



۱- تابع چگالی مشترک متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر داده شده است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف)  $\text{Cov}(X, Y)$  را محاسبه کنید. [۵ نمره]

ب) تابع چگالی شرطی  $f_Y(y|x)$  را به دست آورید. [۲ نمره]

ب) اگر تعریف کنیم  $Z \triangleq \frac{Y}{X}$ ، تابع چگالی احتمال  $Z$  را بیابید. [۵ نمره]

۲- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند. تعریف می‌کنیم:  $Z \triangleq X + Y$  به بندهای (الف) و (ب) به صورت مستقل از یکدیگر پاسخ دهید.

الف) اگر  $c$  یک ثابت حقیقی و مثبت و  $u(x)$  تابع پله واحد باشد و بدانیم:

$$f_Z(z) = c^2 z e^{-cz} u(z), \quad f_X(x) = ce^{-cx} u(x)$$

تابع چگالی احتمال  $Y$  را بیابید. [۶ نمره]

ب) نشان دهید که اگر  $Y$  یک متغیر تصادفی یکنواخت بر روی  $(0, 1)$  باشد آن‌گاه  $f_Z(z) = F_X(z) - F_X(z - 1)$ . [۴ نمره]

۳- فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند. تعریف می‌کنیم:  $\bar{X} \triangleq \frac{X_1 + X_2}{2}$ . اگر  $w_1$  و  $w_2$  دو ثابت حقیقی باشند به گونه‌ای که  $w_1 + w_2 = 1$ ، با توجه به تقارن مسأله نسبت به  $X_1$  و  $X_2$ ، حاصل  $E\{w_1 X_1 + w_2 X_2 | \bar{X}\}$  را به دست آورید. [۸ نمره]

۴- متغیرهای تصادفی  $X_1$ ،  $X_2$  و  $X_3$  مستقل و دارای توزیع برنولی با پارامتر  $p$  هستند یعنی:

$$\Pr\{X_i = 1\} = p, \quad \Pr\{X_i = 0\} = 1 - p, \quad i = 1, 2, 3$$

با توجه به آن‌ها، چهار متغیر تصادفی جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_1 \triangleq \max(X_1, X_2), \quad Y_2 \triangleq \max(X_1, X_3), \quad Y_3 \triangleq \max(X_2, X_3), \quad Y \triangleq Y_1 + Y_2 + Y_3$$

با استفاده از تقارن مسأله نسبت به  $X_i$  ها:

الف) تابع جرم احتمال  $Y_i$ ،  $i = 1, 2, 3$  را پیدا کنید. [۲ نمره]

ب) میانگین و واریانس  $Y$  را پیدا کنید. [۸ نمره]

۵- الف) فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌های تصادفی مستقل از یک توزیع Maxwell با تابع چگالی زیر باشند:

$$f_X(x; \alpha) = \frac{1}{\alpha^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0$$

تخمین ML را برای پارامتر توزیع پیدا کنید. [۵ نمره]

ب) میانگین قد ۶۴ مرد ایرانی که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، ۱۷۵ سانتی‌متر و انحراف معیار این نمونه برابر با ۱۶ سانتی‌متر است. یک بازه اطمینان ۹۶ درصد برای میانگین قد مردان ایرانی پیدا کنید. [۵ نمره]

جدول CDF توزیع نرمال استاندارد

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.10	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.20	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.30	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.40	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.50	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.60	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.70	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.80	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.90	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.00	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.10	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.20	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.30	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.40	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.50	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.60	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.70	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.80	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.90	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.00	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.10	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.20	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.30	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.40	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.50	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.60	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.70	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.80	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.90	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861

متغیر تصادفی	تابع چگالی / جرم احتمال	تابع مولد ممان	میانگین و واریانس
پواسن	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$	$\exp(\lambda(e^s - 1))$	$\eta = \lambda, \sigma^2 = \lambda$
هندسی	$(1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$	$\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}, s < -\ln(1-p)$	$\eta = \frac{1}{p}, \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$
یکنواخت	$\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$	$\begin{cases} \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s(b-a)}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$	$\eta = \frac{b+a}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
نمایی	$\mu e^{-\mu x}, 0 < \mu, 0 \leq x$	$\frac{\mu}{\mu-s}, s < \mu$	$\eta = \frac{1}{\mu}, \sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$
نرمال	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$	$\exp\left(\eta s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right)$	$\eta = \eta, \sigma^2 = \sigma^2$