Relações Binárias em Conjuntos
Trabalho Prático de Matemática Discreta

André Taiar[1]

[1]Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

taiar@dcc.ufmg.br

Resumo. *Na matemática e na lógica, uma relação binária é uma relação qualquer entre dois elementos (um conjunto de pares ordenados). As relações binárias são comuns em muitas áreas da ciência para definir muitas propriedades e conceitos. Neste trabalho, foram analisados arquivos que mapeavam diversos conjuntos e as relações entre seus elementos e essas foram classificadas de acordo com as suas propriedades.*

1 Relações em grafos

Em matemática e ciência da computação, grafo é o objeto básico de estudo da teoria dos grafos. Tipicamente, um grafo é representado como um conjunto de pontos (vértices) ligados por retas (as arestas).

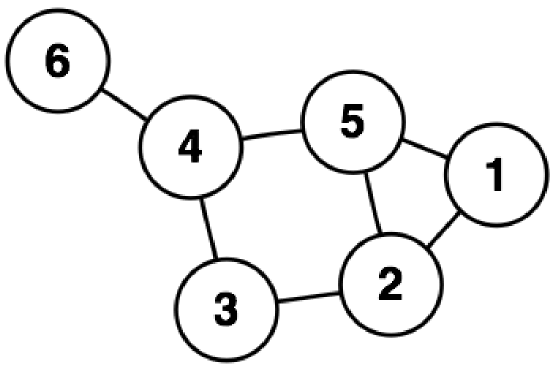

Figure 1. Exemplo ilustrativo de um grafo com 6 vértices e 7 arestas

Utilizei neste trabalho um grafo para representar a relação entre os elementos que foram passados na entrada. Cada elemento é representado como um vértice do grafo e, se um elemento tem relação com outro elemento qualquer, eles são ligados por uma aresta.

Para facilitar a análise das relações através do grafo, este foi implementado utilizando uma matriz de adjacência como veremos no detalhamento das estruturas de dados.

2 Estruturas de dados e implementações

O programa foi desenvolvido em 4 módulos: o módulo principal que cuida da leitura do arquivo de entrada, da geração da saída e da lógica do funcionamento do programa em si, o módulo que contém a implementação do grafo por matriz de adjacência, um módulo com a implementação de uma lista encadeada utilizada em diversas partes do programa e um módulo com a implementação da análise das relações utilizando o grafo.

2.1 Implementação do grafo

2.1.1 Matriz de adjacência

Vamos supor um conjunto com os seguintes elementos: $A = 1, 2, 3, 4, 5$

Vamos dispor esses elementos numa tabela da seguinte forma:

*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

Em nossa implementação, se temos dois elementos relacionados, marcamos as célula em comum dos dois elementos com o valor 1. Por exemplo, vamos relacionar os elementos da seguinte forma:

$\forall x \in A, (x, x) \in R$

Na matriz ficaria:

*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

2.2 Lista encadeada

As listas encadeadas foram utilizadas no programa para armazenar pares ordenados dos elementos dos conjuntos que inicialmente não temos idéia de quantos serão. Por exemplo: ao analisar os pares que faltam para completar um fecho transitivo, como não temos certeza da quantidade de pares que irão faltar, utilizamos uma lista encadeada, que é uma estrutura de dados dinâmica (pois trabalha com alocação dinâmica de memória) para armazenar quantos pares quisermos e, ao final, fazer a listagem de todos eles.

2.3 Análise das relações

Com o grafo implementado como uma matriz de adjacência, verificar as relações entre os elementos foram operações simples e pouco custosas (se resumem a trabalhar com os índices correspondentes aos elementos e avaliar se o valor da célula da aresta correspondente estava ligada ou desligada). Não tenho certeza se trabalhei com os melhores algoritmos para as avaliações mas eles estão funcionando corretamente para todos os testes que efetuei.

2.3.1 Reflexiva

Para avaliar se a relação é **reflexiva** bastou verificar se toda a diagonal principal da matriz tinha o valor 1 o que significa que todos os elementos são relacionados si próprios.

2.3.2 Irreflexiva

Para avaliar se a relação é **irreflexiva** bastou verificar se toda a diagonal principal da matriz tinha o valor 0 o que significa que nenhum dos elementos é relacionado com si próprio.

2.3.3 Simétrica

Para avaliar se a relação é **simétrica**, verifiquei se a matriz era simétrica em relação à diagonal principal, ou seja: se a posição $[i, j]$ da matriz estava relacionada com a posição $[j, i]$.

2.3.4 Anti-Simétrica

Para avaliar se a relação é **anti-simétrica**, procurei por pares tais que $[i, j] = [j, i]$. Caso encontrasse algum, comparava se $i = j$. Caso verdadeiro, para todos os pares, a relação é dita anti-simétrica.

2.3.5 Assimétrica

Para avaliar se a relação é **assimétrica**, verifiquei se a matriz não tinha simetria com relação à diagonal principal, ou seja, verificar se todas as posições $[i, j]$ eram diferentes das posições $[j, i]$.

2.3.6 Transitiva

Para avaliar se a relação é **transitiva**, verifiquei para todas as posições $[i, j]$ se existia uma posição $[j, k]$ válida. Caso sim, verificava se a posição $[i, k]$ também era válida. Caso isso acontecesse para todas permutações de i, j, k válidas, a relação é dita transitiva.

2.3.7 Fecho Transitivo

Para avaliar o **fecho transitivo** da relação utilizei o mesmo algoritmo usado na verificação da **relação de transitividade**, porém, ao encontrar uma aresta ausente que faça com que a relação de transitividade seja anulada, adicionamos essa aresta ao grafo e reavaliamos para saber se há alguma outra aresta ausente que atrapalhe a relação. As arestas que incluímos no grafo depois de todo o processo formam o fecho transitivo da relação.