

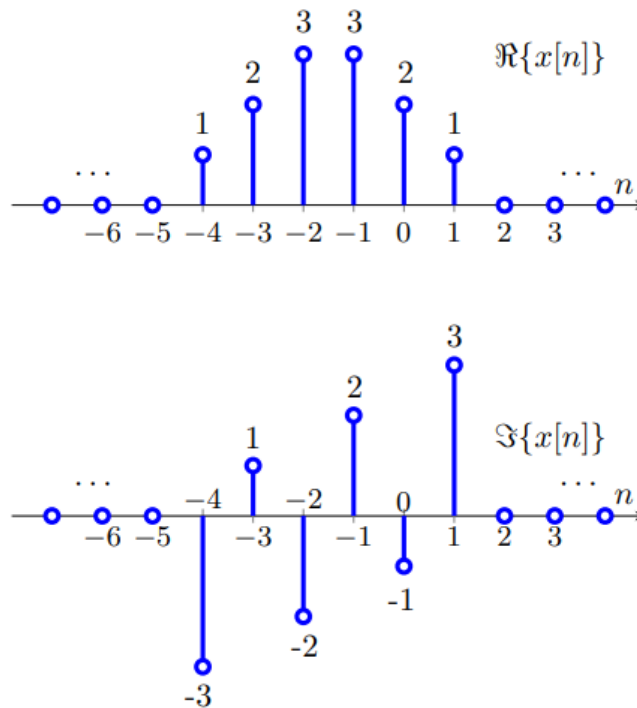
به نام خدا

تمرین سری هفتم

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها
دکتر اخوان



۱- سیگنال مختلط $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ می‌باشد. قسمت‌های حقیقی و موهومی سیگنال $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. (خارج از بازه نشان داده شده سیگنال صفر است)



محاسبات زیر را بدون محاسبه صریح تبدیل فوریه این سیگنال انجام دهید.

الف) $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$ را محاسبه کنید.

ب) $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$ را محاسبه کنید.

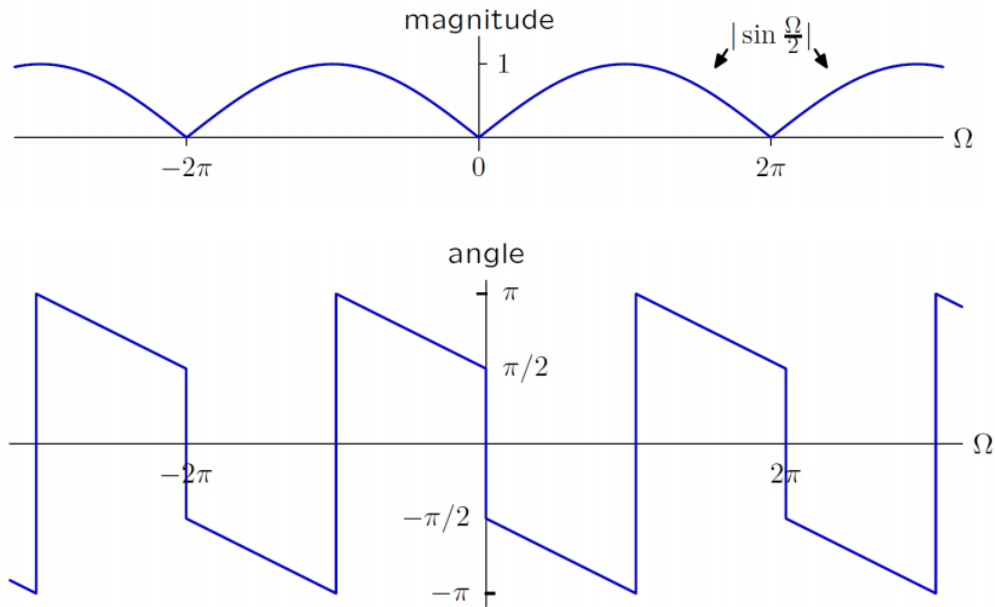
ج) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ را محاسبه کنید.

د) سیگنالی را تعیین و رسم کنید که تبدیل فوریه‌ی آن برابر $X(e^{-j\omega})$ باشد.

ه) سیگنالی را تعیین و رسم کنید که تبدیل فوریه‌ی آن برابر $j \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ باشد.

۲- تبدیل فوریه معکوس

اندازه و فاز تبدیل فوریه ی سیگنال $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. (گاهی اوقات Ω را برای نمایش فرکانس حوزه ی گسسته به کار می برند). سیگنال $x[n]$ را تعیین و رسم کنید.



۳- تعمیم رابطه ی پارسوال

سیگنال های مختلط مقدار $x[n]$ و $y[n]$ با تبدیل فوریه های $X(e^{j\omega})$ و $Y(e^{j\omega})$ مفروض اند.

الف) به وسیله ی استفاده از ویژگی های مناسب تبدیل فوریه ی گسسته، سیگنالی که تبدیل فوریه آن $X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$ است را بر حسب سیگنالی های $x[n]$ و $y[n]$ بیابید.

ب) به وسیله ی نتیجه ی قسمت قبل نشان دهید.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

این رابطه حالت عمومی تری از رابطه ی پارسوال است که در درس دیده اید.

ج) به کمک نتیجه ی قسمت قبل حاصل مجموع عددی زیر را به دست آورید.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{2\pi n} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{5\pi n}$$

۴- خواص تبدیل فوریه

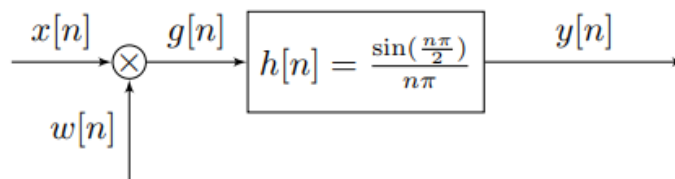
اگر سیگنال $x[n]$ مطابق

$$x[n] = (1 - j)\delta[n + 1] - \delta[n] + (3 + j)\delta[n - 1] + 2\delta[n - 2]$$

تعریف شده باشد، حاصل انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{d}{d\omega} \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} \right|^2 d\omega$ را بیابید.

۵- توصیف رفتار سیستم ها و سیگنال ها براساس تبدیل فوریه ی گسسته

در تمامی موارد برای سیستم شکل زیر، $G(e^{j\omega})$ را رسم کرده و $y[n]$ را بیابید.



الف) $w[n] = (-1)^n$. $x[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n\pi}$

ب) $w[n] = (-1)^n$. $x[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n\pi}$

ج) $w[n] = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)^n$. $x[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n\pi}$

د) $w[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. $x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$

۶- به دست آوردن اطلاعات سیگنال از روی تبدیل فوریه

سیگنال $x[n] = f[n] \cdot a^n u[n]$ که در آن $f[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره ی تناوب N است را در نظر بگیرید. چنانچه تبدیل فوریه $x[n]$ به صورت

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^3 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)}}$$

باشد، a و N را محاسبه کرده و حقیقی یا غیر حقیقی بودن $x[n]$ را با بیان علت بررسی کنید.

۷- شناسایی سیستم

در یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ ، پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = 1 + \cos\left(2\pi f_0 n + \frac{\pi}{3}\right)$ به صورت $y[n] = e^{j2\pi f_0 n} - j$ به دست آمده است. حاصل مجموع زیر را بیابید.

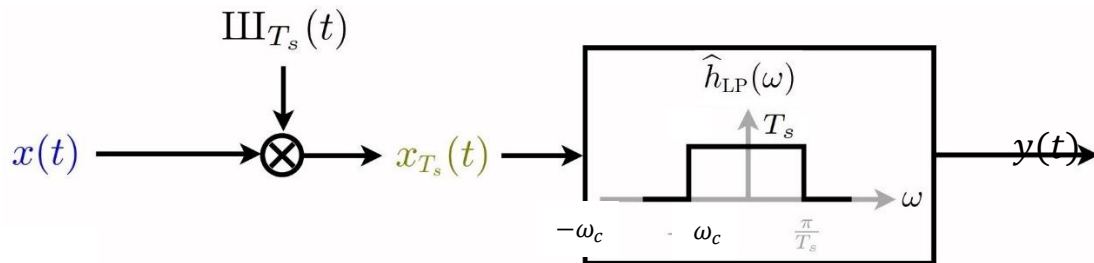
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\{h[n]\} \sin(2\pi f_0 n)$$

۸- سیستم های باز فاز خطی

یک سیستم گسسته LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ با طول محدود در نظر بگیرید، که در آن $h[n]$ فقط در بازه $0 \leq n \leq M$ مقدار ناصفر دارد. (M عددی فرد است) اگر پاسخ ضربه $h[n]$ دارای تقارن حول نقطه $\frac{M}{2}$ باشد، نشان دهید این سیستم دارای باز فاز خطی است.

۹- تبدیل فوریه ی پیوسته - نمونه برداری

شکل زیر را با فرض $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ و $\omega_c = \frac{5\pi}{12}$ در نظر بگیرید (بهره ی فیلتر در باند عبور برابر یک است):



الف) با فرض $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{\pi}{2}$ ، سیگنال خروجی $y_1(t)$ را به دست آورید.

ب) با فرض $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \pi$ ، سیگنال خروجی $y_2(t)$ را به دست آورید.

ج) کدام یک از سیگنال های $y_1(t)$ یا $y_2(t)$ مشابه سیگنال ورودی $x(t)$ است؟ با ذکر دلیل مختصر توضیح دهید در کدام یک از موارد، مرز نرخ نمونه برداری نایکوئیست رعایت شده است.