



University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین چهارم - متغیرهای تصادفی توأمآ توزیع شده

آرین و رضا

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۸/۲۳

سؤال ۱.

توزیع احتمال رشد جمعیت یک شهر خاص از تابع توزیع زیر پیروی می کند:

$$f(x, k, \theta) = \begin{cases} \frac{k \cdot \theta^k}{x^{k+1}} & \theta \leq x \\ 0.W. & \end{cases}$$

که در آن مقادیر k و θ دو ثابت مثبت هستند.

۱. ثابت کنید که این تابع یک تابع توزیع احتمال است.

۲. در صورتی که $k > 1$ امید ریاضی را محاسبه کنید.

۳. در صورتی که $k > 2$ مقدار واریانس را بیابید.

سؤال ۲.

فرض کنید X متغیر تصادفی نشان دهنده ی تخمینی از مقدار هزینه ی یک فرد خاص (بر حسب میلیون تومان) در طول یک سال باشد:

۱. اگر تابع چگالی احتمال این متغیر تصادفی به صورت $x \geq 0$ $f(x) = k(1 + \frac{x}{\delta})^{-\gamma}$ باشد، مقدار k را بیابید.

۲. فرض کنید این فرد از یک شرکت بیمه استفاده می کند که برنامه ی پرداختی آن بدین شرح است:

برای هزینه های کمتر از ۵۰۰ هزار تومان چیزی نمی پردازد و برای هزینه های بیشتر از ۵۰۰ هزار تومان نیز تا ۸۰ درصد هزینه ی باقی مانده را می پردازد (یعنی ابتدا فرد ۵۰۰ هزار تومان را می پردازد و سپس بیمه ۸۰ درصد هزینه ی باقی مانده را می پردازد). همچنین در برنامه ی این بیمه بیشترین هزینه ای که فرد می پردازد نیز ۲ میلیون و ۵۰۰ هزار تومان است (یعنی در صورتی که هزینه ی درمانی بیشتر از این مقدار شد، فرد تنها همین مقدار ۲ میلیون و ۵۰۰ هزار تومان را می پردازد و سایر هزینه ها هر چقدر باشد توسط بیمه پرداخت می شود).

ابتدا تابع مقدار هزینه ی پرداخت شده توسط بیمه را بر حسب متغیر تصادفی X بنویسید و سپس امید ریاضی آن را محاسبه کنید.

سؤال ۳.

رستوران زنجیره‌ای مک دونالد اخیراً ادعا کرده است که به منظور اهمیت داشتن سلامتی مشتریان از روغنی سالم‌تر برای پخت غذاهایش استفاده می‌کند اما از طرفی مزه‌ی غذاها چندان تغییر نکرده است به طوری که از بین هر ۱۰۰ نفری که یک غذای طبخ شده با آن روغن را می‌چشند ۹۷ نفر متوجه تغییر نمی‌شوند. با فرض درست بودن این ادعا در یک نمونه‌ی صدتایی از مشتریان موارد زیر را تخمین بزنید:

۱. احتمال این که حداقل ۴۰ درصد از افراد متوجه تفاوت مزه‌ی غذای طبخ شده با روغن جدید بشوند.

۲. احتمال این که حداکثر ۵ درصد متوجه این تفاوت بشوند.

سؤال ۴.

فردی می‌خواهد یک بسته‌ی مکالمه‌ی تلفن همراه بخرد و با دو گزینه روبرو است. در گزینه‌ی اول به ازای هر دقیقه مکالمه باید ۱۰ تومان پردازد و در گزینه‌ی دوم به ازای هر مدت زمان کمتر از ۲۰ دقیقه ۹۹ تومان و به ازای هر دقیقه‌ای که از ۲۰ دقیقه می‌گذرد نیز ۱۰ تومان اضافی باید پردازد (یعنی در صورتی که مکالمه ۲۲ دقیقه طول بکشد باید ۱۱۹ تومان پردازد). در صورتی که طول مکالمه‌ی این فرد از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی کند، مشخص کنید کدام گزینه برای وی مناسب‌تر است در صورتی که:

۱. میانگین زمان مکالمه‌ی وی ۱۰ دقیقه باشد.

۲. میانگین زمان مکالمه‌ی وی ۱۵ دقیقه باشد.

راهنمایی: برای مقایسه‌ی گزینه‌ها از امید ریاضی استفاده کنید.

سؤال ۵.

یک بوم‌شناس می‌خواهد در یک محوطه نمونه‌برداری دایروی با توزیع یکنواخت نقطه‌ای را مشخص کند. فرض کنید $(x, y) \sim (X, Y)$ مختصات این نقطه باشد. اگر مرکز دایره در $(0, 0)$ بوده و شعاع دایره نیز R باشد،

الف) احتمال آنکه نقطه انتخاب شده در فاصله $\frac{R}{4}$ از مرکز دایره باشد چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هم y و هم x هر دو از ۰ حداکثر $\frac{R}{4}$ فاصله داشته باشد چقدر است؟

پ) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y چیست؟

ت) آیا این دو متغیر مستقلند؟

سؤال ۶.

دو تاپیست با یکدیگر بر سر سریع‌تر تایپ کردن مسابقه می‌دهند. فرض کنید متغیر X و متغیر Y به ترتیب نمایان‌گر تعداد اشتباهات تایپی این دو تاپیست باشد. اگر اشتباهات این دو تاپیست به یکدیگر ارتباطی نداشته و توزیع احتمالی این دو متغیر نیز توزیع پواسون با پارامتر μ_1 و μ_2 باشند:

(الف) تابع احتمال مشترک این دو متغیر چیست؟

(ب) احتمال آنکه حداکثر یک اشتباه در مجموع هر دو متن تایپ شده رخ داده باشد چقدر است؟

(پ) یک عبارت کلی برای احتمال آنکه مجموع تعداد ایرادات تایپی در متن تایپ شده توسط هر دو تایپیست برابر عدد k باشد بنویسید.

سؤال ۷.

میانگین و انحراف معیار نشست سه پایه شرقی، میانی و غربی یک پل براساس جدول زیر است (اعداد برحسب سانتی متر هستند). می توان پذیرفت که نشست ها توزیع نرمال دارند و مستقل از هم هستند.

پایه	میانگین	انحراف معیار
شرقی	۱/۰	۰/۳
میانی	۱/۵	۰/۵
غربی	۱/۰	۰/۳

(آ) احتمال این که مقدار نشست بیشینه از ۲ سانتی متر بیشتر شود چقدر است؟ (اگر مقدار نشست حداقل یکی از پایه های پل بیشتر از ۲ سانتی متر شود، آنگاه کل پل هم بیشتر از ۲ سانتی متر نشست خواهد داشت.)

(ب) مقدار نشست مجاز پایه میانی پل را چنان تعیین کنید که احتمال افزایش نشست این پایه از مقدار مجاز تعیین شده به ۰/۰۰۲ محدود گردد.

سؤال ۸.

اختیاری: این تمرین تحویل ندارد. در صورت تمایل برای بحث و گفتگو پیرامون این تمرین، با ایمیل behzad.shayegh@ut.ac.ir در ارتباط باشید.

بخش هفتم سری تمرینات کامپیوتری با موضوع مدل بیزی با دیگر توزیع ها را می توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

سؤال ۹.

سری هشتم تمرینات کامپیوتری با موضوع تخمین توزیع دوجمله ای به کمک توزیع های نرمال و پواسون را می توانید از طریق این لینک^۲ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA4_S8_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید. در تکمیل کدها، از حلقه های تکرار استفاده نکنید.
 - پاسخ سوالاتی که در متن فارسی مطرح و بدون پاسخ رها شده اند را در همان سلول اضافه کنید.
 - فایل کد خود را با ایمیل gelammv6@gmail.com با دسترسی Edit به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

¹https://colab.research.google.com/drive/1opodKXSJkV_I_P0tsvLDkr14KH_ZmhVISb?usp=sharing

²<https://colab.research.google.com/drive/12fmQ6VyKGFYQV3SM4mzZp91P3-t1b004?usp=sharing>