امتحان میان‌ترم درس آمار و احتمال مهندسی

۱. (۳ نمره) احمد یک دانشجوی خسته است که حوصله انتخاب واحد ندارد! او از دروس ارائه شده در این ترم، پیش‌نیاز ۳۰ درس را گذرانده است و قصد دارد ۷ درس را به تصادف انتخاب کند. فرض کنید هر درس فقط یک روز در هفته کلاس دارد و در هر یک از روزهای شنبه تا چهارشنبه دقیقا ۶ درس از این ۳۰ درس ارائه می‌شود. احتمال این که احمد هر ۵ روز کلاس داشته باشد چقدر است؟

دو حالت برای هر روز کلاس داشتن وجود دارد:

۱) در ۲ روز ۲ کلاس و در ۳ روز یک کلاس داشته باشیم که تعداد حالت‌ها برابر است با: $\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{6}{2}\binom{6}{1}\binom{6}{1}\binom{6}{1}$

۲) در ۱ روز ۳ کلاس و در ۴ روز یک کلاس داشته باشیم که تعداد حالت‌ها برابر است با: $\binom{5}{1}\binom{6}{3}\binom{6}{1}\binom{6}{1}\binom{6}{1}\binom{6}{1}$

بنابراین احتمال هر روز کلاس داشتن برابر است با:

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{6}{2}^2 \times 6^3 + \binom{5}{1}\binom{6}{3} \times 6^4}{\binom{30}{7}} = \frac{114}{307} \approx 0.302$$

۲. (۴ نمره) تابع چگالی احتمال مشترک متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است:

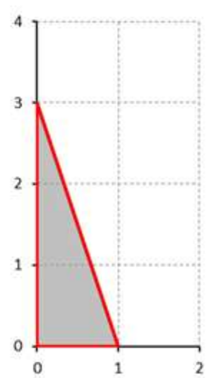
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{for } x>0, y>0, 3x+y<3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) ثابت c را حساب کنید.

ب) احتمال $P(X<Y)$ چقدر است؟

پ) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X را به دست آورید.

ت) میانه توزیع Y را محاسبه کنید.



الف)

$$\iint f_{XY}\, dx\, dy = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} c(x+y)\, dy\, dx = 1$$

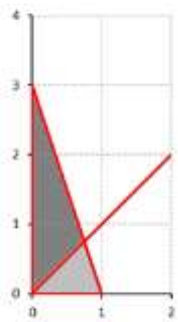
$$\int_0^{3-3x} c(x+y)\, dy = c\left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{3-3x} = c\left(x(3-3x) + \frac{1}{2}(3-3x)^2\right)$$

$$= c\left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}\right)$$

$$\int_0^1 c\left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}\right) dx = c\left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x\right)\Big|_0^1 = 2c = 1 \rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

ب)

با حل کردن دستگاه معادلات $y = x$ و $3x + y = 3$ به نقطه $x = y = \frac{3}{4}$ می‌رسیم:



$$P(X < Y) = \int_0^{\frac{3}{4}} \int_x^{3-3x} \frac{1}{2}(x + y)\,dy\ \,dx = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{9}{4} - 3x\ \,dx = \frac{27}{32}$$

پ)

$$f_X(x) = \int_0^{3-3x} \frac{1}{2}(x + y)\ dy = \frac{9}{4} - 3x + \frac{3}{4}x^2\ \ : 0 < x < 1$$

ت)

$$f_Y(y) = \int_0^{1-\frac{y}{3}} \frac{1}{2}(x + y)\ dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}y - \frac{5}{36}y^2\ \ :\ \ 0 < y < 3$$

$$F_Y(m) = \int_0^{m} \frac{1}{4} + \frac{1}{3}y - \frac{5}{36}y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}m + \frac{1}{6}m^2 - \frac{5}{108}m^3 = \frac{1}{2} \rightarrow\ \ m \approx 1.29$$

معادله فوق فقط یک جواب در بازه (0,3) دارد، پس میانه برابر با 1.29 است.

۳. (۳ نمره) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{for}\ \ 0 < x < 2 \\ 0 & \qquad\qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = \begin{cases} X & \text{for}\ \ X > 1 \\ 0.5 & \text{for}\ \ X \leq 1 \end{cases}$$

الف) احتمال $P\{Y = 0.5\}$ چقدر است؟

ب) توابع توزیع انباشته و چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را پیدا کنید.

الف)

$$P\{Y = 0.5\} = P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4} = 0.25$$

ب)

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

$$y < 0.5\ :\ \ F_Y(y) = 0$$

$$0.5 \le y \le 1 \;:\; F_Y(y) = P(Y = 0.5) = 0.25$$

$$1 < y < 2 : F_Y(y) = P(Y < y) = P(Y = 0.5) + P(1 < X < y)$$

$$= 0.25 + \int_1^y \frac{1}{2}x \; dx = 0.25 + \frac{1}{4}(y^2 - 1) = \frac{1}{4}y^2$$

$$y \ge 2 \;:\; F_Y(y) = 1$$

با مشتق‌گیری از $F_Y(y)$ داریم:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\delta\left(y - \frac{1}{2}\right) & \text{if } y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y & \text{if } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۴. (۴ نمره) پوریا و پریسا یک بازی با سکه سالم انجام می‌دهند. در این بازی ابتدا پوریا سکه را n بار پرتاب می‌کند و سپس پریسا سکه را $n+1$ بار پرتاب می‌کند. اگر تعداد شیرها در پرتاب‌های پوریا بیشتر از پریسا باشد، پریسا $n+1$ تومان به او می‌پردازد. اگر تعداد شیرها مساوی باشد، پولی رد و بدل نمی‌شود. اگر تعداد شیرهای پریسا بیشتر باشد، پوریا n تومان به او می‌پردازد. آیا این بازی عادلانه است؟ پاسخ خود را به طور کامل توضیح دهید.

فرض کنید X تعداد شیرهای پوریا و Y تعداد شیرهای پریسا باشد:

$$X \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad Y \sim \text{Bin}\left(n+1, \frac{1}{2}\right)$$

اگر تعداد خطاهای پوریا $(n - X)$ و تعداد خطاهای پریسا $(n + 1 - Y)$ را در نظر بگیرید، واضح است که:

$$(n - X) \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad (n + 1 - Y) \sim \text{Bin}\left(n+1, \frac{1}{2}\right)$$

بنابراین:

$$P(X < Y) = P(n - X < n + 1 - Y) = P(Y < X + 1)$$

با توجه به این که Y و X مقادیر صحیح دارند: $P(Y < X + 1) = P(Y \le X)$

$$P(X < Y) = P(X \ge Y) = 1 - P(X < Y) \rightarrow \; P(X < Y) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = p > 0$$

$$P(X > Y) = 1 - \frac{1}{2} - p = \frac{1}{2} - p$$

اگر A متغیر تصادفی نشان‌دهنده میزان برد پریسا باشد:

$$A = \begin{cases} n & P(X < Y) \\ 0 & P(X = Y) \\ -(n+1) & P(X > Y) \end{cases}$$

امید ریاضی A برابر است با:

$$E[A] = n \times \frac{1}{2} + 0 \times p - (n+1) \times \left(\frac{1}{2} - p\right) = (n+1)p - \frac{1}{2}$$

اگر $p > \frac{1}{2(n+1)}$ این بازی به نفع پریسا است. اگر $p = \frac{1}{2(n+1)}$ این بازی عادلانه است و اگر $p < \frac{1}{2(n+1)}$ بازی به نفع پوریا است.

بخش امتیازی:

$$p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\,n!}$$
$$> \frac{1}{n+1} \times \frac{n!}{\sqrt{\pi}\,n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{4}\,(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}$$

بنابراین این بازی همیشه به نفع پریسا است.

۵. (۶ نمره) فرض کنید احتمال این که هر یک از ساکنین شهری به یک بیماری واگیردار خاص مبتلا شده باشند برابر با p باشد.

الف) احتمال این که بین n ساکن این شهر که به تصادف انتخاب شده‌اند k بیمار وجود داشته باشند چقدر است؟

ب) فرض کنید افراد حاضر در این نمونه n تایی یک به یک مورد آزمایش قرار می‌گیرند تا زمانی که k فرد بیمار شناسایی شوند یا کل n نفر مورد آزمایش قرار گیرند. احتمال این که k-امین فرد بیمار دقیقا n-امین فرد مورد آزمایش باشد چقدر است؟

حال فرض کنید این آزمایش خطا داشته باشد و احتمال منفی شدن جواب آزمایش (منفی شدن آزمایش نشان‌دهنده نداشتن بیماری است) برای یک فرد بیمار برابر t_1 و احتمال مثبت شدن جواب برای فرد سالم برابر با t_2 باشد.

پ) فرض کنید $t_1 = t_2 = t$. برای هر فرد این آزمایش ۱۰ بار تکرار می‌شود و اگر آزمایش حداقل ۶ بار مثبت شد، فرد را بیمار تشخیص می‌دهیم. فرض کنید فردی بیمار تشخیص داده شده است، احتمال این که واقعا بیمار باشد چقدر است؟

ت) فرض کنید $t_1 > 0$ اما $t_2 = 0$. همچنین فرض کنید هر فرد فقط یک بار مورد آزمایش قرار می‌گیرد و اگر جواب مثبت بود بیمار تشخیص داده می‌شود. جواب آزمایش n فرد اول منفی بوده و اولین نفری که بیمار تشخیص داده می‌شود نفر $(n+1)$-ام است. اگر Z تعداد افراد قبل از نفر $(n+1)$-ام باشد که در واقع بیمار هستند ولی به اشتباه نتیجه آزمایش آنها منفی شده است، تابع جرمی احتمال Z را بیابید.

الف) توزیع دوجمله‌ای $\text{Bin}(n,p)$:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

ب) توزیع دوجمله‌ای منفی $\text{NegBin}(k,p)$:

$$P(Y=n)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

پ) اگر D پیشامد بیمار بودن فرد و A پیشامد ۶ تست مثبت یا بیشتر باشد:

$$P(A|D)=\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}(1-t)^i t^{10-i}$$

با توجه به قضیه احتمال کل:

$$P(A)=p\times\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}(1-t)^i t^{10-i}+(1-p)\times\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}t^i(1-t)^{10-i}$$

با استفاده از قضیه بیز داریم:

$$P(D|A)=\frac{P(A|D)P(D)}{P(A)}$$

$$=\frac{p\times\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}(1-t)^i t^{10-i}}{p\times\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}(1-t)^i t^{10-i}+(1-p)\times\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}t^i(1-t)^{10-i}}$$

ت)

فرض کنید Y این پیشامد باشد که هیچ یک از افراد بیمار شناسایی نشده‌اند (نتیجه آزمایش همه آنها منفی شده است).
احتمال این که k فرد بیمار در بین این نفر وجود داشته باشد و هیچ یک از آنهل شناسایی نشده باشد برابر است با:

$$P(Z=k\,,Y)=\binom{n}{k}(t_1p)^k(1-p)^{n-k}$$

$$P(Z=k|Y)=\frac{P(Z=k,Y)}{\sum_{i=0}^{n}P(Z=i,Y)}=\frac{\binom{n}{k}(t_1p)^k(1-p)^{n-k}}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(t_1p)^i(1-p)^{n-i}}$$

با توجه به بسط دوجمله‌ای داریم:

$$P(Z=k\,|Y)=\frac{\binom{n}{k}(t_1p)^k(1-p)^{n-k}}{(t_1p+1-p)^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{t_1p}{t_1p+1-p}\right)^k\left(\frac{1-p}{t_1p+1-p}\right)^{n-k}$$

$$Z\sim\text{Bin}\left(n\,,\frac{t_1p}{t_1p+1-p}\right)$$