



University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین ششم - قضایای حدی

طاها و مهسا

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۹/۲۸

سؤال ۱.

به شما فرصتی استثنایی برای مزایده بر روی یک جعبه سحرآمیز و پاداشی سحرآمیز داده شده است. مقدار پاداش حداقل صفر و حداکثر ۱ میلیون دلار است و البته مقدار دقیق آن نامعلوم است. فرض می‌کنیم مقدار حقیقی جایزه (V) از توزیع uniform و بر روی $[0, 1]$ پیروی می‌کند.

بازی به این صورت است که شما باید یک مقدار پول را به عنوان مبلغ پیشنهادی جایزه، اعلام کنید. این مقدار دلخواه را b می‌نامیم. لازم به ذکر است که در صورتی که در این بازی سود خواهید کرد که مبلغ پیشنهادیتان، نسبت به مبلغ واقعی جایزه، نه خیلی بیشتر باشد و نه خیلی کمتر! اگر $b > \frac{3}{4}V$ باشد، آنگاه پیشنهاد شما رد شده و هیچ ضرری در کار نخواهد بود. در غیر این صورت، پیشنهاد شما پذیرفته شده و جایزه را برنده می‌شوید که مقدار نتیجه برای شما $V - b$ خواهد بود. انتخاب بهینه شما برای پیشینه کردن امید سود حاصل چقدر است؟

سؤال ۲.

ایمیل‌ها در یک سیستم ارسال و دریافت ایمیل، به صورت یکبار در هر زمان وارد inbox می‌شوند. فرض کنید T_n زمانی باشد که n امین ایمیل دریافت می‌شود (این زمان‌ها به صورت پیوسته محاسبه شده و از یک مبدأ زمانی مشخصی اندازه‌گیری می‌شوند). فرض کنید که زمان‌های بین دو دریافت ایمیل، به صورت متغیرهای تصادفی $i.i.d$ در نظر گرفته شوند که توزیع نمایی با پارامتر λ دارند (طبق توضیحات درس، می‌دانیم که فاصله بین دو نقطه تصادفی با توزیع پواسون، دارای توزیع نمایی است). فرض کنید هر ایمیل با احتمال p ، یک ایمیل non-spam و با احتمال $q = 1 - p$ ، یک ایمیل spam باشد. فرض کنید X زمانی باشد که اولین پیام non-spam دریافت شود.

الف) میانگین و واریانس X را محاسبه کنید.

ب) تابع مولد گشتاور X را محاسبه کرده و از روی آن و مقایسه آن با توابع مولد گشتاور توزیع‌هایی که یاد گرفته‌اید، توزیع X را پیدا کنید.

سؤال ۳.

اگر X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی $i.i.d$ و دارای چگالی $f_X(x)$ و توزیع انباشته $F_X(x)$ باشند و تعریف کنیم:

$$Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$W = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$R = Z - W$$

(آ) تابع $f_R(r)$ تابع چگالی متغیر تصادفی R را بر حسب $f_X(x)$ و $F_X(x)$ بیابید.

(ب) با فرض اینکه متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، $f_R(r)$ را بیابید.

سؤال ۴.

یک تکه چوب به طول l در اختیار داریم. این چوب را از نقطه ای دلخواه که دارای توزیعی به صورت یکنواخت در طول چوب است می شکیم و تکه‌ی شکسته باقی مانده را، نگه می داریم. سپس این کار را با تکه چوب باقی مانده تکرار می کنیم. الف) امید ریاضی طول تکه چوب باقی مانده بعد از ۲ بار شکستن آن چقدر است؟ ب) واریانس طول تکه چوب باقی مانده بعد از ۲ بار شکستن آن چقدر می شود؟

سؤال ۵.

در این سؤال میخواهیم یکی از چالش هایی که بعد از افزایش روزافزون پیک های آنلاین در تهران بوجود آمده است را بررسی کنیم. فرض کنید برای هر زمان t تعداد آدم هایی که به یک رستوران زنگ می زنند، دارای توزیع پواسون با متغیر λ باشند. اگر اولین پیک که به رستوران می رسد (مستقل از زمان زنگ زدن مشتری ها) به طور یکنواخت در بازه $(0, T)$ توزیع شده باشد، میانگین و واریانس تعداد غذاهایی که پیک باید ببرد را بدست بیاورید.

سؤال ۶.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال با میانگین های صفر و واریانس های σ^2 و ضریب همبستگی r باشند. الف) ثابت کنید متغیر های تصادفی $U = X - Y$ و $V = X + Y$ مستقل اند. ب) حاصل $E[X^2 - Y^2 | X - Y]$ را بیابید.

سؤال ۷.

فردی هر روز برای حضور در محل کار خود تاکسی می گیرد. او هر روز صبح، در ایستگاه منتظر تاکسی می ماند اما هر تاکسی که به ایستگاه می رسد، به احتمال $8/10$ و مستقل از تاکسی های دیگر پر است. او تعداد تاکسی هایی که از دست می دهد را می شمرد تا بتواند سوار یک تاکسی شود. زمانی که سوار تاکسی می شود، به تعداد تاکسی هایی که از دست داده، تاس پرتاب می کند و مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب تاس ها را حساب کرده و به آن اندازه به راننده انعام می دهد. امید ریاضی انعامی که این فرد هر روز پرداخت می کند را بیابید.

سؤال ۸.

امتیازی: نمره تکمیلی برای این مبحث به دنبال دارد.

در یک روز، یکی از اساتید دانشکده در زمانی که دارای توزیع یکنواخت بین ساعت ۹ صبح و ۱ بعد از ظهر است به آزمایشگاه خود می رود. سپس او مشغول به انجام یک آزمایش می شود و هنگامی که آن را تمام کرد آن جا را ترک می کند. زمان طول آزمایش دارای توزیع

نمایی با پارامتر

$$\lambda(y) = \frac{1}{5-y}$$

است که در آن y طول زمان بین ۹ صبح و زمان رسیدن به آزمایشگاه است. در همین حال یکی از دانشجویان دکتری وی می‌خواهد او را ببیند. دانشجوی دکتری در زمانی دارای توزیع یکنواخت بین ۹ صبح و ۵ بعد از ظهر به آزمایشگاه استاد می‌رسد؛ اگر او را پیدا نکند می‌رود و دیگر باز نخواهد گشت و اگر او را بیابد زمانی را که دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است با وی می‌گذراند. استاد پس از حضور دانشجو مدتی را با او همراهی و سپس به کار خود برای تمام شدن آزمایش ادامه خواهد داد. امید ریاضی زمانی که دانشجو با استاد می‌گذارند و امید ریاضی زمانی که استاد آزمایشگاه‌اش را ترک می‌کند را بیابید.

سؤال ۹.

سری نهم تمرینات کامپیوتری با موضوع تخمین توزیع بتا را می‌توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA5_S9_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
 - فایل کد خود را با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir به دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

¹<https://colab.research.google.com/drive/1rbRxD4rAnw5OZJHsZRAKHgRmCj2t1V2k?usp=sharing>