به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده برق و کامپیوتر

درس آمار و احتمال

پاسخنامه تمرین شماره ۱

مهر ماه ۱۳۹۹

سوال اول – جایگشت حروف (۴ نمره)

الف) $\frac{7!}{2!2!}$ دوتا L و دوتا E داریم. (۱ نمره)

ب) $\frac{6!}{2!2!}$ دوتا L و دوتا E داریم. (۱ نمره)

پ) $\frac{6!}{2!}$ دوتا E داریم و L ها را کنار هم می گذاریم. (۱ نمره)

ت) EEILLPS تنها حالتی است که می توانیم این حروف را به ترتیب الفبا کنار هم بگذاریم. (۱ نمره)

سوال دوم – میزگرد (۵ نمره)

الف) تعداد جایگشت های دوری برای n نفر = (n-1)! پاسخ: !۸ (۱ نمره)

ب) محمدرضا را روی یک صندلی فیکس می‌کنیم. برای علیرضا ۲ صندلی چپ و راست محمدرضا قابل‌قبول هستندو حال ۷ صندلی خالی و ۷ نفر داریم که مانند یک صف عادی می‌توانیم این صندلی ها را پر کنیم. (چون جای حداقل یکی از افراد دور میز مشخص شده و فیکس شده است و جایگشت دیگر برای بقیه دوری نیست.) پاسخ: !۷ * ۲ (۲ نمره)

پ) ابتدا این ۳ نفر را به تمام حالت های ممکن در کنار یکدیگر قرار می‌دهیم: ۶ حالت مختلف دارند.

این ۳ نفر را یک جعبه ی ۳ تایی درنظر می‌گیریم. این حعبه ۳ تایی و ۶ نفر دیگر افراد ما را تشکیل می‌دهند. پس انگار ۷ نفر یا ۷ شئ داریم و می‌خواهیم آن ها را در ۷ جایگاه دور میز قرار دهیم. (!۶) به این صورت ۳ نفر مشخص شده در هر حالتی در کنار هم قرار می‌گیرند چون داخل جعبه هستند و جدا نمی‌شوند. پاسخ: !۶ * ۶ (۲ نمره)

سوال سوم – تشکیل مجموعه (۶ نمره)

الف) $\binom{10}{5}$ (۱ نمره)

ب) $\binom{6}{5}$ (۱ نمره)

پ) $\binom{10}{5} - \binom{6}{5}$ (تنها از زنها انتخاب کنیم - تمام حالات) (۲ نمره)

ت) $\binom{6}{3}\binom{4}{2} + \binom{6}{4}\binom{4}{1} + \binom{6}{5}$ (3 زن و 2 مرد + 4 زن و 1 مرد + 5 زن) (۲ نمره)

سوال چهارم – اعداد متمایز با ارقام تکراری (۵ نمره)

۴ حالت به وجود می‌آید:

- هیچ رقم تکراری وجود نداشته باشد: در این حالت ۷ رقم متفاوت داریم. ابتدا این ۴ رقم را انتخاب می‌کنیم ($\binom{۷}{۴}$) و سپس به !۴ حالت آن ها را در ۴ جایگاه ارقام قرار می‌دهیم. $\binom{۷}{۴} * ۴! = ۲۴۰$
- فقط دو تا ۴ تکراری داشته باشیم: در این حالت ۲ رقم متمایز دیگر را از بین ارقام غیر از ۴ که ۶ رقم متفاوت هستند انتخاب می‌کنیم ($\binom{۶}{۲}$). سپس ۲ جایگاه از ۴ جایگاه ممکن را برای این ۲ رقم انتخاب می‌کنیم. در این دو

جایگاه به ۲ حالت می‌توانیم این دو رقم را جا بدهیم($\binom{۴}{۲}$ * ۲). در دو جایگاه باقیمانده دو رقم ۴ را قرار می‌دهیم.

$۲ * \binom{۴}{۲} * \binom{۶}{۲} = ۱۸۰$

- فقط دو تا ۳ تکراری داشته باشیم: این حالت مشابه حالت قبل شمرده می‌شود و ۱۸۰ حالت وجود دارد.
- دو تا ۳ و دو تا ۴ داشته باشیم: در این حالت ۲ جایگاه از ۴ جایگاه را برای ارقام ۴ انتخاب می‌کنیم و دو رقم ۴ را در آن ها و دو رقم ۳ را در ۲ جایگاه دیگر قرار می‌دهیم. $\binom{۴}{۲} = ۶$

تعداد کل اعداد ۴ رقمی مورد نظر: $\underline{۸۴۰ + ۱۸۰ + ۱۸۰ + ۶ = ۱۲۰۶}$

سوال پنجم – بازی تاس ها (۷ نمره)

بازی A : 3 تاس، برد : حداقل یکبار 1 بگیریم.

بازی B : 6 تاس، برد : حداقل دوبار 1 بگیریم.

بازی C : 9 تاس، برد : حداقل سه بار 1 بگیریم.

A :

احتمال باخت در بازی A : (احتمال اینکه در هیچ یک از تاس ها 1 نگیریم) $\frac{5^3}{6^3}$

احتمال برد در بازی A : $1 - \frac{5^3}{6^3} = 0.4213$

B :

احتمال باخت در بازی B :

روش اول: در هیچ یک از تاس ها 1 نگیریم: 5^6 احتمال آن : $\frac{5^6}{6^6}$

روش دوم: فقط در یکی از تاس ها 1 بگیریم : $6 * 5^5$ احتمال آن : $\frac{6*5^5}{6^6}$

احتمال باخت در بازی B : $\frac{5^6}{6^6} + \frac{6*5^5}{6^6}$

احتمال برد در بازی B : $1 - \left(\frac{5^6}{6^6} + \frac{6*5^5}{6^6}\right) = 0.2632$

C:

احتمال باخت در بازی C :

روش اول: در هیچ یک از تاس ها 1 نگیریم: 5^9 احتمال آن : $\frac{5^9}{6^9}$

روش دوم: فقط در یکی از تاس ها 1 بگیریم : $9 * 5^8$ احتمال آن : $\frac{9*5^8}{6^9}$

روش سوم : فقط در دوتا از تاس ها 1 بگیریم $\binom{9}{2} * 5^7$ احتمال آن : $\frac{\binom{9}{2}*5^7}{6^9}$

احتمال باخت در بازی C : $\frac{5^9}{6^9}+\frac{9*5^8}{6^9}+\frac{\binom{9}{2}*5^7}{6^9}$

احتمال برد در بازی C : $1-\left(\frac{5^9}{6^9}+\frac{9*5^8}{6^9}+\frac{\binom{9}{2}*5^7}{6^9}\right)=0.1782$

بازی A کمترین احتمال باخت را دارد.

سوال ششم – مثلث ها (۶ نمره)

با انتخاب نقاط زیر، تشکیل مثلث های متساوی الاضلاع می دهیم.

$\{1, 6, 11\}, \{2, 7, 12\}, \{3, 8, 13\}, \{4, 9, 14\}, \{5, 10, 15\}$

$\binom{15}{3}-5$ انتخاب نقاطی که تشکیل مثلث متساوی الاضلاع می دهند – تمام حالات

سوال هفتم – تام و جری (۸ نمره)

تام با ۵ حرکت به یکی از پایانه ها میرسد. این حرکت ها میتوانند یا پایین باشند یا چپ. (D,L) با هر جایگشت مختلف 5 حرفی ازین دو حرف، تام به یکی از 6 نقطه ی A,B,C,D,E,F میرسد واضح است که با توجه به تعداد D و L در این 5 حرف تام به نقاط مختلف میرسد.

(D,L): 1) (5,0) -> F , (0,5) -> A   2) (4,1) -> E , (1,4) -> B   3) (3,2) -> D , (2,3) -> C

برای 1، یک جایگشت پیش میاید. برای 2، $5=\binom{5}{1}$ جایگشت مختلف خواهیم داشت. برای 3، $10=\binom{5}{2}$ جایگشت مختلف خواهیم داشت.

تعداد کل جایگشت های ممکن برابر $32 = 2 * 10 + 2 * 5 + 2 * 1$ است.

$$P(A)=P(F)=\frac{1}{32}\qquad P(B)=P(E)=\frac{5}{32}\qquad P(C)=P(D)=\frac{10}{32}$$

به نفع جری است که در یکی از نقاط A یا F پنهان شود.

سوال هشتم – رقم یکان (۱۰ نمره)

3^a+7^b

$3^2=9\quad 3^3=27\quad 3^4=81\quad 3^5=243\quad 3^6=729\quad 3^1=3$

$3^7=2187\quad 3^8=6561$

$7^1=7\quad 7^2=49\quad 7^3=343\quad 7^4=2401\quad 7^5=16807\quad 7^6=117649$

$7^7=\cdots 3\quad 7^8=\cdots 1$

- $a=4\mathrm{i}+2\quad \mathrm{b}=4\mathrm{j}+2$
- $a=4\mathrm{i}+3\quad \mathrm{b}=4\mathrm{j}+4$
- $a=4\mathrm{i}+4\quad \mathrm{b}=4\mathrm{j}+1$

با انتخاب a و b براساس این مقادیر $3^a + 7^b$ دارای رقم یکان 8 خواهد بود.

$$p = \frac{25*25}{100*100} + \frac{25*25}{100*100} + \frac{25*25}{100*100} = \frac{3}{16}$$

سوال نهم – صف مدرسه (۱۰ نمره)

از خاصیت خطی بودن احتمال استفاده میکنیم. احتمال شکل گیری یک جایگاه که یکی دانش آموز و دیگرری از والدین باشد را محاسبه میکنیم بدون اینکه کاری به نحوه ی قرار گیری سایر افراد داشته باشیم. (چون هدف یافتن میانگین تعداد جایگاه هاست) برای این کار هم تعداد حالات شکل گیری هرجایگاه قابل قبول را به تعداد کل جایگشت ها تقسیم میکنیم.

$$\frac{20}{3} = 6.66 \frac{14*10*5*2*13!}{15!} =$$

لازم از اشاره کنیم در اینجا احتمال محاسبه نمیکنیم چون این شمارش حالت تکراری نیز میشمارد. ما میخواهیم تعداد جایگشت ها را بشماریم و در هر حالت ممکن است چند جایگاه مطلوب (یک دانش آموز و والد کنار هم) داشته باشیم، پس تکراری شمردن مشکلی نخواهد داشت.

سوال دهم – ترکیبیات (۱۵ نمره – هر بخش ۵ نمره)

1) $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$

برای اثبات این عبارت به روش ترکیبیاتی به این روش عمل میکنیم که فرض کنید میخوام در یک رشته که m+n+1 بیت داریم میخواهیم m+1 بیت را یک قرار دهیم و بقیه ی بیت هارا صفر بگذاریم. برای این کار به دو روش میتوان عمل کرد.

روش اول: m+1 بیت را انتخاب کنیم و آن هارا یک بگذاریم و بقیه را صفر قرار دهیم. $\binom{m+n+1}{m+1}$

روش دوم: میتوانیم روی سمت راست ترین بیت مجموعه حالت بندی انجام دهیم. به این صورت که اگر فرض کنیم سمت راست ترین بیت یک در موقعیت m+1 امین بیت قرار دارد برای دیگر بیت های یک $\binom{m}{m}$ حالت انتخاب داریم. همینطور اگر فرض کنیم سمت راست ترین بیت یک در موقعیت m+2 قرار داشته باشد برای دیگر بیت ها $\binom{m+1}{m}$ حالت خواهیم داشت. و همینطور این انتخاب هارا انجام میدهیم تا سمت راست ترین بیت یک در موقعیت m+n+1 قرار بگیرد و برای انتخاب m بیت قبلی $\binom{m+n}{m}$ حالت خواهیم داشت. طبق اصل جمع خواهیم داشت : $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m}$

دراین صورت اثبات کردیم : $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$

2) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

برای اثبات این عبارت از اتحاد وند موند که بصورت مقابل است استفاده میکنیم: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

فرض کنید m عنصر در مجموعه ی 1 و n عنصر در مجموعه ی 2 داریم. آنگاه تعداد روش هایی که میتوان r عنصر از اجتماع این دو مجموعه انتخاب کرد برابر است با $\binom{m+n}{r}$. روش دیگر این است که k عنصر از مجموعه ی اول و r-k عنصر از مجموعه ی دوم انتخاب شود. (k یک عدد صحیح بین 0 تا r است)

حال برای اثبات این سوال از اتحاد وند موند استفاده میکنیم به طوری که m=n=r:

$$\binom{n+n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

3) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

میخواهیم از یک مجموعه ی n تایی دو زیرمجموعه ی r تایی و m-r تایی تشکیل دهیم. برای این کار دو روش داریم.

روش اول: ابتدا m عنصر از مجموعه انتخاب کنیم و از بین این m عنصر دوباره r عنصر انتخاب کنیم و مجموعه ی یک را بسازیم و از بین بقیه ی اعضایی که در مجموعه ی m تایی باقی مانده مجموعه ی 2 را تشکیل دهیم. $\binom{n}{m}\binom{m}{r}$

روش دوم: از مجموعه ی n تایی ابتدا r عنصر انتخاب میکنیم و مجموعه ی 1 را تشکیل میدهیم. سپس از بین n-r عنصر باقیمانده m-r عنصر را انتخاب کرده و مجموعه ی دو را تشکیل میدهیم. $\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

از آنجایی که هردوی این روش ها راه حل هایی برای یک مساله هستند این دو عبارت برابرند. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

سوال یازدهم – سری های توالی (۱۲ نمره)

همانند سوال "صف مدرسه" روشی را استفاده می‌کنیم که بعضی از جایگشت های تکراری پرتاب t تاس را تکراری می‌شمارد. ولی چون هدف ما شمارش تعداد توالی های به طول L است، جایگشت های دارای چند توالی به طول L باید چند بار شمرده شوند.

هر سری به طول L، در یک جایگشت به طول t از شیر یا خط (H و T) در t − L + 1 جایگاه مختلف می‌تواند قرار بگیرد. ما در اینجا توالی های به طول L از نماد شیر را می‌شماریم و در نهایت این تعداد را در ۲ ضرب می‌کنیم چون در صورت سوال توالی های به طول L از شیر و خط مطلوب است. اگر یک سری به طول L از شیرها در جایگاه اول یا آخر قرار بگیرد، یک تاس قبل یا بعد آن حتما باید خط بیاید تا طول سری همان L باشد و L + 1 نشود. در حالتی که سری از شیرها به طول L در یکی از جایگاه های وسط باشد، پرتاب قبل و بعد آن باید هر دو خط باشند تا طول این سری بیش از L نشود. حالتی که L = t باشد هم که اصلا از این قواعد پیروی نمی‌کند و یک حالت جدا است. در این حالت کلا دو سری به طول L وجود دارد و P(t,L) = 2.

۱- پس در حالتی که L = t:

P(t,L) = 2　　　　میانگین تعداد سری های به طول L در این t پرتاب: $\frac{2}{2^t}$

۲- در حالتی که L ≠ t:

- یا سری L تایی در وسط پرتاب هاست: $2 * (t - L + 1 - 2) * 2^{t-L-2}$
- یا سری در اول یا در انتهای پرتاب هاست: $2 * (2 * 2^{t-L-1})$

1- که در مجموع: $P(t,L) = (t - L - 1) * 2^{t-L-1} + 2^{t-L+1}$

2- میانگین تعداد سری های به طول L در این t پرتاب: $\frac{(t-L-1)* 2^{t-L-1}+2^{t-L+1}}{2^t}$

سوال دوازدهم – بلیط گمشده (۱۲ نمره)

(۱) هنگام ورود آخرین نفر به سالن، برای تک صندلی باقی‌مانده دقیقا دو حالت وجود دارد. آن صندلی یا صندلی خود آخرین نفر است یا صندلی نفر اول.

اثبات: به طور مثال فرد 30 ام را در نظر میگیریم. اگر در نهایت هنگام ورود آخرین نفر صندلی نفر 30 ام خالی مانده باشد، این صندلی حتما در هنگام ورود خود نفر 30 ام نیز خالی بوده است و او می بایست روی صندلی خودش می نشست و به طور رندوم انتخاب نمیکرد. این قضیه برای هر کسی که بعد از نفر اول وارد می‌شود صادق است. پس گزاره ی بالا اثبات می‌شود.

(۲) از طرفی، هنگامی که یکی از افراد مجبور به انتخاب تصادفی می‌شود (یعنی صندلی خودش اشغال شده‌است) حتما هم صندلی نفر اول خالی است هم صندلی نفر آخر و هر دو صندلی شانس برابری برای انتخاب شدن دارند. چون اگر فردی وارد سالن بشود و مجبور به انتخاب تصادفی باشد در حالی که فقط یکی از این صندلی های خاص (صندلی نفرات اول و آخر) خالی است و دیگری پر است، احتمال این وجود دارد که به طور تصادفی آن صندلی خاصی که خالی است را انتخاب کند و در این صورت هر دو صندلی خاص پر می‌شوند در حالی که این با گزاره (۱) که در بالا اثبات کردیم در تناقض است. پس گزاره (۲) نیز اثبات می‌شود.

از دو گزاره‌ی اثبات شده نتیجه میگیریم که احتمال اینکه صندلی نفر آخر در نهایت خالی بماند معادل با احتمال این است که قبل از ورود نفر آخر به سالن، یک نفر صندلی نفر اول را پر کرده باشد. هر فردی که وارد سالن می‌شود به احتمال برابری می‌تواند صندلی نفر اول یا آخر را انتخاب کند. پس احتمال انتخاب شدن این دو صندلی خاص قبل از ورود نفر آخر با یکدیگر برابر است. یعنی به احتمال ½ قبل از ورود نفر آخر یکی صندلی نفر اول را انتخاب کرده و به احتمال ½ قبل از ورود نفر آخر یکی صندلی او را اشغال کرده است. پس احتمال نشستن نفر آخر در جای درست برابر با ۵۰ درصد است.