



۱- نمونه‌ای ۳۶ نفره از دانشجویان دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران که در سال‌های گذشته درس آمار و احتمال مهندسی داشته‌اند را انتخاب کرده و نمره آن‌ها را در این درس پرسیده‌ایم. میانگین نمرات این نمونه برابر ۱۶ به دست آمده است.

الف) یکی از دانشجویان قدیمی ادعا می‌کند که میانگین نمرات این درس در سال‌های گذشته برابر با ۱۶/۵ بوده است. یک آزمون فرض دوطرفه با $\alpha = 0.05$ طراحی کرده و بر مبنای آن تصمیم بگیرید که آیا ادعای این دانشجو صحیح است یا خیر؟ فرض کنید انحراف معیار معلوم و برابر با ۱/۵ است. [۵ نمره]

ب) با استفاده از نمونه‌ی فوق، یک بازه‌ی اطمینان ۹۶ درصد برای میانگین نمرات بیابید. [۵ نمره]

۲- در علم اقتصاد برای مدل کردن درآمد افراد، معمولاً از توزیع Pareto با تابع چگالی زیر استفاده می‌شود:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{1+\alpha}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 2$$

الف) فرض کنید نمونه‌ای n تایی از درآمد افراد به صورت x_1, \dots, x_n در اختیار داریم. با استفاده از این نمونه‌ها، تخمین بیشترین درست‌نمایی (ML) را برای پارامتر α پیدا کنید. [۴ نمره]

ب) فرض کنید درآمد افراد در ایران (برحسب میلیون تومان) از توزیع Pareto با $\alpha = \frac{9}{4}$ پیروی کند. اگر ۱۰۰ نفر ایرانی را به طور مستقل از یکدیگر انتخاب کنیم، احتمال آن که مجموع درآمد این افراد از ۱۰۴ میلیون تومان بیشتر باشد را محاسبه کنید (در صورت نیاز می‌توانید از قضیه حد مرکزی استفاده کنید). [۶ نمره]

۳- فرض کنید X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس ۹ باشند. N نیز یک متغیر تصادفی صحیح، مستقل از X_i ‌ها، با میانگین ۲ و واریانس واحد است. تعریف می‌کنیم: $S \triangleq \sum_{i=1}^N X_i$

الف) ثابت کنید $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\{\text{Var}(X|Y)\} + \text{Var}(\mathbb{E}\{X|Y\})$. [۲ نمره]

ب) واریانس S را پیدا کنید. [۴ نمره]

پ) ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی S و N را به دست آورید. [۴ نمره]

۴- تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 3(y-x), & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 3(x-y), & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توجه کنید که تابع چگالی فوق نسبت به x و y تقارن کامل دارد.

الف) ضریب همبستگی X و Y را پیدا کنید. [۶ نمره]

ب) میانگین متغیر تصادفی $Z = \min(X, Y)$ را حساب کنید. [۴ نمره]

۵- تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $f_{XY}(x, y) = \frac{x+y}{2} e^{-(x+y)}$, $x \geq 0, y \geq 0$ مفروض است. متغیر تصادفی $Z \triangleq X + Y$ به صورت Z تعریف می‌شود.

الف) حاصل $\mathbb{E}\{X^2|Z\}$ را به دست آورید. [۶ نمره]

ب) با توجه به بند الف) یا هر روش دلخواه دیگر، $\mathbb{E}\{XY|Z\}$ را نیز محاسبه کنید. [۴ نمره]

جدول CDF توزیع نرمال استاندارد

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.10	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.20	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.30	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.40	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.50	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.60	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.70	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.80	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.90	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.00	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.10	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.20	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.30	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.40	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.50	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.60	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.70	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.80	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.90	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.00	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.10	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.20	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.30	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.40	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.50	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.60	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.70	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.80	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.90	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861

متغیر تصادفی	تابع چگالی / جرم احتمال	میانگین و واریانس
پواسن	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$	$\eta = \lambda, \sigma^2 = \lambda$
یکنواخت	$\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$	$\eta = \frac{b+a}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
نمایی	$\mu e^{-\mu x}, 0 \leq x$	$\eta = \frac{1}{\mu}, \sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$
نرمال	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$	$\eta = \eta, \sigma^2 = \sigma^2$
Pareto	$\frac{\alpha}{(1+x)^{1+\alpha}}, \alpha > 2, x \geq 0$	$\eta = \frac{1}{\alpha-1}, \sigma^2 = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$