# دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
## آمار و احتمال مهندسی

پاسخ تمرین چهارم ـ تابع مولد گشتاور، توزیع‌های شرطی، کوواریانس

طراح: سالار صفردوست ـ علی آریایی
سوپروایزر: مسعود طهماسبی فرد
تاریخ تحویل: ـ

### ۱. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی گسسته — ۲۰ نمره

تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته $X$ به صورت $P_X(k) = \frac{\alpha}{۲}\, e^{-\alpha|k|}$ است.

الف) تابع مولد گشتاور متغیر $X$ را به دست آورید. (۵ نمره)

ب) یک بار به روش امید ریاضی و بار دیگر به کمک تابع مولد گشتاور بدست آمده در قسمت (الف) میانگین متغیر تصادفی $X$ را محاسبه کنید و صحت پاسخ‌های بدست آمده را بررسی کنید. (۱۵ نمره)

**پاسخ :**

الف)

$$\Phi_X(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_X(k)\, e^{sk} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{۲}\, e^{-\alpha|k|}\, e^{sk} = \sum_{k=-\infty}^{۰} \frac{\alpha}{۲}\, e^{\alpha k}\, e^{sk} + \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{\alpha}{۲}\, e^{-\alpha k}\, e^{sk} - \frac{\alpha}{۲}$$

$$\frac{\alpha}{۲}\left[\sum_{k=۰}^{+\infty} e^{-(\alpha+s)k} + \sum_{k=۰}^{+\infty} e^{-(\alpha-s)k} - ۱\right] = \frac{\alpha}{۲}\left[\frac{۱}{۱-e^{-(\alpha+s)}} + \frac{۱}{۱-e^{-(\alpha-s)}} - ۱\right] \quad ; \quad -\alpha < s < \alpha$$

ب)

$$E\{X\} = \left.\frac{d\Phi_X(s)}{ds}\right|_{s=۰} = \frac{\alpha}{۲}\left.\left[\frac{-\,e^{-(\alpha+s)}}{(۱-e^{-(\alpha+s)})^۲} + \frac{e^{-(\alpha-s)}}{(۱-e^{-(\alpha-s)})^۲}\right]\right|_{s=۰} = \frac{\alpha}{۲}\left[\frac{-e^{-\alpha}}{(۱-e^{-\alpha})^۲} + \frac{e^{-\alpha}}{(۱-e^{-\alpha})^۲}\right] = ۰$$

$$\longrightarrow \quad \underline{E\{X\} = ۰}$$

$$E\{X\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\, P_X(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{k}_{\text{فرد}} \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{۲}\, e^{-\alpha|k|}}_{\text{زوج}}}_{\text{فرد}} = ۰ \qquad \longrightarrow \qquad \underline{E\{X\} = ۰}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{E\{X\} = ۰}$$

## ۲. استقلال و مولد گشتاور!　　　۱۵ نمره

تابع CDF دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ به صورت زیر داده شده است. تابع مولد گشتاور توام و حاشیه‌ای را برای این دو متغیر تصادفی حساب کنید. استقلال این دو متغیر تصادفی را به سه روش، با استفاده از تابع CDF، تابع PDF و تابع مولد گشتاور بررسی کنید.

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{\alpha x})(1-e^{\beta y}) & ; \quad x,y \geq 0 \\ 0 & ; \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

راهنمایی: تعریف مولد گشتاور توام:

$$\text{The joint moment generating function of } (X,Y) \text{ is } M(t_1,t_2) = \mathbb{E}[e^{t_1 X + t_2 Y}]$$

$$\text{Generating Moments:}$$
$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1} \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2} \\ \mathbb{E}[X^2] = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1^2} \quad \mathbb{E}[Y^2] = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_2^2} \\ \mathbb{E}[XY] = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1 \partial t_2} \end{cases}$$

توجه:

$$\text{if } X \perp Y \rightarrow \phi_{XY} = \phi_X \times \phi_Y$$

**پاسخ :**

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = 1 - e^{-\alpha x} \quad ; \quad x > 0 \qquad \longrightarrow \qquad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \alpha\, e^{-\alpha x} \; ; \; x > 0$$

$$F_Y(x) = F_{XY}(\infty,y) = 1 - e^{-\beta y} \quad ; \quad y > 0 \qquad \longrightarrow \qquad f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \beta\, e^{-\beta y} \; ; \; y > 0$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_{XY}(x,y) = \alpha\, \beta\, e^{-\alpha x - \beta y} \quad ; \quad x,y \geq 0$$

$$\Phi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, e^{sx}\, dx = \int_0^{+\infty} \alpha\, e^{-\alpha x}\, e^{sx}\, dx = \int_0^{+\infty} \alpha\, e^{-(\alpha - s)x}\, dx = \alpha\, \frac{1}{s-\alpha} e^{-(\alpha-s)x} \Big|_0^{+\infty}$$

$$\longrightarrow \qquad \underline{\Phi_X(s_x) = \frac{\alpha}{\alpha - s_x}} \quad ; \quad s_x \leq \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\Phi_Y(s_y) = \frac{\beta}{\beta - s_y}} \quad ; \quad s_y \leq \beta$$

$$\Phi_{XY}(s_x,s_y) = \mathbb{E}[e^{s_x X + s_y y Y}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, e^{s_x x + s_y y}\, dy\, dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha\beta\, e^{-\alpha x - \beta y}\, e^{s_x x + s_y y}$$
$$= \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, e^{s_x x} dx \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta y}\, e^{s_y y} dy \longrightarrow \qquad \underline{\Phi_{XY}(s_x,s_y) = \frac{\alpha}{\alpha - s_x} \frac{\beta}{\beta - s_y}} \; ; \; s_x \leq \alpha \; , \; s_y \leq \beta$$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y) \qquad \longrightarrow$$ متغیرهای داده شده مستقلند.

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\text{متغیرهای داده شده مستقلند.}}$$

$$\Phi_{XY}(s_x,s_y) = \Phi_X(s_x)\, \Phi_Y(s_y) \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\text{متغیرهای داده شده مستقلند.}}$$

## ۳. از توام به شرطی	۱۵ نمره

دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ توزیع توأمی به صورت زیر دارند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x+2y}{3} & 0 \le x < 1\,,\ 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$A$ را پیشامد $\{Y \le \frac{1}{2}\}$ در نظر بگیرید.

الف) مقدار $P(A)$ چقدر است؟ (۳ نمره)

ب) توابع $f_{X,Y|A}(x,y)$، $f_{X|A}(x)$ و $f_{Y|A}(y)$ را بدست آورید. (۹ نمره)

ج) توابع $f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را بدست آورید. (۳ نمره)

**پاسخ :**

الف) می‌دانیم $P(A) = F_Y(\frac{1}{2})$، بنابراین می‌توانیم با انتگرال‌گیری از تابع چگالی $Y$ به مقدار مطلوب برسیم:

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{4x+2y}{3}\, dx = \frac{2x^2+2xy}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(y+1) \quad 0 \le y < 1$$
$$\Rightarrow F_Y(y) = \int_0^y \frac{2}{3}(y+1)\, dy = \frac{y^2+2y}{3} \quad 0 \le y < 1$$
$$\Rightarrow F_Y(\frac{1}{2}) = \frac{5}{12}$$

ب)

$$f_{X,Y|A}(x,y) = \frac{f_{X,Y\cap A}(x,y)}{P(A)}$$
$$\Rightarrow f_{X,Y|A}(x,y) = \begin{cases} \frac{16x+8y}{5} & 0 \le x < 1\,,\ 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

در نتیجه برای دو تابع دیگر خواهیم داشت:

$$f_{X|A}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{16x+8y}{5}\, dy = \frac{8x+1}{5} \quad 0 \le x < 1$$
$$f_{Y|A}(y) = \int_0^1 \frac{16x+8y}{5}\, dx = \frac{8y+8}{5} \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}$$

ج) مشابه بخش (الف) می‌توان بدست آورد که:

$$f_X(x) = \int_۰^۱ \frac{۴x + ۲y}{۳}\, dy = \frac{۴xy + y^۲}{۳}\Big|_۰^۱ = \frac{۴x + ۱}{۳} \quad ۰ \leq x < ۱$$

در نتیجه:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{۲x+y}{y+۱} & ۰ \leq x < ۱\,,\ ۰ \leq y < ۱ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{۴x+۲y}{۴x+۱} & ۰ \leq x < ۱\,,\ ۰ \leq y < ۱ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

## ۴. گاو صندوق ۲۰ نمره

یک گاوصندوق دارای دو قفل، یکی ۴ رقمی و دیگری ۵ رقمی (با ارقام ممکن ۰ و ۱) است که برای باز شدن گاو صندوق، باید هر دو قفل باز شده باشند. همچنین اگر در مجموع بیش از ۳۰ تلاش برای باز کردن قفل‌ها صورت بگیرد، امکان وارد کردن رمز از بین می‌رود. برای باز کردن این گاوصندوق، پیدا کردن رمز هر قفل را به یک فرد می‌سپاریم. هر دوی این افراد به صورت کاملاً تصادفی و مستقل از یکدیگر، هر بار یک عدد را به عنوان رمز امتحان می‌کنند. (به محض وارد شدن عدد درست، فرد از درست بودن آن اطلاع پیدا می‌کند)

الف) احتمال آنکه بتوانیم گاوصندوق را باز کنیم چقدر است؟ (می‌توانید برای محاسبه‌ی پاسخ نهایی از پایتون یا هر نرم‌افزار دیگری استفاده کنید) (۱۰ نمره)

ب) اگر گاوصندوق باز شده باشد و بدانیم فرد مسئول قفل ۵ رقمی، ۱۲ تلاش انجام داده است، احتمال آنکه فرد مسئول قفل ۴ رقمی کمتر یا مساوی ۵ تلاش انجام داده باشد چقدر است؟ (۱۰ نمره)

**پاسخ :**

الف) اگر تعداد تلاش‌های فرد مسئول قفل ۴ رقمی تا موفقیت را $X$ و تعداد تلاش‌های فرد مسئول قفل ۵ رقمی تا موفقیت را $Y$ بنامیم، هدف آن است که احتمال زیر را محاسبه کنیم:

$$P(X + Y \leq ۳۰)$$

برای بدست آوردن این مقدار ابتدا توزیع $X$ و $Y$ را تشخیص می‌دهیم، سپس با استفاده از قانون احتمال کل، به مقدار مطلوب می‌رسیم.

با توجه به اینکه هر کدام از متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ مربوط به احتمال موفقیت پس از تعدادی شکست می‌باشند، توزیع آن‌ها از توزیع هندسی با توابع زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} P_X(x) = P(X = x) = p_۱(۱ - p_۱)^{x-۱}\ ,\ p_۱ = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow F_X(x) = ۱ - (۱ - p_۱)^x \\ P_Y(y) = P(Y = y) = p_۲(۱ - p_۲)^{x-۱}\ ,\ p_۲ = \frac{۱}{۳۲} \Rightarrow F_Y(y) = ۱ - (۱ - p_۲)^y \end{cases}$$

حال مطابق قضیه‌ی احتمال کل داریم:

$$P(X+Y \leq ۳۰) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X+Y \leq ۳۰|X=k)P(X=k)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(Y \leq ۳۰-k)P(X=k) = \sum_{k=۱}^{۳۰} F_Y(۳۰-k)P_X(k)$$
$$= \sum_{k=۱}^{۳۰}(۱-(۱-p_۲)^{۳۰-k})(p_۱(۱-p_۱)^{k-۱}) \approx ۰/۳۷۳$$

```python
p1 = 1/(2**4)
p2 = 1/(2**5)
N = 30
P_list = [(1-(1-p2)**(N-k))*(p1*(1-p1)**(k-1)) for k in range(1,31)]
P = sum(P_list)
print('P(X+Y<=30) =',P)
```

[13] ✓ 0.0s

```
P(X+Y<=30) = 0.3726765766216369
```

ب) مقداری که به دنبال یافتن آن هستیم برابر است با:

$$P(X \leq ۵|Y=۱۲, X+Y \leq ۳۰) = P(X \leq ۵|X \leq ۱۸) = \frac{P(X \leq ۵, X \leq ۱۸)}{P(X \leq ۱۸)} = \frac{P(X \leq ۵)}{P(X \leq ۱۸)}$$
$$= \frac{P_X(۵)}{P_X(۱۸)} = \frac{۱-(۱-p_۱)^۵}{۱-(۱-p_۱)^{۱۸}} \approx ۰/۴۰۱$$

```python
P = (1-(1-p1)**5)/(1-(1-p1)**18)
print('P(X<=5| Y=12, X+Y<=30) =',P)
```

[12] ✓ 0.0s

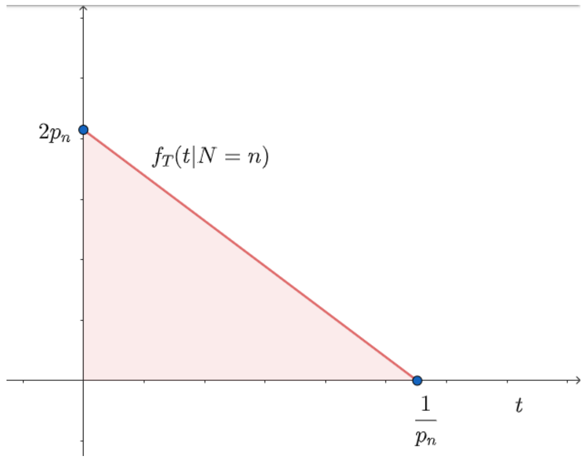
```
P(X<=5| Y=12, X+Y<=30) = 0.401434954891436
```

## ۵. ماهواره ۲۵ نمره

یک دیش ماهواره برای دریافت اطلاعات، نیاز دارد که در جهت یکی از چهار ماهواره‌ی بالای سر خود قرار بگیرد و سپس به آن متصل شود. انتخاب ماهواره‌ها بر اساس تابع جرم احتمال زیر مشخص می‌شود:

$$p_n = ۰/۵ - ۰/۱n; \quad n = ۱, ۲, ۳, ۴$$

همچنین در صورت انتخاب ماهواره‌ی $n$ام، مدت زمان اتصال دیش به ماهواره از توزیعی به شکل زیر پیروی خواهد کرد: (واحد $t$، ثانیه می‌باشد.)




الف) احتمال آنکه دیش به ماهواره‌های ۳ یا ۴ متصل شده باشد و کمتر از ۵ ثانیه زمان برای اتصال سپری شده باشد چقدر است؟ (۱۵ نمره)

ب) اگر بدانیم دیش در عرض ۲ ثانیه متصل شده است، احتمال اینکه به ماهواره‌ی ۳ متصل شده باشیم چقدر است؟. (۱۰ نمره)

**پاسخ :**

الف) انچه سؤال پرسیده است، بنا به قضیه‌ی احتمال کل برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$P(t \leq ۵, N = ۳, ۴) = \sum_{n=۳}^{۴} P(t \leq ۵|N = n)P(N = n)$$
$$= F_T(۵|N = ۳)P(N = ۳) + F_T(۵|N = ۴)P(N = ۴)$$

همچنین می‌دانیم که:

$$F_T(t|N = n) = Pr(T < t|N = n) = \begin{cases} \int_۰^t (-۲p_n^۲ t_۱ + ۲p_n)\, dt_۱ = -p_n^۲ t_۱^۲ + ۲p_n t_۱|_۰^t = -p_n^۲ t^۲ + ۲p_n t & ۰ < t < \frac{۱}{p_n} \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

بنابراین:

$$P(t \leq ۵, N = ۳, ۴) = (-(۰/۲)^۲ ۵^۲ + ۲(۰/۲)۵)۰/۲ + (-(۰/۱)^۲ ۵^۲ + ۲(۰/۱)۵)۰/۱ = ۰/۲۷۵$$

ب) احتمال اتصال به هر ماهواره به شرط دانستن مدت زمان اتصال برابر است با:

$$P_N(n|T = t) = \frac{f_T(t|N = n)P(N = n)}{\sum_{n=۱}^{۴} f_T(t|N = n)P(N = n)} = \frac{(-۲p_n^۲ t + ۲p_n)p_n}{\sum_{n=۱}^{۴}(-۲p_n^۲ t + ۲p_n)p_n}$$

در نتیجه برای $P_N(۳|T = ۲)$ خواهیم داشت:

$$P_N(۳|T = ۲) = \frac{۰/۰۴۸}{۰/۰۶۴ + ۰/۰۷۲ + ۰/۰۴۸ + ۰/۰۱۶} = ۰/۲۴$$

## ۶. پونه! ۲۰ نمره

تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ به شکل زیر تعریف شده است:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & 0 < x^{\frac{1}{n}} < y < x^n < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

که $n$ عددی بین ۰ و ۱ و غیرتصادفی است.

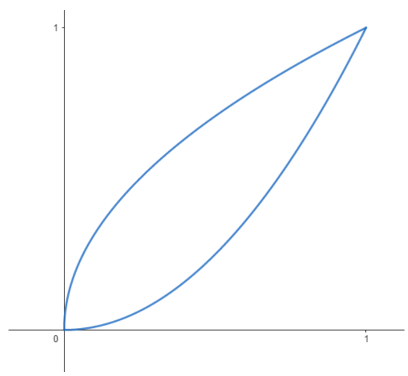
الف) ناحیه‌ای که تابع چگالی در آن مقدار دارد را رسم کنید و مقدار $c$ را به دست آورید. (به ازای $n = \frac{1}{2}$ ) (۵ نمره)

ب) کوواریانس و ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی را محاسبه کنید. (به ازای $n = \frac{1}{2}$ ) (۱۰ نمره)

ج) با افزایش $n$ به سمت ۱ انتظار داریم ضریب همبستگی چه تغییری کند؟ به طور کیفی چرا؟ (۵ نمره)

**پاسخ :**

الف) ناحیه‌ای که تابع در آن مقدار دارد به شکل زیر است:




با توجه به این ناحیه داریم:

$$1 = \int_0^1 \int_{x^{\frac{1}{n}}}^{x^n} c\,dy\,dx = c\int_0^1 x^n - x^{\frac{1}{n}}\,dx = c\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right)\Big|_0^1 = c\frac{1-n}{1+n} \Rightarrow c = \frac{1+n}{1-n} = 3$$

ب)

$$f_X(x) = \int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x^2} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x^2} 3\,dy = 3(\sqrt{x} - x^2) \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^2} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^2} 3\,dx = 3(\sqrt{y} - y^2) \quad 0 < y < 1$$

$$\mu_X = 3\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^3)\,dx = 3\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = 0.45 \quad , \quad \mu_Y = 0.45$$

$$\sigma_X^2 = 3\int_0^1 (x^{\frac{5}{2}} - x^4)\,dx - \mu_X^2 = 3\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 - \mu_X^2 \approx 0.0546 \quad , \quad \sigma_Y^2 \approx 0.0546$$

$$E\{XY\} = \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{\frac{1}{2}}} 3xy\,dy\,dx = \int_0^1 3x(\frac{x-x^4}{2})\,dx = 0.25 \Rightarrow Cov(X,Y) = 0.25 - \mu_X\mu_Y = 0.0475$$

$$r_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \approx \frac{0.0475}{0.0546} \approx 0.8693$$

ج) انتظار داریم با افزایش $n$ و نزدیک شدن آن به ۱، ضریب همبستگی به سمت ۱ میل کند، علت این است که با این اتفاق، ناحیه‌ی نشان داده شده در تصویر قسمت الف باریک و باریک‌تر می‌شود و به همین علت $X$ $Y$ با هم مقدار زیاد و با هم مقدار کم اختیار می‌کنند.

## ۷. لپ‌تاپ فروشی ۲۰ نمره

جدول زیر احتمال فروش سه نوع لپ‌تاپ در طول هفته را نشان می‌دهد.

| | Type A | Type B | Type C |
|---|---|---|---|
| شنبه | ۰/۰۳ | ۰/۰۴ | ۰/۰۳ |
| یکشنبه | ۰/۰۲ | ۰/۰۵ | ۰/۰۳ |
| دوشنبه | ۰/۰۲ | ۰/۰۴ | ۰/۰۴ |
| سه‌شنبه | ۰/۰۲ | ۰/۰۳ | ۰/۰۵ |
| چهارشنبه | ۰/۰۵ | ۰/۰۳ | ۰/۰۲ |
| پنجشنبه | ۰/۰۴ | ۰/۰۸ | ۰/۰۸ |
| جمعه | ۰/۰۳ | ۰/۰۶ | ۰/۲۱ |

الف) چه نوع لپ‌تاپی بیشترین احتمال خرید را دارد؟ (۵ نمره)

ب) احتمال خرید انواع مختلف لپ‌تاپ در روزهای سه‌شنبه و چهارشنبه را بدست آورید. (۵ نمره)

ج) در روزهای فرد، با چه احتمالی لپتاپ‌های نوع B خریداری می‌شوند؟ (۵ نمره)

د) فرض کنید روزها را به ترتیب از ۰ تا ۶ و نوع لپ‌تاپ‌ها را نیز از ۰ تا ۲ نام‌گذاری کنیم. کوواریانس و همبستگی این دو متغیر تصادفی را بدست آورید. (۵ نمره)

**پاسخ :**

الف) کافی است تابع چگالی حاشیه‌ای مربوط به بازه قیمت لپ‌تاپ‌ها را به دست آوریم، مقدار احتمال برای هر بازه قیمتی برابر است با جمع احتمال آن در روزهای مختلف؛ بنابراین:

$$\begin{cases} P(A) = 0.21 \\ P(B) = 0.33 \\ P(C) = 0.46 \end{cases}$$

ب)

$$P(Type|day = Tuesday, Wednesday) = \frac{P(Type, day = Tuesday, Wednesday)}{P(day = Tuesday, Wednesday)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A|day = Tuesday, Wednesday) = \frac{0.02+0.05}{0.2} = 0.35 \\ P(B|day = Tuesday, Wednesday) = \frac{0.03+0.03}{0.2} = 0.3 \\ P(C|day = Tuesday, Wednesday) = \frac{0.05+0.02}{0.2} = 0.35 \end{cases}$$

ج)

$$P(B|days = odd) = \frac{P(B, days = odd)}{P(days = odd)} = \frac{۰/۰۵ + ۰/۰۳ + ۰/۰۸}{۰/۱ + ۰/۱ + ۰/۲} = ۰/۴$$

د) متغیر تصادفی $V$ مربوط به قیمت و متغیر تصادفی $D$ مربوط به روز را تعریف می‌کنیم.

$$E\{V\} = \sum_{v=۰}^{۳} v \times P(V = v) = ۰ + P(V = ۱) + ۲P(V = ۲) = ۰/۳۳ + ۰/۹۲ = ۱/۲۵$$

$$E\{D\} = \sum_{d=۰}^{۶} d \times P(D = d) = ۰ + P(D = ۱) + ۲P(D = ۲) + ... + ۶P(D = ۶) = ۳/۸$$

$$E\{V^۲\} = \sum_{v=۰}^{۳} v^۲ \times P(V = v) = ۰ + P(V = ۱) + ۴P(V = ۲) = ۰/۳۳ + ۱/۸۴ = ۲/۱۷$$

$$E\{D^۲\} = \sum_{d=۰}^{۶} d^۲ \times P(D = d) = ۰ + P(D = ۱) + ۴P(D = ۲) + ... + ۳۶P(D = ۶) = ۱۸/۸$$

$$E\{VD\} = \sum_{d=۰}^{۶} \sum_{v=۰}^{۳} v \times d \times P(V = v, D = d) = ۵/۱$$

$$\sigma(V) = \sqrt{E\{V^۲\} - E\{V\}^۲} \approx ۰/۷۷۹۴$$

$$\sigma(D) = \sqrt{E\{D^۲\} - E\{D\}^۲} \approx ۲/۰۸۸۱$$

بنابراین با توجه به تمامی مقادیر بالا:

$$Cov(V, D) = E\{VD\} - E\{V\}E\{D\} = ۰/۳۵ \Rightarrow r_{VD} = \frac{Cov(V, D)}{\sigma(V)\sigma(D)} \approx ۰/۲۱۵۱$$

## ۸. فرفره (امتیازی) — ۲۰ نمره

روی یک صفحه‌ی دایره‌ای شکل، دو فرفره‌ی آبی و قرمز به طور همزمان و در نزدیکی هم چرخانده می‌شوند، به طوری که مدت زمان چرخش هر کدام از فرفره‌ها به ترتیب برابر $X$ و $Y$ ثانیه می‌باشد؛ همچنین تابع چگالی احتمال $Y$ و تابع چگالی احتمال $X$ به شرط دانستن آنکه $Y = y$ به شکل زیر می‌باشند.($c$ یک ضریب ثابت است)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{۱}{c}\frac{e^{-y}}{y+۱} & y > ۰ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} (y + ۱)e^{-x-xy} & x > ۰ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

الف) اگر بدانیم فرفره‌ی آبی $x$ ثانیه چرخیده است، تابع چگالی احتمال $Y$ را بیابید. (۵ نمره)

ب) اگر پس از انجام آزمایش فقط بدانیم که مدت زمان چرخش فرفره‌ی آبی دو برابر فرفره‌ی قرمز بوده است، تابع چگالی احتمال $X$ را به دست آوردید. (۱۵ نمره)
(راهنمایی ۱:برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال، ابتدا تابع توزیع تجمعی را بدست آورید.)
(راهنمایی ۲: $dl = \sqrt{dx^۲ + dy^۲} = \sqrt{۱ + \frac{dy}{dx}^۲}\, dx$ )

**پاسخ :**

الف) با توجه به قضیه‌ی بیز می‌دانیم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy}$$

بنابراین:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{e^{-x-xy-y}}{\int_{۰}^{\infty} e^{-x-xy-y}dy} & y > ۰ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

از طرفی:

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x-xy-y}\,dy = e^{-x}\int_{۰}^{\infty} e^{-y(۱+x)}\,dy = e^{-x}\frac{-e^{-y(۱+x)}}{۱+x}\Big|_{y=۰}^{y=\infty} = \frac{e^{-x}}{x+۱}$$

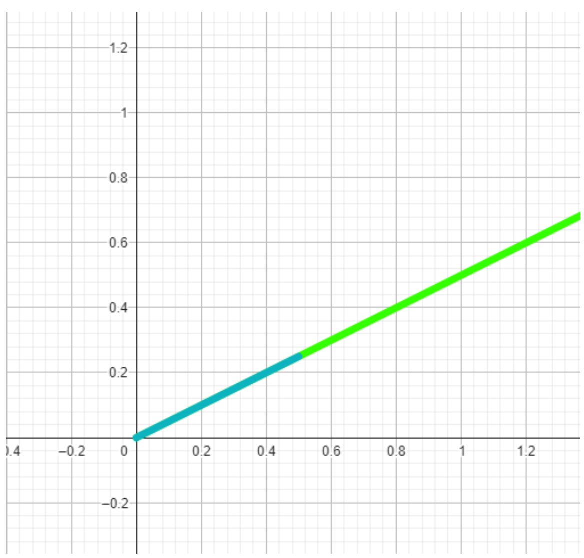
بنابراین:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{e^{-x-xy-y}}{\frac{e^{-x}}{x+۱}} & y > ۰ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases} = \begin{cases} (x+۱)e^{-y-xy} & y > ۰ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

ب) شرط ذکرشده معادل این است که $X = ۲Y$، ابتدا تابع توزیع تجمعی را بدست می‌آوریم:

$$P(X < a|X = ۲Y) = \frac{P(X < a, X = ۲Y)}{P(X = ۲Y)}$$

نواحی متناظر با احتمالات صورت و مخرج در صفحه‌ی $x - y$ به شکل زیر خواهند بود:




با توجه به شکل، اگر روی صفحه‌ای به بلندای دو خط و ضخامت $\epsilon$ (که مقدار آن به صفر میل می‌کند) از تابع چگالی انتگرال‌گیری شود، به مقادیر صورت و مخرج می‌رسیم:

$$\begin{cases} P(X < a, X = ۲Y) = F_X(a|X = ۲Y) = \int_{x=-\infty}^{x=a} f_{XY}(x, y)\, dl \\ f_{XY}(x, y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \\ dl = \sqrt{dx^۲ + dy^۲} = \sqrt{۱ + \frac{dy}{dx}^۲}\, dx = \sqrt{۱ + \frac{۱}{۴}}\, dx = \frac{\sqrt{۵}}{۲}\, dx \end{cases}$$

به شرط $a > ۰$ داریم:

$$\Rightarrow F_X(a|X = ۲Y) = \epsilon \int_{x=۰}^{x=a} \frac{\sqrt{۵}}{۲c} e^{-x - x(\frac{x}{۲}) - (\frac{x}{۲})}\, dx = \epsilon \frac{\sqrt{۵}}{۲c} \int_{x=۰}^{x=a} e^{-\frac{(x+\frac{۳}{۲})^۲}{۲} + \frac{۹}{۸}}\, dx$$

$$\Rightarrow F_X(a|X = ۲Y) = \frac{P(X < a, X = ۲Y)}{P(X = ۲Y)} = \frac{\int_۰^a e^{-\frac{(x+\frac{۳}{۲})^۲}{۲}}\, dx}{\int_۰^\infty e^{-\frac{(x+\frac{۳}{۲})^۲}{۲}}\, dx} = \frac{۱}{k} \int_۰^a e^{-\frac{(x+\frac{۳}{۲})^۲}{۲}}\, dx$$

در نهایت از تابع بدست آمده نسبت به $a$ مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f_X(a|X = ۲Y) = \frac{d}{da} F_X(a|X = ۲Y) = \frac{۱}{k} e^{-\frac{(a+\frac{۳}{۲})^۲}{۲}}\ ;\ a > ۰$$

پس:

$$\Rightarrow f_X(x|X = ۲Y) = \begin{cases} \frac{۱}{k} e^{-\frac{(x+\frac{۳}{۲})^۲}{۲}} & x > ۰ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}, k = \int_۰^\infty e^{-\frac{(x+\frac{۳}{۲})^۲}{۲}}\, dx \approx ۰/۱۶۷$$