به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

پاسخ تمرین کتبی هفتم

---

۱. طبق قانون قوی اعداد بزرگ، در صورتی که X_i ها، متغیرهای تصادفی i.i.d باشند و $E\left[X_i\right]=\mu$ ، داریم:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\mu\right\}=1$$

پس در این سوال می توان گفت:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_1^4+X_2^4+\ldots+X_n^4}{n}\right)=E\left[X_i^4\right]\right\}=1$$

از طرفی $E\left[X^n\right]$ برابر با مقدار مشتق n ام تابع مولد گشتاور X در صفر است، پس:

$$E\left[X_i^4\right]=M_z\left(s=0\right)^{(4)}=\left(\frac{1}{2}e^{s^2}\right)^{(4)}=\left(\frac{1}{2}\left(2s\right)e^{s^2}\right)^{(3)}=\left(se^{s^2}\right)^{(3)}=\left(e^{s^2}+s\left(2s\right)e^{s^2}\right)^{(2)}=$$

$$\left(\left(1+2s^2\right)e^{s^2}\right)^{(2)}=\left(\left(4s\right)e^{s^2}+\left(1+2s^2\right)\left(2s\right)e^{s^2}\right)^{(1)}=\left(\left(6s+4s^3\right)e^{s^2}\right)^{(1)}$$

$$=\left(6+12s^2\right)e^{s^2}+\left(6s+4s^3\right)\left(2s\right)e^{s^2}\overset{s=0}{\Rightarrow}E\left[X_i^4\right]=6$$

حال می توان مقدار خواسته شده را محاسبه کرد:

$$\lim_{n\to\infty}\text{Cos}\left(\frac{X_1^4+X_2^4+\ldots+X_n^4}{n}\right)=Cos(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1^4+X_2^4+\ldots+X_n^4}{n})=Cos\left(E\left[X_i^4\right]\right)=Cos(6)$$

۲. (آ) در صورتی که تعداد حروف کلمه ی i ام را X_i بنامیم، می توان گفت:

$$X_i=L+1\overset{\text{L is Poisson}}{\Rightarrow}\begin{cases}E\left[X_i\right]=E\left[L+1\right]=E\left[L\right]+1=3+1=4\\ \text{Var}\left(X_i\right)=Var\left(L+1\right)=Var\left(L\right)=3=\sigma^2\end{cases}$$

از طرفی طبق قضیه حد مرکزی: (وقتی n به بینهایت میل می کند)

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\to n\overline{X}\sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

پس در اینجا برای جمع تعداد حروف می توان گفت:

$$Y=n\overline{X}\sim N\left(400\times 4,\ 400\times 3\right)=N(1600,\ 1200)$$

با استاندارد کردن داریم:

$$z=\frac{Y-\mu}{\sigma}=\frac{Y-1600}{\sqrt{1200}}$$

حال برای محاسبه $P\{Y>1700\}$:

$$P\{Y>1700\}=P\left\{z>\frac{1700-1600}{\sqrt{1200}}\right\}=P\{z>2.8867\}=1-P\{z\leq 2.8867\}$$

$$=1-\phi(2.88)=1-0.99801=0.00199$$

(ب) تعداد کلمات به جای ۴۰۰، $N\sim U\{301,\ 400\}$ است.

$$N\sim U\{301,400\}\rightarrow\begin{cases}\mu_N=\frac{a+b}{2}=\frac{301+400}{2}=350.5\\ \sigma_N^2=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}=\frac{9999}{12}=833.25\end{cases}$$

حال می توان برای تعداد حروف (Y) گفت:

$$\begin{cases}\mu_Y=\mu_N\mu_{X_i}=350.5\times 4=1402\\ \sigma_Y^2=\sigma_{X_i}^2\mu_N+\sigma_N^2\mu_{X_i}^2=3\times 350.5+833.25\times 16=14383.5\end{cases}$$

در نهایت طبق نامساوی چیبشف:

$$P\{Y>1700\}=P\{Y>\mu_Y+298\}\leq\frac{\sigma_Y^2}{298^2}=\frac{14383.5}{88804}=0.16197$$

۳. (آ) ابتدا تابع درست نمایی لگاریتمی را به دست می آوریم.

$$\mathrm{LL}(\theta,j)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta,j)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{1}{\theta}=-n\ln\theta & 0\leq x_i\leq\theta, j=1\\ \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\theta e^{-\theta x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln(\theta)-\sum_{i=1}^{n}\theta x_i=n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i & x_i\geq 0, j=2\end{cases}$$

پس داریم:

$$\frac{\partial\mathrm{LL}}{\partial\theta}=\begin{cases}-\frac{n}{\theta} & 0\leq x_i\leq\theta, j=1\\ \frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i & x_i\geq 0, j=2\end{cases}$$

$$\frac{\partial\mathrm{LL}}{\partial\theta}=0\Rightarrow\begin{cases}-\frac{n}{\theta}=0\Rightarrow\theta\rightarrow\infty & j=1\\ \frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\frac{n}{\theta}=\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{X}} & j=2\end{cases}$$

پس می توان گفت $\hat{j}=2,\hat{\theta}=\frac{1}{\overline{X}}$ است.

(ب) با اعداد داده شده:

$$\overline{X}=\frac{1+1+1+2+2+11}{6}=\frac{18}{6}=3$$

پس $\hat{j}=2,\hat{\theta}=\frac{1}{\overline{X}}=\frac{1}{3}$ خواهد بود.

۴. در توزیع U(a،b) داریم:

$$U(a,b)\rightarrow\begin{cases}E[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{a+b}{2}\\ \mathrm{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=\frac{(b-a)^2}{12}\end{cases}$$

همچنین می دانیم $m_1=E[X]\ ,\ m_2=E[X^2]$، حال می توان گفت:

$$\begin{cases}E[X]=\frac{a+b}{2}=m_1\\ \mathrm{Var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=m_2-m_1^2\end{cases}\overset{\Rightarrow}{U(a,b)\,means\,b\geq a}\begin{cases}b+a=2m_1\\ b-a=\sqrt{12m_2-12m_1^2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2b=2m_1+2\sqrt{3\left(m_2+m_1^2\right)}\\ 2a=2m_1-2\sqrt{3\left(m_2+m_1^2\right)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=m_1+\sqrt{3\left(m_2+m_1^2\right)}\\ a=m_1-\sqrt{3\left(m_2+m_1^2\right)}\end{cases}$$

۵. می دانیم بازه اطمینان $\alpha - 1$ برابر است با:

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

در اینجا داریم: $1-\alpha=0.99 \Rightarrow \alpha=0.01$ ، پس بازه اطمینان ۹۹ درصدی برابر خواهد بود با:

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=\left(15-\frac{2}{10}z_{0.995},15+\frac{2}{10}z_{0.995}\right)=$$

$$\left(15-\frac{2}{10}\times 2.58,\ 15+\frac{2}{10}\times 2.58\right)=(15-0.516,\ 15+0.516)=(14.484,15.516)$$

۶. در یک نظرسنجی راجع به کیفیت غذای سلف دانشگاه، ۵۱ درصد شرکت کنندگان اعلام کرده اند که از کیفیت غذا رضایت

(آ) داریم: (توزیع برنولی)

$$\mu=\frac{51}{100},\ \sigma^2=\frac{51}{100}-\left(\frac{51}{100}\right)^2=0.2499$$

حال می توان بازه اطمینان ۹۵% را برحسب n محاسبه کرد:

$$1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05$$

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=\left(0.51-\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}z_{0.975},\ 0.51+\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}z_{0.975}\right)=$$

$$\left(0.51-\sqrt{\frac{0.2499}{n}}\times 1.96,\ 0.51+\sqrt{\frac{0.2499}{n}}\times 1.96\right)$$

با توجه به اینکه حاشیه خطای این بازه اطمینان، $\pm 1\%$ گزارش شده، می توان n را به دست آورد.

$$\sqrt{\frac{0.2499}{n}}\times 1.96=\frac{1}{100}\Rightarrow\sqrt{n}=\sqrt{0.2499}\times 1.96\times 100=\frac{\sqrt{2499}\times 196}{100}\Rightarrow n=\frac{2499\times 196\times 196}{10000}=9600.1584$$

از آنجا که n عددی طبیعی است، آن را برابر ۹۶۰۰ می گیریم.

(ب) داریم $1-\alpha=0.98\Rightarrow\alpha=0.02$. همچنین از بخش قبل می دانیم $\sqrt{\frac{0.2499}{n}}=\frac{1}{196}$ ، پس بازه اطمینان ۹۸ درصدی برابر خواهد بود با:

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=\left(0.51-\frac{1}{196}z_{0.99},0.51+\frac{1}{196}z_{0.99}\right)=$$

$$\left(0.51-\frac{1}{196}\times 2.33,0.51+\frac{1}{196}\times 2.33\right)=\left(0.51-0.01188,0.51+\frac{1}{196}\times 0.01188\right)=(0.49812,0.52188)$$