

امتحان پایان ترم آمار و احتمال مهندسی

۱. (۳ نمره) فرض کنید Y_1, \dots, Y_n نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع پواسون با پارامتر λ باشند. تنها اطلاعاتی که از Y_i ها در اختیار داریم،

صفر یا غیر صفر بودن آنهاست. یعنی نمونه X_1, \dots, X_n را در اختیار داریم به طوری که:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{if } Y_i = 0 \\ 0 & \text{if } Y_i \neq 0 \end{cases}$$

الف) یک تخمینگر ML برای پارامتر λ بر حسب X_i ها پیدا کنید.

ب) مقدار $E[Y_1 | \sum_{i=1}^n Y_i]$ چقدر است؟

۲. (۳ نمره) کلاسی ۲۰ نفره در دانشکده فنی از ۵ دانشجوی برق، ۵ دانشجوی کامپیوتر، ۵ دانشجوی مکانیک، و ۵ دانشجوی صنایع

تشکیل شده است. استاد این کلاس دانشجویان را به صورت تصادفی به چهار گروه ۵ نفره تقسیم می‌کند. فرض کنید N_i تعداد

دانشجویان کامپیوتر در گروه i -ام باشد.

الف) $\text{Cov}(N_1, N_2)$ را حساب کنید.

ب) ضریب همبستگی بین $N_1 + N_2$ و $N_3 + N_4$ چقدر است؟

۳. (۳ نمره) فرض کنید شما در یک بازی شانسی شرکت کرده‌اید که در هر دست آن با احتمال p_1 برنده می‌شوید، با احتمال p_2 بازنده

می‌شوید، و با احتمال p_3 بازی به تساوی می‌انجامد. در هر دست که برنده شوید یک دلار جایزه می‌گیرید، و در صورت باخت یک

دلار جریمه می‌شوید. در حالت تساوی پولی جابجا نمی‌شود. فرض کنید متغیر تصادفی X نمایشگر میزان برد شما بعد از n دست

شرکت در این بازی باشد.

الف) تابع مولد گشتاور X را محاسبه کنید.

ب) میانگین و واریانس X را به کمک قسمت الف به دست آورید.

۴. (۳ نمره) متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال مشترک زیر هستند:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) تابع چگالی شرطی $f_Y(y|x)$ را به دست آورید.

ب) امید ریاضی $E[Y|X]$ را محاسبه کنید.

پ) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = Y/X$ را به دست آورید.

۵. (۳ نمره) یک برند سیگار در تبلیغات خود بیان می‌کند متوسط نیکوتین موجود در سیگارهای آن ۱/۵ میلی گرم است که در مقایسه

با سایر برندها بسیار کمتر است. یک گروه پژوهشی مستقل با آزمایش ۱۰۰ نخ از سیگارهای این برند، می‌خواهد مشخص کند آیا

ادعای این شرکت صحیح است یا مقدار نیکوتین سیگارهای آنها بیشتر از میزان ادعا شده است. با فرض این که انحراف معیار مقدار

نیکوتین موجود در سیگارهای این برند ۰/۲ میلی گرم است، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر p-value فرض اجرا شده توسط این گروه برابر با ۱/۶ درصد باشد، میانگین نمونه مورد استفاده آن‌ها چقدر بوده

است؟

ب) یک بازه اطمینان ۹۹٪ برای میانگین نیکوتین موجود در سیگارهای این برند پیدا کنید و آن را تفسیر نمایید.