۱. برای متغیرهای تصادفی X و Y داریم:

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اگر تابع چگالی حاشیه‌ای X برابر با $0 < x < 1 \ : f_X(x) = 2x$ باشد،

الف) تابع چگالی شرطی $f_X(x|y)$ را به دست آورید.

ب) امید ریاضی $E[X|Y]$ را محاسبه کنید.

پ) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = XY$ را به دست آورید.

a)

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y|x) = 2 \ : \ 0 < x < 1 \, , 0 < y < x$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 2 \ dx = 2(1-y) : \ 0 < y < 1$$

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{1-y} \ : \ y < x < 1$$

b)

$$E[X|Y=y] = \int_y^1 x . f_X(x|y) \, dx = \int_y^1 \frac{x}{1-y} \, dx = \frac{x^2}{2(1-y)} \ |_y^1 = \frac{1-y^2}{2(1-y)} = \frac{1+y}{2}$$

$$E[X|Y] = \frac{1}{2}(1+Y)$$

c)

از حل دستگاه زیر داریم:

$$z = yx \ , \qquad w = x$$

$$x_1 = w \ , y_1 = z/w$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x$$

$$\Rightarrow f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}\left(w \, , z/w\right)}{|-w|} = \frac{2}{w} \ , \qquad 0 < w < 1 \ , \qquad 0 < \frac{z}{w} < w \to \sqrt{z} < w$$

$$f_Z(z) = \int_{\sqrt{z}}^1 \frac{2}{w} \, dw = 2\ln(w) \ |_{\sqrt{z}}^1 = 2\left(\ln(1) - \ln\left(\sqrt{z}\right)\right) = 2\left(0 - \frac{1}{2}\ln(z)\right) = -\ln(z)$$

$$0 < z < 1$$

۲. تابع چگالی احتمال $\theta > 0 \ , \ 0 < x < 1$: $f_X(x) = \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ را در نظر بگیرید.

الف) یک تخمینگر ML برای پارامتر θ پیدا کنید.

ب) آیا تخمینگر محاسبه شده در بخش الف یک تخمینگر بی‌غرض است؟ چرا؟

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \left(\frac{1}{\theta^n}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

$$\rightarrow \ \ LL(\theta) = \ln\big(L(\theta)\big) = -n\ln(\theta) + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\frac{dLL(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0 \rightarrow \ \ \hat{\theta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

b)

$$E\big[\hat{\theta}\big] = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\ln(X_i)] = \ -\frac{1}{n} \times n \times E[\ln(X)] = -E[\ln(X)]$$

$$E[\ln(X)] = \int_0^1 \ln(x) \times \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\,dx = x^{\frac{1}{\theta}}\ln(x) - \theta x^{\frac{1}{\theta}}\,|_0^1 = -\theta - 0 = -\theta$$

$$\rightarrow E\big[\hat{\theta}\big] = \theta$$

بنابراین این تخمینگر بی‌غرض است.

۳. فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برای همه مقادیر s دارای خاصیت زیر باشد:

$$\phi_X(s) = e^s\,\phi_X(-s) \qquad (*)$$

الف) امید ریاضی X را به دست آورید.

ب) یک متغیر تصادفی مثال بزنید که در رابطه $(*)$ صدق کند.

پ) آیا رابطه $(*)$ متغیر تصادفی X را به صورت یکتا مشخص می‌کند.

الف)

$$\phi_X(s) = e^s\,\phi_X(-s) = e^s E\big[e^{-sX}\big] = E\big[e^{s(1-X)}\big] = \phi_{1-X}(s)$$

$$\rightarrow E[X] = E[1-X] = 1 - E[X] \rightarrow \ \ E[X] = \frac{1}{2}$$

راه دوم: مشتق‌گیری از رابطه (*) و قرار دادن $s = 0$.

ب) توزیع یکنواخت روی بازه (0,1)

پ) خیر، علاوه بر توزیع یکنواخت $U(0,1)$، توزیع بتای $6x(1-x)$ روی بازه (0,1) نیز در این رابطه صدق می‌کند.

۴. پژوهشی در ارتباط با تاثیر مدرک در به دست آوردن شغل مناسب بر روی نمونه‌ای با اندازه ۲۵۷۰۳ انجام گرفته است. ۲۶/۱ درصد از ۱۳۰۳۵ مرد موجود در این نمونه دارای مدرک مناسب با شغل خود بوده‌اند، در صورتی که این نسبت برای زنان این نمونه ۳۰/۱ درصد بوده است. آیا از نظر آماری اختلاف قابل توجهی بین این دو نسبت وجود دارد؟ پاسخ خود را با طراحی و اجرای آزمون فرض مناسب توضیح دهید.

$$H_0: p_M = 0.301$$
$$H_A: p_M \neq 0.301$$

$\hat{p} = 0.261 \; , \; n = 13035$

بررسی شرایط:

۱) اندازه نمونه از ۱۰٪ اندازه جامعه کوچکتر است، بنابراین شرط استقلال نمونه‌های تصادفی برقرار است.

۲) شرط اندازه نمونه:

$$np = 13035 \times 0.301 > 10$$
$$n(1-p) = 13035 \times 0.699 > 10$$
$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0.261 - 0.301}{\sqrt{\frac{0.301 \times 0.699}{13035}}} = -9.96$$
$$p - value = P(Z < -9.96) + P(Z > 9.96) \approx 0$$

از آنجایی که p-value < 0.05 فرض صفر را رد می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم اختلاف معناداری از نظر آماری بین این دو نسبت برای مردان و زنان وجود دارد.

راه دوم:

$$H_0: p_W = 0.261$$
$$H_A: p_W \neq 0.261$$

$\hat{p} = 0.301 \; , \; n = 25703 - 13035 = 12668$

۵. یک سکه سالم را ۹۹ مرتبه پرتاب می‌کنیم. سپس به تعداد شیرهای موجود در این ۹۹ پرتاب، مجددا سکه را پرتاب می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد شیرها در مجموع همه این پرتاب‌ها باشد. امید ریاضی X را محاسبه کنید.

متغیر تصادفی Y را برابر با تعداد شیرها در ۹۹ پرتاب اول تعریف می‌کنیم:

$$E[X|Y=y] = y + E\left[Bin\left(y, \frac{1}{2}\right)\right] = y + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}y \rightarrow \; E[X|Y] = \frac{3}{2}Y$$

$$E[X] = E\big[E[X|Y]\big] = E\left[\frac{3}{2}Y\right] = \frac{3}{2}E[Y] = \frac{3}{2} \times E\left[Bin\left(99, \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{3}{2} \times 99 \times \frac{1}{2} = 74.25$$

۶. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع هندسی $Geo(p)$ باشند. تابع جرمی احتمال شرطی $P(X|X+Y=n)$ را به دست آورید.

$$P(X+Y=n)=\sum_{i=1}^{n-1}P(X=i\,,Y=n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}P(X=i)P(Y=n-i)$$

$$P(X+Y=n)=\sum_{i=1}^{n-1}p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{n-i-1}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

$$P(X=k\,|X+Y=n)=\frac{P(X=k\,,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

$$P(X=k|X+Y=n)=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

$$P(X=k\,|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}$$

توزیع یکنواخت روی مجموعه اعداد $\{1,2,\dots,n-1\}$ دارد.