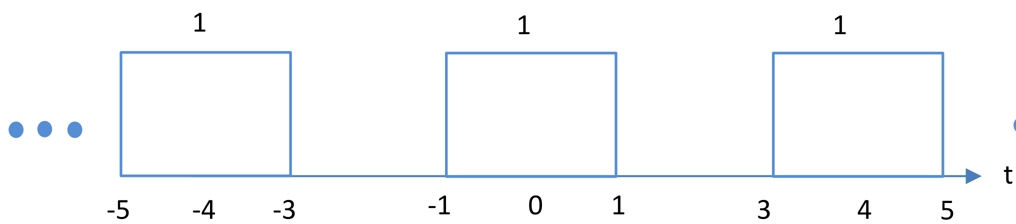
به نام او

کوییز شماره ی سه درس سیگنال و سیستم - مدت زمان امتحان: ۳۰ دقیقه

سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره ی تناوب $T = 4$ را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. ضرایب سری فوریه ی این سیگنال را با a_k نشان می دهیم.



۱- فُرم سیگنال های ویژه ی $x(t)$ را مشخص کنید. (۱ نمره)

$$\left\{ e^{j\frac{2\pi}{4}kt} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$$

1

۲- ضرایب a_k را به دست آورید. چرا فاز ضرایب صفر به دست آمده است؟ (۲ نمره)

$$a_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)\, e^{-j\frac{\pi}{2}kt}\, dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-j\frac{\pi}{2}kt}.dt$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{+j\frac{\pi}{2}k}}{-j\frac{\pi}{2}k} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\pi k}$$

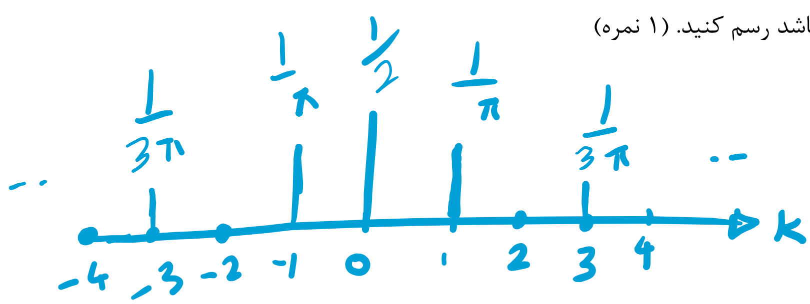
1.5

چون سیگنال $x(t)$ حقیقی و زوج است !!

0.5

۳- اندازه ی ضرایب a_k را با فرض این که محور افقی k باشد رسم کنید. (۱ نمره)

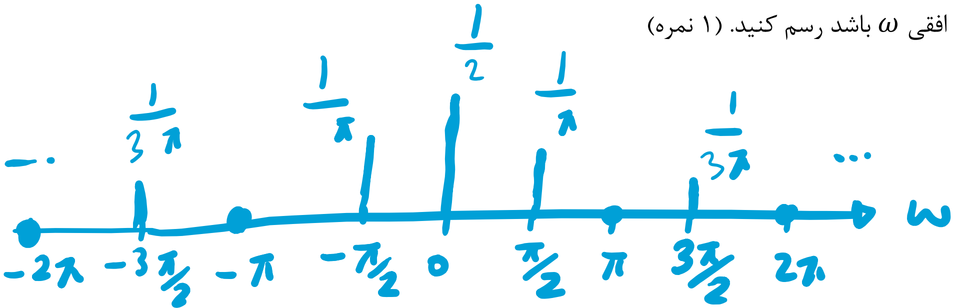
$|a_k|$



1

۴- اندازه ی ضرایب a_k را با فرض این که محور افقی ω باشد رسم کنید. (۱ نمره)

$|a_k|$



1

۵- عبارات زیر را حساب کنید. (۳ نمره)

الف) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ ب) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k$ ج) $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$ B

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\frac{\pi}{2}kt}$$

الف) $x(0) = 1$ 1

ب) $x(2) = \sum_k a_k e^{j\pi k} = \sum a_k (-1)^k = 0$ 1

ج) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} |x(t)|^2 . dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1}\right)^2 . dt$

$= \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$ 1 و $a_0 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 1 \, . dt = \frac{1}{2}$

توجه ضرایب ⇒ $\cancel{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2}^{\frac{1}{2}} = \cancel{|a_0|^2}_{\frac{1}{4}} + 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2}_{A} \rightarrow A = \frac{1}{8} \rightarrow B = |a_0|^2 + \frac{1}{8}$

$B = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

۶- سیگنال $x_1(t)$ را به صورت $x_1(t) = \underbrace{2\cos(2\pi t)}_{z(t)}\,x(t)$ از روی سیگنال $x(t)$ تولید می کنیم. دوره ی تناوب سیگنال $x_1(t)$ را به دست آورده، فرم سیگنال های ویژه ی آن را بنوسید و در نهایت ضرایب سری فوریه ی آن که با c_k نشان می دهیم را به دست آورید. (۲ نمره)

$$\left.\begin{array}{l} z(t) = z(t+1) \\ x(t) = x(t+4) \end{array}\right\} \quad x_1(t) = x_1(t+4)$$

$x_1(t)$ دوره ی تناوب

0.5

فرم سیگنال ویژه: $\left\{ e^{j\frac{\pi}{2}kt} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$

0.5

$$z(t) = e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t} = 1\,e^{j\frac{2\pi}{4}\times 4\times t} + 1\,e^{j\frac{2\pi}{4}\times -4t}$$

b_4 $\quad$ b_{-4}

0.5

ضریب سری فوریه ی $z(t)$ را b_k نشان می دهیم!!

$$\longrightarrow b_k = \delta[k-4] + \delta[k+4]$$

0.5

$$\longrightarrow c_k = b_k * a_k = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(k-4)\right)}{\pi(k-4)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+4)\right)}{\pi(k+4)}$$