به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده برق و کامپیوتر

درس آمار و احتمال

پاسخ نامه تمرین شماره 2

مهر ماه ۱۳۹۹

سوال اول – تاس شرطی (10 نمره)

تمام حالت‌های ممکن برای عدد دو تاس انداخته شده را می توان به صورت زیر نمایش داد. با توجه به سالم بودن تاس احتمال اتفاق افتادن تمام حالات **یکسان** است.

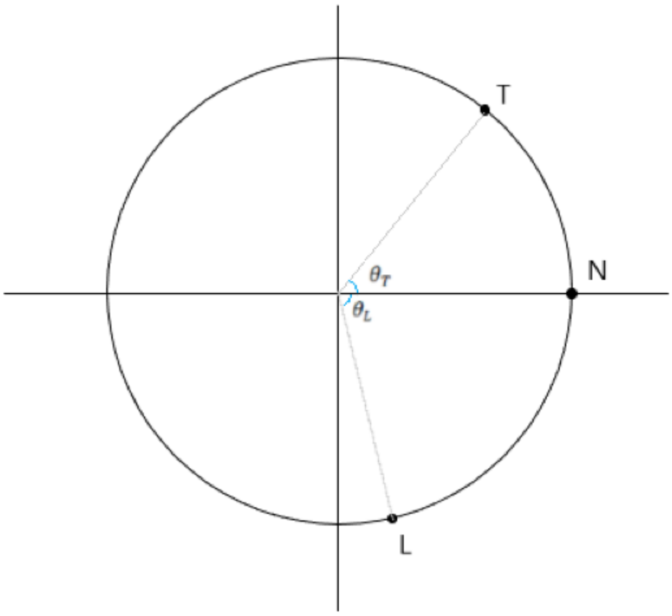
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

حال با توجه به **نسبت** تعداد *حالات مطلوب* به *کل حالاتی* که در شرط ذکر شده، می توان احتمال مورد نظر هر بخش را به دست آورد:

الف) $\frac{3}{6}$ ب) $\frac{12}{18}$ ج) $\frac{0}{6}$ د) $\frac{6}{24}$

سوال دوم – مثلث درونی (15 نمره)

بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، یکی از نقاط را به صورت زیر ثابت می کنیم و با توجه به زاویه قرارگیری دو نقطه دیگر برروی دایره، احتمال خواسته شده را محاسبه می کنیم. فرض می کنیم N در زاویه صفر برروی دایره قرار گرفته است. دو متغیر برای زاویه قرارگیری دو راس دیگر برروی دایره داریم که می توانند از 180- تا 180 باشند.



همچنین شرط مسئله این است که هر سه نقطه برروی نیم دایره قرار داشته باشند. اگر زاویه های قرارگیری دو نقطه L و T هم علامت باشند (هر دو بین 0 تا 180، یا 0 تا 180- باشند)، قطعا هر سه نقطه برروی یک نیم دایره قرار دارند. در حالتی که هم علامت نباشند، اختلاف آنها باید کمتر از 180 باشد تا بتوان هر سه نقطه را برروی یک نیم دایره در نظر گرفت (نقطه میانی در این حالت N است). بنابراین شروط مسئله به صورت زیر هستند:

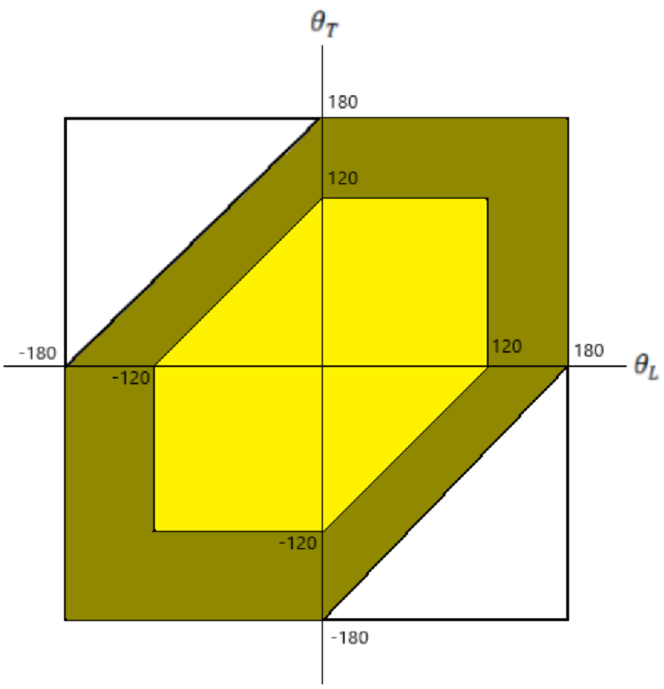
$$-180 < \theta_T < 180$$

$$-180 < \theta_L < 180$$

$$|\theta_T - \theta_L| < 180$$

حال بررسی می کنیم که حالات مطلوب مسئله چگونه بر اساس θ_T و θ_L تعیین می شوند. با توجه به این که شرط قرار داشتن هر سه نقطه برروی نیم دایره را در نظر گرفتیم، می توان گفت که تنها لازم است کوچک تر بودن زاویه میانی از 120 درجه بررسی شود، زیرا دو زاویه دیگر حتما از 90 درجه کمتر خواهند بود.

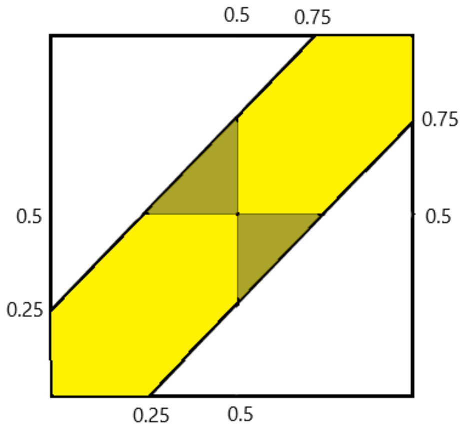
در حالتی هر دو نقطه در سمت مثبت باشند، لازم است زاویه قرارگیری حداقل یکی از آنها از 120 بیشتر باشد تا زاویه میانی از 120 درجه کمتر باشد (زیرا در این حالت زاویه میانی روبروی کمانی کوچکتر از 240 درجه قرار می گیرد). در حالتی که هر دو نقطه L و T در سمت منفی باشند نیز به همین صورت حداقل لازم است یکی از آنها در زاویه کوچکتر از 120- قرار گرفته باشد. در حالتی که یکی از نقاط در سمت مثبت و دیگری در سمت منفی قرار گرفته باشد، لازم است که اختلاف زاویه قرارگیری آنها از 120 بیشتر باشد، زیرا در این حالت N زاویه میانی است. می توان در شکل زیر تمامی شرایط ذکر شده را مشاهده کرد:



نسبت مساحت بخش تیره شده از بخش زرد رنگ به کل بخش زرد، احتمال مطلوب را نتیجه می دهد که مقدار این نسبت $\frac{5}{9}$ می باشد.

سوال سوم – فاصله خطی (15 نمره)

می توان با بررسی مساحت در دو بعد احتمال خواسته شده را محاسبه کرد. محور افقی و عمودی مکان دو نقطه را نشان می دهند، که میان 0 و 1 می تواند باشند:



نسبت مساحت تیره شده از بخش زرد به کل بخش زرد احتمال مطلوب است.

$$P = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{7}$$

سوال چهارم – سه سکه (10 نمره)

طبیعتا گزاره فوق (که به نام Galton's Paradox شناخته می شود) یک مغالطه است: احتمال این که هر سه سکه نتیجه یکسان داشته باشند با توجه به این که سکه ها سالم هستند، 0/25 است. دقت کنید که عبارت "نتیجه حداقل دو تا از سکه ها مشابه خواهد بود"، یک عبارت بدیهی است و در تمام ۸ حالت خروجی برقرار است. این که سکه سوم دو حالت با احتمال یکسان دارد نیز درست است، اما نتیجه گیری انجام شده نادرست است زیرا حالات مختلفی برای انتخاب دو سکه اول وجود دارد که در نظر گرفته نشده است.

سوال پنجم – مهمانان فراموش‌کار (15 نمره)

اگر A_i را احتمال درست برداشتن کلید را برای فرد i ام در نظر بگیریم، می توان گفت:

$$1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$
$$= 1 - (\sum_{1 \le i \le n} P(A_1) - \sum_{1 \le i < j \le n} P\big(A_i \cap A_j\big) + \cdots + (-1)^{n-1} P\big(A_1 \cap \dots \cap A_j\big))$$

درواقع حالتی را بررسی می کنیم که حداقل یکی از افراد کلید خودش را برداشته باشد و سپس مکمل آن را حساب می کنیم. با توجه به این که تفاوتی میان کلید ها وجود ندارد:

$$P = 1 - \binom{n}{1} P(A_1) + \binom{n}{2} P(A_1 \cap A_2) - \binom{n}{3} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + (-1)^n P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_j\right)$$

و در نتیجه:

$$P = 1 - n \frac{(n-1)!}{n!} + \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} - \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$P = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

در n های بزرگ عبارت فوق به $\frac{1}{e}$ میل می کند.

سوال ششم – انتخاب واحد (10 نمره)

احتمال این که فردی هر دو درس را داشته باشد $0.7 \times 0.9 = 0.63$ و احتمال این که فردی یکی از دو درس را نداشته باشد 0.37 است.

$$P = (0.63)^4 + \binom{4}{1} (0.63)^3 (0.37)^1$$

سوال هفتم – خانواده (10 نمره)

الف)

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} = P(E_1)P(E_2) = \frac{2}{8} \times \frac{1}{2}$$

$$P(E_2 \cap E_3) = \frac{3}{8} = P(E_2)P(E_3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

ب)

$$P(E_1 \cap E_3) = 0 \neq P(E_1)P(E_2)$$

ج) تنها در حالتی که یکی از دو احتمال دختر یا پسر بودن 1 باشد، می توان گفت دو گزاره قسمت های قبلی همچنان صدق می کنند.

د) خیر. به عنوان مثال:

$$P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4} \neq P(E_2)P(E_3) = \frac{5}{16} \times \frac{14}{16}$$

سوال هشتم – زوج مرتب (15 نمره)

احتمال را به صورت شرطی محاسبه میکنیم. در نظر می‌گیریم که جمع یکان دو عدد کمتر از 10 می‌باشد (A) و جمع دو عدد زوج باشد را هم (B) در نظر می‌گیریم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ابتدا به محاسبه $P(A \cap B)$ می‌پردازیم. کل حالاتی که برای یک زوج مرتب وجود دارد را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$99^2 = 9801$$

حالت های مناسب نیز شامل همه جفت هایی هستند که جمع یکان آنان کمتر از 10 بوده و جمع خودشان نیز زوج میباشد.
برای محاسبه این عدد داریم (ابتدا همه حالات را حساب کرده و بعد حالات دو صفر (جز یک حالت) را کم میکنیم) :

$$25 * 10 * 10 - 2 * 5 * 10 + 1 = 2401$$

حال به محاسبه احتمال B می‌پردازیم:

$$P(B) = \frac{50 * 50 + 49 * 49}{9801}$$

در آخر نیز با تقسیم دو عبارت حاصل میتوان به جواب نهایی رسید:

$$\frac{2401}{4901}$$