امتحان پایان‌ترم آمار و احتمال مهندسی

۱. **(۴ نمره)** الف) چه تعداد دنباله باینری $2n$-بیتی متمایز می‌توان ساخت؟

هر بیت دو حالت دارد پس: 2^{2n}

ب) چه تعداد از این دنباله‌ها دقیقاً n بیت صفر دارند؟

n بیت را از 2n بیت انتخاب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم، بقیه یک هستند: $\binom{2n}{n}$

پ) چه تعداد از این دنباله‌ها متقارن هستند؟

n بیت سمت چپ، به طور منحصر به فرد n بیت سمت راست را مشخص میکنند پس: 2^n

ت) در چه تعداد از این دنباله‌ها هیچ دو بیت متوالی برابر با یک نیستند؟

فرض کنید a_n برابر تعداد دنباله‌های n بیتی باشد که هیچ دو بیت متوالی برابر با یک نیستند:

1-bit : {0 , 1} $\rightarrow a_1 = 2$

2-bit : {00 , 01 , 10} $\rightarrow a_2 = 3$

برای a_n می‌توانیم یک رابطه بازگشتی پیدا کنیم. اگر به انتهای یک دنباله (n-1)-بیتی بدون '11' صفر اضافه کنیم، حاصل قطعا دنباله ای بدون '11' خواهد بود. اگر به انتهای دنباله '1' اضافه کنیم، حاصل در صورتی بدون '11' خواهد بود که آخرین بیت دنباله (n-1)-بیتی '1' نباشد. تعداد دنباله‌های (n-1)-بیتی بدون '11' که آخرین بیت آنها صفر است، با تعداد دنباله‌های (n-2)-بیتی بدون '11' برابر است. در نتیجه:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

با توجه به $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$ با دنباله فیبوناچی مواجهیم.

$$F_0 = 1\,, F_1 = 1\,, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \;\rightarrow\; a_{2n} = F_{2n-1}$$

بنابراین تعداد این دنباله‌ها عدد فیبوناچی (2n-1)-ام است.

---

۲. **(۳ نمره)** دو کیسه A و B در اختیار داریم. کیسه A شامل ۵ مهره سبز، ۷ مهره سفید، و ۸ مهره قرمز است. کیسه B شامل ۱۰ مهره سبز، ۵ مهره سفید، و ۵ مهره قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف و با احتمال یکسان انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم.

الف) احتمال این که مهره سبز باشد چقدر است؟

$$P(Green) = P(Green|A)P(A) + P(Green|B)P(B) = \frac{5}{20}\times\frac{1}{2} + \frac{10}{20}\times\frac{1}{2} = \frac{15}{40}$$

ب) اگر مهره سفید باشد، با چه احتمالی کیسه B انتخاب شده است؟

$$P(B|white) = \frac{P(white|B)P(B)}{P(white|A)P(A) + P(white|B)P(B)} = \frac{\frac{5}{20}\times\frac{1}{2}}{\frac{7}{20}\times\frac{1}{2} + \frac{5}{20}\times\frac{1}{2}} = \frac{5}{12}$$

پ) اگر بدون جایگذاری مهره اول، مهره دومی از همان کیسه انتخاب کنیم، احتمال قرمز بودن آن چقدر است؟

$$P(Red_2) = P(Red_2|A)P(A) + P(Red_2|B)P(B)$$

$$P(Red_2|A) = P(Red_2|A, Red_1)P(Red_1|A) + P(Red_2|A, not\ Red_1)P(not\ Red_1|A)$$
$$= \frac{7}{19} \times \frac{8}{20} + \frac{8}{19} \times \frac{12}{20} = \frac{8}{20}$$
Similarly: $P(Red_2|B) = \frac{4}{19} \times \frac{5}{20} + \frac{5}{19} \times \frac{15}{20} = \frac{5}{20}$
$$P(red_2) = \frac{8}{20} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{20} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{40}$$

---

۳. **(۴ نمره)** یک تاس ۶-وجهی ساده در اختیار داریم. عدد حاصل از پرتاب i-ام را با R_i نمایش می‌دهیم. در صورتی که $R_i > i$ به پرتاب تاس ادامه می‌دهیم، در غیر این صورت پرتاب را متوقف می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی N تعداد کل پرتاب‌ها را نشان دهد:

الف) احتمال $P[N > 3]$ را پیدا کنید.

ب) تابع جرمی احتمال N چیست؟

پ) میانگین و واریانس N را محاسبه کنید.

نمی‌توانیم بیشتر از ۶ پرتاب داشته باشیم، زیرا $R_i \leq 6$

$$P(N=1) = P(R_1 = 1) = \frac{1}{6}$$
$$P(N=2) = P(R_1 > 1, R_2 \leq 2) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{18}$$
$$P(N=3) = P(R_1 > 1, R_2 > 2, R_3 \leq 3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$$
$$P(N=4) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{27}$$
$$P(N=5) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{324}$$
$$P(N=6) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times 1 = \frac{5}{324}$$

$$P[N > 3] = \frac{5}{27} + \frac{25}{324} + \frac{5}{324} = \frac{5}{18}$$

$$E[N] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{18} + 3 \times \frac{5}{18} + 4 \times \frac{5}{27} + 5 \times \frac{25}{324} + 6 \times \frac{5}{324} = \frac{899}{324}$$
$$E[N^2] = 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{5}{18} + 9 \times \frac{5}{18} + 16 \times \frac{5}{27} + 25 \times \frac{25}{324} + 36 \times \frac{5}{324} = \frac{2989}{324}$$
$$Var(N) = E[N^2] - E[N]^2 = \frac{160235}{104976}$$

---

۴. **(۷ نمره)** متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع مشترک زیر هستند:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) میانگین و واریانس X را پیدا کنید.

$$E[X] = \int_0^1 \int_y^1 2x \;\; dx\, dy = \int_0^1 (1-y^2) dy = y - \frac{1}{3} y^3 |_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 \int_y^1 2x^2 \;\; dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} y^3\right) dy = \frac{2}{3} y - \frac{1}{6} y^4 |_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

ب) $\mathrm{Cov}(X,Y)$ را محاسبه کنید.

$$E[XY] = \int_0^1 \int_y^1 2xy \;\; dx\, dy = \int_0^1 y(1-y^2) dy = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} y^4 |_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$E[Y] = \int_0^1 \int_y^1 2y \;\; dx\, dy = \int_0^1 2y(1-y) dy = y^2 - \frac{2}{3} y^3 |_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

پ) $\mathrm{Var}(X+Y)$ چقدر است؟

$$E[Y^2] = \int_0^1 \int_y^1 2y^2 \;\; dx\, dy = \int_0^1 2y^2(1-y) dy = \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^4 |_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{2}{36} = \frac{1}{6}$$

ت) تابع چگالی شرطی $f_{X|Y}(x|y)$ را به دست آورید.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{\int_y^1 2\, dx} = \frac{1}{1-y} \;:\; y < x < 1$$

ث) امید ریاضی شرطی $E[X|Y]$ را حساب کنید.

$$E[X|Y=y] = \int x.f(x|y) dx = \int_y^1 \frac{x}{1-y}\, dx = \frac{x^2}{2(1-y)} |_y^1 = \frac{1-y^2}{2(1-y)} = \frac{1+y}{2}$$

$$E[X|Y] = \frac{1+Y}{2}$$

ج) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = X/Y$ را به دست آورید.

از حل دستگاه زیر داریم:

$$z = x/y \ , \qquad w = y$$

$$\rightarrow 0 < w < zw < 1 \rightarrow 0 < w < \tfrac{1}{z} x_1 = zw \ , y_1 = w$$

$$w < wz \rightarrow \ z > 1$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(zw\ , w)}{|1/w|} = 2w$$

$$f_Z(z) = \int_0^{\frac{1}{z}} 2w\, dw = w^2 \,|_0^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \ , \qquad z > 1$$

---

۵. **(۲ نمره)** فرض کنید که تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برابر با $\phi_X(s) = \left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-3}$ باشد. میانگین و واریانس X را پیدا کنید.

$$\phi'_X(s) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-3)\left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-4} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-4} \rightarrow \phi'(0) = E[X] = \frac{3}{2}$$

$$\phi''(s) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(-4)\left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-5} = 3\left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-5} \rightarrow \phi''(0) = E[X^2] = 3$$

$$Var(X) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$