



University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین هفتم - آمار

نرجس و دریا

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۱۰/۱۷

سؤال ۱.

یک آژانس مسافرتی می‌داند که در طولانی مدت، ۹۰ درصد مسافرانی که صندلی رزرو می‌کنند در سفر خود حاضر می‌شوند. در یک سفر خاص با ۳۰۰ صندلی، آژانس مسافرتی ۳۲۴ رزرو را می‌پذیرد. برای پاسخ به سوالات زیر، از تقریب نرمال بهره بگیرید:

(آ) آیا این احتمال وجود دارد که سفر بیش از حد مسافر داشته باشد؟ رویداد حضور هر مسافری مستقل از یکدیگر است.

(ب) با توجه به بخش قبلی، اکنون فرض کنید مسافران همیشه دو نفره سفر می‌کنند و تنها در صورتی سفر می‌کنند که هر دو نفر به صورت جفت حاضر شوند. بررسی کنید که آیا پاسخ شما به سوال قبلی با این نتیجه مطابقت دارد یا خیر.

پاسخ.

(آ) در صورتی که بیش از ۳۰۰ مسافر حاضر شوند، سفر بیش از حد مسافر خواهد داشت. با توجه به سوال، هر مسافر به احتمال ۰/۹ حاضر می‌شود.

S = number of passengers who show up

$$P(S \geq 301) = P(S \geq 301 - 0.5) = P\left(\frac{S - 324 \times 0.9}{\sqrt{324 \times 0.9 \times 0.1}} \geq \frac{301 - 0.5 - 324 \times 0.9}{\sqrt{324 \times 0.9 \times 0.1}}\right) = 0.049$$

(ب) احتمال سفر به صورت جفتی $0.81 = 0.9 \times 0.9$ است. ۱۶۲ جفت وجود دارد. میانگین و انحراف معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu = 131.22, \quad \sigma = \sqrt{162 \times 0.81 \times 0.19} = 4.993$$

$$P(S \geq 151) = P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} \geq \frac{151 - 0.5 - \mu}{\sigma}\right) \approx 0.001$$

سؤال ۲.

ما علاقه مند هستیم که درصد فارغ التحصیلان یک دانشگاه را که ظرف یک سال پس از اتمام دوره کارشناسی خود کار پیدا کرده‌اند، تخمین بزنیم. فرض کنید ما یک نظرسنجی انجام می‌دهیم و متوجه می‌شویم که ۳۴۸ نفر از ۴۰۰ فارغ التحصیل نمونه تصادفی شغل پیدا کرده‌اند. کلاس فارغ التحصیلی مورد بررسی شامل بیش از ۴۵۰۰ دانش آموز بود.

(آ) پارامتر مطلوب تخمین مذکور را بدست آورید. ارزش تخمین نقطه‌ای این پارامتر چقدر است؟

(ب) بررسی کنید که آیا شرایط ایجاد بازه‌ی اطمینان بر اساس این داده‌ها وجود دارد یا خیر.

(ج) بازه اطمینان ۹۵ درصدی را برای نسبت فارغ التحصیلانی که در مدت یک سال پس از اتمام دوره کارشناسی خود در این دانشگاه پیدا کرده‌اند محاسبه کرده و آن را در چارچوب داده‌ها تفسیر کنید.

(د) بدون محاسبه‌ی بازه اطمینان ۹۹ درصدی، عرض بازه‌ی محاسبه شده در قسمت ج را با عرض بازه ۹۹ درصدی مقایسه کنید. توضیح دهید کدام یک عریض‌تر است و چرا.

پاسخ.

(آ) درصد فارغ التحصیلان که کار پیدا کرده‌اند:

$$\hat{p} = \frac{348}{400} = 0.87$$

(ب) شرایط:

$$n \times p \times q > 10 \rightarrow 400(0.87)(1 - 0.87) = 348(0.13) = 45.24 > 10$$

(ج)

$$CI = \hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$= 0.87 \pm z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.87 \times (1 - 0.87)}{400}} = 0.87 \pm 0.03 = (0.84, 0.9)$$

با اطمینان ۹۵٪ می‌دانیم نسبت فارغ التحصیلانی که در مدت یکسال پس از اتمام دوره‌ی کارشناسی خود در این دانشگاه کار پیدا کرده‌اند بین (۰٫۸۴، ۰٫۹) است.

(د) عرض بازه‌ی اطمینان ۹۹٪ بیشتر است. هرچه عرض یک بازه‌ی اطمینان بیشتر باشد، اطمینان بیشتری داریم که نسبت مورد نیاز در این بازه قرار گیرد.

سؤال ۳.

یک شرکت بیمه دارای n مشتری بیمه شده است. فرض کنید که n عدد بسیار بزرگی است. کارشناسان بیمه با مطالعه داده‌های سالیان متمادی دریافته‌اند که رفتار بیمه شدگان در طول یک سال به صورت زیر قابل ساده سازی است: هر بیمه شده مستقل از سایرین با احتمال $1-p$ خرجی روی دست بیمه نمی‌گذارد. اما به احتمال p دچار حادثه شده و سقف پرداخت جبرانی بیمه که C تومان است را دریافت می‌کند. مقادیر p ، C معلوم فرض شود.

واضح است که متوسط هزینه تحمیل شده به بیمه مقدار pc تومان به ازای هر فرد در سال است. لذا هیئت مدیره تصمیم گرفته است که برای کل سال جاری مقدار $(1 + \eta)pc$ تومان را از هر بیمه شده تحت عنوان حق بیمه دریافت کند. به دلیل رقابت با سایر شرکت های بیمه این شرکت بطور خاص در امسال دنبال سود نیست اما ضرر نیز نمی خواهد.

حداقل بیمه شدگان تحت حمایت این شرکت، یعنی n ، چقدر باشد تا به ازای مقدار مشخص c, p, η احتمال ضرر دهی شرکت کمتر از مقدار مفروض δ شود؟ (راهنمایی: اگر X توزیع نرمال استاندارد و t یک ثابت باشد: $P(X > t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$)

پاسخ.

متغیر تصادفی X_i را یک متغیر برنولی برای فرد i که با احتمال p دچار حادثه خواهد شد در نظر می گیریم.

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots$$

$$P(S_n \times c > n(1 + \eta)pc) = P(S_n > n(1 + \eta)p) \leq \delta$$

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{np\eta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \leq e^{-\frac{\left(\frac{np\eta}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2}{2}}$$

$$e^{\frac{-(np\eta)^2}{2np(1-p)}} \leq \delta$$

$$\frac{-(np\eta)^2}{2np(1-p)} \leq \ln(\delta)$$

$$n \geq \frac{-2(1-p) \times \ln(\delta)}{p\eta^2}$$

سؤال ۴.

آزمایش هایی با هدف بررسی مقدار فلزی که در درجه حرارت 120° حمام اسید از یک سری قطعات جدا می شوند انجام داده ایم. نتایج زیر به دست آمده اند. (هر عدد معرف ضخامت فلز جدا شده برحسب 0.01 میلی متر است و داده ها را می توان دارای توزیع نرمال فرض کرد).

$$2/4, 2/2, 2/0, 1/8, 2/1, 2/1$$

آ) بازه های اطمینان 0.90 و 0.95 برای میانگین مقدار فلزی که در شرایط فوق از قطعات جدا می شوند، به دست آورید.

ب) فرض کنید بجای داده ی $2/2$ ، مقدار $3/1$ مشاهده می شد. بازه های بند الف را دوباره به دست آورید، و درباره ی تاثیر این داده دور افتاده (یا داده ی پرت) در بازه های اطمینان بحث کنید.

پاسخ.

آ) بازه اطمینان برای میانگین با واریانس نامعلوم :

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

با توجه به اینکه در صورت سوال میانگین و واریانس داده ها ذکر نشده است باید آن ها را به دست آوریم:

$$\text{میانگین داده های داده شده} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2/1, \quad \text{واریانس داده های داده شده} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = 0.04$$

حال بازه اطمینان ۹۰٪ را به دست می آوریم.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

$$\left(2.1 - \frac{1.645}{\sqrt{6}}(1.645) < \mu < 2.1 + \frac{1.645}{\sqrt{6}}(1.645) \right)$$

با اطمینان ۹۰٪ می دانیم میانگین مقدار فلزی که در شرایط فوق جدا می شود در بازه (۱/۹۶, ۲/۲۳) قرار دارد.

بازه اطمینان ۹۵٪:

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\left(2.1 - \frac{1.96}{\sqrt{6}}(1.96) < \mu < 2.1 + \frac{1.96}{\sqrt{6}}(1.96) \right)$$

با اطمینان ۹۵٪ می دانیم میانگین مقدار فلزی که در شرایط فوق جدا می شود در بازه (۱/۹۳, ۲/۲۶) قرار دارد.

(ب)

$$\text{میانگین داده های داده شده} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2.25, \quad \text{واریانس داده های داده شده} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = 0.211$$

بازه اطمینان ۹۰٪:

$$\left(2.25 - \frac{1.645}{\sqrt{6}}(1.645) < \mu < 2.25 + \frac{1.645}{\sqrt{6}}(1.645) \right)$$

با اطمینان ۹۰٪ می دانیم میانگین مقدار فلزی که در شرایط فوق جدا می شود در بازه (۱/۹۴, ۲/۵۶) قرار دارد.

بازه اطمینان ۹۵٪:

$$\left(2.25 - \frac{1.96}{\sqrt{6}}(1.96) < \mu < 2.25 + \frac{1.96}{\sqrt{6}}(1.96) \right)$$

با اطمینان ۹۵٪ می دانیم میانگین مقدار فلزی که در شرایط فوق جدا می شود در بازه (۱/۸۸, ۲/۶۱) قرار دارد.

بحث و نتیجه گیری:

بدون داده پرت	با داده پرت	
(۱/۹۶, ۲/۲۳)	(۱/۹۴, ۲/۵۶)	بازه اطمینان ۹۰ درصد
(۱/۹۳, ۲/۲۶)	(۱/۸۸, ۲/۶۱)	بازه اطمینان ۹۵ درصد

همانطور که مشاهده می کنید در صورت وجود داده ی دور افتاده، بازه اطمینان بزرگ تر می شود.

سؤال ۵.

در یک نظرسنجی در مورد میزان رضایت دانشجویان یک دانشگاه از آموزش مجازی، ۶۳ درصد از آن ها اعلام کردند که از این نوع آموزش رضایت ندارند. حاشیه خطای این نظرسنجی برای بازه اطمینان ۹۵ درصد برابر با $\pm 3\%$ است.

آ) اندازه‌ی نمونه‌ی مورد استفاده در این نظرسنجی را تخمین بزنید.

ب) با استفاده از اندازه‌ی بدست آمده، یک بازه اطمینان ۹۰٪ برای درصد دانشجویانی که از آموزش مجازی ناراضی هستند بسازید.

پاسخ.

آ) در این سوال با یک توزیع برنولی مواجه هستیم: به طوری که $p = ۰/۶۳$ می باشد.

$$\mu = ۰/۶۳$$

$$\sigma^2 = ۰/۶۳ - ۰/۶۳^2 = ۰/۲۳۳۱$$

با توجه به بازه اطمینان داده شده:

$$1 - \alpha = ۰/۹۵ \rightarrow \alpha = ۰/۰۵$$

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \left(۰/۶۳ - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{۰/۹۷۵}, ۰/۶۳ + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{۰/۹۷۵}\right) =$$

$$\left(۰/۶۳ - \sqrt{\frac{۰/۲۳۳۱}{n}} \times ۱/۹۶, ۰/۶۳ + \sqrt{\frac{۰/۲۳۳۱}{n}} \times ۱/۹۶\right)$$

با توجه حاشیه‌ی خطای داده شده در صورت سوال:

$$\sqrt{\frac{۰/۲۳۳۱}{n}} \times ۱/۹۶ = ۰/۰۳ \rightarrow n = ۹۹۴/۹۷۴۴ \rightarrow n = ۹۹۵$$

دقت شود که n باید عدد طبیعی باشد.

ب)

$$1 - \alpha = ۰/۹۰ \rightarrow \alpha = ۰/۱$$

طبق بخش قبل، ریشه‌ی دوم نسبت واریانس و تعداد نمونه‌ها را داریم:

$$\sqrt{\frac{۰/۲۳۳۱}{n}} = ۰/۰۳ \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{۰/۲۳۳۱}{n}} \times z_{۰/۹۵} = ۰/۰۳ \times ۱/۶۵ = ۰/۰۴۹۵$$

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = (۰/۶۳ - ۰/۰۴۹۵, ۰/۶۳ + ۰/۰۴۹۵) = (۰/۵۸۰۵, ۰/۶۷۹۵)$$

سؤال ۶.

میانگین زمان پاسخگویی و انحراف معیار در یک سیستم کامپیوتری چندکاربره به ترتیب ۱۵ ثانیه و ۳ ثانیه می باشد. احتمال آنکه زمان پاسخگویی بیش از ۵ ثانیه از میانگین فاصله داشته باشد را محاسبه کنید.

پاسخ.

با استفاده از نامساوی چبی شف برای میانگین ۱۵ ثانیه و انحراف معیار ۳ ثانیه داریم:

$$\mu = ۱۵sec, \quad \sigma = ۳sec, \quad \epsilon = ۵sec$$

$$P\{\mu - \epsilon < X < \mu + \epsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

با به صورت دیگری داریم:

$$P\{|X - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

پس خواهیم داشت:

$$P[|X - 15| \geq 5] \leq \frac{9}{25} = 0.36$$

سؤال ۷.

یک منبع در هر زمانی که اندازه گیری می شود K فوتون از خود ساطع می کند. ما فرض می کنیم که K دارای توزیع زیر است:

$$p_K(k; \theta) = c(\theta)e^{-k\theta} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

بطوری که θ معکوس دمای منبع است و $c(\theta)$ ضریب نرمالیزاسیون است. همچنین فرض می کنیم که فوتون های ساطع شده از منبع هر بار مستقل از یکدیگر هستند. ما می خواهیم دمای منبع را با اندازه گیری های پی در پی فوتون های ساطع شده تخمین بزنیم.

(آ) ضریب نرمالیزاسیون $c(\theta)$ را بیابید.

(ب) امید ریاضی و واریانس تعداد فوتون های ساطع شده را بیابید.

(ج) تخمین ML برای دمای منبع $\psi = \frac{1}{\theta}$ را بر اساس K_1, K_2, \dots که تعداد فوتون های ساطع شده پس از n بار اندازه گیری است بیابید.

(د) نشان دهید که تخمین بدست آمده پایدار است.

پاسخ.

(آ) در متغیر تصادفی گسسته مجموع احتمال پیشامد ها ۱ می شود با استفاده از این نکته:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} c(\theta)e^{-k\theta} = \frac{c(\theta)}{1 - e^{-\theta}}$$

$$c(\theta) = 1 - e^{-\theta}$$

(ب) با دقت می توان دید که K دارای توزیع هندسی شیفت یافته با $p = 1 - e^{-\theta}$ است پس داریم (K از صفر شروع شده است):

$$E_{\theta}[K] = \frac{1-p}{p} - 1 = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

$$var_{\theta}(K) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{e^{-\theta}}{(1 - e^{-\theta})^2}$$

(ج) ابتدا متغیر K_i را تعداد فوتون های ساطع شده در زمان i ام می نامیم

توزیع توام برای متغیر تصادفی K بصورت زیر است:

$$p_K(k_1, \dots, k_n; \theta) = c(\theta)^n \prod_{i=1}^{\infty} e^{-\theta k_i} = c(\theta)^n e^{-\sum K_i \times \theta}$$

$$L(\theta) = (1 - e^{-\theta})^n \times e^{-\sum K_i \times \theta}$$

با گرفتن لگاریتم تابع log-likelihood را بدست می آوریم:

$$LL(\theta) = n \ln(1 - e^{-\theta}) - \sum K_i \times \theta$$

برای بدست آوردن بیشترین مقدار تابع بر حسب θ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم.

$$\frac{dLL(\theta)}{d\theta} = \frac{ne^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} - \sum K_i = 0$$

$$e^{-\theta} = \frac{\sum K_i}{n + \sum K_i} \implies \hat{\theta}_n = \ln\left(1 + \frac{n}{\sum K_i}\right)$$

$$\implies \hat{\psi}_n = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{n}{\sum K_i}\right)}$$

(د) اگر $S_n = \sum K_i$ باشد، از قانون ضعیف اعداد بزرگ داریم:

$$P\left\{\frac{S_n}{n} = E(K) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}\right\} \rightarrow 1$$

از آنجایی که داریم:

$$1 + \frac{n}{S_n} = \frac{e^{-\theta} + 1 - e^{-\theta}}{e^{-\theta}} = e^{\theta}$$

با کمک از نتایج بخش قبل می توان گفت:

$$\hat{\theta}_n = \ln\left(1 + \frac{n}{\sum K_i}\right) \rightarrow \theta$$

به همین صورت برای ψ نیز می توانیم بنویسیم:

$$\hat{\psi}_n = \frac{1}{\hat{\theta}_n} \rightarrow \psi$$

از همگرایی به احتمال ۱ می توانیم به همگرایی در احتمال برسیم پس نتیجه می گیریم که این ۲ متغیر پایدار خواهند شد.

سؤال ۸.

سری دهم تمرینات کامپیوتری با موضوع تخمین را می توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA7_S10_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه های تکرار استفاده نکنید.
- پاسخ سوالاتی که در متن فارسی مطرح و بدون پاسخ رها شده اند را در همان سلول اضافه کنید.
- فایل کد خود را با ایمیل gelammv۶@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.

¹<https://colab.research.google.com/drive/1INkj0H-QiGKBi7sW0Id0e89qu19IRalh?usp=sharing>

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ.

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک^۲ در دسترس است.

سؤال ۹.

اختیاری: این تمرین تحویل ندارد. در صورت تمایل برای بحث و گفتگو پیرامون این تمرین، با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir در ارتباط باشید.

در بخش‌های پیشین، تمرینات کامپیوتری، با نحوه استفاده از توزیع‌های مختلف در یک مدل بیزی آشنا شدید. همچنین در بخش دهم با برازش توزیع‌های مناسب به ازای دادگان آشنا شدید. به عنوان بخش یازدهم سری تمرینات کامپیوتری، دادگان بخش دهم را بر حسب یک معیار دلخواه، به دو دسته تقسیم کرده و بر روی آن‌ها یک مدل بیزی برازش کنید که با استفاده از بهرین توزیع و پارامترهای ممکن، سعی بر طبقه‌بندی دادگان در دو دسته‌ی ارائه شده توسط خودتان پردازد.

سؤال ۱۰.

بخش دوازدهم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع قضیه حد مرکزی را می‌توانید از طریق این لینک^۳ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA7_S12_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
- فایل کد خود را با ایمیل afzaliaref.aa@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ.

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک^۴ در دسترس است.

سؤال ۱۱.

بخش آخر سری تمرینات کامپیوتری با موضوع آزمون فرض را می‌توانید از طریق این لینک^۵ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA7_S13_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.

^۲<https://colab.research.google.com/drive/1o3v018JO6o1TMLEmhaMuDoe3Ep1Xli6?usp=sharing>

^۳<https://colab.research.google.com/drive/1ONpuquUCMytOAb2KbWoBtuQYBNbCw1c?usp=sharing>

^۴<https://colab.research.google.com/drive/1z-d04qWnsqOAlY9RSAP5XKcpBODlBuMX?usp=sharing>

^۵<https://colab.research.google.com/drive/1VRDWkvU8LfcYJ5rOPGqlziRxeTUk2p0?usp=sharing>

- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ قرمز مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
 - فایل کد خود را با `ati.noorzad@gmail.com` با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ.

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک^۶ در دسترس است.

^۶<https://colab.research.google.com/drive/1zez0t94Cc8gNeqbP5DRfnxvYaKJhfZx?usp=sharing>