

به نام خدا



دانشگاه تهران  
پردیس دانشکده‌های فنی  
دانشکده برق و کامپیوتر



درس آمار و احتمال

تمرین شماره ۱

مهر ماه ۱۳۹۹

### سوال اول – جایگشت حروف

جایگشت های موجود در کلمه ی ELLIPSE را در هر بخش طبق شرط ذکر شده پیدا کنید:

الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.

ب) جایگشت با حرف S شروع شود.

پ) دو L کنار هم قرار داشته باشد.

ت) حروف به ترتیب حروف الفبا قرار بگیرند.

### سوال دوم – میزگرد

۹ نفر می خواهند دور یک میز بنشینند. به چند حالت این کار امکان پذیر است اگر:

(الف) محدودیت خاصی وجود نداشته باشد.

(ب) محمدرضا و علیرضا بخواهند در کنار یکدیگر بنشینند.

(پ) محمدرضا، علیرضا و حمیدرضا بخواهند در کنار یکدیگر بنشینند.

### سوال سوم – تشکیل مجموعه

می خواهیم از بین ۴ مرد و ۶ زن یک مجموعه ی ۵ نفری انتخاب کنیم در هر بخش طبق شرط ذکر شده این مجموعه را پیدا کنید:

الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.

ب) مجموعه تنها شامل زن ها باشد.

پ) حداقل یک مرد در مجموعه باشد.

ت) تعداد زن ها بیشتر باشد.

### سوال چهارم – اعداد متمایز با ارقام تکراری

چند عدد ۴ رقمی متمایز با ارقام ۱،۲،۳،۳،۴،۴،۵،۶،۷ وجود دارد؟

### سوال پنجم – بازی تاس ها

در بازی A، ۳ تاس می اندازیم و در صورتی می بریم که حداقل یک بار ۱ بگیریم. در بازی B، ۶ تاس می اندازیم و در صورتی می بریم که حداقل دو بار ۱ بگیریم. در بازی C، ۹ تاس می اندازیم و در صورتی می بریم که حداقل سه بار ۱ بگیریم. در کدام یک از بازی ها شانس برد ما بیشتر است؟

الف) احتمال باخت در بازی A چقدر است؟

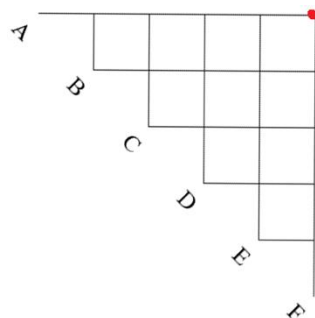
- (ب) دو روش باخت در بازی B چیست؟ احتمال هر یک چقدر است؟ احتمال باخت در بازی B چقدر است؟
- (پ) سه روش باخت در بازی C چیست؟ احتمال هر یک چقدر است؟ احتمال باخت در بازی C چقدر است؟
- (ت) کدام بازی کمترین احتمال باخت را دارد؟

### سوال ششم – مثلث ها

۱۵ نقطه را به فاصله های مساوی روی محیط یک دایره قرار دادیم. تعداد مثلث هایی را بیابید که متساوی الاضلاع نباشند و از این نقاط تشکیل شده اند.

### سوال هفتم – تام و جری

تام در نیم-جدول زیر به دنبال جری می گردد. تام در نقطه قرمز رنگ در بالا سمت راست جدول قرار دارد و در هر مرحله به طور تصادفی یا به پایین یا به سمت چپ می رود. می داند که جری در یکی از نقاط A,B,C,D,E,F پنهان شده است ولی اگر به نقطه ای برسد که جری در آن حضور ندارد در آن جا گیر می کند! به جری پیشنهاد می کنید در کدام یک از نقاط مشخص شده پنهان شود؟ احتمال رسیدن تام به هر یک از ۶ نقطه پایانی را بدست آورید و بهترین نقطه (نقاط) را به جری معرفی کنید.



### سوال هشتم – رقم یکان

ابتدا a را از مجموعه ی  $\{1,2,3,\dots,99,100\}$  انتخاب می کنیم سپس b را از همان مجموعه انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عدد  $3^a + 7^b$  دارای رقم یکان 8 باشد را پیدا کنید.

### سوال نهم – صف مدرسه

۵ دانش آموز به همراه والدینشان (۱۰ پدر و مادر) در مدرسه می خواهند در صف بایستند. برای هر ترتیبی از این ۱۵ نفر در صف، متغیر adj نشان دهنده ی تعداد جایگاه هایی در این صف ۱۵ نفره است که یکی از دانش آموزان در کنار یکی از والدین ایستاده است (نه لزوماً یکی از والدین خود!). به طور مثال ترتیب PPPSSPPSPSPSPSPP را در نظر بگیرید که حرف P نشان دهنده ی والدین و S نشان دهنده ی دانش آموزان است. در چنین ترتیبی، از ۱۴ جایگاه موجود، ۸ جایگاه دارای شرایط گفته شده هستند و  $adj = 8$ . مقدار میانگین برای متغیر adj در تمام جایگشت های مختلف این ۱۵ نفر را بیابید.

### سوال دهم – ترکیبیات

عبارات زیر را به روش ترکیبیاتی ثابت کنید.

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \dots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$

### سوال یازدهم – سری های توالی

یک سکه سالم (که دو طرف شیر (H / Heads) یا خط (T / Tails) دارد و احتمال ظاهر شدن هر کدام برابر است) را  $t$  بار به طور مستقل از هم پرتاب می‌کنیم. یک **سری**، بیشترین توالی ظاهر شدن یکی از طرف های سکه در حین پرتاب هاست. میانگین تعداد سری های به طول  $L$  در این  $t$  پرتاب متوالی سکه را بدست آورید.

- به طور مثال در توالی THHHHHHTTT، ۳ سری متفاوت به طول های ۱، ۶ و ۳ داریم.

- در  $t$  بار پرتاب سکه، خروجی تابع  $P(t, L)$  مجموع تعداد تمام سری های به طول  $L$  در تمام  $2^t$  ترکیب ممکن از پرتاب این  $t$  سکه است. به عبارتی، خواسته مسئله حاصل تقسیم  $P(t, L)$  بر  $2^t$  بر اساس متغیر های  $t$  و  $L$  است. برای راهنمایی، جدول زیر را برای خروجی تابع به ازای  $t = 3$  در نظر بگیرید:

سری های به طول ۳	سری های به طول ۲	سری های به طول ۱	حاصل پرتاب
1	0	0	TTT
0	1	1	TTH
0	0	3	THT
0	1	1	THH
0	1	1	HTT
0	0	3	HTH
0	1	1	HHT
1	0	0	HHH
$P(3,3) = 2$	$P(2,3) = 4$	$P(1,3) = 10$	مجموع کل

### سوال دوازدهم – بلیط گمشده

۱۵۰ نفر برای ورود به یک سالن سینما با ۱۵۰ صندلی صف کشیده اند. نفر اول بلیط خود را گم کرده است و به طور تصادفی یک صندلی را انتخاب می‌کند و روی آن می‌نشیند. هرکدام از نفرات بعدی هم اگر صندلی خودشان خالی باشد، روی همان می‌نشینند و در غیر این صورت آن ها نیز یک صندلی خالی را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند. احتمال اینکه نفر آخر صف روی صندلی خود بنشیند چقدر است؟