۱)

الف) تعداد راه‌های انتخاب ۲ مرد از بین ۵ مرد:

$$\binom{5}{2} = 10$$

همسر این دو مرد را حذف کرده و از بین ۳ زن باقی‌مانده ۲ نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{3}{2} = 3$$

$$p = \frac{10 \times 3}{\binom{10}{4}} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

ب)

انتخاب یک زوج:

$$\binom{5}{1} = 5$$

انتخاب یک مرد از ۴ مرد باقی‌مانده:

$$\binom{4}{1} = 4$$

حذف همسر این مرد و انتخاب یک زن از ۳ زن باقی‌مانده:

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$p = \frac{5 \times 4 \times 3}{\binom{10}{4}} = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$$

۲)

فرض کنید C پیشامد برنده نهایی بودن شاهین در این بازی باشد.

تعداد بردهای شاهین در دو مسابقه اول یک توزیع دوجمله‌ای دارد: $X \sim \text{Binomial}(2, p)$

طبق قضیه احتمال کل داریم:

$$P(C) = P(C|X=0)P(X=0) + P(C|X=1)P(X=1) + P(C|X=2)P(X=2)$$

$$= P(C|X=0)q^2 + P(C|X=1)(2pq) + P(C|X=2)p^2$$

اگر در دو مسابقه اول باخته باشد، پس در کل بازی بازنده است: $P(C|X=0) = 0$

اگر در دو مسابقه اول برنده باشد، پس در کل بازی برنده است: $P(C|X=2) = 1$

اگر در یک مسابقه برنده ودر دیگری بازنده باشد، مشابه این است که هنوز هیچ بازی انجام نداده است: $P(C|X=1)=P(C)$

$$P(C)=P(C)\times(2pq)+p^2 \rightarrow \; P(C)=\frac{p^2}{1-2pq}=\frac{p^2}{p^2+q^2}$$

۳)

احتمال هر دو شیر و یا هر دو خط برابر است با:

$$pq+(1-p)(1-q)=1-p-q+2pq$$

بنابراین با آزمایش‌های برنولی مواجهیم که احتمال موفقیت (یکی شیر و دیگری خط) هر یک از آنها برابر است با:

$$1-(1-p-q+2pq)=p+q-2pq$$

متغیر تصادفی X دارای توزیع هندسی با احتمال موفقیت $p+q-2pq$ است بنابراین:

$$P(X=x)=(p+q-2pq)(1-p-q+2pq)^{x-1}$$

$$Var(X)=\frac{1-p-q+2pq}{(p+q-2pq)^2}$$

ب)

آخرین پرتاب = موفقیت آزمایش برنولی = یکی از دو سکه شیر آمده و دیگری خط:

$$P(C_1=H \mid \text{success})=\frac{P(C_1=H\,,C_2=T)}{P(success)}=\frac{p(1-q)}{p+q-2pq}$$

۴)

از آنجایی که F تابعی اکیداً صعودی است، معکوس‌پذیر بوده و می‌توانیم بنویسیم:

$if\ a>0:$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aF_X(X)+b\le y)=P\left(F_X(X)\le\frac{y-b}{a}\right)=P\left(X\le F^{-1}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)$$

$$\rightarrow F_Y(y)=F\left(F^{-1}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)=\frac{y-b}{a}$$

$if\ a<0:$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aF_X(X) + b \le y) = P\left(F_X(X) \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(F_X(X) < \frac{y-b}{a}\right)$$
$$= 1 - P\left(X \le F^{-1}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)$$

$$\rightarrow F_Y(y) = 1 - F\left(F^{-1}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) = 1 - \frac{y-b}{a}$$

$if\ a = 0$:

$Y = b$ with probability 1 $\rightarrow$ $f_Y(y) = \delta(y-b)$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy} = \begin{cases} \delta(y-b) & & \text{if } a = 0 \\ -\frac{1}{a}, & b + a < y < b & \text{if } a < 0 \\ \frac{1}{a}, & b < y < b + a & \text{if } a > 0\ , \end{cases}$$

۵)

$$-y < x < y < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < -y < x < y < 1$$

$$-y < y \ \rightarrow\ 0 < y\ , \qquad -y < x \ \rightarrow\ y > -x$$

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} A + y\ dx\ dy = \int_0^1 (A+y)\big(y - (-y)\big)dy = Ay^2 + \frac{2}{3}y^3|_0^1 = A + \frac{2}{3} = 1 \ \rightarrow\ A = \frac{1}{3}$$

ب)

For $-1 < x < 1$

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)dy = \int_{|x|}^{1}\left(\frac{1}{3} + y\right)dy = \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2|_{|x|}^{1} = \frac{1}{3}(1 - |x|) + \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

پ)

$$x^2 + y^2 = 1\ , y = |x| \rightarrow\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ , \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در مختصات قطبی:

$$0 < r < 1\ , \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

$$P(X^2+Y^2<1)=\int_0^1\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{1}{3}+r\sin(\theta)\right)r\,d\theta\,dr$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{1}{3}+r\sin(\theta)\right)r\,d\theta=r\left(\frac{1}{3}\theta-r.\cos(\theta)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=r\left(\frac{\pi}{6}+r\sqrt{2}\right)$$

$$P(X^2+Y^2<1)=\int_0^1 r(\frac{\pi}{6}+r\sqrt{2})\ dr\ =\ \frac{\pi}{12}r^2+\frac{\sqrt{2}}{3}r^3\ |_0^1\ =\ \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}$$