دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

تمرین سوم ــ توزیع‌های توام، استقلال

طراح: علی آریایی

سوپروایزر: مسعود طهماسبی فرد

تاریخ تحویل: ــ

۱. تابع توزیع مشترک نمایی **۲۰ نمره**

تابع توزیع مشترک دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y به صورت زیر داده شده است. ($\lambda, \mu > ۰$)

$$f_{XY}(x,y) = Ae^{-(\lambda x + \mu y)} \quad ; \quad x, y > ۰$$

الف) مقدار A را بیابید و ثابت کنید که این تابع، یک تابع چگالی معتبر است. (۵ نمره)

ب) توابع چگالی حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را بیابید. آیا X و Y مستقلند؟ (۵ نمره)

ج) میانگین X، Y و میانگین توزیع مشترک X و Y ($E\{XY\}$) را بیابید. درستی نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) در رابطه با استقلال متغیرهای X و Y را براساس میانگین‌های بدست آمده تصدیق کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ :

الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = ۱ \qquad \longrightarrow \qquad \int_{۰}^{+\infty}\int_{۰}^{+\infty} Ae^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy = ۱$$

$$A\int_{۰}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx \int_{۰}^{+\infty} e^{-\mu y}\,dy = ۱ \quad \longrightarrow \quad A\,(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda})\Big|_{۰}^{+\infty} \times (\frac{e^{-\mu y}}{-\mu})\Big|_{۰}^{+\infty} = \frac{A}{\lambda\mu} = ۱$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{A = \lambda\mu}$$

تابع $f_{XY}(x,y)$ یک تابع همواره نامنفی است و مساحت زیر منحنی آن برابر با ۱ می باشد. بنابراین یک تابع چگالی معتبر است.

ب)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{۰}^{+\infty} \lambda\mu\, e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dy = \lambda\mu\, e^{-\lambda x}\int_{۰}^{+\infty} e^{-\mu y}\,dy = \lambda\mu\, e^{-\lambda x}\,\frac{۱}{\mu}$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}u(x)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{۰}^{+\infty} \lambda\mu\, e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx = \lambda\mu\, e^{-\mu y}\int_{۰}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\mu\, e^{-\mu y}\,\frac{۱}{\lambda}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{f_Y(y) = \mu e^{-\mu y} u(y)}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,.\,f_Y(y) \quad \longrightarrow \quad \boxed{X \text{ و } Y \text{ مستقلند}}$$

ج)

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \;= \int_{۰}^{+\infty}\int_{۰}^{+\infty} xy\,\lambda\mu\,e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy$$

$$\lambda\,\mu \int_{۰}^{+\infty} x\,e^{-\lambda x}dx \times \int_{۰}^{+\infty} y\,e^{-\mu y}dy \;= \lambda\,\mu(-\frac{(\lambda x+۱)\,e^{-\lambda x}}{\lambda^{۲}})\Big|_{۰}^{+\infty} \times (-\frac{(\mu y+۱)\,e^{-\mu y}}{\mu^{۲}})\Big|_{۰}^{+\infty}$$

$$= \lambda\,\mu \times \frac{۱}{\lambda^{۲}} \times \frac{۱}{\mu^{۲}} = \frac{۱}{\lambda\mu} \longrightarrow \quad \boxed{E\{XY\} = \frac{۱}{\lambda\mu}}$$

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx = \int_{۰}^{+\infty} x\,\lambda\,e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\,(-\frac{(\lambda x+۱)\,e^{-\lambda x}}{\lambda^{۲}})\Big|_{۰}^{+\infty} = \lambda \times \frac{۱}{\lambda^{۲}} = \frac{۱}{\lambda} \longrightarrow$$

$$\boxed{E\{X\} = \frac{۱}{\lambda}}$$

$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dx = \int_{۰}^{+\infty} y\,\mu\,e^{-\mu y}\,dy = \mu\,(-\frac{(\mu y+۱)\,e^{-\mu y}}{\mu^{۲}})\Big|_{۰}^{+\infty} = \mu \times \frac{۱}{\mu^{۲}} = \frac{۱}{\mu}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{E\{Y\} = \frac{۱}{\mu}}$$

$E\{XY\} = E\{X\}\,E\{Y\} \quad \longrightarrow$ نتیجه‌ی بدست آمده در قسمت الف در این قسمت هم صدق می‌کند.

## ۲. سامانه انتخاب واحد	۲۰ نمره

یک سامانه انتخاب واحد فرضی را در نظر بگیرید. در این سامانه، یک سرور و ۱۰۰۰ کاربر (دانشجو) وجود دارند که زمان انتخاب واحد همه‌ی دانشجویان، ساعت ۸ صبح است. از آنجاییکه اخذ درس (به خصوص دروس عمومی!) برای دانشجویان مهم است، همه‌ی دانشجویان، راس ساعت ۸، برای ورود به سامانه، برای احراز هویت به سرور درخواستی ارسال می‌کنند. فرض کنید سرور نیز راس ساعت ۸ شروع به کار می‌کند. به دلیل محدودیت‌های فیزیکی، ۲ میلی ثانیه طول می‌کشد تا سرور آماده‌ی پاسخ‌دهی شود و در طول این مدت، هر درخواستی که دریافت کند را نادیده می‌گیرد. فرض کنید زمان دریافت درخواست هر یک از کاربران توسط سرور، یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۰۰۰ میلی ثانیه و مستقل از زمان دریافت درخواست سایر کاربران باشد. احتمال اینکه حداقل یک درخواست از سوی سرور نادیده گرفته شود، چقدر است؟

پاسخ :

X_i: زمان رسیدن پیام دانشجوی i ام $\Longleftarrow$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$

$Z = \min(X_۱, X_۲, ..., X_{۱۰۰۰})$: زمان رسیدن اولین درخواست به سرور

$\mathbb{P}(Z < ۲)$: احتمال اینکه حداقل یک درخواست از سوی سرور نادیده گرفته شود

بنابراین به محاسبه‌ی تابع توزیع Z می‌پردازیم:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}\Big(\min(X_۱, X_۲, ..., X_{۱۰۰۰}) \le z\Big) = ۱ - \mathbb{P}\Big(\min(X_۱, X_۲, ..., X_{۱۰۰۰}) > z\Big)$$

$$= ۱ - \left[\mathbb{P}\Big(X_۱ > z \quad \cap \quad X_۲ > z \quad \cap \quad ... \quad \cap \quad X_{۱۰۰۰} > z\Big)\right] = ۱ - \left[\mathbb{P}(X_۱ > z)\,\mathbb{P}(X_۲ > z)\ldots\mathbb{P}(X_{۱۰۰۰} > z)\right]$$

$$= ۱ - \prod_{i=۱}^{۱۰۰۰} \mathbb{P}(X_i > z) = ۱ - \prod_{i=۱}^{۱۰۰۰} [۱ - F_{X_i}(z)]$$

$$X_i \sim Exp(\frac{۱}{۱۰۰۰}) \longrightarrow F_{X_i} = ۱ - e^{-\frac{x}{۱۰۰۰}} \quad ; \quad x \geq ۰ \implies [۱ - F_{X_i}(z)] = e^{-\frac{z}{۱۰۰۰}} \quad ; \quad x \geq ۰$$

$$\implies F_Z(z) = ۱ - \prod_{i=۱}^{۱۰۰۰} e^{-\frac{z}{۱۰۰۰}} = \underline{۱ - e^{-z}} \longrightarrow \mathbb{P}(Z < ۲) = F_Z(۲) = ۱ - e^{-۲} = \boxed{۰/۸۶۵}$$

۳. چگالی تفریق! ۲۵ نمره

اگر تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد، تابع چگالی احتمال $Z = X - Y$ را بیابید.

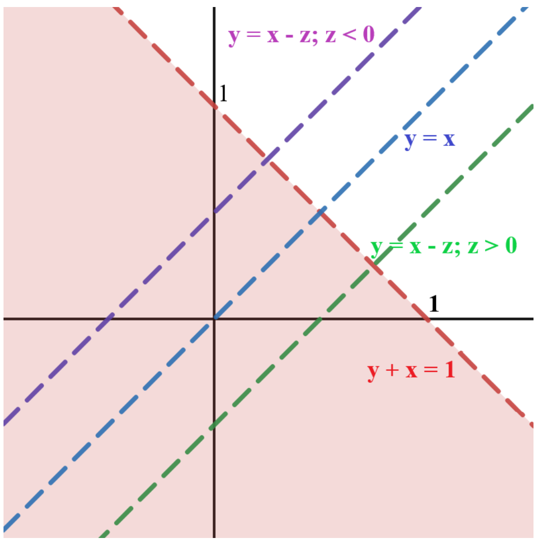
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ۶x & ; \quad x, y \geq ۰,\ x + y \leq ۱ \\ ۰ & ; \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

پاسخ :

ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی Z را بدست می‌آوریم.

$$F_Z(z) = \mathbb{P}\{X - Y < z\} = \mathbb{P}\{X - Y < z\}$$

با توجه به مقادیری که متغیرهای تصادفی X و Y می‌توانند داشته باشند، بیشینه مقدار متغیر تصادفی Z برابر ۱ و کمینه مقدار آن برابر ۱ـ خواهد بود.



بنابراین بر اساس مقادیر مختلف z خواهیم داشت:

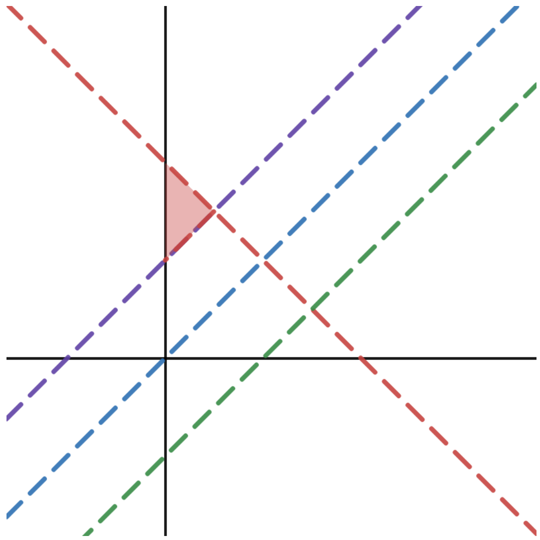
- به ازای $z \leq -۱$:

$$F_Z(z) = ۰$$

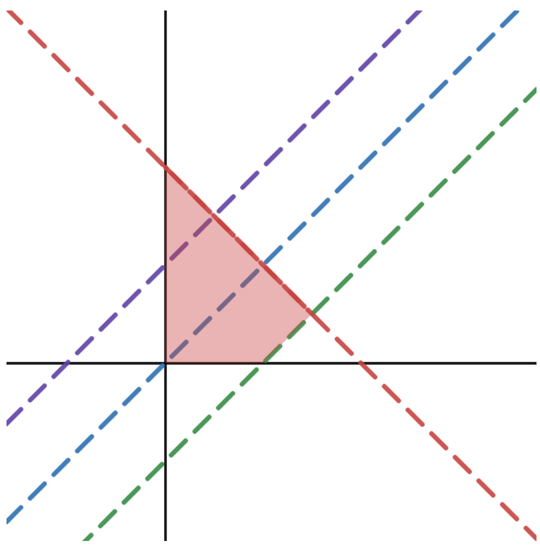
- به ازای $-1 < z \le 0$:

$$F_Z(z) = \int_0^{\frac{z+1}{2}} \int_{x-z}^{1-x} 6x\,dy\,dx = \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6x(1-2x+z)\,dx = 3x^2 - 4x^3 + 3x^2 z\Big|_0^{\frac{z+1}{2}}$$

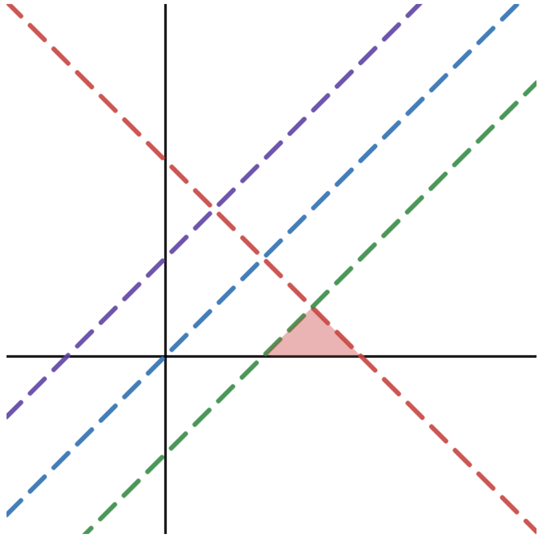
$$= \frac{1}{4}(z+1)^3$$



- به ازای $0 < z \le 1$: زمانیکه z در این بازه قرار می‌گیرد، باید از تابع چگالی مشترک X و Y بر روی ناحیه‌ی زیر انتگرال بگیریم.



اما از آنجاییکه انتگرال‌گیری روی این ناحیه دشوار است، روی متمم ناحیه‌ی فوق، یعنی ناحیه‌ی نشان‌داده‌شده در شکل زیر، انتگرال می‌گیریم و از ۱ کم می‌کنیم.



$$F_Z(z) = ۱ - \int_{۰}^{\frac{۱-z}{۲}} \int_{y+z}^{۱-y} ۶x \, dx \, dy = ۱ - \int_{۰}^{\frac{۱-z}{۲}} ۳x^۲ \Big|_{y+z}^{۱-y} dy = ۱ - \int_{۰}^{\frac{۱-z}{۲}} ۳((۱-y)^۲ - (y+z)^۲) \, dy$$

$$= ۱ - \frac{۳}{۴}(z^۳ - z^۲ - z + ۱)$$

- به ازای $z > ۱$:

$$F_Z(z) = ۱$$

بنابراین:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{۱}{۴}(z+۱)^۳ & ; \quad -۱ < z \le ۰ \\ ۱ - \frac{۳}{۴}(z^۳ - z^۲ - z + ۱) & ; \quad ۰ < z \le ۱ \\ ۱ & ; \quad z > ۱ \\ ۰ & ; \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

می‌دانیم: $f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z)$، بنابراین:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{۳}{۴}(z+۱)^۲ & ; \quad -۱ < z \le ۰ \\ \frac{۳}{۴}(۱ + ۲z - ۳z^۲) & ; \quad ۰ < z \le ۱ \\ ۰ & ; \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

۴. بهرام دارت‌باز! (امتیازی)　　　　　　　　　　　　۱۵ نمره

بهرام می‌خواهد در سیرک شکرستان یک مسابقه دارت‌بازی برگزار کند. قوانین مسابقه بدین شکل است که شرکت‌کننده تنها در صورت برخورد دارت به دایره‌ی وسط، برنده جایزه می‌شود. با توجه به هزینه ورود به مسابقه و میزان جایزه برندگان، بهرام به این نتیجه رسیده است که زمانی سود می‌کند که احتمال برد هر شرکت‌کننده، کمتر از ۰/۱ باشد. اگر صفحه‌ی دارت را به صورت یک صفحه‌ی مختصات به مرکز نقطه‌ی مرکز آن در نظر بگیریم و X و Y دو متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۹ به ترتیب بیانگر طول و عرض نقطه‌ی برخورد دارت شرکت‌کننده باشند، حداکثر شعاع دایره وسط باید چقدر باشد تا بهرام سود کند؟ (راهنمایی: از تغییر مختصات استفاده کنید!)

پاسخ :

شعاع دایره وسط: R

فاصله از مرکز صفحه‌ی دارت: $Z = \sqrt{X^۲ + Y^۲}$

برای سود کردن بهرام، باید $\mathbb{P}(Z < R) < ۰/۱$ باشد.

$$\mathbb{P}(Z < R) = \mathbb{P}(\sqrt{X^۲ + Y^۲} < R) = \mathbb{P}(X^۲ + Y^۲ < R^۲) = \iint\limits_{X^۲+Y^۲<R^۲} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

ناحیه‌ی انتگرال‌گیری درون دایره‌ای به شعاع R است. $\rightarrow$

$$\iint\limits_{X^۲+Y^۲<R^۲} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \iint\limits_{X^۲+Y^۲<R^۲} \frac{۱}{۲\pi\sigma^۲} e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۲\sigma^۲}}\,dx\,dy$$

با تغییر متغیر و تبدیل مختصات کارتزین به قطبی داریم:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \\ \theta = \tan^{-۱} \frac{y}{x} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases}$$

$$\iint\limits_{X^۲+Y^۲<R^۲} \frac{۱}{۱۸\pi} e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۱۸}}\,dx\,dy = \int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{R} \frac{۱}{۱۸\pi} e^{-\frac{r^۲}{۱۸}}\,r\,dr\,d\theta = \int_۰^R ۲\pi \times \frac{۱}{۱۸\pi} e^{-\frac{r^۲}{۱۸}}\,r\,dr = \int_۰^R e^{-\frac{r^۲}{۱۸}} \times \frac{r}{۹}\,dr$$

$$let \quad u = \frac{r^۲}{۱۸} \longrightarrow \frac{r}{۹}\,dr = du$$

$$\int_۰^R e^{-\frac{r^۲}{۱۸}} \times \frac{r}{۹}\,dr = \int_۰^{\frac{R^۲}{۱۸}} e^{-u}\,du = -e^{-u}\Big|_۰^{\frac{R^۲}{۱۸}} = ۱ - e^{-\frac{R^۲}{۱۸}} < ۰/۱ \longrightarrow -\frac{R^۲}{۱۸} > ln(۰/۹) \rightarrow R^۲ < -۱۸ln(۰/۹)$$

$$\rightarrow \boxed{R < ۱/۳۷۷(\mathrm{cm})}$$