

Variables de contrôle pour un modèle GARCH

Marwen Khelifa Rim Salhi Taha Habib

30 Avril 2024

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

Introduction

Le but de ce projet est d'estimer les paramètres d'un modèle GARCH(1,1) en utilisant des variables de contrôle.

Nous avons en tout développé 4 méthodes pour estimer ces paramètres, le but de l'ajout de variables de contrôle étant de diminuer la variance de ces estimations.

Le modèle GARCH(1,1)

La série $(r_t)_{t>0}$ suit un modèle GARCH(1,1) si $r_t|F_{t-1}$ suit une loi $N(0, h_t)$, où :

$$h_t = \omega_0 + \omega_1 r_{t-1}^2 + \omega_2 h_{t-1}$$

La suite $(h_t)_{t>0}$ est la suite des variances conditionnelles, et $(r_t)_{t>0}$ peut par exemple symboliser la suite de retours sur investissement.

Notre but ici est donc d'estimer les paramètres ω_0 , ω_1 et ω_2 à partir d'une série $(r_t)_{t>0}$

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

Cadre Bayésien

- On a donc : $\pi((r_t)|\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_t} e^{\frac{-r_t^2}{2h_t}}$
- On utilise comme prior une loi normale centrée réduite pour chaque ω_i : $\pi(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega_i^2}{2}}$

On en déduit donc la loi postérieure par la formule de Bayes :

$$\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2|(r_t)) = \frac{1}{Z} \pi((r_t)|\omega_0, \omega_1, \omega_2) \pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$$

$$\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2|(r_t)) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\frac{r_t^2}{h_t} + \ln(h_t)]}$$

Cadre Bayésien (suite)

Deux remarques :

- Ce n'est pas une loi normale, car h_t dépend des ω_i !
- Ce n'est pas exactement la loi postérieure, car les ω_i doivent remplir les conditions de positivité et de stationnarité :
 $\omega_i > 0$ pour tout $i=0,1,2$ et $\omega_1 + \omega_2 < 1$
Ces conditions pourront être imposées dans l'algorithme qui suit.

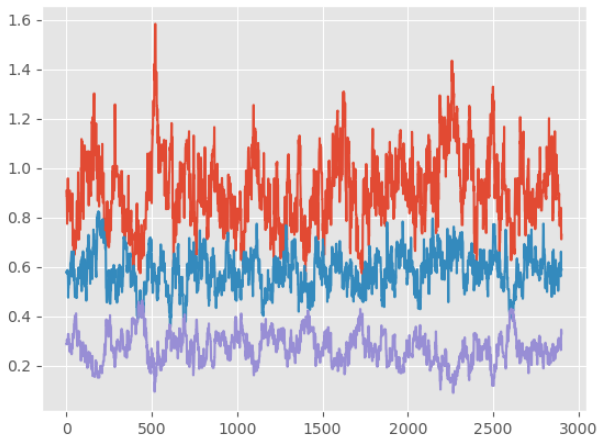
Algorithme de Metropolis-Hastings

- L'algorithme de Metropolis-Hastings est une méthode particulièrement utile pour créer des échantillons sur des lois dont la densité est complexe et difficile à uniformiser.
- L'idée est de générer une chaîne de Markov dont la loi invariante sera la loi postérieure qui nous intéresse.
- Ici, on fait tourner trois algorithmes de Metropolis "en parallèle" pour chaque ω_j .
- Les moyennes empiriques des ω_j sur le régime stationnaire va alors converger vers l'espérance de la loi postérieure.
- Pour imposer les conditions de positivité et de stationnarité, on rejette tout nouvel état de $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ si ces conditions ne sont pas respectées.

Résultats

Figure: Trajectoires pour un algorithme de Metropolis classique.

Paramètres utilisés : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.7$, $\omega_2 = 0.2$



Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

Variables de contrôle : fondations théoriques

Soit H l'opérateur Hamiltonien de type "Schrödinger" et Ψ une "fonction d'essai" infiniment différentiable et à support compact.

Si $H\sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))} = 0$ avec π la densité de la loi postérieure des ω_i , alors la fonction renormalisée :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i + \frac{H\Psi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)}{\sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))}}$$

a la même espérance que la variable aléatoire ω_i , mais peut avoir une variance moindre. On supposera comme dans l'article d'Antonietta Mira que la condition citée plus haut est satisfaite.

Variables de contrôle

On choisit $\Psi(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \sqrt{\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))}$
avec P un polynome. Dans ce cas, la fonction renormalisée sera :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - \frac{1}{2} \Delta P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) + \nabla P(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \cdot z$$

$$\text{où : } z = -\frac{1}{2} \nabla \ln(\pi(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \mid (r_t))).$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_0} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \omega_2} \text{ (Laplacien)}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \omega_0}, \frac{\partial}{\partial \omega_1}, \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \text{ (Gradient)}$$

Cas particulier : polynome de degré 1

Si $P(x) = a^T x$ est un polynome de degré 1 où $x = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^T$, alors la fonction renormalisée devient :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - a_i^T z$$

Et le choix optimal de a pour limiter la variance de f_i est :

$$a_i = -E[zz^T]E[zw_i] \text{ pour } i=0,1,2$$

On reconnaît alors que $-a_i$ est le coefficient de la régression MCO de ω_i sur z .

Implémentation de la méthode ZV-MCMC

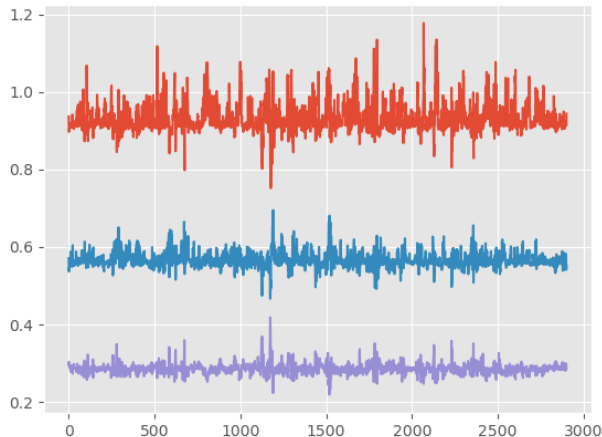
Pour implémenter cette méthode ZV-MCMC avec ces variables de contrôle, on fait un algorithme en deux étapes :

- On fait d'abord une première simulation MCMC "courte", pour ensuite régresser chaque ω_i sur z pour obtenir les vecteurs a_0, a_1, a_2
- On fait une seconde simulation longue où nos estimateurs seront cette fois les moyennes empiriques des $f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, qui peuvent être calculés avec les ω_i de cette simulation grâce aux a_i de la première simulation.

Résultats

Figure: Trajectoires des f_i .

Paramètres utilisés : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.7$, $\omega_2 = 0.2$



Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

Cas d'un polynome de degré 2

Si $P(x) = a^T x + \frac{1}{2} x^T B x$ est un polynome de degré 2 où $x = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^T$, la fonction renormalisée devient cette fois :

$$f_i(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \omega_i - \frac{1}{2} \text{tr}(B) + (a + Bx)^T z$$

On a donc ici à considérer 12 variables de contrôle au lieu de 3 :

$z_0,$	$z_1,$	$z_2,$
$z_0\omega_0,$	$z_1\omega_0,$	$z_2\omega_0,$
$z_0\omega_1,$	$z_1\omega_1,$	$z_2\omega_1,$
$z_0\omega_2,$	$z_1\omega_2,$	$z_2\omega_2$

Sélection de variables de contrôle

La complexité d'une regression OLS est de $O(d^2N)$ avec d la dimension et N la taille de l'échantillon. On cherche donc à réduire notre nombre de variables de contrôle. Pour ce faire, on implémente deux méthode.

Méthode dichotomique avec LASSO

La première est une recherche dichotomique utilisant des régressions LASSO : pour chaque ω_i , on fait d'abord une régression LASSO avec un coefficient de pénalisation μ , puis :

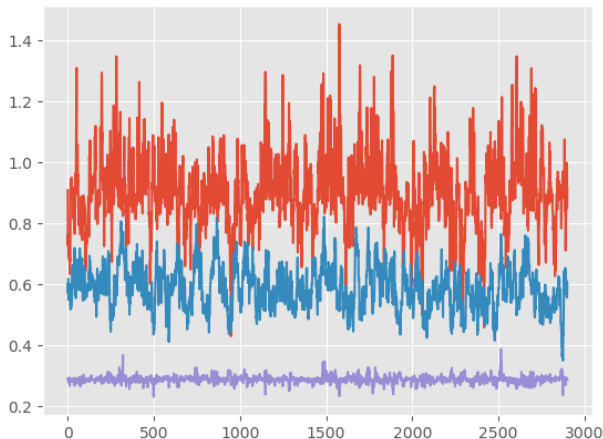
- si on obtient strictement plus de 3 coefficients non nuls (sans compter la constante), on augmente μ
- si on obtient strictement moins de 3 coefficients non nuls (sans compter la constante), on diminue μ

lorsqu'on a sélectionné les 3 variables de contrôle, on fait une régression OLS classique de ω_i sur celles-ci et on obtient ainsi le vecteur a_i de manière similaire à l'algorithme présenté précédemment.

Résultats

Figure: Trajectoires des f_i avec des variables de contrôle choisies par dichotomie + LASSO.

Paramètres utilisés : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.7$, $\omega_2 = 0.2$



Méthode "intuitive"

La seconde méthode que nous avons implémenté est plus intuitive : on choisit tous les triplets de variables de contrôle où z_0 , z_1 et z_2 apparaissent une seule fois chacun, on fait une régression OLS de chaque ω_i sur chaque triplet et pour chaque ω_i , on sélectionne le triplet où on obtient le meilleur R^2 .

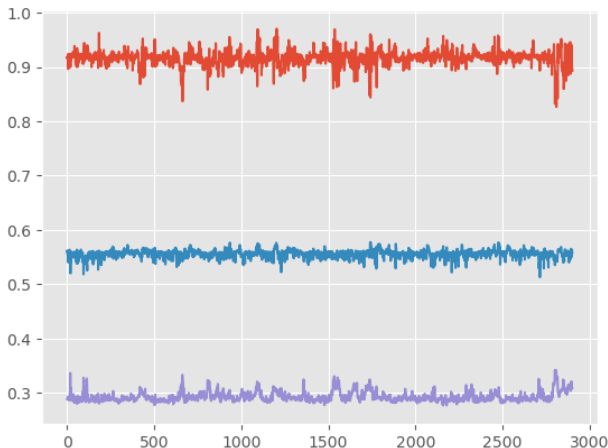
Cela fait $3 * 4^3 = 192$ régressions OLS à faire avec 3 variables, ce qui est raisonnable.

On obtient de bien meilleurs résultats avec cette méthode qu'avec la précédente, mais elle ne serait pas possible en plus grande dimension.

Résultats

Figure: Trajectoires des f_i avec des variables de contrôle choisies "intuitivement".

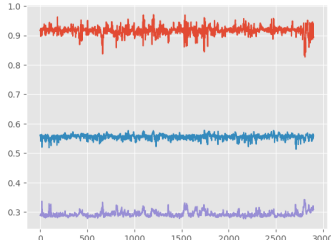
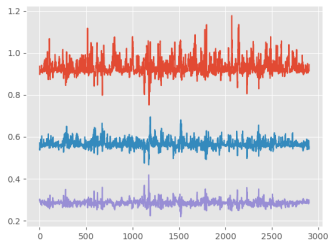
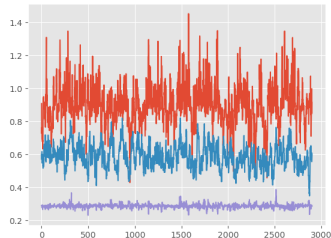
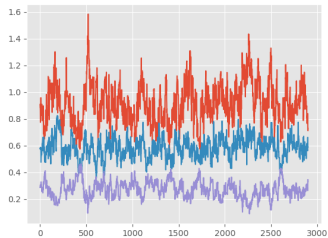
Paramètres utilisés : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.7$, $\omega_2 = 0.2$



Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Q1 : MCMC
- 3 Q2 : Ajout de variables de contrôle
- 4 Q3 : Sélection de variables de contrôle
- 5 Bilan et Conclusion

Bilan



Conclusion

On obtient avec l'ajout de variables de contrôle en utilisant un polynome de degré 1 une variance environ 12, 15 et 20 fois plus petite pour ω_0 , ω_1 et ω_2 respectivement.

On obtient en utilisant un polynome de degré 2 avec la méthode "intuitive" une variance environ 120, 140 et 35 fois plus petite pour ω_0 , ω_1 et ω_2 respectivement.

Nous obtenons donc des résultats cohérents avec ceux de l'article d'Antonietta Mira pour le polynome de degré 1, mais pas pour celui de degré 2.

Table 1 GARCH variance reduction: 95 % confidence interval for the ratio of the variances of ordinary MCMC estimators and ZV-MCMC estimator

	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$
1st Degree $P(x)$	8–18	13–28	12–27
2nd Degree $P(x)$	1200–2700	6100–13500	6200–13800
3rd Degree $P(x)$	21000–47000	48000–107000	26000–58000