

امتحان میان ترم درس آمار و احتمال مهندسی

۱. (۲ نمره) پنج مهره ناهمبستگی را به تصادف در ۵ ظرف با شماره‌های ۱ تا ۵ می‌ریزیم. احتمال این که در ظرف‌های با شماره فرد فقط یک مهره قرار گیرد چقدر است؟

۲. (۲ نمره) فردی سه سکه در جیب دارد که یکی سالم و دو تای دیگر هر دو طرف شیر هستند. اگر این فرد یک سکه به تصادف از جیبش خارج کند و دو بار پرتاب کند و هر دو بار شیر بیاید، احتمال این که سکه سالم انتخاب شده باشد چقدر است؟

۳. (۲ نمره) در کلاس دیدیم که اگر $P(A|B) > P(A)$ باشد، می‌گوییم پیشامد B از پیشامد A حمایت می‌کند. فرض کنید احتمال همه پیشامدهای A و B و \bar{A} و \bar{B} مثبت باشد. هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت درست بودن اثبات کنید، و در صورت نادرست بودن با مثال نقضی رد کنید.
الف) B از A حمایت می‌کند، اگر و فقط اگر A هم از B حمایت کند.
ب) B از A حمایت می‌کند، اگر و فقط اگر \bar{B} از A حمایت نکند.

۴. (۴ نمره) در یک بازی سکه‌ای که احتمال شیر آمدن آن p است را $n+1$ بار پرتاب می‌کنیم. برای $2 \leq k \leq n+1$ ، اگر پرتاب k -ام خط بیاید، در صورتی که پرتاب $(k-1)$ -ام شیر آمده باشد، یک دلار جایزه می‌گیریم. فرض کنید متغیر تصادفی R مجموع جوایز کسب شده در این بازی را نمایش بدهد. میانگین و واریانس R را پیدا کنید.

۵. (۳ نمره) دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_1(x) = \begin{cases} a & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} be^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت $f_X(x) = \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2}f_2(x)$ تعریف می‌شود. شروط لازم بر روی

ضرایب ثابت a و b ، برای این که $f_X(x)$ یک تابع چگالی احتمال معتبر باشد چیست؟

۶. (۳ نمره) متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(0,1)$ است. متغیر تصادفی $Y = \frac{X}{X+1}$ را در نظر بگیرید.
الف) تابع چگالی احتمال Y را حساب کنید.
ب) امید ریاضی Y چقدر است؟
پ) چارک اول Y را به دست آورید.

۷. (۴ نمره) کارخانه‌ای دستگاه‌هایی تولید می‌کند که از 10 قطعه مجزا تشکیل شده‌اند. برای این که دستگاه کار کند، باید هر 10 قطعه سالم باشند. هر دستگاه سالم در بازار به قیمت k دلار به فروش می‌رسد، ولی یک دستگاه خراب بی‌ارزش است و دور انداخته می‌شود. هر یک از 10 قطعه دستگاه می‌تواند از مواد نامرغوب (با احتمال خرابی 0.1 و هزینه 1 دلار) و یا مواد مرغوب (با احتمال خرابی 0.05 و هزینه 3 دلار) ساخته شود. فرض کنید خرابی قطعات دستگاه مستقل از هم است و همه قطعات از یک جنس (مرغوب و یا نامرغوب) ساخته می‌شوند. برای بیشینه کردن سود مورد انتظار، بهتر است از قطعات مرغوب استفاده شود و یا نامرغوب؟ پاسخ خود را به طور کامل توضیح دهید.