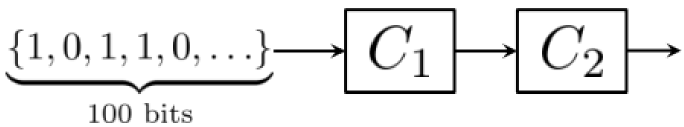
امتحان میان‌ترم آمار و احتمال مهندسی

۱. یک دنباله 100 بیتی از دو کانال مخابراتی C_1 با احتمال خطای $\frac{1}{20}$ و C_2 با احتمال خطای $\frac{1}{18}$، که مطابق شکل به صورت سری به هم متصل شده‌اند، عبور می‌کند. توجه کنید که احتمال خطای یک کانال احتمال تبدیل شدن یک بیت 0 به 1 و یا بالعکس است. احتمال این که حداقل 12 بیت خطا در خروجی داشته باشیم، تقریبا چقدر است؟



احتمال خطا برای یک بیت برابر است با:

$$p_e = p_e(C_1)\big(1 - p_e(C_2)\big) + \big(1 - p_e(C_1)\big)p_e(C_2)$$
$$= \frac{1}{20} \times \left(1 - \frac{1}{18}\right) + \left(1 - \frac{1}{20}\right) \times \frac{1}{18} = \frac{17 + 19}{360} = \frac{36}{360} = \frac{1}{10}$$

بنابراین تعداد بیتهای خطادار در دنباله ۱۰۰ بیتی دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 100$ و $p = 0.1$ است: $X \sim Bin(100{,}0.1)$

$$P(X \geq 12) = ?$$

شرایط تقریب نرمال برقرار است، بنابراین از تقریب نرمال برای محاسبه $P(X \geq 12)$ استفاده می‌کنیم: $X \approx N(10{,}9)$

با در نظر گرفتن تصحیح پیوستگی داریم:

$$P(X \geq 12) = P(N \geq 11.5) = P\left(Z \geq \frac{11.5 - 10}{\sqrt{9}}\right)$$
$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - 0.6914 = 0.3086$$

۲. در یک آزمون تستی، هر تست دارای چهار گزینه است. دانشجویی با احتمال *0.6* پاسخ درست را می‌داند. او همچنین قادر است با احتمال *0.15* تنها دو گزینه‌ی نادرست، و با احتمال *0.15* تنها یک گزینه نادرست را از بین چهار گزینه حذف کند. در غیر این صورت دانشجو یکی از چهار گزینه را به صورت کاملا تصادفی انتخاب می‌کند.

الف) اگر دانشجو پاسخ یک تست را به درستی داده باشد، احتمال آن که پاسخ درست آن را می‌دانسته است چقدر است؟

ب) فرض کنید دانشجو پاسخ تستی را نمی‌دانسته ولی به آن پاسخ درست داده است. احتمال آن که دانشجو پاسخ تست را با حذف تنها یک گزینه نادرست داده باشد چقدر است؟

پیشامد پاسخ صحیح دادن به یک تست: T

پیشامد حذف سه گزینه (دانستن پاسخ صحیح) : S_1 ، بنابراین: $P(S_1) = 0.6 \ , \quad P(T|S_1) = 1$

پیشامد حذف دو گزینه (انتخاب تصادفی از دو گزینه باقیمانده) : S_2 ،

بنابراین: $P(S_2) = 0.15 \ , \quad P(T|S_2) = 1/2$

پیشامد حذف یک گزینه (انتخاب تصادفی از سه گزینه باقیمانده) : S_3 ،

بنابراین: $P(S_3) = 0.15 \ , \quad P(T|S_3) = 1/3$

پیشامد حذف هیچ گزینه (انتخاب تصادفی از چهار گزینه باقیمانده) : S_4 ،

بنابراین: $P(S_4) = 1 - 0.6 - 0.15 - 0.15 = 0.1 \ , \quad P(T|S_4) = 1/4$

الف)

$$P(T) = P(T|S_1)P(S_1) + P(T|S_2)P(S_2) + P(T|S_3)P(S_3) + P(T|S_4)P(S_4)$$

$$= 1 \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.15 + \frac{1}{3} \times 0.15 + \frac{1}{4} \times 0.1 = \frac{7.2 + 0.9 + 0.6 + 0.3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$P(S_1|T) = \frac{P(T|S_1)P(S_1)}{P(T)} = \frac{1 \times 0.6}{0.75} = \frac{4}{5} = 0.8$$

ب)

$$P(S_3|T \cap \bar{S}_1) = \frac{P(T \cap \bar{S}_1|S_3)P(S_3)}{P(T \cap \bar{S}_1)}$$

$$= \frac{P(T|S_3)P(S_3)}{P(T \cap S_2) + P(T \cap S_3) + P(T \cap S_4)}$$

$$= \frac{P(T|S_3)P(S_3)}{P(T|S_2)P(S_2) + P(T|S_3)P(S_3) + P(T|S_4)P(S_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times 0.15}{\frac{1}{2} \times 0.15 + \frac{1}{3} \times 0.15 + \frac{1}{4} \times 0.1} = \frac{1}{3}$$

۳. در یک بازی شما تاس سالمی را متناوبا پرتاب می‌کنید. در این بازی می‌توانید در هر پرتابی که می‌خواهید متوقف شوید، ولی اگر عدد 1 ظاهر شد مجبور به توقف هستید. در هر صورت امتیاز شما مربع عدد ظاهر شده در پرتاب آخر خواهد بود.

الف) اگر استراتژی شما توقف در صورت مشاهده 5 یا 6 باشد، امید ریاضی و واریانس امتیاز خود را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید استراتژی شما این است که عدد یا اعدادی را از پیش تعیین کنید و در صورت ظاهر شدن آنها متوقف شوید. بهترین استراتژی از این نوع در راستای امتیاز بالاتر که می‌توانید انتخاب کنید کدام است؟ معیار بهترین بودن را نیز ذکر کنید.

الف) احتمال این که بازی با عدد ۱ متوقف شود = در همه پرتابهای قبلی اعداد ۲ و ۳ و ۴ ظاهر شوند و در آخرین پرتاب ۱:

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

به طور مشابه احتمال این که بازی با عدد ۵ و یا ۶ نیز متوقف شود برابر با 1/3 خواهد بود:

$$p_5 = \frac{1}{3} \ , \ p_6 = \frac{1}{3}$$

$$E[X] = 1^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{3} = \frac{62}{3} = 20.67$$

$$E[X^2] = 1 \times \frac{1}{3} + 625 \times \frac{1}{3} + 1296 \times \frac{1}{3} = \frac{1922}{3}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1922}{3} - \frac{3844}{9} = \frac{1922}{9}$$

ب) استراتژی بهینه استراتژی است که امید ریاضی متغیر تصادفی مربوط به آن بیشینه شود.

استراتژی توقف در صورت مشاهده ۶:

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \ , \ p_6 = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = 1^2 \times \frac{1}{2} + 6^2 \times \frac{1}{2} = \frac{37}{2} = 18.5$$

استراتژی توقف در صورت مشاهده ۶ یا ۵:

$$E[X] = \frac{62}{3} = 20.67$$

استراتژی توقف در صورت مشاهده ۴ یا ۵ یا ۶ :

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \; , \; p_6 = p_5 = p_4 = \frac{1}{4}$$

$$E[X] = 1^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times \frac{1}{4} = \frac{78}{4} = 19.5$$

استراتژی توقف در صورت مشاهده ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ :

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5} \; , \; p_6 = p_5 = p_4 = p_3 = \frac{1}{5}$$

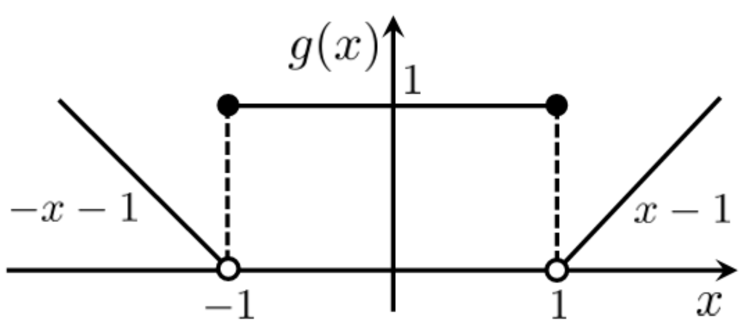
$$E[X] = 1^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 6^2 \times \frac{1}{5} = \frac{87}{5} = 17.4$$

۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$\boldsymbol{f_X(x) = \frac{a\, e^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2} \; , \; a > 0}$$

الف) تابع توزیع تجمعی و امید ریاضی X را پیدا کنید.

ب) توابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال متغیر تصادفی Y با تعریف $Y = g(X)$ (مطابق شکل زیر) را بیابید.



الف)

$$e^{-ax} = u \rightarrow \; -a.e^{-ax}\, dx = \; du$$

$$\int \frac{a\, e^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2}\ dx\ = \int -\frac{1}{(1+u)^2} du = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+e^{-ax}}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{a\, e^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2}\ dx = \frac{1}{1+e^{-ax}} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{1+e^{-ax}}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ax\, e^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2}\ dx = 0$$

چون $\frac{ax\, e^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2}$ تابع فرد است.

ب)

$$y \le 0 : F_Y(y) = 0$$

$$0 < y < 1 : F_Y(y) = P\{X > 1 \cap X - 1 \le y\} + P\{X < -1 \cap -X - 1 \le y\} =$$

$$P(1 < X < y + 1) + P(-y - 1 < X < -1) =$$

$$2(F_X(y+1) - F_X(1)) = 2\left(\frac{1}{1+e^{-a(y+1)}} - \frac{1}{1+e^{-a}}\right)$$

$$P\{Y = 1\} = P\{-1 < X < 1\} = F_X(1) - F_X(-1) = \frac{1}{1+e^{-a}} - \frac{1}{1+e^{a}}$$

$$y > 1 :\ F_Y(y) = P\{-y - 1 < X < y + 1\} =$$

$$2(F_X(y+1) - F_X(0)) = 2\left(\frac{1}{1+e^{-a(y+1)}} - \frac{1}{2}\right)$$

۵. تابع چگالی احتمال مشترک متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{f_{XY}(x,y) = c\frac{y}{x}\ :\ 0 < y < x < 1}$$

الف) مقدار ثابت c چقدر است؟

ب) توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را محاسبه کنید.

پ) آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

ت) امید ریاضی X و Y را محاسبه کنید.

الف)

$$\int_0^1 \int_0^x c\frac{y}{x}\ dy\ \ dx\ = 1$$

$$\int_0^x c\frac{y}{x}\ dy = \frac{c}{x} \times \frac{1}{2} y^2\ |_0^x = \frac{c}{2x}(x^2 - 0) = \frac{cx}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{cx}{2}\ dx = \frac{c}{4} x^2 |_0^1 = \frac{c}{4}(1-0) = 1\ \ \rightarrow c = 4$$

ب)

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{4y}{x}\ dy = \frac{2y^2}{x}|_0^x = \frac{2}{x}(x^2 - 0) = 2x\ :\ \ 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{4y}{x}\ dx = 4y\ln(x)|_y^1 = 4y(\ln(1) - \ln(y)) = -4y\ln(y)\ :\ \ 0 < y < 1$$

پ)

متغیرهای تصادفی X و Y مستقل نیستند زیرا: $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$

ت)

$$E[X] = \int_0^1 x\ f_X(x) dx = \ \int_0^1 2x^2\ dx = \frac{2}{3} x^3 |_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y\ f_Y(y) dy = \ \int_0^1 -4y^2 \ln(y)\ dy$$

$$= -\frac{4}{3} y^3 \ln(y) + \frac{4}{9} y^3 |_0^1$$

$$= -\frac{4}{3}(0-0) + \frac{4}{9}(1-0) = \frac{4}{9}$$