پاسخنامه کوئیز اول

خانواده‌ای دو فرزند دارد. می‌دانیم که یکی از آنها دختری است که در روز شنبه به دنیا آمده است. احتمال این که این خانواده دو دختر داشته باشد چقدر است؟

1/2

1/3

13/27

13/49

23/54

Y: the event that the family has one child who is a girl born on Saturday

X: the event that both children are girls

Given that there are 7 days of the week and there are 49 possible combinations for the days of the week the two girls were born on and 13 of these have a girl who was born on a Saturday, so $P(Y|X) = 13/49$.

P(X) remains unchanged at $1/4$.

To calculate P(Y), there are $14^2 = 196$ possible ways to select the gender and the day of the week the child was born on. There are $13^2 = 169$ ways which do not have a girl born on Saturday and 196 – 169 = 27 which do, so $P(Y) = 27/196$. From Bayes theorem:

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{\left(\frac{13}{49}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{27}{196}} = \frac{13}{27}$$

کیسه‌ای شامل ۴ گوی قرمز و ۶ گوی آبی است. سه گوی را به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال این که این سه گوی هم‌رنگ باشند چقدر است؟

10/28

1/5

1/10

4/7

28/100

$$\frac{\binom{4}{3}+\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{4+20}{120}=\frac{1}{5}$$

یک آزمون تستی دارای ۱۰ سوال ۵ گزینه‌ای است. دانشجویی به این سوالات به صورت تصادفی جواب می‌دهد. احتمال این که به ۲ سوال پاسخ صحیح دهد تقریبا چقدر است؟

1/10

2/10

3/10

4/10

5/10

$$\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8=0.302$$

متغیر تصادفی X با میانگین ۴ مفروض است. می‌دانیم که این متغیر مقادیر ۲ و ۳ و ۵ را اختیار می‌کند و P(X=2)=0.2. واریانس این متغیر چقدر است؟

0.4

1.6

12

2.5

اطلاعات داده شده کافی نیست

$$P(X=3)=a\ ,\qquad P(X=5)=b$$

$$E[X]=2\times 0.2+3a+5b=4\rightarrow\ 3a+5b=3.6$$

$$a+b+0.2=1\rightarrow\ a+b=0.8$$

Solving this system of equations result in: $a=0.2\ , b=0.6$

$$E[X^2]=2^2\times 0.2+3^2\times 0.2+5^2\times 0.6=17.6$$

$$Var(X)=E[X^2]-E[X]^2=17.6-4^2=1.6$$

مینا با یک برنامه کامپیوتری شطرنج بازی می‌کند. در هر بازی او با احتمال 0.6 برنده می‌شود، با احتمال 0.1 می‌بازد و با احتمال 0.3 مساوی می‌کند. بعد از ۱۸ باخت این بازی قفل می‌شود و مینا برای ادامه بازی باید مبلغی به شرکت سازنده پرداخت کند. با فرض مستقل بودن بازی‌ها، به طور متوسط مینا چه تعداد بازی رایگان می‌تواند داشته باشد؟

20

30

60

90

180

$$X \sim NegBin(18,0.1)$$

$$E[X] = \frac{r}{p} = \frac{18}{0.1} = 180$$

سه دوست برای پرداخت هزینه رستوران خود تصمیم می‌گیرند که هر یک سکه‌ای را پرتاب کنند و کسی که نتیجه پرتابش متفاوت از دو نفر دیگر است هزینه را پرداخت کند. اگر نتیجه سه پرتاب یکسان باشد، آنها دوباره سکه‌ها را پرتاب می‌کنند و آن قدر این عمل را ادامه می‌دهند تا فردی که باید هزینه را بپردازد تعیین شود. احتمال این که سکه‌ها بیش از ۴ مرتبه پرتاب شوند چقدر است؟

1/64

1/256

11/256

3/64

3/256

$$P(\text{the same result}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$X \sim Geo\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$P(X > 4) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4)$$

$$= 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{85}{64}\right) = \frac{1}{256}$$

تیراندازی در هر شلیک با احتمال 0.25 و مستقل از دفعات قبلی هدفی را مورد اصابت قرار می‌دهد. در صورت اصابت به هدف وی امتی‌ازی نمی‌گیرد و در صورت عدم اصابت ۲ امتیاز منفی می‌گیرد. اگر متغیر تصادفی X معرف امتیازات وی تا رسیدن به چهارمین اصابت باشد، میانگین X چقدر است؟

-24

-32

-12

-16

-4.5

$$Y \sim NegBin(4,0.25) \to \quad E[Y] = \frac{4}{0.25} = 16$$

$$E[X] = (16-4) \times (-2) + 4 \times (0) = -24$$

در یک بازی با پرتاب تصادفی تاس، به شما به اندازه شماره خال‌ها اسکناس ۱۰۰۰۰ تومانی می‌دهند. بلیط هر بازی باید چند تومان باشد، تا بلیط‌فروش به اندازه 1/4 مبلغ پرداختی سود ببرد؟

22500

37450

43750

47350

60000

$$\left(1+\frac{1}{4}\right) \times E[X] = \frac{5}{4} \times \frac{7}{2} \times 10000 = 43750$$

سه جعبه داریم که در جعبه اول سه مهره سفید و ۵ مهره سیاه، در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، در جعبه سوم ۶ مهره سفید و ۲ مهره سیاه قرار دارند. جعبه‌ای را به تصادف انتخاب کرده و ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. اگر این ۳ مهره شامل یک مهره سفید و ۲ مهره سیاه باشند، احتمال این که جعبه دوم انتخاب شده باشد چقدر است؟

1/5

2/5

1/2

3/5

4/5

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

A: 1 white and 2 black

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

$$P(A|B_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

$$P(A|B_3) = \frac{\binom{6}{1}\binom{2}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{\frac{3}{7} \times \frac{1}{3}}{\frac{15}{28} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{28} \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

در صنعت نساجی، تولیدکننده‌ای به دنبال تعیین تعداد زدگی‌های موجود در ۱۰۰ متر پارچه تولیدی خود است. کدام یک از توزیع‌های زیر مدل مناسب‌تری را برای این تعداد ارائه می‌دهد؟

توزیع دوجمله‌ای منفی

توزیع پواسون

توزیع هندسی

توزیع دوجمله‌ای

توزیع یکنواخت