۱.در یک گروه ژوری ۴ نفره، سه نفر از اعضا گروه، مستقل از یکدیگر، با احتمال p در مورد موضوعی تصمیم درست را اتخاذ می‌کنند و عضو چهارم برای تصمیم‌گیری از یک سکه سالم استفاده می‌کند. در حالتی که رأی‌ها برابر باشد (دو به دو)، نظر گروه ژوری برخلاف نظر فردی است که از سکه برای تصمیم‌گیری استفاده کرده است.

گروه ژوری دیگری شامل سه نفر است که هر یک، مستقل از دیگری، با احتمال pبه‌درستی در مورد موضوعی تصمیم می‌گیرد. با ذکر دلیل مناسب تعیین کنید که کدام یک از این دو گروهِ ژوری در اتخاذ تصمیم درست موفق‌تر عمل می‌کنند؟

برای گروه اول احتمال تصمیم درست برابر جمع احتمال حالات زیر است:

۱)هر ۴ نفر تصمیم صحیح، ۲) ۳ نفر تصمیم صحیح (دو حالت که نفر چهارم صحیح تصمیم گرفته یا خیر)، ۳) دو نفر صحیح و دو نفر غلط که یکی از افرادی که اشتباه کرده نفر چهارم است.

$$P(T) = \frac{1}{2}p^3 + \left(\frac{1}{2}\binom{3}{2}p^2(1-p) + \frac{1}{2}p^3\right) + \frac{1}{2}\binom{3}{2}p^2(1-p) = 3p^2 - 2p^3$$

برای گروه دوم دو حالت داریم:

۱) هر سه درست تصمیم گرفته باشند

۲) دو نفر از سه نفر درست تصمیم گرفته باشند

$$P(T) = p^3 + \binom{3}{2}p^2(1-p) = 3p^2 - 2p^3$$

بنابراین عملکرد دو گروه یکسان است.

۲.فرض کنید n سکه با احتمال شیر آمدنِ p، مستقل از یکدیگر، به‌صورت توأم پرتاب می‌شوند. اگر سکه‌ای شیر را نشان دهد، مجدداً پرتاب می‌شود. با فرض آن‌که X تعداد شیر در دور دوم پرتاب‌ها را نشان دهد، تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

$$Bin(n, p^2)$$

۳.هر یک از اعضای یک گروه n نفره، مستقل از یکدیگر، تاس سالمی را پرتاب می‌کنند. به ازای هر k فردی که طی پرتاب تاس‌هایشان عدد مشابهی بگیرند، k امتیاز به گروه داده می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر $n = 11$ باشد و سه بازیکن عدد 2، چهار بازیکن عدد 5، یک نفر عدد 1، یک نفر عدد 3، یک نفر عدد 4 و یک نفر عدد 6 بگیرند، 7 امتیاز (یعنی $4 + 3$ امتیاز) به گروه تعلق می‌گیرد. میانگین امتیاز گروه را محاسبه کنید.

فرض کنید متغیر تصادفی X_i تعداد افرادی را نمایش دهد که تاس آنها i آمده است:

$$X_i \sim Bin\left(n, \frac{1}{6}\right)$$

اگر امتیاز ناشی از تعداد افرادی که تاس آنها i آمده است را با Y_i نمایش دهیم داریم:

$Y_i = X_i \;\text{ if }\; X_i \geq 2$

$Y_i = 0$, otherwise

امتیاز کل برابر است با:

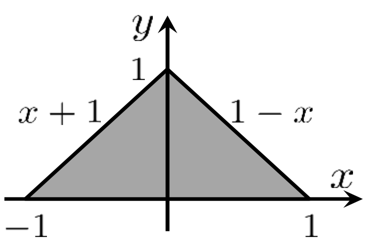
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$$

$$E[Y_i] = E[X_i] - 1 \times P(X_i = 1) = n \times \left(\frac{1}{6}\right) - 1 \times \binom{n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

با توجه به خطی بودن امید ریاضی:

$$E[Y] = 6E[Y_1] = n\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)$$

۴.تابع چگالی مشترک (توأم) X و Y در ناحیه خاکستری رنگ دارای توزیع یکنواخت است.



الف) توابع چگالی X و Y را پیدا کنید.

ب) میانگین X و واریانس Y را به‌دست آورید.

الف) مساحت ناحیه خاکستری برابر 1 است، بنابراین:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & y-1 < x < 1-y \ ,\ 0 < y < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^{1-y} f_{XY}(x,y)dx = (1-y) - (y-1) = 2 - 2y :\ 0 < y < 1$$

$$-1 < x < 0 :\ \ f_X(x) = \int_0^{x+1} f_{XY}(x,y)dy = x + 1$$

$$0 < x < 1 :\ \ f_X(x) = \int_0^{1-x} f_{XY}(x,y)dy = 1 - x$$

ب)

$$E[X] = \int_{-1}^{0} x(x+1)dx + \int_0^1 x(1-x)dx = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

$$E[Y] = \int_0^1 y(2-2y)dy = \frac{1}{3}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2(2-2y)dy = \frac{1}{6}$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$