University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

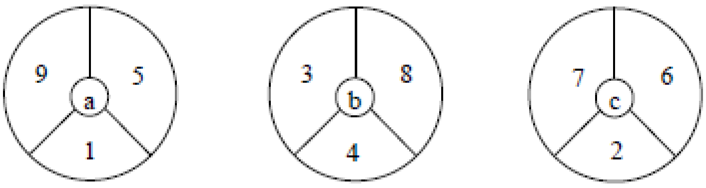
تمرین اول - اصول احتمال

معین و علیرضا

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۷/۱۸

سؤال ۱.

دو بازیکن در یک بازی بصورت زیر شرکت می‌کنند. بازیکن A یکی از سه گردونه زیر را انتخاب و سپس بازیکن B یکی از دو گردونه باقیمانده را انتخاب می‌نماید. هر دو بازیکن گردونه ها را به چرخش درآورده و گردونه‌ای که با عدد بزرگتر متوقف می‌شود برنده اعلام می‌گردد. فرض کنید هر گردونه با شانس برابر در یکی از نواحی متوقف گردد. در این صورت آیا شما ترجیح می‌دهید بازیکن A باشید یا بازیکن B؟ پاسخ خود را شرح دهید.



پاسخ.

ترجیح می‌دهیم بازیکن B باشیم. اگر احتمال برد یکی از این سه گردونه، بیشتر از دوتای دیگر بود، ترجیح می‌دادیم بازیکن A باشیم تا با انتخاب گردونه بهتر، بتوانیم برنده بازی باشیم. اما در اینجا وضع فرق می‌کند و هیچ یک از سه گردونه از دوتای دیگر بهتر نیست، چرا که:

- گردونه a با احتمال $\frac{5}{9}$ گردونه b را می‌برد.
- گردونه b با احتمال $\frac{5}{9}$ گردونه c را می‌برد.
- گردونه c با احتمال $\frac{5}{9}$ گردونه a را می‌برد.

به عنوان مثال شیوه بدست آوردن احتمال برد a از b را در نظر بگیرید. کلاً ۹ حالت برای مسابقه دو گردونه وجود دارد که در ۵ حالت، گردونه a گردونه b را می‌برد. یعنی اگر $a = ۹$ باشد و b مقادیر ۳، ۴ یا ۸ را بیاورد یا $a = ۵$ باشد و b مقادیر ۳ یا ۴ را بیاورد، a برنده است و در ۴ حالت دیگر b برنده است. پس احتمال برد a از b، $\frac{5}{9}$ است. نحوه بدست آوردن دو احتمال دیگر نیز به همین شکل می‌باشند.

بنابراین گردونه a از b بهتر، b از c بهتر و c از a بهتر است. حال اگر ما نفر دوم باشیم، نفر اول هر گردونه‌ای را انتخاب کند، گردونه بهتری وجود دارد که می‌توانیم با انتخاب آن، شانس برنده شدن خود را بیشتر کنیم.

سؤال ۲.

یک تاس را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم و اعداد به دست آمده را در یک سطر پشت هم می‌نویسیم. احتمال اینکه این اعداد دقیقا شامل ۳ بلوک با اعداد زوج باشند چه قدر است؟ منظور از یک بلوک تعدادی عدد پشت سر هم هستند. به عنوان مثال دنباله‌ی $۱,۲,۸,۶,۵,۳,۷,۸,۲$ به ترتیب از چپ به راست شامل یک بلوک با اعداد فرد (۱)، یک بلوک با اعداد زوج $(۲,۸,۶)$، یک بلوک با اعداد فرد $(۵,۳,۷)$ و یک بلوک با اعداد زوج $(۸,۲)$ است.

پاسخ .

پیشامد A را پیشامد خواسته شده در سوال و مجموعه U را مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

$$N(U) = ۶^{۱۰}$$

حال می‌خواهیم $N(A)$ را محاسبه کنیم. معادله سیاله زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$O_۱ + E_۱ + O_۲, + E_۲ + O_۳ + E_۳ + O_۴ = ۱۰$$

که در آن O_i نشان دهنده تعداد اعداد فرد بلوک i ام از اعداد فرد و E_i نشان دهنده تعداد اعداد زوج بلوک i ام از اعداد زوج است.

با توجه به این تعریف اگر بخواهیم دقیقا ۳ بلوک زوج داشته باشیم $O_۱, O_۴$ می‌توانند ۰ باشند و بقیه باید حداقل یک باشند. پس اگر تعریف کنیم $T_۱ = O_۱ + ۱, T_۴ = O_۴ + ۴$ داریم:

$$T_۱ + E_۱ + O_۲, + E_۲ + O_۳ + E_۳ + T_۴ = ۱۲$$

که در این معادله همه متغیر ها باید حداقل یک باشند، در نتیجه تعداد حالات ممکن برای مقدار دهی به این معادله برابر $\binom{۱۱}{۶}$ است.

هر تاس نیز با توجه به اینکه در یک بلوک فرد یا زوج بیاید ۳ حالت دارد. پس داریم:

$$N(A) = \binom{۱۱}{۶} \times ۳^{۱۰} \to P(A) = \frac{N(A)}{N(U)} = \frac{\binom{۱۱}{۶} \times ۳^{۱۰}}{۶^{۱۰}} = \frac{\binom{۱۱}{۶}}{۲^{۱۰}}$$

سؤال ۳.

به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را دور دایره چید به طوری که مجموع هر سه عدد مجاور بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ .

چهار عدد متوالی مانند a, b, c, d را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
(۱) a + b + c &\equiv ۰ \pmod{۳} \\
(۲) b + c + d &\equiv ۰ \pmod{۳} \\
(۱),(۲) &\implies a \equiv d \pmod{۳}
\end{aligned}$$

پس نتیجه می گیریم اعدادی که میان آن‌ها دو عدد دیگر قرار دارد به پیمانه‌ی ۳ همنهشت هستند.

حال عدد ۱ را بالای دایره قرار می‌دهیم و جای آن را ثابت می‌کنیم. در این صورت ۲ انتخاب برای جایگذاری اعداد ۴ و ۷ (که به پیمانه ۳ با ۱ همنهشت هستند داریم) حال برای جایگاه بعد از ۱ دو انتخاب داریم که عددی که در این جایگاه قرار میگیرد به پیمانه ۳ با ۰ همنهشت

باشد یا ۲ . بعد از مشخص کردن این موضوع اعداد ۸ ,۵ ,۲ را به !۳ حالت و اعداد ۹ ,۶ ,۳ را نیز به !۳ حالت می‌توان چید. در نتیجه پاسخ نهایی برابر است با

$$۲ \times ۲ \times ۳! \times ۳! = ۱۴۴$$

سؤال ۴.

دو کارت قرمز و یک کارت آبی در یک ردیف بصورتی قرار دارند که کارت آبی در وسط دو کارت دیگر است. هر بار جای کارت میانی را با یکی از دو کارت دیگر عوض می‌کنیم. پس از n بار تکرار چقدر احتمال دارد که در وضعیت نهایی، کارت آبی بین دو کارت دیگر قرار گرفته باشد؟

پاسخ .

تعداد حالات نهایی که کارت آبی بین دو کارت قرمز قرار دارد را a_n می‌نامیم. چون در مرحله n ام کارت آبی وسط می‌باشد، در مرحله $n-۱$ یکی از دو کارت قرمز وسط بوده و چون تعداد کل حالات ۲^n است، داریم:

$$a_n = ۲^{n-۱} - a_{n-۱}$$

برای حل رابطه بازگشتی، معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$(r+۱)(r-۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad r_۱ = -۱ \quad , \quad r_۲ = ۲$$

پس فرم کلی جواب بصورت زیر است:

$$a_n = \alpha(-۱)^n + \beta(۲)^n$$

در حالت اولیه تنها یک حالت وجود دارد که کارت آبی میان دو کارت دیگر است. پس $a_۰ = ۱$ و با یک بار جابجایی هر کارت، در هیچ حالتی کارت آبی میان دو کارت قرمز قرار ندارد. پس $a_۱ = ۰$ می‌باشد. با جایگذاری شرایط اولیه، ضرایب را بدست می‌آوریم:

$$a_۰ = \alpha + \beta = ۱ \quad , \quad a_۱ = \alpha(-۱) + \beta(۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{۲^n}{۳} + \frac{۲ \times (-۱)^n}{۳}$$

اگر A_n را پیشامد آنکه پس از n بار تکرار، در حالت نهایی کارت آبی بین دو کارت دیگر قرار گیرد تعریف کنیم، برای بدست آوردن احتمال رخداد آن، تعداد حالت های مطلوب را بر کل حالات، یعنی ۲^n تقسیم می‌کنیم:

$$P(A_n) = \frac{a_n}{۲^n} = \frac{\frac{۲^n}{۳} + \frac{۲\times(-۱)^n}{۳}}{۲^n}$$

با کمی ساده سازی جواب نهایی را بدست می‌آوریم:

$$P(A_n) = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times (\frac{-۱}{۲})^n$$

سؤال ۵.

با در نظر گرفتن تمام زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی اعداد از ۱ تا n به طوری که $۱ \leq r \leq n$، میانگین کوچکترین عضو تمام این زیرمجموعه‌ها را محاسبه می‌کنیم. نشان دهید که این میانگین برابر است با $\frac{n+۱}{r+۱}$.

راهنمایی: با استفاده از قاعده پاسکال، ابتدا نشان دهید: $\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۲}{r-۱} + \cdots + \binom{r-۱}{r-۱}$

پاسخ .

در ابتدا، تعداد دفعات مینیمم شدن هر کدام از اعضای $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را در زیرمجموعه‌هایش می‌شماریم.

برای شمارش تعداد دفعاتی که عدد ۱ کوچکترین عضو زیرمجموعه می‌شود، کافی است از میان $n-۱$ عنصر، $r-۱$ عنصر انتخاب کنیم. به روش مشابه، برای شمارش تعداد دفعاتی که عدد ۲ کوچکترین عضو زیرمجموعه می‌شود، مقدار $\binom{n-۲}{r-۱}$ را بدست می‌آوریم. با همین استدلال، برای دیگر اعضا نیز بدست می‌آید.

می‌دانیم که تعداد کل زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، برابر است $\binom{n}{r}$. به این ترتیب، میانگین وزن‌دار خواسته شده را بدست می‌آوریم:

$$m = \frac{\binom{n-۱}{r-۱} + ۲\binom{n-۲}{r-۱} + ۳\binom{n-۳}{r-۱} + \cdots + (n-r+۱)\binom{n-(n-r+۱)}{r-۱}}{\binom{n}{r}}$$

$$m = \frac{\left(\binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۲}{r-۱} + \cdots + \binom{r-۱}{r-۱}\right) + \left(\binom{n-۲}{r-۱} + \binom{n-۳}{r-۱} + \cdots + \binom{r-۱}{r-۱}\right) + \cdots + \binom{r-۱}{r-۱}}{\binom{n}{r}}$$

$$m = \frac{\binom{n}{r} + \binom{n-۱}{r} + \cdots + \binom{r}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{n+۱}{r+۱}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+۱}{r+۱}$$

سؤال ۶.

در یک بازی که بصورت پرتاب متوالی یک سکه می‌باشد، منظور از H شیر آمدن سکه و منظور از T خط آمدن آن است. می‌دانیم که احتمال H آمدن این سکه p و احتمال T آمدن آن $q = ۱ - p$ است. اگر دو H پشت سرهم یا دو T، پشت سرهم بیاید پرتاب سکه‌ها تمام می‌شود. اگر بازی با HH تمام شود، فرد برنده این بازی است و اگر با TT تمام شود، فرد بازنده بازی خواهد بود. برای مثال اگر بازی بصورت $HTH\underline{TT}$ پایان یابد، فرد بازنده و اگر بصورت $THTHT\underline{HH}$ پایان یابد فرد برنده است. احتمال برد فرد را بیابید.

پاسخ .

توجه کنید که نباید در پرتاب های سکه TT داشته باشیم. حالت های ممکن را به دو صورت کلی می‌نویسیم:

۱. پرتاب اول H بیاید:

$$HH, HTHH, ..., H(TH)^iH, ...$$

با جایگذاری p و q و جمع‌کردن حالت های بالا، آن را بصورت یک دنباله هندسی با قدر نسبت pq و جمله اول $p^۲$ می‌نویسیم :

$$\sum_{i=۰}^{\infty}(pq)^i \times p^۲$$

۲. پرتاب اول T بیاید:

$$THH, THTHH, ..., T(HT)^iHH, ...$$

این بار نیز با جایگذاری p و q و جمع‌کردن حالت های بالا، آن را بصورت یک دنباله هندسی با قدر نسبت pq و جمله اول $(q)p^۲$ می‌نویسیم :

$$\sum_{i=۰}^{\infty}(pq)^i \times (q)p^۲$$

پیشامد W را برد فرد در بازی تعریف می‌کنیم، با جمع دو حالت بالا داریم:

$$P(W) = \sum_{i=۰}^{\infty}(pq)^i \times p^۲ + \sum_{i=۰}^{\infty}(pq)^i \times (q)p^۲$$

با استفاده از رابطه جمع دنباله هندسی با قدر نسبت کمتر از ۱ داریم :

$$P(W) = \frac{p^۲}{۱-pq} + \frac{p^۲ \times q}{۱-pq} = \frac{p^۲ \times (۲-p)}{۱-p(۱-p)}$$

سؤال ۷.

با ۷ مهره به رنگ‌های سبز، صورتی، بنفش، نارنجی، نقره‌ای، طلایی و آبی چند دست‌بند می‌توان ساخت، به طوری که هیچ دوتایی از مهره‌های صورتی، نارنجی و طلایی مجاور نباشند؟

پاسخ .

ابتدا ۴ مهره سبز، بنفش، نقره‌ای و آبی را بدون اعمال هیچ شرط خاصی، درون یک حلقه می‌چینیم. تعداد حالات مربوط به آن با توجه به تعداد جایگشت‌های دوری، برابر با ۳! است. حال از ۴ جای بین آن‌ها ۳ جا را برای ۳ مهره باقی‌مانده که نباید مجاور هم باشند، به $\frac{۴!}{۱!}$ حالت انتخاب می‌کنیم (ترتیب). همچنین نگاه به دست‌بند از ۲ سوی متفاوت حالت جدیدی را به وجود نمی‌آورد، پس طبق اصل تقارن حاصل را تقسیم بر ۲ می‌کنیم:

$$\frac{۳! \times \frac{۴!}{۱!}}{۲}$$

سؤال ۸.

تمرین کامپیوتری سری اول با موضوع تعریف حدی احتمال را می‌توانید از طریق این لینک [1] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA1_S1_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل afzaliaref.aa@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [2] در دسترس است.

[1] https://colab.research.google.com/drive/1cnpfISB4Hsbo6r68TbDmhU9lfNPpjrfj?usp=sharing
[2] https://colab.research.google.com/drive/1VIW-SC5X6x3-x3M72P770C6ABlMgLW1Z?usp=sharing