به نام خدا

حل کوییز شماره ۲

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دکتر اخوان

سوال ۱) آیا سیگنال $x[n]$ متناوب است؟ اگر بله دوره ی تناوب آن را محاسبه کنید. (۲نمره)

$$x[n] = \left| e^{j\sin\left(\frac{2n\pi}{\text{سال تولد+شماره دانشجویی شما}}\right)} \right| \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$$

حل سوال ۱) سیگنال $x[n]$ شامل دو جمله است. هر کدام را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$x_1[n] = \left| e^{j\sin\left(\frac{2n\pi}{\text{سال تولد+شماره دانشجویی شما}}\right)} \right| \rightarrow \boldsymbol{N_1 = 1}$$

دوره تناوب سیگنال بالا برابر یک است. اندازه هر سیگنال یا تابع نمایی به فرم کلی زیر برابر یک است.

$$\left|e^{jx}\right| = 1$$

در نتیجه عبارت اول سیگنال داده شده نیز یک تابع ثابت یک است که دوره تناوب توابع ثابت هر مقداری می‌تواند باشد که کوچکترین آن ها ۱ است.

حال جمله دوم را بررسی می‌کنیم:

$$x_2[n] = x_2[n+N_2] \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n+N_2)^2\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2 + \frac{\pi}{2}nN_2 + \frac{\pi}{4}N_2^2\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2 + \frac{\pi}{2}nN_2 + \frac{\pi}{4}N_2^2\right) \rightarrow \cos(A) = \cos\left(A + \frac{\pi}{2}nN_2 + \frac{\pi}{4}N_2^2\right)$$

میدانیم : $\cos(A) = \cos(A+2k\pi) \Longrightarrow \frac{\pi}{2}nN_2 + \frac{\pi}{4}N_2^2 = 2k\pi \xrightarrow{\times\frac{4}{\pi}} 2nN_2 + N_2^2 = 8k$

$$if\ N_2 = 4 \rightarrow\ 2nN_2 + N_2^2 = 8k$$

طبق معادله بدست آمده می بینیم که به ازای $N = 4$ که کوچکترین مقدار ممکن برای N است، معادله بدست آمده صادق است. پس دوره تناوب این سیگنال ۴ است. از آن جایی که سیگنال اصلی داده شده حاصل از ضرب x_1 و x_2 است در نتیجه حالا که دوره تناوب هر کدام را داریم نیاز است که برای بدست آوردن دوره تناوب نهایی، ک.م.م N_1 و N_2 را حساب کنیم.

$$[N_1, N_2] = [1,4] = 4 \rightarrow \boldsymbol{N = 4}$$

سوال ۲) رابطه ی ورودی خروجی یک سیستم پیوسته در زمان، به صورت روبروست:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$$

الف) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم بی حافظه است؟ (۱نمره)

حل: چون خروجی، حاصل انتگرال گیری روی سیگنال ورودی است و بازه انتگرال گیری شامل نقاط قبل یا بعد از نقطه فعلی است، پس سیستم حافظه دار است.

$-\infty \rightarrow$ نقاط قبل از نقطه فعلی را شامل می شود

$2t \rightarrow$ نقاط قبل یا بعد از نقطه فعلی را نشان می دهد

ب) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم علی است؟ (۱ نمره)

حل: از آن جایی که محدوده انتگرال گیری شامل محدوده $2t$ هم هست در نتیجه خروجی به ورودی در نقاط بعد از نقطه فعلی وابسته است. مثلا اگر $t = 5$ باشد و بخواهیم $y(5)$ را حساب کنیم داریم:

$$y(5) = \int_{-\infty}^{10} x(\tau) d\tau$$

بنابراین نیاز است که ضابطه $x(\tau)$ در نقطه ۱۰ را داشته باشیم تا حاصل انتگرال را بیابیم. در نتیجه سیستم علی نیست.

ج) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم پایدار است؟ (۱.۵نمره)

حل: فرض می‌کنیم در منفی بینهایت سیگنال ورودی مقداری محدود دارد و همواره از m کوچکتر است. در این صورت باید بررسی کنیم که آیا با وجود محدود بودن ورودی، خروجی هم محدود است یا خیر؟

$$t \to -\infty \implies \text{فرض}: x(t) < m \implies y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{2t} m d\tau = m|_{-\infty}^{2t} = \infty$$

به ازای ورودی محدود خروجی نامحدود خواهیم داشت. پس سیستم پایدار نیست.

د) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم وارون پذیر است؟ (۱.۵ نمره)

حل: از دو طرف رابطه داده شده برای سیستم مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dy(t)}{d(t)} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau = x(2t) \times \frac{d}{dt}(2t) - x(-\infty) \times \frac{d}{dt}(-\infty) = 2x(2t)$$

$$x(2t) = \frac{1}{2}\frac{dy(t)}{d(t)} \xrightarrow{u=2t} x(u) = \frac{1}{2}\frac{dy\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{1}{2}d(u)} = \frac{dy\left(\frac{u}{2}\right)}{d(u)} \to \boldsymbol{x(t) = \frac{dy\left(\frac{t}{2}\right)}{dt}}$$

چون توانستیم ورودی را براساس تابعی از خروجی بنویسیم، پس سیستم وارون پذیر است. (دقت شود که مشتق، اپراتوری ابطه ای خطی است در نتیجه رابطه بین ورودی و خروجی یک تابع خطی است و سیستم وارون پذیر خواهد بود.)

ه) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ (۱.۵نمره)

حل:

$$z(t) = x(t-t_0) \to w(t) = \int_{-\infty}^{2t} z(t)dt = \int_{-\infty}^{2t} x(t-t_0)dt$$

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(t-t_0)d(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(t-t_0)dt$$

$$\implies w(t) \neq y(t-t_0) \implies system\ is\ time\ variant$$

در نتیجه سیستم تغییر پذیر با زمان است.

و) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم خطی است؟ (۱.۵نمره)

حل:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau$$

$$z(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to w(t) = \int_{-\infty}^{2t} z(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{2t} \big(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\big)d\tau$$

$$w(t) = \alpha \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau + \beta \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau$$

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau + \beta \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow w(t) = y_3(t) \Longrightarrow system\ is\ linear$$

طبق استدلال های بالا می توان گفت که سیستم خطی است.