به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین کتبی ششم
پاسخنامه

---

۱. توزیع گاما $\Gamma(\lambda, k)$ دارای تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{\frac{-x}{\lambda}}$$

(آ) نشان دهید اگر m و n دو عدد صحیح باشند، آنگاه مجموع دو توزیع گامای مستقل $\Gamma(\lambda, m)$ و $\Gamma(\lambda, n)$ دارای توزیع $\Gamma(\lambda, m+n)$ خواهد بود.

پاسخ :

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^z \frac{x^{m-1} e^{\frac{-x}{\lambda}}}{\Gamma(m)\lambda^m} \frac{(z-x)^{n-1} e^{\frac{-(z-x)}{\lambda}}}{\Gamma(n)\lambda^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{\frac{-z}{\lambda}}}{\lambda^{m+n}} \int_0^z \frac{x^{m-1}(z-x)^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{\frac{-z}{\lambda}} z^{m+n-1}}{\lambda^{m+n}} \int_0^1 \frac{t^{m-1}(1-t)^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{\frac{-z}{\lambda}} z^{m+n-1}}{\lambda^{m+n}\Gamma(m+n)}
\end{aligned}$$

substitute now $x=zt$ think and

(ب) تابع چگالی مشترک $U = X + Y$ و $V = \frac{X}{X+Y}$ را بیابید و نشان دهید که U و V مستقل هستند.

پاسخ: از تبدیل های $u = x + y$ و $v = \frac{x}{x+y}$ استفاده می‌کنیم:

$$x = uv$$
$$y = u(1-v)$$

Jacobian

$$J = |\begin{matrix} v & u \\ 1-v & -u \end{matrix}| = -u$$

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}(uv, u(1-v))|u| \\
&= \frac{\lambda^{m+n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}(uv)^{m-1}(u(1-v))^{n-1}e^{-\lambda u}u \\
&= \{\frac{\lambda^{m+n}}{\Gamma(m+n)}u^{m+n-1}e^{-\lambda u}\}\{\frac{v^{m-1}(1-v)^{n-1}}{B(m,n)}\} \\
&= \{f_U(u)\}\{\frac{v^{m-1}(1-v)^{n-1}}{B(m,n)}\} \\
&=> f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,\mathrm{d}u \\
&= \{\frac{v^{m-1}(1-v)^{n-1}}{B(m,n)}\}\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{v^{m-1}(1-v)^{n-1}}{B(m,n)} \\
&=> f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v)
\end{aligned}$$

(ج) اگر متغیر تصادفی Z دارای توزیع پواسون با پارامتر $\frac{t}{\lambda}$ باشد، نشان دهید برای عدد صحیح m و متغیر تصادفی $X = \Gamma(\lambda, m)$ داریم:

$$P(Z < m) = P(X > t)$$

پاسخ:

$$X = \Gamma(\lambda, m)$$

$$\begin{aligned}
P(X > t) &= \int_t^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!}x^{m-1}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}u \\
&= [-\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}x^{m-1}e^{-\lambda x}]_t^{\infty} + \int_t^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-2)!}x^{m-2}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}u \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} + P(X' > t); X' = \Gamma(\lambda, m-1) \\
&=> P(X > t) = \Sigma_{k=0}^{m-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = P(Z < m)
\end{aligned}$$

(د) نشان دهید اگر $0 < m < n$ و متغیر تصادفی B مستقل از Y و دارای توزیع $beta(m, n-m)$ باشد، آنگاه توزیع YB با توزیع X یکسان است.

پاسخ: با توجه به نتیجه‌ی قسمت (ب) داریم :

$$
\begin{aligned}
& f_V(v) = \frac{v^{m-1}(1-v)^{n-1}}{B(m,n)} = beta(m,n) \\
& , x = uv => X = UV \\
& => \Gamma(\lambda, m) = \Gamma(\lambda, m+n) * beta(m,n) \\
& , n- > n-m \\
& => \Gamma(\lambda, m) = \Gamma(\lambda, n) * beta(m, n-m)
\end{aligned}
$$

۲. اگر X و Y دارای توزیع مشترک نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 ، واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 ، و ضریب همبستگی ρ باشند، نشان دهید:

(آ) $E[X|Y] = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1(y-\mu_2)}{\sigma_2}$

(ب) $Var[X|Y] = \sigma_1^2(1-\rho^2)$

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
f_{XY}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\} \\
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}] + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{\frac{-[(x-\mu_1)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2}]}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{\frac{-[(x-\mu_1)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - (y-\mu_2)^2(1-\rho^2)]}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{\frac{-[(x-\mu_1)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - \frac{(y-\mu_2)^2(1-\rho^2)\sigma_1^2}{\sigma_2^2}]}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{\frac{-[(x-\mu_1)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\rho^2(y-\mu_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2}]}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{\frac{-((x-\mu_1) - (\frac{\rho(y-\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2}))^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{\frac{-(x-(\mu_1 + \frac{\rho(y-\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2}))^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\} \\
&= \frac{1}{\sigma_{X|Y}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_{X|Y})^2}{2\sigma_{X|Y}^2}} \\
&=> \sigma_{X|Y} = \sigma_1\sqrt{1-\rho^2} => Var[X|Y] = \sigma_{X|Y}^2 = \sigma_1^2(1-\rho^2) \\
&=> \mu_{X|Y} = E[X|Y] = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1(y-\mu_2)}{\sigma_2}
\end{aligned}
$$

(ج) اگر $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ، $E[X|X+Y=z]$ و $Var(X|X+Y=z)$ را محاسبه کنید.

پاسخ: می‌دانیم که هر ترکیب خطی از دو متغیر تصادفی مشترکا نرمال، دارای توزیع نرمال است. در نتیجه متغیر تصادفی $Z = X+Y$ نیز دارای توزیع نرمال است.

$$\begin{aligned}
\mu_z &= \mu_1 + \mu_2 = 0 + 0 = 0\\
\sigma_z^2 &= E\{Z^2\} - E\{Z\}^2 = E\{Z^2\} - 0 = E\{Z^2\}\\
&= E\{(X+Y)^2\} = E\{X^2 + Y^2 + 2XY\}\\
&= (E\{X^2\} - E\{X\}^2) + (E\{Y^2\} - E\{Y\}^2) + 2E\{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\}\\
&= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\\
=> \sigma_z &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}
\end{aligned}$$

و برای ضریب همبستگی بین X و Z داریم:

$$\begin{aligned}
\rho_{xz} &= \frac{E\{(X-\mu_1)(Y-\mu_z)\}}{\sigma_1\sigma_z}\\
&= \frac{E\{X(X+Y)\}}{\sigma_x\sigma_z}\\
&= \frac{\sigma_1^2 + \rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x\sigma_z}
\end{aligned}$$

با توجه به روابط قسمت (الف) و (ب) داریم :

$$\begin{aligned}
Var[X|Z] &= \sigma_{X|Z}^2 = \sigma_1^2(1-\rho_{xz}^2)\\
E[X|Z] &= \mu_1 + \frac{\rho_{xz}\sigma_1(z-\mu_z)}{\sigma_z}
\end{aligned}$$

۳. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع $N(0,1)$ باشند، و $Z = X+Y$. مقدار $E[Z|X>0, Y>0]$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned}
E(Z|X>0,Y>0) &= E(X+Y|X>0,Y>0)\\
&= E(X|X>0,Y>0) + E(Y|X>0,Y>0)\\
&= 2E(X|X>0,Y>0) = 2E(X|X>0)\\
&= 2\int_0^\infty \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}|_0^\infty\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

۴. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $f(x) = \frac{a}{1+x^4}$ باشند، توزیع $arctan(\frac{Y}{X})$ را به دست آورید.

پاسخ: از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم :

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{y}{x}; v = x \\
&=> x = v; y = uv \\
&=> J = |\begin{matrix} 1 & 0 \\ u & v \end{matrix}| = v \\
f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}(v, uv)|v| \\
f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v, uv)|v| \,\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_Y(uv)|v| \,\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(v) f(uv)|v| \,\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+v^4} \frac{a}{1+u^4v^4} |v| \,\mathrm{d}v \\
&= 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+v^4)(1+u^4v^4)} |v| \,\mathrm{d}v \\
v^2 &- > t; 2vdv = dt \\
f_U(u) &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+(tu^2)^2)} \,\mathrm{d}v \\
&= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{1+t^2} + \frac{-u^4}{1+(tu^2)^2}) \frac{1}{1-u^4} \,\mathrm{d}v \\
&= \frac{a^2}{1-u^4} (tan^{-1}(t)|_0^{\infty} + -u^2 tan^{-1}(u^2 t))|_0^{\infty}) \\
&= \frac{a^2}{1-u^4} (\frac{\pi}{2} - u^2 \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{1+u^2} && (1) \\
, u = \frac{y}{x} &=> P(tan^{-1}(U) \leq \theta) = P(U \leq tan\theta) \\
&=> F_{tan^{-1}(\frac{Y}{X})}(\theta) = F_U(tan\theta) \\
&=> f_{tan^{-1}(\frac{Y}{X})}(\theta) = f_U(tan\theta) sec^2\theta && (2) \\
(1),(2) &=> f_{tan^{-1}(\frac{Y}{X})}(\theta) = \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{1+\theta^2} sec^2\theta
\end{aligned}
$$

۵. بخت آزمایی [1] «پول نقد انبوه» [2] به این صورت است که هر روز ۵ عدد بین ۱ تا ۳۵ (بدون جایگذاری) انتخاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم چقدر زمان خواهد برد تا تمام اعداد انتخاب شوند. a_j را میانگین تعداد روزهای باقیمانده تا رسیدن به خواسته‌ی نهایی درنظر بگیرید درحالی که j تعداد اعدادی باشد که هنوز انتخاب نشده‌اند. (پس $a_0 = 0$ و a_{35} میانگین تعداد روز مورد نیاز برای انتخاب همه‌ی ۳۵ عدد است.) رابطه‌ای بازگشتی برای a_j بدست آورید.

پاسخ:

$$
a_j = 1 + \Sigma_{n=0}^{5} \frac{a_{j-n}\binom{j}{n}\binom{35-j}{5-n}}{\binom{35}{5}}
$$

۶. به شما فرصتی طلایی برای مزایده برروی یک جعبه‌ی سحرآمیز حاوی پاداشی سحرآمیز داده شده است. مقدار پاداش حداقل صفر و حداکثر یک میلیون دلار است و مقدار دقیق آن نامعلوم. پس تصور می‌شود مقدار حقیقی جایزه، از توزیع Uniform برروی $[0,1]$

[1] Lottery
[2] Mass Cash

پیروی می‌کند. (دامنه‌ی Uniform برحسب میلیون دلار است.)
شما می‌توانید مقدار دلخواه b (بر حسب میلیون دلار) را برای مزایده انتخاب کنید. شما شانس دریافت جایزه را با پرداخت مبلغی بسیار پایین‌تر از مقدار واقعی آن دارید، اما همچنین اگر پیشنهاد بزرگی داده باشید، ممکن است دچار زیان شوید. اگر $b < \frac{2}{3}V$ ، آنگاه پیشنهاد شما رد شده و هیچ سود و زیانی درکار نخواهد بود، در غیر اینصورت پیشنهاد شما پذیرفته شده و جایزه را برنده می‌شوید که نتیجه برای شما $V - b$ خواهد بود. انتخاب b بهینه‌ی شما برای بیشینه کردن امید سود حاصل چقدر است؟
پاسخ:

$$E(V-b|b \geq \frac{2}{3}V)P(b \geq \frac{2}{3}V) = (E(V|V \leq \frac{3}{2}b) - b)P(V \leq \frac{3}{2}b)$$

مشخصا برای $b \geq \frac{2}{3}$ پیشنهاد ما قبول می‌شود اما مقداری پول از دست می‌دهیم. پس کافیست مسئله را فقط برای $b < \frac{2}{3}$ بررسی کنیم.
با توجه به Uniform بودن توزیع V داریم :

$$(E(V|V \leq \frac{3}{2}b) - b)P(V \leq \frac{3}{2}b) = (\frac{3}{4}b - b)\frac{3}{2}b = -\frac{3}{8}b^2$$

پس بهترین مقدار برای دریافت بیشترین امید ریاضی از سود حاصل $b = 0$ خواهد بود. پس بهترین انتخاب شرکت نکردن در مزایده است.

۷. فرض کنید رای دادن هر فرد یک جامعه به یک کاندید خاص توزیع برنولی $Ber(0.45)$ داشته باشد. همه نمونه‌های ممکن با اندازه ۴ را در این جامعه در نظر بگیرید و برای آنها میانگین و واریانس نمونه را حساب کنید. تابع جرم احتمال نمونه‌ها را به دست آورید.
پاسخ:

$$(0,0,0,0); \bar{X} = 0; S^2 = 0; p = (0.45)^0(0.55)^4 \qquad (0,0,0,1); \bar{X} = \frac{1}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^1(0.55)^3$$
$$(0,0,1,0); \bar{X} = \frac{1}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^1(0.55)^3 \qquad (0,0,1,1); \bar{X} = \frac{2}{4}; S^2 = \frac{1}{3}; p = (0.45)^2(0.55)^2$$
$$(0,1,0,0); \bar{X} = \frac{1}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^1(0.55)^3 \qquad (0,1,0,1); \bar{X} = \frac{2}{4}; S^2 = \frac{1}{3}; p = (0.45)^2(0.55)^2$$
$$(0,1,1,0); \bar{X} = \frac{2}{4}; S^2 = \frac{1}{3}; p = (0.45)^2(0.55)^2 \qquad (0,1,1,1); \bar{X} = \frac{3}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^3(0.55)^1$$
$$(1,0,0,0); \bar{X} = \frac{1}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^1(0.55)^3 \qquad (1,0,0,1); \bar{X} = \frac{2}{4}; S^2 = \frac{1}{3}; p = (0.45)^2(0.55)^2$$
$$(1,0,1,0); \bar{X} = \frac{2}{4}; S^2 = \frac{1}{3}; p = (0.45)^2(0.55)^2 \qquad (1,0,1,1); \bar{X} = \frac{3}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^3(0.55)^1$$
$$(1,1,0,0); \bar{X} = \frac{2}{4}; S^2 = \frac{1}{3}; p = (0.45)^2(0.55)^2 \qquad (1,1,0,1); \bar{X} = \frac{3}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^3(0.55)^1$$
$$(1,1,1,0); \bar{X} = \frac{3}{4}; S^2 = \frac{1}{4}; p = (0.45)^3(0.55)^1 \qquad (1,1,1,1); \bar{X} = 1; S^2 = 0; p = (0.45)^4(0.55)^0$$

$$P(\bar{X} = 0) = (0.55)^4$$
$$P(\bar{X} = \frac{1}{4}) = 4(0.45)^1(0.55)^3$$
$$P(\bar{X} = \frac{2}{4}) = 6(0.45)^2(0.55)^2$$
$$P(\bar{X} = \frac{3}{4}) = 4(0.45)^3(0.55)^1$$
$$P(\bar{X} = 1) = (0.45)^4$$
$$P(S^2 = 0) = (0.55)^4 + (0.45)^4$$
$$P(S^2 = \frac{1}{4}) = 4(0.45)^1(0.55)^3 + 4(0.45)^3(0.55)^1$$
$$P(S^2 = \frac{1}{3}) = 6(0.45)^2(0.55)^2$$

۸. دو سکه با ظاهر یکسان که احتمال شیر آمدن یکی p_1 و دیگری p_2 است را در نظر بگیرید. یکی از دو سکه را به تصادف انتخاب کرده و آن را n بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد شیرها در این n پرتاب باشد، میانگین و واریانس X را حساب کنید.

پاسخ: متغیر تصادفی I را برای انتخاب شدن سکه‌ی اول (با احتمال $\frac{1}{2}$)در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(X|I=1)P(I=1) + E(X|I=0)P(I=0) \\
&= \frac{1}{2}np_1 + \frac{1}{2}np_2 \\
&= \frac{n(p_1+p_2)}{2} \\
Var(X) &= E(Var(X|I)) + Var(E(X|I)) \\
&= E(Inp_1(1-p_1) + (1-I)np_2(1-p_2)) + Var(Inp_1 + (1-I)np_2) \\
&= (\frac{1}{2}np_1(1-p_1) + \frac{1}{2}np_2(1-p_2)) + \frac{1}{4}n^2(p_1-p_2)^2
\end{aligned}$$

۹. فرض کنید T_n زمان دریافت ایمیل nام باشد که هیچ دو ایمیلی در زمان یکسان دریافت نمی‌شوند (زمان دریافت ایمیل‌ها تحت مقیاسی پیوسته با نقطه‌ی آغازین مشخص بیان می‌شوند). تصور کنید فاصله‌ی زمانی بین دریافت ایمیل‌ها (دربرگیرنده‌ی T_1، $T_2 - T_1$، $\ldots$) از توزیع مستقل و یکپارچه[۳] $Expo(\lambda)$ پیروی می‌کنند.
هر ایمیل (مستقل از ایمیل‌های دیگر و بازه‌های زمانی بین دو ایمیل) با احتمال p هرزنامه[۴] و با احتمال $q = 1-p$ غیر هرزنامه می‌باشد.
فرض کنید X زمان دریافت اولین ایمیل غیر هرزنامه باشد.

راهنمایی برای هر دو بخش:
N را تعداد ایمیل‌ها تا اولین ایمیل غیر هرزنامه درنظر بگیرید (اولین ایمیل غیر هرزنامه را نیز بشمارید) و X را به صورت مجموع عبارات N بنویسید، سپس بر روی N قیدگذاری کنید.

(آ) میانگین و واریانس X را محاسبه کنید.
پاسخ:

$$\begin{aligned}
&X = \Sigma_{i=1}^{N} X_i \\
&X_1 = T_1, X_i = T_i - T_{i-1} \\
&=> N-1 \sim Geom(p) \\
E(X) &= E(E(X|N)) = E(\frac{N}{\lambda}) = \frac{1}{p\lambda} \\
Var(X) &= E(Var(X|N)) + Var(E(X|N)) \\
&= E(\frac{N}{\lambda^2}) + Var(\frac{N}{\lambda}) = \frac{1}{p\lambda^2} + \frac{1-p}{p^2\lambda^2} \\
&= \frac{1}{p^2\lambda^2}
\end{aligned}$$

(ب) تابع MGF را برحسب X حساب کنید. X چه توزیع مشهوری را نشان می‌دهد؟ (مقادیر پارامترهای این توزیع را ذکر کنید.)

[3] i.i.d
[4] Spam

پاسخ:

$$\begin{aligned}
MGF(X) &= E(e^{tX}) = E(E(\Pi_1^N e^{tX_i}|N)) \\
&= E(\Pi_1^N E(e^{tX_i}|N)) = E(\Pi_1^N E(e^{tX_i})) \\
&= E(E(e^{tX_1})^N) = E(M_1(t)^N) \\
, P_N(n) = pq^{n-1} & \\
=> MGF(X) &= p\Sigma_{n=1}^{\infty} M_1(t)^n q^{n-1} \\
&= \frac{p}{1}\Sigma_{n=1}^{\infty}(qM_1(t))^n \\
&= \frac{p}{q}\frac{qM_1(t)}{1-qM_1(t)} \\
&= \frac{\frac{p\lambda}{\lambda-t}}{1-\frac{q\lambda}{\lambda-t}} = \frac{p\lambda}{p\lambda-t} \\
&= Expo(p\lambda)MGF \\
=> X \sim Expo(p\lambda) &
\end{aligned}$$