امتحان میان‌ترم درس آمار و احتمال مهندسی

۱. (۲ نمره) در کلاس دیدیم که اگر $P(A|B) > P(A)$ باشد، می‌گوییم پیشامد B از پیشامد A حمایت می‌کند. فرض کنید احتمال همه پیشامدهای A و B و $\bar{A}$ و $\bar{B}$ مثبت باشد. هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت درست بودن اثبات کنید، و در صورت نادرست بودن با مثال نقضی رد کنید.
الف) B از A حمایت می‌کند، اگر و فقط اگر A هم از B حمایت کند.
ب) B از A حمایت می‌کند، اگر و فقط اگر $\bar{B}$ از A حمایت نکند.

الف) **(۱ نمره)**

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} > P(A) \rightarrow P(A\cap B) > P(A)P(B)$$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} > \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

بنابراین گزاره صحیح است و B از A حمایت می‌کند، اگر و فقط اگر A هم از B حمایت کند.

ب) **(۱ نمره)**

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1$$

$$\rightarrow P(B)P(A) + P(\bar{B})\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(A)} = \mathrm{P(B)P(A|B)} + \mathrm{P}(\bar{B})\mathrm{P(A|}\bar{B})$$

$$\rightarrow \ \mathrm{P}(\bar{B})\big(\mathrm{P(A)} - \mathrm{P(A|}\bar{B})\big) = \mathrm{P(B)(P(A|B) - P(A))}$$

بنابراین $P(A|B) > P(A)$ اگر و فقط اگر $P(A) > \mathrm{P(A|}\bar{B})$. پس این گزاره هم صحیح است.

۲. (۴ نمره) در یک بازی سکه‌ای که احتمال شیر آمدن آن p است را $n+1$ بار پرتاب می‌کنیم. برای $2 \le k \le n+1$ ، اگر پرتاب k-ام خط بیاید، در صورتی که پرتاب $(k-1)$-ام شیر آمده باشد، یک دلار جایزه می‌گیریم. فرض کنید متغیر تصادفی R مجموع جوایز کسب شده در این بازی را نمایش بدهد. میانگین و واریانس R را پیدا کنید.
(۲ نمره برای میانگین و ۲ نمره برای واریانس)

متغیر شاخص I_k برای $2 \le k \le n+1$ به این صورت تعریف می‌کنیم که $I_k = 1$ اگر پرتاب $k-1$ شیر و پرتاب k خط بیاید، و در غیر این صورت $I_k = 0$. در نتیجه:

$$\Pr\{I_k = 1\} = p(1-p) \rightarrow \ \ E[I_k] = p(1-p)$$

$$R=\sum_{k=2}^{n+1} I_k \rightarrow \quad E[R]=\sum_{k=2}^{n+1} E[I_k]=np(1-p)$$

برای واریانس نیاز به محاسبه $E[R^2]$ داریم که با توجه به وابستگی I_kها سه حالت زیر باید در نظر گرفته شوند:

$$E[I_k^2]=1^2\times p(1-p)+0=p(1-p)$$

اگر $I_k=1$ باشد، یعنی پرتاب k-ام خط آمده، در نتیجه $I_{k+1}=0$. در نتیجه حاصلضرب I_kI_{k+1} همیشه برابر با صفر می‌شود: $E[I_kI_{k+1}]=0$

برای $l>1$ دو متغیر I_k و I_{k+l} مستقل از هم می‌شوند:

$$E[I_kI_{k+l}]=\Pr\{I_k=1\,,I_{k+l}=1\}=\Pr\{I_k=1\}\Pr\{I_{k+l}=1\}=p^2(1-p)^2$$

$$R^2=\left(\sum_{k=2}^{n+1} I_k\right)^2=\sum_{k=2}^{n+1} I_k^2+2\sum_{k=2}^{n} I_kI_{k+1}+2\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n+1-l} I_kI_{k+l}$$

$$\rightarrow E[R^2]=n\times p(1-p)+0+\left(n^2-n-2(n-1)\right)p^2(1-p)^2$$

$$Var(R)=E[R^2]-E[R]^2=np(1-p)+(n^2-3n+2)p^2(1-p)^2-n^2p^2(1-p)^2$$

$$Var(R)=np(1-p)-(3n-2)p^2(1-p)^2$$

۳. (۳ نمره) دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_1(x)=\begin{cases} a & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$f_2(x)=\begin{cases} be^{-x} & 0\le x\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت $f_X(x)=\frac{1}{2}f_1(x)+\frac{1}{2}f_2(x)$ تعریف می‌شود. شروط لازم بر روی a و b، برای این که $f_X(x)$ یک تابع چگالی احتمال معتبر باشد چیست؟

شرط اول: $f_X(x)$ باید برای همه مقادیر x نامنفی باشد:

$$x>2\rightarrow \quad f_X(x)=\frac{1}{2}f_2(x)=\frac{b}{2}e^{-x}\ge 0\rightarrow \quad b\ge 0$$

$$0\le x\le 2\rightarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{2}e^{-x}\ge 0\ ,b\ge 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2}+\frac{b}{2}e^{-2}\ge 0\rightarrow \quad a\ge -be^{-2}$$

شرط دوم: انتگرال $f_X(x)$ باید برابر با یک شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 a\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} be^{-x}dx \;= a + \frac{b}{2} = 1 \rightarrow a = 1 - \frac{b}{2}$$

از ترکیب این دو شرط داریم:

$$1 - \frac{b}{2} \geq -be^{-2} \rightarrow \;\; 0 \leq b \leq \frac{1}{\frac{1}{2} - e^{-2}} \approx 2.742$$

پس شروط لازم برای a و b عبارتند از:

$$a = 1 - \frac{b}{2}\;, \qquad 0 \leq b \leq 2.742$$

دقت کنید که a می‌تواند منفی باشد.

(۱ نمره برای چک کردن هر یک از دو شرط و ۱ نمره هم برای ترکیب دو شرط)

۴. (۳ نمره) متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(0,1)$ است. متغیر تصادفی $Y = \frac{X}{X+1}$ را در نظر بگیرید.

الف) تابع چگالی احتمال Y را حساب کنید.

ب) امید ریاضی Y چقدر است؟

پ) چارک اول Y را به دست آورید.

(۱ نمره برای هر بخش)

الف)

می‌دانیم که برای y داده شده، اگر معادله $g(x) = y$ دارای جواب‌های x_1، x_2، و ... باشد، خواهیم داشت:

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \rightarrow \frac{x}{x+1} = y \rightarrow \;\; x = xy + y \rightarrow \;\; x(1-y) = y \rightarrow x_1 = \frac{y}{1-y}$$

$$f_X(x_1) = 1 \;:\; 0 \leq x_1 \leq 1 \rightarrow \;\; 0 \leq \frac{y}{1-y} \leq 1 \rightarrow \;\; 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow \;\; g'(x_1) = \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{1-y}\right)^2} = (1-y)^2$$

$$\rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{(1-y)^2} \;:\; \; 0 < y < \frac{1}{2}$$

ب)

$$E[Y] = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{(1-y)^2}\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y - 1 + 1}{(1-y)^2}\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{1-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{1-y} + \ln(1-y)\ |_0^{1/2} = 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - 0 = 1 - \ln(2)$$

پ)

$$\int_0^a f_Y(y)dy = \frac{1}{4} \to \int_0^a \frac{1}{(1-y)^2}dy = \frac{1}{4} \to \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{1}{4} \to 1 - a = \frac{4}{5} \to a = \frac{1}{5}$$

$$\to Q_1 = \frac{1}{5}$$

۵. (۴ نمره) کارخانه‌ای دستگاه‌هایی تولید می‌کند که از 10 قطعه مجزا تشکیل شده‌اند. برای این که دستگاه کار کند، باید هر 10 قطعه سالم باشند. هر دستگاه سالم در بازار به قیمت k دلار به فروش می‌رسد، ولی یک دستگاه خراب بی‌ارزش است و دور انداخته می‌شود. هر یک از 10 قطعه دستگاه می‌تواند از مواد نامرغوب (با احتمال خرابی 0.1 و هزینه 1 دلار) و یا مواد مرغوب (با احتمال خرابی 0.05 و هزینه 3 دلار) ساخته شود. فرض کنید خرابی قطعات دستگاه مستقل از هم هستند. برای بیشینه کردن سود مورد انتظار (امید ریاضی فروش منهای هزینه)، بهتر است از قطعات مرغوب استفاده شود و یا نامرغوب؟ پاسخ خود را به طور کامل توضیح دهید.

متغیر تصادفی شاخص W را به این صورت تعریف می‌کنیم که $W = 1$ اگر دستگاه کار کند، و $W = 0$ در غیر این صورت.

تابع جرمی احتمال W به استفاده از قطعات مرغوب و یا نامرغوب بستگی دارد. تابع سود را به صورت $R(W)$ تعریف می‌کنیم و به دنبال این هستیم که $E[R(W)]$ در کدام حالت بیشتر می‌شود.

در حالت اول (قطعات نامرغوب) متغیر تصادفی W_1 دارای تابع جرمی احتمال زیر است:

$$P_{W_1}(w) = \begin{cases} 1-(1-0.1)^{10}, & w = 0 \\ (1-0.1)^{10}, & w = 1 \end{cases}$$

زیرا احتمال کار کردن دستگاه و کسب k دلار، برابر حاصلضرب احتمال سالم بودن هر ۱۰ قطعه مستقل آن است.

متغیر تصادفی سود در این حالت برابر است با:

$$R(W_1) = \begin{cases} -10, & W_1 = 0 \\ k-10, & W_1 = 1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$E[R(W_1)] = (-10) \times (1 - 0.9^{10}) + (k-10) \times 0.9^{10} = 0.9^{10}k - 10$$

در حالت دوم (قطعات مرغوب) داریم:

$$P_{W_2}(w) = \begin{cases} 1-(1-0.05)^{10}, & w = 0 \\ (1-0.05)^{10}, & w = 1 \end{cases}$$

متغیر تصادفی سود در این حالت برابر است با:

$$R(W_2) = \begin{cases} -30, & W_2 = 0 \\ k-30, & W_2 = 1 \end{cases}$$

$$E[R(W_2)] = (-30) \times (1 - 0.95^{10}) + (k-30) \times 0.95^{10} = 0.95^{10}k - 30$$

استفاده از قطعات مرغوب وقتی سودده است که: $E[R(W_2)] > E[R(W_1)]$

$$E[R(W_2)] > E[R(W_1)] \rightarrow k > \frac{20}{0.95^{10} - 0.9^{10}} = 80.21$$

بنابراین اگر قیمت هر دستگاه کمتر از 80.21 دلار است، بهتر است از قطعات نامرغوب استفاده شود.

(۱/۵ نمره برای میانگین R(W1) و ۱/۵ نمره برای میانگین R(W2) و ۱ نمره هم برای k)

۶. (۲ نمره) پنج مهره ناهمرنگ را به تصادف در ۵ ظرف با شماره‌های ۱ تا ۵ می‌ریزیم. احتمال این که در ظرف‌های با شماره فرد فقط یک مهره قرار گیرد چقدر است؟

تعداد کل حالات: هر مهره ۵ انتخاب برای ظرف قرارگیری دارد بنابراین 5^5 حالت داریم.

دو حالت مطلوب داریم:

حالت اول: در هر ظرف یک مهره ⟵ تعداد حالات = $5!$ (تعداد حالات قرار گرفتن ۵ مهره در ۵ ظرف)

حالت دوم: در هر ظرف فرد یک مهره، در ظرف ۲ یا ۴ دو مهره ⟵ تعداد حالات = سه مهره از ۵ مهره را برای ظروف فرد انتخاب می‌کنیم، این سه مهره به $3!$ حالت در این ظروف قرار می‌گیرند، ۲ مهره باقیمانده در ظرف ۲ یا ۴ (دو حالت) قرار می‌گیرند، پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $\binom{5}{3} \times 3! \times 2$

احتمال برابر است با:

$$\frac{5! + \binom{5}{3} \times 3! \times 2}{5^5} = \frac{120 + 120}{5^5} = \frac{48}{625}$$

۷. (۲ نمره) فردی سه سکه در جیب دارد که یکی سالم و دو تای دیگر هر دو طرف شیر هستند. اگر این فرد یک سکه به تصادف از جیبش خارج کند و دو بار پرتاب کند و هر دو بار شیر بیاید، احتمال این که سکه سالم انتخاب شده باشد چقدر است؟

پیشامد سکه اول : C_1

پیشامد سکه دوم : C_2

پیشامد سکه سوم : C_3

$$P(HH|C_1) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(HH|C_2) = 1 \quad , \quad P(HH|C_3) = 1$$

$$P(C_1|HH) = \frac{P(HH|C_1)P(C_1)}{P(HH|C_1)P(C_1) + P(HH|C_2)P(C_2) + P(HH|C_3)P(C_3)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{9}$$