University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین سوم - متغیر تصادفی، میانگین و واریانس

محمدرضا و فاطمه

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۸/۹

سؤال ۱.

s ظرف و n توپ داریم به طوری که $n \geq s$ است. آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن هر توپ در یک سبد به صورت تصادفی قرار گرفته باشد (هر توپ با احتمال مساوی می تواند در هر یک از سبد ها قرار گیرد). نحوه‌ی قرارگیری هر توپ، مستقل از توپ دیگر می‌باشد و هر سبد، قابلیت گنجایش هر تعداد توپ را دارد. متغیرهای تصادفی مدنظر خود را به این صورت تعریف می‌کنیم:

۱. برای هر $i = ۱, ۲, ..., s$ متغیر تصادفی X_i را تعداد توپ ها در سبد i در نظر می‌گیریم.

۲. برای هر $k = ۱, ۲, ..., n$ متغیر تصادفی Y_k را تعداد سبد هایی در نظر می‌گیریم که دقیقا k توپ دارند.

حالا به سوالات زیر پاسخ دهید:

آ) PMF، امید ریاضی و واریانس X_i را بدست آورید.

ب) امید ریاضی و واریانس Y_k را بدست آورید. برای واریانس می توانید فرض کنید $n \geq ۲k$.

پاسخ .

الف) هر توپ، می تواند یک ظرف را بطور مستقل انتخاب کند و احتمال آنکه توپ در ظرف i برود $\frac{۱}{s}$ است و n توپ نیز داریم . پس X_i دارای توزیع Binomial با پارامتر های n و $\frac{۱}{s}$ می‌باشد. داریم:

$$P_{X_i}(k) = \binom{n}{k}(\frac{۱}{s})^k(۱-\frac{۱}{s})^{n-k}$$

$$E[X_i] = \frac{n}{s}$$

$$Var(X_i) = \frac{n}{s} \times (۱-\frac{۱}{s})$$

ب) $I_{i,k}$: متغیر تصادفی برنولی بطوری که اگر ظرف i دقیقا k توپ داشته باشد ۱ و در غیر این صورت ۰ است. در نتیجه:

$$Y_k = I_۱ + I_۲ + ... + I_s$$

$$E[Y_k] = E[\sum_{i=1}^{s} I_{i,k}] = \sum_{i=1}^{s} E[I_{i,k}]$$

$$E[I_{i,k}] = 1 \times P_{X_i}(k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{s})^k(1-\frac{1}{s})^{n-k}$$

$$E[Y_k] = s \times \binom{n}{k}(\frac{1}{s})^k(1-\frac{1}{s})^{n-k}$$

برای بدست آوردن واریانس:

$$Var(Y_k) = E[Y_k^2] - E[Y_k]^2$$

$$E[Y_k^2] = E[(\sum_{i=1}^{s} I_{i,k})^2] = \sum_{i=1}^{s} E[I_{i,k}^2] + \sum_{i\neq j} E[I_{i,k}I_{j,k}]$$

$$\sum_{i=1}^{s} E[I_{i,k}^2] = s \times \binom{n}{k}(\frac{1}{s})^k(1-\frac{1}{s})^{n-k}$$

$$E[I_{i,k}I_{j,k}] = P(X_i = X_j = k)$$

توجه کنید که عبارت $P(X_i = X_j = k)$ تنها در صورتی که $n \geq 2k$ باشد غیر صفر است . باید k تا توپ برای ظرف i و سپس k توپ دیگر برای ظرف j و بقیه $n-2k$ توپ دیگر را در بقیه ظرف ها پخش کنیم:

$$P(X_i = X_j = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{s})^k \times \binom{n-k}{k}(\frac{1}{s})^k \times (1-\frac{2}{s})^{n-2k}$$

در نهایت داریم:

$$Var(Y_k) = E[Y_k^2] - E[Y_k]^2$$

$$Var(Y_k) = s\binom{n}{k}(\frac{1}{s})^k(1-\frac{1}{s})^{n-k} + (s^2-s)\binom{n}{k,k,n-2k}(\frac{1}{s})^{2k}(1-\frac{2}{s})^{n-2k} - (s\binom{n}{k}(\frac{1}{s})^k(1-\frac{1}{s})^{n-k})^2$$

سؤال ۲.

اگر $X \sim Poi(\lambda)$ باشد، امید ریاضی متغیر های تصادفی $Y = 2^X$ و $Z = \frac{1}{X+1}$ را محاسبه کنید.

پاسخ .

$$Y = g(X) \to E[Y] = \sum g(x)P(x)$$

$$g(x) = 2^x; P(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[Y] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\lambda}e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^i}{i!} = e^{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^i}{i!}$$

عبارت جلوی سیگما جمع کل احتمال یک توزیع پوآسن با میانگین 2λ است و می‌دانیم که جمع تمام احتمال‌ها یک می‌شود پس:

$$E[Y] = e^{\lambda}$$

برای بخش دوم داریم:

$$Z = \frac{1}{X+1}$$

$$E[Z] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!}$$

با تغییر متغیر $k = i + 1$ داریم:

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$$

سؤال ۳.

سه تاس سالم را مستقل از یکدیگر پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X کمینه سه عدد مشاهده شده باشد.

آ) احتمال اینکه $X > k$ را برای همه اعداد صحیح k محاسبه کنید.

ب) امید ریاضی X را به‌دست آورید.

ج) اگر متغیذ تصادفی S مجموع دو عدد برزگتر، از سه عدد مشاهده شده باشد، امید ریاضی S را بیابید.

پاسخ .

آ) با توجه به فضای نمونه متغیر تصادفی X، مقادیری از اعداد صحیح K که در این مسئله دارای احتمالی غیرصفر هستند، اعداد ۱ تا ۶ می‌باشند و همچنین داریم:

$$P(X > K) = P(X = K + 1) + P(X > K + 1)$$

$P(X = K)$ را میتوان بدین صورت بیان کرد که یا هر سه تاس برابر با K باشند، یا دوتا از سه تاس برابر K باشند و دیگری عددی بزرگتر از K باشد، یا اینکه فقط یکی از سه تاس برابر K و دوتای دیگر بزرگتر از K باشند.

برای حالتی که هر تاس برابر با K باشند احتمال برابر است با $(\frac{1}{6})^3$ و برای حالتی که دوتاس برابر K بوده و دیگری بزرگتر است، احتمال برابر است با $\binom{3}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{6-K}{6})$ و برای حالت سوم هم احتمال برابر است با $\binom{3}{1}(\frac{1}{6})(\frac{6-K}{6})^2$ و در نهایت این سه با هم جمع می‌شوند و $P(X = K)$ را می‌سازند:

$$P(X = K) = \binom{3}{1}(\frac{1}{6})(\frac{6-K}{6})^2 + \binom{3}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{6-K}{6}) + (\frac{1}{6})^3,$$
$$1 \leq K \leq 6, otherwise$$

$$P(X = 6) = (\frac{1}{6})^3$$

$$P(X=۵) = (\frac{۱}{۶})^۳ + ۳ \times (\frac{۱}{۶}) \times (\frac{۱}{۶})^۲ + ۳ \times (\frac{۱}{۶})^۲ \times (\frac{۱}{۶}) = ۷(\frac{۱}{۶})^۳$$

$$P(X=۴) = (\frac{۱}{۶})^۳ + ۳ \times (\frac{۱}{۶}) \times (\frac{۲}{۶})^۲ + ۳ \times (\frac{۱}{۶})^۲ \times (\frac{۲}{۶}) = ۱۹(\frac{۱}{۶})^۳$$

$$P(X=۳) = (\frac{۱}{۶})^۳ + ۳ \times (\frac{۱}{۶}) \times (\frac{۳}{۶})^۲ + ۳ \times (\frac{۱}{۶})^۲ \times (\frac{۳}{۶}) = ۳۷(\frac{۱}{۶})^۳$$

$$P(X=۲) = (\frac{۱}{۶})^۳ + ۳ \times (\frac{۱}{۶}) \times (\frac{۴}{۶})^۲ + ۳ \times (\frac{۱}{۶})^۲ \times (\frac{۴}{۶}) = ۶۱(\frac{۱}{۶})^۳$$

$$P(X=۱) = (\frac{۱}{۶})^۳ + ۳ \times (\frac{۱}{۶}) \times (\frac{۵}{۶})^۲ + ۳ \times (\frac{۱}{۶})^۲ \times (\frac{۵}{۶}) = ۹۱(\frac{۱}{۶})^۳$$

همانطور که در زیر محاسبه شده است، احتمال کل برابر با ۱ است.

$$P_{total} = (۹۱ + ۶۱ + ۳۷ + ۱۹ + ۷ + ۱) \times (\frac{۱}{۶})^۳ = ۱$$

ب) با توجه به اینکه در قسمت (الف) تابع توزیع احتمال را بدست آوردیم، از تعریف امید ریاضی برای بدست آوردن امید ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$E[X] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_i P_X(x_i) = \sum_{k=۱}^{۶} x_i P_X(x_i)$$

$$= ۹۱(\frac{۱}{۶})^۳ \times ۱ + ۶۱(\frac{۱}{۶})^۳ \times ۲ + ۳۷(\frac{۱}{۶})^۳ \times ۳ + ۱۹(\frac{۱}{۶})^۳ \times ۴$$

$$+۷(\frac{۱}{۶})^۳ \times ۵ + (\frac{۱}{۶})^۳ \times ۶ = ۴۴۱ \times (\frac{۱}{۶})^۳ = ۲/۰۴۱۷$$

ج) متغیر تصادفی T را برابر با مجموع سه تاس در نظر می‌گیریم. از آنجایی که مجموع دو تاس بزرگتر، معادل با مجموع کل منهای کوچکترین می‌باشد ($S = T - X$)، $E[S]$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E[S] = E[T] - E[X]$$

اگر T_i خروجی تاس i ام باشد، $E[T]$ و $E[T_i]$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$E[T_i] = \sum_{K=۱}^{۶} \frac{۱}{۶} \times K = ۳/۵$$

$$E[T] = \sum_{K=۱}^{۳} E[T_i] = ۱۰/۵ \rightarrow E[S] = ۱۰/۵ - ۲/۰۴۱۷ = ۸/۴۵۸۳$$

سؤال ۴.

توابع بازگشتی زیر را در نظر بگیرید، اگر Y مقدار بازگشتی تابع Far() باشد، امید ریاضی و واریانس Y را حساب کنید.

```
int Near() {
    int b = randomInteger(1, 4); // equally likely to be 1, 2, 3 or 4
    if (b == 1) return 2;
    else if (b == 2) return 4;
    else if (b == 3) return (6 + Near());
    else return (8 + Near());
}
int Far() {
    int a = randomInteger(1, 3); // equally likely to be 1, 2 or 3
    if (a == 1) return 2;
    else if (a == 2) return (2 + Near());
    else return (4 + Far());
}
```

پاسخ.

متغیر تصادفی X را مقدار بازگشتی تابع $Near()$ در نظر می‌گیریم.

$$E[X] = \frac{۱}{۴} \times ۲ + \frac{۱}{۴} \times ۴ + \frac{۱}{۴} \times (۶ + E[X]) + \frac{۱}{۴} \times (۸ + E[X]) = ۵ + \frac{۱}{۲}E[X] \rightarrow E[X] = ۱۰$$

$$E[Y] = \frac{۱}{۳} \times ۲ + \frac{۱}{۳} \times (۲ + E[X]) + \frac{۱}{۳} \times (۴ + E[Y]) \rightarrow E[Y] = ۹$$

برای بدست آوردن واریانس از رابطه $Var(Y) = E[Y^۲] - (E[Y])^۲$ استفاده می‌کنیم:

$$E[X^۲] = \frac{۱}{۴} \times ۲^۲ + \frac{۱}{۴} \times ۴^۲ + \frac{۱}{۴} \times E[(۶ + X)^۲] + \frac{۱}{۴} \times E[(۸ + X)^۲]$$

$$= \frac{۱}{۴} \times ۲^۲ + \frac{۱}{۴} \times ۴^۲ + \frac{۱}{۴} \times E[۳۶ + ۱۲X + X^۲] + \frac{۱}{۴} \times E[۶۴ + ۱۶X + X^۲]$$

$$= \frac{۱}{۴} \times ۲^۲ + \frac{۱}{۴} \times ۴^۲ + \frac{۱}{۴} \times (۳۶ + ۱۲E[X] + E[X^۲]) + \frac{۱}{۴} \times (۶۴ + ۱۶E[X] + E[X^۲])$$

$$\rightarrow E[X^۲] = ۲۰۰$$

$$E[Y^۲] = \frac{۱}{۳} \times ۲^۲ + \frac{۱}{۳} \times E[(۲ + X)^۲] + \frac{۱}{۳} \times E[(۴ + Y)^۲]$$

$$= \frac{۱}{۳} \times ۲^۲ + \frac{۱}{۳} \times (۴ + ۴E[X] + E[X^۲]) + \frac{۱}{۳} \times (۱۶ + ۸E[Y] + E[Y^۲])$$

$$= \frac{۱}{۳} \times ۲^۲ + \frac{۱}{۳} \times (۴ + ۴ \times ۱۰ + ۲۰۰) + \frac{۱}{۳} \times (۱۶ + ۸ \times ۹ + E[Y^۲])$$

$$\rightarrow E[Y^۲] = ۱۶۸$$

$$Var(Y) = E[Y^۲] - (E[Y])^۲ = ۱۶۸ - ۹^۲ = ۸۷$$

سؤال ۵.

هریک از اعضای کادر درمان یک بیمارستان به طور متوسط یک بار در هر ۴ ماه به کرونا مبتلا می‌شوند. داروی جدیدی به تازگی تولید شده که قادر است سیستم ایمنی بدن را در مقابل ویروس کرونا تقویت کند. دانشمندان با آزمایش‌های انجام شده پی برده‌اند که این دارو ٪۷۵ موثر است و می‌تواند احتمال ابتلا به کرونا را از متوسط یک بار در ۴ ماه به یک بار در ۶ ماه کاهش دهد. این دارو برای ٪۲۵ افراد نیز اثر ندارد و احتمال ابتلا را تغییری نمی‌دهد. اگر یکی از اعضای کادر درمان اقدام به مصرف این دارو کند و در یک سال هرگز به کرونا مبتلا نشود، چقدر احتمال دارد که مصرف این دارو برای او موثر واقع شده باشد؟ (به افتخار کادر درمانی به عنوان مدافعان سلامت، در خط مقدم مقابله با کرونا)

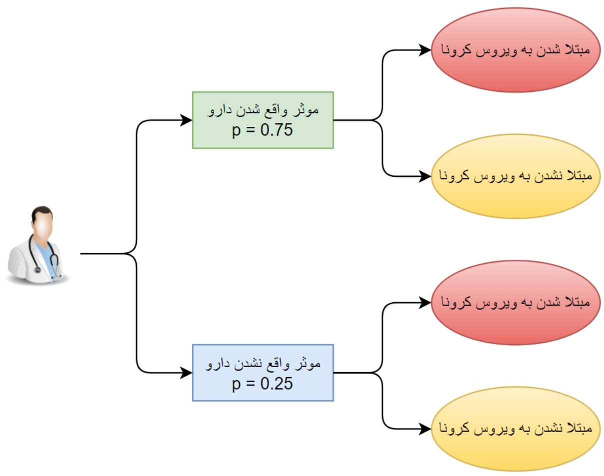
پاسخ .

از آنجایی که تعداد بارهای ابتلا یک فرد در یک بازه زمانی مشخص گسسته و تصادفی است، می‌توانیم آن را متغیری تصادفی در نظر بگیریم. برای اینکه بتوانیم میانگین این متغیر تصادفی را در دو حالت مختلف ذکر شده باهم مقایسه کرده، لازم است بازه‌ی زمانی این دو حالت را یکی کنیم (کوچک‌ترین مضرب مشترک آنها یک سال است). همچنین می‌دانیم پیشامدهایی که در یک بازه زمانی مشخص رخ می‌دهند، غالباً دارای توزیع پوآسون هستند.

$$X \sim Poi(\lambda) \longrightarrow E[X] = \lambda$$

پس

- در صورت عدم مصرف دارو $\lambda = ۳$ یعنی به‌طور متوسط سه بار در هر یک سال به کرونا مبتلا خواهد شد.
- در صورت مصرف دارو اگر موثر واقع شود $\lambda = ۲$ یعنی به‌طور متوسط دو بار در هر یک سال به کرونا مبتلا خواهد شد.



$$P\{\text{دارو موثر}|\text{مبتلا نشدن}\} = \frac{P\{\text{مبتلا نشدن}|\text{دارو موثر}\} \times P\{\text{دارو موثر}\}}{P\{\text{مبتلا نشدن}|\text{دارو موثر}\}P\{\text{دارو موثر}\} + P\{\text{مبتلا نشدن}|\text{دارو بی اثر}\}P\{\text{دارو بی اثر}\}}$$

$$P\{\text{دارو موثر}|\text{مبتلا نشدن}\}\frac{\frac{e^{-۲}\times ۲^{۰}}{۰!} \times \frac{۳}{۴}}{\frac{e^{-۲}\times ۲^{۰}}{۰!} \times \frac{۳}{۴} + \frac{e^{-۳}\times ۳^{۰}}{۰!} \times \frac{۱}{۴}} = \frac{۳e^{-۲}}{۳e^{-۲} + e^{-۳}} = ۰/۸۹۰۸$$

احتمال اینکه دارو برای عضوی از کادر درمان که یک سال به کرونا مبتلا نشده است، موثر واقع شده باشد ٪۸۹/۰۸ است.

سؤال ۶.

حجم ترافیک اتوبان قزوین-رشت در ایام غیرتعطیل به طور متوسط ۲۵۰ خودرو در هر ساعت گزارش شده است که معمولا ٪۸۰ آنها سواری، ٪۱۰ اتوبوس و ٪۱۰ کامیون هستند. عوارضی اتوبان برای هر خودروی سواری، اتوبوس و کامیون به ترتیب ۹۰۰۰، ۱۶۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ تومان است.

آ) احتمال اینکه در یک دقیقه خاص بیش از ۵ خودرو از محل عوارضی عبور کنند، چقدر است؟ پاسخ نهایی را تا حد امکان ساده کنید.

ب) انتظار دارید که مبلغ کل عوارض دریافتی در طول دوره هشت ساعته چقدر باشد؟

پاسخ .

آ) با توجه به صورت سوال در هر ساعت به طور میانگین ۲۵۰ خودرو از این اتوبان می‌گذرد.همچنین می‌دانیم تعداد پیشامد ها در یک بازه زمانی مشخص دارای توزیع پوآسون است.

$$X \sim Poi(\lambda) \longrightarrow E[X] = \lambda \longrightarrow ۲۵۰ = \lambda$$

پس احتمال عبور X خودرو در هر دقیقه دارای توزیع پوآسون با پارامتر $\lambda = \frac{۲۵۰}{۶۰}$ است. حال باید احتمال عبور بیش از ۵ خودرو در یک دقیقه خاص را محاسبه کنیم :

$$P(\lambda = \frac{۲۵۰}{۶۰}; x > ۵) = ۱ - P(\lambda = \frac{۲۵۰}{۶۰}; x \leq ۵) = ۱ - \sum_{x=۰}^{۵} \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^x}{x!} \approx ۰/۲۴۱$$

احتمال اینکه در یک دقیقه خاص ۵ خودرو از محل عوارضی عبور کنند ۰/۲۴۱ می‌باشد.

ب) با توجه به میانگین داده شده در صورت سوال که در هرساعت ۲۵۰ خودرو از محل عوارضی عبور می‌کنند، انتظار می‌رود که در ۸ ساعت ۸ × ۲۵۰ خودرو از اتوبان عبور کند که مطابق صورت سوال ٪۸۰ آنها خودروی سواری، ٪۱۰ اتوبوس و ٪۱۰ کامیون هستند. پس انتظار می‌رود که مقدار کل عوارضی دریافتی در بازه زمانی هشت ساعته برابر باشد با :

$$۲۵۰ \times ۸ \times (۰/۸ \times ۹۰۰۰ + ۰/۱ \times ۱۶۰۰۰ + ۰/۱ \times ۲۰۰۰۰) = ۲۱/۶۰۰/۰۰۰$$

انتظار می‌رود که مقدار کل عوارضی دریافتی در بازه زمانی هشت ساعته ۲۱میلیون و ۶۰۰ هزارتومان باشد.

سؤال ۷.

یک ریاضی‌دان سیگاری، یک پاکت کبریت در جیب راست خود و پاکتی دیگر را در جیب چپ خود قرار می‌دهد. هر زمانی که بخواهد یک سیگار بکشد، به احتمال p یک کبریت از جیب چپ و به احتمال $۱ - p$ یک کبریت از جیب راست خود (به صورت مستقل از سیگارهای قبلی) برمی‌دارد. هر بسته سیگار در ابتدا n کبریت دارد. تابع جرم احتمال تعداد کبریت‌های باقی‌مانده در زمانی که ریاضی‌دان متوجه خالی شدن یکی از جعبه‌های کبریت می‌شود را بیابید.

پاسخ .

متغیر تصادفی X را تعداد کبریت‌های جعبه دیگر هنگامی که ریاضی دان متوجه خالی شدن یک جعبه می‌شود فرض می‌کنیم. دو متغیر تصادفی R_k و L_k را نیز مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

۱. برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n$ متغیر تصادفی L_k اتفاق خالی شدن جیب چپ به شرط آنکه در جیب راست k کبریت باشد تعریف می‌کنیم.

۲. برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n$ متغیر تصادفی R_k اتفاق خالی شدن جیب راست به شرط آنکه در جیب چپ k کبریت باشد تعریف می‌کنیم.

بطور کلی میتوانیم بگوییم که ریاضی‌دان هنگامی که پس از خالی شدن جیب چپ (راست) یک کبریت دیگر از آن جیب بردارد متوجه خالی شدن آن می‌شود. به صورت ریاضی می‌توان نوشت:

$$P_X(k) = p \times P(L_k) + (۱-p) \times P(R_k)$$

هنگامی جیب چپ (راست) خالی می‌شود که از آن n کبریت برداریم. با توجه به آنکه احتمال برداشتن هر کبریت از جیب چپ و راست به ترتیب p و $۱-p$ است، داریم:

$$P(L_k) = \binom{۲n-k}{n} p^n (۱-p)^{n-k}$$

$$P(R_k) = \binom{۲n-k}{n} p^{n-k} (۱-p)^n$$

در نهایت با جایگذاری تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را بدست می‌آوریم:

$$P_X(k) = p \times P(L_k) + (۱-p) \times P(R_k)$$

$$P_X(k) = \binom{۲n-k}{n} (p^{n+۱}(۱-p)^{n-k} + p^{n-k}(۱-p)^{n+۱})$$

کنجکاوی: در خصوص امید ریاضی و نمودار آن برای $p = ۰/۵$ فکر کنید. (راهنمایی: باید از تقریب استرلینگ استفاده کنید)

سؤال ۸.

امتیازی: نمره‌ی تکمیلی برای این مبحث به دنبال دارد.

شما وارد یک مهمانی می‌شوید و بر روی میز یک پیتزای پپرونی و یک سبزیجات می‌بینید. هر پیتزا ۱۲ قطعه دارد و احتمال انتخاب یک قطعه از پیتزای پپرونی با احتمال انتخاب یک قطعه از پیتزای سبزیجات توسط مهمان‌ها برابر است. احتمال این‌که در زمان خورده شدن آخرین قطعه از پیتزای پپرونی حداقل سه قطعه از پیتزای سبزیجات باقی‌مانده باشد، چقدر است؟ (نیازی به ساده کردن جواب آخر نیست.)

پاسخ .

باید متغیر تصادفی X را تعداد قطعات پیتزای خورده شده در نظر گرفت، هدف ما این است که این متغیر تصادفی زمانی که آخرین قطعه پیتزای پپرونی خورده شده، عددی بین ۱۲ تا ۲۱ باشد.

به عنوان مثال اگر تنها ۳ قطعه از پیتزای سبزیجات باقی مانده باشد، X مقدار ۲۱ را می گیرد، چون ۱۲ تا از پپرونی و ۹ تا از سبزیجات خورده شده. اگر ۴ قطعه از سبزیجات باقی بماند مقدار ۲۰ را میگیرد و به همین ترتیب مقادیر بعدی را می گیرد.

توزیع این متغیر تصادفی دو جمله ای منفی است $(X \sim NegBin(۱۲, ۰/۵))$ چون هر قطعه پیتزا یا خورده شده یا نشده و احتمال آن هم ۵۰ درصد است و همچنین تعداد آزمایش ها ثابت نیست و صرفا دنبال یک تعداد موفقیت هستیم، برای همین از متغیر تصادفی دو جمله ای منفی استفاده میکنیم.

همان طور که گفته شد باید متغیر تصادفی X را به ازای تمام مقادیر بین ۱۲ تا ۲۱ محاسبه کنیم. زیرا امکان خوردن آخرین قطعه پیتزای پپرونی برای $X < ۱۲$ وجود ندارد و اگر این عدد بزرگتر از ۲۱ شود خواسته مسئله ارضا نمی گردد.

احتمالی که ما به دنبال آن هستیم در زیر آمده است:

$$\sum_{i=۱۲}^{۲۱} P(X=i) = \sum_{i=۱۲}^{۲۱} \binom{i-۱}{۱۱} (\frac{۱}{۲})^{۱۲} (\frac{۱}{۲})^{i-۱۲} = \sum_{i=۱۲}^{۲۱} \binom{i-۱}{۱۱} (\frac{۱}{۲})^i$$

سؤال ۹.

اختیاری: این تمرین تحویل ندارد. درصورت تمایل برای بحث و گفتگو پیرامون این تمرین، با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir در ارتباط باشید.

بخش چهارم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع مدل بیز ساده‌لوح را می‌توانید از طریق این لینک [1] دریافت کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [2] در دسترس است.

سؤال ۱۰.

بخش پنجم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع رابطه‌ی توزیع دوجمله‌ای با برنولی را می‌توانید از طریق این لینک [3] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA3_S5_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
- فایل کد خود را با ایمیل afzaliaref.aa@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [4] در دسترس است.

سؤال ۱۱.

سری شمم تمرینات کامپیوتری با موضوع شبیه‌سازی مسائل در محیط R را می‌توانید از طریق این لینک [5] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA3_S6_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه‌های تکرار استفاده نکنید.
- فایل کد خود را با ایمیل gelamm۷۶@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.

[1] https://colab.research.google.com/drive/17RDoA699VTBygzSluEjhyC61KxG6QPlA?usp=sharing
[2] https://colab.research.google.com/drive/1RT$_{G}hv2vDAAI4J4vwzAuT78twpKGxw2i?usp = sharing$
[3] https://colab.research.google.com/drive/1JcRE$_{E}m_{M}um2ynwwjzDMZPj9kgwkGSxS?usp = sharing$
[4] https://colab.research.google.com/drive/1j59DMTOCSEexcYUfmgx11kZrcFL21NBg?usp=sharing
[5] https://colab.research.google.com/drive/1HGvM-O8ng2WLl-TpvwAbcL5B6Om6IGpm?usp=sharing

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [6] در دسترس است.

[6] https://colab.research.google.com/drive/1h5n-inAS3FW76qPjp6BjrnLSbkl-SH5x?usp=sharing