

به نام خدا



دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده برق و کامپیوتر



درس آمار و احتمال

تمرین شماره ۴

آبان ماه ۱۳۹۹

سوال ۱

نشان دهید تابع $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ برای پارامتر مثبت λ یک تابع چگالی احتمال است. سپس میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی با این تابع چگالی را بر حسب λ محاسبه کنید.

سوال ۲

فرض کنید امید به زندگی انسان توسط تابع pdf زیر مدل می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{80} e^{-\frac{x}{80}}, \quad 0 < x < \infty$$

الف) احتمال $P(X > 10)$ و همچنین $P(X > 90 | X > 80)$ را محاسبه کنید.

ب) یکی دیگر از مدل‌هایی که می‌تواند برای امید به زندگی استفاده شود، تابع توزیع زیر است:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{a}{b}\right)(e^{bx} - 1)\right], \quad 0 < x < \infty, \quad a > 0, \quad b > 0$$

برای این تابع، $f(x) = F'(x)$ را محاسبه کنید.

سوال ۳

فرض کنید قطر تنه‌ی گونه‌ی خاصی از درختان توزیع نرمالی با $\mu = 8.8$ و $\sigma = 2.8$ است. (اعداد بر حسب اینچ هستند. برای محاسبه‌ی مقادیر از جدول توزیع نرمال استاندارد استفاده کنید)

الف) احتمال این که قطر یک درخت از این دسته که به طور رندوم انتخاب شده است، حداقل ۱۰ اینچ باشد چقدر است؟ احتمال این که بیش از ۱۰ اینچ باشد (شامل خود ۱۰ اینچ نیست) چقدر است؟

ب) احتمال این که قطر یک درخت از این دسته که به طور رندوم انتخاب شده است، بیش از ۲۰ اینچ باشد، چقدر است؟

پ) احتمال این که قطر یک درخت از این دسته که به طور رندوم انتخاب شده است، بین ۵ تا ۱۰ اینچ باشد؟

ت) به ازای چه مقداری برای c ، 98% درصد از تمام مقادیر قطرهای در بازه $(c - 8.8, c + 8.8)$ قرار می‌گیرند؟

ث) اگر 4 درخت مستقل از هم انتخاب شوند، احتمال این که حداقل یکی از درختان قطری بزرگ‌تر از 10 اینچ باشد چقدر است؟

سوال ۴

فرض کنید که در یک کارخانه تولید گوشی از یک ربات برای سر هم کردن قطعات موبایل استفاده می‌شود. برای این ربات یک نرم افزار نوشته شده است که متاسفانه باگ دارد و به علت همین باگ هم گاهی به مشکل می‌خورد. اگر این نرم افزار 400 ساعت اجرا شود، 2 بار خطا رخ می‌دهد.

الف) فرض کنید این ربات برای سر هم کردن قطعات یک گوشی خاص می‌خواهد استفاده شود که این عملیات 3 ساعت به طول می‌انجامد. اگر باگ مذکور خودش را نشان دهد عملکرد ربات را بلافاصله متوقف می‌کنند. احتمال رخ دادن این خطا برای انجام این کار چقدر است؟

ب) فرض کنید این ربات برای سر هم کردن 10 هزار گوشی به کار برود. از توزیع نرمال برای تخمین احتمال آنکه در سر هم کردن بیش از 180 گوشی خطا بروز کند، استفاده کنید. از جواب بخش الف برای این بخش استفاده کنید.

سوال ۵

set (مجموعه)، یک گروه از اشیا بدون ترتیب می‌باشد. یک روش پیاده‌سازی set، به صورت زیر می‌باشد: 3 تابع Hash مستقل از یکدیگر با نام‌های H_1, H_2 و H_3 را در نظر بگیرید. هر کدام از این توابع، یک رشته (String) به عنوان ورودی دریافت می‌کنند و یک اندیس بین 0 تا n (به جز خود n) به آرایه n تایی را باز می‌گردانند.

برای اضافه کردن یک رشته به Set، رشته ورودی را به هر 3 تابع H_1, H_2 و H_3 می‌دهیم. هر کدام از این توابع یک اندیس باز می‌گردانند و آن اندیس‌ها را در آرایه n تایی، یک می‌کنیم. دقت کنید که در ابتدا، تمام خانه‌های آرایه 0 می‌باشند. مثال زیر را برای $n=10$ در نظر بگیرید؛ در شکل زیر، حالت ابتدایی را نمایش می‌دهد که تمام خانه‌های آرایه، 0 می‌باشند.

Index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Value:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

برای اضافه کردن کلمه‌ی ali به مجموعه، ابتدا آن را به سه تابع Hash می‌دهیم و خروجی آن‌ها بدست می‌آیند.

$$H_1("ali") = 4 \quad H_2("ali") = 7 \quad H_3("ali") = 8$$

حال این اندیس‌ها در آرایه n تایی را ۱ می‌کنیم و خواهیم داشت:

Index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Value:	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0

n را ۹۰۰۰ در نظر بگیرید و فرض کنید تا کنون، ۱۰۰۰ رشته را ذخیره کرده‌اید.

همچنین به نکات زیر دقت داشته‌باشید:

- رشته‌های ورودی از یکدیگر مستقل می‌باشند.
- مقدار هر خانه از آرایه، مستقل از خانه دیگر می‌باشد.
- اگر بیتی ۱ شود، دیگر هرگز ۰ نمی‌شود.
- هر سه تابع Hash گفته‌شده، خروجی را با یک توزیع uniform تولید می‌کنند.

الف) احتمال اینکه اندیس ۰، مقدار ۰ داشته‌باشد را محاسبه کنید.

ب) برای چک کردن اینکه رشته ورودی از قبل در set وجود دارد یا نه، رشته را به هر سه تابع Hash می‌دهیم و ۳ خروجی از آن‌ها بدست می‌آوریم (همانطور که گفته‌شد این ۳ خروجی الزاماً با یکدیگر متفاوت نمی‌باشند). اگر حتی یکی از خانه‌های آرایه در ۳ اندیس بدست آمده، ۰ باشد، آن رشته در Set موجود نمی‌باشد در غیر اینصورت، ممکن است آن رشته در Set باشد (ممکن است آن ۳ خانه نه بخاطر این رشته و بخاطر وجود رشته‌های دیگر، یک شده‌باشند).

به چه احتمالی، رشته‌ای که از قبل به آرایه اضافه نشده‌باشد، به اشتباه، موجود در آرایه در نظر گرفته می‌شود؟ در واقع به چه احتمالی، هر ۳ اندیس بدست آمده از توابع Hash برای آن رشته، در آرایه مقدار ۱ خواهند داشت؟

پ) در این مساله، ما از ۳ تابع Hash استفاده کردیم. آیا استفاده بیشتر از یک تابع Hash، الزامی می‌باشد؟ قسمت ب را یکبار دیگر با فرض صرفاً یک تابع Hash انجام بدهید و نتایج را مقایسه کنید.

سوال ۶

فرض کنید توزیع احتمال X دارای pdf زیر است. با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{k}{x^\alpha}, & x \geq 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید. α باید در چه محدوده ای باشد؟

ب) تابع cdf این توزیع را بیابید.

پ) $E(x)$ این توزیع را بیابید.

ت) نشان دهید $\ln(X/5)$ توزیعی نمایی با پارامتر $\alpha - 1$ است.

سوال ۷

X و Y ، دو متغیر تصادفی گسسته می‌باشند. تابع احتمال مشترک X و Y ، در جدول زیر داده شده‌است. با توجه به آن، به سوالات پاسخ دهید:

الف) تابع احتمال حاشیه‌ای X و Y را محاسبه کنید.

ب) احتمال آنکه X و Y ، حداکثر ۱۵ باشند را

محاسبه کنید.

پ) آیا X و Y مستقل از یکدیگر می‌باشند؟

پاسخ خود را توجیه کنید.

ت) $E(X+Y)$ را محاسبه کنید.

ث) $E(|X-Y|)$ را محاسبه کنید.

p(x,y)		y		
		12	15	20
x	12	0.05	0.05	0.1
	15	0.05	0.1	0.35
	20	0	0.2	0.1

سوال ۸

در برخی از سیستم‌ها به هر کاربر یکی از دو تسهیلات خدماتی تخصیص داده می‌شود. اگر مدت زمان تخصیص تسهیلات i ام به یک کاربر، یک توزیع نمایی با پارامتر λ_i (که i برابر ۱ یا ۲ است) و p هم نمایانگر درصد مشتریانی که تسهیلات ۱ را دریافت می‌کنند باشد، آنگاه تابع pdf متغیر X که نمایانگر زمان استفاده از سرویس توسط یک مشتری رندم است به صورت زیر است:

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2, p) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

به این توزیع اغلب توزیع hyperexponential گفته می شود.

الف) نشان دهید که f یک تابع چگالی احتمال است.

ب) تابع CDF را بدست آورید.

پ) همانطور که بیان شد تابع f تابع pdf برای متغیر X است. $E(X)$ را محاسبه کنید.

ت) با توجه از اینکه اگر X یک توزیع نمایی با پارامتر λ داشته باشد داریم $E(X^2) = 2/\lambda^2$ مقدار $E(X^2)$ را در صورتی که f تابع pdf متغیر X باشد محاسبه کنید. سپس $V(X)$ (واریانس) را محاسبه کنید.

ث) اگر ضریب تغییرات برای یک متغیر تصادفی برابر σ/μ باشد، ضریب تغییرات یک متغیر تصادفی نمایی برابر چه مقداریست؟ حال اگر X یک توزیع hyperexponential داشته باشد مقدار ضریب تغییرات X چیست؟

سوال ۹

دو سد بوکان و شهرچای، در استان آذربایجان غربی قرار دارند و قرار است آب از آن‌ها به سمت دریاچه ارومیه انتقال پیدا کند. X ، حجم مخزن سد بوکان و Y ، حجم مخزن سد شهرچای (هر دو بر حسب میلیون متر مکعب) می باشد.

تابع چگالی احتمال X و Y برابر است با:

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & x \geq 0, y \geq 0, 20 \leq x + y \leq 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

با توجه به تابع چگالی گفته شده، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) ناحیه‌ی چگالی مثبت را رسم کنید.

ب) مقدار k را مشخص کنید (محاسبات لازم را نیز بنویسید).

پ) آیا X و Y مستقل از یکدیگر می باشند؟ (از محاسبه تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y استفاده کنید).

ت) $P(x + y \leq 25)$ را محاسبه کنید.

ث) مقدار مورد انتظار (امید ریاضی) برای مجموع آب دو سد بوکان و شهرچای چقدر می باشد؟