低亏格非奇异代数曲线分类

吕俊哲

感谢 Richard E. Borcherds 教授百忙之中回复我邮件解答我的疑惑，也感谢 QQ 群：流浪者的数学茶会中的成员解答我的疑问，最后对 math stack exchange 上的用户 Giulio 表示感谢，他解答了我的一个重要的问题。

本文只讨论复数域的情形，这是一个代数闭域。

对比图 1.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{解析侧} & & \text{代数侧} \\
\textit{1.}\ \text{解析函数} & \longrightarrow & \textit{1*.}\ \text{多项式} \\
\textit{2.}\ \text{亚纯函数} & \longrightarrow & \textit{2*.}\ \text{有理函数} \\
\textit{3.}\ \text{紧黎曼曲面} & \longrightarrow & \textit{3*.}\ \text{射影代数曲线} \\
\textit{4.}\ \text{黎曼球面}\mathbb{S} & \longrightarrow & \textit{4*.}\ \text{射影直线}\mathbb{P}^1 \\
5.\mathbb{C}/\Lambda & \longrightarrow & 5.zy^3 = 4x^3 - axz^2 - bz^3
\end{array}
$$

命题 1. 一个由多项式 $f(x,y)=\sum_{i=0}^{n} a_i y^i - \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ 的零点集 M 定义的 $\mathbb{C}$ 上的代数曲线如果是非奇异的，那么它是黎曼曲面。

解答. 由 f 非奇异，在某点 (x_0,y_0) 处我们有 $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})\neq 0$, 于是有 $rank(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=1$, 利用隐函数定理, 我们得到存在 (x_0,y_0) 的邻域 U, 使得在 U 中存在光滑函数 g 使得 $y=g(x)$，从而有 M 局部上与 $\mathbb{C}$ 解析同胚，从而 M 是一个黎曼曲面。

□

命题 2. 对于任何一个紧黎曼曲面 M，其上的亚纯函数极点与零点个数（记重数）相同。

解答. 注意到任意复流形均是可定向的，所以我们可以在黎曼曲面上进行积分，考虑任意一个亚纯形式 ω , 设其极点分别为 $P_1,...,P_n$, 在每个极点处做一个小开圆盘 D_i, 则由留数定理，$\int_{\partial D_i}\omega=-2\pi i n_i$(其中 n_i 为 ω 在圆盘中的留数), 我们有 $\int_{\bigcup_{i=1}^{n}\partial D_i}\omega=-\Sigma_{i=1}^{n}2\pi i n_i$. 考虑 $U=M-\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, 又由于 ω 在 U 上全纯，故 ω 在 U 上为闭形式（这是柯西黎曼方程的直接推论），从而 $0=\int_U d\omega=\int_{\bigcup_{i=1}^{n}\partial D_i}\omega=-\Sigma_{i=1}^{n}2\pi i n_i$, 从而 ω 在 M 上的留数之和为 0。特别地，对于任何亚纯函数 f, 取 $\omega=\frac{df}{f}$ 即得命题结果。

□

定义 1. 除子：对于任意一个黎曼曲面 M，我们取上面有限个不同的点 $Q_1,...Q_m$, 并使其构成一个 $\mathbb{Z}$-模且这些点是一组自由生成基. 除子就是这个 $\mathbb{Z}$-模中的一个元素，例如，对于任意两点 P,Q, 令 $D=3P-Q$ 就是 M 上的一个除子。

定义 2. 我们定义 (f) 为亚纯函数 f 的零点与极点所构成的除子（记重数，零点记正重数，极点记负重数）。例如，对于黎曼球面 S 上的亚纯函数 $f=\frac{(z-a)^3(z-b)}{(z-c)^2}$（其中 a,b,c 互不相同），则 $(f)=3a+b-2c-\infty$。

注 1. 我们称一个除子是大于等于 0 的，如果其所有点对应的系数为正。

注 2. 我们称两个除子 D_1 与 D_2 是等价的，如果 $D_1-D_2=(f)$, 其中 f 为某个亚纯函数。

定义 3. 我们定义 $l(D)$ 为这样的亚纯函数 f 构成的线性空间的维数：满足 $(f)+D\geq 0$。

定义 4. 对于任意一个黎曼曲面 M, 我们定义上面的典范除子 K 为某个亚纯 $1-$ 形式的极点构成的除子的等价类(记重数),由于对于任意两个亚纯 $1-$ 形式 $\omega_1,\omega_2,\frac{\omega_1}{\omega_2}=f$, 其中 f 是某个亚纯函数，所以典范除子在这个等价类意义下是良定义的。

定义 5. 我们定义一个黎曼曲面 M 的亏格 g 为 M 上的全纯 $1-$ 形式构成的线性空间的维数，例如，对于黎曼球面 S, 由刘维尔定理，我们知道上面的全纯函数均为常函数，而由变量替换 $z\to\frac{1}{y}$, 我们有 $dz=\frac{-1}{y^2}dy$ 知 $y=0$ 处为一个极点，从而 S 上不存在全纯 $1-$ 形式。

注 3. 在拓扑上，我们往往会定义亏格为曲面上 *handle* 的数量，这两种定义其实是等价的，但我们不予证明。

命题 3. 我们将不加证明地声称 *Riemann-Roch* 定理：对于任意一个紧黎曼曲面，我们有如下等式成立：$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(K - D)$。

推论 1. 如果 $\deg(D) < 0$, 则 $l(D) = 0$, 这是由于紧黎曼曲面上任何亚纯函数都有 $\deg(f) = 0$。

推论 2. 如果 $D = 0$, 那么 $l(K) = g$, 这是由于常函数 $f = c$ 适合 $D + (f) = 0$。

推论 3. 如果 $D = K$, 那么 $\deg(K) = 2g - 2$。

命题 4. 任何一个亏格为 0 的紧黎曼曲面 M 均与黎曼球面 S 解析同胚。

解答. 我们考虑 $D = P$，其中 P 为 M 上的某点，由 Riemann-Roch 定理，我们有 $l(D) = 1 + 1 + l(K - D)$，此时由推论 $1 \Rightarrow l(K - D) = 0$，于是存在一个非常数的亚纯函数 f, 使得 f 恰以 P 为极点，并且由 $\deg(f) = 0$，f 仅有一个零点。对于任意 $c \in \mathbb{C}$,$f - c$ 均恰有一个零点，从而我们通过 f 得到了 M 到 S 的解析双射，这当然也是一个同胚。 □

我们来说明所有亏格为 2 的代数曲线都形如某个多项式 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ 的解。由 Riemann-Roch 定理，对于 $D = nP(n \geq 1)$, 我们有 $l(nP) = n + l(K - nP)$, 由推论 $2 \Rightarrow deg(K-D) < 0 \Rightarrow l(K-D) = 0$(第二个箭头是由于推论 1)。对于 $n = 0$, 由推论 $2 \Rightarrow l(K) = 1$。于是我们有如下图表

命题 5.

n	*l (nP)*	
0	*1*	c
1	*1*	无
2	*2*	x
3	*3*	y
4	*4*	x^2
5	*5*	xy
6	*6*	$y^2(x^3)$

最右边一列表示 $V = \{f|(f) + (i+1)P \geq 0\}$ 相对于 $V = \{f|(f) + iP \geq 0\}$ 新增的的一个基，其中 f 为亚纯函数。c 表示常值函数。

命题 6. 所有亏格为 1 的代数曲线都形如某个多项式 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ 的解。

解答. 由上图，知 y^2, x^3, xy, x^2, y, x 存在线性关系 $ay^2 + by + cxy = dx^3 + ex^2 + fx + g$, 整理并进行变量替换易化简为 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$。进一步，我们可以把这个曲线嵌入 $\mathbb{P}^2$ 中，如此得到曲线 $y^2z = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$，考虑映射 $M \to \mathbb{P}^2 : U \to (x(U), y(U), 1)$（这里 U 为 M 上的一个点），我们下面证明这个映射是 $1-1$ 的。显然我们只需要证明它是单射，若否，存在点 $V \neq R$ 使得 $(x(V), y(V), 1) = (x(R), y(R), 1)$, 我们设 $x(V) = a, y(V) = b$ 转而考虑 $f = x - a; g = y - b$, 显然 f 和 g 仍以 P 为极点，且仍为 2 阶与 3 阶极点，于是我们有 $h = \frac{g}{f}$ 是只有一个极点的亚纯函数，从而给出了 M 到黎曼球面 S 的全纯等价，这与 M 亏格为 1 矛盾。 □

命题 7. 任何由 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ 生成的零点集均与环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 是全纯等价的。这里 Λ 是由 $m\omega_1 + n\omega_2$ 生成的，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 且 $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$。

解答. 我们考虑双周其函数 $\xi(z)=\frac{1}{z^2}+\sum(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2})$ 是维尔斯特拉斯函数（详细可以参考 stein 的复分析）。易知它是偶函数，并且导函数 $F(z)=\sum\frac{1}{(z-\omega)^3}$ 为奇函数。由 $F(z)$ 恰有三阶极点，故其恰有三个零点 (由于 $\int_{\partial\mathbb{C}/\Lambda}\frac{F'(z)}{F(z)}dz=0$), 易得 $\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2},\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ 为 F 的三个零点。熟知（见 stein)，任意亚纯偶函数可以被表示为 ξ 的有理函数，特别地取 $F(z)^2$, 我们有 $F(z)^2=4(\xi(z)-\xi(\frac{\omega_1}{2}))(\xi(z)-\xi(\frac{\omega_2}{2}))(\xi(z)-\xi(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}))$ 从而我们得到 $(\xi(z),F(z))\in E\cup\{\infty\}$ 其中 E 为 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 生成的零点集，这里 $y^2-4x^3-g_2x-g_3=y^2-4(x-\xi(\frac{\omega_1}{2}))(x-\xi(\frac{\omega_2}{2}))(x-\xi(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}))$ 我们知道（参考 stein）这个映射是单且满的，而且它是解析的。

另一方面，我们要说明所有亏格为 1 的非奇异代数曲线都全纯等价于环面，我们考虑 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 上的 1− 形式 $\frac{dx}{y}$, 我们先说明 $\frac{dx}{y}$ 是非奇异的。这只需要考察点 = 使得 $y=0$ 的那些点，利用 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$，两边求微分我们得到 $2ydy=4((x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c))$ 这里 a,b,c 为 $4x^3-g_2x-g_3$ 的三个根，从而我们得到 $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{4((x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c))}$，分母为 0 等价于 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 有三个重根，这也就意味着在 $(x,y)=(a,0)$ 处 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 奇异，矛盾，从而 $\frac{dx}{y}$ 是非奇异的。

我们接下来考虑 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 上的一点 P, 并对于 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 上的任意一点 z，定义积分 $\int_P^z\frac{dx}{y}$ 并定义映射 $f:y^2=4x^3-g_2x-g_3\to\mathbb{C}(z\to\int_P^z\frac{dx}{y})$, 我们来说明这个积分是良定义的，由于投射 $p:y^2=4x^3-g_2x-g_3\to P^1((x,y)\to y)$ 整体上为二重覆盖，在点 a,b,c,∞ 处为一重覆盖，所以拓扑上可将 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 视为一个环面 T，此时其基本群 $\pi_1(T)\cong\mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}$, 从而其有两个生成元，不妨记为 A,B, 我们记 $\int_A\frac{dx}{y}=\omega_1$,$\int_B\frac{dx}{y}=\omega_2$, 由于 $\int_P^z\frac{dx}{y}$ 可用两条曲线定义，并且这两条曲线构成一个闭环 L，所以必然有 $L\simeq nA+mB$, 于是有 $\int_L\frac{dx}{y}=\int_{nA+mB}\frac{dx}{y}$, 我们考虑 $\mathbb{C}/\{n\omega_1+m\omega_2\}(n,m\in\mathbb{Z})$ 与映射 $r:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\{n\omega_1+m\omega_2\}$ 为商映射，则 $r\circ f$ 是良定义的。

我们接下来说明这个映射 $r\circ f$ 是 $1-1$ 的，首先注意到 $\frac{dx}{y}$ 是一个非常值全纯函数，由于非奇异代数曲线总是黎曼曲面，利用紧黎曼曲面上的非常值全纯函数总是到 $\mathbb{C}$ 的满射，我们就得到了满性。所以我们只需说明这个映射是单的。如果存在 $z_1\neq z_2$ 使得 $\int_P^{z_1}\frac{dx}{y}=\int_P^{z_2}\frac{dx}{y}$. 我们可以验证 $f(z)=\frac{\vartheta(\int_{z_1}^z\frac{dx}{y}+\frac{1+\tau}{2};\tau)}{\vartheta(\int_{z_2}^z\frac{dx}{y}+\frac{1+\tau}{2};\tau)}$ 是一个仅以 z_1 为零点，z_2 为极点的亚纯函数。其中 $\vartheta(z;\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi in^2\tau+2\pi inz}$，而 $\tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}$，并且我们不妨假定 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 在上半平面。这就导致了 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 与 $\mathbb{P}^1$ 全纯等价，这当然是矛盾的。

当然我们还缺了一块拼图，就是我们必须说明 $\frac{\omega_2}{\omega_1}\notin\mathbb{R}$，这要利用到如下等式（我们常称为 Riemann’s bilinear relations）: 设 R 为亏格为 g 的紧黎曼曲面，并且 $A_1,B_1,...A_g,B_g$ 为 R 的基本群的一组基，则我们有 $\int_R\nu\wedge\eta=\Sigma_{i=1}^g\oint_{A_i}\nu\oint_{B_i}\eta-\oint_{A_i}\eta\oint_{B_i}\nu$，这只需要使用 stoke's 定理就可以得到证明。特别地，对于 $T:y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 的情形，我们有 $0<\int_T\frac{dx\wedge d\bar{x}}{|y|^2}=Im(\omega_1\bar{\omega_2})$ 这就表示 $\frac{\omega_2}{\omega_1}\notin\mathbb{R}$。

□

注 4. 实际上 f 正是 $z \to (\xi(z), F(z))$ 的逆，关于这点可以参看 *Kirwan* 的代数曲线。

注 5. 这个定理有完全不同的证明方法，也可以视为单值化定理的推论，关于这部分内容可以参考 *Donaldson* 的紧黎曼曲面。

参考文献

[1] Richard E. Borcherds, *Algebraic Geometry:Riemann-Roch*.

[2] Raghavan Narasimhan, *Compact Riemann Surfaces*, Birkhäuser Verlag, 1992.

[3] Frances Kirwan, *Comaplex Algebraic Curves*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1995.

[4] Elias M.Stein *Complex analysis*, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 1995.