

به نام خدا



تمرین سری اول

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر اخوان

دانشگاه تهران - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

(1) فرض کنید $z = re^{j\theta}$ است. عبارات زیر را با فرض $r = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ حساب کنید. سپس در صفحه‌ی مختلط بردار متناظر با هر عبارت را رسم کنید.

(i) z^*

(ii) z^2

(iii) jz

(iv) zz^*

(v) $\frac{z}{z^*}$

(vi) $\frac{1}{z}$

(2) رابطه‌ی زیر را اثبات کنید.

$$1 - e^{j\theta} = -2j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{j\frac{\theta}{2}}$$

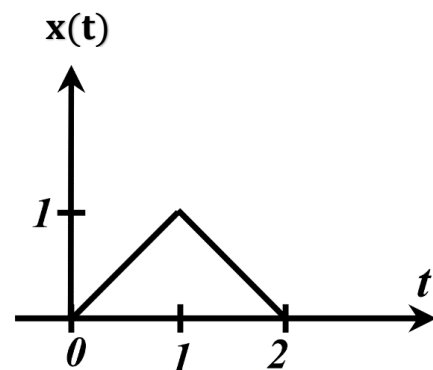
(3) با فرض این که $x(t)$ به صورت زیر باشد، عبارات زیر را رسم کنید.

(a) $x(-t)$

(b) $x(t+1)$

(c) $x(2t+1)$

(d) $x(1-4t)$



(4) فرض کنید $x(t) = \cos(\omega_x(t + \tau_x) + \theta_x)$ است.

الف) در هر یک از حالات زیر بررسی کنید آیا $x(t)$ متناوب است؟ اگر متناوب بود، دوره‌ی تناوب آن را بیابید.

	ω_x	τ_x	θ_x
(i)	$\frac{\pi}{2}$	0	2π
(ii)	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{7}$
(iii)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$

ب) با فرض $x(t) = \cos(\omega_x(t + \tau_x) + \theta_x)$ و $y(t) = \cos(\omega_y(t + \tau_y) + \theta_y)$ در کدام یک از حالات زیر $x(t)$ و $y(t)$ به ازای همه‌ی t ها با یکدیگر برابرند.

	ω_x	τ_x	θ_x	ω_y	τ_y	θ_y
(i)	$\frac{\pi}{3}$	0	2π	$\frac{\pi}{3}$	1	$-\frac{\pi}{3}$
(ii)	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	1	$\frac{3\pi}{8}$
(iii)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{8}$

(5) فرض کنید $x[n] = \cos(\omega_x(n + m_x) + \theta_x)$ است.

الف) در هر یک از حالات زیر بررسی کنید آیا $x[n]$ متناوب است؟ اگر متناوب بود، دوره‌ی تناوب آن را بیابید.

	ω_x	m_x	θ_x
(i)	$\frac{\pi}{3}$	0	2π
(ii)	$\frac{3\pi}{4}$	2	$\frac{\pi}{4}$
(iii)	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$

ب) با فرض $x[n] = \cos(\omega_x(n + m_x) + \theta_x)$ و $y[n] = \cos(\omega_y(n + m_y) + \theta_y)$ در کدام یک از حالات زیر $x[n]$ و $y[n]$ به ازای همه ی n ها با یکدیگر برابرند.

	ω_x	m_x	θ_x	ω_y	m_y	θ_y
(i)	$\frac{\pi}{3}$	0	2π	$\frac{8\pi}{3}$	0	0
(ii)	$\frac{3\pi}{4}$	2	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	1	$-\pi$
(iii)	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	1

6) با فرض $x(t) = \sqrt{2}(1 + j)e^{j\frac{\pi}{4}}e^{(-1+j2\pi)t}$ ، عبارات زیر را بدست آورده و رسم کنید.

(i) $\Re\{x(t)\}$

(ii) $\Im\{x(t)\}$

(iii) $x(t + 2) + x^*(t + 2)$

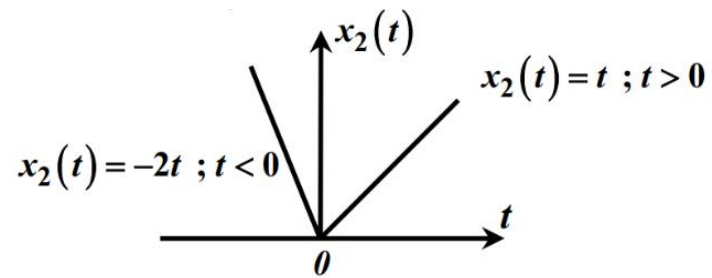
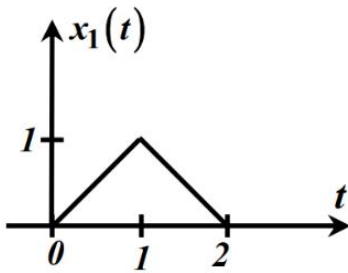
7) سیگنال پیوسته $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ دارای فرکانس پایه ω_0 و دوره ی تناوب $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ است. با فرض این که از این سیگنال با فواصل مساوی T نمونه برداری کنیم و سیگنال گسسته $x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}$ را بدست بیاوریم به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نشان دهید $x[n]$ متناوب است اگر و تنها اگر $\frac{T}{T_0}$ یک عدد گویا باشد.

ب) فرض کنید $x[n]$ متناوب است و $\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q}$ است به گونه ای که p و q اعدادی صحیح هستند. دوره ی تناوب $x[n]$ را بدست آورید. همچنین فرکانس پایه ی $x[n]$ را بدست آورده و بر حسب $\omega_0 T$ بیان کنید.

ج) مجدداً فرض کنید $x[n]$ متناوب است و $\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q}$ است به گونه ای که p و q اعدادی صحیح هستند. مشخص کنید چند دوره ی تناوب از سیگنال $x(t)$ احتیاج است تا سیگنال یک دوره ی تناوب $x[n]$ تشکیل شود.

(8) قسمت زوج و فرد سیگنال‌های زیر را بدست آورده و هر کدام را رسم کنید.



(9) با فرض این که $x_e(t)$ و $x_o(t)$ به ترتیب قسمت‌های زوج و فرد سیگنال $x(t)$ را نشان دهند، عبارت زیر را اثبات کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t) dt$$

موفق باشید.