



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر آمار و احتمال مهندسی

تمرین کتبی پنجم
موعد تحویل: یکشنبه ۱۰ آذر

۱. در درس شبکه می بینید که اگر دو بسته داده (packet) با اختلاف زمانی کوچک δ به یک گذرنده برسند، اصطلاحاً این دو بسته داده برخورد می کنند و گیرنده هیچ یک از دو بسته را دریافت نمی کند. فرض کنید زمان رسیدن دو بسته داده به یک گیرنده خاص مستقل از هم و دارای توزیع یکنواخت در بازه 0 و T باشد به عبارتی دیگر $X \sim U(0, T)$ و $Y \sim U(0, T)$.
(الف) توزیع مشترک X و Y را به دست آورید.
(ب) احتمال برخورد دو بسته داده را به صورت تابعی از T و δ به دست آورید.
۲. یک مولد تولید اعداد تصادفی داریم که اعداد صحیحی به صورت مستقل از هم و در بازه $[1, 5]$ تولید میکند. از این مولد برای تولید یک دنباله n تایی از اعداد صحیح استفاده میکنیم. فرض کنید X و Y به ترتیب تعداد ۱ها و ۵های تولید شده در این دنباله n تایی باشد. $Cov(X, Y)$ و $\rho(X, Y)$ را محاسبه کنید
۳. (الف) فرض کنید B دارای توزیع $Beta(\alpha, \beta)$ باشد. توزیع $1 - B$ به چه صورت خواهد بود
(ب) نشان دهید اگر $X \sim U(0, 1)$ و $X^{\frac{1}{\alpha}}$ دارای توزیع $Beta(\alpha, 1)$ خواهد بود
۴. دو متغیر تصادفی X ، Y به صورت $X = V + W$ ، $Y = V + Z$ تعریف میشوند که V ، W و Z متغیرهای تصادفی مستقل از هم و با توزیع یکسان $Poi(\lambda)$ هستند.
(آ) $Cov(X, Y)$ را محاسبه کنید.
(ب) آیا X ، Y مستقل از هم هستند؟ آیا این دو متغیر به شرط V مستقل از یک دیگرند؟
(ج) توزیع جرمی مشترک X و Y را پیدا کنید.
۵. دو متغیر تصادفی مستقل $V \sim U(0, 2\pi)$ و $W \sim exp(1)$ را در نظر بگیرید. تعریف می کنیم دو متغیر $X = \sqrt{2W} \cos(V)$ و $Y = \sqrt{2W} \sin(V)$.
(آ) توزیع مشترک X و Y را پیدا کنید.
(ب) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟
(ج) توزیع حاشیه ای X و Y را پیدا کنید.
۶. فرض کنید U_1 ، U_2 و U_3 سه متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $U(0, 1)$ باشد. فرض کنید $L = \min\{U_1, U_2, U_3\}$ و $M = \max\{U_1, U_2, U_3\}$.
(آ) CDF و PDF حاشیه ای M را بیابید.
(ب) CDF و PDF مشترک L و M را محاسبه کنید
(ج) چگالی شرطی M به شرط L را حساب کنید.
۷. فرض متغیر تصادفی X_n دارای توزیع $Bin(n, p_n)$ است که $np_n = \lambda$ یک ثابت است. متغیر تصادفی X دارای توزیع $Poi(\lambda)$ است. نشان دهید که تابع مولد گشتاور X_n با افزایش n به تابع مولد گشتاور X میل می کند.
۸. اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد، متغیر تصادفی $Y = e^X$ را یک متغیر $Log - Normal$ می نامیم. میانگین، واریانس و گشتاور مرتبه n ام را با استفاده از تابع مولد گشتاور X بیابید.

۹. تابع توزیع مشترک متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر می باشد:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 4x + y & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

فرض کنید A پیشامد $\{Y \leq \frac{1}{2}\}$ باشد.

(آ) مقدار $P(A)$ چقدر است؟

(ب) حاصل $f_{X|A}(x)$ و $f_{Y|A}(y)$ و $f_{X,Y|A}(x, y)$ چیست؟

(ج) توابع چگالی شرطی $f_{X|Y}$ و $f_{Y|X}$ را محاسبه کنید.

(د) اگر متغیر تصادفی $Z = \frac{X}{Y}$ تعریف شود ، تابع چگالی احتمال Z را بیابید.