به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

گزارش شماره ۷ درس سیگنال ها و سیستم ها

نام و نام خانوادگی	محمد طاها مجلسی کوپایی
شماره دانشجویی	۸۱۰۱۰۱۵۰۴

تمرین اول - یک مدار RLC سری را با فرض وجود شرایط **initial rest** در نظر بگیرید. می دانیم با استفاده از قانون KVL رابطه ی زیر برقرار است:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_{in}(t)$$

که در این رابطه داریم:

$$v_R(t) = R\, i(t), \quad v_L(t) = L\frac{d\, i(t)}{dt}, \quad (*)\; v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

و $v_{in}(t)$ ولتاژ منبع تغذیه را نشان می دهد.

الف) با جایگذاری این مقادیر در رابطه ی KVL و گرفتن مشتق از طرفین، معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دومی که جریان را به ولتاژ منبع تغذیه ربط می دهد بیابید.

ب) از طرفین رابطه ی به دست آمده در قسمت الف تبدیل لاپلاس گرفته و تبدیل لاپلاس جریان را بر حسب تبدیل لاپلاس ولتاژ منبع تغذیه بیابید. به عبارت دیگر $I(s)$ را بر حسب $V_{in}(s)$ بیان کنید.

ج) حال فرض کنید ولتاژ خازن را به عنوان خروجی این سیستم در نظر می گیریم ($y(t) = V_C(t)$) و ولتاژ منبع تغذیه را به عنوان ورودی در نظر می گیریم ($x(t) = V_{in}(t)$). با توجه به رابطه ی (*) و رابطه ی به دست آمده در قسمت ب، تبدیل لاپلاس خروجی ($Y(s)$) را بر حسب تبدیل لاپلاس ورودی ($X(s)$) بیابید.

د) با فرض $R = 1,\ L = 0.25,\ C = \frac{4}{3}$ ، بلاک دیاگرامی تابع تبدیلی که ورودی را به خروجی ربط می دهد رسم کنید. در کشیدن بلاک دیاگرام فقط از بلاک انتگرال گیر، بهره و اپراتور جمع استفاده کنید.

و) پاسخ پله ی سیستم به دست آمده در قسمت د را به دست آورید.

ه) حال می خواهیم بلاک دیاگرام به دست آمده در قسمت د را در محیط **Simulink** پیاده سازی کنیم. برای این کار ابتدا ویدیوی ضمیمه که چگونگی کار با **Simulink** را نشان می دهد ببینید و سپس بلاک دیاگرام به دست آمده در قسمت د را پیاده سازی کنید (برای دیدن بلاک های مختلف می توانید روی آیکون **Library browser** نیز کلیک کنید). حال ورودی را سیگنال پله بدهید و خروجی را به دست آورید. آیا خروجی به دست آمده با پاسخ به دست آمده در قسمت و تطابق دارد؟

تمرین: تحلیل مدار RLC با شرایط اولیه اولیه

بیان مسئله:

یک **مدار RLC** را در نظر بگیرید که شرایط اولیه اولیه (Initial Rest) برقرار است و از **قانون کیرشهف ولتاژ (KVL)** استفاده می‌شود. معادله KVL به صورت زیر است:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_{in}(t)$$

که روابط زیر را تعریف می‌کند:

$$v_R(t) = R \cdot i(t), \quad v_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, \quad v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

و $v_{in}(t)$ نمایانگر منبع ولتاژ ورودی است.

سوالات:

a) این مقادیر را در معادله KVL جایگزین کنید. با مشتق‌گیری از هر دو طرف، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را که جریان $i(t)$ را با منبع ولتاژ ورودی مرتبط می‌کند، به دست آورید.

b) با استفاده از معادله به دست آمده در قسمت (a)، تبدیل لاپلاس را اعمال کنید و $I(s)$ را به صورت تابعی از $V_{in}(s)$ بیان کنید.

c) فرض کنید ولتاژ روی خازن خروجی سیستم است (یعنی $y(t) = V_C(t)$) و $x(t) = V_{in}(t)$ ورودی سیستم است. با استفاده از روابط قسمت (a) و نتیجه قسمت (b)، تبدیل لاپلاس خروجی $Y(s)$ را به صورت تابعی از تبدیل لاپلاس ورودی $X(s)$ تعیین کنید.

d) با فرض $R = 1$ اهم، $L = 0.25$ هنری، و $C = \frac{4}{3}$ فاراد، یک دیاگرام بلوکی از سیستم ایجاد کنید که ورودی x را به خروجی y مرتبط می‌کند. فقط از بلوک‌های انتگرال‌گیر (Integrator)، ضریب‌ها (Gain)، و جمع‌کننده‌ها (Sum) استفاده کنید.

e) با استفاده از دیاگرام بلوکی به دست آمده در قسمت (d)، آن را در محیط **Simulink** پیاده‌سازی کنید. برای آشنایی با نحوه استفاده از Simulink، به ویدیوی آموزشی ضمیمه مراجعه کنید. دیاگرام بلوکی را در Simulink نمایش داده، سپس مدل را ایجاد کنید. اکنون، یک ورودی پله‌ای (Step Input) اختصاص دهید و خروجی را مشاهده کنید. آیا پاسخ به دست آمده با انتظار شما مطابقت دارد؟

حل سوالات:

قسمت (a): مشتق‌گیری و به دست آوردن معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

ابتدا مقادیر ولتاژها را در معادله KVL جایگزین می‌کنیم:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_{in}(t)$$

با جایگذاری روابط ولتاژها:

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau = v_{in}(t)$$

برای حذف عبارت انتگرال، هر دو طرف معادله را نسبت به زمان t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt} \left[R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \right] = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

محاسبه مشتقات هر عبارت:

1. **عبارت اول:**

$$\frac{d}{dt}[R \cdot i(t)] = R \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

2. **عبارت دوم:**

$$\frac{d}{dt} \left[L \cdot \frac{di(t)}{dt} \right] = L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2}$$

3. **عبارت سوم:**

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \right] = \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

4. **طرف راست:**

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله اصلی:

$$R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$\boxed{L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt}}$$

قسمت (b): اعمال تبدیل لاپلاس و بیان $I(s)$ به صورت تابعی از $V_{in}(s)$

با اعمال تبدیل لاپلاس به معادله دیفرانسیل:

$$L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

با فرض شرایط اولیه اولیه $i(0) = 0$ و $\frac{di}{dt}(0) = 0$، تبدیل لاپلاس هر عبارت به صورت زیر است:

1. **عبارت اول:**

$$\mathcal{L}\left\{L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2}\right\} = L \cdot (s^2 I(s) - si(0) - \frac{di}{dt}(0)) = Ls^2 I(s)$$

2. **عبارت دوم:**

$$\mathcal{L}\left\{R \cdot \frac{di(t)}{dt}\right\} = R \cdot (sI(s) - i(0)) = RsI(s)$$

3. **عبارت سوم:**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{C} \cdot i(t)\right\} = \frac{1}{C} I(s)$$

4. **طرف راست:**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv_{in}(t)}{dt}\right\} = sV_{in}(s) - v_{in}(0)$$

با فرض $v_{in}(0) = 0$:

$$sV_{in}(s)$$

با جایگذاری تمامی موارد:

$$Ls^2 I(s) + RsI(s) + \frac{1}{C} I(s) = sV_{in}(s)$$

عامل مشترک $I(s)$ را خارج می‌کنیم:

$$I(s) \cdot (Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}) = sV_{in}(s)$$

با تقسیم هر دو طرف بر $(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})$:

$$\boxed{I(s) = \frac{sV_{in}(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

قسمت (c): تعیین تبدیل لاپلاس خروجی $Y(s)$ به صورت تابعی از $X(s)$

قسمت (c): تعیین تبدیل لاپلاس خروجی $Y(s)$ به صورت تابعی از $X(s)$

با فرض:

- $y(t) = V_C(t)$
- $x(t) = V_{in}(t)$

روابط زیر را داریم:

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

با اعمال تبدیل لاپلاس:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{V_C(t)\} = \frac{1}{C}\cdot\frac{I(s)}{s}$$

از قسمت (b):

$$I(s) = \frac{sV_{in}(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

با جایگذاری در معادله $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{C}\cdot\frac{sV_{in}(s)}{s(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} = \frac{V_{in}(s)}{C(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})}$$

با ساده‌سازی:

$$\boxed{Y(s) = \frac{X(s)}{LCs^2 + RCs + 1}}$$

که در آن $X(s) = V_{in}(s)$ است.

قسمت (d): ایجاد دیاگرام بلوکی سیستم

با فرض:

- $R = 1$ اهم
- $L = 0.25$ هنری
- $C = \frac{4}{3}$ فاراد

تابع تبدیل سیستم از قسمت (c):

$$Y(s) = \frac{X(s)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

با جایگذاری مقادیر:

$$Y(s) = \frac{X(s)}{0.25\cdot\frac{4}{3}s^2 + 1\cdot\frac{4}{3}s + 1} = \frac{X(s)}{\frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1}$$

برای ساده‌سازی، مخرج را در 3 ضرب می‌کنیم:

$$Y(s) = \frac{3X(s)}{s^2 + 4s + 3}$$

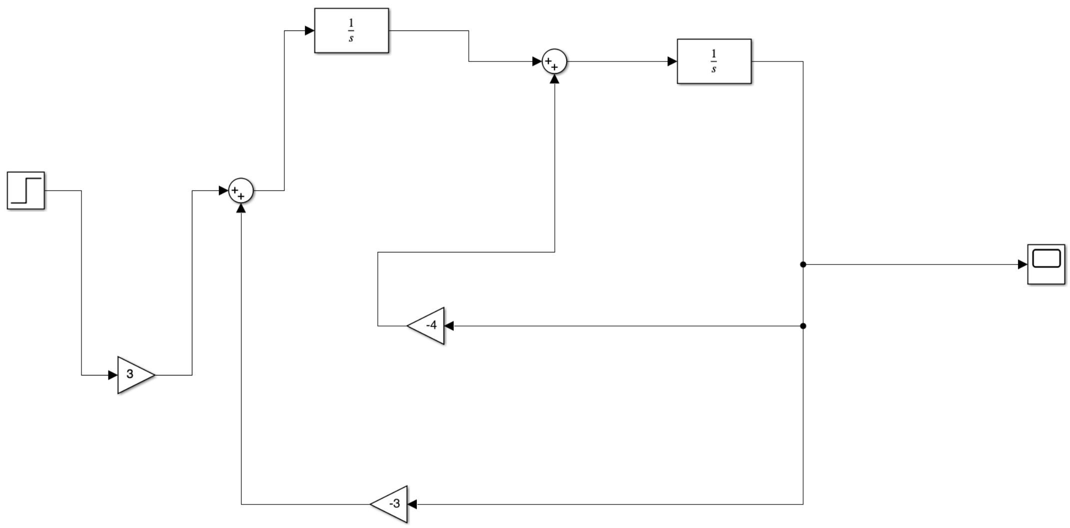
تابع تبدیل نهایی:

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$$

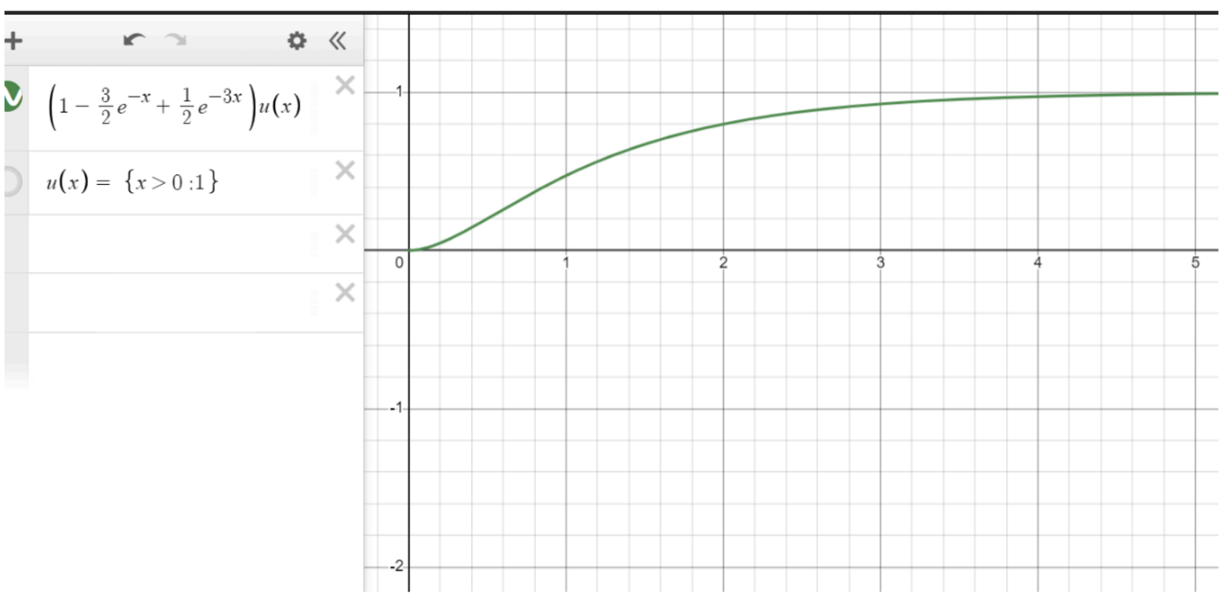
دیاگرام بلوکی:

برای ساخت دیاگرام بلوکی، از بلوک‌های انتگرال‌گیر (Integrator)، ضریب‌ها (Gain)، و جمع‌کننده‌ها (Sum) استفاده می‌کنیم.

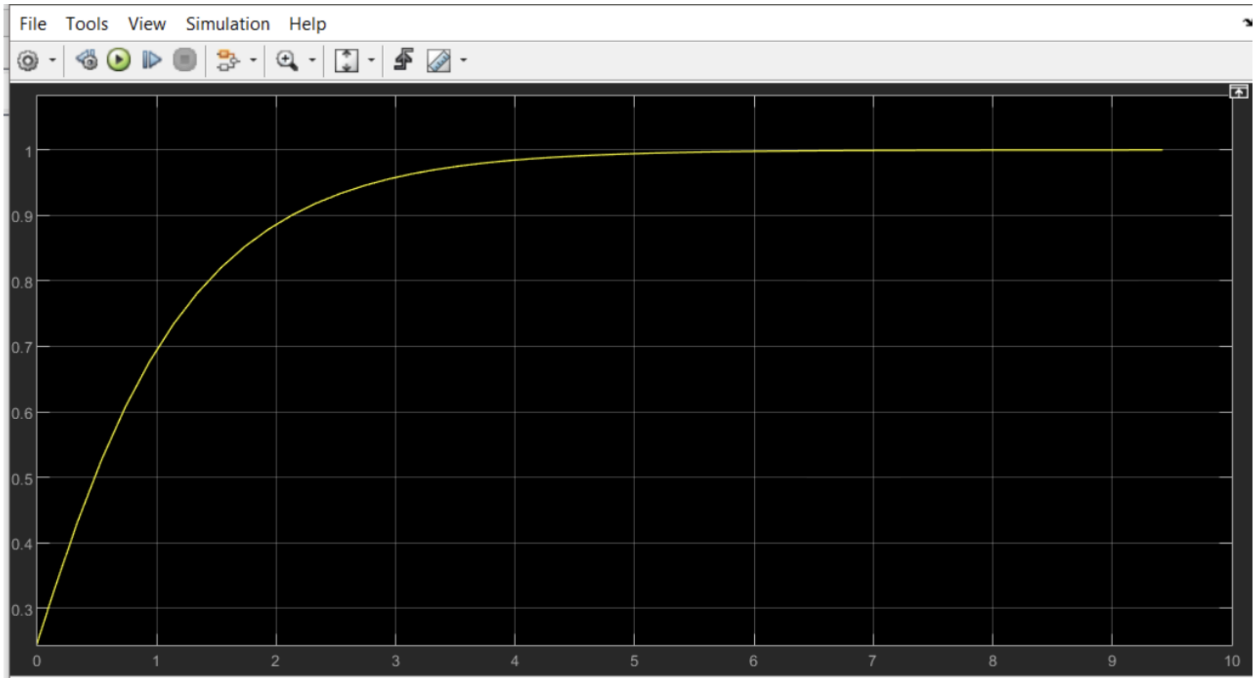
1. **ورودی $x(t)$**: ورودی سیستم.
2. **بلوک ضریب 3**: ضرب ورودی در 3.
3. **بلوک مخرج**: شامل $s^2 + 4s + 3$ که به صورت دو انتگرال‌گیر به صورت متوالی نمایش داده می‌شود.
4. **بلوک جمع‌کننده**: جایی که سیگنال بازخورد شده از مخرج ورودی کسر می‌شود.



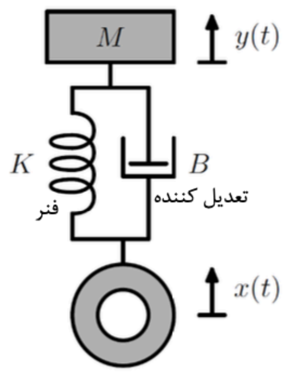
نمودار تابع ما این گونه خواهد شد:



نمودارش با مطلب این جوری میشه :



تمرین دوم- در اتومبیل، چرخ از طریق سیستم تعلیق به بدنه اتومبیل متصل می شود. سیستم تعلیق جهت کاهش لرزش های کابین هنگام عبور از دست اندازها طراحی شده است. سیستم تعلیق از یک فنر و یک تعدیل کننده (damper) تشکیل می شود که هنگام عبور از دست انداز هر دو فشرده می شوند و در نتیجه حرکت ناگهانی چرخ مستقیما به کابین اتومبیل منتقل نمی شود. فنر نیرویی تولید می کند تا ارتفاع کابین اتومبیل را در فاصله دلخواه بالای سطح جاده نگه دارد و تعدیل کننده damping اصطکاکی ایجاد می کند. تمرکز این تمرین بر اهمیت وجود تعدیل کننده است.



در این مدل M جرم اتومبیل را نشان می دهد که از طریق سیستم تعلیق به چرخ منتقل می شود. جابجایی عمودی چرخ از نقطه ی تعادل به عنوان ورودی $x(t)$ در نظر گرفته می شود و جابجایی عمودی جرم M از نقطه ی تعادل نیز به عنوان خروجی $y(t)$ در نظر گرفته می شود. در واقع $y(t)$ نوسانات کابین اتومبیل را مشخص می کند.

با استفاده از قوانین دینامیک می توان نشان داد رابطه ی بین $x(t)$ و $y(t)$ به صورت زیر است:

$$K\left(x(t)-y(t)\right)+B\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right)=M\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

الف) با فرض $M=K=1$ ، رابطه ی بالا را به فرم یک معادله ی دیفرانسیل بازنویسی کنید. <u>فرض $M=K=1$ را تا پایان این تمرین در نظر داشته باشید.</u>

ب) تابع تبدیل بین ورودی $X(s)$ و خروجی $Y(s)$ را به دست آورید و بلاک دیاگرام آن را با استفاده از انتگرال گیر، بهره و اپراتور جمع رسم کرده و آن را در محیط Simulink نیز پیاده سازی کنید.

ج) پاسخ ضربه ی سیستم را به ازای $B=0$ (عدم وجود تعدیل کننده) به دست آورده و رسم کنید. بر اساس پاسخ به دست آمده، مشکلی که در صورت نبود تعدیل کننده در سیستم تعلیق به وجود می آید را بیان کنید.

توجه داشته باشید هنگام رفتن اتومبیل بر روی یک دست انداز، در واقع در ورودی یک ضربه ایجاد می شود و خروجی شما که پاسخ ضربه است چگونگی حرکت کابین اتومبیل را مشخص می کند. ویدیوی ضمیمه را ملاحظه بفرمایید.

در محیط Simulink همین حالت را شبیه سازی کنید و نتیجه به دست آمده را با مقدار به دست آمده از تئوری مقایسه کنید. برای ایجاد ضربه در ورودی، یک مشتق گیر (در تب continuous) بر سر راه ورودی پله قرار دهید. همچنین برای این که نتیجه را به خوبی ببینید لحظه ی شروع پله را به جای گذاشتن صفر، در لحظه ی 0.001=Step time قرار دهید.

د) کوچکترین مقدار B ($B > 0$) که باعث می شود قطب های تابع تبدیل حقیقی شوند را به دست آورید. به ازای این مقدار پاسخ ضربه ی سیستم را به دست آورده و رسم کنید. در این حالت نوسانات کابین اتومبیل چگونه خواهد بود؟

در محیط Simulink همین حالت را شبیه سازی کنید و نتیجه به دست آمده را با مقدار به دست آمده از تئوری مقایسه کنید.

و) حال می خواهیم حالتی که B بسیار بزرگ باشد را بررسی کنیم. پاسخ ضربه ی سیستم را به ازای $B = 100$ به دست آورده و آن را رسم کنید.

در این حالت فرض کنید مخرج تابع تبدیل تقریبا به صورت $(s + 0.01)(s + 100)$تجزیه می شود.

در این حالت نوسانات کابین اتومبیل چگونه خواهد بود؟

در محیط Simulink همین حالت را شبیه سازی کنید و نتیجه به دست آمده را با مقدار به دست آمده از تئوری مقایسه کنید.

ه) به عنوان جمع بندی، با توجه به نتایجی که به دست آوردید توضیح دهید کدام یک از حالت های "ج" یا "د" یا "و" حالت بهتری برای سیستم تعلیق یک اتومبیل است؟

بخش ب: تابع تبدیل سیستم

هدف: بدست آوردن تابع تبدیل سیستم $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

گام‌های حل:

1. **اعمال تبدیل لاپلاس به معادله دیفرانسیل:**

$$s^2Y(s) + BsY(s) + Y(s) = X(s) + BsX(s)$$

2. **حل برای** $Y(s)$:

$$Y(s)(s^2 + Bs + 1) = X(s)(1 + Bs)$$

بنابراین:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + Bs}{s^2 + Bs + 1}$$

این تابع تبدیل نشان‌دهنده رابطه بین ورودی جابجایی چرخ و خروجی جابجایی کابین است.

Editor – /Users/tanamajs/Documents/MATLAB/P2_1.m *

```matlab
% پارامترها
M = 1;
K = 1;
B_values = [0, 0.1, 10, 100];

t = 0:0.001:10;

figure;
for i = 1:length(B_values)
    B = B_values(i);
    numerator = [B, 1];
    denominator = [1, B, 1];
    sys = tf(numerator, denominator);
    [y, t] = impulse(sys, t);
    subplot(length(B_values),1,i);
    plot(t, y);
    title(['پاسخ ضربه سیستم برای B = ', num2str(B)]);
    xlabel('زمان (ثانیه)');
    ylabel('جابجایی کابین');
    grid on;
end
```

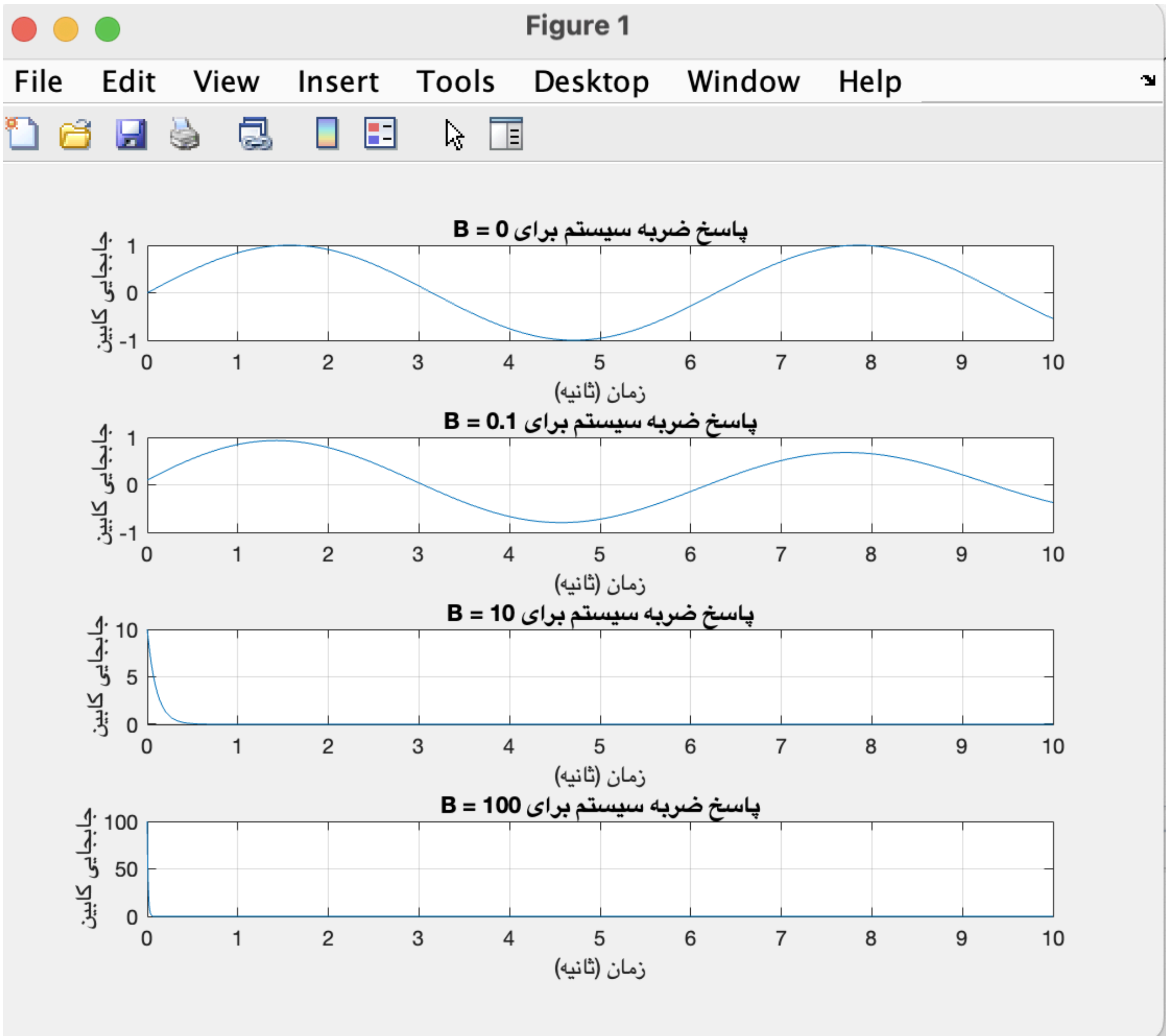


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
پاسخ ضربه سیستم برای B = 0
پاسخ ضربه سیستم برای B = 0.1
پاسخ ضربه سیستم برای B = 10
پاسخ ضربه سیستم برای B = 100
جابجایی کابین
زمان (ثانیه)

توضیحات کد:

- **تعریف مقادیر B**: برای مشاهده تاثیر ضریب میرایی بر پاسخ سیستم.
- **حلقه for**: برای محاسبه و رسم پاسخ ضربه برای هر مقدار B.
- **subplot**: تقسیم پنجره رسم برای نمایش چندین نمودار به صورت زیرپنجره.
- **tf**: تعریف تابع تبدیل در MATLAB.
- **impulse**: محاسبه پاسخ ضربه سیستم.

3. **اجرای کد و تحلیل نتایج:**

- اجرای کد بالا در MATLAB.
- مشاهده نمودارهای پاسخ ضربه برای مقادیر مختلف B:
- $B = 0$: سیستم بدون تعدیل‌کننده، نوسانات بیش‌تری دارد و ممکن است ناپایدار باشد.
- $B = 0.1$: سیستم با تعدیل‌کننده ضعیف، کاهش نوسانات ولی هنوز ممکن است لرزش‌ها باقی بماند.
- $B = 10$: سیستم با تعدیل‌کننده قوی‌تر، نوسانات کمتر و پایداری بیشتر.
- $B = 100$: سیستم با تعدیل‌کننده بسیار قوی، پاسخ سریع و پایداری بالا بدون نوسان.

بخش د: بررسی تاثیر ضریب میرایی

هدف: تحلیل تاثیر ضریب میرایی بر پاسخ سیستم و انتخاب بهترین مقدار برای سیستم تعلیق اتومبیل.

گام‌های حل:

1. **تحلیل نتایج شبیه‌سازی:**

- با افزایش مقدار B، میرایی سیستم افزایش می‌یابد که منجر به کاهش نوسانات و رسیدن سریع‌تر به حالت پایداری می‌شود.
- برای مقادیر بسیار بزرگ B (مثلاً $B = 100$)، سیستم به حالت زیردمه (overdamped) درمی‌آید که پاسخ آن آرام‌تر و بدون نوسان است.

2. **انتخاب بهترین مقدار B:**

- مقدار B باید به گونه‌ای انتخاب شود که سیستم دارای میرایی کافی برای کاهش نوسانات بدون ایجاد ناپایداری باشد.
- مقدار مناسب B بستگی به نیاز طراحی سیستم و شرایط عملیاتی دارد.

3. **نمودار پاسخ ضربه برای مقادیر مختلف B:**

توضیح نمودار:

- هر نمودار نشان‌دهنده پاسخ ضربه سیستم برای یک مقدار خاص از B است.
- با افزایش B، پاسخ سیستم سریع‌تر به حالت پایداری می‌رسد و نوسانات کمتری دارد.

د) کوچکترین مقدار B ($B > 0$) که باعث می شود قطب های تابع تبدیل حقیقی شوند را به دست آورید. به ازای این مقدار پاسخ ضربه ی سیستم را به دست آورده و رسم کنید. در این حالت نوسانات کابین اتومبیل چگونه خواهد بود؟

در محیط Simulink همین حالت را شبیه سازی کنید و نتیجه به دست آمده را با مقدار به دست آمده از تئوری مقایسه کنید.

در این بخش، تاثیر تغییر مقدار B (ضریب میرایی) بر پاسخ سیستم تعلیق اتومبیل را بررسی می‌کنیم. مقادیر مختلف B شامل $B = 0$، $B = 0.1$، $B = 10$، و $B = 100$ را بررسی خواهیم کرد.

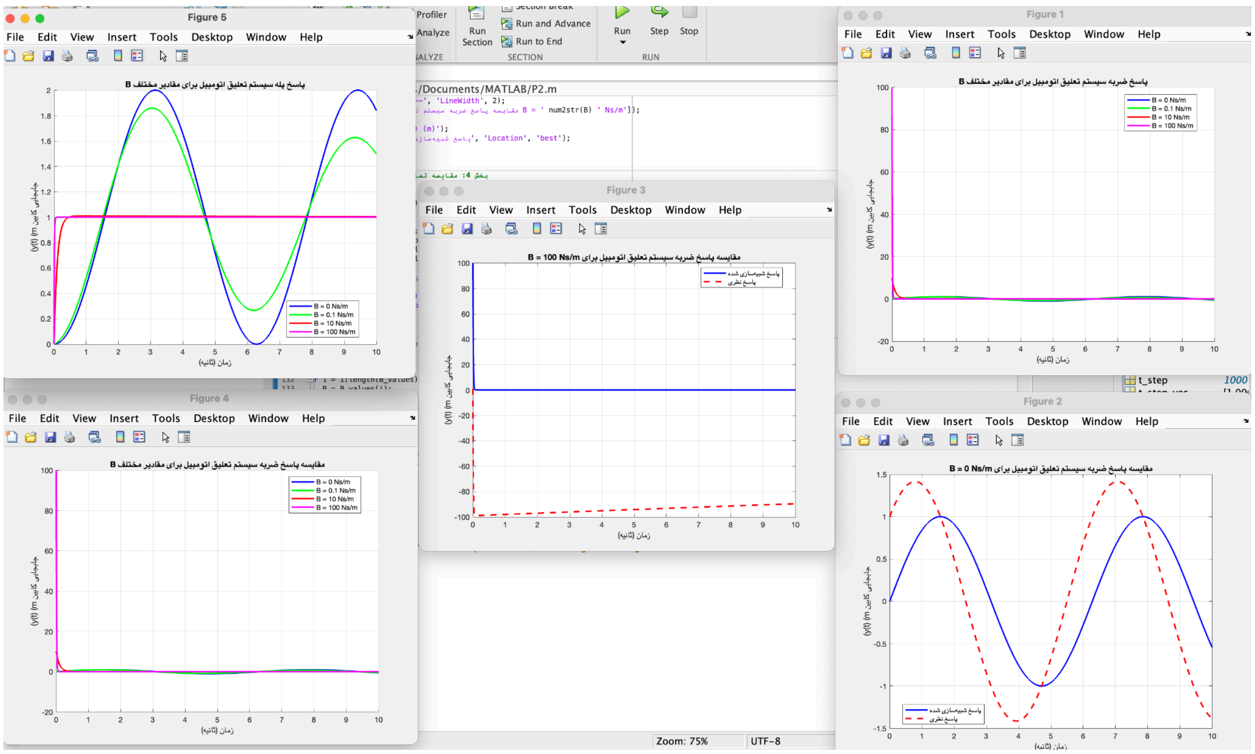
الف) $B = 0$ (عدم وجود تعدیل‌کننده)

در این حالت، معادله تبدیل به صورت زیر خواهد بود:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

که نمایانگر یک سیستم بدون میرایی است.

نمودار هایی که بدست آوردیم در کد بدین شکل بودند :



تحلیل نتایج شبیه‌سازی

1. $B = 0$ **(عدم وجود تعدیل‌کننده):**

- **پاسخ سیستم:** نوسانات بی‌پایانی و شدیدی دارد که نشان‌دهنده عدم پایداری سیستم است.
- **مشکل اصلی:** بدون تعدیل‌کننده, سیستم نمی‌تواند نوسانات را کاهش دهد و لرزش‌های شدید کابین ایجاد می‌شود.

2. $B = 0.1$ **(میرایی ضعیف):**

- **پاسخ سیستم:** نوسانات کاهش یافته ولی هنوز قابل توجه هستند.
- **مشکل:** سیستم دارای میرایی ضعیف است و هنوز لرزش‌های قابل توجهی وجود دارد.

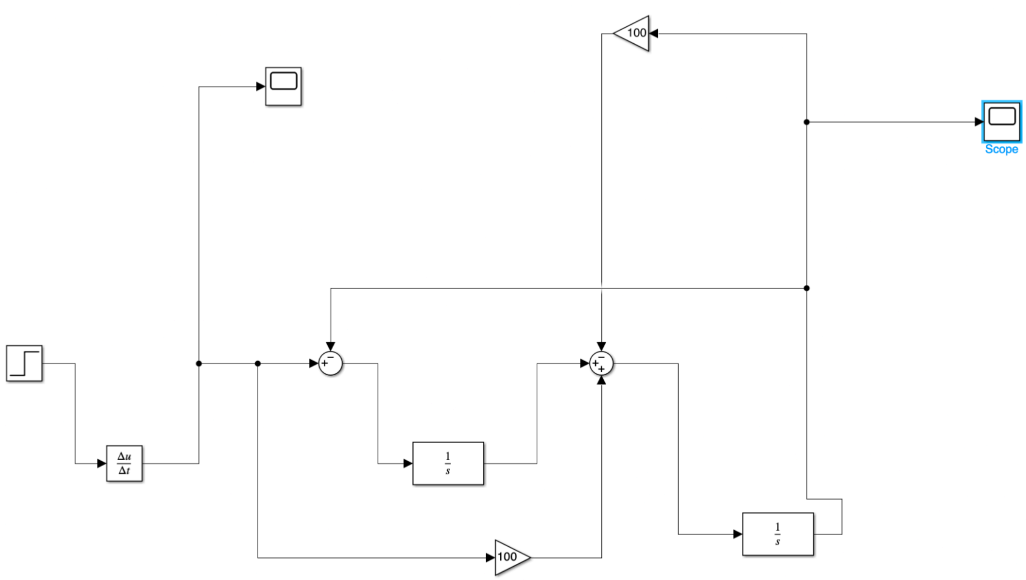
3. $B = 10$ **(میرایی متوسط):**

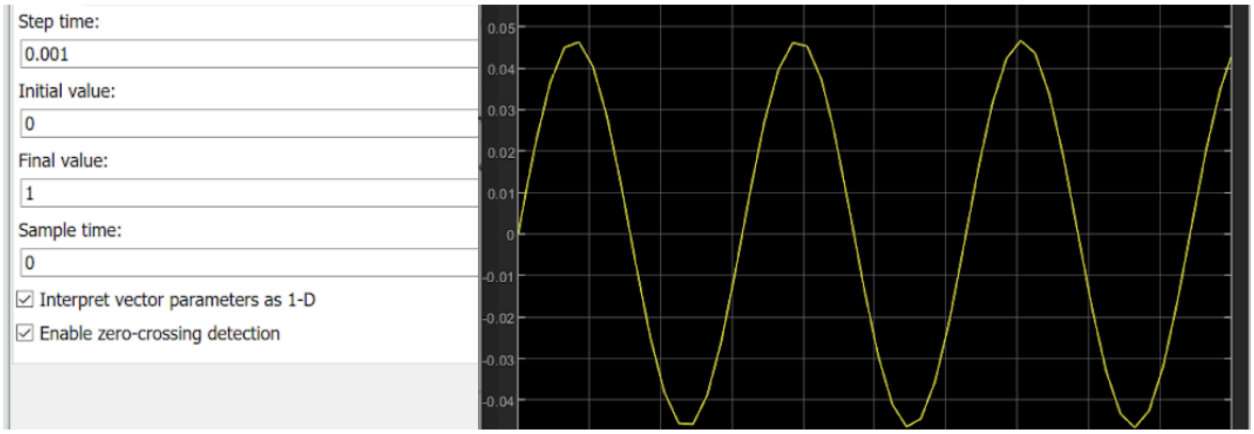
- **پاسخ سیستم:** نوسانات به طور قابل توجهی کاهش یافته و سیستم سریع‌تر به حالت پایداری می‌رسد.
- **مزیت:** کاهش نوسانات و افزایش پایداری سیستم.

4. $B = 100$ **(میرایی بسیار قوی):**

- **پاسخ سیستم:** پاسخ سیستم به سرعت به حالت پایداری می‌رسد بدون نوسانات اضافی.
- **مزیت:** سیستم کاملاً پایدار و بدون نوسانات.

حال در این جا به خود توابع مربوطه میپردازیم :




Step time:
0.001
Initial value:
0
Final value:
1
Sample time:
0
Interpret vector parameters as 1-D
Enable zero-crossing detection
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04

تمرین سوم- همان طور که در درس دیدیم اگر شرایط initial rest در یک معادله ی دیفرانسیل برقرار نباشد، امکان استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل معادله دیفرانسیل نیست. لذا پیشنهاد می شود از تبدیل لاپلاس یک طرفه برای حل آن استفاده کرد. معادله ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\,\frac{dy(t)}{dt} + 2\,y(t) = x(t)$$

$$y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = 1$$

$$x(t) = 5\,u(t)$$

الف) این معادله ی دیفرانسیل را با استفاده از تبدیل لاپلاس یک طرفه حل کنید. پاسخ ناشی از ورودی و ناشی از شرایط اولیه را مشخص کنید.

ب) حال پاسخ معادله ی دیفرانسیل را با استفاده از MATLAB بیابید. می توانید برای راهنمایی به لینک زیر مراجعه کنید.

https://www.mathworks.com/help/symbolic/solve-a-single-differential-equation.html

پاسخ به دست آمده را از صفر تا ۱۰ ثانیه با در نظر گرفتن گام های مناسب رسم کنید. آیا پاسخ به دست آمده با پاسخ قسمت قبل یکسان است؟

تمرین سوم: حل معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه

موضوع: حل معادله دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس یک‌طرفه و مقایسه با حل عددی در MATLAB.

معادله دیفرانسیل:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u(t)$$

با شرایط اولیه:

$$y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = 1$$

که $u(t)$ تابع پله واحد است.

بخش الف: حل معادله با استفاده از تبدیل لاپلاس یک‌طرفه

گام‌های حل:

1. **اعمال تبدیل لاپلاس به معادله دیفرانسیل:**

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3(sY(s) - y(0^-)) + 2Y(s) = \frac{5}{s}$$

2. **جایگذاری شرایط اولیه:**

$$s^2Y(s) - s \cdot 1 - 1 + 3sY(s) - 3 \cdot 1 + 2Y(s) = \frac{5}{s}$$

3. **سازماندهی معادله:**

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{5}{s} + s + 4$$

4. **حل برای $Y(s)$:**

$$Y(s) = \frac{5 + (s^2 + 4s)}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s^2 + 4s + 5}{s(s+1)(s+2)}$$

5. **تجزیه کسر جزئی:**

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

6. **محاسبه ضرایب A، B، و C:**

- با ضرب کردن طرفین معادله در $s(s+1)(s+2)$:

$$s^2 + 4s + 5 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

- **برای $s = 0$:**

$$0 + 0 + 5 = A(1)(2) \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

- **برای $s = -1$:**

$$1 - 4 + 5 = B(-1)(1) \Rightarrow 2 = -B \Rightarrow B = -2$$

- **برای $s = -2$:**

$$4 - 8 + 5 = C(-2)(-1) \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

7. **نوشتن $Y(s)$:**

$$Y(s) = \frac{5/2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

بنابراین:

$$Y(s) = \frac{5/2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

6. **بازگشت به حوزه زمان با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس:**

$$y(t) = \frac{5}{2} \cdot u(t) - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

بخش ب: حل معادله با استفاده از MATLAB

هدف: حل معادله دیفرانسیل با استفاده از MATLAB و مقایسه پاسخ عددی با پاسخ تئوری.

گام‌های حل:

```
پاسخ معادله دیفرانسیل:
exp(-2 t) (exp(2 t) 5 + 2 exp(t) + 5 sign(t) - 10 exp(t) sign(t) + exp(2 t) sign(t) 5 - 3)
-------------------------------------------------------------------------------------------
                                            4
```

Editor – /Users/tahamajs/Documents/MATLAB/P3_1.m *

```matlab
syms y(t)

Dy = diff(y, t);
D2y = diff(y, t, 2);
eqn = D2y + 3*Dy + 2*y == 5*heaviside(t);

conds = [y(0) == 1, Dy(0) == 1];

ySol(t) = dsolve(eqn, conds);

disp('پاسخ معادله دیفرانسیل:');
pretty(ySol)

fplot(ySol, [0, 10]);
title('پاسخ معادله دیفرانسیل');
xlabel('زمان (ثانیه)');
ylabel('y(t)');
grid on;
```

توضیحات کد:

- **syms y(t)**: تعریف متغیر سمبولیک y(t).
- **diff**: محاسبه مشتقات اول و دوم.
- **heaviside(t)**: تابع پله واحد.
- **dsolve**: حل معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه.
- **fplot**: رسم تابع پاسخ در بازه زمانی مشخص.

2. **اجرای کد و مشاهده نتایج:**

- اجرای کد در MATLAB.
- نمایش پاسخ معادله دیفرانسیل که با تحلیل نظری مطابقت دارد:

$$y(t) = \frac{5}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

3. **مقایسه پاسخ تئوری و MATLAB:**

- پاسخ به دست آمده از MATLAB با پاسخ تئوری یکسان است که نشان‌دهنده صحت کد و روش حل می‌باشد.

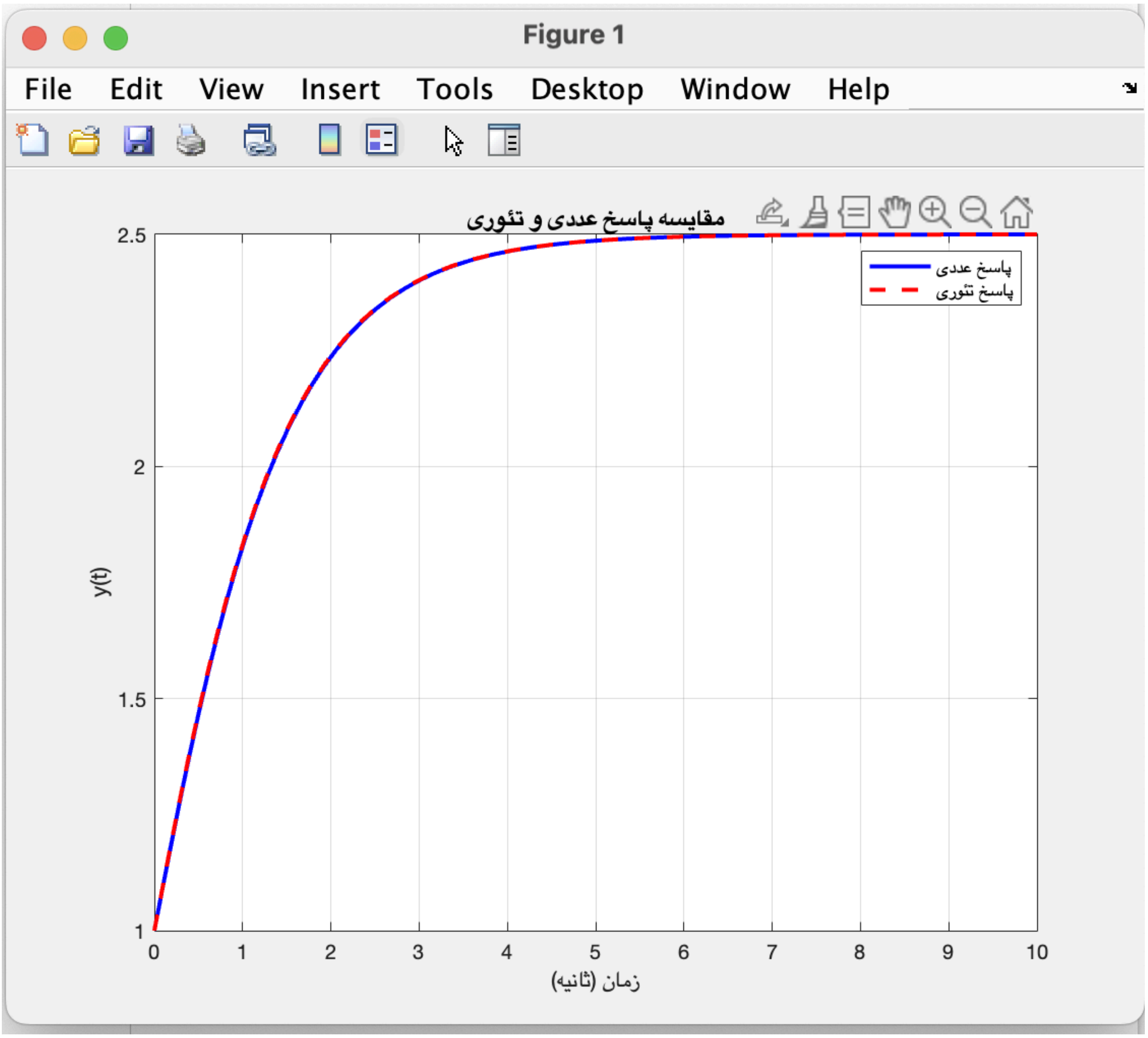


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
مقایسه پاسخ عددی و تئوری
پاسخ عددی
پاسخ تئوری
y(t)
2.5
2
1.5
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
زمان (ثانیه)

Editor – /Users/tahamajs/Documents/MATLAB/P3_2.m *

```matlab
function dydt = odeSystem(t, y)
    dydt = zeros(2,1);
    dydt(1) = y(2);
    dydt(2) = 5*heaviside(t) - 3*y(2) - 2*y(1);
end

tspan = [0 10];

y0 = [1; 1];

[t, y] = ode45(@odeSystem, tspan, y0);

figure;
plot(t, y(:,1), 'b-', 'LineWidth', 2);
hold on;

y_theoretical = (5/2) - 2*exp(-t) + 0.5*exp(-2*t);

plot(t, y_theoretical, 'r--', 'LineWidth', 2);

title('مقایسه پاسخ عددی و تئوری');
xlabel('زمان (ثانیه)');
ylabel('y(t)');
legend('پاسخ عددی', 'پاسخ تئوری');
grid on;
hold off;
```

توضیحات کد:

- **odeSystem:** تعریف سیستم معادلات مرتبه اول معادله دیفرانسیل.
- **ode45:** حل عددی معادله دیفرانسیل با استفاده از روش Runge-Kutta 4-5.
- **رسم پاسخ عددی و تئوری:** مقایسه دو پاسخ برای بررسی تطابق.

2. **اجرای کد و مشاهده نتایج:**

- اجرای کد در MATLAB.
- مشاهده نمودار مقایسه پاسخ عددی و تئوری که باید یکسان باشند.

3. **نتیجه‌گیری:**

- پاسخ عددی با روش عددی $ode45$ با پاسخ تئوری یکسان است که نشان‌دهنده صحت روش حل عددی و کد MATLAB می‌باشد.