TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG I : LOGIC VÀ ỨNG DỤNG

Logic mệnh đề

NỘI DUNG

1. Logic mệnh đề
2. Logic vị từ.
3. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp.
4. Quan hệ.
5. Suy luận toán học.
6. Đệ quy và ứng dụng.
7. Một số ví dụ.

BÀI HỌC 1

1. **Mệnh đề, mệnh đề có điều kiện và sự tương đương logic.**
2. Dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển của công thức.
3. Các phương pháp kiểm tra tính hằng đúng, hằng sai của công thức.

1.1. Mệnh đề (1/3)

Khái niệm:

- Trong toán học, người ta quan tâm đến những khẳng định có giá trị chân lý xác định là đúng hoặc sai; nhưng không thể vừa đúng vừa sai hoặc không thể khẳng định tính đúng, sai của nó. Những *khẳng định đó được gọi là các mệnh đề*.
- Mệnh đề không có các liên từ "và", "hoặc", "không", "nếu... thì..." được gọi là *mệnh đề nguyên thủy hay mệnh đề sơ cấp*.

1.1. Mệnh đề (2/3)

Khái niệm (tiếp):

- Mệnh đề không phải là mệnh đề sơ cấp được gọi là mệnh đề phức hợp.
- Các mệnh đề sơ cấp được ký hiệu là X, Y, Z...; có thể chứa chỉ số, được gọi là biến mệnh đề.
- Trong logic mệnh đề, giá trị chân lý đúng ký hiệu là 1, giá trị chân lý sai ký hiệu là 0.

1.1. Mệnh đề (3/3)

Ví dụ:

- "***6 là một số chẵn***" là một mệnh đề sơ cấp nhận giá trị "đúng" hay còn gọi giá trị 1.
- "***5 là số nguyên tố***" là một mệnh đề sơ cấp nhận giá trị "đúng" hay giá trị 1.
- "***Tôi mua hai vé xem ca nhạc vào tối mai*** " không phải là một mệnh đề.
- "***Nếu trời nắng thì tôi đi chơi***" không phải là một mệnh đề sơ cấp, vì nó có thể tách thành hai mệnh đề đơn giản hơn.

1.2. Các phép toán trên mệnh đề (1/6)

a. Phép phủ định:

- Phủ định của một mệnh đề là một mệnh đề, nhận giá trị đúng nếu mệnh đề đã cho sai và nhận giá trị sai nếu mệnh đề đã cho đúng. Nếu X là mệnh đề, kí hiệu $\overline{X}$ là phủ định của nó.

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

1.2. Các phép toán trên mệnh đề (2/6)

b. Phép "hoặc", "tuyển", " phép cộng logic":

- Cho X và Y là hai mệnh đề, liên kết X hoặc Y là một mệnh đề chỉ nhận giá trị sai nếu cả hai mệnh đề đã cho cùng sai, kí hiệu $X \vee Y$.

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

- Ví dụ:

X= "n là một số chẵn", Y= "n là một số chia hết cho 3"

$X \vee Y$ =" n là một số chẵn hoặc chia hết cho 3"

1.2. Các phép toán trên mệnh đề (3/6)

c. Phép "và", "hội", "nhân logic":

- Cho X và Y là hai mệnh đề, liên kết X và Y là một mệnh đề chỉ nhận giá trị đúng nếu cả hai mệnh đề đã cho cùng đúng, kí hiệu $X \wedge Y$.

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

- Ví dụ:

X= "n là một số chẵn",   Y= "n là một số chia hết cho 3"

$X \wedge Y$ ="n là một số chẵn và chia hết cho 3”

1.2. Các phép toán trên mệnh đề (4/6)

d. Phép cộng XOR :

- Cho X và Y là hai mệnh đề, liên kết X XOR Y là một mệnh đề chỉ nhận giá trị đúng nếu chỉ một trong hai mệnh đề đã cho đúng, kí hiệu $X \oplus Y$.

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

- Ví dụ:

X=“ n là một số chẵn”, Y=“m là một số lẻ”, trong trường hợp này ta có thể định nghĩa $X \oplus Y$ = “n+m là một số chẵn”

Khi đó với n=3 , m=4 mệnh đề trên sai; n=4, m=6 mệnh đề trên đúng, n= 7, m=3 mệnh đề trên đúng, n= 4, m=3 mệnh đề trên sai.

1.2. Các phép toán trên mệnh đề (5/6)

e. Phép kéo theo :

- Cho X và Y là hai mệnh đề, liên kết X kéo theo Y (còn được phát biểu dạng nếu X thì Y) là một mệnh đề chỉ nhận giá trị sai nếu X đúng, Y sai, kí hiệu $X \to Y$.

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

- Ví dụ:

X="n là một số chẵn", Y="n là một số chia hết cho 2",

$X \to Y$ = "n là một số chẵn " suy ra "n chia hết cho 2".

1.2. Các phép toán trên mệnh đề (6/6)

f. Phép tương đương (còn gọi là mệnh đề khi và chỉ khi) :

- Cho X và Y là hai mệnh đề, liên kết X tương đương Y là một mệnh đề nhận giá trị đúng nếu cả hai mệnh đề đã cho cùng đúng, hoặc cùng sai, kí hiệu X↔Y

X	Y	X ↔ Y
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

- Ví dụ:

X="n là một số chẵn", Y="n là một số chia hết cho 2",

X ↔ Y = " n là một số chẵn" khi và chỉ khi " n là một số chia hết cho 2"

1.3. Công thức logic trong mệnh đề

- Mỗi biến mệnh đề X, Y, Z… là một công thức.
- Giả sử A, B là hai công thức, khi đó dãy ký hiệu
  - $(A \wedge B)$
  - $(A \vee B)$
  - $(A \rightarrow B)$
  - $\overline{(A)}$

cũng là một công thức.

1.4. Công thức đồng nhất đúng, đồng nhất sai, đồng nhất bằng nhau (1/2)

- Ta nói công thức A là đồng nhất đúng (ký hiệu A≡**1**) khi và chỉ khi A luôn luôn nhận giá trị đúng với mọi bộ giá trị đúng, sai có thể của các biến mệnh đề X, Y, Z có mặt trong A. Công thức A≡**1** còn được gọi là hằng đúng.
- Ta nói công thức A là đồng nhất sai (hằng sai), ký hiệu A≡**0**, khi và chỉ khi A luôn nhận giá trị sai với mọi bộ giá đúng, sai có thể của các biến mệnh đề X, Y, Z có mặt trong A.

1.4. Công thức đồng nhất đúng, đồng nhất sai, đồng nhất bằng nhau (2/2)

- Ta nói công thức A là thực hiện được khi và chỉ khi có tồn tại một bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề X, Y, Z có mặt trong A để A nhận giá trị đúng.
- Hai công thức A và B là đồng nhất bằng nhau (A≡B) khi và chỉ khi A và B cùng nhận giá trị đúng, sai như nhau đối với mọi bộ giá trị đúng, sai của các biến mệnh đề X, Y, Z có mặt trong A và B. Ta nói, A và B là tương đương nhau.

1.5. Luật đồng nhất đúng (1/2)

1. $A \to (B \to A) \equiv 1.$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \equiv 1.$
3. $(A \wedge B) \to A \equiv 1.$
4. $(A \wedge B) \to B \equiv 1.$
5. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C))) \equiv 1.$
6. $A \to (A \vee B) \equiv 1.$
7. $B \to (A \vee B) \equiv 1.$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)) \equiv 1.$
9. $(A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right) \equiv 1.$
10. $A \to \overline{\overline{A}} \equiv 1.$
11. $\overline{\overline{A}} \to A \equiv 1.$

Đây là hệ tiên đề được sử dụng để nghiên cứu các tính chất tổng quát của logic mệnh đề.

1.5. Luật đồng nhất đúng (2/2)

- Kiểm tra tiên đề 9

A	**B**	**A→B**	$\overline{B} \to \overline{A}$	**(A→B) →(**$\overline{B} \to \overline{A}$ **)**	**Chân giá**
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

1.6. Luật đối ngẫu, luật thay thế và luật kết luận trong logic mệnh đề

- Giả sử A là một công thức chỉ chứa các phép toán $\vee$, $\wedge$, — mà không chứa phép $\rightarrow$. Trong A đổi chỗ $\vee$ và $\wedge$ cho nhau ta được công thức mới A*. A* gọi là công thức đối ngẫu của A.
- **Định lý 1 (luật đối ngẫu của công thức)**:

  Giả sử $A(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là công thức không có phép $\rightarrow$. Khi đó ta có $$A^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv \overline{A}\left(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_n}\right)$$
- **Định lý 2**: Nếu $A(X) \equiv \mathbf{1}$ thì $A(E) \equiv \mathbf{1}$ với E là công thức bất kỳ.
- **Định lý 3**: Nếu $A \equiv \mathbf{1}$ và $A \rightarrow B \equiv \mathbf{1}$ thì $B \equiv \mathbf{1}$.

1.7. Luật tương đương trong logic mệnh đề (1/3)

STT	Tên luật	Công thức
1	Luật phủ định kép	$\overline{\overline{A}} \equiv A$
2	Luật giao hoán đối với phép tuyển	$A \vee B \equiv B \vee A$
3	Luật giao hoán đối với phép hội	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
4	Luật kết hợp đối với phép tuyển	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$
5	Luật kết hợp đối với phép hội	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$
6	Luật De Morgan đối với phép tuyển	$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$
7	Luật De Morgan đối với phép hội	$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$

1.7. Luật tương đương trong logic mệnh đề (2/3)

STT	Tên luật	Công thức
8	Luật phân bố giữa phép tuyển với phép hội	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
9	Luật phân bố giữa phép hội với phép tuyển	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
10	Luật hấp thụ giữa phép tuyển đối với phép hội	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
11	Luật hấp thụ giữa phép hội đối với phép tuyển	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
12	Luật khử phép kéo theo	$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$
13	Luật lũy đẳng đối với phép tuyển	$A \vee A \equiv A$
14	Luật lũy đẳng đối với phép hội	$A \wedge A \equiv A$

1.7. Luật tương đương trong logic mệnh đề (3/3)

STT	Tên luật	Công thức
15	Luật trung hòa đối với hằng sai	$A \vee 0 \equiv A$
16	Luật trung hòa đối với hằng đúng	$A \wedge 1 \equiv A$
17	Luật thống trị đối với hằng đúng	$A \vee 1 \equiv 1$
18	Luật thống trị đối với hằng sai	$A \wedge 0 \equiv 0$
19	Luật phần tử bù đối với phép tuyển	$A \vee \overline{A} \equiv 1$
20	Luật phần tử bù đối với phép hội	$A \wedge \overline{A} \equiv 0$

BÀI HỌC 2

1. Mệnh đề, mệnh đề có điều kiện và sự tương đương logic.
2. **Dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển của công thức.**
3. Các phương pháp kiểm tra tính hằng đúng, hằng sai của công thức.

2.1. Tuyển sơ cấp và hội sơ cấp

- Tuyển sơ cấp (TSC) là tuyển của các biến mệnh đề $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}...$ (có thể có cả chỉ số).
- Hội sơ cấp (HSC) là hội của các biến mệnh đề $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}...$ (có thể có cả chỉ số).
- Chú ý: theo luật lũy đẳng, mỗi biến mệnh đề vừa là TSC, vừa là HSC.
- **Định lý 4**: Điều kiện cần và đủ để TSC (HSC) đồng nhất đúng (đồng nhất sai) là trong TSC (HSC) có chứa một biến đồng thời với phủ định của biến đó.

2.2. Dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyển của công thức (1/2)

- Dạng chuẩn tắc hội (DCTH) là hội của các tuyển sơ cấp (TSC), hay: $DCTH \equiv (TSC)_1 \wedge (TSC)_2 \wedge \ldots \wedge (TSC)_n \quad (n \geq 1)$
- Dạng chuẩn tắc tuyển (DCTT) là tuyển của các hội sơ cấp (HSC), hay: $DCTT \equiv (HSC)_1 \vee (HSC)_2 \vee \ldots \vee (HSC)_n \quad (n \geq 1)$
- Ta nói công thức A có DCTH (DCTT) là B khi và chỉ khi

A≡B với $B \equiv (TSC)_1 \wedge (TSC)_2 \wedge \ldots \wedge (TSC)_n$

$\left(B \equiv (HSC)_1 \vee (HSC)_2 \vee \ldots \vee (HSC)_n\right)$

2.2. Dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyển của công thức (2/2)

- **Định lý 5**: Mọi công thức A trong logic mệnh đề đều có dạng chuẩn tắc hội và dạng chuẩn tắc tuyển.
- **Định lý 6**: Điều kiện cần và đủ để công thức A≡**1** (A≡**0**) là trong DCTH của A (trong dạng DCTT của A) mỗi TSC (mỗi HSC) có chứa một biến mệnh đề cùng với phủ định của nó.

BÀI HỌC 2

1. Mệnh đề, mệnh đề có điều kiện và sự tương đương logic.
2. Dạng chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển của công thức.
3. **Các phương pháp kiểm tra tính hằng đúng, hằng sai của công thức.**

3.1. Phương pháp lập bảng (1/2)

- Giả sử $A(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ là công thức của n biến $X_1, X_2,\ldots, X_n$ trong logic mệnh đề. Để tìm giá trị chân lý của A đối với mỗi bộ giá trị đúng, sai của n biến, ta lập bảng gồm 2^n hàng, với cột đầu tiên là cột các giá trị chân lý của các biến $X_1, X_2,\ldots, X_n$, các cột tiếp theo dùng để tính giá trị chân lý của các công thức con trong công thức $A(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ và cột cuối cùng tính giá trị chân lý của $A(X_1, X_2,\ldots, X_n)$

3.1. Phương pháp lập bảng (2/2)

X_1	X_2	…	X_n	A_1	…	$A(X_1, X_2,…, X_n)$
0	0	…	0			A(0,0,…,0)
1	0	…	0			A(1,0,…,0)
		…				…
0	1	…	1			A(0,1,…,1)
1	1	…	1			A(1,1,…,1)

- Nếu cột cuối cùng chứa toàn số 1 thì $A(X_1, X_2,…, X_n) \equiv 1$ (hằng đúng).
- Nếu cột cuối cùng chứa toàn số 0 thì $A(X_1, X_2,…, X_n) \equiv 0$ (hằng sai).
- Nếu cột cuối cùng có cả 0 lẫn 1 thì $A(X_1, X_2,…, X_n)$ thực hiện được.

3.2. Phương pháp biến đổi tương đương (thuật toán tìm DCTH, DCTT của A) (1/2)

- **Bài toán**:
  - Input: A là công thức logic mệnh đề.
  - Output: A hằng đúng (hằng sai), hay A thực hiện được.
- **Thuật toán**:
  - ***Bước 1***: Trong A ta khử phép kéo theo (nếu có) bằng cách áp dụng luật khử phép kéo theo ($X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$) ta được $A \equiv A_1$ (A_1 không còn phép kéo theo).
  - ***Bước 2***: Trong A_1 ta đưa phép toán phủ định về trực tiếp liên quan tới từng biến mệnh đề ta được A_2 bằng cách áp dụng luật De Morgan ($\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ hay $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$)

3.2. Phương pháp biến đổi tương đương (thuật toán tìm DCTH, DCTT của A) (2/2)

- **Thuật toán (tiếp)**
  - ***Bước 3***: Đưa A_2 về DCTH (DCTT) bằng luật phân bố:

$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ hoặc $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

Ta được $A_2 \equiv A_3$ (hoặc $\equiv A_4$), với

$$A_3 \equiv DCTH \equiv (TSC)_1 \wedge (TSC)_2 \wedge \ldots \wedge (TSC)_n$$

$$\left(A_4 \equiv DCTT \equiv (HSC)_1 \vee (HSC)_2 \vee \ldots \vee (HSC)_m\right)$$

  - ***Bước 4***:

a. Nếu trong A_3 của A mà mỗi TSC có chứa X và phủ định của nó thì A ≡**1**.

b. Nếu trong A_4 của A mà mỗi HSC có chứa X và phủ định của nó thì A ≡**0**.

c. Ngược lại, A là thực hiện được.

3.3. Phương pháp suy diễn (1/7)

3.3.1. Mô hình suy diễn.

- Một trong những phương pháp dùng để chứng minh một mệnh đề toán học là đúng, thường có dạng lý luận với dẫn xuất sau:

  Nếu A_1 và A_2 và…và A_n thì B

- Dạng lý luận này được xem là hợp lý nếu công thức

  $(A_1 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B \equiv \mathbf{1}$ (hằng đúng)

- Mô hình suy diễn công thức trên có dạng:

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array}$$

3.3. Phương pháp suy diễn (2/7)

3.3.2. Các quy tắc suy diễn cơ bản trong logic mệnh đề.

1. ***Quy tắc suy diễn 1 (luật cộng)***

   Công thức cơ sở: $A \to (A \vee B) \equiv 1$

   Mô hình suy diễn: $$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

2. ***Quy tắc suy diễn 2 (luật rút gọn)***

   Công thức cơ sở: $(A \wedge B) \to A \equiv 1$

   Mô hình suy diễn: $$\frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{\therefore A}$$

3.3. Phương pháp suy diễn (3/7)

3.3.2. Các quy tắc suy diễn cơ bản trong logic mệnh đề.

3. ***Quy tắc suy diễn 3 (luật Modus ponens – khẳng định)***

Công thức cơ sở: $(A \wedge (A \to B)) \to B \equiv 1$

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{c} A \\ A \to B \\ \hline \therefore B \end{array}$$

4. ***Quy tắc suy diễn 4 (luật Modus ponens – phủ định)***

Công thức cơ sở: $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A} \equiv 1$

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \overline{B} \\ \hline \therefore \overline{A} \end{array}$$

3.3. Phương pháp suy diễn (4/7)

3.3.2. Các quy tắc suy diễn cơ bản trong logic mệnh đề.

5. ***Quy tắc suy diễn 5 (luật tam đoạn luật tuyển)***

Công thức cơ sở: $\left(\left(A \vee B\right) \wedge \overline{A}\right) \rightarrow B \equiv 1$

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \overline{A} \\ \hline \therefore B \end{array}$$

6. ***Quy tắc suy diễn 6 (luật bắc cầu)***

Công thức cơ sở: $\left(\left(A \rightarrow B\right) \wedge \left(B \rightarrow C\right)\right) \rightarrow \left(A \rightarrow C\right) \equiv 1$

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline \therefore A \rightarrow C \end{array}$$

3.3. Phương pháp suy diễn (5/7)

3.3.2. Các quy tắc suy diễn cơ bản trong logic mệnh đề.

7. ***Quy tắc suy diễn 7 (luật mâu thuẫn)***

Công thức cơ sở:

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \overline{B}) \rightarrow 0 \equiv 1$$

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \\ \overline{B} \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

3.3. Phương pháp suy diễn (6/7)

3.3.2. Các quy tắc suy diễn cơ bản trong logic mệnh đề.

8. ***Quy tắc suy diễn 8 (luật từng trường hợp)***

Công thức cơ sở:

$$(A \to B) \wedge (D \to B) \to ((A \vee D) \to B) \equiv 1$$

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ D \to B \\ \hline \therefore (A \vee D) \to B \end{array}$$

3.3. Phương pháp suy diễn (7/7)

3.3.3. Quan hệ giữa các công thức cơ sở với mô hình suy diễn của nó.

Công thức cơ sở $(A_1 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ hằng đúng khi và chỉ khi mô hình suy diễn của nó là đúng.

Mô hình suy diễn của công thức cơ sở:

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array}$$

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (1/9)

- ***Ví dụ 1***:

Chứng minh các công thức sau đồng nhất bằng nhau bằng 2 phương pháp lập bảng và biến đổi tương đương.

a. $X \to (Y \to Z) \equiv Y \to (X \to Z)$

b. $X \to (Y \to Z) \equiv (X \wedge Y) \to Z$

c. $(X \to Y) \wedge (X \to Z) \equiv X \to (Y \wedge Z)$

d. $((X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y})) \wedge \overline{X} \equiv 0$

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (2/9)

$$a.\ X \to (Y \to Z) \equiv Y \to (X \to Z)$$

a. Lập bảng giá trị

X	Y	Z	Y→Z	$X \to (Y \to Z)$	X→Z	$Y \to (X \to Z)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Vậy: $X \to (Y \to Z) \equiv Y \to (X \to Z)$

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (3/9)

$$a.\ X \to (Y \to Z) \equiv Y \to (X \to Z)$$

b. Biến đổi tương đương

Ta có:

$$\begin{aligned} X \to (Y \to Z) &\equiv X \to (\overline{Y} \vee Z)\ [7] \\ &\equiv \overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z)\ [7] \\ &\equiv \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\ \ [4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y \to (X \to Z) &\equiv Y \to (\overline{X} \vee Z)\ [7] \\ &\equiv \overline{Y} \vee (\overline{X} \vee Z)\ [7] \\ &\equiv \overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z\ \ [4] \\ &\equiv \overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\ \ [2] \end{aligned}$$

Vậy: $X \to (Y \to Z) \equiv Y \to (X \to Z)$

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (4/9)

- ***Ví dụ 2***:

Cho: $A \equiv \overline{(X \to Y) \to (X \to Z)} \to \overline{(X \to (Y \to Z))}$

Chứng minh A≡1 theo 2 phương pháp:

a. Phương pháp tương đương.

b. Phương pháp lập bảng

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (5/9)

- ***Giải ví dụ 2:***

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \overline{(X \to Y) \to (X \to Z)} \to \overline{(X \to (Y \to Z))} \\
&\equiv \overline{\overline{X} \vee Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee \overline{\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z} \\
&\equiv \left(X \wedge \overline{Y}\right) \vee \overline{X} \vee Z \vee \left(X \wedge Y \wedge \overline{Z}\right) \\
&\equiv \left(X \vee \overline{X}\right) \wedge \left(\overline{Y} \vee \overline{X}\right) \vee Z \vee \left(X \wedge Y \wedge \overline{Z}\right) \\
&\equiv \overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee \left(X \wedge Y \wedge \overline{Z}\right) \\
&\equiv \left(\overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee X\right) \wedge \left(\overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee Y\right) \wedge \left(\overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z \vee \overline{Z}\right) \\
&\equiv DCTH \equiv 1
\end{aligned}
$$

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (6/9)

b. Lập bảng giá trị

$Y \to (X \to Z)$

X	Y	Z	Y→Z	X→ (Y→Z)	X→Y	X→Z	(X→Y) → (X→Z)	$\overline{(X \to Y) \to (X \to Z)}$	$\overline{(X \to (Y \to Z))}$	A
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

Vậy: $A \equiv 1$

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (7/9)

- ***Ví dụ 3***:

Cho: $A \equiv \left(\left(A \to B\right) \wedge \left(A \vee C\right) \wedge \left(\overline{C} \vee D\right)\right) \to \left(B \vee D\right)$

Chứng minh A≡1 theo 2 phương pháp:

a. Phương pháp tương đương.

b. Phương pháp dùng mô hình suy diễn

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (8/9)

- ***Giải ví dụ 3**:*

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \overline{\left(\overline{A} \vee B\right) \wedge \left(A \vee C\right) \wedge \left(\overline{C} \vee D\right)} \vee B \vee D \\
&\equiv \left(A \wedge \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(C \wedge \overline{D}\right) \vee B \vee D \\
&\equiv \left(A \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(C \wedge \overline{D}\right) \vee B \vee D\right) \wedge \left(\overline{B} \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(C \wedge \overline{D}\right) \vee B \vee D\right) \\
&\equiv \left(A \vee \overline{A} \vee \left(C \wedge \overline{D}\right) \vee B \vee D\right) \wedge \left(A \vee \overline{C} \vee \left(C \wedge \overline{D}\right) \vee B \vee D\right) \\
&\equiv \left(A \vee \overline{C} \vee C \vee B \vee D\right) \wedge \left(A \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee B \vee D\right) \\
&\equiv DCTH \equiv 1
\end{aligned}
$$

3.4. Ví dụ về logic mệnh đề (9/9)

b. Giải bằng mô hình suy diễn

$$\begin{array}{c} A \to B \\ A \vee C \\ \overline{C} \vee D \\ \hline \therefore B \vee D \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{B} \\ A \to B \\ A \vee C \\ \overline{C} \vee D \\ \overline{D} \\ \hline \therefore 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{A} \\ A \vee C \\ \overline{C} \\ \hline \therefore 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} C \\ \overline{C} \\ \hline \therefore 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0 \\ \hline \therefore 0 \end{array} \qquad \equiv 1$$

Luật mâu thuẫn [7]

Luật Modus tollens [4] và luật tam đoạn luật tuyển [5]

Luật tam đoạn luật tuyển [5]