University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین پنجم - توزیع بتا

علی و کیمیا

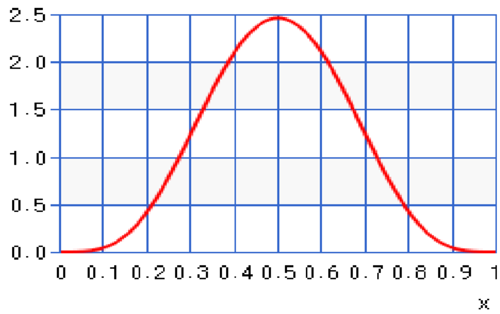
تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۰۹/۱۵

سؤال ۱.

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} ۰٫۲۵x^{۳} & , ۰ < x < ۱ \\ ۰ & , \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین متغیر تصادفی Y دارای توزیع بتا با تابع چگالی احتمال زیر است،



اگر X و Y از یکدیگر مستقل باشند، $Cov(X + ۰٫۲۵, XY)$ را محاسبه کنید.

سؤال ۲.

زوج (X, Y) مختصات یک نقطه بر روی دایره‌ی واحد هستند (یعنی $\{(x, y)|x^{۲} + y^{۲} \leqslant ۱\}$). مکان این نقطه به‌صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت بر روی دایره‌ی واحد تعیین می‌شود. نشان دهید X و Y از هم مستقل نیستند اما $cov[X, Y] = ۰$.

سؤال ۳.

شرکتی در دفترچه‌ی راهنمای محصولاتش طول عمر محصولات را با متغیر تصادفی $P(T \geq t) = e^{-t/5}$ نشان می‌دهد که T نمایشگر تعداد سال‌هایی‌ست که محصول تا قبل از آنکه خراب شود به درستی کار می‌کند (عمر محصول). به عنوان مثال احتمال آنکه محصول بیشتر یا مساوی ۲ سال کار کند برابر است با: $P(T \geq 2) = e^{-2/5} = 0/6703$.

الف) محصولی ازین شرکت خریده‌اید و تا دو سال بدون پیش آمدن مشکلی از آن استفاده کرده‌اید. احتمال آنکه این محصول در سال سوم خراب شود چقدر است؟

ب) اگر محصول تا n سال بدون پیش آمدن مشکلی استفاده شده باشد، احتمال آنکه در سال $n+1$ام خراب شود چقدر است؟ (n یک عدد طبیعی است)

سؤال ۴.

مسابقه‌ای در دانشگاه در حال برگزاریست. در جریان این مسابقه، تعداد زیادی کوپن که روی هریک از آن‌ها زوج مرتب (x, y) نوشته شده، در جعبه‌ای بزرگ قرار داده شده‌اند. بازیکنان باید در زمان مسابقه حداکثر تعداد از کوپن‌هایی که مجموع x و y یکسان دارند جمع‌آوری کنند و در نهایت برنده‌ی بازی شرکت‌کننده‌ایست که بیشترین تعداد کوپن با مجموع یکسان را گرد آورده باشد. در صورتی که شما قصد شرکت در این مسابقه را داشته باشید و بدانید که x و y مستقلند و توزیع x و y های داخل جعبه به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} exp(-x) & x \in R_X \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad R_X = [0, \infty)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} exp(-y) & y \in R_Y \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad R_Y = [0, \infty)$$

آنگاه از نظر شما جمع‌آوری کوپن‌هایی با کدام حاصل‌جمع x و y هوشمندانه‌تر است؟

سؤال ۵.

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$$

الف) تابع مولد گشتاور X را بیابید. (بازه‌ای را که این تابع متناهی می‌شود را مشخص کنید.)

ب) میانگین و واریانس X را با استفاده از تابع مولد گشتاور بیابید.

ج) U و Z متغیرهای تصادفی i.i.d با توزیع نمایی هستند. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y را به‌طوری‌که $Y = U - Z$ باشد، بدست آورید. سپس، با تحلیل این تابع، رابطه بین X و Y را مشخص کنید.

سؤال ۶.

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پیوسته و نامعلوم F و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پیوسته و نامعلوم G باشند، $n+m$ متغیر را مرتب کرده و تعریف می‌کنیم:

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر } i\text{امین متغیر مرتب شده در } n+m \text{ متغیر از متغیر نوع } X \text{ باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{1}$$

متغیر تصادفی $R = \sum_{i=1}^{m+n} iI_i$ مجموع رتبه های X بوده و پایه و اساس يك روش استاندارد آماری برای آزمون یکسان بودن توزیع های F و G است. این آزمون فرض $F = G$ را وقتي که R نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچك است می‌پذیرد. اگر فرض تساوی دو توزیع درست باشد، میانگین و واریانس R را محاسبه کنید.

سؤال ۷.

احتمالا با محصولات M&M آشنایی دارید. اسمارتیز آبی M&M در سال **۱۹۹۵** معرفی شد. پیش از آن، ترکیب رنگی اسمارتیزها در یک بسته به صورت زیر بود:

٪۳۰ قهوه‌ای، ٪۲۰ زرد، ٪۲۰ قرمز، ٪۱۰ سبز، ٪۱۰ نارنجی و ٪۱۰ نسکافه‌ای

پس از معرفی اسمارتیز آبی رنگ، ترکیب رنگ‌های داخل بسته به صورت زیر تغییر کرد:

٪۲۴ آبی، ٪۲۰ سبز، ٪۱۶ نارنجی، ٪۱۴ زرد، ٪۱۳ قرمز و ٪۱۳ قهوه‌ای

فرض کنید دوست شما یک بسته M&M مربوط به سال**۱۹۹۴** و بسته‌ی دیگری مربوط به سال **۱۹۹۶** دارد، اما شما نمی‌دانید که هر بسته متعلق به چه سالی است. او از هر بسته یک اسمارتیز به شما می‌دهد که یکی سبز و دیگری زرد رنگ می‌باشد. احتمال آن‌که اسمارتیز زرد از درون بسته‌ی متعلق به سال **۱۹۹۴** بیرون آمده باشد را بدست آورید. (فرض کنید این‌که دوست شما بسته‌هایی با این قدمت را چگونه بدست آورده است تاثیری در حل شما ندارد!)