

# Variables de contrôle pour un modèle GARCH

Marwen Khelifa   Rim Salhi   Taha Habib

30 Avril 2024

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Introduction

Le but de ce projet est d'estimer les paramètres d'un modèle GARCH(1,1) en utilisant des variables de contrôle.

Nous avons en tout développé 4 méthodes pour estimer ces paramètres, le but de l'ajout de variables de contrôle étant de diminuer la variance de ces estimations.

# Le modèle GARCH(1,1)

La série  $(r_t)_{t>0}$  suit un modèle GARCH(1,1) si  $r_t|F_{t-1}$  suit une loi  $N(0, h_t)$ , où :

$$h_t = \omega_0 + \omega_1 r_{t-1}^2 + \omega_2 h_{t-1}$$

La suite  $(h_t)_{t>0}$  est la suite des variances conditionnelles, et  $(r_t)_{t>0}$  peut par exemple symboliser la suite de retours sur investissement.

Notre but ici est donc d'estimer les paramètres  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  à partir d'une série  $(r_t)_{t>0}$

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Cadre Bayésien

- On a donc :  $\pi((r_t)|\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_t} e^{\frac{-r_t^2}{2h_t}}$
- On utilise comme prior une loi normale centrée réduite pour chaque  $\omega_i$  :  $\pi(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega_i^2}{2}}$

On en déduit donc la loi postérieure par la formule de Bayes :

$$\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2|(r_t)) = \frac{1}{Z} \pi((r_t)|\omega_0, \omega_1, \omega_2) \pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$$

$$\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2|(r_t)) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\frac{r_t^2}{h_t} + \ln(h_t)]}$$

## Cadre Bayésien (suite)

Deux remarques :

- Ce n'est pas une loi normale, car  $h_t$  dépend des  $\omega_i$  !
- Ce n'est pas exactement la loi postérieure, car les  $\omega_i$  doivent remplir les conditions de positivité et de stationnarité :  
 $\omega_i > 0$  pour tout  $i=0,1,2$  et  $\omega_1 + \omega_2 < 1$   
Ces conditions pourront être imposées dans l'algorithme qui suit.

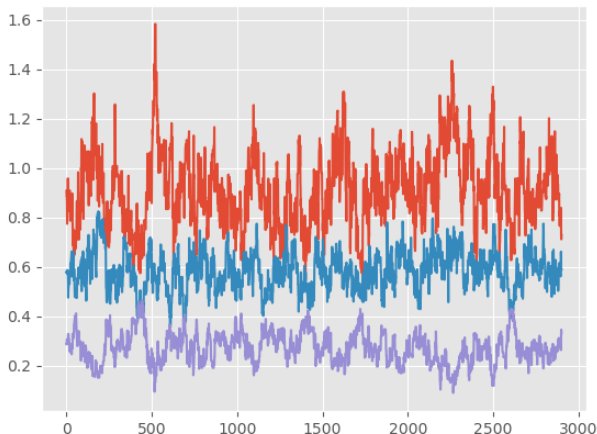


# Algorithme de Metropolis-Hastings

- L'algorithme de Metropolis-Hastings est une méthode particulièrement utile pour créer des échantillons sur des lois dont la densité est complexe et difficile à uniformiser.
- L'idée est de générer une chaîne de Markov dont la loi invariante sera la loi postérieure qui nous intéresse.
- Ici, on fait tourner trois algorithmes de Metropolis "en parallèle" pour chaque  $\omega_j$ .
- Les moyennes empiriques des  $\omega_j$  sur le régime stationnaire va alors converger vers l'espérance de la loi postérieure.
- Pour imposer les conditions de positivité et de stationnarité, on rejette tout nouvel état de  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$  si ces conditions ne sont pas respectées.

# Résultats

Figure: Trajectoires pour un algorithme de Metropolis classique.  
Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

# Variables de contrôle

Soit  $H$  l'opérateur Hamiltonien et  $\Psi$  une "fonction d'essai" infiniment dérivable et à support compact.

Si  $H\sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 | (r_t))} = 0$  avec  $\pi$  la densité de la loi postérieure des  $\omega_i$ , alors la fonction renormalisée :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i + \frac{H\Psi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)}{\sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 | (r_t))}}$$

a la même espérance que la variable aléatoire  $\omega_i$ , mais peut avoir une variance moindre.

## Variables de contrôle (suite)

On choisit  $\Psi(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))}$   
avec  $P$  un polynome. Dans ce cas, la fonction renormalisée sera :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - \frac{1}{2} \Delta P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) + \nabla P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \cdot z$$

$$\text{où : } z = -\frac{1}{2} \nabla \ln(\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))).$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_0} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_2} \text{ (Laplacien)}$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \omega_0}, \frac{\partial}{\partial \omega_1}, \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \text{ (Gradient)}$$

# Cas particulier : polynome de degré 1

Si  $\deg(P) = 1$ , alors la fonction renormalisée devient :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - a_i^T z$$

Et le choix optimal de  $a$  pour limiter la variance de  $f_i$  est :

$$a_i = -E[zz^T]E[z\omega_i] \text{ pour } i=0,1,2$$

On reconnaît alors que  $-a_i$  est le coefficient de la régression MCO de  $f_i$  sur  $z$ .

# Implémentation de la méthode ZV-MCMC

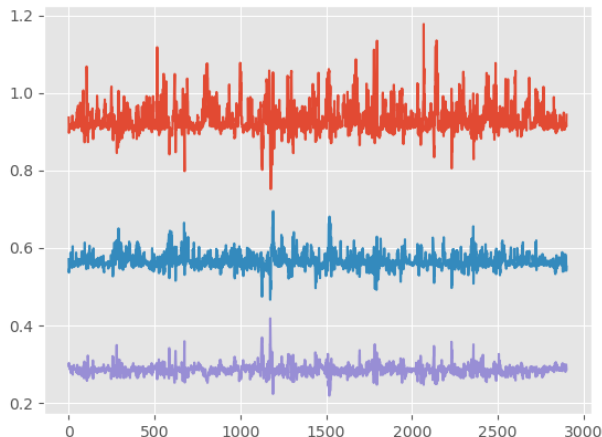
Pour implémenter cette méthode ZV-MCMC avec ces variables de contrôle, on fait un algorithme en deux étapes :

- On fait d'abord une première simulation MCMC "courte", pour ensuite régresser chaque  $\omega_i$  sur  $z$  pour obtenir les vecteurs  $a_0, a_1, a_2$
- On fait une seconde simulation longue où nos estimateurs seront cette fois les moyennes empiriques des  $f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ , qui peuvent être calculés avec les  $\omega_i$  de cette simulation grâce aux  $a_i$  de la première simulation.

# Résultats

Figure: Trajectoires des  $f_i$ .

Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$





# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

## Cas d'un polynome de degré 2

Si  $P(x) = a^T x + \frac{1}{2} x^T B x$  est un polynome de degré 2, la fonction renormalisée devient cette fois :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - \frac{1}{2} \text{tr}(B) + (a + Bx)^T z$$

$$\text{où } x = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^T$$

On a donc ici à considérer 12 variables de contrôle au lieu de 3 :

$z_0,$	$z_1,$	$z_2,$
$z_0\omega_0,$	$z_1\omega_0,$	$z_2\omega_0,$
$z_0\omega_1,$	$z_1\omega_1,$	$z_2\omega_1,$
$z_0\omega_2,$	$z_1\omega_2,$	$z_2\omega_2$

# Sélection de variables de contrôle

La complexité d'une regression OLS est de  $O(d^2N)$  avec  $d$  la dimension et  $N$  la taille de l'échantillon. On doit donc réduire notre nombre de variables de contrôle. Pour ce faire, on implémente deux méthode.

# Méthode dichotomique avec LASSO

La première est une recherche dichotomique utilisant des régressions LASSO : pour chaque  $\omega_i$ , on fait d'abord une régression LASSO avec un coefficient de pénalisation  $\mu$ , puis :

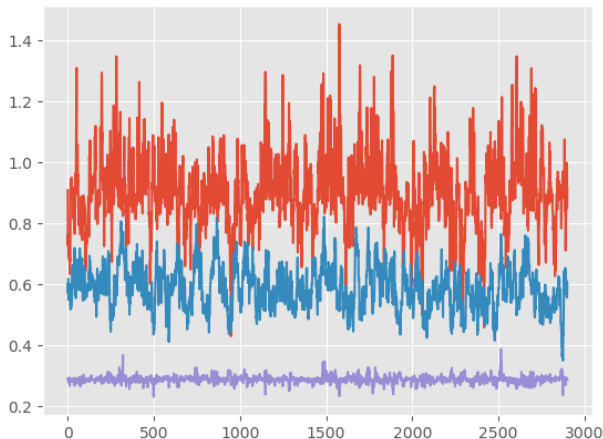
- si on obtient strictement plus de 3 coefficients non nuls (sans compter la constante), on augmente  $\mu$
- si on obtient strictement moins de 3 coefficients non nuls (sans compter la constante), on diminue  $\mu$

lorsqu'on a sélectionné les 3 variables de contrôle, on fait une régression OLS classique de  $\omega_i$  sur celles-ci et on obtient ainsi le vecteur  $a_i$  de manière similaire à l'algorithme présenté précédemment.

# Résultats

**Figure:** Trajectoires des  $f_i$  avec des variables de contrôle choisies par dichotomie + LASSO.

Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$



## Méthode "intuitive"

La seconde méthode que nous avons implémenté est plus intuitive : on choisit tous les triplets de variables de contrôle où  $z_0$ ,  $z_1$  et  $z_2$  apparaissent une seule fois chacun, on fait une régression OLS de chaque  $\omega_i$  sur chaque triplet et pour chaque  $\omega_i$ , on sélectionne le triplet où on obtient le meilleur  $R^2$ .

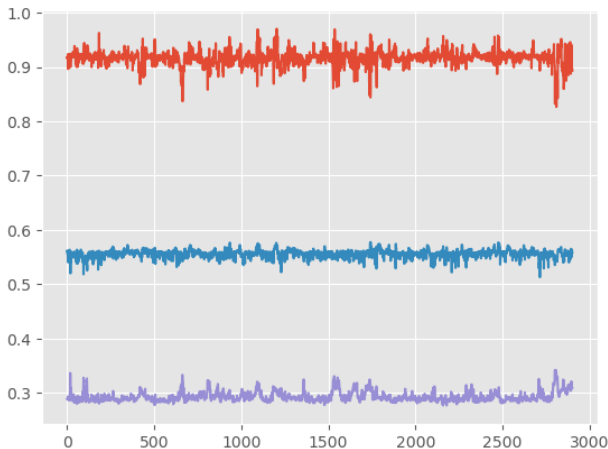
Cela fait  $3 * 4^3 = 192$  régressions OLS à faire avec 3 variables, ce qui est raisonnable.

On obtient de bien meilleurs résultats avec cette méthode qu'avec la précédente, mais elle ne serait pas possible en plus grande dimension.

# Résultats

Figure: Trajectoires des  $f_i$  avec des variables de contrôle choisies "intuitivement".

Paramètres utilisés :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.2$



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion



# Bilan



# Conclusion

On obtient avec l'ajout de variables de contrôle en utilisant un polynome de degré 1 une variance environ 15, 13 et 21 fois plus petite pour  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement.

On obtient en utilisant un polynome de degré 2 avec la méthode "intuitive" une variance environ 113, 125 et 45 fois plus petite pour  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement.

Nous obtenons donc des résultats cohérents avec ceux de l'article d'Antonietta Mira pour le polynome de degré 1, mais pas pour celui de degré 2.

**Table 1** GARCH variance reduction: 95 % confidence interval for the ratio of the variances of ordinary MCMC estimators and ZV-MCMC estimator

	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$
1st Degree $P(x)$	8–18	13–28	12–27
2nd Degree $P(x)$	1200–2700	6100–13500	6200–13800
3rd Degree $P(x)$	21000–47000	48000–107000	26000–58000