.۱

الف) توزیع مشترک X و Y یکنواخت است:

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \begin{cases} C & \frac{1}{2}x < y < 1,\ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y)dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1\int_{\frac{1}{2}x}^{1} C\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 C\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx = 1 \Rightarrow C\left(x-\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow C = \frac{4}{3}$$

ب)

$$Z = X/Y$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\frac{X}{Y} \le z\right)$$

از آنجا که X و Y هر دو بر روی اعداد مثبت تعریف شده‌اند:

$$F_Z(z) = P\left(\frac{X}{Y} \le z\right) = P(X \le zY) = \int_0^\infty\int_0^{zy} f_{XY}(x,y)dx\ \ dy$$

با مشتق‌گیری نسبت به z داریم:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty y\ f_{XY}(zy,y)\ dy$$

$$0 < zy < 1\ ,\frac{1}{2}zy < y < 1 \quad \to \quad f_{XY} = \frac{4}{3}$$

$$zy > 0\,, y > 0 \ \ \to z > 0$$

$$\frac{1}{2}zy < y \ \to z < 2$$

$$zy < 1\,, y < 1 \ \to \text{ if } \ z > 1 \ :\ 0 < y < \tfrac{1}{z} \quad \text{ and if } \ z < 1 \ :\ 0 < y < 1$$

$$0 < z < 1 : f_Z(z) = \int_0^1 y \times \frac{4}{3}dy = \frac{2}{3}y^2\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$1<z<2\ :\ \ f_Z(z)=\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{4}{3}y\,dy=\frac{2}{3}y^2|_0^{1/z}=\frac{2}{3z^2}$$

$$z<0\,,z>2\ :\ \ f_Z(z)=0$$

پ) از آنجایی که توزیع مشترک X و Y یکنواخت است، توزیع X به شرط $\mathrm{Y}=\mathrm{y}$ نیز یکنواخت بر روی بازه $[0,2y]$ است:

$$f_{\mathrm{X|Y}}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y-0} & 0<x<2y\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y} & 0<x<2y\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ت) از آنجایی که توزیع Y به شرط $\mathrm{X}=x$ یکنواخت بر روی بازه $[\frac{x}{2},1]$ است، داریم:

$$E(\mathrm{Y|X}=x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{2+x}{4}$$

بنابراین $E(\mathrm{Y|X})=\frac{2+X}{4}$

۲. از آنجایی که cos(.) تابعی پیوسته است، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{\mathrm{X}_1^4+\mathrm{X}_2^4+\cdots+\mathrm{X}_n^4}{n})=\cos(\lim_{n\to\infty}(\frac{\mathrm{X}_1^4+\mathrm{X}_2^4+\cdots+\mathrm{X}_n^4}{n}))$$

طبق قانون قوی اعداد بزرگ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\mathrm{X}_1^4+\mathrm{X}_2^4+\cdots+\mathrm{X}_n^4}{n})=E(\mathrm{X}_1^4)=E(\mathrm{Z}^4)$$

برای محاسبه گشتاور مرتبه چهارم متغیر تصادفی نرمال استاندارد، از تابع مولد گشتاور Z استفاده می‌کنیم:

$$\Phi_{\mathbf{z}}(s)=e^{\frac{1}{2}s^2}\ \Rightarrow\Phi'_{\mathbf{z}}(s)=s\,e^{\frac{1}{2}s^2}\ \Rightarrow\ \Phi''_{\mathbf{z}}(s)=(1+s^2)e^{\frac{1}{2}s^2}\ \ \Rightarrow\ \ \Phi'''_{\mathbf{z}}(s)=(s^3+3s)e^{\frac{1}{2}s^2}$$

$$\Rightarrow\ \Phi_{\mathbf{z}}^{(4)}(s)=(s^4+6s^2+3)e^{\frac{1}{2}s^2}\ \Rightarrow\ \Phi_{\mathbf{z}}^{(4)}(0)=3\ \ \Rightarrow\ \ E(\mathrm{Z}^4)=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{\mathrm{X}_1^4+\mathrm{X}_2^4+\cdots+\mathrm{X}_n^4}{n})=\cos(3)$$

۳. با توجه به شرط $x \geq \theta_2$ در تابع چگالی احتمال داریم:

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} f_x(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta_1 \theta_2^{\theta_1} x_i^{-\theta_1 - 1} = \theta_1^n \theta_2^{n\theta_1} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-(\theta_1+1)} \quad : \theta_2 \leq x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$log\left(L(\theta_1, \theta_2)\right) = n\log(\theta_1) + n\theta_1 \log(\theta_2) - (\theta_1 + 1) \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

$$\frac{\partial \log(L(\theta_1, \theta_2))}{\partial \theta_1} = \frac{n}{\theta_1} + n\log(\theta_2) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\theta}_{1ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - n\log\hat{\theta}_{2ML}}$$

$$\frac{\partial \log(L(\theta_1, \theta_2))}{\partial \theta_2} = \frac{n\theta_1}{\theta_2} > 0$$

مشتق نسبت به θ_2 همواره مثبت است، بنابراین θ_2 باید تا جای ممکن افزایش یابد، و با توجه به شرط $\theta_2 \leq x_1, x_2, \dots, x_n$ خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}_{2ML} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

و در نتیجه:

$$\hat{\theta}_{1ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - n\log(\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\})}$$

۴. الف)

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E\big(E(X^2|Y)\big) - (E(E(X|Y)))^2$$

$$= E\left(\mathrm{var}(X|Y) + \big(E(X|Y)\big)^2\right) - (E(E(X|Y)))^2$$

$$= E\big(\mathrm{var}(X|Y)\big) + E[\big(E(X|Y)\big)^2] - (E(E(X|Y)))^2$$

$$= \mathrm{E}\big(\mathrm{var}(X|Y)\big) + \mathrm{var}(\mathrm{E}(X|Y))$$

ب)

$$E(X) = E\big(E(X|Y)\big) = E(0) = 0$$

$$E(XY) = E\big(E(XY|Y)\big) = E\big(YE(X|Y)\big) = E(0) = 0$$

بنابراین $E(\mathrm{XY}) = E(\mathrm{X})E(\mathrm{Y})$ و در نتیجه X و Y ناهمبسته‌اند.

.۵

a) $1-\alpha = 0.95 \;\; \rightarrow \;\; \alpha = 0.05 \;\; \rightarrow \;\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \;\; \rightarrow \;\; z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$

$$n = 100 \;, \qquad \bar{X} = 15 \quad , \;\; S = 2$$

بازه اطمینان ۹۵٪ برای μ برابر است با:

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \,,\, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \left(15 - \frac{2}{\sqrt{100}} \times 1.96 \,, 15 + \frac{2}{\sqrt{100}} \times 1.96\right)$$

$$= (14.608 \,, 15.392)$$

b) $H_0 : \mu = 14 \;\; , \;\; H_A : \mu > 14$

$$p_{value} = P\{\bar{X} \geq 15 \mid \mu = 14\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 14}{\frac{2}{\sqrt{100}}} \geq \frac{15 - 14}{\frac{2}{\sqrt{100}}}\right\}$$

$$= P\{Z \geq \; 5\} \approx 0 < \alpha = 0.01$$

بنابراین H_0 را رد می‌کنیم.