- اگر ارزیابی درس را آپلود کردید، ۱۰ نمره به شما اضافه خواهد شد +۱۰

+۱۰

به صورت پیش فرض بارم سوالات ۹۰ نمره بود

مجموع ۱۱۰ نمره را می‌توانید کسب کنید

به نام او

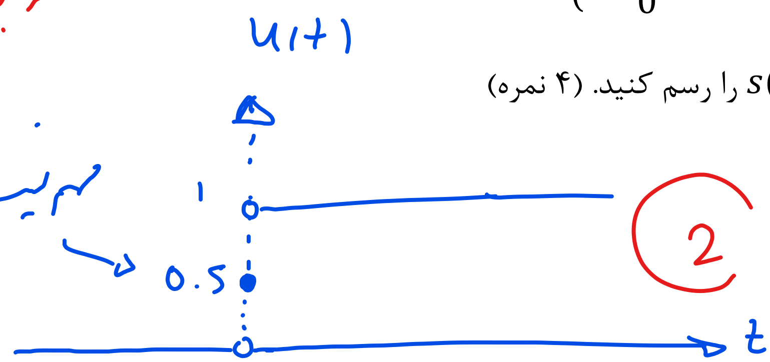
سیستم های LTI (~~[illegible]~~ ۳۰ نمره)

سوال ۱- پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $u(t)$ (پله) برابر با $s(t)$ می باشد.

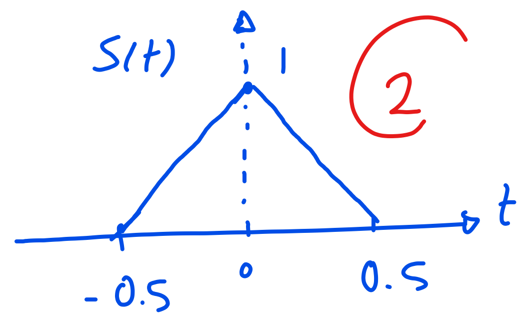
$$s(t)=\begin{cases} 2t+1 & -0.5<t\leq 0 \\ -2t+1 & 0<t<0.5 \\ 0 & else \end{cases}$$

الف) سیگنال ورودی $u(t)$ و سیگنال خروجی $s(t)$ را رسم کنید. (۴ نمره)

مهم نیست!!

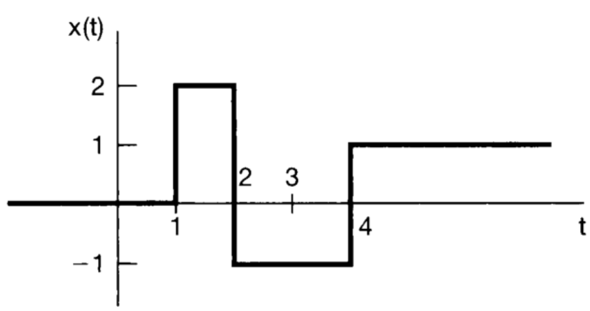


2



2

ب) حال یک ورودی جدید، یعنی سیگنال $x(t)$ را در نظر بگیرید که شکل آن در زیر آمده است. این سیگنال را به صورت یک ترکیب خطی بر حسب سیگنال $u(t)$ و شیفت یافته هایش بیان کنید. (6 نمره)



$$x(t)=2u(t-1)-3u(t-2)+2u(t-4)$$

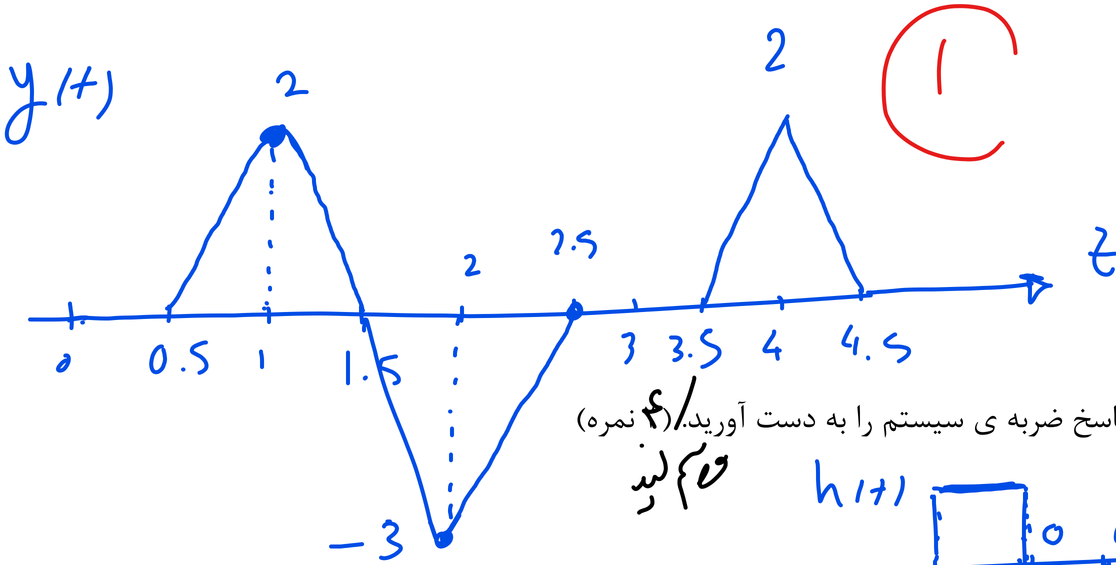
1 1 1 1 1 1

ج) پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ ، یعنی $y(t)$ را به دست آورده و رسم کنید. (۴ نمره)

1 1 1

سیستم LTI است ←

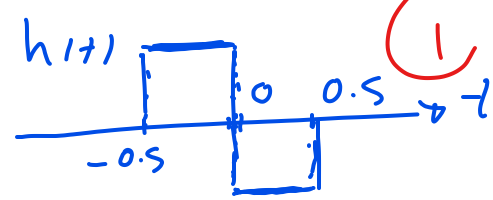
$$y(t) = 2S(t-1) - 3S(t-2) + 2S(t-4)$$



1

د) پاسخ ضربه ی سیستم را به دست آورید.(۴ نمره)

رسم کنید



1

$$h(t) = \frac{d}{dt}\left(S(t)\right) = 2u(t+0.5) - 4u(t) + 2u(t-0.5)$$

2 1

ن) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم بی حافظه است؟ (۴ نمره)

خیر - زیرا $h(t) \neq k\delta(t)$

2 2

ه) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم علی است؟ (۴ نمره)

خیر - زیرا $h(t)$ برای $-0.5 < t < 0$ مقدار دارد!

2 2

ی) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم پایدار است؟ (۴ نمره)

بله - زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt$ مقدار محدودی دارد!!

2 2

معادلات تفاضلی (۳۰ نمره)

سوال ۲- معادله ی تفاضلی زیر را با فرض وجود شرایط initial rest در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{3}\,y[n-1]=x[n] \qquad , \qquad x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

الف) خروجی $y[n]$ را به دست آورید (احتیاجی نیست اثبات کنید سیستم LTI است). (۱۲ نمره)

پاسخ همگن $\longrightarrow y_h[n] \longrightarrow 1-\frac{1}{3}z^{-1}=0 \longrightarrow z=\frac{1}{3} \longrightarrow y_h[n]=\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2

initial rest

پاسخ ضربه $\longrightarrow$ δ[n] را ورودی می‌دهیم تا پاسخ ضربه را به دست بیاوریم

$n=0 \longrightarrow h[0]=\delta[0] \quad 1$

$\longrightarrow n=1 \longrightarrow h[1]-\frac{1}{3}h[0]=0 \longrightarrow h[1]=\frac{1}{3}$

$n=2 \longrightarrow h[2]-\frac{1}{3}h[1]=0 \longrightarrow h[2]=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\longrightarrow h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

4

$$\longrightarrow y_p[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m u[m]\left(\frac{1}{3}\right)^{n-m}u[n-m]$$

برای $n>0$

$$y_p[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^m\left(\frac{1}{3}\right)^{-m}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}=\left[4\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

4

$y[n]=y_p[n]+\underbrace{y_h[n]}_{\text{صفر}}$

initial rest

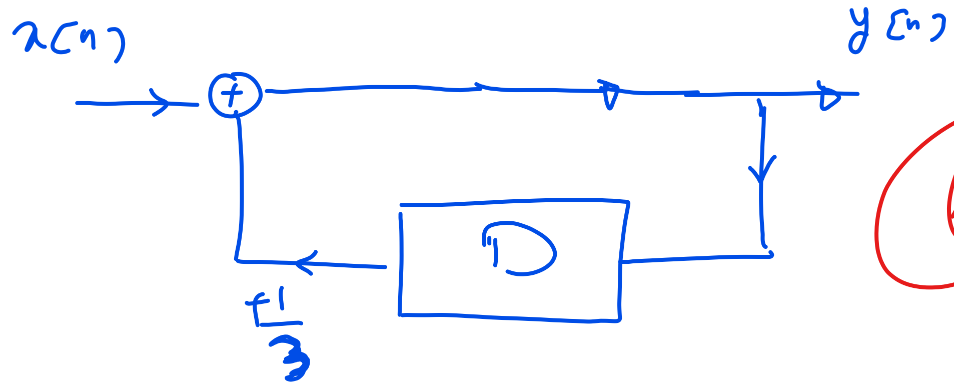
$n<0 \longrightarrow y[n]=0$

$$y[n]=y_p[n]$$

2

ب) بلوک دیاگرام این سیستم را با استفاده از المان های جمع کننده، بهره و بلاک تاخیر یک واحد D رسم کنید. (~~۴~~ نمره)

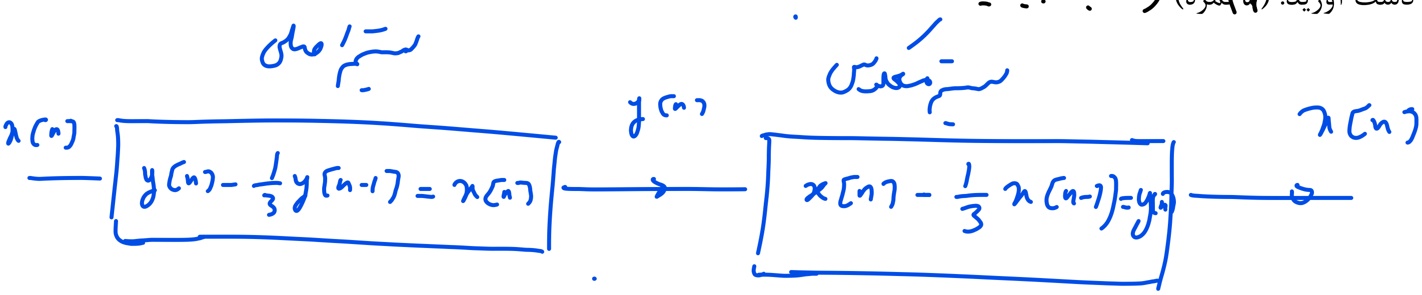
$$y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = x[n]$$



6

ج) با ذکر دلیل بیان کنید آیا این سیستم معکوس پذیر است؟ اگر بله، پاسخ ضربه ی سیستم معکوس را به دست آورید و ضابطه را بیان کنید. (~~۴~~ نمره)

بله



پاسخ ضربه سیستم اصلی $\longrightarrow h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longrightarrow$ می‌دانیم $h[n] * h_{inv}[n] = \delta[n]$

2

از طرفی

$$h[n] - \frac{1}{3}h[n-1] = \delta[n]$$

5

$$\longrightarrow h[n] * \underbrace{\left(\delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1]\right)}_{h_{inv}[n]} = \delta[n]$$

6

ضابطه سیستم معکوس $\longrightarrow y[n] = x[n] * h_{inv}[n] = x[n] - \frac{1}{3}x[n-1]$

سری فوریه پیوسته (۳۵ نمره)

سوال ۳- به سوالات زیر که در ادامه ی یکدیگر هستند پاسخ دهید.

الف) تساوی زیر را ثابت کنید. (۱۵ نمره)

$$x(t) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4k^2}\, e^{j\pi k t}$$

$x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره ی تناوب $T=2$ است ← می توان آن را بسط سری فوریه داد !!

3

$$\left\{ e^{j\frac{2\pi}{2}kt} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right| e^{-j\pi k t}\, dt$$

2

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) e^{-j\pi k t}\, dt = \frac{1}{2\times 2j}\int_0^2 \left(e^{j\frac{\pi}{2}t} - e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right) e^{-j\pi k t}\, dt$$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{4j}\left(\frac{e^{j\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)t}}{j\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)} + \frac{e^{-j\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)t}}{j\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)} \right)\Bigg|_0^2$$

همیشه -1 هست

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{4j}\left(\frac{e^{j\pi(1-2k)} - 1}{j\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)} + \frac{e^{-j\pi(1+2k)} - 1}{j\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)} \right)$$

9

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{4j} \times \frac{-2}{j\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-k} + \frac{1}{\frac{1}{2}+k} \right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}$$

$$\rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\pi k t} \checkmark$$

1

سیگنال حقیقی و زوج

a_x ها حقیقی و زوج؟

ب) عبارت زیر را حساب کنید. (۱۵نمره)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)\frac{1}{16k^4-8k^2+1}=? = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 = ?$$

$$\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2 = \underbrace{|a_0|^2}_{\left(\frac{4}{\pi^2}\right)} + 2\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \cdot dt}_{\frac{1}{2}}$$

3

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot dt = \frac{-1}{2}\times\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{\pi}$$

3

$$\rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot dt = \frac{1}{4}\int_0^2 (1-\cos\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\times\left(t-\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2}$$

3

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 = \frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}$$

6