باسمه تعالی

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

شنبه ۲۵ دی‌ماه ۱۳۹۵	امتحان پایان‌ترم درس آمار و احتمال مهندسی	زمان امتحان: ۱۸۰ دقیقه

۱- تابع چگالی احتمال مشترک (توأم) متغیرهای تصادفی X و Y به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} x+4y, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) بهترین تخمین Y را با معیار کمترین میانگین مربع خطا (MSE) با فرض مشاهده‌ی $X=\frac{9}{11}$ به‌دست آورید. **[۵ نمره]**

ب) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z\triangleq\frac{X}{Y}$ ($f_Z(z)$) را محاسبه کنید. **[۵ نمره]**

۲- فرض کنید $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ متغیرهای تصادفی i.i.d. نمایی با پارامتر $\mu=1$ و Y یک متغیر تصادفی پوآسن با پارامتر λ و مستقل از X_iها باشد. برحسب آن‌ها متغیر تصادفی Z به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z\triangleq\begin{cases} X_1+\cdots+X_n, & Y\neq 0 \\ 0, & Y=0 \end{cases}$$

الف) تابع مولد ممان متغیر تصادفی Z ($M_Z(s)=\mathbb{E}\{e^{sZ}\}$) را به‌دست آورید. **[۵ نمره]**

ب) با توجه به بند (الف) یا هر روش دلخواه دیگر میانگین و واریانس Z را بیابید. **[۵ نمره]**

۳- الف) فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توابع جرم احتمال زیر باشند:

$$p_X(k)=p_Y(k)=(1-p)^{k-1}p, \qquad k=1,2,\ldots$$

احتمال شرطی $\mathbb{Pr}\{X=i|X+Y=n\}$ را پیدا کنید. **[۵ نمره]**

ب) متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x)=\frac{1}{\theta_1}e^{\frac{\theta_2-x}{\theta_1}}, \quad x>\theta_2, \ \ \theta_1>0, \ \ \theta_2>0$$

n مشاهده‌ی مستقل از X به‌صورت $\{x_1,\ldots,x_n\}$ صورت گرفته است. برحسب این مشاهدات، تخمین بیشترین درست‌نمایی (ML) را برای θ_1 و θ_2 به‌دست آورید. **[۵ نمره]**

۴- فرض کنید X، Y و $\{U_i, \ i\geq 1\}$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند به گونه‌ای‌که

$$p_X(k)=(e-1)e^{-k}, \ k=1,2,\ldots \qquad\qquad p_Y(k)=\frac{1}{(e-1)\,k!}, \ k=1,2,\ldots$$

و U_iها به‌صورت یکنواخت روی بازه $[0,1]$ توزیع شده باشند. متغیر تصادفی M را به‌صورت $M\triangleq\max\{U_1,U_2,\ldots,U_Y\}$ تعریف می‌کنیم. تابع توزیع متغیر تصادفی $Z=X-M$ را به‌دست آورید. **[۱۰ نمره]**

۵- نمونه‌ای با اندازه 49 از دانشجویان دانشگاه تهران انتخاب شده و از آن‌ها در مورد مدت زمان خوابشان در طول یک شبانه‌روز سوال شده است. میانگین مدت زمان خواب این نمونه 7.6 ساعت و انحراف معیار آن 1.4 ساعت ثبت شده است.

الف) یک بازه اطمینان 90% برای میانگین زمان خواب دانشجویان دانشگاه تهران به‌دست آورید. **[۵ نمره]**

ب) با فرض $\alpha=0.02$ یک آزمون فرض طراحی کنید و به کمک آن تصمیم بگیرید که آیا میانگین مدت زمان خواب دانشجویان دانشگاه تهران برابر 8 ساعت است یا کم‌تر از آن؟ **[۵ نمره]**

در صورت نیاز می‌توانید از جداول و روابط پشت صفحه استفاده نمایید. **جمع بارم: ۵۰ نمره–موفق باشید**

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y,\qquad G(x)\approx 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{0.661x+.339\sqrt{x^2+5.51}},\ \ x>0$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.10	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.20	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.30	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.40	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.50	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.60	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.70	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.80	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.90	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.00	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.10	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.20	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.30	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.40	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.50	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.60	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.70	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.80	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.90	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.00	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.10	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.20	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.30	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.40	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.50	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.60	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.70	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.80	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.90	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861

متغیر تصادفی	تابع مولد ممان	تابع چگالی / جرم احتمال	میانگین و واریانس
پوآسن	$\exp(\lambda(e^s-1))$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{x!},\ \ k=0,1,\dots$	$\eta=\lambda,\ \ \sigma^2=\lambda$
هندسی	$\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s},\ \ s<-\ln(1-p)$	$(1-p)^{k-1}p,\ \ k=1,2,\dots$	$\eta=\frac{1}{p},\ \ \sigma^2=\frac{1-p}{p^2}$
یکنواخت	$\begin{cases}\frac{e^{sb}-e^{sa}}{s(b-a)}, & s\neq 0\\ 1, & s=0\end{cases}$	$\frac{1}{b-a},\ \ a\le x\le b$	$\eta=\frac{b+a}{2},\ \ \sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$
نرمال	$\exp\left(\eta s+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$	$\eta=\eta,\ \ \sigma^2=\sigma^2$
نمایی	$\frac{\mu}{\mu-s},\ \ s<\mu$	$\mu\, e^{-\mu x},\quad 0\le x$	$\eta=\frac{1}{\mu},\ \ \sigma^2=\frac{1}{\mu^2}$

تابع چگالی متغیرهای تصادفی توأماً نرمال (r ضریب همبستگی X و Y است):

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\eta_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2r(x-\eta_X)(y-\eta_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-\eta_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right)$$