به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین کتبی ششم
موعد تحویل: یکشنبه ۱ دی

---

۱. توزیع گاما $\Gamma(\lambda, k)$ دارای تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{\frac{-x}{\lambda}}$$

(آ) نشان دهید اگر m و n دو عدد صحیح باشند، آنگاه مجموع دو توزیع گامای مستقل $\Gamma(\lambda, m)$ و $\Gamma(\lambda, n)$ دارای توزیع $\Gamma(\lambda, m+n)$ خواهد بود.

(ب) تابع چگالی مشترک $U = X + Y$ و $V = \frac{X}{X+Y}$ را بیابید و نشان دهید که U و V مستقل هستند.

(ج) اگر متغیر تصادفی Z دارای توزیع پواسون با پارامتر λt باشد، نشان دهید برای عدد صحیح m و متغیر تصادفی $X = \Gamma(\lambda, m)$ داریم:

$$P(Z < m) = P(X > t)$$

(د) نشان دهید اگر $0 < m < n$ و متغیر تصادفی B مستقل از Y و دارای توزیع $beta(m, n-m)$ باشد، آنگاه توزیع YB با توزیع X یکسان است.

۲. اگر X و Y دارای توزیع مشترک نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 ، واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 ، و ضریب همبستگی ρ باشند، نشان دهید:

(آ) $E[X|Y] = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1(Y-\mu_2)}{\sigma_2}$

(ب) $Var[X|Y] = \sigma_1^2(1-\rho^2)$

(ج) اگر $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ، $E[X|X+Y=z]$ و $Var(X|X+Y=z)$ را محاسبه کنید.

۳. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع $N(0,1)$ باشند، و $Z = X + Y$. مقدار $E[Z|X>0, Y>0]$ را محاسبه کنید.

۴. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $f(x) = \frac{a}{1+x^4}$ باشند، توزیع $arctan(\frac{Y}{X})$ را به دست آورید.

۵. بخت آزمایی [1] «پول نقد انبوه» [2] به این صورت است که هر روز ۵ عدد بین ۱ تا ۳۵ (بدون جایگذاری) انتخاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم چقدر زمان خواهد برد تا تمام اعداد انتخاب شوند. a_j را میانگین تعداد روزهای باقیمانده تا رسیدن به خواسته‌ی نهایی درنظر بگیرید درحالی که j تعداد اعدادی باشد که هنوز انتخاب نشده‌اند. (پس $a_0 = 0$ و a_{35} میانگین تعداد روز مورد نیاز برای انتخاب همه‌ی ۳۵ عدد است.) رابطه‌ای بازگشتی برای a_j بدست آورید.

۶. به شما فرصتی طلایی برای مزایده برروی یک جعبه‌ی سحرآمیز حاوی پاداشی سحرآمیز داده شده است. مقدار پاداش حداقل صفر و حداکثر یک میلیون دلار است و مقدار دقیق آن نامعلوم. پس تصور می‌شود مقدار حقیقی جایزه، از توزیع Uniform برروی $[0,1]$ پیروی می‌کند. (دامنه‌ی Uniform برحسب میلیون دلار است.)
شما می‌توانید مقدار دلخواه b (بر حسب میلیون دلار) را برای مزایده انتخاب کنید. شما شانس دریافت جایزه را با پرداخت مبلغی بسیار پایین‌تر از مقدار واقعی آن دارید، اما همچنین اگر پیشنهاد بزرگی داده باشید، ممکن است دچار زیان شوید. اگر $b < \frac{2}{3}V$ ، آنگاه پیشنهاد شما رد شده و هیچ سود و زیانی درکار نخواهد بود، در غیر اینصورت پیشنهاد شما پذیرفته شده و جایزه را برنده می‌شوید که نتیجه برای شما $V - b$ خواهد بود. انتخاب b بهینه‌ی شما برای بیشینه کردن امید سود حاصل چقدر است؟

---

[1] Lottery
[2] Mass Cash

۷. فرض کنید رای دادن هر فرد یک جامعه به یک کاندید خاص توزیع برنولی $Ber(0.45)$ داشته باشد. همه نمونه‌های ممکن با اندازه ۴ را در این جامعه در نظر بگیرید و برای آنها میانگین و واریانس نمونه را حساب کنید. تابع جرم احتمال نمونه‌ها را به دست آورید.

۸. دو سکه با ظاهر یکسان که احتمال شیر آمدن یکی p_1 و دیگری p_2 است را در نظر بگیرید. یکی از دو سکه را به تصادف انتخاب کرده و آن را n بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد شیرها در این n پرتاب باشد، میانگین و واریانس X را حساب کنید.

۹. فرض کنید T_n زمان دریافت ایمیل nام باشد که هیچ دو ایمیلی در زمان یکسان دریافت نمی‌شوند (زمان دریافت ایمیل‌ها تحت مقیاسی پیوسته با نقطه‌ی آغازین مشخص بیان می‌شوند). تصور کنید فاصله‌ی زمانی بین دریافت ایمیل‌ها (دربرگیرنده‌ی T_1، $T_2 - T_1$، $\ldots$) از توزیع مستقل و یکپارچه [3] $Expo(\lambda)$ پیروی می‌کنند.
هر ایمیل (مستقل از ایمیل‌های دیگر و بازه‌های زمانی بین دو ایمیل) با احتمال p هرزنامه [4] و با احتمال $q = 1 - p$ غیر هرزنامه می‌باشد. فرض کنید X زمان دریافت اولین ایمیل غیر هرزنامه باشد.

(آ) میانگین و واریانس X را محاسبه کنید.

(ب) تابع MGF را برحسب X حساب کنید. X چه توزیع مشهوری را نشان می‌دهد؟ (مقادیر پارامترهای این توزیع را ذکر کنید.)

راهنمایی برای هر دو بخش:
N را تعداد ایمیل‌ها تا اولین ایمیل غیر هرزنامه درنظر بگیرید (اولین ایمیل غیر هرزنامه را نیز بشمارید) و X را به صورت مجموع عبارات N بنویسید، سپس بر روی N قیدگذاری کنید.

[3] i.i.d
[4] Spam