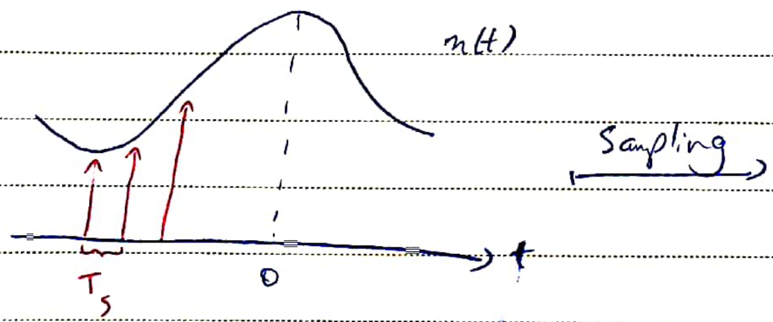
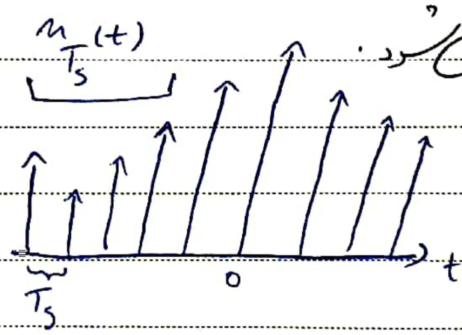
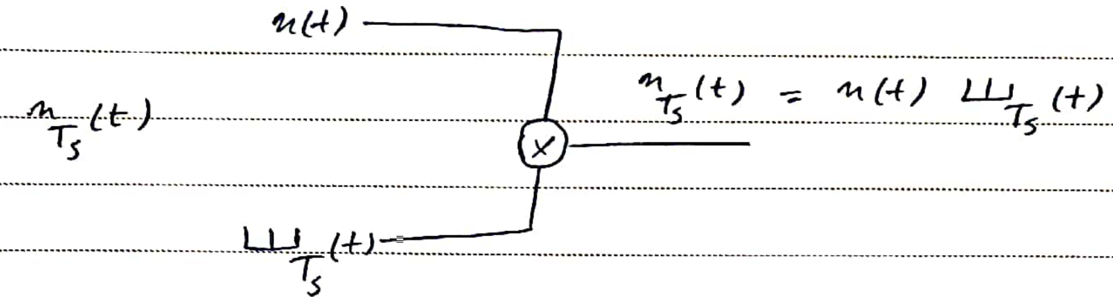
Sampling

نمونه برداری

یعنی از یک سیگنال آنالوگ پیوسته با یک فاصله خاص نمونه برداری کنیم و یک سیگنال گسسته را به وجود آوریم. طبیعتاً هرچه فرکانس نمونه برداری بیشتر باشد سیگنال گسسته به سیگنال پیوسته نزدیک‌تر می‌شود. در این قسمت به دنبال این هستیم که با استفاده از سیگنال دیجیتال گسسته یک سیگنال تا حد ممکن شبیه به سیگنال آنالوگ پیوسته‌ی اولیه تولید کنیم. این عملیات در کامپیوترها هم زیاد دیده می‌شود مثلاً در ضبط صدا از یک سیگنال آنالوگ پیوسته (صدا) در فواصل مشخص و با یک فرکانس مشخص نمونه برداری می‌شود و یک سیگنال دیجیتال گسسته به وجود می‌آید (حاصل ضبط شده‌ی صدا). سپس برای play کردن صدای ضبط شده، این سیگنال دیجیتال گسسته تا حد ممکن شبیه به سیگنال آنالوگ پیوسته‌ی اولیه شبیه سازی می‌شود و به اسپیکرها برای تولید صدا فرستاده می‌شود.







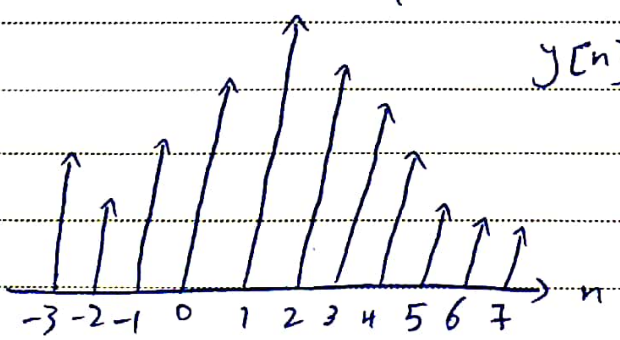
$$\Longrightarrow x_{T_s}(t) = x(t) \times Ш_{T_s}(t) = x(t) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - mT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)\,\delta(t - mT_s)$$

$$\Longrightarrow x_{T_s}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)\,\delta(t - mT_s)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)\, e^{-j\omega m T_s} = \hat{x}_{T_s}(\omega)$$

اگر $x_{T_s}(t)$ را به صورت یک سیگنال گسسته بنویسیم داریم:



$$\Rightarrow \hat{x}_{T_s}(\omega) = \sum_m \underbrace{x(mT_s)}_{y[m]} \underbrace{e^{-j\overbrace{(\omega T_s)}^{\omega'} m}}_{e^{-j\omega' m}}$$

$$= \sum_m y[m] e^{-j\omega' m} = \hat{y}(e^{j\omega'}) = \hat{y}(e^{j\omega T_s})$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{x}_{T_s}(\omega) = \hat{y}(e^{j\omega T_s})}$$

* بنابراین چه اندیس ورودی را زمان بگیریم و چه n بگیریم تغییری در فرم جواب به وجود نخواهد آمد و فقط به اندازه‌ی T_s اسکیل می‌شود. پس می‌توانیم محاسبات را با همان تبدیل فوریه با اندیس t انجام دهیم و در نهایت با اسکیل کردن آن را به تبدیل فوریه‌ی گسسته تبدیل کنیم.

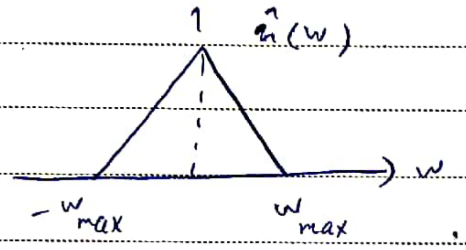
$$x_{T_s}(t) = x(t)\, \text{Ш}_{T_s}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{x}_{T_s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{x}(\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \text{Ш}_{\frac{2\pi}{T_s}}(\omega)$$

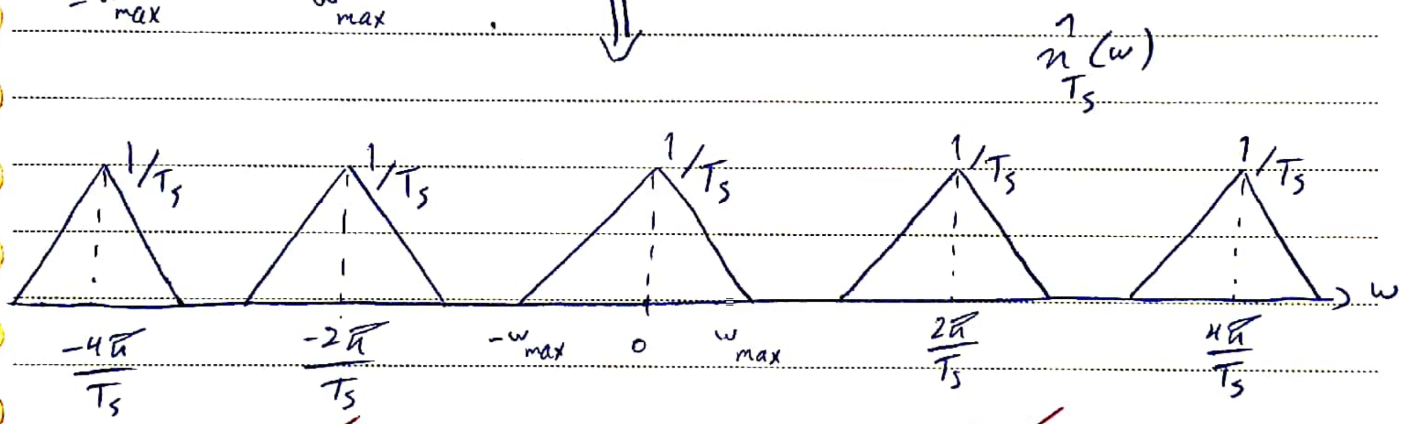
$$\Rightarrow \hat{x}_{T_s}(\omega) = \frac{1}{T_s} \hat{x}(\omega) * \text{Ш}_{\frac{2\pi}{T_s}}(\omega)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{x}_{T_s}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k \hat{x}\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)}$$

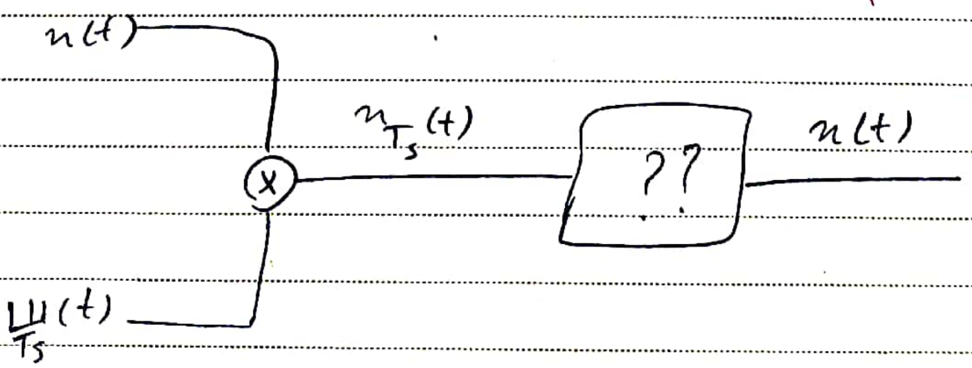
$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}_{T_s}(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k} \hat{x}\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)}$$

مثلاً فرض کنید $\hat{x}(\omega)$ به صورت زیر باشد:





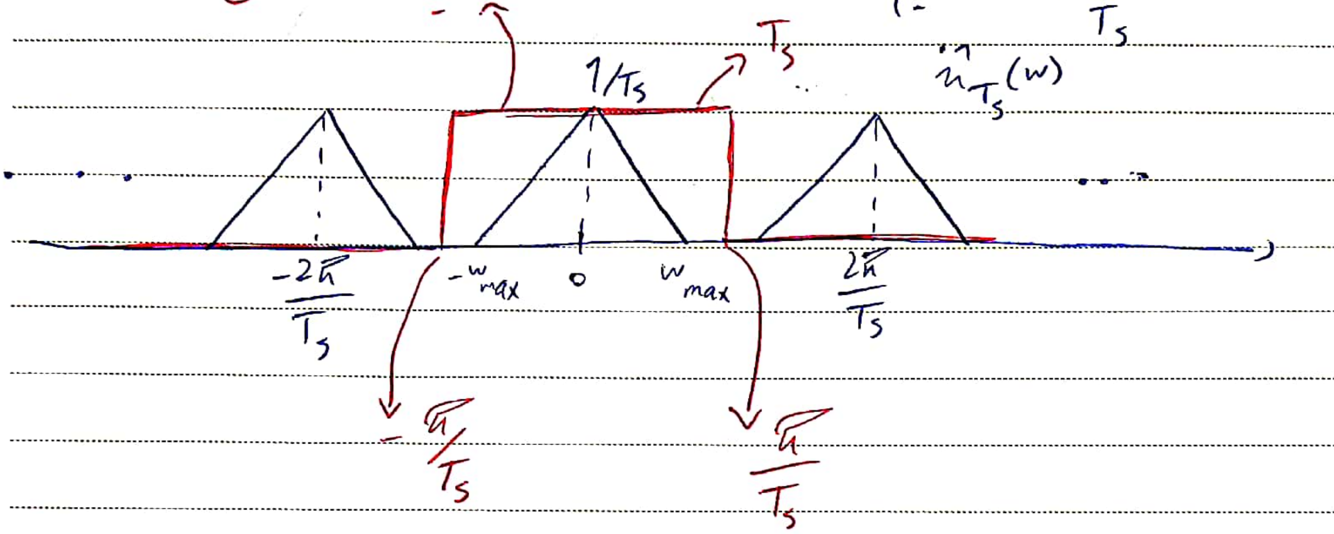
سؤال: چه کار کنیم که $\hat{x}_{T_s}(\omega)$ را به $\hat{x}(\omega)$ تبدیل کنیم تا با F^{-1} بتوانیم به سیگنال اولیه برسیم؟



Subject :
Year. Month. Date. ( )

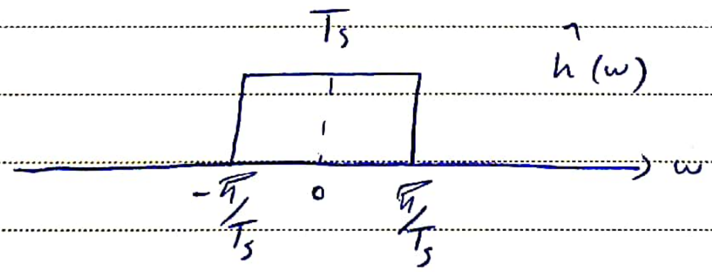
جواب: اگر $\hat{x}_{T_s}(\omega)$ را طوری فیلتر کنیم که فقط تناوب وسط نمودار باقی

بماند به $\frac{\hat{x}(\omega)}{T_s}$ می‌رسیم



پس بجای اسکیل کردن دامنه باید اندازه‌ی فیلتر را برابر با T_s قرار دهیم

که ارتفاع تناوب باقی مانده 1 شود پس:

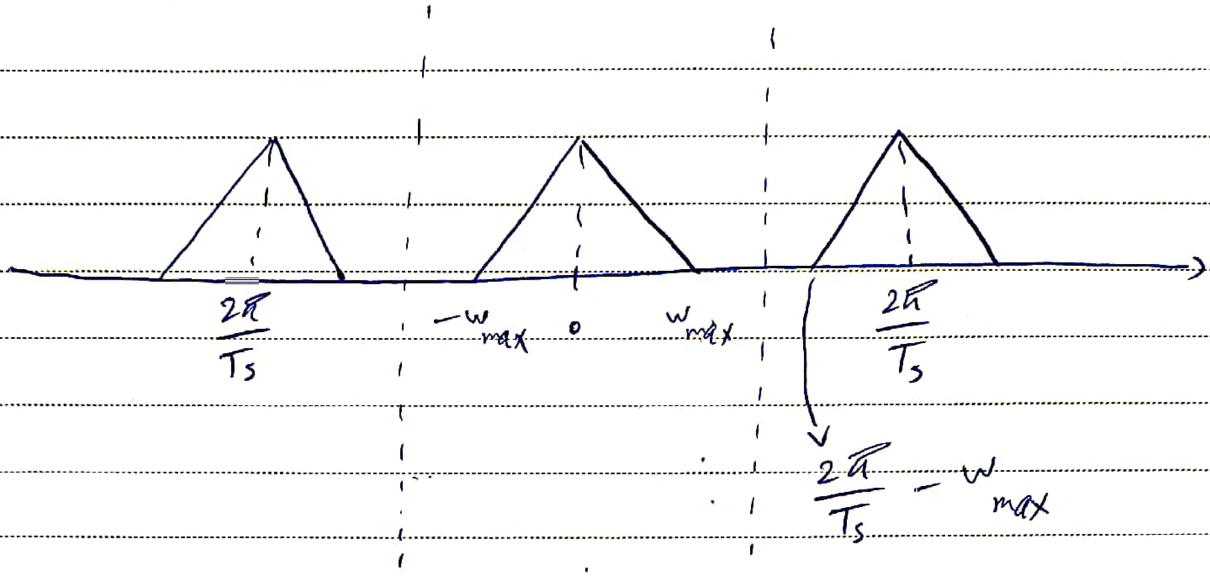


$$\Rightarrow \hat{h}(\omega) = \Pi_{2\pi/T_s}(\omega) \times T_s$$

سؤال: اگر ω_{max} آنقدر زیاد بود که باعث تداخل دو تناوب نشان داده

بدشکل می‌شد دیگر این نوع filtering پاسخگو نبود. در آن شرایط

باید چه کار کنیم؟ شرط استفاده از روش filtering چیست؟



شرط استفاده از روش filtering :

$$\frac{2\pi}{T_s} - w_{max} > w_{max} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_s} > 2w_{max}$$

$w_s \triangleq \frac{2\pi}{T_s}$: فرکانس نمونه برداری

$$\Rightarrow \boxed{w_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2w_{max}}$$

* فرکانس نمونه برداری باید بزرگتر از دو برابر بیشترین فرکانس موجود در سیگنال اصلی باشد تا بتوان از filtering استفاده کرد.

پس هرچه w_s بزرگتر یا T_s کوچکتر باشد بهتر است.

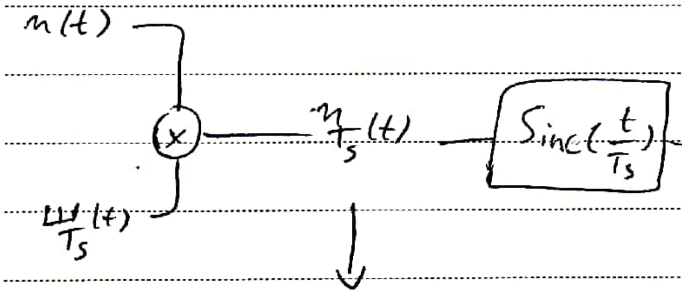
درون‌یابی filtering :

خلاصه

$$h(t) = \mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$\hat{h}(w) = \Pi_{\frac{2\pi}{T_s}}(w) \times T_s$$

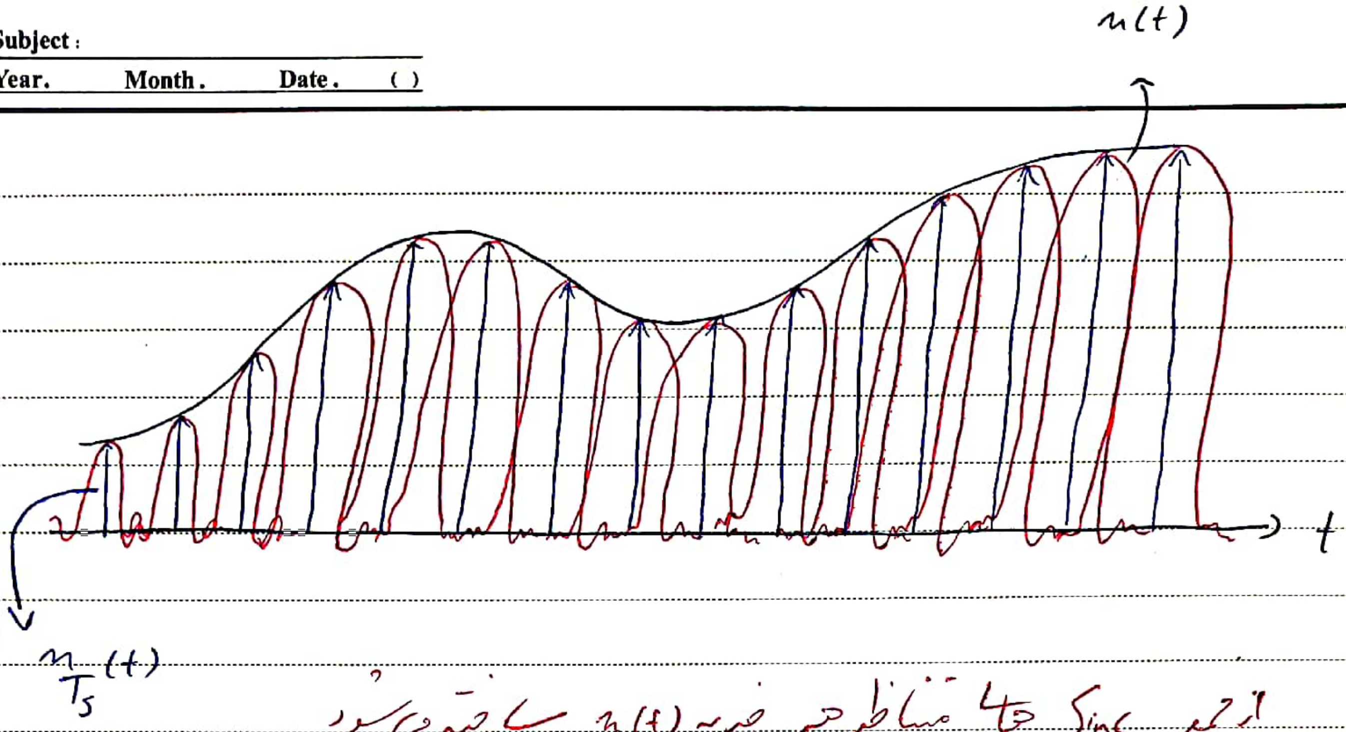
$$w_s = \frac{2\pi}{T_s} \geqslant 2w_{max}$$



$$z(t) = \sum_m x(mT_s)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-mT_s}{T_s}\right) = \sum_m x(mT_s)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{T_s}-m\right)$$

$$\sum_m x(mT_s)\,\delta(t-mT_s)$$

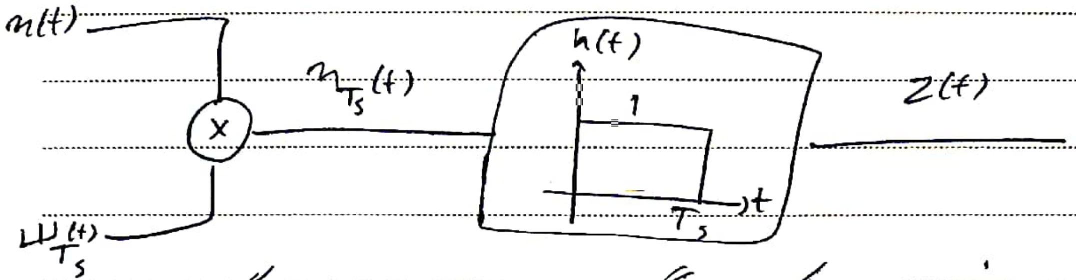
به عبارتی می‌توان گفت روی هر ضربه‌ی $x_{T_s}(t)$ یک Sinc با ارتفاع متناظر گذاشته می‌شود. بعداً ثابت می‌کنیم که با این روش $z(t)$ همان $x(t)$ اولیه می‌شود (در حوزه‌ی فرکانس $z(t)$ و $x(t)$ یکسان می‌شوند پس $x(t)$ و $z(t)$ در حوزه‌ی زمان هم یکسان خواهند بود.



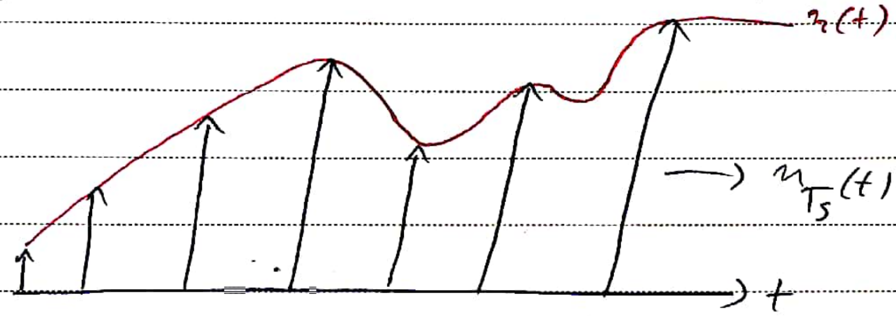
از جمع sinc ها متناظر هر ضربه $x(t)$ ساخته می‌شود

همان طور که مشاهده شد برای ساختن $x(t)$ باید بی نهایت تابع sinc را با هم جمع کنیم که به جواب دقیق برسیم اما همیشه نیاز به جواب کاملاً دقیق نداریم و از طرفی مجموع بی نهایت سیگنال با هم جمع کردن در عمل ممکن نیست، پس اگر تعداد محدودی از این سیگنال های sinc را با هم جمع کنیم به تقریبی برای $x(t)$ می‌رسیم. مثلاً در بخش صدا اگر کیفیت صدا کم و زیاد شود تا حدی هنوز می‌توانیم متوجه بشیم که چه اتفاقی می‌افتد. راه دیگر برای تقریب زدن این است که فرم تابع $h(t)$ را عوض کنیم

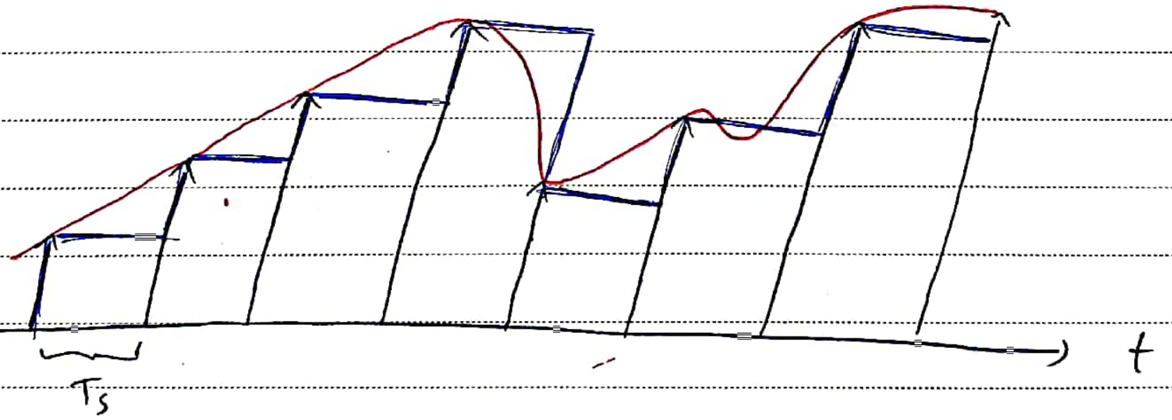
مثلاً در سیستم



روی هرکدام از ضربه‌های $x_{T_s}(t)$ یک پله گذاشته می‌شود. مثلاً اگر $x_{T_s}(t)$ به صورت زیر باشد



سیگنال $z(t)$ به صورت زیر می‌شود



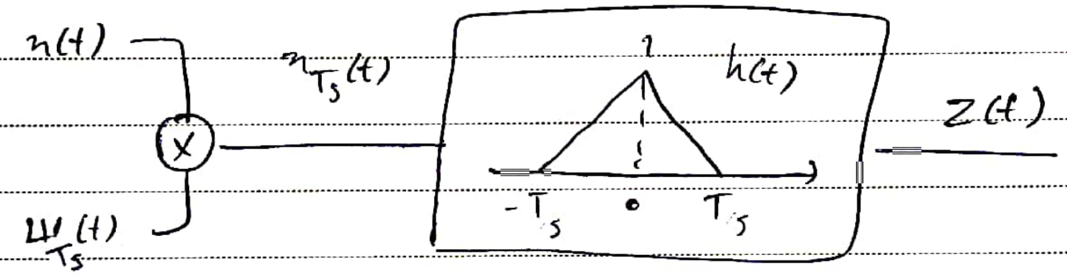
بنابراین در هر بازه فقط به مقدار ضربه اول بازه برای درونیابی احتیاج داریم

و مثل روش قبل به بی‌نهایت Sinc برای هر بازه نیاز نداریم بنابراین

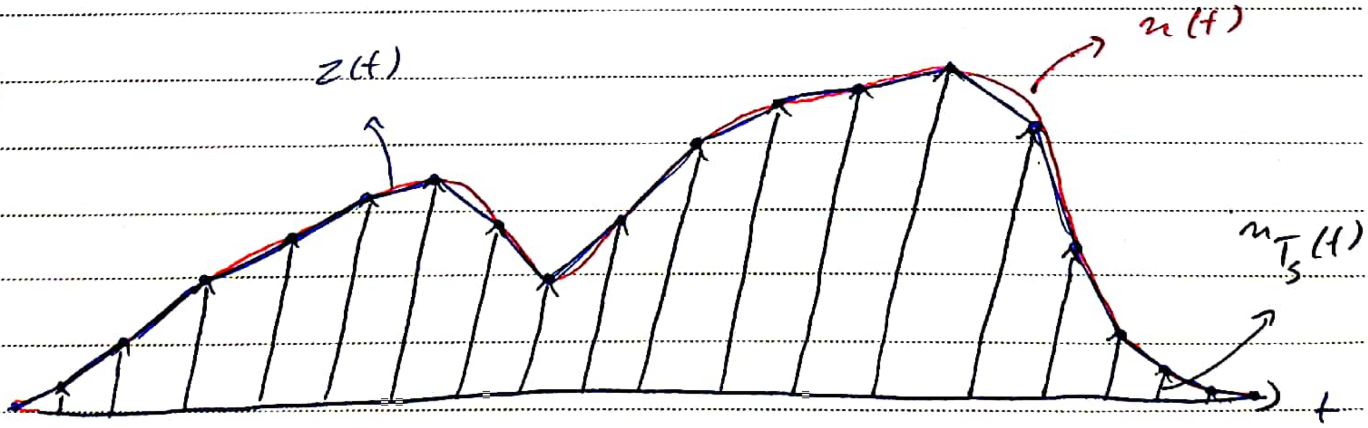
سرعت این روش بسیار بیشتر است اما همان طور که از روی شکل مشخص است دقت آن کمتر است.

* به روش گفته شده $\boxed{\text{zero-order hold}}$ گفته می‌شود

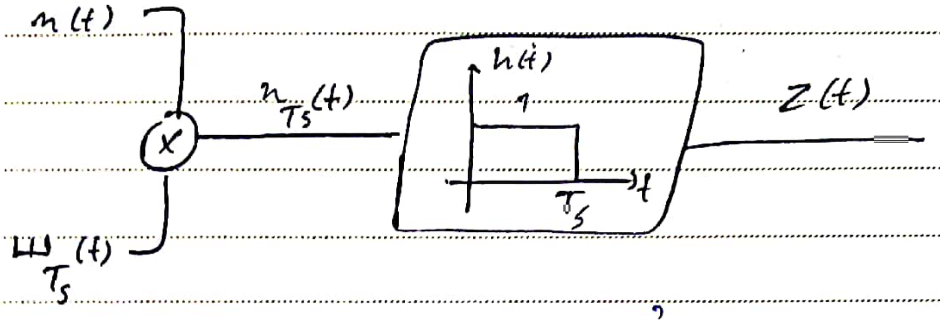
روش دیگر درونیابی خطی است که معادل با سیستمی با $h(t)$ $\Lambda_{2T_s}(t)$ است.



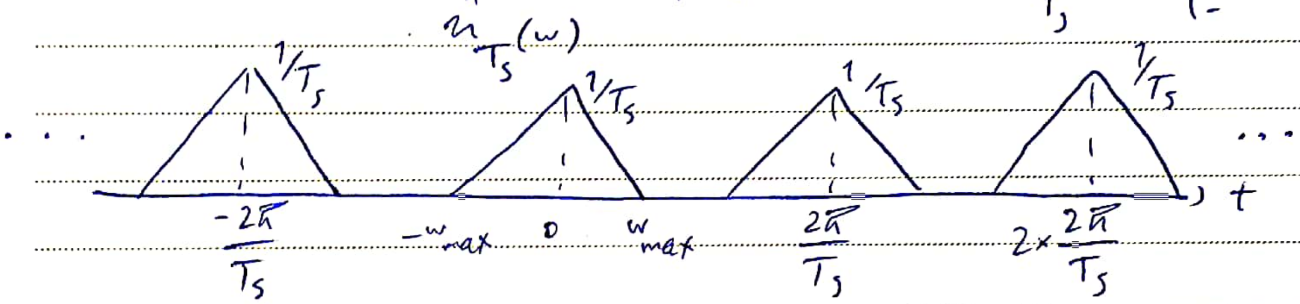
مثلاً برای همان سیگنال قبلی به صورت زیر عمل می‌کند.



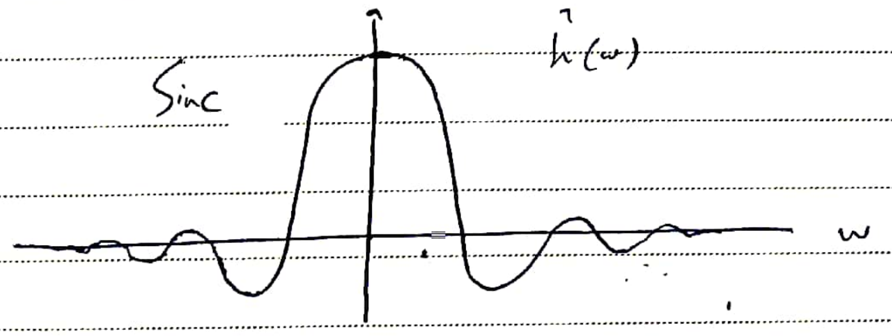
بررسی روش zero order hold در حوزه‌ی فرکانس:



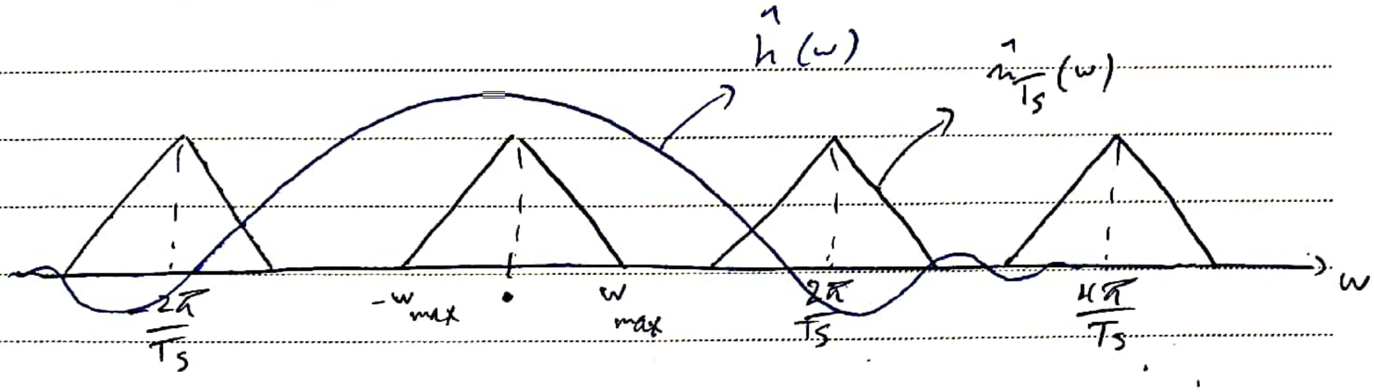
فرض کنیم $\hat{x}_{T_s}(\omega)$ به صورت زیر باشد



تبدیل فوریه‌ی h(t) به صورت زیر است:

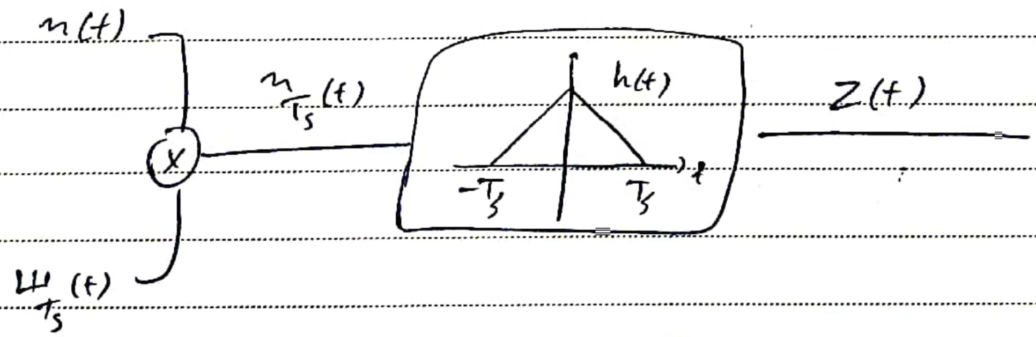


$$\hat{z}(\omega) = \hat{x}(\omega)\,\hat{h}(\omega)$$



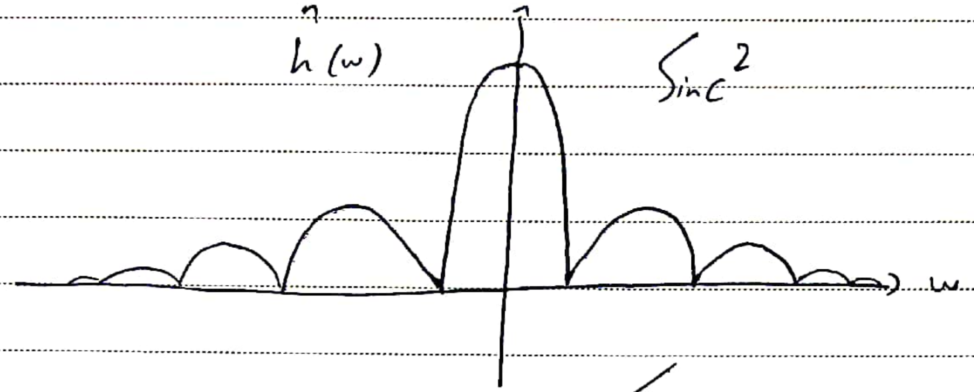
پس این سیستم به طور کلی تناوب اصلی وسط را تقریب رساید
تناوب های دیگر را تضعیف می‌کند. البته این تقریب و تضعیف به صورت
خطی نیست و سیگنال ناحیه دچار اعوجاج می‌کند.

بررسی روش Linear Interpolation در حوزه‌ی فرکانس

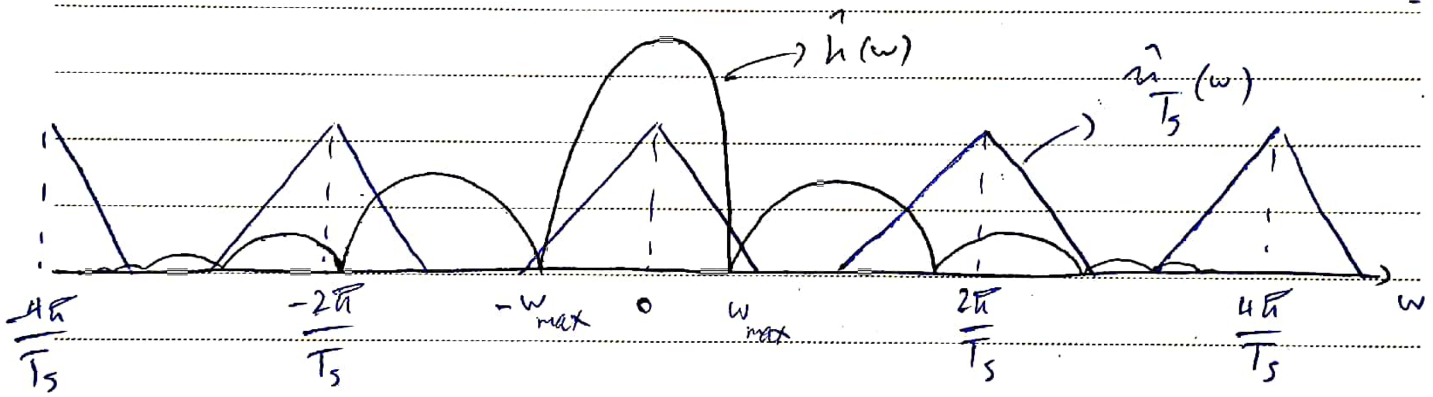


$\hat{x}_{T_s}(\omega)$ را مثل حالت قبل در نظر می‌گیریم.

تبدیل فوریه‌ی $h(t)$ به صورت زیر می‌شود



تاثیر Sinc^2 حول ۰ بیشتر از تاثیر Sinc حول ۰ است پس

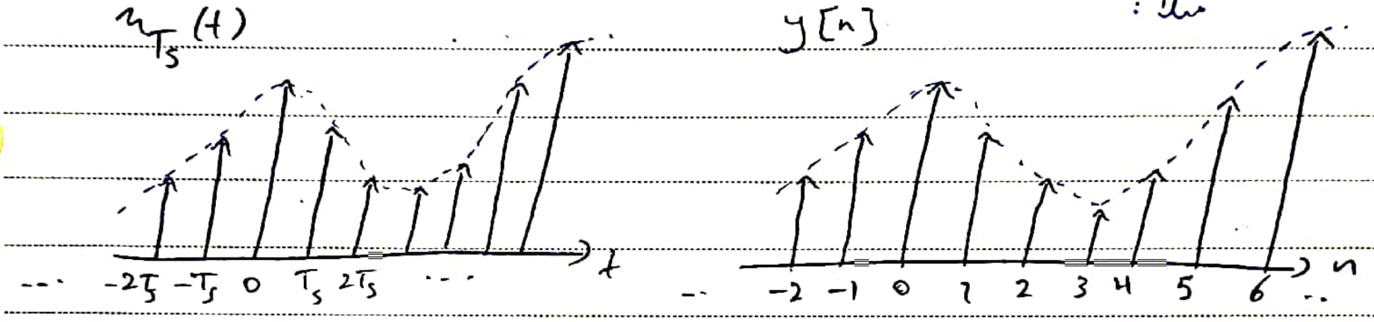


پس این سیستم به طور کلی تناوب اصلی وسط را تقویت و سایر تناوب‌ها دیگر را تضعیف می‌کند البته این تقویت و تضعیف به صورت خطی نیست و سیگنال تا حدی دچار اعوجاج می‌شود. به علت تاثیر بیشتر Sinc^2 حول ۰ نسبت به تاثیر Sinc حول ۰، دقت این روش از zero order hold بیشتر است که در حوزه زمان هم کاملاً مشهود بود

Subject :
Year. Month. Date. ( )

به دست آوردن تبدیل فوریه‌ی گسسته یک سیگنال از روی تبدیل فوریه‌ی پیوسته‌ی آن سیگنال که به صورت ضربه یک حوزه‌ی زمان بوده است

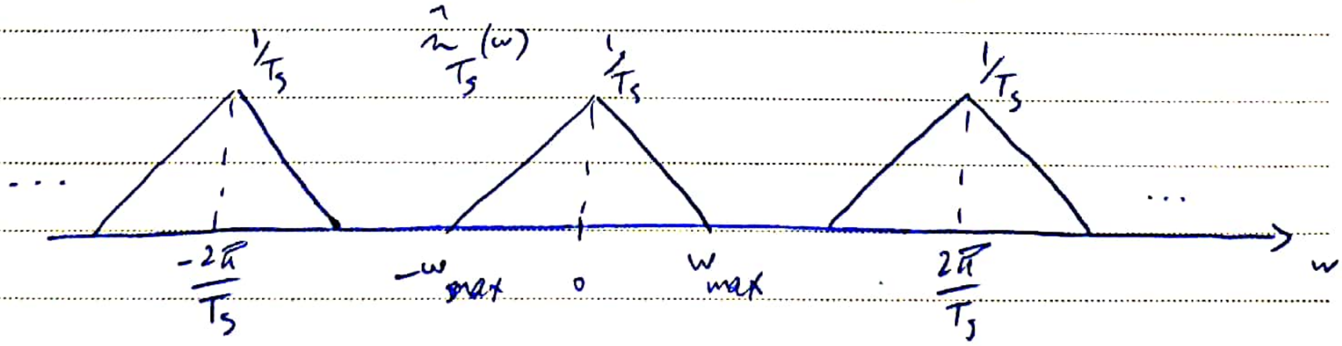
مثلاً :



همان طور که در اول درس نشان داده شد $\hat{y}(e^{j\omega T_s}) = \hat{x}_{T_s}(\omega)$

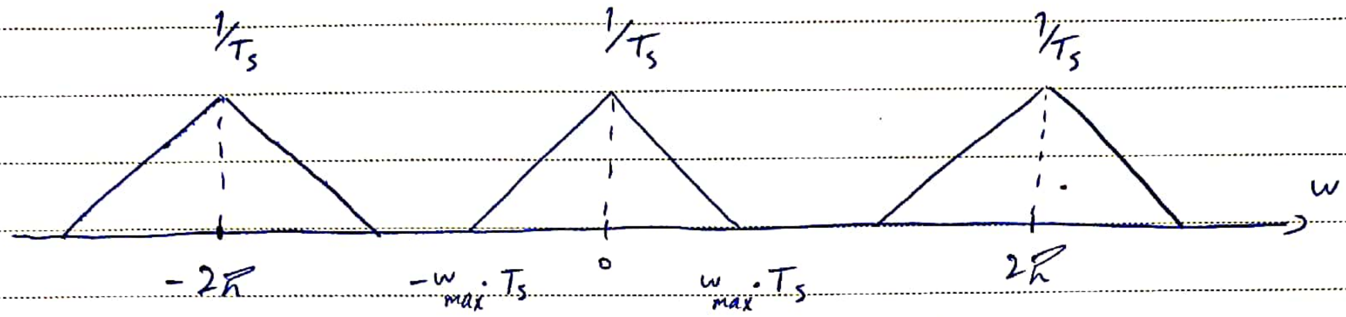
بنابراین $\boxed{\hat{y}(e^{j\omega}) = \hat{x}_{T_s}\left(\frac{\omega}{T_s}\right)}$ با $\hat{x}_{T_s}$

مثلاً اگر $\hat{x}_{T_s}(\omega)$ به صورت زیر باشد



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\hat{y}(e^{jw})$ به صورت زیر خواهد بود:



به عبارتی می‌توان گفت که دوره‌ی تناوب تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته برابر با $\frac{2\pi}{T_s}$ است و چون ما در این درس نمونه برداری را با فاصله‌ی زمانی 1s انجام می‌دهیم $(T_s=1)$ پس دوره‌ی تناوب تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته همواره برابر با 2π خواهد بود.

ASEMAN