به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده برق و کامپیوتر

درس آمار و احتمال

تمرین شماره۳

دستیاران آموزشی:

سهیل ذبیخش

امیرحسین عباسکوهی

علی الهی

مهر ماه ۱۳۹۹

بخش اول – مد

مد یک متغیر تصادفی گسسته مانندXکه $p(x)$تابع جرمی احتمال آن باشد، آن x ای می باشد که برای آن $p(x)$ بیشینه باشد(یعنی بیشترین احتمال را داشته باشد). مد متغیر تصادفی Xرا x^*می نامیم.

الف) اگر $X \sim Bin(n,p)$باشد، با در نظر گرفتن نسبت $\frac{b(x+1;\, n,p)}{b(x;\, n,p)}$نشان دهید مقدار $b(x;\, n,p)$توسط مقدار x تا زمانی که $x < np - (1-p)$باشد با افزایش xافزایش می یابد. نتیجه بگیرید که x^*عدد صحیحی است که برای آن داریم: $(n+1)p - 1 \le x^* \le (n+1)p$(دقت کنید این بخش با اثبات بخش اول ثابت می شود و نیازی به اثبات چیز خاصی برای بخش دوم نیست)

ب) نشان دهید که اگر Xتوزیع پواسون با پارامتر μداشته باشد، مد بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از μمیباشد. نشان دهید اگر μعدد صحیح باشد، μو$\mu - 1$هر دو مد هستند.

$$b(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ,x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & ,\text{otherwise.} \end{cases}$$

راه حل:

الف)

با توجه به نسبت داده شده:

$$\frac{b(x+1;\, n,p)}{b(x;\, n,p)} = \frac{\frac{n}{x+1} p^{x+1}(1-p)^{n-x-1}}{\frac{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}} = \frac{(n-x)}{(x+1)} \frac{p}{(1-p)}$$
$$= \frac{np - px}{x - px - p + 1}$$

با توجه به $np - (1-p) > x$داریم: $np > x + (1-p)$

همچنین داریم: $\frac{b(x+1;\, n,p)}{b(x;n,p)} > 1$اگر و تنها اگر: $\frac{np-px}{x-px-p+1} > 1$ که برابر است با:

$$np - px > x - px - p + 1$$
$$np > x + (1-p)$$

بنابراین تابع جرمی احتمال با افزایش xبه شرط $x < np - (1-p)$افزایش می یابد که بر اساس آن نتیجه میگیریم که x^*عدد صحیحی بین مقادیر یاد شده می باشد.

ب)

برای متغیر تصادفی Xبا تابع جرمی احتمال:

$$p(x;\mu) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}$$

برای $x = 0,1,2,\ldots$ گفته می شود که دارای توزیع پواسون با پارامتر $\mu > 0$ می باشد.

در ابتدا ثابت می کنیم که تابع جرمی احتمال با $x < \mu - 1$ افزایش می یابد:

$$\frac{p(x+1;\ \mu)}{p(x;\ \mu)} = \frac{e^{-\mu}\dfrac{\mu^{x+1}}{(x+1)!}}{e^{-\mu}\dfrac{\mu^x}{x!}} = \frac{\mu}{(x+1)}$$

این نسبت بزرگتر از یک است اگر:

$$\mu > x+1 \text{ و } x < \mu - 1$$

پس زمانی که تابع جرمی احتمال با $x < \mu - 1$ افزایش می یابد، ما می توانیم نتیجه گیری کنیم که مد بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از μ می باشد.

حال فرض کنید که پارامتر μ عدد صحیح باشد، بنابر بخش اول، $\mu - 1$ مد می باشد، حال داریم:

$$p(\mu;\mu) = p(\mu - 1;\mu)$$

که از آن نتیجه می شود که μ و $\mu - 1$ هر دو مد هستند.

بخش دوم ـ موفقیت یا شکست

یک پیشامد موفقیت یا شکست(Hit or Miss) با احتمال موفقیت p مرتبا تکرار می‌شود. پیشامدها در صورت مشاهده‌ي N موفقیت پیاپی به پـایـان می‌رسند. متغیر تصادفی X را برابر تعداد پیشامدها تا قبل از پایان یافتن آن‌ها در نظر بگیرید. تابع جرم احتمال را برای حالتی که $N = 2$ است، بر حسب P محاسبه کنید.

راه حل:

موفقیت را با H و شکست را با M نشان می‌هیم. برای $N = 2$ داریم:

$$P(X = 2) = P(HH) = p^2$$

$$P(X = 3) = P(MHH) = (1-p)p^2$$

از اینجا به بعد سه پیشامد پایانی باید به MHH برسد.

$$P(X = 4) = P(MMHH\ or\ HMHH) = (1-p)p^2$$

$$P(X = 5) = P(MMMHH\ or\ MHMHH\ or\ HMMHH) = (1-p)p^2(1 - P(X=2))$$

$$P(X = 6) = P(\ldots MHH) = (1-p)p^2(1 - [P(X=2) + P(X=3)])$$

$$P(X=7) \;=\; P(....MHH) \;=\; (1-p)p^2(1-[P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)])$$

...

بدین ترتیب تابع جرم احتمال به صورت بازگشتی محاسبه می‌شود.

بخش سوم – هارد دیسک

یک هارد-درایو از یک بازوی مکانیکی و ۱۰ نوار هم‌مرکز تشکیل شده است. نوارها از بیرون به داخل از شماره ۱ تا ۱۰ نام‌گذاری شده اند. بازوی مکانیکی باید دائما بر روی نوار ها حرکت کند تا بتواند اطلاعات موجود در نوار های مختلف را بخواند. p_i $(\,i \;=\; \{1,2,\ldots,10\}\,)$ را احتمال آن فرض می‌کنیم که درخواست برای اطلاعات، بازو را روی نوار iام ببرد و متغیر تصادفی X را تعداد نوارهایی که بازوی مکانیکی برای رسیدن به نوار مورد نظر از روی آن‌ها عبور کرده در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه درخواست برای تغییر موقعیت بازو به نوار iام از موقعیت فعلی بازو مستقل باشد، تابع جرم احتمال را به صورت پارامتری بر حسب p_i ها بدست آورید. (دقت داشته باشید که در محاسبه متغیر تصادفی X، نواری که بازوی مکانیکی روی آن وجود دارد، در نظر گرفته نمی‌شود. $X \;=\; \{0,1,\ldots,9\}$)

راه حل:

$$P(X \;=\; k) \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{10} P(X \;=\; k \;\cap\; arm\, on\, track\; i)$$

از آنجایی که درخواست برای تغییر موقعیت بازو به نوار iام از موقعیت فعلی بازو مستقل است، پس p_i نه‌تنها احتمال درخواست های بعدیست بلکه احتمال حضور بازو روی نوار iام نیز هست. حال عبارت بالا را طبق رابطه احتمال شرطی تفکیک می‌کنیم.

$$\sum_{i\,=\,1}^{10} P(X \;=\; k \;\cap\; arm\, on\, track\; i) \;=\; P(X \;=\; k)\,.\;p_i$$

$$=\sum_{i\,=\,1}^{10} P(next\; track\; would\; be\; k+i\; or\; k-i)\,.\;p_i$$

$$P(X \;=\; i) \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{10} [p_{k+i} \;+\; p_{k-i}]\,.\,p_i$$

بخش چهارم – دستگاه خرازی

پرویز به تازگی وارد صنعت خرازی شده و یک دستگاه برای رنگ زدن پارچه‌هایش خریداری کرده. چون در اول کار پرویز پول زیادی نداشت ، مجبور شد یک دستگاه رنگ زنی ارزان بخرد و این دستگاه

بعضا چند قطره رنگ اضافی روی پارچه می‌ریزد. تعداد قطرات رنگ اضافی ریخته شده بر هر پارچه از توزیع پواسون با میانگین μ_1 به دست می آید. بعد از مدتی که کار پرویز پیشرفت میکند تصمیم میگیرد ماشینی جدید خریداری کند که تعداد قطرات رنگ اضافی که روی پارچه می اندازد از توزیع پواسون با میانگین μ_2به دست می آید.

حال اگر ظرفیت انجام کار هر دو دستگاه یکی باشد (تعداد پارچه‌های رنگ شده در هر روز برای هر دو دستگاه برابر است) احتمال این که پارچه ای که از این کارخانه بیرون میاید X قطره رنگ داشته باشد از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$p(x;\mu_1,\mu_2) = .5\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^x}{x!} + .5\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^x}{x!} \qquad x = 1, 2, ...$$

الف) مطمئن شوید که تابع $p(x;\mu_1,\mu_2)$ یک pmf درست است(همیشه مثبت است و جمع حالات صفر است)

ب) به طور میانگین روی هر پارچه چند قطره رنگ وجود دارد؟

ج) واریانس تعداد قطرات رنگ را بیابید

د) اگر دستگاه اول ۶۰ درصد کار را انجام دهد و دستگاه دوم ۴۰ درصد، pmf جدید را بیابید

راه حل:

الف)

میدانیم که $P(x) = \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^x}{x!}$ یک pmf درست است و هر دو شرط را دارا میباشد.

جمع دو عدد مثبت همیشه مثبت است و همچنین

$$\sum_{i=0}^{\infty}.5\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} + .5\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^i}{i!} = .5\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} + .5\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^i}{i!} = .5 + .5 = 1$$

ب)

میدانیم که امید ریاضی توزیع پواسون $\sum_{i=0}^{\infty} i\,\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!}$ است که برابر μ_1 است

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i(.5\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} + .5\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^i}{i!}) = .5\sum_{i=0}^{\infty} i\,\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} + .5\sum_{i=0}^{\infty} i\,\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^i}{i!} = \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$$

ج)

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2(.5\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} + .5\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^i}{i!}) = .5\sum_{i=0}^{\infty} i^2\,\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} + .5\sum_{i=0}^{\infty} i^2\,\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^i}{i!}$$

با توجه به این که واریانس توزیع پواسون با میانگین λ برابر λ است:

$$if\ Y \sim Poi(\lambda)\ then\ var(Y) = \lambda = E[Y^2] - E[Y]^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} - \lambda^2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow E[X^2] = .5\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} + .5\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\mu_2}\mu_2^i}{i!} = .5(\mu_1 + \mu_2 + \mu_1^2 + \mu_2^2)$$

$$var(X) = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2}$$

د)

طبق قضیه احتمال کل داریم:

$$p(x;\mu_1,\mu_2) = p(x|first\ device)p(first\ device) + p(x|second\ device)p(second\ device)$$

$$p(first\ device) = .6; p(second\ device) = .4$$

$$p(x|first\ device) = e^{-\mu_1}\mu_1^x\ ;\ p(x|second\ device) = e^{-\mu_2}\mu_2^x$$

$$p(x;\mu_1,\mu_2) = .6\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^x}{x!} + .4\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^x}{x!}$$

بخش پنجم- پواسون مانند

تابع جرمی متغیر تصادفی شبه پواسون Xبه صورت زیر تعریف می شود:

$$P_X(x) = k\frac{e^{-\theta}\,\theta^x}{x!} : x = 1,2,3,...$$

الف) مقدار ثابت kبر حسب پارامتر θمشخص کنید.

ب) اگر میانگین Xبرابر با 2.313035 باشد، احتمال این که مقدار Xحداکثر برابر با 5 باشد چقدر است؟

پ) انحراف معیار متغیر Xبرای میانگین داده شده در قسمت (ب) چقدر است؟

راه حل:

الف)

هدف پیدا کردن kمی باشد. برای اینکار ابتدا به ویژگی های یک تابع جرمی احتمال میپردازیم. یک تابع جرمی احتمال ویژگی های زیر را دارد:

$$p(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = 1$$

بر اساس ویژگی دوم میتوان نوشت:

$$\sum_{x=1}^{\infty} k\frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!} = 1$$

$$\Rightarrow ke^{-\theta}\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\theta^{x}}{x!} = 1$$

$$\Rightarrow ke^{-\theta}(e^{\theta}-1) = 1$$

$$\Rightarrow k - ke^{-\theta} = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{1-e^{-\theta}}$$

ب)

با توجه به داده های مسئله داریم: $\theta = \mu = 2.313035$

از طرفی از بخش (الف) داریم: $k = \frac{1}{1-e^{-\theta}}$

بنابراین مقدار p را به ازای مقادیر 1 تا 5 محاسبه می کنیم:

$$p(1) = \frac{1}{1-e^{-2.313035}}\frac{e^{-2.33035}2.313035^{1}}{1\,!} \approx 0.254$$

$$p(2) = \frac{1}{1-e^{-2.313035}}\frac{e^{-2.33035}2.313035^{2}}{2\,!} \approx 0.294$$

$$p(3) = \frac{1}{1-e^{-2.313035}}\frac{e^{-2.33035}2.313035^{3}}{3\,!} \approx 0.227$$

$$p(4) = \frac{1}{1-e^{-2.313035}}\frac{e^{-2.33035}2.313035^{4}}{4\,!} \approx 0.131$$

$$p(5) = \frac{1}{1-e^{-2.313035}}\frac{e^{-2.33035}2.313035^{5}}{5\,!} \approx 0.061$$

همچنین برای پیشامد های جدا از هم داریم: $P(A\ or\ B) = P(A) + P(B)$

پس در اینجا داریم:

$$P(X \le 5) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)$$

$$= 0.254 + 0.294 + 0.227 + 0.131 + 0.061 = 0.967$$

پ)

برای توزیع پواسون با میانگین μ، واریانس هم برابر با μمی باشد، که همان امید ریاضی $(X-\mu)^2$می باشد:

$$poi(X = x) = \frac{\mu^{x}e^{-\mu}}{x!} : x = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \mu$$

حال با جایگذاری θبه جای μداریم:

$$\sum_{x=0}^{\infty}(x-\theta)^2\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = \theta$$

حال ترم $x = 0$را از مجموع خارج می کنیم:

$$(0-\theta)^2\frac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} + \sum_{x=1}^{\infty}(x-\theta)^2\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = 1$$

$$\theta^2 e^{-\theta} + \sum_{x=1}^{\infty}(x-\theta)^2\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}(x-\theta)^2\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = 1-\theta^2 e^{-\theta}$$

حال واریانس را محاسبه می کنیم که در واقع همان امید ریاضی $(X-\mu)^2$می باشد:

$$\sigma^2 = \frac{1}{1-e^{-2.313035}}\left(1-2.313035^2 e^{-2.313035}\right) \approx 0.522229$$

پس انحراف معیار برابر خواهد بود با:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.522229} \approx 0.7229$$

سوال ششم – شرط بندی

در یک بازی شرط بندی شما می‌توانید بر روی یکی از کارت های سفید یا سیاه شرط ببندید. برای ورود به بازی باید یک ژتون پرداخت کنید. در صورت برد، علاوه بر ژتون پرداخت شده یک ژتون جایزه می‌گیرید و در صورت باخت، ژتون پرداخت شده شما می‌سوزد. همچنین احتمال برد کارت سفید $\frac{۱۸}{۳۸}$و کارت سیاه $\frac{۲۰}{۳۸}$است.

فرض کنید می‌خواهیم با الگوریتم زیر بازی کنید:

در اولین دست بازی، روی کارت سفید شرط ببندید. اگر برنده شدید، جایزه و ژتون اولیه خود را گرفته و بازی را ترک کنید و اگر باختید، دو دست بعد را هم مستقل از نتیجه آن روی کارت سفید شرط ببندید.

متغیر تصادفی X را برابر تعداد ژتون هایی که در نهایت کسب کردید فرض کنید. (این مقدار می‌تواند منفی باشد)

الف) $P(X > 0)$ را محاسبه کنید.

ب) امید ریاضی و واریانس را برای متغیر تصادفی X پیدا کنید. آیا شرکت در این بازی طبق این الگوریتم منطقی است؟

راه حل:

الف)

در جدول زیر، برد با W و باخت با L مشخص شده است. همچنین $P = \frac{18}{38}$ و $1 - p = \frac{20}{38}$است.

State	Winnins	Prob.
W - -	+1	P
L W W	+1	$(1-P)P^2$
L W L	-1	$P(1-P)^2$
L L W	-1	$P(1-P)^2$
L L L	-3	$(1-P)^3$

$$P(X > 0) = P + (1-P)P^2 = 0.5917$$

ب) بازی طبق این الگوریتم منطقی نیست زیرا امید ریاضی برد منفی است.

$$E[X] = P(+1) + (1-P)P^2(+1) + P(1-P)^2(-1) + P(1-P)^2(-1) + (1-P)^3(-3)$$
$$= -0.108$$

$$E[X^2] = P(+1) + (1-P)P^2(+1) + P(1-P)^2(+1) + P(1-P)^2(+1) + (1-P)^3(+9)$$
$$= +2.166$$

$$var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = +2.15$$

بخش هفتم – مسابقه سکه

فرض کنید سکه ای داریم که آن را به صورت متوالی پرتاب میکنیم(هر دو پرتابی مستقل از هم هستند)،این سکه به احتمال p شیر و به احتمال $1 - p$ خط می‌آید. فرض کنید هر باری که سکه بلافاصله بعد از یک شیر،خط بیاید ما ۱ تومان برنده می شویم. اگر R مجموع پولی باشد که ما در یک مسابقه با n بار پرتاب برنده شده ایم امید ریاضی و واریانس R را بیابید.

راه حل:

متغیر شاخص I_i را تعریف میکنیم میزان پولی که در پرتاب i برنده می‌شویم. و همچنین $R = \sum_{i=1}^{n} \quad I_i$.

در حالت کلی امید ریاضی جمع با جمع امید ریاضی برابر است و این قضیه به مستقل بودن متغیرها ارتباطی ندارد.

$$E[R] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i]$$

$$E[I_i] \;=\; i\text{پرتاب در شدن برنده احتمال}$$

$$E[I_i] = p(1-p)$$

$$E[R] = np(1-p)$$

در محاسبه‌ی واریانس اوضاع پیچیده تر است و چون متغیر ها از هم مستقل نیستند نمی‌توانیم بگوییم که جمع واریانس‌ها است

$$var(R) = E[R^2] - E[R]^2$$

$$E[R^2] = E[(I_1 + \ldots + I_n)^2] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i^2] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1; j \neq i}^{n} E[I_i I_j]$$

$$E[I_i^2] = p(1-p)$$

$$E[I_i I_j] = 0 \; else \;\rightarrow\; E[I_i I_j] = p^2(1-p)^2 if \; |i-j| = 1 \;\rightarrow$$

تعداد جملاتی که در آنها $|i-j| = 1$ است برابر $2(n-1)$ است و کل جملات دیگر برابر $n^2 - n$ است پس در مجموع:

$$E[R^2] \;=\; np(1-p) + (n^2 - 3n - 2)p^2(1-p)^2$$

$$var(x) = np(1-p) + (n^2 - 3n - 2)p^2(1-p)^2 \; - n^2p^2(1-p)^2$$

$$var(x) = np(1-p) - (3n-2)p^2(1-p)^2$$

بخش هشتم – محاسبه امید ریاضی

اگر $X \sim Poi(\lambda)$، امید ریاضی متغیرهای تصادفی $Y = 2^X$ و $Z = \frac{1}{X+1}$ را محاسبه کنید.

راه حل:

طبق قضیه‌ی اساسی امید ریاضی :

$$Y = g(X) \Rightarrow E[Y] = \sum_{i} g(x_i)P_X(x_i)$$

$$g(x) = 2^x \quad ; \quad P_x(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[Y] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\lambda}e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^i}{i!} = e^{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^i}{i!}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت جلوی سیگما جمع کل احتمال یک توزیع پواسون با میانگین 2λ است و میدانیم که جمع تمام احتمال ها یک میشود پس:

$$E[Y] = e^{\lambda}$$

برای بخش دوم داریم:

$$Z = \frac{1}{X+1}$$

$$E[Z] = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^i}{i!} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!}$$

با تغییر متغیر $k = i + 1$ داریم:

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$$