

به نام خدا



دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده برق و کامپیوتر



درس آمار و احتمال

تمرین شماره ۳

دستیاران آموزشی:

سهیل ذبیحش

امیرحسین عباسکوهی

علی الهی

مهر ماه ۱۳۹۹

بخش اول – مد

مد یک متغیر تصادفی گسسته مانند X که $p(x)$ تابع جرمی احتمال آن باشد، آن x ای می باشد که برای آن $p(x)$ بیشینه باشد (یعنی بیشترین احتمال را داشته باشد). مد متغیر تصادفی X را x^* می نامیم.

الف) اگر $X \sim \text{Bin}(n, p)$ باشد، با در نظر گرفتن نسبت $\frac{b(x+1; n, p)}{b(x; n, p)}$ نشان دهید مقدار $b(x; n, p)$ توسط مقدار x تا زمانی که $x < np - (1 - p)$ باشد با افزایش x افزایش می یابد. نتیجه بگیرید که x^* عدد صحیحی است که برای آن داریم: $(n + 1)p - 1 \leq x^* \leq (n + 1)p$ (دقت کنید این بخش با اثبات بخش اول ثابت می شود و نیازی به اثبات چیز خاصی برای بخش دوم نیست)

ب) نشان دهید که اگر X توزیع پواسون با پارامتر μ داشته باشد، مد بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از μ می باشد. نشان دهید اگر μ عدد صحیح باشد، $\mu - 1$ و μ هر دو مد هستند.

$$b(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & , \text{otherwise.} \end{cases}$$

بخش دوم – موفقیت یا شکست

یک پیشامد موفقیت یا شکست (Hit or Miss) با احتمال موفقیت p مرتباً تکرار می شود. پیشامدها در صورت مشاهده N موفقیت پیاپی به پایان می رسند. متغیر تصادفی X را برابر تعداد پیشامدها تا قبل از پایان یافتن آن ها در نظر بگیرید. تابع جرم احتمال را برای حالتی که $N = 2$ است، بر حسب P محاسبه کنید.

بخش سوم – هارد دیسک

یک هارد-درايو از یک بازوی مکانیکی و ۱۰ نوار هم مرکز تشکیل شده است. نوارها از بیرون به داخل از شماره ۱ تا ۱۰ نام گذاری شده اند. بازوی مکانیکی باید دائماً بر روی نوارها حرکت کند تا بتواند اطلاعات موجود در نوارهای مختلف را بخواند. p_i ($i = \{1, 2, \dots, 10\}$) را احتمال آن فرض می کنیم که درخواست برای اطلاعات، بازو را روی نوار i ام ببرد و متغیر تصادفی X را تعداد نوارهایی که بازوی مکانیکی برای رسیدن به نوار مورد نظر از روی آن ها عبور کرده در نظر می گیریم. با فرض اینکه درخواست برای تغییر موقعیت بازو به نوار i ام از موقعیت فعلی بازو مستقل باشد، تابع جرم احتمال را به صورت پارامتری بر حسب p_i ها بدست آورید. (دقت داشته باشید که در محاسبه متغیر تصادفی X ، نواری که بازوی مکانیکی روی آن وجود دارد، در نظر گرفته نمی شود. $X = \{0, 1, \dots, 9\}$)

بخش چهارم – دستگاه خرازی

پرویز به تازگی وارد صنعت خرازی شده و یک دستگاه برای رنگ زدن پارچه‌هایش خریداری کرده. چون در اول کار پرویز پول زیادی نداشت، مجبور شد یک دستگاه رنگ زنی ارزان بخرد و این دستگاه بعضاً چند قطره رنگ اضافی روی پارچه می‌ریزد. تعداد قطرات رنگ اضافی ریخته شده بر هر پارچه از توزیع پواسون با میانگین μ_1 به دست می‌آید. بعد از مدتی که کار پرویز پیشرفت میکند تصمیم می‌گیرد ماشینی جدید خریداری کند که تعداد قطرات رنگ اضافی که روی پارچه می‌اندازد از توزیع پواسون با میانگین μ_2 به دست می‌آید.

حال اگر ظرفیت انجام کار هر دو دستگاه یکی باشد (تعداد پارچه‌های رنگ شده در هر روز برای هر دو دستگاه برابر است) احتمال این که پارچه ای که از این کارخانه بیرون می‌آید X قطره رنگ داشته باشد از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$p(x; \mu_1, \mu_2) = .5 \frac{e^{-\mu_1} \mu_1^x}{x!} + .5 \frac{e^{-\mu_2} \mu_2^x}{x!} \quad x = 1, 2, \dots$$

الف) مطمئن شوید که تابع $p(x; \mu_1, \mu_2)$ یک pmf درست است (همیشه مثبت است و جمع حالات صفر است)

ب) به طور میانگین روی هر پارچه چند قطره رنگ وجود دارد؟

ج) واریانس تعداد قطرات رنگ را بیابید

د) اگر دستگاه اول ۶۰ درصد کار را انجام دهد و دستگاه دوم ۴۰ درصد، pmf جدید را بیابید

بخش پنجم – پواسون مانند

تابع جرمی متغیر تصادفی شبه پواسون X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_X(x) = k \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}; x = 1, 2, 3, \dots$$

الف) مقدار ثابت k بر حسب پارامتر θ مشخص کنید.

ب) اگر میانگین X برابر با 2.313035 باشد، احتمال این که مقدار X حداکثر برابر با 5 باشد چقدر است؟

پ) انحراف معیار متغیر X برای میانگین داده شده در قسمت (ب) چقدر است؟

سوال ششم – شرط بندی

در یک بازی شرط بندی شما می‌توانید بر روی یکی از کارت های سفید یا سیاه شرط ببندید. برای ورود به بازی باید یک ژتون پرداخت کنید. در صورت برد، علاوه بر ژتون پرداخت شده یک ژتون جایزه می‌گیرید و در صورت باخت، ژتون پرداخت شده شما می‌سوزد. همچنین احتمال برد کارت سفید $\frac{1}{38}$ و کارت سیاه $\frac{2}{38}$ است.

فرض کنید می‌خواهیم با الگوریتم زیر بازی کنید:

در اولین دست بازی، روی کارت سفید شرط ببندید. اگر برنده شدید، جایزه و ژتون اولیه خود را گرفته و بازی را ترک کنید و اگر باختید، دو دست بعد را هم مستقل از نتیجه آن روی کارت سفید شرط ببندید. متغیر تصادفی X را برابر تعداد ژتون هایی که در نهایت کسب کردید فرض کنید. (این مقدار می‌تواند منفی باشد)

الف) $P(X > 0)$ را محاسبه کنید.

ب) امید ریاضی و واریانس را برای متغیر تصادفی X پیدا کنید. آیا شرکت در این بازی طبق این الگوریتم منطقی است؟

بخش هفتم – مسابقه سکه

فرض کنید سکه ای داریم که آن را به صورت متوالی پرتاب میکنیم (هر دو پرتابی مستقل از هم هستند)، این سکه به احتمال p شیر و به احتمال $1 - p$ خط می‌آید. فرض کنید هر باری که سکه بلافاصله بعد از یک شیر، خط بیاید ما ۱ تومان برنده می‌شویم. اگر R مجموع پولی باشد که ما در یک مسابقه با n بار پرتاب برنده شده ایم امید ریاضی و واریانس R را بیابید.

بخش هشتم – محاسبه امید ریاضی

اگر $X \sim Poi(\lambda)$ ، امید ریاضی متغیرهای تصادفی $Y = 2^X$ و $Z = \frac{1}{X+1}$ را محاسبه کنید.