

به نام خدا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

گزارش پروژه پایانی درس ریاضیات مهندسی

مهدی طاهر احمدی

۹۲۳۱۰۴۲

استاد: دکتر امیرمزلقانی

سوال دوم:

«فشرده سازی تصاویر از طریق محاسبه تقریب ماتریس مقادیر یگانه تصویر»

میدانیم هر تصویر دیجیتال را میتوان به صورت یک ماتریس نمایش داد، به این صورت که هر پیکسل از تصویر نمایانگر یک عدد ۰-۲۵۵ برای هر رنگ است. چون تصویر از 3 رنگ تشکیل شده، پس برای نگه داری هر تصویر  $3 \times 8 \times M \times N$  که  $M, N$  ابعاد تصویر هستند، فضا لازم است.

روش Singular Value Decomposition :

هر ماتریس  $A$   $n \times m$  غیر صفر حقیقی را میتوانیم به صورت  $A = P \Sigma Q^T$  بنویسیم که در آن  $P$  ماتریس  $m \times r$  با ستون های متعام  $(U^T = U^{-1})$  و  $r > 0$  است،  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  ماتریس قطری است که به آن ماتریس مقادیر یگانه  $A$  هم میگویند و  $Q^T$  ماتریس  $r \times n$  با سطر های متعام است. این فاکتور گیری را SVD میگویند.

بنا بر قرارداد مقادیر یگانه ماتریس  $A$  را به ترتیب نزولی در نظر میگیریم.

$$\sigma_i = \Sigma_i, i \geq \Sigma_{i+1}, i+1 = \sigma_{i+1}$$

$$A = P \Sigma Q^T = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} \\ = p_1 \sigma_1 q_1^T + p_2 \sigma_2 q_2^T + \dots + p_n \sigma_n q_n^T$$

چون  $\sigma$  ها به ترتیب نزولی هستند عبارت با  $i$  کوچکتر در رابطه بالا کم ارزش تر است. پس اگر مقادیر با ارزش کمتر را از ماتریس  $\Sigma$  را حذف کنیم (برابر ۰ قرار بدهیم) میتوانیم فضای کمتری را فقط برای ویژگی های مهم تر تصویر استفاده کنیم.

سپس دوباره میتوانیم با ماتریس  $\Sigma$  جدید ماتریس  $A$  را با حجم کمتر باز سازی کنیم.

پیاده سازی:

برای پیاده سازی این روش فشرده سازی پس از خواندن تصویر، سیاه و سفید کردن و تبدیل به double کردن از تابع svd متلب برای بدست آوردن آرایه های  $U$ ,  $S$ ,  $V$  استفاده شده است. مقدار rank در تابع LowRankSVDCompressor مرتبه فشرده سازی یعنی؛ تعداد اعضای وکتور  $S$  که باید حفظ شوند را تعیین میکند. با مشاهده خروجی مشخص شد که مرتبه ۲۰۰ تقریباً error نزدیک به ۰ دارد و تقریباً ۱۵ درصد فشرده سازی انجام شده است. معیار error مطابق صورت پروژه MSE در نظر گرفته شده است. و فشرده سازی معادل حجم فایل فشرده شده تقسیم بر حجم فایل اصلی است.