

# Variables de contrôle pour un modèle GARCH

Marwen Khelifa   Rim Salhi   Taha Habib

30 Avril 2024

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Introduction

Le but de ce projet est d'estimer les paramètres d'un modèle GARCH(1,1) en utilisant des variables de contrôle.

Nous avons en tout développé 4 méthodes pour estimer ces paramètres, le but de l'ajout de variables de contrôle étant de diminuer la variance de ces estimations.

# Le modèle GARCH(1,1)

La série  $(r_t)_{t>0}$  suit un modèle GARCH(1,1) si  $r_t|F_{t-1}$  suit une loi  $N(0, h_t)$ , où :

$$h_t = \omega_0 + \omega_1 r_{t-1}^2 + \omega_2 h_{t-1}$$

La suite  $(h_t)_{t>0}$  est la suite des variances conditionnelles, et  $(r_t)_{t>0}$  peut par exemple symboliser la suite de retours sur investissement.

Notre but ici est donc d'estimer les paramètres  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  à partir d'une série  $(r_t)_{t>0}$

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Cadre Bayésien

- On a donc :  $\pi((r_t)|\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{\frac{-r_t^2}{2h_t}}$
- On utilise comme prior une loi normale centrée réduite pour chaque  $\omega_i$  :  $\pi(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega_i^2}{2}}$

On en déduit donc la loi postérieure par la formule de Bayes :

$$\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2|(r_t)) = \frac{1}{Z} \pi((r_t)|\omega_0, \omega_1, \omega_2) \pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$$

$$\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2|(r_t)) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\frac{r_t^2}{h_t} + \ln(h_t)]}$$

## Cadre Bayésien (suite)

Deux remarques :

- Ce n'est pas une loi normale, car  $h_t$  dépend des  $\omega_i$  !
- Ce n'est pas exactement la loi postérieure, car les  $\omega_i$  doivent remplir les conditions de positivité et de stationnarité :  
 $\omega_i > 0$  pour tout  $i=0,1,2$  et  $\omega_1 + \omega_2 < 1$   
Ces conditions pourront être imposées dans l'algorithme qui suit.

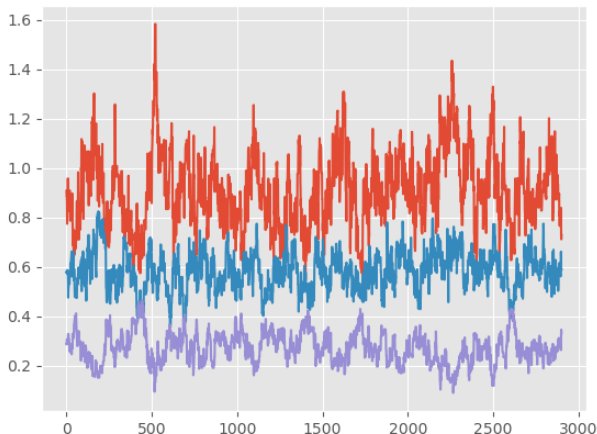


# Algorithme de Metropolis-Hastings

- L'algorithme de Metropolis-Hastings est une méthode particulièrement utile pour créer des échantillons sur des lois dont la densité est complexe et difficile à uniformiser.
- L'idée est de générer une chaîne de Markov dont la loi invariante sera la loi postérieure qui nous intéresse.
- Ici, on fait tourner trois algorithmes de Metropolis "en parallèle" pour chaque  $\omega_j$ .
- Les moyennes empiriques des  $\omega_j$  sur le régime stationnaire va alors converger vers l'espérance de la loi postérieure.
- Pour imposer les conditions de positivité et de stationnarité, on rejette tout nouvel état de  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$  si ces conditions ne sont pas respectées.

# Résultats

Figure: Trajectoires pour un algorithme de Metropolis classique.  
Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Variables de contrôle : fondations théoriques

Soit  $H$  l'opérateur Hamiltonien de type "Schrödinger" et  $\Psi$  une "fonction d'essai" infiniment différentiable et à support compact.

Si  $H\sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))} = 0$  avec  $\pi$  la densité de la loi postérieure des  $\omega_i$ , alors la fonction renormalisée :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i + \frac{H\Psi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)}{\sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))}}$$

a la même espérance que la variable aléatoire  $\omega_i$ , mais peut avoir une variance moindre. On supposera comme dans l'article d'Antonietta Mira que la condition citée plus haut est satisfaite.

# Variables de contrôle

On choisit  $\Psi(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))}$   
avec  $P$  un polynome. Dans ce cas, la fonction renormalisée sera :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - \frac{1}{2} \Delta P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) + \nabla P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \cdot z$$

$$\text{où : } z = -\frac{1}{2} \nabla \ln(\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))).$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_0} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_2} \text{ (Laplacien)}$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \omega_0}, \frac{\partial}{\partial \omega_1}, \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \text{ (Gradient)}$$

## Cas particulier : polynome de degré 1

Si  $P(x) = a^T x$  est un polynome de degré 1 où  $x = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^T$ , alors la fonction renormalisée devient :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - a_i^T z$$

Et le choix optimal de  $a$  pour minimiser la variance de  $f_i$  est :  
 $a_i = -E[zz^T]E[z\omega_i]$  pour  $i=0,1,2$

On reconnaît alors que  $-a_i$  est le vecteur des coefficients de la régression MCO théorique de  $\omega_i$  sur  $z$ .

# Implémentation de la méthode ZV-MCMC

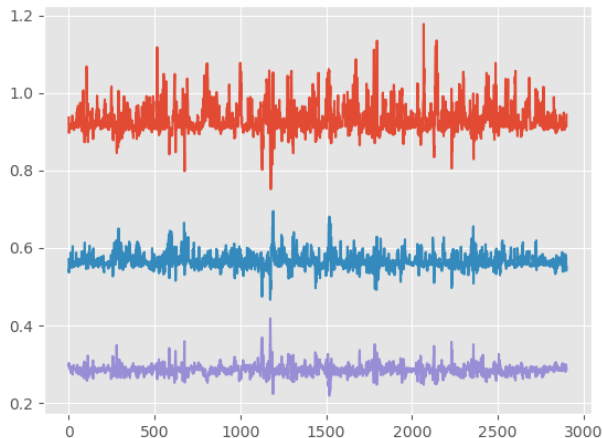
Pour implémenter cette méthode ZV-MCMC avec ces variables de contrôle, on fait un algorithme en deux étapes :

- On fait d'abord une première simulation MCMC "courte", pour ensuite régresser chaque  $\omega_i$  sur  $z$  pour obtenir les vecteurs  $a_0, a_1, a_2$
- On fait une seconde simulation longue où nos estimateurs seront cette fois les moyennes empiriques des  $f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ , qui peuvent être calculés avec les  $\omega_i$  de cette simulation grâce aux  $a_i$  de la première simulation.

# Résultats

Figure: Trajectoires des  $f_i$ .

Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$





# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle**
- 5 Bilan et Conclusion

## Cas d'un polynome de degré 2

Si  $P(x) = a^T x + \frac{1}{2} x^T B x$  est un polynome de degré 2 où  $x = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^T$ , la fonction renormalisée devient cette fois :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - \frac{1}{2} \text{tr}(B) + (a + Bx)^T z$$

On a donc ici à considérer 12 variables de contrôle au lieu de 3 :

$z_0,$	$z_1,$	$z_2,$
$z_0\omega_0,$	$z_1\omega_0,$	$z_2\omega_0,$
$z_0\omega_1,$	$z_1\omega_1,$	$z_2\omega_1,$
$z_0\omega_2,$	$z_1\omega_2,$	$z_2\omega_2$

# Sélection de variables de contrôle

La complexité d'une regression OLS est de  $O(d^2N)$  avec  $d$  la dimension et  $N$  la taille de l'échantillon. On cherche donc à réduire notre nombre de variables de contrôle. Pour ce faire, on implémente deux méthode.

# Méthode dichotomique avec LASSO

La première est une recherche dichotomique utilisant des régressions LASSO : pour chaque  $\omega_i$ , on fait d'abord une régression LASSO avec un coefficient de pénalisation  $\mu$ , puis :

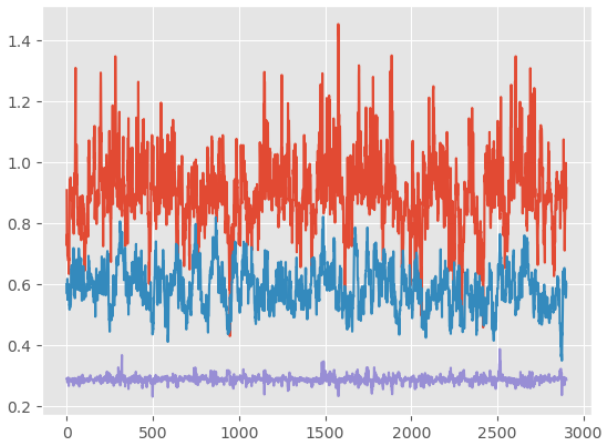
- si on obtient strictement plus de 3 coefficients non nuls (sans compter la constante), on augmente  $\mu$
- si on obtient strictement moins de 3 coefficients non nuls (sans compter la constante), on diminue  $\mu$

lorsqu'on a sélectionné les 3 variables de contrôle, on fait une régression OLS classique de  $\omega_i$  sur celles-ci et on obtient ainsi le vecteur  $a_i$  de manière similaire à l'algorithme présenté précédemment.

# Résultats

**Figure:** Trajectoires des  $f_i$  avec des variables de contrôle choisies par dichotomie + LASSO.

Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$



## Méthode "intuitive"

La seconde méthode que nous avons implémenté est plus intuitive : on choisit tous les triplets de variables de contrôle où  $z_0$ ,  $z_1$  et  $z_2$  apparaissent une seule fois chacun, on fait une régression OLS de chaque  $\omega_i$  sur chaque triplet et pour chaque  $\omega_i$ , on sélectionne le triplet où on obtient le meilleur  $R^2$ .

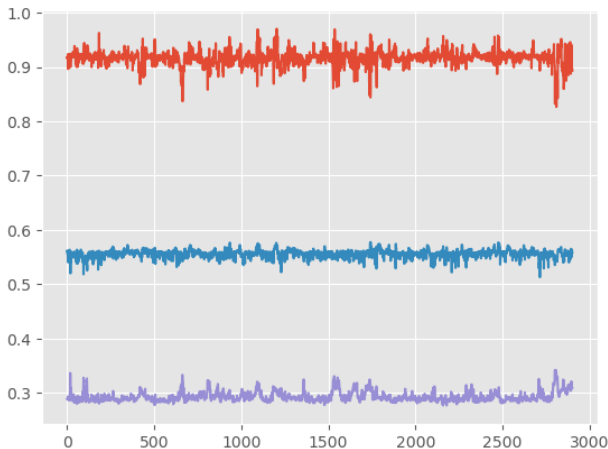
Cela fait  $3 * 4^3 = 192$  régressions OLS à faire avec 3 variables, ce qui est raisonnable.

On obtient de bien meilleurs résultats avec cette méthode qu'avec la précédente, mais elle ne serait pas possible en plus grande dimension.

# Résultats

Figure: Trajectoires des  $f_i$  avec des variables de contrôle choisies "intuitivement".

Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$

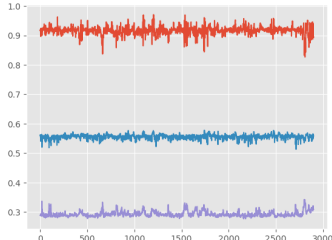
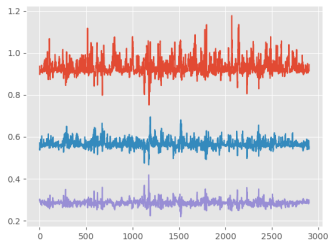
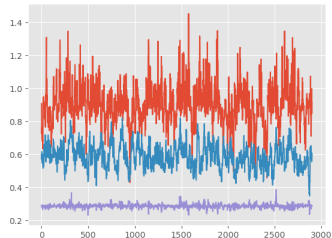
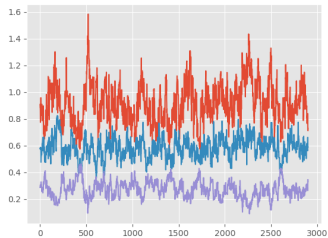


# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion



# Bilan



# Résultats sur la diminution de variance

On obtient avec l'ajout de variables de contrôle en utilisant un polynôme de degré 1 des variances environ 12, 15 et 20 fois plus petites pour  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement.

On obtient en utilisant un polynôme de degré 2 avec la méthode "intuitive" des variances environ 120, 140 et 35 fois plus petites pour  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement.

**Table 1** GARCH variance reduction: 95 % confidence interval for the ratio of the variances of ordinary MCMC estimators and ZV-MCMC estimator

	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$
1st Degree $P(x)$	8–18	13–28	12–27
2nd Degree $P(x)$	1200–2700	6100–13500	6200–13800
3rd Degree $P(x)$	21000–47000	48000–107000	26000–58000

# Conclusion

Nous obtenons donc des résultats cohérents avec ceux de l'article d'Antonietta Mira en utilisant un polynome de degré 1, mais pas pour un polynome de degré 2.

Cependant, l'article ne parlait pas de sélection de variables de contrôle.

Cette différence pour le polynome de degré 2 peut donc s'expliquer par le fait que les auteurs utilisaient toutes les variables de contrôle pour la régression OLS, ce qui donne de meilleurs résultats.