دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین هفتم ــ مقدمه‌ای بر برآورد، آزمون فرض و بازه اطمینان

طراح: سارا معصومی

سوپروایزر: سروش مس‌فروش مشهد

تاریخ تحویل: ۲۷ دی ۱۴۰۲

۱. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی — ۲۰ نمره

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی زیر هستند:

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}, \qquad 0 < \theta \leq x$$

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر θ را به‌دست آورید.

پاسخ :

تابع درست‌نمایی را می‌نویسیم:

$$L(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^2} & 0 < \theta \leq x_i \quad (*) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

باتوجه به $(*)$، θ مثبت است و مقدار آن از تمام x_iها کم‌تر یا مساوی است؛ یعنی:

$$0 < \theta \leq x_1, x_2, ..., x_n \longrightarrow 0 < \theta \leq min(x_1, ..., x_n)$$

و اگر $min(x_1, ..., x_n)$ را با $x_{(1)}$ نشان دهیم داریم:

$$L(\theta) = \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad 0 < \theta \leq x_{(1)}$$

با کمی دقت می‌توان دید که تابع $L(\theta)$ در بازه $\left(0, x_{(1)}\right]$ صعودی و در بقیه قسمت‌ها صفر است. در نتیجه مقدار این تابع در $\theta = x_{(1)}$ بیشینه می‌شود. پس داریم:

$$\hat{\theta}_{ML} = x_{(1)} = min(x_1, ..., x_n)$$

۲. برآوردگر پایدار — ۲۰ نمره

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی زیر باشند. ابتدا به روش گشتاوری یک برآوردگر

برای θ پیدا کنید و سپس بررسی کنید که آیا این برآوردگر پایدار[1] است یا نه؟

$$f(x) = \frac{۱}{۲}(۱ + \theta x), \qquad -۱ < x, \theta < ۱$$

یادآوری: $\hat{\theta}$ یک برآوردگر پایدار برای θ است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند، $(*)$

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta,$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = ۰$$

پاسخ :

$$m_۱ = E(X^۱) = \int_{-۱}^{۱} xf(x)dx = \int_{-۱}^{۱} x(\frac{۱}{۲} + \frac{\theta x}{۲})dx = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} xdx + \frac{\theta}{۲}\int_{-۱}^{۱} x^۲ dx = \frac{\theta}{۳}$$

$$m_۱ = \frac{\theta}{۳} \longrightarrow \hat{m}_۱ = \frac{\hat{\theta}}{۳} \longrightarrow \hat{\theta} = ۳\hat{m}_۱$$

$$\hat{\theta} = ۳(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i) = ۳\overline{X}$$

در نتیجه $۳\overline{X}$ برآوردگر θ به روش گشتاوری است. حال پایدار بودن این برآوردگر را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} E(۳\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} ۳E(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{۳}{n}\sum_{i=۱}^{n} E(X_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۳}{n} \cdot \frac{n\theta}{۳} = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} Var(۳\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} ۹Var(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i) \xrightarrow{X_۱,\ldots,X_n \ are \ independent}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۹}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} Var(X_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{۹}{n^۲} \cdot n(E(X^۲) - E^۲(X)) = \lim_{n\to\infty} \frac{۳ - \theta^۲}{n} = ۰$$

در نتیجه هر دو شرط قسمت $(*)$ برقرار هستند و $\hat{\theta}$ برآوردگری پایدار برای θ است.

۳. تحلیل فاصله اطمینان — ۱۵ نمره

فرض کنید $X \sim B(n, p)$. برای nهای بزرگ، کدام یک از فاصله‌های اطمینان زیر با احتمال بیشتری پارامتر p را در برمی‌گیرد؟

آ. $(\frac{X}{n}, ۱)$

[1] Consistent estimator

ب. $\left(\frac{X}{n}, \infty\right)$

ج. $\left(\frac{X}{n} - ۰/۶۷\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(۱-\frac{X}{n})}{n}}, \frac{X}{n} + ۰/۶۷\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(۱-\frac{X}{n})}{n}}\right)$

پاسخ :

می‌دانیم X را می‌توان به‌صورت زیر نوشت که هر کدام از X_iها دارای توزیع $B(۱,p)$ هستند:

$$X = X_۱ + X_۲ + ... + X_n$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{X}{n} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$$

می‌دانیم $\hat{p} = \overline{X}$ یک برآوردگر نااریب برای p است و طبق قضیه حد مرکزی:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N(p, \frac{p(۱-p)}{n}) \longrightarrow Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}} \sim N(۰, ۱)$$

حال احتمال این‌که بازه‌های داده شده دربرگیرنده پارامتر p باشند را محاسبه می‌کنیم:

آ. $$P(\frac{X}{n} < p < ۱) = P(\hat{p} < p < ۱) = P(\hat{p} < p)$$

$$= P(\hat{p} - p < ۰) = P(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}} < ۰) = P(Z < ۰) = ۰/۵$$

می‌دانیم p فقط مقادیر بین ۰ و ۱ را می‌پذیرد، در نتیجه احتمال این‌که p در بازه قسمت ب. قرار بگیرد نیز ۰/۵ است.

ج. $$P\left(\frac{X}{n} - ۰/۶۷\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(۱-\frac{X}{n})}{n}} < p < \frac{X}{n} + ۰/۶۷\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(۱-\frac{X}{n})}{n}}\right) =$$

$$P\left(\hat{p} - ۰/۶۷\sqrt{\frac{\hat{p}(۱-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + ۰/۶۷\sqrt{\frac{\hat{p}(۱-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$P\left(-۰/۶۷\sqrt{\frac{\hat{p}(۱-\hat{p})}{n}} < \hat{p} - p < ۰/۶۷\sqrt{\frac{\hat{p}(۱-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$P\left(-۰/۶۷ < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(۱-\hat{p})}{n}}} < ۰/۶۷\right) =$$

$$P(-۰/۶۷ < Z < ۰/۶۷) = \phi(۰/۶۷) - \phi(-۰/۶۷) =$$

$$۲\phi(۰/۶۷) - ۱ = ۰/۴۹۷$$

در نتیجه بازه‌های قسمت آ و ب با احتمال بالاتری پارامتر p را در بر خواهند داشت.

۴. تست فرض — ۲۵ نمره

نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۲۵ از یک توزیع نرمال با $\mu = ۱۰$ و $\sigma = ۲$ به یک دانشجو داده شده است. هر چند این دانشجو در جریان مقدار واقعی میانگین این توزیع نیست. اگر این دانشجو علاقه‌مند به بررسی آزمون فرض $H_۰ : \mu_۰ = ۱۰/۴ \quad vs \quad H_۱ : \mu_۰ \neq ۱۰/۴$ باشد، با فرض $\alpha = ۰/۰۵$ مقدار β را محاسبه کنید.

اطلاعات بیشتر: در مبحث آزمون فرض α و β خطاهای آزمون نامیده می‌شوند. به α خطای نوع اول آزمون می‌گویند و مقدار آن برابر با "احتمال رد فرض $H_۰$ به شرط برقرار بودن فرض $H_۰$" است. و همچنین β خطای نوع دوم آزمون است و مقدار آن برابر با "احتمال پذیرفتن فرض $H_۰$ به شرط برقرار نبودن فرض $H_۰$" است.

$$\begin{cases} \text{Type I error :} & \alpha = P\big(\text{incorrectly rejecting the } H_۰\big) = P\big(\text{reject } H_۰ | H_۰ \text{ is true}\big) \\ \text{Type II error :} & \beta = P\big(\text{incorrectly failing to reject the } H_۰\big) = P\big(\text{not rejecting } H_۰ | H_۰ \text{ is not true}\big) \end{cases}$$

پاسخ :

می‌دانیم $\left(\overline{X} - Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ یک بازه اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای μ است. در نتیجه در این مسئله یک بازه اطمینان ۹۵% برای μ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu \in \left(\overline{X} - ۱/۹۶\frac{۲}{۵}, \overline{X} + ۱/۹۶\frac{۲}{۵}\right) = \left(\overline{X} - ۰/۷۸۴, \overline{X} + ۰/۷۸۴\right)$$

و واضح است که اگر $\mu_۰ = ۱۰/۴$ داخل این بازه قرار نگیرد، فرض صفر رد می‌شود. در نتیجه فرض صفر رد خواهد شد اگر:

$$\mu_۰ \leq \overline{X} - ۰/۷۸۴ \quad or \quad \mu_۰ \geq \overline{X} + ۰/۷۸۴$$

پس فرض $H_۰$ رد می‌شود اگر:

$$\overline{X} \geq ۱۱/۱۸۴ \quad or \quad \overline{X} \leq ۹/۶۱۶$$

و همچنین فرض $H_۰$ را رد نمی‌کنیم اگر:

$$۹/۶۱۶ \leq \overline{X} \leq ۱۱/۱۸۴$$

حال مقدار β را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta = P\big(\text{not rejecting } H_۰ | H_۰ \text{ is not true}\big)$$

$$\longrightarrow \beta = P\big(۹/۶۱۶ \leq \overline{X} \leq ۱۱/۱۸۴ | \mu = ۱۰\big)$$

$$\xrightarrow{\overline{X} \sim N(۱۰, \frac{۴}{۲۵})} \beta = P\left(\frac{۹/۶۱۶ - ۱۰}{۰/۴} \leq \frac{\overline{X} - ۱۰}{۰/۴} \leq \frac{۱۱/۱۸۴ - ۱۰}{۰/۴}\right)$$

$$= P(-۰/۹۶ \leq Z \leq ۲/۹۶) = \phi(۲/۹۶) - \phi(-۰/۹۶) = ۰/۸۲۹$$

در نتیجه، احتمال وقوع خطای نوع دوم این آزمون برابر است با $\beta = ۰/۸۲۹$ که مقدار قابل توجهی‌ست!

۵. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی ناااریب (امتیازی) — ۲۰ نمره

$X_۱, X_۲, ..., X_n$ نمونه‌های تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^۲)$ هستند و μ مقداری معلوم دارد. ابتدا برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی $\sigma^۲$ را به‌دست آورید و سپس بررسی کنید آیا این برآوردگر ناااریب است؟

یادآوری ۱: $\hat{\theta}$ برآوردگری ناااریب[۲] برای θ است اگر $E(\hat{\theta}) = \theta$.
یادآوری ۲: اگر $Z \sim N(۰, ۱)$، آنگاه[۳] $Y = Z^۲ \sim \chi^۲_{(۱)}$ و $E(Y) = ۱$.

پاسخ :

تابع درست‌نمایی را می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}$$

$$\longrightarrow L(\sigma^۲) = \prod_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} = (۲\pi\sigma^۲)^{-\frac{n}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^۲}$$

$$LL(\sigma^۲) = -\frac{n}{۲}\ln(۲\pi\sigma^۲) - \frac{۱}{۲\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^۲$$

مشتق این تابع نسبت به $\sigma^۲$ را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial LL}{\partial \sigma^۲} = -\frac{n}{۲\sigma^۲} + \frac{۱}{۲\sigma^۴}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^۲ = ۰$$

$$\longrightarrow \frac{۱}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^۲ = n$$

$$\longrightarrow \hat{\sigma}^۲_{ML} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^۲$$

حال ناااریبی این برآوردگر را بررسی می‌کنیم:

$$E(\hat{\sigma}^۲_{ML}) = E\Big(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\mu)^۲\Big) = \frac{۱}{n}E\Big(\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\mu)^۲\Big)$$

عبارت داخل امیدریاضی را در $\sigma^۲$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$= \frac{۱}{n}E\Big(\frac{\sigma^۲}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\mu)^۲\Big) = \frac{\sigma^۲}{n}E\Big(\sum_{i=۱}^{n}\frac{(X_i-\mu)^۲}{\sigma^۲}\Big) = \frac{\sigma^۲}{n}E\Big(\sum_{i=۱}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^۲\Big)$$

---
[۲] Unbiased estimator
[۳] Chi-squared distribution

می‌دانیم اگر $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$، آنگاه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(۰, ۱)$. پس می‌توان نوشت:

$$E(\hat{\sigma}^۲_{ML}) = \frac{\sigma^۲}{n} E(\sum_{i=۱}^{n} Z_i^۲)$$

همچنین می‌دانیم اگر $Z \sim N(۰, ۱)$، آنگاه $Y = Z^۲ \sim \chi^۲_{(۱)}$. در نتیجه:

$$E(\hat{\sigma}^۲_{ML}) = \frac{\sigma^۲}{n} E(\sum_{i=۱}^{n} Y_i) = \frac{\sigma^۲}{n} \cdot n$$

$$\longrightarrow E(\hat{\sigma}^۲_{ML}) = \sigma^۲$$

و در نتیجه $\hat{\sigma}^۲$ یک برآوردگر نااریب برای $\sigma^۲$ است.

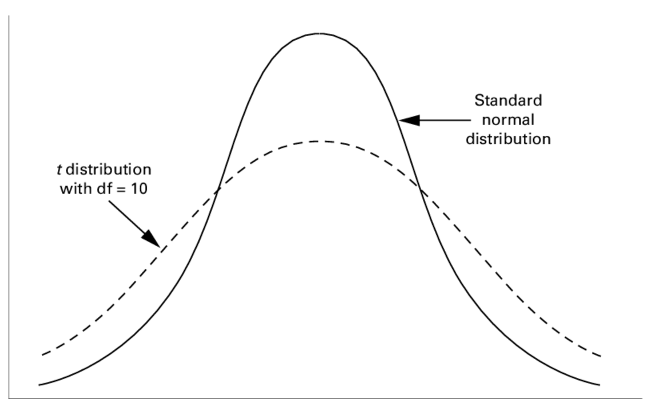
۶. آشنایی با توزیع Student's t (امتیازی) ۱۰ نمره

گفته می‌شود که میانگین وزن نوزادان سالمی که ۱۲ ساعت از تولدشان می‌گذرد $۷/۵lbs$ (پوند) است. لیست زیر شامل وزن نمونه‌ای از نوزادانی است که ۱۲ ساعت از تولدشان می‌گذرد و همگی در محله‌ای کم بضاعت متولد شده‌اند. آیا در سطح $\alpha = ۰/۰۱$ می‌توان نتیجه گرفت که نوزادان متولد شده در این محله دچار کمبود وزن هستند؟

$$۶,\ ۸/۲,\ ۶/۴,\ ۴/۸,\ ۸/۶,\ ۸,\ ۶,\ ۷/۵,\ ۸/۱,\ ۷/۲$$

راهنمایی (توزیع t)[۴]: اگر $X \sim N(۰, ۱)$ و $Y \sim \chi^۲_{(r)}$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، آنگاه $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{r}}} \sim t_{(r)}$. یعنی T دارای توزیع t با درجه آزادی[۵] r است.

اطلاعات بیشتر: توزیع t بسیار شبیه به توزیع نرمال استاندارد است و تابع چگالی احتمال زنگوله‌ای شکل دارد، با این تفاوت که دو سر تابع چگالی توزیع t دیرتر به سمت صفر میل می‌کنند؛ یا به بیان دیگر توزیع t دم‌های محتمل‌تری دارد.
در مباحث فاصله اطمینان و آزمون فرض، در مواقعی که اندازه نمونه کوچک است یا واریانس جامعه نامعلوم است به جای توزیع نرمال استاندارد از توزیع t استفاده می‌شود.



شکل ۱: مقایسه pdf توزیع t و توزیع نرمال استاندارد

[۴] Student's t-distribution
[۵] degrees of freedom

پاسخ :

ابتدا $\overline{X}$ و $S^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$n = ۱۰ \longrightarrow \overline{X} = \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰} x_i = \frac{۷۰/۸}{۱۰} = ۷/۰۸$$

$$S^۲ = \frac{۱}{۹}\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i - ۷/۰۸)^۲ = ۱/۵$$

اگر μ میانگین وزن نوزادان این محله باشد، مایل به انجام آزمون فرض زیر هستیم:

$$H_۰ : \mu = ۷/۵ \quad vs \quad H_۱ : \mu < ۷/۵$$

می‌دانیم به دلیل نامعلوم بودن σ جامعه، آماره آزمون به‌صورت $\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^۲}{n}}}$ است. نشان می‌دهیم آماره آزمون دارای توزیع t با ۱-n درجه آزادی است:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^۲}{n}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{\frac{S^۲}{n}}}{\sigma/\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^۲}{\sigma^۲}}}$$

$$\longrightarrow T = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}}{(n-۱)}}}$$

می‌دانیم $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(۰,۱)$ و $Y = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n-۱)}$. پس می‌توان نوشت:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-۱}}}$$

و در نتیجه طبق راهنمایی داخل صورت سوال $T \sim t_{(n-۱)}$.

حال مقدار آماره آزمون را محاسبه می‌کنیم:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^۲}{n}}} = \frac{۷/۰۸ - ۷/۵}{\sqrt{\frac{۱/۵}{۱۰}}} = -۱/۰۸$$

با فرض $T \sim t_{(۹)}$، p-value را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{p-value} = P(T < t) = P(T < -۱/۰۸) = ۰/۱۵۴ > ۰/۰۱$$

در نتیجه نمی‌توانیم فرض $H_۰$ را رد کنیم. یعنی نمی‌توانیم ادعا کنیم که نوزادان متولد شده در این محله کمبود وزن دارند.