به نام خدا

تمرین سری دوم

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر اخوان

۱ـ سیگنال های نمایی متناوب گسسته

الف) اگر داشته باشیم $x_\omega[n] = e^{j\omega n}$ ثابت کنید:

$$x_\omega[n]\ is\ peridoic\ \Leftrightarrow \omega = 2\frac{m}{N}\pi \quad that \quad m \in \mathbb{Z}\ and\ N \in \mathbb{N}$$

ب) تناوبی بودن هر یک از سیگنال های زیر را بررسی کنید. در صورت تناوبی بودن، دوره ی تناوب اصلی آن را نیز بیابید.

- $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$
- $x[n] = \left|e^{j\sin\left(\frac{2n\pi}{810198000}\right)}\right|$
- $x[n] = e^{j\frac{\pi}{3}(n-10)} + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
- $x[n] = cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\ cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

۲ـ توان سیگنال ها

توان یک سیگنال به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_X = \langle x(t)x^*(t)\rangle = \langle |x(t)|^2\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\,dt$$

و در صورت گسسته بودن:

$$P_X = \langle x[n]x^*[n]\rangle = \langle |x[n]|^2\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N}|x[i]|^2$$

الف) نشان دهید که توان سیگنال $x(t) = De^{j\omega t}$ برابر $|D|^2$ می باشد.

ب) اگر $x_1(t) = D_1e^{j\omega_1 t}$ و $x_2(t) = D_2e^{j\omega_2 t}$ که $\omega_1 \neq \omega_2$ نشان دهید:

$$\langle x_1(t)x_2^*(t)\rangle = 0$$

ج) نشان دهید که توان سیگنال

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k e^{j\omega_k t}$$

برابر است با

$$P_f = \sum_{k=1}^{n} |D_k|^2$$

فرض کنید برای هر $i \neq j$ ،$\omega_i \neq \omega_j$.

۳ـ سینگال های توان و انرژی

انرژی یک سیگنال به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

و در صورت گسسته بودن

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

برای یک سیگنال، اگر توان آن عدد مثبت کراندار (غیر صفر) باشد، آن را یک سیگنال توان و اگر انرژی آن یک عدد مثبت کراندار (غیر صفر) باشد آن را یک سیگنال انرژی می نامیم و در غیر اینصورت سیگنال نه سیگنال انرژی است نه سیگنال توان. مشخص کنید که هر یک از سیگنال های زیر، سیگنال توان هستند یا سیگنال انرژی و یا هیچ کدام. مقدار انرژی یا توان هر یک از آن ها را در صورت وجود نیز به دست آورید.

1. $y[n] = \frac{\sin(2n\pi - 5\pi)}{2n\pi - 5\pi}$

2. $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$

3. $y[n] = \frac{1}{n} u[n-1]$

4. $y(t) = \cos(t) + 3\sin(2t)\,. \quad t \in \mathbb{R}$

5. $y(t) = e^{-\alpha|t|}\cos(\beta t). \quad \alpha > 0. \ \ t \in \mathbb{R}$

6. $y(t) = \begin{cases} kt^{\frac{-1}{4}} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$

٤ـ زوج و فرد بودن سیگنال ها

قسمت های زوج، فرد، راست و چپ یک سیگنال به صورت زیر تعریف می شوند:

Even part of $x[n]$: $x_e[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2}$

Odd part of $x[n]$: $x_0[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2}$

Right part of $x[n]$: $x_r[n] = x[n]u[n]$

Left part of $x[n]$: $x_l[n] = x[n](1-u[n])$

الف) اگر سیگنال $x[n]$ متناوب با دوره ی تناوب N باشد، در مورد متناوب بودن قسمت های زوج و فرد سیگنال چه می توان گفت؟

ب) آیا با در دست داشتن قسمت زوج و قسمت راست یک سیگنال، سیگنال اصلی به طور یکتا قابل بازسازی است؟ اگر بله چطور و اگر خیر به چه اطلاعات دیگری برای ساختن سیگنال اولیه به صورت یکتا نیازمندیم؟

ج) آیا با در دست داشتن قسمت فرد و قسمت چپ یک سیگنال، سیگنال اصلی به طور یکتا قابل بازسازی است؟ اگر بله چطور و اگر خیر به چه اطلاعات دیگری برای ساختن سیگنال اولیه به صورت یکتا نیازمندیم؟

د) نشان دهید که: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$

ه) اگر سیگنال های $x_u[n]$ و $x_d[n]$ به صورت زیر ساخته شوند:

$$x_d[n] = x[2n]$$

$$x_u[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & if\ n\ even \\ 0 & if\ n\ odd \end{cases}$$

درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید:

ـ اگر $x[n]$ متناوب باشد، $x_u[n]$ نیز متناوب است.

ـ اگر $x_u[n]$ متناوب باشد، $x[n]$ نیز متناوب است.

ـ اگر $x[n]$ متناوب باشد، $x_d[n]$ نیز متناوب است.

ـ $x_d[n]$ متناوب باشد، $x[n]$ نیز متناوب است.

۵ـ بررسی خواص سیستم ها

بخش الف ــ خطی بودن

خاصیت خطی بودن را در هر یک از سیستم های زیر بررسی کنید.

- $y(t) = \frac{x(t)e^{jx(t)}}{j}$
- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x^2(t)$
- $y[n] = (\prod_{i=1}^{n} x[n-i])^{\frac{1}{n}}$
- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$

بخش ب ــ وارون پذیر بودن

کدام یک از سیستم های زیر وارون پذیرند؟ برای سیستم های وارون پذیر، سیستم وارون را بیابید.

- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$
- $y(t) = x(5t-3)$
- $y[n] = nx[n]$
- $y(t) = 3x(1) + x(2t-1)$
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- $y[n] = Even\{x[n]\}$
- $y[n] = \sum_{k=\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

بخش ج ــ تغییرناپذیر با زمان بودن

کدام یک از سیستم های زیر تغییرناپذیر با زمان و کدام یک تغییرپذیر با زمان هستند؟

- $y(t) = 2x(t) - 5$
- $y(t) = x\left(\frac{t}{5}\right)$
- $y[n] = x[-n\ ]$
- $y[n] = x[n] - 2\text{n}$
- $y[n] = n\ cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)x[n]$
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(2t) \geq 0 \\ 0 & x(2t) < 0 \end{cases}$
- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(t) \geq 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases}$

بخش د ـ علّی بودن

کدام یک از سیستم های زیر علّی و کدام یک غیر علّی هستند؟

- $y(t) = x(t+2)$
- $y(t) = x(t)\cos\ (t+2)$
- $y[n] = x[n \quad mod\ \ 4]$
- $y(t) = x\big(\sin(t)\big)$
- $y(t) = x(x(t))$

- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(t) \geq 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases}$
- $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-1) & x(2t) \geq 0 \\ 0 & x(2t) < 0 \end{cases}$

بخش ه ـ پایداری

کدام یک از سیستم های زیر پایدار وکدام یک ناپایدار هستند؟

- $y(t) = \frac{\sin(x(t))}{x(t)}$
- $y(t) = \frac{t^3 x(t)}{t^2 - 10}$
- $y(t) = \int_{t-5}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(-\tau^2)d\tau$

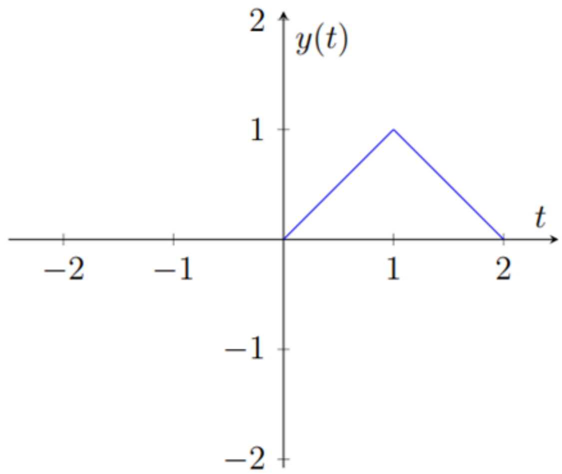
- $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{x(t)} & |x(t)| > 0 \\ x(t+2) & else \end{cases}$
- $y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n+1] & n \leq -1 \end{cases}$

٦ـ رابطه ی ورودی ـ خروجی سیستم ۱

ضابطه ی ورودی و خروجی یک سیستم به صورت زیر است:

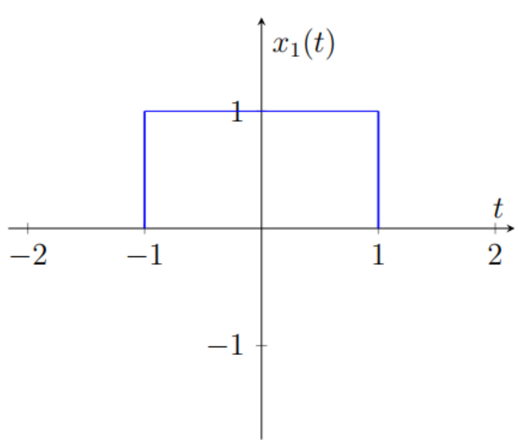
$$y(t)=\begin{cases}x(t-1) & t\geq 1\\ x(-t+1) & t\leq 1\end{cases}$$

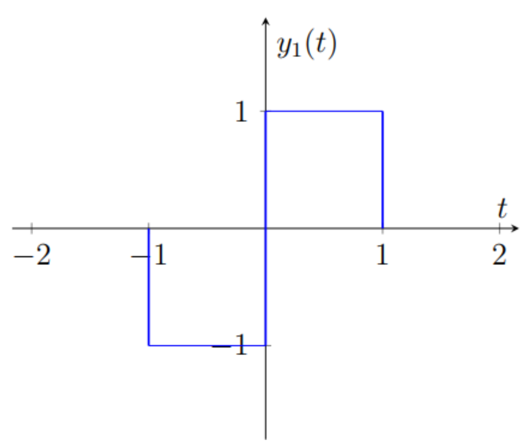
اگر خروجی سیستم به صورت زیر باشد، ورودی سیستم را بیابید.

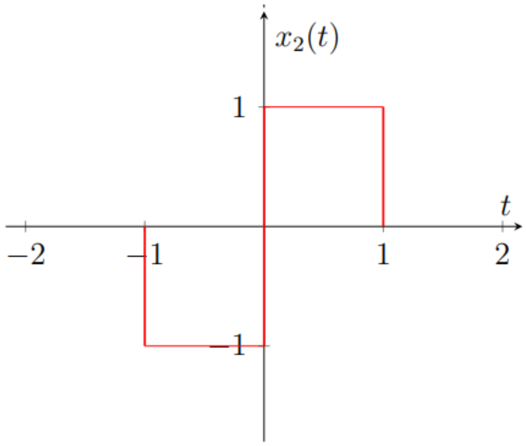


۷ـ رابطه ی ورودی ـ خروجی سیستم ۲

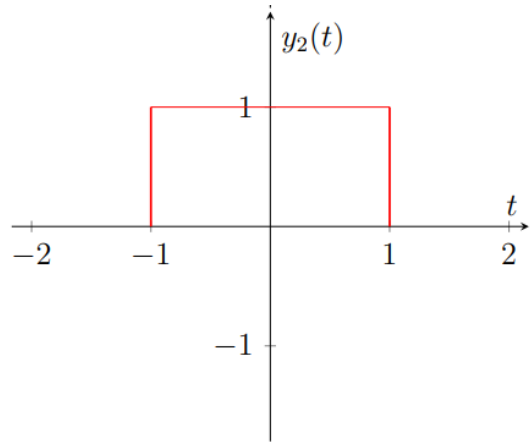
یک سیستم **خطی** در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی $x_1(t)$ به صورت $y_1(t)$ و به ورودی $x_2(t)$ به صورت $y_2(t)$ مطابق شکل زیر مفروض است. آیا این سیستم لزوما حافظه دار است؟







$x_2(t)$
1
-1
t
-2
-1
1
2



$y_2(t)$
1
-1
t
-2
-1
1
2