دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین پنجم ــ توابعی از متغیرهای تصادفی، امید ریاضی شرطی
طراح: امیرمهدی انصاری‌پور
سوپروایزر: سروش مس‌فروش مشهد
تاریخ تحویل: ۵ دی ۱۴۰۲

۱. چگالی احتمال مشترک ۱۵ نمره

تابع چگالی احتمال مشترک متغیرهای تصادفی X و Y بصورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{۱}{۲\sigma^۲} e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۲\sigma^۲}}$$

همچنین برای متغیرهای تصادفی Z و W داریم ($W > ۰$):

$$\begin{cases} Z = \sqrt{X^۲ + Y^۲} \\ W = XY \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال مشترک Z و W را بیابید: ($f_{ZW}(z,w)$)
(نوشتن فرم بسته رابطه آخر اجباری نیست و در صورت درست بودن راه حل نمره کامل داده می‌شود)

پاسخ :

می‌دانیم:

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_i \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{|J(x_i,y_i)|}$$

که در آن (x_i, y_i) جواب‌های دستگاه معادلات $\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$ است.

$$Z^۲ = X^۲ + Y^۲ \; \& \; W^۲ = X^۲Y^۲$$

$$\longrightarrow Z^۲ = \frac{W^۲}{Y^۲} + Y^۲ \longrightarrow Y^۴ - Y^۲Z^۲ + W^۲ = ۰$$

$$Y^۲ = \frac{Z^۲ \pm \sqrt{Z^۴ - ۴W^۲}}{۲}$$

$$y_{۱,۲} = \pm\sqrt{\frac{z^۲ + \sqrt{z^۴ - ۴w^۲}}{۲}}$$

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{z^2 - \sqrt{z^4 - 4w^2}}{2}}$$

$$X^2 = \frac{W^2}{Y^2}$$

$$\longrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{|w|}{|y_{1,2}|} = \pm\frac{w}{\sqrt{\frac{z^2+\sqrt{z^4-4w^2}}{2}}}$$

$$\longrightarrow x_{3,4} = \pm\frac{|w|}{|y_{3,4}|} = \pm\frac{w}{\sqrt{\frac{z^2-\sqrt{z^4-4w^2}}{2}}}$$

برای $J(x,y)$ هم داریم:

$$J(x,y) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y & x \end{bmatrix} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

با جایگذاری داریم:

$$f_{ZW}(z,w) = (\frac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|} + \frac{f_{XY}(x_2,y_2)}{|J(x_2,y_2)|} + \frac{f_{XY}(x_3,y_3)}{|J(x_3,y_3)|} + \frac{f_{XY}(x_4,y_4)}{|J(x_4,y_4)|})u(z)$$

دقت شود Z بزرگتر از صفر است. (دلیل $u(z)$)

$$= (\frac{\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{\frac{4w^2}{z(z^2+\sqrt{z^4-4w^2})} - z} + \frac{\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{\frac{4w^2}{z(z^2-\sqrt{z^4-4w^2})} - z})u(z)$$

(نوشتن فرم بسته آخر اجباری نیست و در صورت درست بودن راه حل نمره کامل داده می‌شود)

۲. واریانس شرطی و کوواریانس متغیر تصادفی توام — ۲۵ نمره

تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است. مطلوب است محاسبه:

$$f(x,\ y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

الف) $Var(Y|X = \frac{1}{2})$ (۱۰ نمره)

ب) $Cov(0/5X, X + Y - 2)$ (۱۵ نمره)

پاسخ :

الف)

ابتدا $f_X(x)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را می یابیم:

$$f_X(x) = \int_x^1 8xy\,dy = \frac{8x(1-x^2)}{2} \quad (0 < x < 1)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xy}{4x(1-x^2)} = \frac{y}{4(1-x^2)} \quad (0 \le x \le y \le 1)$$

حال میتوانیم $E(Y|X=\frac{1}{3})$ و $E(Y^2|X=\frac{1}{3})$ را بیابیم:

$$E(Y|X=\frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^1 y.f(Y|X=\frac{1}{3})\,dy = \int_{\frac{1}{3}}^1 y.\frac{y}{4(1-(\frac{1}{3})^2)}\,dy = \frac{9}{32}\int_{\frac{1}{3}}^1 y^2\,dy = \frac{13}{144}$$

$$E(Y^2|X=\frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^1 y^2.f(Y|X=\frac{1}{3})\,dy = \frac{9}{32}\int_{\frac{1}{3}}^1 y^3\,dy = \frac{5}{72}$$

میدانیم برای هر متغیر تصادفی مانند A: $Var(A) = E(A^2) - E(A)^2$

$$\longrightarrow Var(Y|X=\frac{1}{3}) = E(Y^2|X=\frac{1}{3}) - [E(Y|X=\frac{1}{3})]^2 = \frac{5}{72} - (\frac{13}{144})^2 \sim 0/06$$

ب)

با توجه به خواص Cov:

$$Cov(X,X) = Var(X)$$
$$Cov(aX,Y) = aCov(X,Y)$$
$$Cov(X,a) = 0 \quad (a \text{ is a constant})$$

$$\longrightarrow Cov(0/5X, X+Y-2) =$$
$$0/5(Cov(X,X) + Cov(X,Y) - Cov(X,2)) =$$
$$0/5Var(X) + 0/5Cov(X,Y)$$

برای محاسبه $Var(X)$ داریم:

$$E(X) = \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 x.f(x,y)\,dydx = \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 8x^2y\,dydx = \int_{x=0}^1 (4x^2y^2\Big|_{y=x}^1)\,dx$$
$$= 4\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{8}{15}$$

$$E(X^2) = \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 x^2.f(x,y)\,dydx = \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 8x^3y\,dydx = \int_{x=0}^1 (4x^3y^2\Big|_{y=x}^1)\,dx$$
$$= 4\int_0^1 (x^3 - x^5)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\longrightarrow Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{11}{225}$$

برای محاسبه $Var(Y)$ داریم:

$$E(Y) = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} y.f(x,y)\,dxdy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} 8xy^2\,dxdy = \int_{x=0}^{1} (4x^2y^2\Big|_{x=0}^{y})\,dy =$$
$$= \int_0^1 4y^4\,dy = \frac{4}{5}$$

$$E(Y^2) = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} y^2.f(x,y)\,dxdy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} 8xy^3\,dxdy = \int_{x=0}^{1} (4x^2y^3\Big|_{x=0}^{y})\,dy =$$
$$= \int_0^1 4y^5\,dy = \frac{2}{3}$$

$$\longrightarrow Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{75}$$

برای محاسبه $Cov(X,Y)$ داریم:

$$E(XY) = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{1} xy.f(x,y)\,dydx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{1} 8x^2y^2\,dydx = \int_{x=0}^{1} (\frac{8}{3}x^2y^3\Big|_{y=x}^{1})\,dx$$
$$= \frac{8}{3}\int_0^1 x^2(1-x^3)\,dx = \frac{4}{9}$$

$$\longrightarrow Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{9} - \frac{8}{15}\frac{4}{5} = \frac{4}{225}$$

نهایتا داریم:

$$Cov(0/5X, X+Y-2) = 0/5Var(X) + 0/5Cov(X,Y) = \frac{15}{450}$$

## ۳. توزیع انباشته	۲۰ نمره

متغیرهای تصادفی مستقل از هم X و Y با توزیع نمایی (بترتیب با پارامترهای λ و μ) را در نظر بگیرید:

$$X \sim \lambda e^{-\lambda x}u(x)$$
$$Y \sim \mu e^{-\mu y}u(y)$$

الف) تابع توزیع انباشته $(\text{CDF or } F_S(s))$ $S = X+Y$ را بیابید. (۱۰ نمره)

ب) تابع توزیع انباشته $(\text{CDF or } F_R(r))$ $R = \frac{X}{X+Y}$ را بیابید.(۱۰ نمره)

پاسخ :

پاسخ الف)

$$F_S(s) = P(S \le s) = P(X+Y \le s) = \int\int_{x+y\le s} f_X(x)f_Y(y)\,dxdy \overset{X\perp\!\!\!\perp Y}{=}$$

$$\int_{x\leq s-y} f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y) f_Y(y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \mu e^{-\mu y} u(y) \;\&\&\; F_X(x) = (۱ - e^{-\lambda x}) u(x) \longrightarrow$$

بدیهی است که : $y \geq ۰ \;\&\; s-y \geq ۰ \longrightarrow s \geq y$

$$F_S(s) = \int_{۰}^{s} (۱ - e^{-\lambda(s-y)}) \mu e^{-\mu y}\,dy = ۱ - e^{-\mu s} - (\frac{e^{-\mu s} - e^{-\lambda s}}{\lambda - \mu})$$

پاسخ ب)

$$F_R(r) = F_{\frac{X}{X+Y}}(r) = P(\frac{X}{X+Y} \leq r) = \int\int_{\frac{x}{x+y}\leq r} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=}$$

$$\int_{x\leq \frac{r}{۱-r}y} f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\frac{r}{۱-r}y) f_Y(y)\,dy =$$

$$\int_{۰}^{\infty} (۱ - e^{-\lambda(\frac{r}{۱-r})y}) \mu e^{-\mu y}\,dy = ۱ - (\frac{\mu(۱-r)}{r\lambda + (۱-r)\mu})(e^{-s(\frac{r\lambda}{۱-r}+\mu)} - ۱)$$

۴. قانون احتمال کل — ۲۰ نمره

متغیر تصادفی N بیانگر تعداد کل مشتری هایی است که در یک روز وارد مغازه میشوند. این متغیر دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است. هر مشتری با احتمال p از این مغازه کالا می خرد (و بدیهی است که با احتمال $۱ - p$ نمی خرد.) متغیر تصادفی X را تعداد مشتری هایی در نظر میگیریم که که در یک روز کالا خریده اند و Y را تعداد مشتری هایی در نظر میگیریم که در همان روز کالایی نخریده اند. با نوشتن توزیع احتمال مشترک X و Y (P_{XY}) نشان دهید که:

الف) X و Y از هم مستقلند. (۱۰ نمره)

ب) $P_X(x),\; P_Y(y)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

(راهنمایی: از قضیه احتمال کل کمک بگیرید)

پاسخ :

پاسخ الف)

فرض کنید تعداد مشتریانی که کالا خریده اند i و آنهایی که نخریده اند j باشد. داریم:

$$P_{XY}(X=i, Y=j | N=i+j) = Bionomial(i+j, p)$$

$$P_N(N=n) = Poisson(\lambda)$$

حال طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P_{XY}(X=i, Y=j) = P_{XY}(X=i, Y=j | N=i+j).P_N(N=i+j) =$$

$$\frac{(i+j)!}{i!\,j!}p^i(1-p)^j\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = (e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}) \times (e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!})$$

$$= P_X(X=i).P_Y(Y=j)$$

از آنجا که این معادله برای تمامی مقادیر j و i بزرگتر از صفر برقرار است میتوان بطور کلی گفت:

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$$

در نتیجه X و Y مستقلند.

پاسخ ب)

همانطور که در بخش قبل بدست آوردیم:

$$P_X(x) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^x}{x!} \quad P_Y(y) = e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^y}{y!}$$

بعبارت دیگر: $X \sim Poisson(\lambda, p) \quad Y \sim Poisson(\lambda, 1-p)$

۵. مستقل و یکنواخت! — ۲۰ نمره

دو متغیر تصادفی مستقل U_1 و U_2 را در نظر بگیرید که هر دو توزیع یکنواخت پیوسته $Uniform(0,2)$ دارند.

الف) $P(U_1|U_1 > U_2)$ و $P(U_2|U_1 > U_2)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

ب) $E(U_1|U_1 > U_2)$ و $E(U_2|U_1 > U_2)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

پاسخ :

پاسخ الف) از آنجا که دو متغیر مستقلند: (x مقدار دلخواهی است)

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = f(u_1).f(u_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(U_1 \leq x|U_1 > U_2) = \frac{P(U_1 \leq x, U_1 > U_2)}{P(U_1 > U_2)} = \frac{\int_0^x \int_0^{u_1} \frac{1}{4}\, du_2 du_1}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$$

$$P(U_2 \leq x|U_1 > U_2) = \frac{P(U_2 \leq x, U_1 > U_2)}{P(U_1 > U_2)} = \frac{\int_0^x \int_{u_2}^2 \frac{1}{4}\, du_1 du_2}{\frac{1}{2}} = x - \frac{x^2}{4}$$

(دقت شود از آنجا که متغیرها پیوسته هستند نمیتوان از تساوی استفاده کرد. بعبارت دیگر $P(U_1 = x) = 0$)

پاسخ ب)

$$E(U_1|U_1 > U_2) = \int_0^2 u_1 f(u_1|u_1 > u_2) du_1$$

برای یافتن $f(u_1|u_1 > u_2)$ داریم:

$$f(u_1|u_1 > u_2) = \frac{d}{dx}P(U_1 \leq x|U_1 > U_2) = \frac{x}{2}$$

$$\longrightarrow E(U_1|U_1 > U_2) = \int_0^2 u_1 \frac{u_1}{2} du_1 = \frac{4}{3}$$

$$E(U_2|U_1 > U_2) = \int_0^2 u_2(1 - \frac{u_2}{2}) du_2 = \frac{2}{3}$$

۶. رگرسیون خطی (امتیازی) — ۱۰ نمره

دو متغیر تصادفی X و Y را در مسئله رگرسیون خطی زیر در نظر بگیرید:

$$Y = aX + b$$

الف) با استفاده از روش MSE مقدار بهینه پارامتر های a و b را بیابید. پارامتر a چه رابطه ای با ضریب همبستگی X و Y دارد؟ (۵ نمره)

ب) طبق رابطه بدست آمده در بخش الف مقدار a و b را با توجه نمونه های داده شده بیابید. (۵ نمره)

میزان مطالعه(X)	۵	۱۹	۱۰	۲۱
نمره (Y)	۳۰	۵۵	۴۰	۸۰

پاسخ :

پاسخ الف) طبق روش squared mean داریم:

$$a^*, b^* = min\ E[(Y - (aX + b))^2]$$

$$\frac{dE[(Y - (aX + b))^2]}{da} = E[2(Y - aX - b)(-X)] = 0$$

$$\longrightarrow aE[X^2] + bE[X] = E[XY] \quad (1)$$

معادله دوم را با مشتق گرفتن نسبت به b بدست می آوریم:

$$\frac{dE[(Y - (aX + b))^2]}{db} = E[2(Y - aX - b)(-1)] = 0$$

$$\longrightarrow b = E[Y] - aE[X] \quad (2)$$

با استفاده از این دو معادله داریم:

$$aE[X^2] + (E[Y] - aE[X])E[X] = E[XY] \longrightarrow a(E[X^2] - E^2[X]) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

با توجه به تعریف $Var(X)$ و $Cov(X, Y)$:

$$a = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} \times \frac{Var(Y)}{Var(Y)} = \frac{\rho(X, Y)\sigma_y}{\sigma_x}$$

پاسخ ب)

$$E[X] = \frac{(۲۱ + ۱۰ + ۱۹ + ۵)}{۴} = ۱۳/۷۵ \;\; \&\& \;\; E[X^۲] = ۲۳۱/۷۵ \longrightarrow$$

$$Var[X] = ۴۲/۶۸ \;\; \&\& \;\; \sigma_x = ۶/۵۳$$

$$E[Y] = \frac{(۸۰ + ۴۰ + ۵۵ + ۳۰)}{۴} = ۵۱/۲۵ \;\; \&\& \;\; E[Y^۲] = ۲۹۸۱/۲۵ \longrightarrow$$

$$Var[Y] = ۳۵۴/۶۸ \;\; \&\& \;\; \sigma_y = ۱۸/۸۳$$

$$E[XY] = \frac{۳۲۷۵}{۴} = ۸۱۸/۷۵ \longrightarrow Cov(X,Y) = ۱۱۴/۰۶۲۵$$

$$\longrightarrow a = ۲/۶۷ \;\; \&\& \;\; b = ۱۴/۵۳$$