دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین دوم ــ توزیع‌های پیوسته و توابعی از یک متغیر تصادفی
طراح: الهه خداوردی
سوپروایزر: مسعود طهماسبی فرد
تاریخ تحویل: ۱۷ آبان ۱۴۰۲

۱. خدمات اورژانس — ۲۰ نمره

مدت زمان انتظار تا دریافت خدمات در بخش اورژانس یک بیمارستان، با واحد ساعت، با تابع چگالی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۹} & ۰ \leq x < ۳ \\ \frac{۲}{۳} - ax & ۳ \leq x < ۶ \end{cases}$ مدلسازی می‌شود.

الف) ثابت a را محاسبه کنید. (۳ نمره)

ب) احتمال اینکه بیمار کمتر از ۴ ساعت منتظر بماند چقدر است؟ (۳ نمره)

ج) احتمال اینکه مدت زمان انتظار بیشتر از ۵ ساعت باشد چقدر است؟ (۳ نمره)

د) احتمال اینکه مدت زمان انتظار بین ۲ تا ۳ ساعت باشد چقدر است؟ (۳ نمره)

و) مدت زمانی که تنها ۱۰ درصد بیماران بیشتر از آن منتظر می‌مانند را محاسبه کنید. (۵ نمره)

ه) میانگین زمان انتظار را بدست آورید. (۳ نمره)

۲. توزیع به توزیع! — ۲۰ نمره

متغیر تصادفی $X \sim \exp(\lambda)$ را در نظر بگیرید. تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که $Y = g(X)$ دارای توزیع $Y \sim U(۲, ۵)$ باشد.

۳. دوربین مداربسته — ۲۰ نمره

فرض کنید یک دوربین مداربسته در ارتفاع ۳ متری از زمین قرار گرفته و حول مرکز خود در حال چرخش است. نقطه X را نقطه تحت پوششی روی زمین در نظر بگیرید که دوربین در راستای آن نقطه متوقف می‌شود.

الف) زاویه دوربین با خط عمود بر زمین (θ) یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ است. تابع توزیع مربوط به θ را بدست آورید. (۳ نمره)

ب) رابطه بین X و θ را بنویسید و سپس CDF مربوط به X را محاسبه کنید. میانگین X چقدر است؟ (۱۷ نمره)

۴. پرتاب سکه ۲۰ نمره

یک سکه سالم را n بار پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر سکه ۱۰۰۰ بار پرتاب شود و X نمایانگر تعداد دفعاتی باشد که سکه شیر آمده است، $P(۴۸۰ \leq X \leq ۵۳۰)$ را محاسبه کنید. (۷ نمره)

ب) چندبار باید سکه را پرتاب کرده باشیم تا $P(۰/۴۸n \leq X \leq ۰/۵۲n) = ۰/۹۵$ باشد؟ (۱۳ نمره)

۵. مسابقه تیراندازی ۲۰ نمره

در یک مسابقه تیراندازی دو نفر به رقابت می‌پردازند. دو شخص ۵ دور بازی می‌کنند و کسی که حداقل سه دور را ببرد، برنده مسابقه می‌شود. در هر دور کسی که تیرش به مرکز هدف نزدیک‌تر باشد، برنده آن دور می‌شود. اگر در هر دور فاصله تیر شخص اول تا مرکز هدف دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۴ و واریانس ۲ باشد و فاصله تیر شخص دوم تا مرکز هدف دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ باشد، احتمال اینکه شخص دوم برنده مسابقه شود چقدر است؟ (راهنمایی: ترکیب خطی دو متغیر تصادفی نرمال مستقل، یک متغیر تصادفی نرمال است و اگر X و Y مستقل باشند: $E[XY] = E[X]E[Y]$)

۶. یکنواختِ سینوسی! (سوال امتیازی) ۱۵ نمره

فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در بازه $(-۲\pi, ۲\pi)$ است. اگر داشته باشیم: $Y = ۳\sin(۲X)$، PDF و CDF متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید.