



University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین سوم - متغیر تصادفی، میانگین و واریانس

محمدرضا و فاطمه

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۸/۹

سؤال ۱.

s ظرف و n توپ داریم به طوری که $n \geq s$ است. آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن هر توپ در یک سبد به صورت تصادفی قرار گرفته باشد (هر توپ با احتمال مساوی می تواند در هر یک از سبدها قرار گیرد). نحوه ی قرارگیری هر توپ، مستقل از توپ دیگر می باشد و هر سبد، قابلیت گنجایش هر تعداد توپ را دارد. متغیرهای تصادفی مدنظر خود را به این صورت تعریف می کنیم:

۱. برای هر $i = 1, 2, \dots, s$ متغیر تصادفی X_i را تعداد توپ ها در سبد i در نظر می گیریم.
۲. برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ متغیر تصادفی Y_k را تعداد سبدهایی در نظر می گیریم که دقیقاً k توپ دارند.

حالا به سوالات زیر پاسخ دهید:

آ) PMF ، امید ریاضی و واریانس X_i را بدست آورید.

ب) امید ریاضی و واریانس Y_k را بدست آورید. برای واریانس می توانید فرض کنید $n \geq 2k$.

سؤال ۲.

اگر $X \sim Poi(\lambda)$ باشد، امید ریاضی متغیرهای تصادفی $Y = 2^X$ و $Z = \frac{1}{X+1}$ را محاسبه کنید.

سؤال ۳.

سه تاس سالم را مستقل از یکدیگر پرتاب می کنیم. فرض کنید X کمینه سه عدد مشاهده شده باشد.

آ) احتمال اینکه $X > k$ را برای همه اعداد صحیح k محاسبه کنید.

ب) امید ریاضی X را به دست آورید.

ج) اگر متغیر تصادفی S مجموع دو عدد بزرگتر، از سه عدد مشاهده شده باشد، امید ریاضی S را بیابید.

سؤال ۴.

توابع بازگشتی زیر را در نظر بگیرید، اگر Y مقدار بازگشتی تابع $\text{Far}()$ باشد، امید ریاضی و واریانس Y را حساب کنید.

```
int Near() {
    int b = randomInteger(1, 4); // equally likely to be 1, 2, 3 or 4
    if (b == 1) return 2;
    else if (b == 2) return 4;
    else if (b == 3) return (6 + Near());
    else return (8 + Near());
}

int Far() {
    int a = randomInteger(1, 3); // equally likely to be 1, 2 or 3
    if (a == 1) return 2;
    else if (a == 2) return (2 + Near());
    else return (4 + Far());
}
```

سؤال ۵.

هر یک از اعضای کادر درمان یک بیمارستان به طور متوسط یک بار در هر ۴ ماه به کرونا مبتلا می‌شوند. داروی جدیدی به تازگی تولید شده که قادر است سیستم ایمنی بدن را در مقابل ویروس کرونا تقویت کند. دانشمندان با آزمایش‌های انجام شده پی برده‌اند که این دارو ۷۵٪ موثر است و می‌تواند احتمال ابتلا به کرونا را از متوسط یک بار در ۴ ماه به یک بار در ۶ ماه کاهش دهد. این دارو برای ۲۵٪ افراد نیز اثر ندارد و احتمال ابتلا را تغییری نمی‌دهد. اگر یکی از اعضای کادر درمان اقدام به مصرف این دارو کند و در یک سال هرگز به کرونا مبتلا نشود، چقدر احتمال دارد که مصرف این دارو برای او موثر واقع شده باشد؟ (به افتخار کادر درمانی به عنوان مدافعان سلامت، در خط مقدم مقابله با کرونا)

سؤال ۶.

حجم ترافیک اتوبان قزوین-رشت در ایام غیر تعطیل به طور متوسط ۲۵۰ خودرو در هر ساعت گزارش شده است که معمولاً ۸۰٪ آنها سواری، ۱۰٪ اتوبوس و ۱۰٪ کامیون هستند. عوارضی اتوبان برای هر خودروی سواری، اتوبوس و کامیون به ترتیب ۹۰۰۰، ۱۶۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ تومان است.

آ) احتمال اینکه در یک دقیقه خاص بیش از ۵ خودرو از محل عوارضی عبور کنند، چقدر است؟ پاسخ نهایی را تا حد امکان ساده کنید.

ب) انتظار دارید که مبلغ کل عوارض دریافتی در طول دوره هشت ساعته چقدر باشد؟

سؤال ۷.

یک ریاضی‌دان سیگاری، یک پاکت کبریت در جیب راست خود و پاکتی دیگر را در جیب چپ خود قرار می‌دهد. هر زمانی که بخواهد یک سیگار بکشد، به احتمال p یک کبریت از جیب چپ و به احتمال $1-p$ یک کبریت از جیب راست خود (به صورت مستقل از سیگارهای

قبلی) برمی دارد. هر بسته سیگار در ابتدا n کبریت دارد. تابع جرم احتمال تعداد کبریت‌های باقی‌مانده در زمانی که ریاضی‌دان متوجه خالی شدن یکی از جعبه‌های کبریت می‌شود را بیابید.

سؤال ۸.

امتیازی: نمره‌ی تکمیلی برای این مبحث به دنبال دارد.

شما وارد یک مهمانی می‌شوید و بر روی میز یک پیتزای پیرونی و یک سبزیجات می‌بینید. هر پیتزا ۱۲ قطعه دارد و احتمال انتخاب یک قطعه از پیتزای پیرونی با احتمال انتخاب یک قطعه از پیتزای سبزیجات توسط مهمان‌ها برابر است. احتمال این که در زمان خورده شدن آخرین قطعه از پیتزای پیرونی حداقل سه قطعه از پیتزای سبزیجات باقی‌مانده باشد، چقدر است؟ (نیازی به ساده کردن جواب آخر نیست).

سؤال ۹.

اختیاری: این تمرین تحویل ندارد. در صورت تمایل برای بحث و گفتگو پیرامون این تمرین، با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir در ارتباط باشید.

بخش چهارم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع مدل بیز ساده لوح را می‌توانید از طریق [این لینک](#)^۱ دریافت کنید.

سؤال ۱۰.

بخش پنجم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع رابطه‌ی توزیع دوجمله‌ای با برنولی را می‌توانید از طریق [این لینک](#)^۲ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA3_S5_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
 - فایل کد خود را با ایمیل afzaliaref.aa@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

سؤال ۱۱.

سری ششم تمرینات کامپیوتری با موضوع شبیه‌سازی مسائل در محیط R را می‌توانید از طریق [این لینک](#)^۳ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA3_S6_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
- فایل کد خود را با ایمیل gelammv6@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.

^۱<https://colab.research.google.com/drive/17RDoA699VTBygzSluEjhyC61KxG6QPIA?usp=sharing>

^۲<https://colab.research.google.com/drive/1JcREmMum2ynwwjzDMZPj9kgwkGSxS?usp=sharing>

^۳<https://colab.research.google.com/drive/1HGvM-O8ng2WLL-TpwwAbcL5B6Om6IGpm?usp=sharing>

- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.