



University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین هفتم - آمار

نرجس و دریا

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۱۰/۱۷

سؤال ۱.

یک آژانس مسافرتی می‌داند که در طولانی مدت، ۹۰ درصد مسافرانی که صندلی رزرو می‌کنند در سفر خود حاضر می‌شوند. در یک سفر خاص با ۳۰۰ صندلی، آژانس مسافرتی ۳۲۴ رزرو را می‌پذیرد. برای پاسخ به سوالات زیر، از تقریب نرمال بهره بگیرید:

آ) آیا این احتمال وجود دارد که سفر بیش از حد مسافر داشته باشد؟ رویداد حضور هر مسافری مستقل از یکدیگر است.

ب) باتوجه به بخش قبلی، اکنون فرض کنید مسافران همیشه دو نفره سفر می‌کنند و تنها در صورتی سفر می‌کنند که هر دو نفر به صورت جفت حاضر شوند. بررسی کنید که آیا پاسخ شما به سوال قبلی با این نتیجه مطابقت دارد یا خیر.

سؤال ۲.

ما علاقه مند هستیم که درصد فارغ التحصیلان یک دانشگاه را که ظرف یک سال پس از اتمام دوره کارشناسی خود کار پیدا کرده‌اند، تخمین بزنیم. فرض کنید ما یک نظرسنجی انجام می‌دهیم و متوجه می‌شویم که ۳۴۸ نفر از ۴۰۰ فارغ التحصیل نمونه تصادفی شغل پیدا کرده‌اند. کلاس فارغ التحصیلی مورد بررسی شامل بیش از ۴۵۰۰ دانش آموز بود.

آ) پارامتر مطلوب تخمین مذکور را بدست آورید. ارزش تخمین نقطه‌ای این پارامتر چقدر است؟

ب) بررسی کنید که آیا شرایط ایجاد بازه‌ی اطمینان بر اساس این داده‌ها وجود دارد یا خیر.

ج) بازه اطمینان ۹۵ درصدی را برای نسبت فارغ التحصیلانی که در مدت یک سال پس از اتمام دوره کارشناسی خود در این دانشگاه پیدا کرده‌اند محاسبه کرده و آن را در چارچوب داده‌ها تفسیر کنید.

د) بدون محاسبه ی بازه اطمینان ۹۹ درصدی، عرض بازه‌ی محاسبه شده در قسمت ج را با عرض بازه ۹۹ درصدی مقایسه کنید. توضیح دهید کدام یک عریض تر است و چرا.

سؤال ۳.

یک شرکت بیمه دارای n مشتری بیمه شده است. فرض کنید که n عدد بسیار بزرگی است. کارشناسان بیمه با مطالعه داده‌های سالیان متعددی دریافته‌اند که رفتار بیمه شدگان در طول یک سال به صورت زیر قابل ساده سازی است: هر بیمه شده مستقل از سایرین با احتمال $1-p$ خرجی روی دست بیمه نمی‌گذارد. اما به احتمال p دچار حادثه شده و سقف پرداخت جبرانی بیمه که C تومان است را دریافت می‌کند. مقادیر p, C معلوم فرض شود.

واضح است که متوسط هزینه تحمیل شده به بیمه مقدار pC تومان به ازای هر فرد در سال است. لذا هیئت مدیره تصمیم گرفته است که برای کل سال جاری مقدار $pC(1+\eta)$ تومان را از هر بیمه شده تحت عنوان حق بیمه دریافت کند. به دلیل رقابت با سایر شرکت های بیمه این شرکت بطور خاص در امسال دنبال سود نیست اما ضرر نیز نمی‌خواهد.

حداقل بیمه شدگان تحت حمایت این شرکت، یعنی n ، چقدر باشد تا به ازای مقدار مشخص p, C, η احتمال ضرر دهی شرکت کمتر از مقدار مفروض δ شود؟ (راهنمایی: اگر X توزیع نرمال استاندارد و t یک ثابت باشد: $P(X > t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$)

سؤال ۴.

آزمایش‌هایی با هدف بررسی مقدار فلزی که در درجه حرارت 120° حمام اسید، از یک سری قطعات جدا می‌شوند، انجام داده‌ایم. نتایج زیر به دست آمده اند. (هر عدد معرف ضخامت فلز جدا شده برحسب 0.1 میلی متر است و داده‌ها را می‌توان دارای توزیع نرمال فرض کرد).

$$2/4, 2/2, 2/0, 1/8, 2/1, 2/1$$

آ) بازه‌های اطمینان 0.90 و 0.95 برای میانگین مقدار فلزی که در شرایط فوق از قطعات جدا می‌شوند، به دست آورید.

ب) فرض کنید به جای داده $2/2$ ، مقدار $3/1$ مشاهده می‌شد. بازه‌های بند الف را دوباره به دست آورید، و درباره تاثیر این داده دور افتاده (یا داده پرت) در بازه‌های اطمینان بحث کنید.

سؤال ۵.

در یک نظرسنجی در مورد میزان رضایت دانشجویان یک دانشگاه از آموزش مجازی، 63 درصد از آن‌ها اعلام کردند که از این نوع آموزش رضایت ندارند. حاشیه خطای این نظرسنجی برای بازه اطمینان 95 درصد برابر با $3\% \pm$ است.

آ) اندازه‌ی نمونه‌ی مورد استفاده در این نظرسنجی را تخمین بزنید.

ب) با استفاده از اندازه‌ی بدست آمده، یک بازه اطمینان 90% برای درصد دانشجویانی که از آموزش مجازی ناراضی هستند بسازید.

سؤال ۶.

میانگین زمان پاسخگویی و انحراف معیار در یک سیستم کامپیوتری چندکاربره به ترتیب 15 ثانیه و 3 ثانیه می‌باشد. احتمال آنکه زمان پاسخگویی بیش از 5 ثانیه از میانگین فاصله داشته باشد را محاسبه کنید.

سؤال ۷.

یک منبع در هر زمانی که اندازه‌گیری می‌شود K فوتون از خود ساطع می‌کند. ما فرض می‌کنیم که K دارای توزیع زیر است:

$$p_K(k; \theta) = c(\theta)e^{-k\theta} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

بطوری که θ معکوس دمای منبع است و $c(\theta)$ ضریب نرمالیزاسیون است. همچنین فرض می‌کنیم که فوتون‌های ساطع شده از منبع هر بار مستقل از یکدیگر هستند. ما می‌خواهیم دمای منبع را با اندازه‌گیری‌های پی در پی فوتون‌های ساطع شده تخمین بزنیم.

(آ) ضریب نرمالیزاسیون $c(\theta)$ را بیابید.

(ب) امید ریاضی و واریانس تعداد فوتون‌های ساطع شده را بیابید.

(ج) تخمین ML برای دمای منبع $\psi = \frac{1}{\theta}$ را بر اساس K_1, K_2, \dots که تعداد فوتون‌های ساطع شده پس از n بار اندازه‌گیری است بیابید.

(د) نشان دهید که تخمین بدست آمده پایدار است.

سؤال ۸.

سری دهم تمرینات کامپیوتری با موضوع تخمین را می‌توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA7_S10_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
 - پاسخ سوالاتی که در متن فارسی مطرح و بدون پاسخ رها شده‌اند را در همان سلول اضافه کنید.
 - فایل کد خود را با ایمیل gelammv6@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

سؤال ۹.

اختیاری: این تمرین تحویل ندارد. در صورت تمایل برای بحث و گفتگو پیرامون این تمرین، با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir در ارتباط باشید.

در بخش‌های پیشین، تمرینات کامپیوتری، با نحوه استفاده از توزیع‌های مختلف در یک مدل بیزی آشنا شدید. همچنین در بخش دهم با برازش توزیع‌های مناسب به ازای دادگان آشنا شدید. به عنوان بخش یازدهم سری تمرینات کامپیوتری، دادگان بخش دهم را بر حسب یک معیار دلخواه، به دو دسته تقسیم کرده و بر روی آن‌ها یک مدل بیزی برازش کنید که با استفاده از بهرین توزیع و پارامترهای ممکن، سعی بر طبقه‌بندی دادگان در دو دسته‌ی ارائه شده توسط خودتان پردازد.

سؤال ۱۰.

بخش دوازدهم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع قضیه حد مرکزی را می‌توانید از طریق این لینک^۲ دریافت کنید.

^۱<https://colab.research.google.com/drive/1lNkj0H-QiGKBi7sW0Id0e89qu19IRalh?usp=sharing>

^۲<https://colab.research.google.com/drive/1ONpuquUCMytOAb2KbW0BtuQYBNbCw1c?usp=sharing>

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA7_S12_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
 - فایل کد خود را با ایمیل afzaliaref.aa@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

سؤال ۱۱.

- بخش آخر سری تمرینات کامپیوتری با موضوع آزمون فرض را می‌توانید از طریق این لینک^۳ دریافت کنید.
- یک کپی از فایل مذکور با نام CA7_S13_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
 - سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ قرمز مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
 - فایل کد خود را با ati.noorzad@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

³<https://colab.research.google.com/drive/1VRDWkVU8LfcYJ5rOPGqlziRxeTuk2p0?usp=sharing>