

به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر آمار و احتمال مهندسی

تمرین کتبی هفتم
موعد تحویل: یکشنبه ۱۵ دی ماه

۱. فرض کنید $\{X_i\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی i.i.d با توزیع یکسان نرمال استاندارد باشد. حد زیر را محاسبه نمایید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{X_1^4 + X_2^4 + \dots + X_n^4}{n} \right)$$

راهنمایی: تابع مولد گشتاور توزیع نرمال استاندارد برابر است با: $M_Z(s) = \frac{1}{2}e^{s^2}$.

۲. فرض کنید تعداد کاراکترهای هر کلمه فارسی برابر با $1 + L$ است که L یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر ۳ است. دانشجویی در حال تایپ چکیده پایان نامه خود در سیستم آنلاین تحویل پایان نامه دانشگاه است. در صورتی که گنجایش textbox های این سیستم حداکثر ۱۷۰۰ کاراکتر (بدون در نظر گرفتن فاصله کلمات و نشانه هایی نظیر نقطه و ویرگول و ...) و کلمات تایپ شده مستقل از هم باشند:

(آ) اگر چکیده پایان نامه این دانشجو ۴۰۰ کلمه باشد، احتمال این که این چکیده در textbox جا نشود را به کمک قضیه حد مرکزی تخمین بزنید.

(ب) فرض کنید توزیع تعداد کلمات در چکیده پایان نامه دانشجویان کارشناسی ارشد، یکنواخت گسسته بر روی مجموعه $\{۳۰۱, ۳۰۰, \dots, ۴۰۰\}$ است. حداکثر احتمال این که چکیده یک دانشجو در یک textbox جا نشود را به کمک نامساوی چبیشف محاسبه کنید.

۳. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n نمونه های تصادفی مستقل از یک توزیع با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_X(x; \theta, j) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta, j = 1 \\ \theta e^{-\theta x} & x \geq 0, j = 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(آ) تخمین ML را برای پارامترهای توزیع j, θ بیابید.

(ب) اگر نمونه های تصادفی به صورت ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۱۱ باشند، مقادیر تخمینی برای θ و j چه خواهد بود؟

۴. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n نمونه ای با اندازه n از توزیع یکنواخت $U(a, b)$ باشد. به روش گشتاور تخمینی برای a و b پیدا کنید.

۵. میانگین معدل ۱۰۰ دانشجوی دانشگاه تهران که به صورت تصادفی انتخاب شده اند برابر با ۱۵ و انحراف معیار آن برابر با ۲ است. یک بازه اطمینان ۹۹٪ برای میانگین معدل کل دانشجویان دانشگاه تهران پیدا کنید.

۶. در یک نظرسنجی راجع به کیفیت غذای سلف دانشگاه، ۵۱ درصد شرکت کنندگان اعلام کرده اند که از کیفیت غذا رضایت دارند. حاشیه خطای این نظرسنجی برای بازه اطمینان ۹۵٪ برابر با $\pm 1\%$ گزارش شده است.

(آ) اندازه نمونه مورد استفاده در این نظرسنجی را تخمین بزنید.

(ب) با اندازه نمونه بخش الف، یک بازه اطمینان ۹۸٪ برای درصد دانشجویان راضی از کیفیت غذای سلف بسازید.