دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین ششم ــ نامساوی چبیشف، قضیه حد مرکزی، نمونه‌برداری

طراح: نفیسه مقنی زاده

سوپروایزر: سروش مس‌فروش مشهد

تاریخ تحویل: ۱۷ دی ۱۴۰۲

۱. نامساوی چبیشف — ۲۰ نمره

اگر X یک متغیر تصادفی نرمال باشد احتمال $p(|X-\mu_x|<k\sigma_x)$ را با استفاده از توزیع نرمال و نامساوی چبیشف به ازای مقادیر $k=۱,۲,۳,۴$ به دست آورید. مقدارهای به دست آمده از هر دو روش را به ازای k های مختلف مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ :

ابتدا مقدار احتمال را برای متغیر تصادفی نرمال X محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} p(|X-\mu_x|<k\sigma_x) &= p(-k<\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}<k) \\ &= N_Z(k)-N_Z(-k) = ۲N_Z(k)-۱ \end{aligned}$$

حال در جدول زیر به ازای مقادیر مختلف k از رابطه بالا و قاون چبی‌شف استفاده می‌کنیم.

k	$2N_Z(k)-1$	$1-\frac{1}{k^2}$
1	0.6826	0
2	0.9546	0.75
3	0.9974	0.8889
4	1	0.9334

همانطور که مشخص است با افزایش k اختلاف این احتمال در دو حالت مختلف کمتر و در واقع خطا کمتر شده است.

۲. نامساوی چبی‌شف در حالت تساوی — ۲۰ نمره

فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر باشد:

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{k^۲-۱}{k^۲} & x=۰, k\geq ۱ \\ \frac{۱}{۲k^۲} & x=-k,k \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

مطلوبست:

الف) محاسبه μ_x,σ_x (۱۰ نمره)

ب) محاسبه احتمال $p(|X-\mu_x|<k\sigma_x)$ به کمک تابع احتمال و نامساوی چبی‌شف (۱۰ نمره)

پاسخ :

الف)

$$\mu_x = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)x_i = ۰ \times \frac{k^۲ - ۱}{k^۲} + k \times \frac{۱}{۲k^۲} + (-k) \times \frac{۱}{۲k^۲} = ۰$$

$$E[X^۲] = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)x_i^۲ = ۰ \times \frac{k^۲ - ۱}{k^۲} + k^۲ \times \frac{۱}{۲k^۲} + (-k)^۲ \times \frac{۱}{۲k^۲} = ۱$$

$$\rightarrow \sigma_x^۲ = E[X^۲] - E^۲[X] = ۱ - ۰ = ۱$$

$$\rightarrow \sigma_x = ۱,\ \ \mu_X = ۰$$

ب) ابتدا احتمال دقیق را محاسبه می‌کنیم

$$p(|X - \mu_x| < k\sigma_x) = p(|X| < k) = p(-k < X < k) = p(X = -k) + p(X = k) = \frac{۱}{۲k^۲} + \frac{۱}{۲k^۲} = \frac{۱}{k^۲}$$

طبق قانون چبی‌شف رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$p(|X - \mu_x| < k\sigma_x) \leq \frac{۱}{k^۲}$$

بنابراین در این حالت به خصوص مقدار دقیق احتمال با مقدار بدست آمده از نامساوی چبی‌شف برابر می‌باشد و حالت تساوی رخ داده است.

## ۳. قضیه حد مرکزی		۲۵ نمره

یک دانشجو در ترم تابستان ۲ درس اخذ کرده است فرض کنید نمره های درس اول دارای توزیع نرمال با معدل ۱۰۰ و انحراف معیار ۸ و نمره های درس دوم نیز نرمال با معدل ۸۰ و واریانس ۳۶ است و نمره های دو درس از هم مستقل است.
الف) اگر بدانیم مجموع نمرات دو درس دانشجو از ۱۷۰ بیشتر بوده است، احتمال آنکه مجموع نمرات وی کمتر از ۲۰۰ باشد چقدر است؟ (۱۵ نمره)
ب) اگر پنج دانشجو به تصادف انتخاب شوند احتمال آنکه حداقل ۲ نفر از آنها مجموع نمراتشان از ۱۸۰ کمتر شد چقدر است؟ (۱۰ نمره)

پاسخ :

الف) فرض کنید:
$X_۱$:متغیر تصادفی نمره درس اول
$X_۲$: متغیر تصادفی نمره درس دوم
Y: مجموع نمرات
بنابراین Y نیز دارای توزیع نرمالی است با میانگین و واریانس زیر:

$$\mu_Y = \mu_{X_۱} + \mu_{X_۲} = ۱۰۰ + ۸۰ = ۱۸۰$$

$$\sigma_Y = \sigma_{X_۱} + \sigma_{X_۲} = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$$

در قسمت الف مطلوب است محاسبه احتمال شرطی

$$p(Y < ۲۰۰ | Y > ۱۷۰) = \frac{p(۱۷۰ < Y < ۲۰۰)}{p(Y > ۱۷۰)} = \frac{p(-۱ < \frac{Y-\mu}{\sigma} < ۲)}{p(\frac{Y-\mu}{\sigma} > -۱)}$$

$$= \frac{p(-۱ < Z < ۲)}{p(Z > -۱)} = \frac{\phi(۲) - \phi(-۱)}{۱ - \phi(-۱)} = \frac{۰/۸۱۸۵}{۰/۸۴۱۳} = ۰/۹۷۳$$

ب)احتمال آنکه مجموع نمرات یک دانشجو از ۱۸۰ کمتر شود برابر است با:

$$p(Y < ۱۸۰) = p(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{۱۸۰ - ۱۸۰}{۱۰}) = p(Z < ۰) = \phi(۰) = ۰/۵$$

حال فرض کنید متغیر تصادفی W تعداد دانشجویان از بین ۵ دانشجوی منتخب که مجموع نمراتشان از ۱۸۰ کمتر است، باشد. بنابراین W دارای توزیع دو جمله ای است با پارامترهای $p = ۰/۵, n = ۵$ در نتیجه:

$$p(w) = \binom{۵}{w}(۰/۵)^w(۰/۵)^{۵-w} \longrightarrow p(W > ۲) = \binom{۵}{۳}(۰/۵)^۵ + \binom{۵}{۴}(۰/۵)^۵ + \binom{۵}{۵}(۰/۵)^۵ = ۰/۵$$

۴. نااریب بودن تخمین‌گر — ۲۰ نمره

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل از توزیعی دلخواه با میانگین مشترک μ و واریانس $Var(X) = \sigma_۱^۲$ و $Var(Y) = \sigma_۲^۲$ باشند. مطلوب است تعیین مقادیری از a, b به طوری که اولا متغیر تصادفی $Z = aX + bY$ برآورد نااریب برای پارامتر μ و ثانیا Z دارای کمترین واریانس در کلاس برآوردگرهای نااریب باشد.

پاسخ :

برای نااریب بودن Z باید بررسی شود که $E(Z) = \mu$:

$$E(aX + bY) = \mu \Rightarrow aE(X) + bE(Y) = \mu \Rightarrow a\mu + b\mu = \mu \Rightarrow a + b = ۱ \quad (*)$$

اکنون واریانس Z را بدست می آوریم:
از آنجاییکه متغیرهای X, Y از هم مستقل اند داریم:

$$Var(Z) = Var(aX + bY) = a^۲Var(X) + b^۲Var(Y)$$

طبق رابطه ی $*$ داریم:$b = ۱ - a$

$$Var(Z) = a^۲\sigma_۱^۲ + (۱-a)^۲\sigma_۲^۲$$

برای اینکه واریانس کمترین شود باید معادله ی $\frac{dVar(Z)}{da} = ۰$ را حل کنیم:

$$۲a\sigma_۱^۲ - ۲(۱-a)\sigma_۲^۲ = ۰ \Rightarrow a = \frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲} \Rightarrow b = \frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲}$$

۵. نمونه برداری — ۱۵ نمره

نمونه‌های تصادفی $X_۱, X_۲, ...X_۹$ با توزیع نرمال $N(۰, ۴)$ را در نظر بگیرید. اگر $\bar{X}, S^۲$ به ترتیب واریانس و میانگین این نمونه تصادفی باشد، مقدار a را طوری تعیین کنید که $p(a.\bar{X} > S) = ۰/۰۵$ باشد.

پاسخ :

$$p(a.\bar{x} > s) = ۰/۰۵ \Longrightarrow p(\frac{\bar{x}}{s} > \frac{۱}{a}) = ۰/۰۵$$

$$\Rightarrow p(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \sqrt{n}(\frac{۱}{a}-\mu)) = ۰/۰۵ \xrightarrow[n=۹]{\mu=۰} p(\frac{\bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{۹}}} > \sqrt{۹}(\frac{۱}{a})) = ۰/۰۵$$

$$\Rightarrow p(t > \frac{۳}{a}) = ۰/۰۵ \to p(t < \frac{۳}{a}) = ۰/۹۵ \to \frac{۳}{a} = ۲/۹۲ \to a = ۱/۰۳$$