به نام خدا

حل تمرین شماره ۲

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دکتر اخوان

۱ـ سیگنال های نمایی متناوب گسسته

الف) اگر داشته باشیم $x_w[n] = e^{j\omega n}$ ثابت کنید:

$$x\_\omega\ [n]\ is\ peridoic\ \Leftrightarrow \omega = 2\,m/N\,\pi\quad that\quad m \epsilon Z\ and\ N \epsilon N$$

حل (الف): اگر فرض کنیم دوره تناوب سیگنال برابر N است، طبق صورت سوال باید ثابت کنیم که $x[n] = x[n+N]$ است. پس داریم:

$$x[n] = x[n+N] \rightarrow e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}e^{j\omega N} \rightarrow e^{j\omega N} = 1$$

$$\Longrightarrow N\omega = 2\pi m \rightarrow \omega = \frac{2\pi m}{N}\ ; m \in Z\ , N \in N$$

از آنجایی که روابط به صورت بازگشتی هستند پس می توانیم نتیجه بگیریم که حکم خواسته شده اثبات شده است.

ب) تناوبی بودن هر یک از سیگنال های زیر را بررسی کنید. در صورت تناوبی بودن، دوره ی تناوب اصلی آن را نیز بیابید.

- $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$
- $x[n] = \left|e^{j\sin\left(\frac{2n\pi}{810198000}\right)}\right|$
- $x[n] = e^{j\frac{\pi}{3}(n-10)} + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
- $x[n] = cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\ cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

حل (ب):

- $x[n] = \left|e^{j\sin\left(\frac{2n\pi}{810198000}\right)}\right|$

از درس ریاضیات مهندسی می دانیم که اندازه هر سیگنال یا تابع نمایی که به فرم زیر باشد برابر یک است:

$\left|e^{jx}\right| = 1$

در واقع این سیگنال را اگر در صفحه مختلط رسم کنیم می بینیم که یک دایره به شعاع یک را به ما می دهد (بسته به مقدار ***x*** نقطه مورد نظر می تواند هر کجا روی این دایره باشد). پس سیگنال مدنظر صورت سوال یک تابع ثابت با مقدار ۱ است. دوره تناوب تابع ثابت نیز می تواند هر چیزی باشد اما کوچکترین مقدار برای آن ۱ است پس دوره تناوب سیگنال مطلوب برابر یک است.

$$x[n] = \left|e^{j\sin\left(\frac{2n\pi}{810198000}\right)}\right| = 1 \rightarrow x[n]\ is\ periodic\ with\ N = 1$$

- $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n^2)$

طبق روند کلی مساله را حل می کنیم:

$$x[n] = x[n+N] \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n+N)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2 + \frac{\pi}{2}nN + \frac{\pi}{4}N^2\right)$$

$$\cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{4}n^2}_{A}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2 + \frac{\pi}{2}nN + \frac{\pi}{4}N^2\right) \rightarrow \cos(A) = \cos\left(A + \frac{\pi}{2}nN + \frac{\pi}{4}N^2\right)$$

میدانیم : $\cos(A) = \cos(A + 2k\pi) \Longrightarrow \frac{\pi}{2}nN + \frac{\pi}{4}N^2 = 2k\pi \xrightarrow{\times\frac{4}{\pi}} 2nN + N^2 = 8k$

$$if\ N = 4 \rightarrow\ 2nN + N^2 = 8k$$

طبق معادله بدست آمده می بینیم که به ازای ***N=4*** که کوچکترین مقدار ممکن برای ***N*** است، معادله بدست آمده صادق است. پس دوره تناوب این سیگنال ۴ است.

- $x[n] = cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\ cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

برای حل این بخش باید ابتدا دوره تناوب هر کدام از جملات کسینوسی را جداگانه بیابیم و سپس ک.م.م آن ها را در نظر بگیریم. پس:

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2k\pi}{N_1} \rightarrow N_1 = 4$$

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2k\pi}{N_2} \rightarrow N_2 = 8$$

$$[N_1 , N_2] = 8 \rightarrow N = 8$$

پس دوره تناوب سیگنال مورد نظر ۸ است.

- $x[n] = e^{j\frac{\pi}{3}(n-10)} + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

مشابه قسمت قبلی ابتدا دوره تناوب دو سیگنال را بدست می آوریم و سپس ک.م.م این دوره تناوب ها را بدست می آوریم:

$$x_1[n] = e^{\frac{j\pi}{3}n} e^{\frac{-j\pi}{3}10} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2k\pi}{N_1} \rightarrow N_1 = 6k \rightarrow N_1 = 6$$

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2k\pi}{N_2} \rightarrow N_2 = 8k \rightarrow N_2 = 8$$

$$[N_1 , N_2] = 24 \rightarrow N = 24$$

پس دوره تناوب سیگنال برابر ۲۴ است.

۲ـ توان سیگنال ها

توان یک سیگنال به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_X = \langle x(t)x^*(t) \rangle = \langle |x(t)|^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

و در صورت گسسته بودن:

$$P_X = \langle x[n]x^*[n] \rangle = \langle |x[n]|^2 \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} |x[i]|^2$$

الف) نشان دهید که توان سیگنال $x(t) = De^{j\omega t}$ برابر $|D|^2$ می باشد.

حل (الف): طبق رابطه اولی که برای توان سیگنال ها پیوسته داده شده است پیش می رویم و حکم خواسته شده را اثبات می کنیم:

$$P_X = < De^{j\omega t}D^*e^{-j\omega t} > = \lim \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |D\, e^{j\omega t}|^2 dt = \lim \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |D|^2 |e^{j\omega t}|^2\, dt$$

$$= \lim \frac{1}{T} \times 2\frac{T}{2} \times |D|^2 = |D|^2$$

ب) اگر $x_1(t) = D_1 e^{j\omega_1 t}$ و $x_2(t) = D_2 e^{j\omega_2 t}$ که $\omega_1 \neq \omega_2$ نشان دهید:

$$\langle x_1(t)x_2^*(t)\rangle = 0$$

حل (ب): طبق رابطه توان برای حوزه پیوسته داریم:

$$< x_1(t)x_2^*(t) > = \lim \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_1\, e^{j\omega_1 t} D_2^* e^{-j\omega_2 t} dt = \lim \frac{D_1 D_2^*}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}\, dt$$

$$= \lim \frac{D_1 D_2^*}{T(\omega_1 - \omega_2)j} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim \frac{D_1 D_2^*}{T(\omega_1 - \omega_2)j}\left(e^{j(\omega_1-\omega_2)\frac{T}{2}} - e^{-j(\omega_1-\omega_2)\frac{T}{2}}\right)$$

$$= \lim \frac{2D_1 D_2^*}{T(\omega_1 - \omega_2)j} \sin\left((\omega_1 - \omega_2)\frac{T}{2}\right) \Longrightarrow if\ T \to \infty \ \ : \ < x_1(t)x_2^*(t) > = 0$$

ج) نشان دهید که توان سیگنال

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k e^{j\omega_k t}$$

برابر است با

$$P_f = \sum_{k=1}^{n} |D_k|^2$$

فرض کنید برای هر $i \neq j$، $\omega_i \neq \omega_j$.

حل (ج): طبق دو قسمت قبلی خواهیم داشت:

$$P_f = < f(t)f^*(t) > = < \sum_{k=1}^{n} D_k e^{j\omega_k t} \sum_{k=1}^{n} D_k^* e^{-j\omega_k t} >$$

$$< (D_1 e^{j\omega_1 t} + D_2 e^{j\omega_2 t} + \cdots + D_n e^{j\omega_n t})(D_1^* e^{-j\omega_1 t} + D_2^* e^{-j\omega_2 t} + \cdots + D_n^* e^{-j\omega_n t}) >$$

$$\rightarrow < D_1 e^{j\omega_1 t} D_1^* e^{-j\omega_1 t} > + < D_2 e^{j\omega_2 t} D_2^* e^{-j\omega_2 t} > + \cdots + < D_n e^{j\omega_n t} D_n^* e^{-j\omega_n t} >$$

طبق قسمت (الف) خواهیم داشت:

$$\rightarrow |D_1|^2 + |D_2|^2 + \cdots + |D_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} |D_k|^2$$

۳ـ سینگال های توان و انرژی

انرژی یک سیگنال به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

و در صورت گسسته بودن

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

برای یک سیگنال، اگر توان آن عدد مثبت کراندار (غیر صفر) باشد، آن را یک سیگنال توان و اگر انرژی آن یک عدد مثبت کراندار (غیر صفر) باشد آن را یک سیگنال انرژی می نامیم و در غیر اینصورت سیگنال نه سیگنال انرژی است نه سیگنال توان. مشخص کنید که هر یک از سیگنال های زیر، سیگنال توان هستند یا سیگنال انرژی و یا هیچ کدام. مقدار انرژی یا توان هر یک از آن ها را در صورت وجود نیز به دست آورید.

1. $y[n] = \dfrac{\sin(2n\pi - 5\pi)}{2n\pi - 5\pi}$

حل: طبق تعاریف بالا داریم:

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = 0$$

مقدار عبارت انرژی صفر است چون به ازای تمامی n ها مقدار سینوس ضریبی از π را داریم که همواره صفر است.

$$P_y = \lim \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |y[n]|^2 \quad : if\ N \to \infty\ \ then\ \ P_y = 0$$

پس سیگنال مورد نظر نه سیگنال توان و نه سیگنال انرژی است.

$$2.\, y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$$

حل: به ازای دو حالت n های زوج و فرد، انرژی سیگنال داده شده را بررسی می کنیم:

$$n = 2k \ \to y[n] = \cdots + 2^{-2} + \ 2^{0} + \ 2^{2} + \cdots = \frac{5}{3}$$

برای n های فرد نیز مشابه بالا عمل می کنیم و مقدار سری را بدست می آوریم:

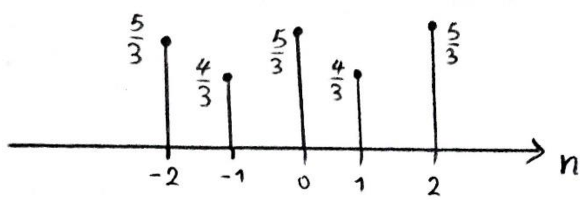
$$n = 2k+1 \ \to y[n] = \cdots + 2^{-3} + \ 2^{-1} + \ 2^{3} + \cdots = \frac{4}{3}$$

پس :

$$y[n] = \begin{cases} \frac{5}{3} & n = 2k \\ \frac{4}{3} & n = 2k+1 \end{cases} \to E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \infty$$

پس سیگنال موردنظر، سیگنال انرژی نیست.

حال طبق شکل سیگنال که به صورت زیر می باشد داریم:



$$P_y = \lim \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |y[n]|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{0} |y[n]|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{9} + \frac{16}{9}\right) = \frac{41}{18}$$

با توجه به محدود بودن توان سیگنال، می توان گفت سیگنال موردنظر به صورت سیگنال توان می باشد.

$$3.\ y[n] = \frac{1}{n} u[n-1]$$

حل: ابتدا توان سیگنال را می یابیم. از ریاضی دو به یاد داریم که مقدار سیگمای نوشته شده در ادامه به صورت $\frac{\pi^2}{6}$ می باشد. پس چون مقدار انرژی سیگنال محدود است پس سیگنال انرژی می باشد:

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} u^2[n-1] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

برای توان داریم:

$$P_y = \lim \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |y[n]|^2 \quad if\ N \to \infty : P_y = 0$$

پس سیگنال توان نمی باشد.

$$4.\ y(t) = \cos(t) + 3\sin(2t)\,. \quad t \in \mathbb{R}$$

حل: نکته ای که برای این سیگنال باید مدنظر داشت این است که این سیگنال چون تشکیل شده از دو ترم سینوسی است پس در کل متناوب است. می دانیم که انرژی سیگنال های متناوب بی نهایت است در نتیجه این سیگنال نمی تواند سیگنال انرژی باشد. حال توان آن را نیز بررسی می کنیم:

$$\lim \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|^2\,dt \xrightarrow{T=2\pi} \lim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(t) + 3\sin{(2t)})^2\,dt$$

اگر حاصل انتگرال بالا را محاسبه کنیم می بینیم که مقدار آن برابر ۵ خواهد شد پس می توان گفت این سیگنال، سیگنال توان می باشد.

$5.\ y(t) = e^{-\alpha|t|}\cos(\beta t).\quad \alpha > 0.\ \ t \in \mathbb{R}$

حل: ابتدا باید برای محاسبه انرژی، حاصل انتگرال زیر را بیابیم. با محاسبات مناسب خواهیم داشت:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \frac{2\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}$$

$$P_y = \lim \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|^2\,dt = \lim \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\alpha|t|}\cos(\beta t)\right)^2 dt = 0$$

طبق حاصل عبارت های بالا می توان گفت که سیگنال مطلوب، سیگنال انرژی هست اما سیگنال توان نیست.

$$6.\ y(t) = \begin{cases} kt^{\frac{-1}{4}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

حل: برای انرژی داریم:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \int_{0}^{\infty} k^2 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2k^2 t^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\infty} = \infty$$

$$P_y = \lim \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|^2\,dt = \lim \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} k^2 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \lim \frac{2\mathrm{k}^2}{T}\sqrt{\frac{T}{2}} = 0$$

طبق روابط بالا می بینیم که سیگنال مطلوب، نه سیگنال توان و نه سیگنال انرژی می باشد.

۴ـ زوج و فرد بودن سیگنال ها

قسمت های زوج، فرد، راست و چپ یک سیگنال به صورت زیر تعریف می شوند:

Even part of $x[n]$: $x_e[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2}$

Odd part of $x[n]$: $x_0[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2}$

Right part of $x[n]$: $x_r[n] = x[n]u[n]$

Left part of $x[n]$: $x_l[n] = x[n](1-u[n])$

الف) اگر سیگنال $x[n]$ متناوب با دوره ی تناوب N باشد، در مورد متناوب بودن قسمت های زوج و فرد سیگنال چه می توان گفت؟

حل (الف): ابتدا متناوب بودن سیگنال *x[-n]* را بررسی می کنیم:

$$x[n] = x[n+N] \quad \rightarrow \quad x[-n] = x[-n+N] \quad so\ x[-n] is\ N\ periodic\ too$$

از آن جایی که عبارت های توصیف کننده قسمت زوج و فرد یک سیگنال متشکل از دو عبارت *x[n]* و *x[-n]* می باشد در نتیجه با توجه به دوره تناوب این دو سیگنال که هر دو *N* است پس قسمت های زوج و فرد سیگنال نیز متناوب با دوره تناوب *N* می باشند.

ب) آیا با در دست داشتن قسمت زوج و قسمت راست یک سیگنال، سیگنال اصلی به طور یکتا قابل بازسازی است؟ اگر بله چطور و اگر خیر به چه اطلاعات دیگری برای ساختن سیگنال اولیه به صورت یکتا نیازمندیم؟

حل (ب): طبق روابط داده شده برای قسمت زوج و سمت راست سیگنال داریم:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[-n] \xrightarrow{\times u[n]} x_e[n]u[n] = \frac{1}{2}\underbrace{x[n]u[n]}_{\text{سمت راست سیگنال}} + \frac{1}{2}\underbrace{x[-n]u[n]}_{\text{سمت چپ سیگنال}}$$

$$\frac{1}{2}x[-n]u[n] = x_e[n]u[n] - \frac{1}{2}x[n]u[n]$$

مشاهده می شود که با در دست داشتن قسمت زوج و سمت راست سیگنال می توانیم طبق معادله بالا سمت چپ سیگنال را بدست آوریم و کل سیگنال را بازسازی نماییم.

ج) آیا با در دست داشتن قسمت فرد و قسمت چپ یک سیگنال، سیگنال اصلی به طور یکتا قابل بازسازی است؟

اگر بله چطور و اگر خیر به چه اطلاعات دیگری برای ساختن سیگنال اولیه به صورت یکتا نیازمندیم؟

حل(ج) : طبق قسمت قبل داریم:

$$x_o[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[-n] \xrightarrow{\times u[n]} x_o[n]u[n] = \frac{1}{2}\underbrace{x[n]u[n]}_{\text{سمت راست سیگنال}} - \frac{1}{2}\underbrace{x[-n]u[n]}_{\text{سمت چپ سیگنال}}$$

$$\frac{1}{2}x[n]u[n] = x_o[n]u[n] + \frac{1}{2}x[-n]u[n]$$

مشاهده می شود که با در دست داشتن قسمت فرد و سمت چپ سیگنال می توانیم طبق معادله بالا سمت راست سیگنال را بدست آوریم و کل سیگنال را بازسازی نماییم.

د) نشان دهید که: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$

حل (د):

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n]$$

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_o[n]x_e[n]}_{0}$$

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n]$$

ه) اگر سیگنال های $x_u[n]$ و $x_d[n]$ به صورت زیر ساخته شوند:

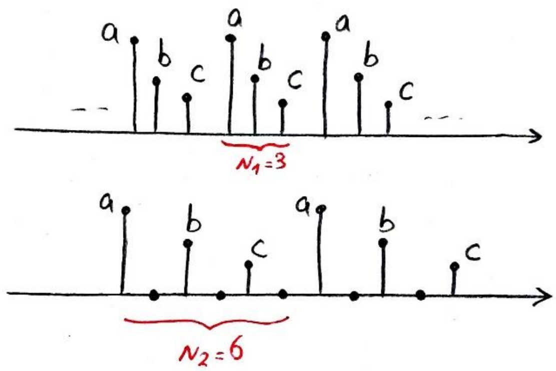
$$x_d[n] = x[2n]$$

$$x_u[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & if\ n\ even \\ 0 & if\ n\ odd \end{cases}$$

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید:

۱) اگر *x[n]* متناوب باشد، $x_u[n]$ نیز متناوب است.

در این حالت بین هر دو عنصر سیگنال، یک صفر اضافه می شود و سیگنال جدید را تشکیل می دهد. اگر شکل زیر را به عنوان مثال در نظر بگیریم فهم بهتری از قضیه خواهیم داشت. از آن جایی که طبق شکل مشخص است اگر دوره تناوب سیگنال اصلی ۳ باشد آن گاه دوره تناوب سیگنال جدید برابر ۶ خواهد شد و دو برابر می شود و همچنان متناوب است. پس گزاره داده شده **صحیح** می باشد.

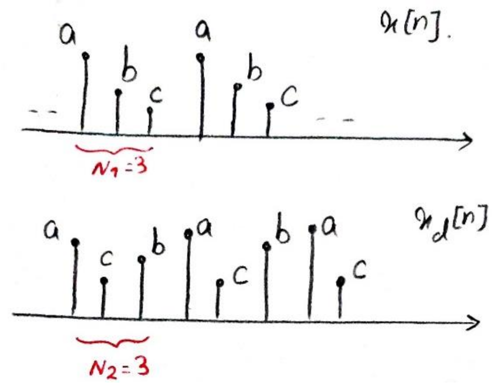


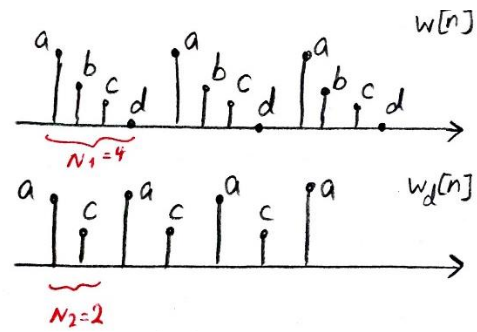
۲) اگر $x_u[n]$ متناوب باشد، *x[n]* نیز متناوب است.

مشابه مورد قبلی اگر یک سیگنال را در نظر بگیریم که مثلا دوره تناوب آن ***N*** باشد آن گاه دوره تناوب سیگنال اولیه متناظر با آن $\frac{N}{2}$ خواهد شد. پس سیگنال اولیه نیز متناوب است و در نتیجه گزاره داده شده **صحیح** می باشد.

۳) اگر *x[n]* متناوب باشد، $x_d[n]$ نیز متناوب است.

برای این حالت نیز می توان از دو مثال زیر استفاده کرد:





اگر به دو مثال بالا دقت کنیم می بینیم که سیگنال جدید همچنان متناوب است اما نمی توان به طور دقیق گفت که دوره تناوب چه تغییری می کند چون در مثال اول، دوره تناوب تغییری نکرده اما در مثال دوم نصف شده است. اگر دوره تناوب سیگنال اولیه زوج باشد دوره تناوب سیگنال جدید نصف می شود و در غیر اینصورت تغییری نمی کند. پس در حالت کلی سیگنال جدید متناوب و گزاره مدنظر **صحیح** است.

۴) $x_d[n]$ متناوب باشد، *x[n]* نیز متناوب است.

دقت شود که برای بازیابی سیگنال اولیه در این حالت می توان مقادیر سیگنال *x[n]* در *n* های فرد را هر عددی در نظر گرفت به گونه ای که سیگنال اصلی متناوب شود و یا متناوب نشود. پس نمی توان لزوما گفت که سیگنال اولیه به شرط تناوب سیگنال $x_d[n]$ ، متناوب است. در نتیجه گزاره داده شده **غلط** است.

ـ بررسی خواص سیستم ها

بخش الف ـ خطی بودن

خاصیت خطی بودن را در هر یک از سیستم های زیر بررسی کنید.

- $y(t) = \frac{x(t)e^{jx(t)}}{j}$

الف) با توجه به مطالب درسی داریم:

$$\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{x_1(t)e^{jx_1(t)}}{j} \\ y_2(t) = \dfrac{x_2(t)e^{jx_2(t)}}{j} \end{cases} \to z(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \to w(t) = \frac{z(t)e^{jz(t)}}{j}$$

$$\to \quad w(t) = \frac{(ax_1(t) + bx_2(t))e^{j\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)}}{j}$$

$$y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t) = a\,\frac{x_1(t)e^{jx_1(t)}}{j} + b\,\frac{x_2(t)e^{jx_2(t)}}{j}$$

$$\Longrightarrow w(t) \neq y_3(t) \Longrightarrow system\ is\ \boldsymbol{nonlinear}$$

- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x^2(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1^2(t) \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2^2(t) \end{cases} \to z(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \to$$

$$\frac{dw(t)}{dt} + 2w(t) = z^2(t) = \left(ax_1(t) + bx_2(t)\right)^2$$

$$y_3(t) = ax_1^2(t) + bx_2^2(t)$$

$$\Longrightarrow system\ is\ \boldsymbol{nonlinear}$$

- $y[n] = (\prod_{i=1}^{n} x[n-i])^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{cases} y_1[n] = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x_1[n-i])^{\frac{1}{n}} \\ y_2[n] = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x_2[n-i])^{\frac{1}{n}} \end{cases} \to z[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

$$\rightarrow w[n] = \prod_{i=1}^{n} (z[n-i])^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} (ax_1[n-i] + bx_2[n-i])^{\frac{1}{n}}$$

$$y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t) = a\prod_{i=1}^{n} (x_1[n-i])^{\frac{1}{n}} + b\prod_{i=1}^{n} (x_2[n-i])^{\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow w(t) \neq y_3(t) \Longrightarrow system\ is\ \boldsymbol{nonlinear}$$

- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1(t)}{dt^2} + \dfrac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt} + 2x_1(t) \\ \dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2} + \dfrac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \dfrac{dx_2(t)}{dt} + 2x_2(t) \end{cases} \rightarrow z(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$\rightarrow \frac{d^2w(t)}{dt^2} + \frac{dw(t)}{dt} + w(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t)$$

$$\rightarrow \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t) = a\frac{dz(t)}{dt} + b\frac{dz(t)}{dt} + 2az(t) + 2bz(t)$$

$$y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t) = \frac{dz(t)}{dt} + b\frac{dz(t)}{dt} + 2az(t) + 2bz(t)$$

$$\Longrightarrow w(t) = y_3(t) \Longrightarrow system\ is\ \boldsymbol{linear}$$

بخش ب ـ وارون پذیر بودن

کدام یک از سیستم های زیر وارون پذیرند؟ برای سیستم های وارون پذیر، سیستم وارون را بیابید.

- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

حل (ب): اگر از دو طرف معادله بالا مشتق بگیریم آن گاه داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

از آن جایی که مشتق یک اپراتور خطی است پس می توان نتیجه گرفت که عبارت بالا که ***x(t)*** را برحسب تابعی از ***y(t)*** نوشته ایم نشان می دهد که این سیستم **وارون پذیر** است.

- $y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$

$\frac{t}{3} =$

$k \rightarrow y(3k) = x(k)$

طبق رابطه بالا می بینیم که توانستیم سیگنال *x(t)* را براساس تابعی از *y(t)* بنویسیم در نتیجه سیستم مطلوب معکوس پذیر است.

- $y(t) = x(5t-3)$

$$5t - 3 = k \rightarrow t = \frac{k+3}{5} \rightarrow x(k) = y\left(\frac{k+3}{5}\right)$$

پس طبق رابطه بالا می توان گفت که سیستم مطلوب **معکوس پذیر** می باشد.

- $y[n] = nx[n]$

سیگنال *x[n]* را براساس تابعی از *y[n]* می نویسیم پس:

$$x[n] = \frac{y[n]}{n} \rightarrow if\ n = 0\ then\ \frac{y[n]}{0}$$

طبق عبارت بالا می بینیم که مقدار *x[n]* در *n=0* تعریف نشده است در نتیجه به ازای همه مقادیر *n* ، سیستم مطلوب **وارون پذیر نیست**.

- $y(t) = 3x(1) + x(2t-1)$

ابتدا باید مقدار سیگنال *y(t)* را در *t=1* بیابیم چون برای محاسبات نیاز می شود:

$$if\ t = 1\ \rightarrow y(1) = 3x(1) + x(1) \rightarrow y(1) = 4x(1)$$

$$2t - 1 = k \rightarrow t = \frac{k+1}{2} \rightarrow y\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{3}{4}y(1) + x(k) \rightarrow x(k) = y\left(\frac{k+1}{2}\right) - \frac{3}{4}y(1)$$

پس طبق رابطه بالا سیستم **معکوس پذیر** است.

- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

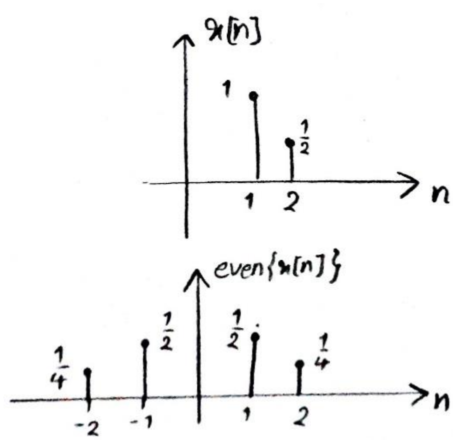
ابتدا با یک مثال پیش می رویم و از دو طرف سیگنال انتگرال می گیریم آن گاه خواهیم داشت:

$$y(t) = 4t \xrightarrow{\int dt} x_1(t) = 2t^2 + a \quad or \quad x_2(t) = 2t^2 + b \;\; or \ldots$$

از آن جایی که مقادیر ثابت های بعد از انتگرال گیری می توانند هر چیزی باشند پس سیگنال یکتایی توصیف کننده *x(t)* نخواهد بود در نتیجه سیستم **وارون پذیر نیست**.

• $y[n] = Even\{x[n]\}$

این سیستم **معکوس ناپذیر** است در نتیجه برای اینکه به صحت ادعای خود پی ببریم مثال زیر را در نظر بگیرید که مثالی نقض است:



• $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

طبق رابطه بالا داریم:

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k] \quad (*)$$

از طرفی :

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} x[k] = 2\sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k] \to \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k] = \frac{1}{2} y[n-1] \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} x[n] = y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

پس می بینیم که سیستم مطلوب **معکوس پذیر** می باشد.

بخش ج ـ تغییرناپذیر با زمان بودن

کدام یک از سیستم های زیر تغییرناپذیر با زمان و کدام یک تغییرپذیر با زمان هستند؟

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow w(t) = \begin{cases} z(t) + z(t-1) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-1) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$y(t-t_0) = \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-1) & t-t_0 \geq 0 \\ 0 & t-t_0 < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(t) \neq y(t-t_0) \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{\textit{time variant}}$$

- $y(t) = 2x(t) - 5$

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow w(t) = 2z(t) - 5 = 2x(t-t_0) - 5$$

$$y(t-t_0) = 2x(t-t_0) - 5$$

$$\rightarrow w(t) = y(t-t_0) \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{\textit{time invariant}}$$

- $y(t) = x\left(\frac{t}{5}\right)$

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow w(t) = z\left(\frac{t}{5}\right) = z\left(\frac{t}{5} - t_0\right)$$

$$y(t-t_0) = x\left(\frac{t-t_0}{5}\right)$$

$$\rightarrow w(t) \neq y(t-t_0) \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{\textit{time variant}}$$

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(2t) \geq 0 \\ 0 & x(2t) < 0 \end{cases}$

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow w(t) = \begin{cases} z(t) + z(t-1) & z(2t) \geq 0 \\ 0 & z(2t) < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-1) & x(2t-t_0) \geq 0 \\ 0 & x(2t-t_0) < 0 \end{cases}$$

$$y(t-t_0) = \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-1) & x(2t-2t_0) \geq 0 \\ 0 & x(2t-2t_0) < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(t) \neq y(t-t_0) \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{time\ variant}$$

- $y[n] = x[-n\,]$

$z[n] = x[n-n_0] \rightarrow w[n] = z[-n] = x[-n-n_0]$

$y[n-n_0] = x[-n+n_0]$

$$\rightarrow w[n] \neq y[n-n_0] \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{time\ variant}$$

- $y[n] = x[n] - 2\text{n}$

$z[n] = x[n-n_0] \rightarrow w[n] = z[n] - 2n = x[n-n_0] - 2n$

$y[n-n_0] = x[n-n_0] - 2(n-n_0)$

$$\rightarrow w[n] \neq y[n-n_0] \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{time\ variant}$$

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(t) \geq 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases}$

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow w(t) = \begin{cases} z(t) + z(t-1) & z(t) \geq 0 \\ 0 & z(t) < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-1) & x(t-t_0) \geq 0 \\ 0 & x(t-t_0) < 0 \end{cases}$$

$$y(t-t_0) = \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-1) & x(t-t_0) \geq 0 \\ 0 & x(t-t_0) < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(t) = y(t-t_0) \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{time\ invariant}$$

- $y[n] = n\,cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)x[n]$

$$z[n] = x[n-n_0] \rightarrow w[n] = ncos\left(\frac{n\pi}{5}\right)z[n] = ncos\left(\frac{n\pi}{5}\right)x[n-n_0]$$

$$y[n-n_0] = (n-n_0)cos\left(\frac{(n-n_0)\pi}{5}\right)x[n-n_0]$$

$$\rightarrow w[n] \neq y[n-n_0] \Longrightarrow \textit{the system is } \boldsymbol{time\ variant}$$

- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

$$z[n] = x[n-n_0] \rightarrow w[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} z[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]$$

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]$$

$$\rightarrow w[n] = y[n-n_0] \Longrightarrow the\ system\ is\ \boldsymbol{time\ invariant}$$

بخش د ـ علّی بودن

کدام یک از سیستم های زیر علّی و کدام یک غیر علّی هستند؟

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

این سیگنال **علی** است چون فقط وابسته به زمان های حال و قبل از نقطه فعلی است.

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(t) \geq 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases}$

مشابه استدلالی که برای قسمت قبلی آوردیم می توان گفت که این سیستم نیز **علی** است.

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(2t) \geq 0 \\ 0 & x(2t) < 0 \end{cases}$

این سیستم **غیرعلی** است. مثال نقض زیر را در نظر بگیرید:

$$t = 1 \rightarrow y(1) = \begin{cases} x(1) + x(0) & x(2) \geq 0 \\ 0 & x(2) < 0 \end{cases}$$

برای تعیین اینکه از کدام ضابطه استفاده کنیم باید مقدار *x(2)* را تعیین کنیم که به زمان بعد از زمان فعلی (*t=1*) بستگی دارد. پس سیستم علی نیست.

- $y(t) = x(t+2)$

این سیستم **غیرعلی** است. مثال نقض زیر را در نظر بگیرید:

$$if\ \ t = 1 \rightarrow y(1) = x(3)$$

طبق رابطه بالا می بینیم که سیگنال خروجی در زمان ۱ به ورودی در زمان بعد از آن یعنی ۳ وابسته است پس سیستم علی نیست.

- $y(t) = x(t)\cos(t+2)$

این سیستم **علی** است چون خروجی به ورودی در همان لحظه وابسته است. دقت شود که عبارت کسینوس در زمان های مختلف عددی ثابت بین ۱- تا ۱ است پس برای سنجش علی بودن سیستم آن را به عنوان یک ضریب ثابت در نظر داشته باشید.

- $y[n] = x[n \quad mod \;\; 4]$

این سیستم **غیرعلی** است. به عنوان مثال نقض می توان زمان های منفی را درنظر گرفت یعنی:

$$if\ \ n = -1\ \ \rightarrow y[-1] = x[3]$$

طبق رابطه بالا می بینیم که مقدار خروجی در زمان *1*- به ورودی در زمان های بعدی وابسته شده پس سیستم غیرعلی است.

- $y(t) = x\big(\sin(t)\big)$

این سیستم نیز **غیرعلی** است.مشابه مورد قبلی یک عدد منفی را به عنوان مثال نقض برای زمان در نظر می گیریم:

$$if\ \ t = -\frac{3\pi}{2} \rightarrow y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = x(1)$$

- $y(t) = x(x(t))$

این سیستم نیز **غیرعلی** است. برای مثال نقض باید سیستمی را در نظر بگیریم که در آن رابطه زیر برقرار باشد:

$$x(t) > t \rightarrow \ \ EX.\ \ \ x(1) = 3 > 1 \rightarrow y(1) = x\big(x(1)\big) = x(3)$$

بخش ٥ ـ پایداری

کدام یک از سیستم های زیر پایدار وکدام یک ناپایدار هستند؟

- $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{x(t)} & |x(t)| > 0 \\ x(t+2) & else \end{cases}$

اگر سیگنال ورودی پایدار و محدود باشد آن گاه خروجی نیز محدود خواهد بود در نتیجه سیستم **پایدار** است.

- $y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n+1] & n \leq -1 \end{cases}$

مشابه استدلال حالت قبلی می توان گفت که این سیستم نیز **پایدار** است. یعنی به ازای ورودی های پایدار، خروجی پایدار نتیجه می شود.

- $y(t) = \frac{\sin(x(t))}{x(t)}$

ابتدا حالتی که *x(t)=0* می شود را بررسی می کنیم. در این حالت خروجی مبهم است. اگر آن را رفع ابهام کنیم آن گاه:

$$Hopital : y(t) = \frac{\cos(\mathrm{x(t)})}{1} \quad if\ x(t) = 0\ \ then\ y(t) = 1$$

در نتیجه به ازای همه ورودی های پایدار حتی *x(t)=0* نیز خروجی پایدار است. پس سیستم **پایدار** است.

- $y(t) = \frac{t^3 x(t)}{t^2 - 10}$

سیستم **ناپایدار** است. برای مثال نقض می توان گفت اگر در زمان بی نهایت فرض کنیم سیگنال ورودی محدود است، به دلیل وجود ترم ***t*** در صورت، مقدار خروجی به بی نهایت میل می کند و ناپایدار می شود. همچنین در دو زمان زیر نیز مخرج کسر صفر شده و خروجی باز هم به بی نهایت میل می کند.

$$if\ t \to \infty\ then\ y(t) = \infty$$

$$if\ t = \pm\sqrt{10}\ \ then\ y(t) = \frac{t^3 x(t)}{0} = \infty$$

- $y(t) = \int_{t-5}^{t} x(\tau) d\tau$

اگر ورودی محدود و پایدار باشد خروجی نیز پایدار است. پس سیستم **پایدار** است.

$$if \;\; x(t) < a \rightarrow y(t) = \int_{t-5}^{t} x(t)dt$$

اگر در انتگرال بالا ماکسیمم مقدار $x(t)$ یعنی a را قرار دهیم آن گاه حاصل به صورت زیر می شود:

$$y(t) = 5a$$

پس خروجی به ازای ورودی محدود، پایدار شده است.

- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(-\tau^2) d\tau$

اگر در زمان بی نهایت مقدار عبارت $x(-t^2)$ مقدار محدودی داشته باشد آن گاه طبق رابطه زیر می بینیم که در زمان بینهایت، مقدار سیگنال خروجی به بی نهایت میل می کند. پس سیستم **ناپایدار** است.

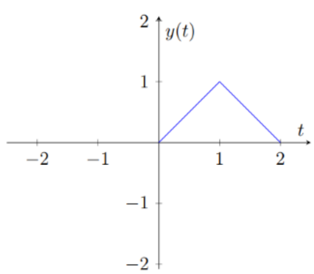
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t} x(-t^2)dt \rightarrow if \; x(-t^2) < a \; then \;\; y(t) = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{t} dt = \infty$$

۶ـ رابطه ی ورودی ـ خروجی سیستم ۱

ضابطه ی ورودی و خروجی یک سیستم به صورت زیر است:

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 1 \\ x(-t+1) & t \leq 1 \end{cases}$$

اگر خروجی سیستم به صورت زیر باشد، ورودی سیستم را بیابید.



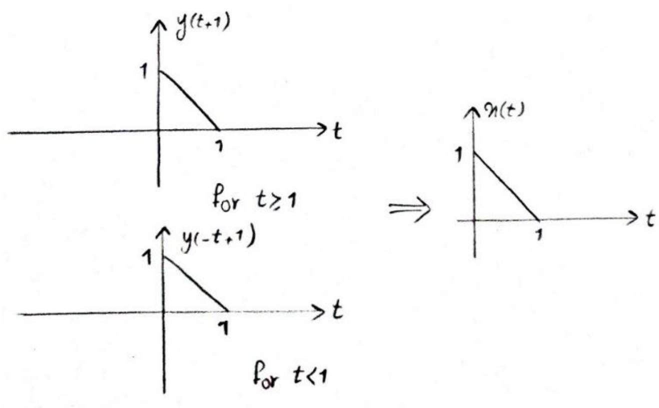
حل: با توجه به ضابطه داده شده برای سیستم، براساس محدوده های داده شده برای t ، سیگنال خروجی به دو قسمت تقسیم می شود. با توجه به شیف و اسکیل هایی که بر روی ورودی اتفاق افتاده تا خروجی تشکیل شود، مسیر برعکس را طی می کنیم تا به ورودی یا همان $x(t)$ برسیم. برای $t \geq 1$ باید سیگنال خروجی را یک واحد به سمت چپ شیفت دهیم (دقت شود که $x(t)$ به راست شیفت داده شده تا $y(t)$ را بسازد پس خروجی را به چپ

باید شیفت داد تا به ورودی برسیم). برای $t \leq 1$ ابتدا خروجی را نسبت به محور عمود قرینه می کنیم سپس آن را یک واحد به سمت راست شیفت می دهیم. پس:

$$for\ t \geq 1 : y(t) = x(t-1) \rightarrow t-1 = k \rightarrow y(k+1) = x(k)$$

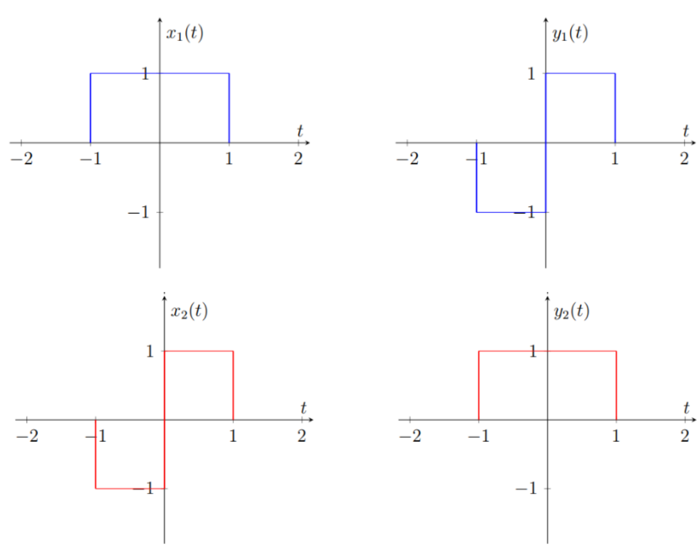
$$for\ t \leq 1 : y(t) = x(-t+1) \rightarrow -t+1 = u \rightarrow y(-u+1) = x(u)$$
$$\rightarrow y(-(u-1)) = x(u)$$

طبق شکل سیگنال خروجی، ورودی را به صورت زیر خواهیم داشت:



۷ـ رابطه ی ورودی ـ خروجی سیستم ۲

یک سیستم **خطی** در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی $x_1(t)$ به صورت $y_1(t)$ و به ورودی $x_2(t)$ به صورت $y_2(t)$ مطابق شکل زیر مفروض است. آیا این سیستم لزوما حافظه دار است؟



حل: ضابطه توصیف کننده سیستم را بر اساس شکل ورودی ها و خروجی ها می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ -x(t) & t \leq 0 \end{cases}$$

طبق ضابطه بالا می بینیم که خروجی، تنها به ورودی در لحظه کنونی مرتبط است در نتیجه می توان گفت که سیستم **بی حافظه** است یعنی به زمان هایی جز زمان کنونی وابستگی ندارد.