به نام خدا

پاسخ تمرین سری هشتم

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر اخوان

سوال ۱ .

$$\boldsymbol{X_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$*** \frac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} e^{-at}u(t) \;\; ; \;\; Re\{s\} > a \\ -e^{-at}u(-t) \;\; ; Re\{s\} < a \end{cases}$$

$$right-side\ ROC\ (Re\{s\} > -1) \Rightarrow x_1(t) = e^{-t}u(t) + te^{-t}u(t)$$

$$left-side\ ROC\ (Re\{s\} < -1) \Rightarrow x_1(t) = -e^{-t}u(-t) - te^{-t}u(-t)$$

$$\boldsymbol{X_2(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}}$$

$$X_2(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$*** \frac{d}{ds}X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -tx(t)$$

$$ROC : (Re\{s\} > 1) \Rightarrow x_2(t) = -u(t) - tu(t) + e^{t}u(t)$$

$$ROC : (0 < Re\{s\} < 1) \Rightarrow x_2(t) = -u(t) - tu(t) - e^{t}u(-t)$$

$$ROC : (Re\{s\} < 0) \Rightarrow x_2(t) = u(-t) + tu(-t) - e^{t}u(-t)$$

$$\boldsymbol{X_3(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}}$$

$$X_3(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} = \frac{s'}{s'^2+1}\Big|_{s'=s+1}$$

$$*** \; X(s-s_0) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{s_0}x(t)$$

$$ROC : (Re\{s'\} > 0 \equiv Re\{s\} > -1) \Rightarrow x_3(t) = e^{-t}\cos(t)\,u(t)$$
$$ROC : (Re\{s'\} < 0 \equiv Re\{s\} < -1) \Rightarrow x_3(t) = -e^{-t}\cos(t)\,u(-t)$$

$$\boldsymbol{X_4(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^2}$$
$$X_4(s) = \frac{1}{s^2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$
$$*** \; e^{-st_0}\,X(s) \;\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t - t_0)$$
$$right - side\ ROC\ (Re\{s\} > 0) \Rightarrow x_4(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$
$$left - side\ ROC\ (Re\{s\} < 0)\ \Rightarrow x_4(t)$$
$$= -tu(-t) + 2(t-1)u(-t+1) - (t-2)u(-t+2)$$

سوال ۲ .

برای یک سیگنال زوج داریم:

$x(t) = x(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = X(-s) \rightarrow$ نمودار صفر و قطب نسبت به موهومی متقارن باشد

فقط نمودار $X_2(s)$ این موضوع را تأیید نمی‌کند و در نتیجه $x_2(t)$ سیگنالی زوج نیست! و بقیه می توانند زوج باشند. توجه داشته باشید در مرکز نمودارهای $X_3(s)$ و $X_4(s)$ ممکن است دو تا صفر داشته باشیم و برای همین می توانند زوج باشند.

سوال ۳ .

$$\mathcal{L}\{x_1(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{x_1(t)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = e^{-2s}.\frac{1}{s+2}\ ; ROX_{x_1}\!: Re\{s\} > -2$$
$$\mathcal{L}\{x_2(-t+3)\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{x_2(-t)\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{e^{3t}u(-t)\} = e^{-3s}.\frac{-1}{s-3}\ ; ROX_{x_2}\!: Re\{s\} < 3$$
$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(-t+3)$$
$$\rightarrow Y(s) = \mathcal{L}\{x_1(t-2)\}.\mathcal{L}\{x_2(-t+3)\} = \frac{e^{-2s}}{s+2}.\frac{-e^{-3s}}{s-3} = \frac{-e^{-5s}}{(s+2)(s-3)}$$

با توجه به اینکه صفر و قطبی در ضرب حذف نشده است ، ROC برابر اشتراک دو ROC خواهد بود.

$$ROC_y : ROC_{x_1} \cap ROC_{x_2} \equiv -2 < Re\{s\} < 3$$

سوال ۴ .

از حقیقی بودن پاسخ ضربه و وجود قطب در $s = j$ پی می‌بریم که باید یک قطب دیگر در $s = -j$ وجود داشته باشد.

تابع تبدیل سیستم با فیدبک منفی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H(s)[X(s) - Y(s)] = Y(s) \rightarrow X(s)H(s) = Y(s)[1 + H(s)] \rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{1}{\frac{1}{H(s)} + 1}$$

با فرض علی بودن سیستم از اینکه پاسخ پله سیستم در بی‌نهایت به یک میل می‌کند داریم:

$$y_{step}(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{\frac{1}{H(s)} + 1} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{\frac{1}{H(s)} + 1} = 1$$

$$\rightarrow \lim_{s\to 0} \frac{1}{H(s)} = 0 \rightarrow \lim_{s\to 0} H(s) = \infty \rightarrow s = 0 \text{ قطب در }$$

تا به اینجای کار می‌دانیم ، سیستم سه قطب در $s = \pm j$ و $s = 0$ دارد.

$$H(s) = \frac{A}{s(s^2 + 1)}$$

از طرف دیگر پاسخ سیستم به e^t برابر e^t است.

$$e^t H(1) = e^t \rightarrow H(1) = 1 \rightarrow H(1) = \frac{A}{1(1^2 + 1)} = \frac{A}{2} = 1 \rightarrow A = 2$$

پس در نهایت این سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2 + 1)}$$

سوال ۵.

روش اول:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}ds=\sum_{t'=0}^{\infty}\int_{t'}^{t'+0.5}\left(\frac{1}{2}\right)^{t'}e^{-st}dt=\sum_{t'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{t'}\int_{t'}^{t'+0.5}e^{-st}dt$$

$$=\sum_{t'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{t'}\left(-\frac{1}{s}\right)[(e^{-st})|_{t=t'+0.5}-(e^{-st})|_{t=t'}]=\sum_{t'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{t'}\frac{e^{-st'}-e^{-s(t'+0.5)}}{s}$$

$$=\frac{1-e^{-0.5s}}{s}\sum_{t'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{t'}e^{-st'}=\frac{1-e^{-0.5s}}{s}\times\frac{1}{1-\frac{e^{-s}}{2}}=\frac{1-e^{-0.5s}}{s\left(1-\frac{e^{-s}}{2}\right)}\quad ;$$

$Re\{s\}>-\ln(2)$ توجه داشته باشید $s=0$ قطب نیست!

روش دوم:

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}[u(t-i)-u(t-i-0.5)]$$

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left[\frac{e^{-is}}{s}-\frac{e^{-(i+0.5)s}}{s}\right]=\frac{1-e^{-0.5s}}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}e^{-si}$$

$$=\frac{1-e^{-0.5s}}{s}\times\frac{1}{1-\frac{e^{-s}}{2}}=\frac{1-e^{-0.5s}}{s\left(1-\frac{e^{-s}}{2}\right)}\quad ;\ ROC: Re\{s\}>-\ln(2)$$

سوال ۶.

قسمت الف)

ابتدا تابع تبدیل دیاگرام بلوکی را بدست می‌آوریم:

$$H(s)=\frac{K}{s^2+s-2}$$

$$H(s)[X(s)-Y(s)]=Y(s)\to X(s)H(s)=Y(s)[1+H(s)]\to\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+H(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+H(s)}=\frac{1}{\frac{1}{H(s)}+1}=\frac{K}{s^2+s-2+K}$$

برای اینکه سیستم علّی و پایدار باشد باید ثابت کنیم تمامی قطب های آن سمت چپ محور موهومی قرار دارند. پس بررسی می‌کنیم به ازای چه شرایطی از K قطب ها هر دو منفی هستند.

$$s^2+s-2+K=0 \rightarrow \begin{cases} s_1 s_2 = K-2 \\ s_1+s_2=-1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه جمع منفی شده یعنی حداقل یک قطب منفی است. در صورتی که حاصل ضرب مثبت شود پس هر دو قطب منفی هستند.

$$\rightarrow K-2>0 \rightarrow \boldsymbol{K>2}$$

قسمت ب)

برای اینکه قطب های سیستم حقیقی باشد ، باید Δ معادله درجه دوم مثبت باشد.

$$\Delta = 1-4(-2+K)=9-4K>0 \rightarrow \boldsymbol{K<\frac{9}{4}}$$

سوال ۷ .

$$Y(s)=\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x(t-kT)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}\{x(t-kT)\}=X(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT}=X(s)\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$ROC \equiv Re\{s\}>0$$

سوال ۸ .

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nT}\delta(t-nT)$$

قسمت الف)

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nT}\delta(t-nT)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nT}\mathcal{L}\{\delta(t-nT)\}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nT}e^{-nTs}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2+s)nT}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-(2+s)T}}\ ; Re\{s+2>0\}, T>0$$

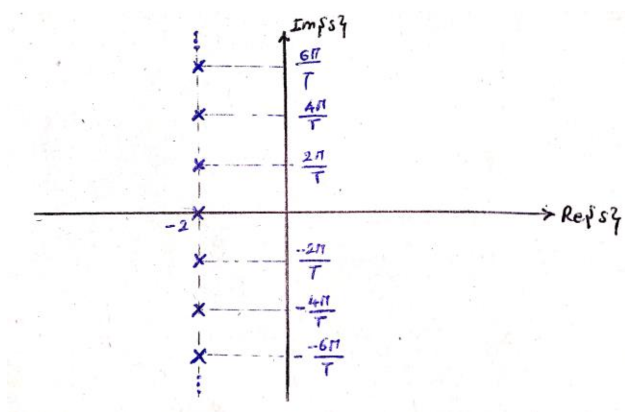
$$\rightarrow \boldsymbol{X(s)=\frac{1}{1-e^{-(2+s)T}}}\ ; \quad \boldsymbol{ROC: Re\{s\}>-2}$$

قسمت ب)

این تبدیل ، صفری ندارد.

قطب ها : $1 - e^{-(2+s)T} = 0 \rightarrow e^{-(2+s)T} = 1 \rightarrow \cos(j(2+s)T) + j\sin(j(2+s)T) = 1$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\big((2+s)T\big) = 1 \\ \sin\big((2+s)T\big) = 0 \end{cases} \rightarrow j(2+s)T = \pm 2k\pi \rightarrow s = \pm\frac{j2k\pi}{T} - 2\,; k \in \mathbb{Z}$$



سوال ۹ .

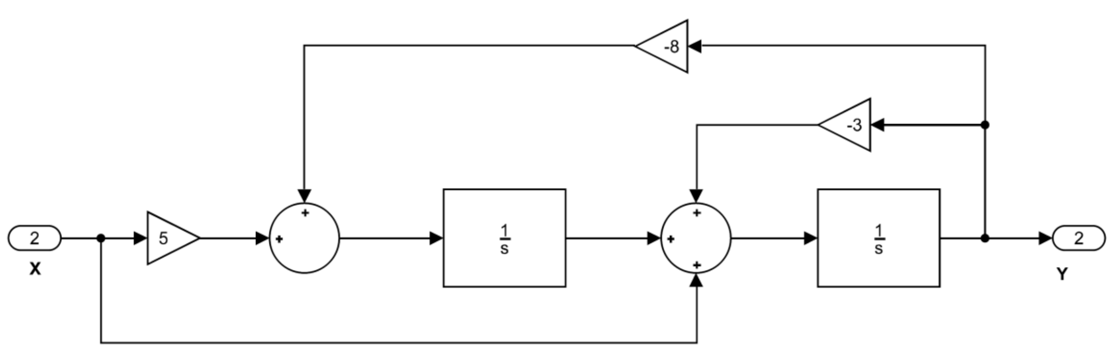
قسمت الف)

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+5}{s^2+3s+8}}$$

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 8Y(s) = sX(s) + 5X(s) \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 8y(t) = \frac{dx}{dt} + 5x(t)$$

$$s^2Y(s) = \big(5X(s) - 8Y(s)\big) + \big(X(s) - 3Y(s)\big)s \rightarrow Y(s)$$

$$= \frac{1}{s^2}\big(5X(s) - 8Y(s)\big) + \frac{1}{s}\big(X(s) - 3Y(s)\big)$$



قسمت ب)

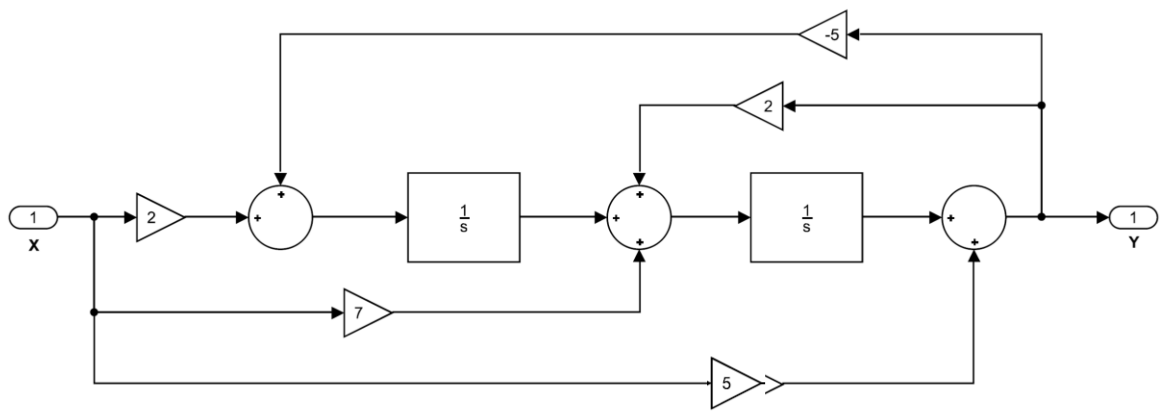
$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s^2 + 7s + 2}{s^2 - 2s + 5}}$$

$$s^2Y(s) - 2sY(s) + 5Y(s) = 5s^2X(s) + 7sX(s) + 2X(s) \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y(t)$$

$$= 5\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 2x(t)$$

$$s^2Y(s) = \big(2X(s) - 5Y(s)\big) + \big(7X(s) + 2Y(s)\big)s + 5X(s)s^2$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}\big(2X(s) - 5Y(s)\big) + \frac{1}{s}\big(7X(s) + 2Y(s)\big) + 5X(s)$$



قسمت ج)

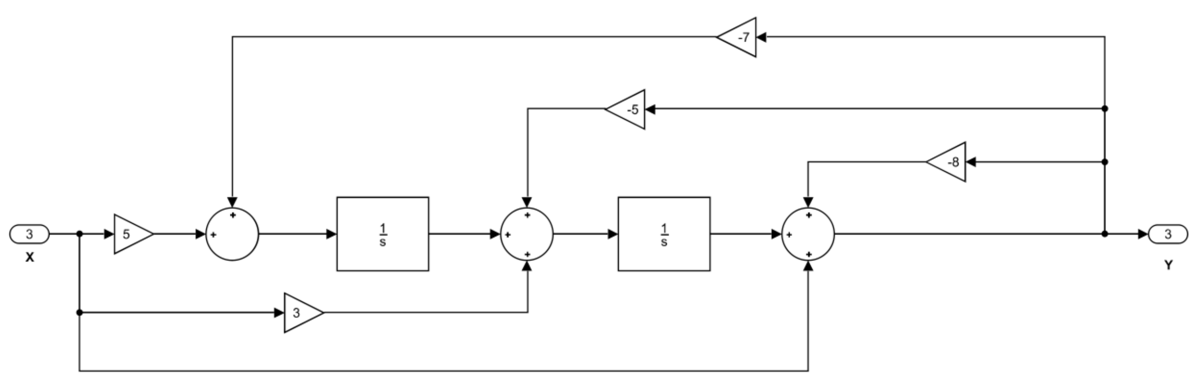
$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + 8s^2 + 5s + 7}}$$

$$s^3Y(s) + 8s^2Y(s) + 5sY(s) + 7Y(s) = s^2X(s) + 3sX(s) + 5X(s)$$

$$\rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} + 8\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 7y(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 5x(t)$$

$$s^3Y(s) = \big(5X(s) - 7Y(s)\big) + \big(3X(s) - 5Y(s)\big)s + \big(X(s) - 8Y(s)\big)s^2$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3}\big(5X(s) - 7Y(s)\big) + \frac{1}{s^2}\big(3X(s) - 5Y(s)\big) + \frac{1}{s}\big(X(s) - 8Y(s)\big)$$



سوال ۱۰ .

خاصیت مشتق زمانی تبدیل لاپلاس یک طرفه:

$$\mathcal{L}_u\{x^{(n)}(t)\} = s^n X_u(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'^{(0^-)} - \cdots - x^{(n-1)}(0^-) \xRightarrow{initial\ rest} \mathcal{L}_u\{x^{(n)}(t)\} = s^n X_u(s)$$

قسمت الف)

$$\boldsymbol{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 5\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)}$$

$$s^2Y_u(s) + 11sY_u(s) + 24Y_u(s) = 5sX_u(s) + 3X_u(s) \to [s^2 + 11s + 24]Y_u(s) = [5s + 3]X_u(s)$$

$$H_u(s) = \frac{Y_u(s)}{X_u(s)} = \frac{5s+3}{(s+8)(s+3)} = \frac{7.4}{s+8} - \frac{2.4}{s+3}$$

$$\to h(t) = 7.4e^{-8t}u(t) - 2.4e^{-3t}u(t)$$

قسمت ب)

$$\boldsymbol{\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 4\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)}$$

$$s^4Y_u(s) + 4sY_u(s) = 2X_u(s) \to [s^4 + 4s]Y_u(s) = 2X_u(s)$$

$$H_u(s) = \frac{Y_u(s)}{X_u(s)} = \frac{2}{s(s^3+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\sqrt[3]{4}} + \frac{Cs+D}{s^2 - \sqrt[3]{4}s + \sqrt[3]{16}}$$

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{6}, \qquad C = -\frac{1}{3}, \qquad D = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$$

$$H_u(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{6}}{s+\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{3}\frac{s - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}}{s^2 - \sqrt[3]{4}s + \sqrt[3]{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{6}}{s+\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{3}\frac{s - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}}{\left(s - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt[3]{16}}{4}}$$

$$\to h(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{6}e^{-\sqrt[3]{4}t}u(t) - \frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{4}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}t\right)$$