دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین صفر ـ ترکیبیات و احتمال شرطی
طراح: ارشیا عطایی نائینی
سوپروایزر: نسا عباسی
تاریخ تحویل: ۲۱ مهر ۱۴۰۲

۱. میز گرد — ۱۰ نمره

۹ نفر از سه کلاس، از هر کلاس سه نفر، به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند به طوریکه :

الف) افراد همکلاسی همگی کنار هم نشسته باشند؟ (۵ نمره)

ب) در مجاورت هر فرد، حداقل یک نفر غیر هم‌کلاس با او نشسته باشد؟ (۵ نمره)

پاسخ :

الف) نشستن همکلاسی ها در کنار یکدیگر برای هر کلاس !۳ حالت دارد. همچنین نشستن این ۳ دسته دور یک میز دارای !۲ حالت است. بنابراین داریم:

$$۳! \times ۳! \times ۳! \times ۲! = ۴۳۲$$

ب) از اصل متمم استفاده می‌کنیم. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ به ترتیب برابر حالاتی باشد که نفرات کلاس اول، کلاس دوم و کلاس سوم پشت سر هم نشسته‌اند. در این‌صورت طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:
$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ + A_۲ + A_۳| =$

$$۳ \times ۳! \times ۶! - ۳ \times ۳! \times ۳! \times ۴! + ۲! \times ۳! \times ۳! \times ۳! = ۱۰۸۰۰$$

حال تعداد کل حالات برابر !۸ است. پس تعداد کل حالت‌های معتبر برابر است با:

$$۸! - ۱۰۸۰۰ = ۲۹۵۲۰$$

۲. کارت بازی — ۱۵ نمره

۴۲ کارت با اعداد ۱ تا ۴۲ با ترتیبی دلخواه در یک دسته قرار دارند. کارت‌های این دسته را از بالا یکی‌یکی رو می‌کنیم تا اولین عدد اول ظاهر شود. به‌طور متوسط چند کارت رو می‌شود؟

پاسخ :

فرض کنید عملیات پخش کردن کارت را بعد از رسیدن به اولین عدد اول تا انتها ادامه بدهیم و قطع نکنیم در این‌صورت از ۴۲ عدد به یک ترتیبی رو خواهند شد. حال از بین اعداد ۱ تا ۴۲، ۱۳ عدد اول است. این ۱۳ عدد ۴۲ کارت را به ۱۴ قسمت تقسیم می‌کنند که طول

این قسمت‌ها را از $x_۱$ تا $x_{۱۴}$ می‌نامیم. حال می‌دانیم که جمع این ۱۴ قسمت در کل برابر است با $۲۹ = ۱۳ - ۴۲$. این چهارده قسمت با هم هیچ تفاوتی ندارند و مقدار میانگین هر کدام با دیگری برابر است. پس مقداری میانگین هرکدام برابر $\frac{۲۹}{۱۴}$است که همان میانگین $x_۱$ است. حال پاسخ سوال یک عدد بیشتر از $x_۱$ است که برابر $\frac{۴۳}{۱۴} = \frac{۲۹}{۱۴} + ۱$ است.

۳. مدادفروشی — ۲۰ نمره

در مغازه مداد فروشی، دو مداد قرمز، دو مداد آبی و دو مداد زرد در ظرفی دربسته وجود دارد. موبد طبق روال زیر، یک مداد برای خود می‌خرد:
ابتدا رنگ دلخواهش را قرمز انتخاب می‌کند و تصمیم می‌گیرد یک مداد بخرد. سپس یک مداد به‌طور تصادفی از ظرف بر می‌دارد. اگر مداد برداشته شده به رنگ دلخواهش باشد، آن را می‌خرد و کار تمام می‌شود. در غیر این‌صورت رنگ دلخواهش را به رنگ آن مداد تغییر می‌دهد و مداد را به داخل ظرف بر می‌گرداند. دوباره یک مداد بر می‌دارد و همین روند را ادامه می‌دهد تا بلاخره یک مداد خریداری شود. احتمال اینکه این مداد قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ :

فرض کنید p احتمال خریدن مدادی باشد که اول انتخاب شده است که همان خواسته سوال نیز است. دقت کنید که احتمال خریدن هر یک از دو مداد دیگر باهم برابر است پس احتمال هر کدام برابر $\frac{۱-p}{۲}$ است.
حال برای محاسبه p دو حالت وجود دارد. یا به احتمال $\frac{۱}{۳}$ مداد همرنگ با انتخاب خود را بر می‌داریم که کار تمام است، یا به احتمال $\frac{۲}{۳}$ مدادی به رنگ غیر مورد علاقه خود را خریداری می‌کنیم و رنگ مورد علاقه خود را به آن تغییر می‌دهیم. حال از این به بعد به احتمال $\frac{۱-p}{۲}$ رنگ مورد علاقه ابتدایی خود را می‌خریم. پس به عبارتی داریم:

$$p = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱ - p}{۲}$$

که نتیجه می‌دهد: $p = \frac{۱}{۲}$

۴. دومینو — ۲۰ نمره

جدول ۳×۲ را در نظر بگیرید که در ابتدا تمامی خانه‌هایش سفید هستند. تا زمانی که دومینویی در جدول وجود دارد که هر دو خانه‌اش سفید است، به احتمال برابر یکی از دومینوها را انتخاب کرده و هر دو خانه آن را سیاه می‌کنیم. به چه احتمالی کل خانه‌های جدول در انتها سیاه می‌شوند؟

پاسخ :

ابتدا احتمال متمم آن را حساب می‌کنیم. اگر دومینوی انتخاب شده در مرحله اول عمودی باشد، در انتها حتما همه خانه‌ها پر می‌شوند. پس دومینوی اول باید افقی باشد که هر چهار دومینوی افقی موجود در شکل متقارن هستند. احتمال این که اولین دومینو افقی باشد برابر $\frac{۴}{۷}$ است. در ادامه از سه دومینوی باقی مانده یکی از آن‌ها فقط باعث می‌شود که در انتها تمامی خانه‌ها پر نشوند. پس احتمال این مرحله $\frac{۱}{۳}$ است. در نتیجه در کل احتمال اینه خانه‌ای سفید بماند برابر: $\frac{۴}{۲۱} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۷}$ است. در نتیجه طبق اصل متمم احتمال اینکه در انتها همه خانه‌ها سیاه شوند برابر است با:

$$۱ - \frac{۴}{۲۱} = \frac{۱۷}{۲۱}$$

۵. شمارش ۲۰ نمره

به چند حالت می‌توان در عبارت ۷ ± ۶ ± ۵ ± ۴ ± ۳ ± ۲ ± ۱ ± مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

پاسخ :

هر حالتی که مجموع مثبت شود، متناظر با یک حالتی است که مجموع منفی شود به این صورت که علامت‌های مثبت و منفی را با یکدیگر عوض می‌کنیم. پس حالاتی را باید بدست بیاوریم که جمع نه مثبت باشد نه منفی و برابر ۰ باشد. در این‌صورت باید اعداد را به دو دسته با جمع برابر تقسیم کنیم و یک دسته را مثبت و دسته دیگر را منفی بگذاریم. چون جمع اعداد ۱ تا ۷ برابر ۲۸ است، تعداد حالت‌هایی را بدست می آوریم که جمع یک مجموعه برابر ۱۴ باشد و شامل عدد ۷ باشد. ۴ حالت وجود دارد:

$$< ۱, ۲, ۴, ۷ >, < ۱, ۶, ۷ >, < ۲, ۵, ۷ >, < ۳, ۴, ۷ >$$

پس در کل ۴ حالت برای افراز به دسته‌های با جمع برابر وجود دارد که هرکدام ۲ حالت برای تعیین مثبت‌ها و منفی‌هایشان وجود دارد. پس جواب برابر است با:

$$\frac{۲^{۷} - ۸}{۲} = ۶۰$$

۶. استخدام ۱۵ نمره

موبد، فاطمه و علی برای استخدام در شرکتی درخواست داده‌اند. نسبت احتمال قبولی آن‌ها در شرکت، ۱ به ۲ به ۴ است و یکی از آن‌ها قبول می‌شود. احتمال اینکه موبد، فاطمه و علی در صورت استخدام بتوانند به این شرکت سود برسانند به ترتیب برابر ۰/۸, ۰/۵, ۰/۳ است. اگر بدانیم پس از استخدام شرکت به سوددهی نرسیده است، احتمال اینکه علی استخدام شده باشد چقدر است؟

پاسخ :

اگر $E_۱, E_۲, E_۳$ به ترتیب احتمال استخدام شدن این سه نفر باشد و X احتمال این باشد که شرکت به سوددهی نرسد، آنگاه داریم:
$E_۱ = \frac{۱}{۷}$ ،$E_۲ = \frac{۲}{۷}$ ،$E_۳ = \frac{۴}{۷}$

$$P(X|E_۱) = ۱ - ۰/۸ = ۰/۲$$
$$P(X|E_۲) = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$
$$P(X|E_۳) = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

حال طبق قضیه بیز داریم:

$$P(E_۳|X) = \frac{P(X|E_۳)P(E_۳)}{P(X|E_۱)P(E_۱) + P(X|E_۲)P(E_۲) + P(X|E_۳)P(E_۳)}$$

$$P(E_۳|X) = \frac{۰/۷ \times \frac{۴}{۷}}{۰/۲ \times \frac{۱}{۷} + ۰/۵ \times \frac{۲}{۷} + ۰/۷ \times \frac{۴}{۷}} = ۰/۷$$