University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین دوم - احتمال شرطی و استقلال

فاطمه و آریان

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۷/۲۵

سؤال ۱.

سه کیسه داریم که در هر کیسه ۱۰۰ مهره وجود دارد:

- کیسه اول شامل ۷۵ مهره‌ی قرمز و ۲۵ مهره‌ی آبی است.
- کیسه دوم شامل ۶۰ مهره‌ی قرمز و ۴۰ مهره‌ی آبی است.
- کیسه سوم شامل ۴۵ مهره‌ی قرمز و ۵۵ مهره‌ی آبی است.

یکی از کیسه‌ها را به طور تصادفی انتخاب کرده و یک مهره را از آن کیسه به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

پاسخ .

فرض می‌کنیم R پیشامدی باشد که مهره‌ی انتخاب شده قرمز است. همچنین B_i پیشامدی باشد که کیسه‌ی B_i را انتخاب می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&P(R|B_۱) = ۰٫۷۵,\\
&P(R|B_۲) = ۰٫۶۰,\\
&P(R|B_۳) = ۰٫۴۵
\end{aligned}
$$

ما پارتیشن خود را به عنوان $B_۱, B_۲, B_۳$ انتخاب می‌کنیم. توجه داشته باشید که این یک پارتیشن معتبر است زیرا اولاً B_i ها از هم جدا هستند (فقط یکی از آنها ممکن است اتفاق بیفتد) و ثانیاً، اجتماع آنها کل فضای نمونه است زیرا یکی از کیسه‌ها به طور مطمئن انتخاب می‌شوند، یعنی $P(B_۱ \cup B_۲ \cup B_۳) = ۱$. با استفاده از قانون احتمال کل می‌توانیم بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
&P(R) = P(R|B_۱)P(B_۱) + P(R|B_۲)P(B_۲) + P(R|B_۳)P(B_۳)\\
&= (۰٫۷۵)\frac{۱}{۳} + (۰٫۶۰)\frac{۱}{۳} + (۰٫۴۵)\frac{۱}{۳}\\
&= ۰٫۶
\end{aligned}
$$

سؤال ۲.

فرض کنید فردی را به طور کاملا تصادفی انتخاب می‌کنیم و از او تست کرونا می‌گیریم و نتیجه‌ی تست مثبت می‌شود. فرض کنید به ازای هر شخص، احتمال آنکه پاسخ تست او با وضعیت بیماری او مطابق شود برابر ۸۰ درصد است و همچنین در جامعه‌ای که این فرد را انتخاب کرده‌ایم، به طور میانگین از هر ۱۰۰۰ نفر ۱ نفر کرونا دارد. آیا احتمال این که این فرد کرونا داشته باشد ۸۰ درصد است؟ اگر پاسخ بله است توضیح دهید و در غیر این صورت احتمال آن را محاسبه کنید.

پاسخ .

خیر. با قضیه ی بیز ثابت می‌کنیم این احتمال تنها ۰.۰۰۴ است یعنی ۰.۴ درصد. T^+ را پیشامد مثبت شدن تست و D^+ را پیشامد داشتن کرونا برای یک فرد در نظر می‌گیریم. اکنون $P(D^+|T^+)$ همان پاسخ مورد نظر است. طبق قضیه بیز:

$$P(D^+|T^+) = \frac{P(T^+|D^+) \times P(D^+)}{P(T^+)}$$

$$P(T^+|D^+) = ۰/۸$$

$$P(D^+) = \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۱$$

$$P(T^+) = (۰/۸ \times ۰/۰۰۱) + (۰/۲ \times ۰/۹۹۹) \approx ۰/۲$$

$$P(D^+|T^+) \approx \frac{۰/۸ \times ۰/۰۰۱}{۰/۲} = ۰/۰۰۴$$

سؤال ۳.

در یک مسابقه‌ی فوتبال ۴ تیم در مرحله‌ی گروهی حضور دارند. همه‌ی تیم‌ها دو به دو با هم بازی می‌کنند و هر دو تیم یک بازی با هم خواهند داشت. اگر بازی مساوی شود، دو تیم ۱ امتیاز خواهند گرفت و در غیر این صورت برنده ۳ امتیاز می‌گیرد و بازنده امتیازی نمی‌گیرد. می‌دانیم برد تیم اول، برد تیم دوم و مساوی هر سه احتمالشان $\frac{۱}{۳}$ است. تیم‌های a،b،c،d در یک گروه‌اند و تیم a ۶ امتیاز کسب کرده است. احتمال اینکه تیم b ۴ امتیاز کسب کرده باشد چقدر است؟

پاسخ .

احتمال اینکه تیم a ۶ امتیاز کسب کرده باشد = $P(A)$

احتمال اینکه تیم b ۴ امتیاز کسب کرده باشد = $P(B)$

پاسخ مساله برابر است با $P(B|A)$.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

پیشامد A وقتی پیش می آید که تیم a دو بازی را ببرد و یک بازی را ببازد.

$$P(A) = ۳ * \frac{۱}{۳} * \frac{۱}{۳} * \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

برای بدست آوردن $P(A \cap B)$ روی نتیجه ی بازی a و b حالت بندی می‌کنیم با کمی بررسی می‌توان متوجه شد که این بازی نمی‌تواند مساوی شود. پس کافی است دو حالت در نظر بگیریم که یکی برد a و دیگری برد b است.

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}*۲*(\frac{۱}{۳})^۲*۲*(\frac{۱}{۳})^۲+\frac{۱}{۳}*(\frac{۱}{۳})^۲*۲*(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۶}{۲۴۳}$$

$$P(B|A)=\frac{\frac{۶}{۲۴۳}}{\frac{۱}{۹}}=\frac{۲}{۹}$$

سؤال ۴.

در یک بازی، بازیکنی دو تاس را پرتاب می‌کند. اگر مجموع دو عدد ظاهر شده ۲ یا ۳ یا ۱۲ باشد، بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد، برنده است. اگر نتیجه عدد دیگری باشد بازی ادامه پیدا می‌کند تا اینکه او نتیجه قبلی را بدست آورد و یا نتیجه ۷ حاصل گردد. اگر نتیجه ۷ ابتدا ظاهر شود بازیکن بازنده است، در حالی که اگر نتیجه قبلی پیش از ۷ ظاهر شود بازیکن برنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را بدست آورید. منظور از نتیجه قبلی، همان نتیجه پرتاب اول می‌باشد.

پاسخ .

احتمال برنده شدن بازیکن از مجموع سه نوع احتمال زیر تشکیل می‌شود:

- احتمال اینکه مجموع تاس‌ها در پرتاب اول ۷ باشد که برابر $P(۷)$ است.
- احتمال اینکه مجموع تاس‌ها در پرتاب اول ۱۱ باشد که برابر $P(۱۱)$ است.
- احتمال اینکه مجموع تاس‌ها در پرتاب اول i باشد و در پرتاب های بعدی مجموع i قبل از ۷ بیاید. i در این حالت باید یکی از مقادیر ۴, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۰ باشد.

بنابراین داریم:

$$P(win)=P(۷)+P(۱۱)+[P(۴)P(۴\ before\ ۷)]+[P(۵)P(۵\ before\ ۷)]+[P(۶)P(۶\ before\ ۷)]+$$
$$[P(۸)P(۸\ before\ ۷)]+[P(۹)P(۹\ before\ ۷)]+[P(۱۰)P(۱۰\ before\ ۷)]$$

که منظور از $P(i)$، احتمال این است که مجموع پرتاب اول i باشد و منظور از $P(i\ before\ ۷)$ احتمال این است که از پرتاب دوم به بعد، مجموع i قبل از ۷ بیاید. همچنین باید توجه داشت که اگر نتیجه پرتاب اول، ۲،۳ یا ۱۲باشد، ما بازی را باخته‌ایم و بازی ادامه نمی‌یابد. لذا:

$$P(win)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}\times\frac{\frac{۳}{۳۶}}{\frac{۳}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}}+\frac{۴}{۳۶}\times\frac{\frac{۴}{۳۶}}{\frac{۴}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}}+\frac{۵}{۳۶}\times\frac{\frac{۵}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}}+$$
$$\frac{۵}{۳۶}\times\frac{\frac{۵}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}}+\frac{۴}{۳۶}\times\frac{\frac{۴}{۳۶}}{\frac{۴}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}}+\frac{۳}{۳۶}\times\frac{\frac{۳}{۳۶}}{\frac{۳}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}}=۰/۴۹۲۹$$

سؤال ۵.

استادی می‌خواهد برای درس خود تعدادی دستیار آموزشی از میان دانشجویان قدیمی انتخاب کند. برای این کار او بر اساس دو درس که نمراتشان مستقل از هم است، معیارهایی را گذاشته است. فرض می‌کنیم نمرات اعشار ندارند و همچنین احتمال گرفتن هر نمره‌ای برابر $\frac{۱}{۲۱}$ است.

آ) می‌دانیم میانگین نمرات این دو درس برای دانشجویی بیشتر از ۱۴ شده است. احتمال اینکه او درس اول را افتاده باشد چقدر است؟ (نمره ی پایین تر از ۱۰)

ب) می‌دانیم دانشجویی نمره‌اش در یک درس ۱۰ شده است. احتمال اینکه هر دو درس را ۱۰ شده باشد چقدر است؟

پاسخ.

الف)

میانگین نمرات او بیشتر از ۱۴ باشد = $P(A)$

درس اول را افتاده باشد = $P(B)$

پاسخ می‌شود $P(B|A)$.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

در پیشامد A چون میانگین نمرات بیشتر از ۱۴ شده است، باید مجموع دو نمره بیشتر از ۲۸ باشد. چون رخ دادن نمرات متساوی الاحتمال هستند، کافی است تعداد حالتهایی که جمع دو نمره بیشتر از ۲۸ است را بر کل حالات دو نمره تقسیم کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$n(A) = n(grades'\ sum = ۲۹) + n(grades'\ sum = ۳۰) + ... + n(grades'\ sum = ۴۰)$$

$$n(A) = ۱۲ + ۱۱ + ... + ۱ = \binom{۱۳}{۲} = ۷۸$$

$$n(S) = ۲۱ * ۲۱ = ۴۴۱$$

$$P(A) = \frac{۷۸}{۴۴۱}$$

برای بدست آوردن اشتراک نیز چون نمرات متساوی الاحتمال‌اند حالت‌های مطلوب را بر کل تقسیم می‌کنیم:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$n(A \cap B) = n(first\ grade = ۹ \cap A) + n(first\ grade = ۸ \cap A) + ...n(first\ grade = ۰ \cap A)$$

$$n(A \cap B) = ۱$$

$$P(A \cap B) = \frac{۱}{۴۴۱}$$

$$P(B|A) = \frac{\frac{۱}{۴۴۱}}{\frac{۷۸}{۴۴۱}} \approx ۰/۰۱۳$$

ب)

احتمال اینکه هر دو درس را ۱۰ شده باشد = $P(A)$

احتمال اینکه حداقل یک درس را ۱۰ شده باشد = $P(B)$

پاسخ برابر است با $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = ۱ - P(\overline{B}) = ۱ - ((۱ - \frac{۱}{۲۱})^{۲}) = ۰/۰۹۳$$

$$P(A \cap B) = \frac{۱}{۲۱} * \frac{۱}{۲۱} = ۰/۰۰۲$$

$$P(A|B) = \frac{۰/۰۰۲}{۰/۰۹۳} \approx ۰/۰۲۲$$

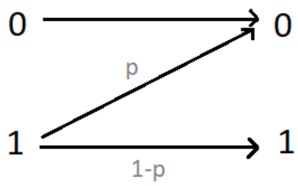
سؤال ۶.

در یک سیستم مخابراتی، برای انتقال داده‌ها، از بیت‌های ۰ و ۱ استفاده می‌شود. این بیت‌ها از کانال زیر عبور کرده و در خروجی ظاهر می‌شوند. در ورودی، با احتمال ۰/۴ بیت ۰ ظاهر می‌شود، این بیت مستقیماً از کانال عبور کرده و به خروجی می‌رسد. اگر در ورودی بیت ۱ ظاهر شود، با احتمال p بر اثر عبور از کانال، به صورت ۰ در خروجی ظاهر می‌شود و در غیر این صورت، به شکل درست انتقال می‌یابد. مطلوب است:

آ) احتمال گرفتن بیت ۰ در خروجی

ب) احتمال خطای این مجموعه (یعنی احتمال آنکه خروجی و ورودی متفاوت باشند)

ج) اگر n تا از این کانال‌ها پشت سر هم متصل شوند (یعنی خروجی کانال اول، خود، ورودی کانال بعدی به حساب آید) احتمال خطا را بدست آورید. اگر تعداد کانال‌ها به بی‌نهایت میل کند، احتمال گرفتن بیت‌های ۰ و ۱ را در خروجی بدست آورید. عملکرد هر کدام از کانال‌ها را از یکدیگر مستقل در نظر بگیرید.



پاسخ .

- الف)

$$P(Y=۰) = P(Y=۰|X=۰)P(X=۰) + P(Y=۰|X=۱)P(X=۱) = ۰/۶p + ۰/۴$$

- ب)

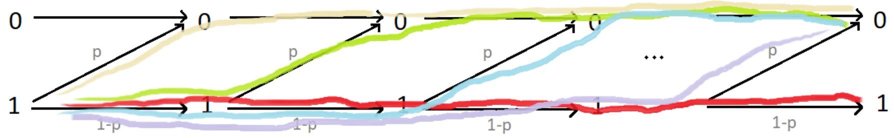
$$P(error) = P(Y=۰|X=۱)P(X=۱) + P(Y=۱|X=۰)P(X=۰) = ۰/۶p$$

- ج)

با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که هیچگاه ورودی صفر به خروجی ۱ منجر نمی‌شود، پس شرط لازم (نه کافی) برای اینکه خروجی کانال آخر ۱ شود، این است که ورودی و خروجی تمام کانال‌ها ۱ باشد، که در این صورت اگر در ورودی اولین کانال، ۱ داشته باشیم، با احتمال $(1-p)^n$ در خروجی آخرین کانال، بیت ۱ را دریافت می‌کنیم.

$$P(Yn = 1|X1 = 1) = (1-p)^n$$

تصویر زیر، مصداقی از توضیحات بالا می‌باشد. برای بدست آوردن احتمال آنکه خروجی ۱ شود، به شرط آنکه ورودی ۱ بوده باشد، از مسیر قرمز رنگ استفاده می‌کنیم. مسیرهای رنگی دیگر، نشان‌دهنده احتمال گرفتن ۰ در خروج به شرطی که ورودی ۱ بوده باشد که احتمال نهایی‌اش، مکمل حالت پیش می‌باشد.



همچنان با شرط اینکه ورودی اولین کانال ۱ باشد، پیشامد دریافت بیت ۰ در خروجی آخرین کانال با احتمال $1-(1-p)^n$ رخ می‌دهد (مکمل حالت قبل)...

$$P(Yn = 0|X1 = 1) = 1 - P(Yn = 1|X1 = 1) = 1 - (1-p)^n$$

اگر در ورودی اولین کانال، ۰ داشته باشیم، خروجی تمام کانال‌ها ۰ خواهد شد (شرط لازم و کافی). حال احتمال خطا را بدست می‌آوریم:

$$P(error) = P(Yn = 0|X1 = 1)P(X1 = 1) + P(Yn = 1|X1 = 0)P(X1 = 0)$$

$$= 0/6(1 - (1-p)^n) = 0/6 - 0/6(1-p)^n$$

$$P(Yn = 0) = P(Yn = 0|X1 = 0)P(X1 = 0) + P(Yn = 0|X1 = 1)P(X1 = 1)$$

$$= 0/4 + 0/6(1 - (1-p)^n) = 1 - 0/6(1-p)^n$$

$$P(Yn = 1) = 1 - P(Yn = 0) = 0/6(1-p)^n$$

با توجه به اینکه p بین ۰ و ۱ است و با میل دادن n به سمت بی‌نهایت، احتمال ها به صورت زیر می‌شود:

$$P(Y = 1) = 0, P(Y = 0) = 1$$

خروجی نهایی همواره بیت ۰ خواهد بود.

سؤال ۷.

فرض می‌کنیم $C_1, C_2, ..., C_M$ افرازهای مختلف در فضای S بوده و A و B دو پیشامد در این فضا باشند.

۱. A و B به شرط $C_i; i \in \{1, 2..., M\}$ از هم مستقلند.

۲. B از تمام Ci ها مستقل است.

اثبات کنید A و B از یکدیگر مستقل‌اند.

پاسخ .

با توجه به این که C_i یک افراز از فضای نمونه است، می‌توانیم قانون احتمال کلی را برای $A \cap B$ اعمال کنیم:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= \sum_{i=1}^{M} P(A \cap B|C_i)P(C_i) \\
&= \sum_{i=1}^{M} P(A|C_i)P(B|C_i)P(C_i) && \text{و } A \text{ و } B \text{ به شرط } C_i \text{ از هم مستقلند} \\
&= \sum_{i=1}^{M} P(A|C_i)P(B)P(C_i) && B \text{ از همه‌ی } C_i \text{ ها مستقل است} \\
&= P(B)\sum_{i=1}^{M} P(A|Ci)P(Ci) \\
&= P(B)P(A) && \text{قانون احتمال کل}
\end{aligned}$$

سؤال ۸.

امتیازی: نمره‌ی تکمیلی برای این مبحث به دنبال دارد.

دو فرد A و B قرار گذاشته‌اند به کرّات با یکدیگر مسابقه‌ی اسب سواری بدهند. هربار که یکی پیروز شود، از پول بازنده یک تومان کم می‌شود و به پول برنده افزوده می‌شود. احتمال پیروزی آقای A در مسابقه p و احتمال پیروزی آقای B در مسابقه $q = 1 - p$ است. سرمایه‌ی اولیه A برابر i تومان و سرمایه اولیه آقای B برابر $k - i$ تومان است. مسابقه زمانی تمام می‌شود که سرمایه‌ی یکی از طرفین به صفر برسد. احتمال اینکه A برنده شود را محاسبه کنید.

پاسخ .

ایده حل به این صورت است که احتمال پیروز شدن A به شرط سرمایه i را p_i می‌نامیم و داریم:

$$p_i = p \times p_{i+1} + q \times p_{i-1}$$

هم چنین p_i را به صورت $p_i = p \times p_i + q \times p_i$ نیز مي‌توان نوشت. بنابراین:

$$p \times p_i + q \times p_i = p \times p_{i+1} + q \times p_{i-1}$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p} \times (p_i - p_{i-1})$$

عبارت بالا براي $i = 1$ برابر است با:

$$p_2 - p_1 = \frac{q}{p} \times (p_1 - p_0)$$

با توجه به تعریف p_i، p_0 برابر است با احتمال برد بازیکن A به شرط داشتن سرمایه صفر که این احتمال صفر مي‌باشد. با صفر قرار دادن p_0 داریم:

$$p_2 - p_1 = \frac{q}{p} \times p_1$$

$$p_3 - p_2 = \frac{q}{p} \times (p_2 - p_1) = (\frac{q}{p})^2 \times p_1$$

به طورکلی برای $0 < i < k$ می‌توان نوشت:

$$p_{i+1} - p_i = (\frac{q}{p})^i \times p_1$$

$$p_{i+1} - p_1 = \sum_{k=1}^{i} (p_{k+1} - p_k) = \sum_{k=1}^{i} (\frac{q}{p})^k \times p_1$$

$$p_{i+1} = p_1 + p_1 \sum_{k=1}^{i} (\frac{q}{p})^k = p_1 \sum_{k=0}^{i} (\frac{q}{p})^k$$

$$= \begin{cases} p_1 \times \frac{1-(\frac{q}{p})^{i+1}}{1-(\frac{q}{p})}, & p \neq q; \\ p_1 \times (i+1), & p = q = 0/5, \end{cases} \tag{1}$$

p_k برابر است با احتمال برد بازیکن A به شرط داشتن سرمایه k که این احتمال مشخصاً یک می‌باشد. بنابراین:

$$1 = p_k = \begin{cases} p_1 \times \frac{1-(\frac{q}{p})^{k}}{1-(\frac{q}{p})}, & p \neq q; \\ p_1 \times k, & p = q = 0/5, \end{cases} \tag{2}$$

از رابطه‌ی (۲) p_1 را نتیجه می گیریم :

$$p_1 = \begin{cases} \frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^k}, & p \neq q; \\ \frac{1}{k}, & p = q = 0/5, \end{cases} \tag{3}$$

در نهایت با جایگذاری p_1 در رابطه‌ی (۱)، p_i را بدست می‌آوریم:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^k}, & p \neq q; \\ \frac{i}{k}, & p = q = 0/5. \end{cases} \tag{4}$$

سؤال ۹.

اختیاری: این تمرین تحویل ندارد. درصورت تمایل برای بحث و گفتگو پیرامون این تمرین، با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir در ارتباط باشید.

بخش دوم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع مدل‌های بیزی را می‌توانید از طریق این لینک [1] دریافت کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [2] در دسترس است.

[1] https://colab.research.google.com/drive/1dDFY0PNkvoYADXT3B2g8C7GS$_tazsLTs?usp = sharing$

[2] https://colab.research.google.com/drive/1D2k0OMeOSELCRXWFJ0GViTH5$_PghJ7n5?usp = sharing$

سؤال ۱۰.

بخش سوم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع مسئله‌ی Monty Hall را می‌توانید از طریق این لینک [3] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA2_S3_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ قرمز مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ati.noorzad@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [4] در دسترس است.

[3] https://colab.research.google.com/drive/1kkU8aeVRTylvugaubMrs6hotgnd1J4MJ?usp=sharing
[4] https://colab.research.google.com/drive/1VRDWkVU8LfcYJ5rOPGqlziRxeTUk2$_p$0?$usp = sharing$