاً ۲ کتاب و دانشجوی چهارم حداکثر ۳ کتاب دریافت کند چقدر است؟ پاسخ نهایی را ساده کرده و به صورت یک کسر بیان نمایید. [۳ نمره]
ب) بند الف) را برای حالتی که کتاب‌ها متمایز هستند تکرار کنید. نیازی به ساده کردن پاسخ نهایی نیست. [۳ نمره]

۳- سه تاس سالم را مستقل از یکدیگر پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X مینیمم سه خال مشاهده شده باشد.
الف) احتمال پیشامد $\{X > k\}$ و امید ریاضی X را به دست آورید. [۴ نمره]
ب) اگر متغیر تصادفی S مجموع دو خال بزرگ‌تر از سه خال مشاهده شده باشد، امید ریاضی S را بیابید. [۳ نمره]

۴- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x) = \frac{e^{-\frac{|x|}{b}}}{2b}$, $b > 0$ است. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = X^2 u(X)$ تعریف می‌کنیم که در آن $u(\cdot)$ تابع پله واحد است.

الف) تابع چگالی احتمال Y را به دست آورید [۳ نمره]

ب) احتمال پیشامد $\{Y \leq b | X\}$ را پیدا کنید. [۲ نمره]

۵- متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی X و Y دارای تابع توزیع مشترک (توأم) یکنواخت بر روی ناحیه‌ی $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x^2$ می‌باشند.

الف) توابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را پیدا کنید. [۴ نمره]

ب) احتمال آن که نقطه‌ی (X, Y) (با توزیع فوق) داخل دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد، اما خارج از ناحیه‌ی $Y \leq 1 - |X|$ باشد چقدر است؟ [۲ نمره]