

به نام خدا

تمرین سری ششم

درس سیگنال ها و سیستم ها - دکتر اخوان



۱- ضرب سیگنال ها و کانولوشن تبدیل فوریه

سیگنال پیوسته زمان $x(t)$ و $y(t)$ را در نظر بگیرید.

نمایش تبدیل فوریه ی این دو سیگنال به صورت زیر می باشد.

$$\hat{x}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad . \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(w) e^{j\omega t} dw$$
$$\hat{y}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad . \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(w) e^{j\omega t} dw$$

می دانیم تبدیل فوریه ی سیگنال

$$z(t) = x(t)y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}(w) e^{j\omega t} dw$$

با کانولوشن دو تبدیل فوریه در حوزه ی فرکانس محاسبه می شود، یعنی:

$$\hat{z}(w) = \frac{1}{2\pi} (\hat{x}(w) * \hat{y}(w))$$

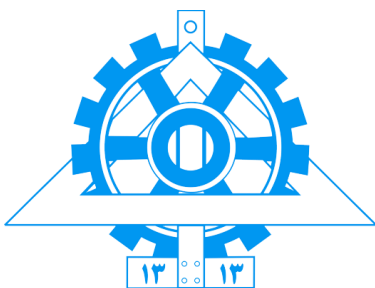
الف) به کمک خاصیت بالا تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را بیابید.

$$\bullet x_1(t) = te^{-\alpha|t|} \cos(\beta t) \quad \alpha > 0$$

$$\bullet x_2(t) = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right) \left(\frac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)} \right)$$

ب) تعمیم رابطه ی پارسوال: رابطه ی زیر را ثابت کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(w)\hat{y}^*(w)dw$$



به نام خدا

تمرین سری ششم

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر اخوان



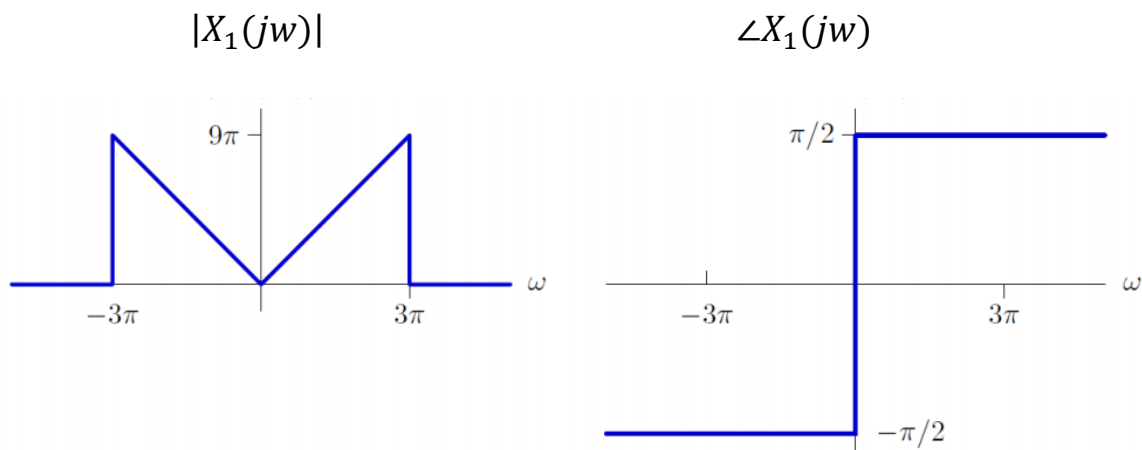
ج) به کمک قسمت قبل انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} dx$$

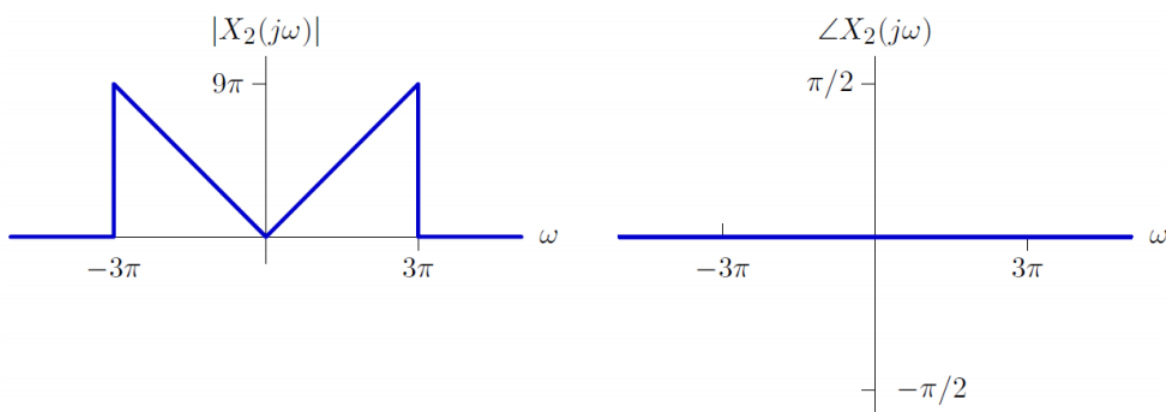
$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^4} dt$$

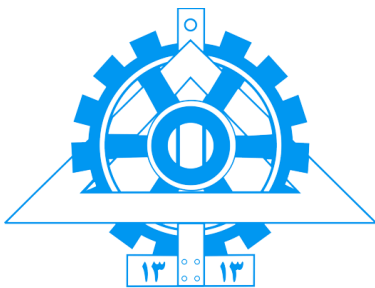
۲- مفهوم و نقش فاز در تبدیل فوری

الف) سیگنال $x_1(t)$ دارای تبدیل فوری $\hat{x}_1(\omega)$ است که اندازه و فاز آن در شکل زیر نمایش داده شده‌اند. سیگنال $x_1(t)$ را به فرم بسته و تابعی از زمان تعیین کنید و آن را رسم نمایید.



ب) سیگنال $x_2(t)$ دارای تبدیل فوری $\hat{x}_2(\omega)$ است که اندازه و فاز آن در شکل زیر نمایش داده شده‌اند. سیگنال $x_2(t)$ را به فرم بسته و تابعی از زمان تعیین کنید و آن را رسم نمایید.





به نام خدا

تمرین سری ششم

درس سیگنال ها و سیستم ها - دکتر اخوان



ج) شباهت ها و تفاوت های مهم دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ چیست؟ این شباهت ها و تفاوت ها چگونه خود را در تبدیل فوریه ی این دو سیگنال آشکار کرده اند؟

۳- خاصیت کفایت جزء حقیقی

ما به تبدیل فوریه ی پاسخ ضربه ی یک سیستم LTI پاسخ فرکانسی آن سیستم می گوئیم. یک خاصیت بسیار مهم پاسخ فرکانسی سیستم های LTI علی با پاسخ ضربه ی حقیقی $h(t)$ ، این است که به طور کامل با جزء حقیقی اش $Re\{\hat{h}(w)\}$ مشخص می شوند.

الف) با بررسی ارتباط بین جزء زوج $h(t)$ و خود $h(t)$ خاصیت کفایت جزء حقیقی را اثبات کنید.

ب) با فرض آن که جزء حقیقی پاسخ فرکانسی سیستمی LTI و علی به صورت زیر باشد، پاسخ ضربه ی سیستم را تعیین کنید.

$$Re\{\hat{h}(w)\} = \cos^2(w) + \frac{1}{1+w^2}$$

۴- پاسخ فرکانسی سیستم های LTI

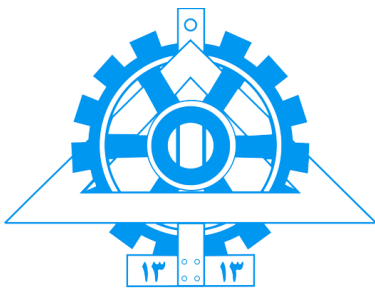
یک سیستم LTI با پاسخ ضربه ی زیر در نظر بگیرید:

$$h(t) = \frac{\sin(3\pi(t-2))}{\pi(t-2)}$$

پاسخ سیستم فوق به ورودی های زیر را به دست آورید:

$$\bullet \quad x_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right) \sin(2kt)$$

$$\bullet \quad x_2(t) = \left(\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right)^2$$



به نام خدا

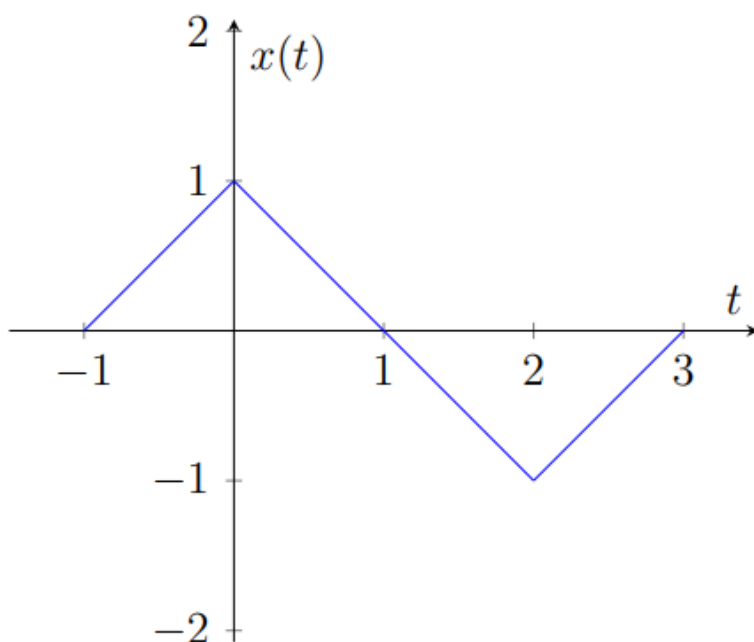
تمرین سری ششم

درس سیگنال ها و سیستم ها - دکتر اخوان



۵- خواص تبدیل فوریه

فرض کنید $\hat{x}(w)$ نشان دهنده ی تبدیل فوریه ی سیگنال $x(t)$ ترسیم شده در شکل زیر باشد.

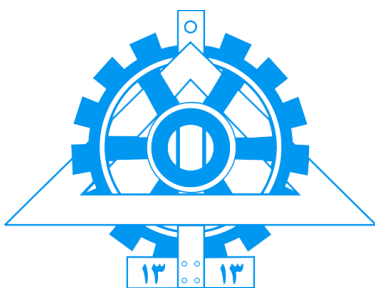


الف) مقادیر زیر را بدون محاسبه ی صریح $\hat{x}(w)$ محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(w) \frac{2 \sin(w)}{w} e^{j2w} dw \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(w) dw \quad \angle \hat{x}(w)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w \hat{x}(w) e^{jw} dw \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(w)|^2 dw \quad \hat{x}(0)$$

ب) عکس تبدیل فوریه ی $\{Re\{\hat{x}(w)\}\}$ را رسم کنید.



به نام خدا

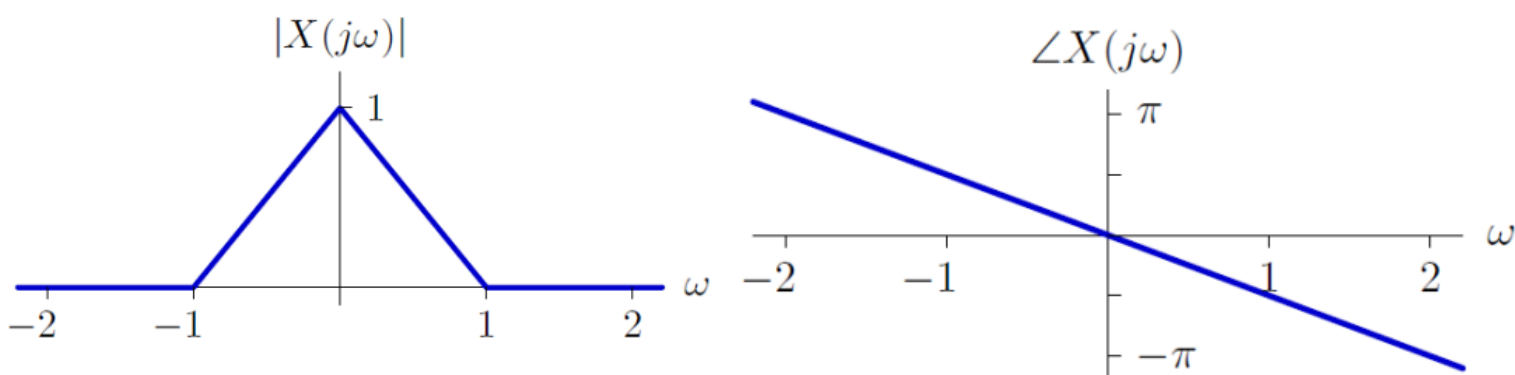
تمرین سری ششم

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر اخوان



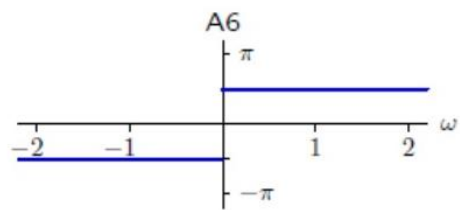
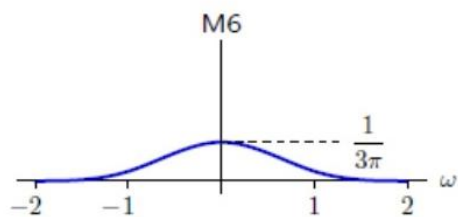
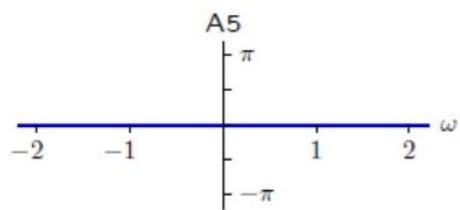
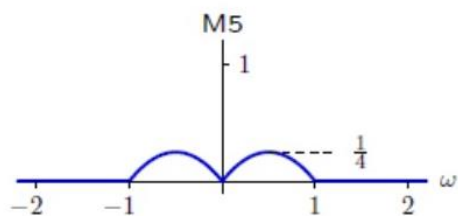
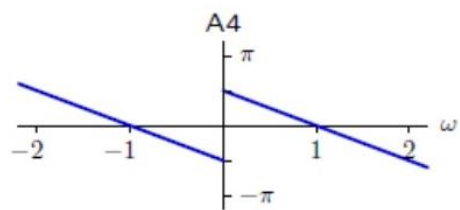
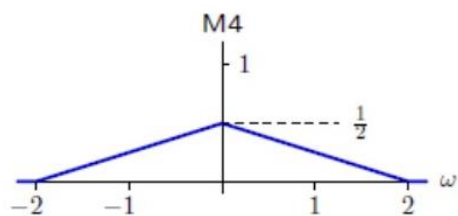
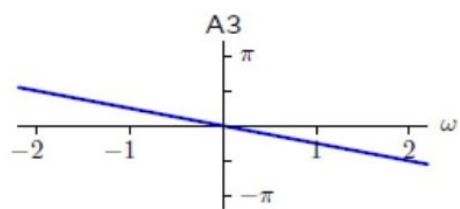
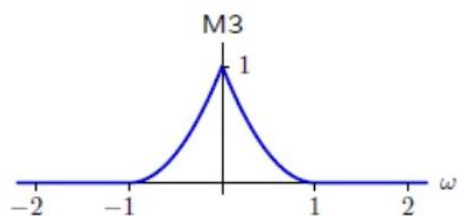
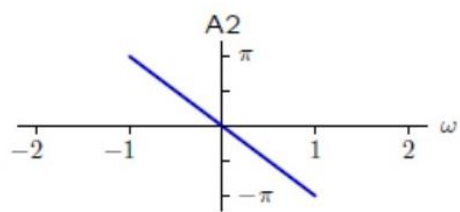
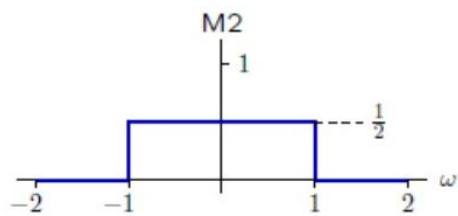
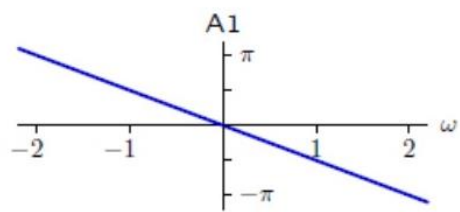
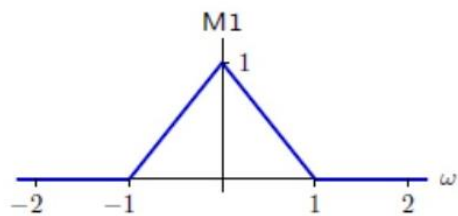
۶- خواص تبدیل فوریه

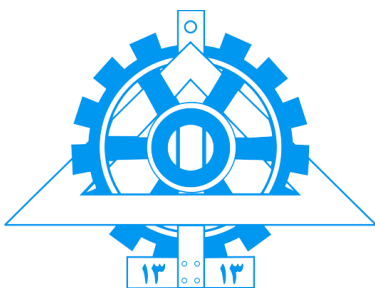
اندازه و فاز تبدیل فوریه ی سیگنال $x(t)$ در نمودارهای زیر رسم شده است.



شش سیگنال از روی سیگنال $x(t)$ ساخته ایم و آن‌ها را در ستون سمت چپ جدول زیر آورده‌ایم. در صفحه ی بعد شش نمودار اندازه و شش نمودار فاز جداگانه رسم شده اند. تعیین کنید هر کدام از این شکل‌ها متناسب با کدام یک از سیگنال‌های ساخته شده از روی سیگنال $x(t)$ می باشند. برچسب مناسب را در جدول قرار دهید.

Signal	magnitude	Angle
$\frac{dx(t)}{dt}$		
$(x * x)(t)$		
$x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$		
$x(2t)$		
$x^2(t)$		





به نام خدا

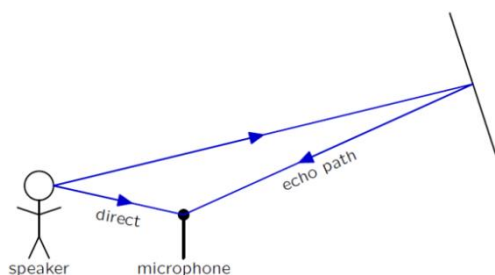
تمرین سری ششم

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر اخوان



۷- اکو!

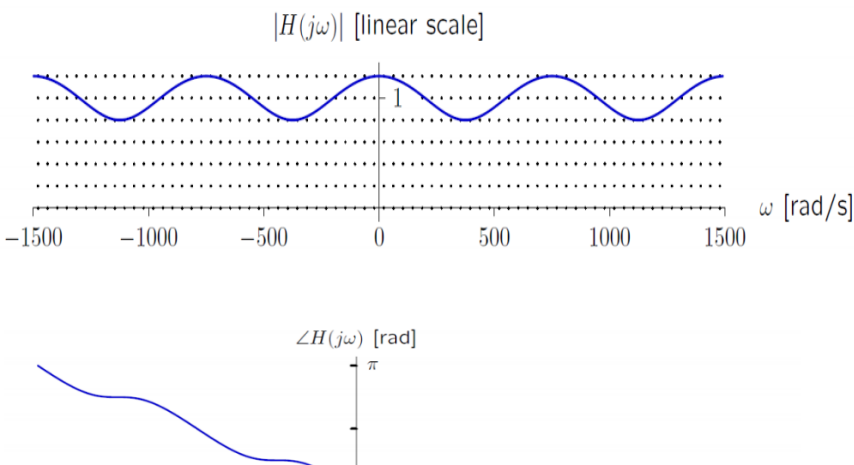
همان طور که شکل زیر نشان می‌دهد، فرض کنید صدای یک سخنران قبل از رسیدن به یک میکروفون با یک اکو از صدای خود تداخل کرده و مجموع سیگنال‌ها به میکروفون برسد.

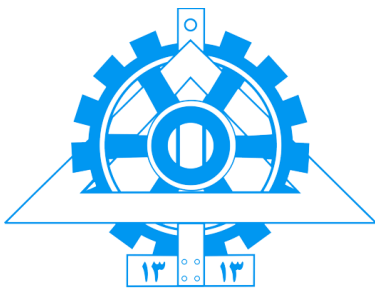


ما می‌توانیم این شرایط دریافت صدا را با یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان مدل کنیم که در آن سیگنال صدای سخنران ورودی و سیگنال دریافتی توسط میکروفون خروجی باشد. صدای سخنران از دو طریق عمده به میکروفون می‌رسد. یکی مسیر مستقیم و دیگری پس از یک بار برخورد با دیواره (مسیر اکو). این دو مسیر تاخیرها و تضعیف‌های متفاوتی دارند که در نهایت می‌توان سیستم کلی را به صورت

$$y(t) = x(t - T_1) + \epsilon x(t - T_2)$$

که در آن T_1 تأخیر مسیر مستقیم و T_2 و ϵ به ترتیب تأخیر و تضعیف مسیر اکو را نشان می‌دهند، مدل کرد. نمودارهای زیر اندازه و فاز پاسخ فرکانسی این سیستم در بازه $|\omega| \leq 1500 \text{ rad/s}$ را نشان می‌دهند. مقادیر T_1 و T_2 و ϵ را تعیین کنید.





به نام خدا

تمرین سری ششم

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر اخوان

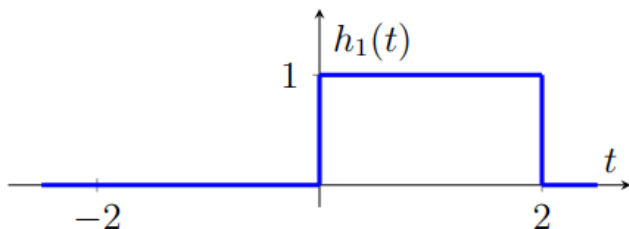


۸- بررسی پاسخ فرکانسی سیستم‌های LTI

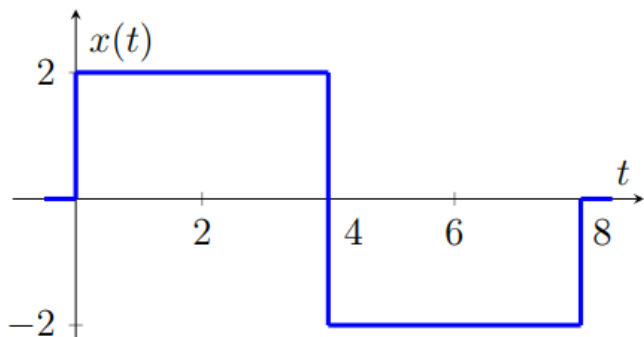
برای سیستم LTI زیر



اگر پاسخ ضربه‌ی سیستم اول به صورت



و پاسخ فرکانسی سیستم دوم $H_2(j\omega) = j\omega$ باشد، برای ورودی زیر موارد خواسته شده را تعیین کنید.



(آ) $\hat{y}(w)$ را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه‌ی کل سیستم را به دست آورید.

(ج) $y(t)$ را به دست آورده و رسم کنید.