



باسمه تعالی

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر



پنجشنبه ۳۰ آبان ۱۳۹۸

زمان امتحان: ۱۵۰ دقیقه

امتحان میان ترم درس آمار و احتمال مهندسی

در طول امتحان استفاده از ماشین حساب، تلفن همراه، جزوه، کتاب یا برگه‌ی فرمول به هیچ عنوان مجاز نمی‌باشد.

۱- می‌خواهیم از بین ۵ زوج (۵ زن و ۵ شوهر) یک کمیته‌ی ۴ نفره انتخاب کنیم. احتمال آن‌که این کمیته‌ی ۴ نفره دقیقاً شامل ۲ مرد و ۲ زن باشد چه قدر است اگر:

(الف) نخواهیم هیچ زوجی در این کمیته باشد. [۳ نمره]

(ب) بخواهیم دقیقاً یک زوج در این کمیته باشد. [۳ نمره]

پاسخ‌ها را تا حد امکان ساده کرده و به صورت یک کسر عددی (مثلاً  $\frac{1}{3}$ ) بنویسید.

۲- شاهین و شادی یک رشته بازی انجام می‌دهند که احتمال پیروزی شاهین در هر یک از آن‌ها برابر  $p$  است. بنابراین احتمال برد شادی در هر بازی برابر  $q = 1 - p$  خواهد بود. فرض کنید نتیجه‌ی هر بازی مستقل از سایر بازی‌ها است و برنده‌ی نهایی اولین نفری است که تعداد پیروزی‌هایش ۲ تا بیشتر از تعداد پیروزی‌های نفر دیگر شود. مثلاً اگر شاهین در دو بازی اول برنده شود برنده‌ی نهایی اوست. همچنین اگر در بازی اول شادی و در بازی‌های دوم، سوم و چهارم شاهین برنده شود، باز هم برنده‌ی نهایی شاهین است. احتمال آن‌که شاهین برنده‌ی نهایی باشد چه قدر است؟ [۶ نمره]

۳- دو سکه‌ی اریب با شماره‌های ۱ و ۲ در اختیار داریم که احتمال گرفتن شیر در آن‌ها به ترتیب برابر  $p$  و  $q$  است. این دو سکه را به طور همزمان آن قدر پرتاب می‌کنیم تا یکی از سکه‌ها شیر و دیگری خط بیاید. فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  تعداد پرتاب‌ها را در این آزمایش تصادفی نشان دهد. مثلاً  $X = 3$  به این معنی است که در سومین پرتاب همزمان دو سکه، یکی از آن‌ها شیر و دیگری خط آمده است و در دو پرتاب همزمان قبلی سکه‌ها هر دو شیر یا هر دو خط آمده‌اند.

(الف) تابع جرم احتمال و واریانس  $X$  را پیدا کنید. [۴ نمره]

(ب) احتمال آن‌که در آخرین پرتاب، سکه‌ی شماره‌ی ۱ شیر آمده باشد چه قدر است؟ [۲ نمره]

۴- متغیر تصادفی  $X$  با تابع توزیع تجمعی  $F_X(x)$  داده شده است. فرض کنید  $F_X(x)$  تابعی اکیداً صعودی از  $x$  است. متغیر تصادفی  $Y$  را به صورت  $Y \triangleq aF_X(X) + b$  تعریف می‌کنیم که در آن  $a$  و  $b$  ثابت‌های حقیقی‌اند. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی  $Y$  را به دست آورید. [۶ نمره]

۵- تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر داده شده است

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} A + y, & -y < x < y < 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) مقدار  $A$  را بیابید. [۱ نمره]

(ب) تابع چگالی احتمال  $f_X(x)$  را به دست آورید. [۳ نمره]

(پ) احتمال پیشامد  $\{X^2 + Y^2 < 1\}$  را حساب کنید. [۲ نمره]

در صورت نیاز می‌توانید از جداول و روابط پشت صفحه استفاده نمایید.

جمع بارم: ۳۰ نمره-موفق باشید

متغیر تصادفی	پارامترها	تابع چگالی / جرم احتمال	میانگین و واریانس
دو جمله‌ای	$n > 0, p$	$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots$	$\eta = np, \sigma^2 = np(1-p)$
پوآسن	$\lambda > 0$	$p_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$	$\eta = \lambda, \sigma^2 = \lambda$
هندسی	$p$	$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x = 1, 2, 3, \dots$	$\eta = \frac{1}{p}, \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$
دو جمله‌ای منفی	$r > 0, p$	$p_X(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r},$ $x = r, r+1, r+2, \dots$	$\eta = \frac{r}{p}, \sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$
یکنواخت	$a, b$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$	$\eta = \frac{b+a}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
نرمال	$\eta, \sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$	$\eta = \eta, \sigma^2 = \sigma^2$
نمایی	$\lambda > 0$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x$	$\eta = \frac{1}{\lambda}, \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
ارلانگ	$\lambda, r = 1, 2, \dots$	$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad x = 0, 1, \dots, n$	$\eta = \frac{r}{\lambda}, \sigma^2 = \frac{r}{\lambda^2}$
کوشی	$a > 0, b$	$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x-b)^2 + a^2},$	تعریف نشده $\eta, \sigma^2$