به نام خدا

تمرین سری چهارم

سیگنال‌ها و سیستم‌ها – دکتر اخوان

1ــ خواص سری فوریه ی سیگنال های پیوسته در زمان

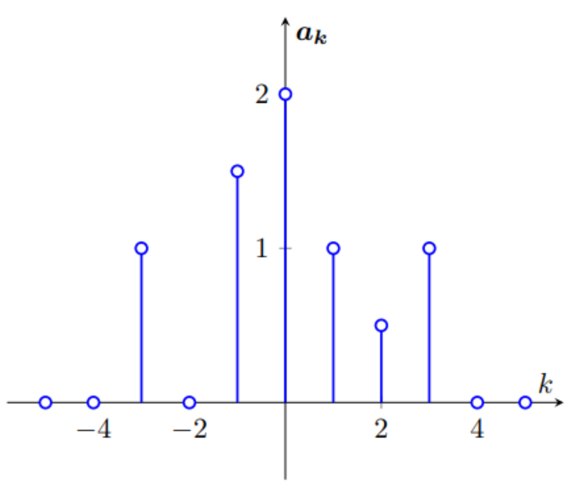
سیگنال $x(t)$ با دوره ی تناوب اصلی T_0 و ضرایب سری فوریه ی a_k مفروض است.

الف) ضرایب سری فوریه ی سیگنال $y(t) = Re\{x(t)\} + Ev\{x(t)\}$ را برحسب a_k بیابید.

ب) ضرایب سری فوریه ی سیگنال زیر را بر حسب a_k بیابید.

$$y(t) = \sum_{m=1}^{M} \left(x\left(t + mt_0\right) + x\left(t - mt_0\right)\right)$$

ج) می دانیم اگر سیگنال $x(t)$ با T_0 متناوب باشد، با MT_0 که $M \in \mathbb{Z}$ نیز متناوب خواهد بود. ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ را در حالیکه دوره ی تناوب آن را MT_0 در نظر می گیرید برحسب a_k محاسبه کنید. اگر شکل زیر ضرایب a_k در حالیکه دوره ی تناوب T_0 در نظر گرفته شده است را نشان دهد، ضرایب سری فوریه در حالیکه دوره ی تناوب سیگنال را $3T_0$ در نظر می گیرید، رسم کنید.



د) اگر c_k ضرایب سری فوریه ی متناظر با سیگنال $y(t) = x(t) + x\left(\frac{3}{2}t\right)$ باشد، ضرایب c_2 و c_6 را برحسب ضرایب a_k بیابید.

2ـ ضرب سیگنال ها و کانولوشن ضرایب

دو سیگنال پیوسته ـ زمان متناوب $x(t)$ و $y(t)$ با دوره ی تناوب اصلی T_0 را در نظر بگیرید. نمایش سری فوریه ی دو سیگنال به صورت زیر می باشد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \;, \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \;, \;\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

می توان نشان داد ضرایب سری فوریه سیگنال

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

با کانولوشن ضرایب در حوزه ی گسسته محاسببه می شود، یعنی $c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$

الف) حال به وسیله ی قسمت قبل ضرایب سری فوریه ی دو سیگنال زیر را بیابید.

- $x_1(t) = \cos(20\pi t) \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{1}{2}(t-3k)\right)$
- $x_2(t) = \cos(20\pi t) \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2\Pi\left(t-\frac{1}{2}-3k\right) + \Pi(t-\frac{3}{2}-3k)\right)$

در این قسمت سیگنال $\Pi(t)$ به صورت $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$ تعریف می شود. توجه داشته باشید هر کدام از سیگنال ها از ضرب دو سیگنال به وجود آمده است. سیگنال اول (سیگنال کسینوسی) که واضحا متناوب است. اگر سیگنال دوم که به صورت جمع یک سری المان (یک *summation* روی k) هست را رسم کنید می بینید که آن هم متناوب است.

ب) <u>تعمیم رابطه پارسوال</u>: رابطه ی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k^*$$

3ـ رابطه بین سیگنال و ضرایب

سیگنال $x(t)$ با دوره ی تناوب $T = 4$ و ضرایب سری فوریه ی a_k مفروض است و ضابطه ی آن در یک دوره ی تناوب به صورت زیر می باشد:

$$x(t) = 1 - |t| \qquad -2 < t < 2$$

مقدار عبارات زیر را محاسبه کنید:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$
- $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} j^k a_k$
- $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{2k+1}$
- $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k$

4- ضرایب سری فوریه ی سیگنال های زیر را محاسبه کنید.

1. $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \Lambda(t - 2n)$

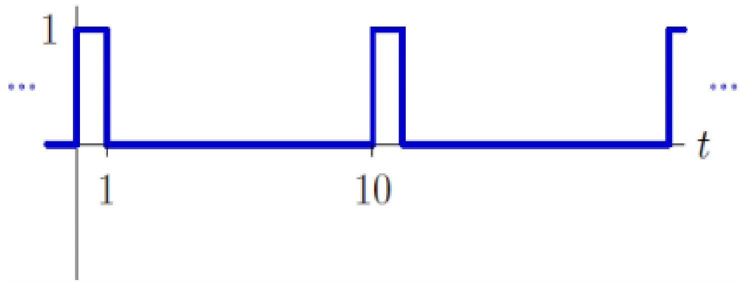
   hint: $\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \le t \le 0 \\ -t+1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & o \cdot w \cdot \end{cases}$
2. $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta'(t - nT)$
3. $x_3(t) = |\cos(2\pi f_0 t)| + \cos(2\pi f_0 t)$
4. $x_4(t) = f^*(t) e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}$

   (in terms of f(t) (periodic with period T_0) Fourier series coefficients)

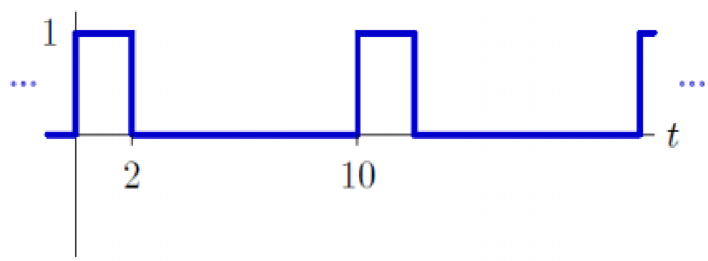
5 ـ محاسبه ی ضرایب سری فوریه از روی شکل سیگنال

ضرایب سری فوریه ی سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

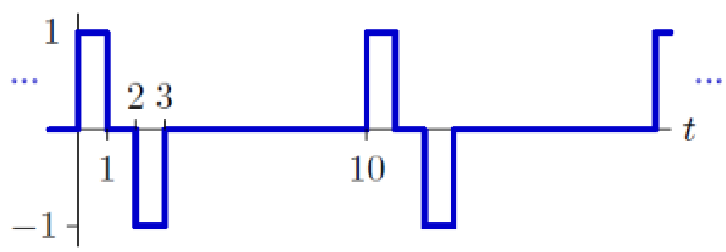
$x_1(t) = x_1(t+10)$



$x_2(t) = x_2(t+10)$



$x_3(t) = x_3(t+10)$



$x_4(t) = x_4(t+10)$