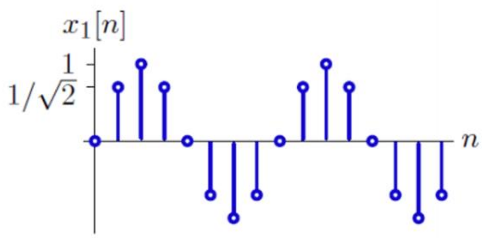
به نام خدا

پاسخ تمرین پنجم

(۱

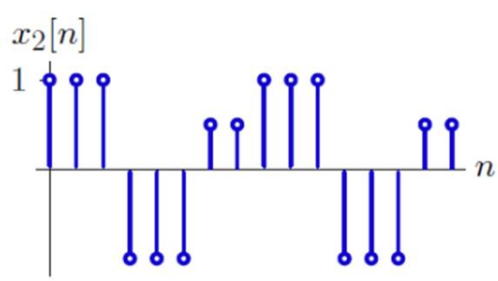


$$x_1[n] = \sin\left[\frac{n\pi}{4}\right] = \frac{e^{j\frac{n\pi}{4}} - e^{-j\frac{n\pi}{4}}}{2j} = \frac{1}{2j}e^{j\frac{n\pi}{4}} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{n\pi}{4}} \quad (1)$$

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}.s}{=\longrightarrow} \sum_{k=-4}^{3} a_k \times e^{j\frac{n2\pi k}{8}} \quad (2)$$

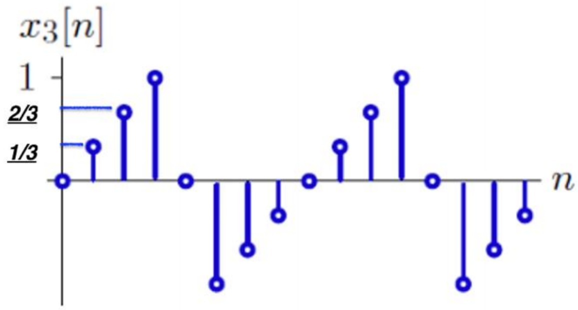
$$(1) and\ (2) \Rightarrow \sum_{k=-4}^{3} a_k \times e^{j\frac{n2\pi k}{8}} = \sum_{k=-4}^{3} a_k \times e^{j\frac{n\pi k}{4}} = \frac{1}{2j}e^{j\frac{n\pi}{4}} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{n\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 1 \\ -\frac{1}{2j} & k = -1 \\ 0 & k = 0, \pm 2, \pm 3, -4 \end{cases}$$



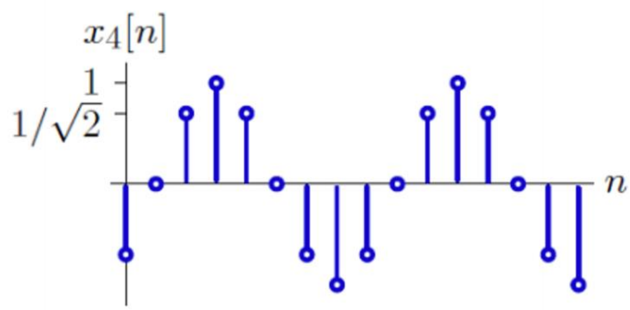
$$a_k = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{7} x_2[n] \times e^{-j\frac{n2\pi k}{8}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + e^{\frac{-j\pi k}{4}} + e^{\frac{-j\pi k}{2}} - e^{\frac{-3j\pi k}{4}} - e^{-j\pi k} - e^{\frac{-j5\pi k}{4}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-j6\pi k}{4}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-j7\pi k}{4}}\right)$$



$$a_k = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{7} x_3[n] \times e^{-j\frac{n2\pi k}{8}}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \left(e^{\frac{-jk\pi}{4}} + 2e^{\frac{-jk\pi}{2}} + 3e^{\frac{-j3k\pi}{4}} - 3e^{\frac{-j5k\pi}{4}} - 2e^{\frac{-j6k\pi}{4}} - e^{\frac{-j7k\pi}{4}}\right)$$

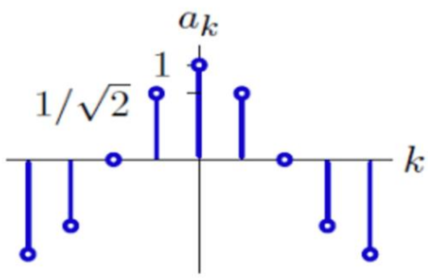


$It\ is\ evident:\ x_4[n] = x_1[n-1];\ so\ we\ can\ use\ the\ shift\ property:$

$$\Rightarrow\ x_4[n] = \xrightarrow{\mathcal{F}.s}\ b_k = \left\{a_k\, e^{-j\frac{2\pi k}{8}}\right\} \rightarrow\ a_k'\,s\ are\ Fourier\ series\ coefficient\ of\ x_1[n]$$

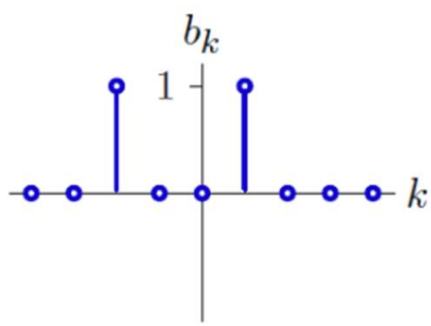
$$\Longrightarrow\ b_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{8}} & k = 1 \\ -\frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{8}} & k = -1 \\ 0 \quad k = 0, \pm 2, \pm 3, -4 & \end{cases}$$

۲)



$$a_k = \cos\left[\frac{k\pi}{4}\right] = \frac{e^{j\frac{k2\pi}{8}} + e^{-j\frac{k2\pi}{8}}}{2} = \frac{1}{8}\sum_{n=-4}^{3} x[n] \times e^{-j\frac{n2\pi k}{8}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x[-1] = x[1] = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x[n] = 0 \; for \; n = 0, \pm 2, \pm 3, -4 \end{cases} \Rightarrow x[n] = x[n+8]$$



$$x[n] = \sum_{k=-4}^{3} b_k \times e^{j\frac{n2\pi k}{8}} = b_{-2}\, e^{-j\frac{n\pi}{8}} + \; b_1\, e^{j\frac{n\pi}{4}} = e^{-j\frac{n\pi}{8}} + e^{j\frac{n\pi}{4}}; \; x[n] = x[n+8]$$

۳) دوره تناوب سیگنال $x(t)$ ، $T = 3$ است و یک دوره تناوب آن به شکل زیر میباشد:

$$x(t)|_{m=0} = \delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-2)$$

اگر ضرایب سری فوریه این سیگنال را a_k بنامیم :

$$a_k = \frac{1}{3}\int_0^3 \big(\delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-2)\big) e^{\frac{-j2\pi kt}{3}}\, dt = \frac{1}{3}\left(1 + e^{\frac{-j2\pi k}{3}} - e^{\frac{-j4\pi k}{3}}\right)$$

طبق خواص سیگنال های ویژه داریم :

$$b_k = a_k \times H\left(\frac{j2\pi k}{3}\right)$$

در نتیجه :

$$b_3 = a_3 \times H(j2\pi) = \frac{1}{3}\left(1 + e^{-j2\pi} - e^{-j4\pi}\right) \times (e^{\frac{j2\pi}{4}} - e^{\frac{-j2\pi}{4}}) = \frac{1}{3} \times 2j = \frac{2j}{3}$$

۴)

$$\sum_{n=-6}^{3} x[n] = 20 \Longrightarrow \sum_{\text{در یک تناوب}} x[n] = \frac{20}{2} = 10 \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{5}\sum_{\text{در یک تناوب}} x[n] = \frac{10}{5} = 2$$

$x[n]$ یک سیگنال حقیقی میباشد بنابراین $x[n] = |x[n]|$

$$\sum_{n=4}^{8} x[n]^2 = \sum_{\text{در یک تناوب}} x[n]^2 = 110 \xrightarrow{parseval} \sum_{n=-2}^{2} |a_n|^2 = \frac{1}{5}\sum_{\text{در یک تناوب}} |x[n]|^2 = 22$$

$$\Longrightarrow |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + 2^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 = 22$$

فرکانس های مربوط به ضرایب a_2، a_1، a_{-1}، a_{-2} به ترتیب $\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{4\pi}{5}$ میباشد؛ بنابراین از فیلتر گفته شده فقط a_2 و a_{-2} عبور میکنند:

$$-6\sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) = -6\left(\frac{e^{j\frac{4\pi n}{5}} - e^{-j\frac{4\pi n}{5}}}{2j}\right) = a_2 e^{j\frac{4\pi n}{5}} + a_{-2}e^{-j\frac{4\pi n}{5}} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = 3j \\ a_{-2} = -3j \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |-3j|^2 + |a_{-1}|^2 + 2^2 + |a_1|^2 + |3j|^2 = 22 \Longrightarrow |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 = 0$$

$$\Longrightarrow a_{-1} = a_1 = 0$$

۵)

$$x(t) = -x(t-3) \to a_k = \frac{1}{6}\int_0^6 x(t)e^{-j\frac{2\pi k}{6}t}dt = -\frac{1}{6}\int_0^6 x(t-3)e^{-j\frac{2\pi k}{6}t}dt \xrightarrow{t-3=t'}$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^6 x(t')e^{-j\frac{\pi k}{3}(t'+3)}dt' = -\frac{1}{6}\int_0^6 x(t')e^{-j\frac{\pi k}{3}t'} \times e^{-j\pi k}dt' = -a_k \times e^{-j\pi k}$$

$$\Longrightarrow a_k = -a_k \times e^{-j\pi k} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = a_{-2} = a_2 = 0 \\ a_1, a_{-1}, a_3, a_{-3} \neq 0 \end{cases}$$

$$a_{-3}^* = \frac{1}{6}\int_0^6 x^*(t)e^{-j\frac{2\pi k}{6}t}dt \xrightarrow{x(t)=x^*(t)} \frac{1}{6}\int_0^6 x(t)e^{-j\frac{2\pi k}{6}t}dt = a_3$$

$$\Longrightarrow a_3 a_{-3}^* = 25 = a_3^2 \Longrightarrow a_{-3}^* = a_3 = \pm 5 \Rightarrow a_{-3} = a_3 = \pm 5$$

$$\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}|x(t)|^2dt = 50 \xrightarrow{parseval} \sum_{k=-3}^{3}|a_k|^2 = 50 \Longrightarrow a_1 = a_{-1} = 0$$

$$x(t) = \pm 5\left(e^{-j\pi t} + e^{j\pi t}\right) = \pm 10\cos(\pi t)$$

۶)

$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-\frac{j\pi k}{3}n} \; ; \; y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-2k)$$

با توجه به رابطه ی $y(t)$، این سیگنال ضربه هایی در لحظات $t = 2k$ به اندازه $x[n]$ دارد؛ بنابراین دوره تناوب $y(t)$، دو برابر $x[n]$ و ۱۲ میباشد.

$$b_k = \frac{1}{12}\int_{0}^{12} y(t)e^{-\frac{j\pi k}{6}t}dt = \frac{1}{12}\int_{0}^{12}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-2n)\right\}e^{-\frac{j\pi k}{6}t}dt$$

$$= \frac{1}{12}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\int_{0}^{12}\delta(t-2n)\, e^{-\frac{j\pi k}{6}t}dt \xrightarrow{if\ 0\le 2n<12} = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-\frac{j\pi k}{6}2n}$$

$$= \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-\frac{j\pi k}{3}n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-\frac{j\pi k}{3}n}\right) = \frac{1}{2}a_k \Longrightarrow b_k = \frac{1}{2}a_k$$

۷)

الف)

$$a_k = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi k}{6}n} \xrightarrow{k=k'+6} = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi(k'+6)}{6}n} = 0 \qquad for\ 0 \le k' \le 5$$

$$\Longrightarrow 0 = \sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi k'}{6}n} \times e^{-jn\pi} = \sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi k'}{6}n} \times (-1)^n$$

$$\Longrightarrow \sum_{m=0}^{5} x[2m]e^{-\frac{j\pi k'}{6}2m} = \sum_{m=0}^{5} x[2m+1]e^{-\frac{j\pi k'}{6}(2m+1)} \qquad for\ 0 \le k' \le 5$$

$$a_k = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi k}{6}n} = \frac{1}{12}\left\{\sum_{m=0}^{5} x[2m]e^{-\frac{j\pi k}{6}2m} + \sum_{m=0}^{5} x[2m+1]e^{-\frac{j\pi k}{6}2m+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_k = \frac{1}{12}\left(2 \times \sum_{m=0}^{5} x[2m]e^{-\frac{j\pi k}{6}2m}\right) = \frac{1}{6}\sum_{m=0}^{5} x[2m]e^{-\frac{j\pi k}{3}m} \qquad for\ 0 \le k' \le 5}$$

با توجه به رابطه $y[n]$ متوجه میشویم که دوره تناوب آن ۶ میباشد:

$$y[n] = x[2n] \rightarrow \boldsymbol{b_k} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} y[n]e^{-\frac{j2\pi k}{6}n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[2n]e^{-\frac{j\pi k}{3}n} = \boldsymbol{a_k}$$

ب)

$$a_k = a_{k+6} \Rightarrow \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi k}{6}n} = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi(k+6)}{6}n}$$

$$= \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi(k+6)}{6}n} = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-\frac{j\pi k}{6}n} \times (-1)^n \Rightarrow \cdots$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{5} x[2m+1]e^{-\frac{j\pi k}{6}(2m+1)} = 0 \Rightarrow a_k = \frac{1}{12}\sum_{m=0}^{5} x[2m]e^{-\frac{j\pi k}{6}2m}$$

با توجه به رابطه $y[n]$ متوجه میشویم که دوره تناوب آن ۶ میباشد:

$$y[n] = x[2n] \rightarrow \boldsymbol{b_k} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} y[n]e^{-\frac{j2\pi k}{6}n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[2n]e^{-\frac{j\pi k}{3}n} = \boldsymbol{2a_k}$$

---

۸)

الف) ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)$ به صورت زیر میباشند:

$$b_k = \int_0^8 (\beta + \delta(t))e^{-\frac{j2\pi}{8}kt}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{8} + \beta & for\ k = 0 \\ \frac{1}{8} & for\ k > 0 \end{cases} ;\ b_k = a_k H\left(j\frac{2\pi}{8}k\right)$$

$$\Rightarrow b_0 = a_0 \times H\left(j\frac{2\pi}{8}k\right) \xrightarrow{a_0 = 0} b_0 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{8} + \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{8}$$

ب) بله میتوان سیگنال خروجی را استخراج کرد. با توجه به پاسخ قسمت اول:

k	ω	$H(j\omega)=\frac{b_k}{a_k}=\frac{j\pi k}{8}$
0	0	0
1	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{j\pi}{8}$
2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{j\pi}{4}$
3	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{j3\pi}{8}$
4	π	$\frac{j\pi}{2}$
5	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{j5\pi}{8}$
6	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{j3\pi}{4}$
7	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{j7\pi}{8}$

حال فقط فرکانس هایی که ضریب $\frac{2\pi}{4}$ دارند را لازم داریم:

k	ω	$H(j\omega)$
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{j\pi}{4}$
2	π	$\frac{j\pi}{2}$
3	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{j3\pi}{4}$
4	2π	0

5	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{j\pi}{4}$
6	3π	$\frac{j\pi}{2}$
7	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{j3\pi}{4}$

بنابراین سیگنال جدید به شکل زیر خواهد بود: