Phần VII.
Đồ thị

Biên soạn

TS. Nguyễn Viết Đông

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

1) Định nghĩa đồ thị

ĐN1. ***Đồ thị vô hướng*** G =(V,E) gồm:

i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là đỉnh củaG.

ii)E là đa tập hợp gồm các cặp không sắp thứ tự của hai đỉnh.Mỗi phần tử của E được gọi là một ***cạnh*** của G.Ký hiệu uv.

Ta nói cạnh uv nối u với v, cạnh uv ***kề*** với u,v.

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- Nếu uv ∈E thì ta nói đỉnh u ***kề*** đỉnh v.
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là *hai cạnh song song.*
- Cạnh uu có hai đầu mút trùng nhau gọi là một *khuyên*.

ĐN2. Đồ thị vô hướng không có cạnh song song và không có khuyên gọi là *đơn đồ thị vô hướng.*

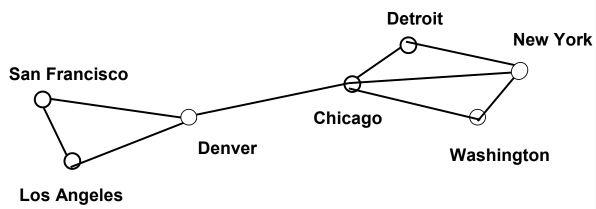
Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN3. Đồ thị vô hướng có cạnh song song nhưng không có khuyên gọi là *đa đồ thị* vô hướng.
- ĐN4. Đồ thị vô hướng có cạnh song song và có khuyên gọi là *giả đồ thị*

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

Simple Graph

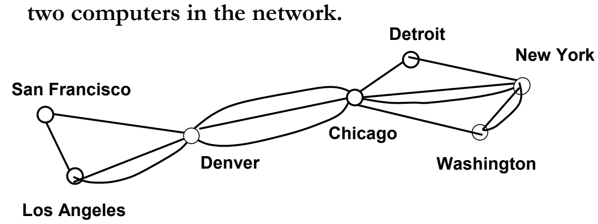
Definition 1. A ***simple graph*** $G = (V, E)$ consists of V, a nonempty set of ***vertices***, and E, a set of unordered pairs of distinct elements of V called ***edges***.



5

Multigraph -A Non-Simple Graph

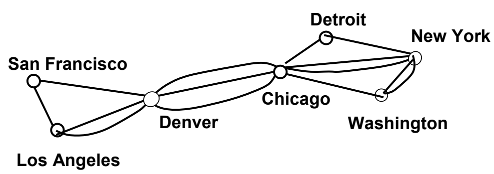
There can be multiple telephone lines between two computers in the network.



■In a ***multigraph*** *G = (V, E)* two or more edges may connect the same pair of vertices.

6

Multiple Edges

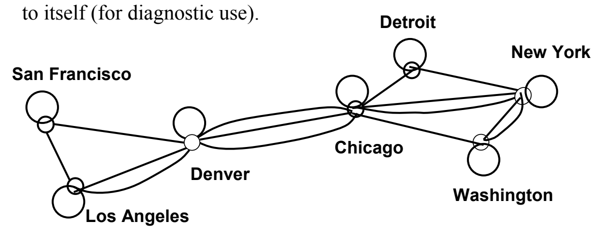


Two edges are called ***multiple*** or ***parallel edges*** if they connect the same two distinct vertices.

7

Pseudograph- A Non-Simple Graph

There can be telephone lines in the network from a computer to itself (for diagnostic use).

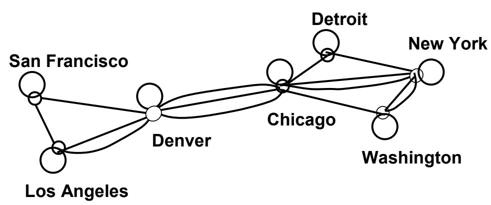


■In a ***pseudograph*** *G = (V, E)* two or more edges may connect the same pair of vertices,

■and in addition, an edge may connect a vertex to itself.

8

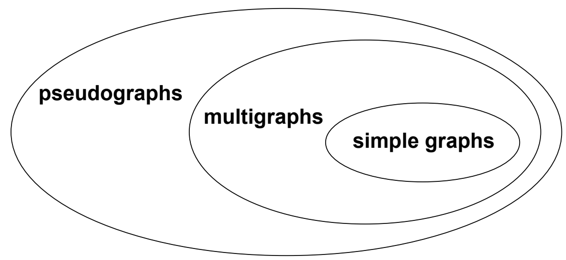
Loops



An edge is called a ***loop*** if it connects a vertex to itself.

9

Undirected Graphs



10

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN5. ***Đa đồ thị có hướng*** G =(V,E) gồm:

i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là đỉnh củaG.

ii)E là đa tập hợp gồm các cặp có sắp thứ tự của hai đỉnh.Mỗi phần tử của E được gọi là một cung(cạnh)của G.Ký hiệu uv.

Ta nói cung uv đi từ u đến v, cung uv kề với u,v

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- Nếu uv là một cung thì ta nói:

-Đỉnh u và v *kề* nhau

-Đỉnh u gọi là *đỉnh đầu(gốc*), đỉnh v là *đỉnh cuối (ngọn).*

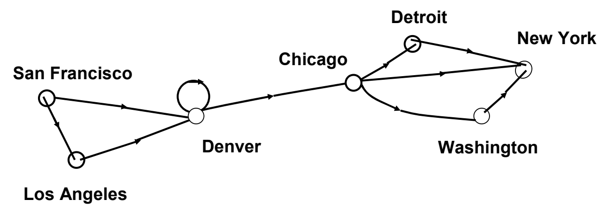
- Hai cung có cùng gốc và ngọn gọi là *cung song song.*
- Cung có điểm gốc và ngọn trùng nhau gọi là *khuyên*.

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN6. Đa đồ thị có hướng không chứa các cạnh song song gọi là *đồ thị có hướng*

A Directed Graph

- In a ***directed graph*** $G = (V, E)$ the edges are ordered pairs of (not necessarily distinct) vertices.

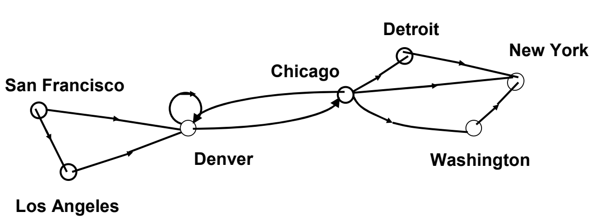


Some telephone lines in the network may operate in only one direction .

14

A Directed Graph

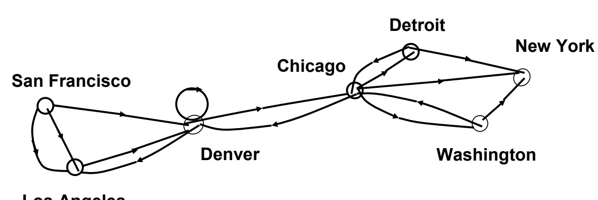
The telephone lines in the network that operate in two directions are represented by pairs of edges in opposite directions.



15

A Directed Multigraph

- In a ***directed multigraph*** $G = (V, E)$ the edges are ordered pairs of (not necessarily distinct) vertices,
- and in addition there may be multiple edges.



There may be several one-way lines in the same direction from one computer to another in the network.

16

Types of Graphs

TYPE	EDGES	MULTIPLE EDGES ALLOWED?	LOOPS ALLOWED?
Simple graph	Undirected	NO	NO
Multigraph	Undirected	YES	NO
Pseudograph	Undirected	YES	YES
Directed graph	Directed	NO	YES
Directed multigraph	Directed	YES	YES

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

2)Biễu diễn matrận của đồ thị:Matrận kề.

Cho G=(V,E) với V={1,2,…,n}.*Matrận kề* củaG là matrận A = $(a_{ij})_n$ xác định như sau:

a_{ij} = số cạnh(số cung) đi từ đỉnh i đến đỉnh j

3) Bậc của đỉnh.

a) ĐN

- Cho đồ thị vô hướng G=(V,E).*Bậc của đỉnh v*, ký hiệu deg(v) , là số cạnh kề với v trong đó một khuyên tại một đỉnh được đếm hai lần cho bậc của đỉnh ấy.

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- Cho đồ thị có hướng G=(V, E), v∈V

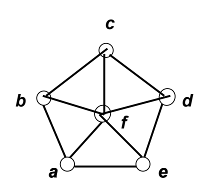
$deg^-(v)$:= số cung có đỉnh cuối là v,gọi là bậc vào của v

$deg^+(v)$:= số cung có đỉnh đầu là v,gọi là bậc ra của v

deg(v):= $deg^-(v) + deg^+(v)$

Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 gọi là *đỉnh treo*

Finding the adjacency matrix



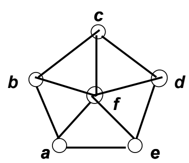
W_5

This graph has 6 vertices a, b, c, d, e, f.

We can arrange them in that order.

20

Finding the adjacency matrix



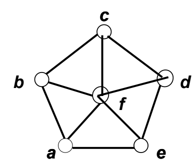
W_5

FROM \ TO	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	1
b						
c						
d						
e						
f						

There are edges from a to b, e, and f

21

Finding the adjacency matrix



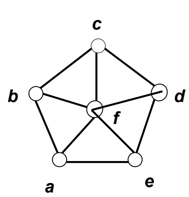
W_5

FROM \ TO	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	1
b	1	0	1	0	0	1
c						
d						
e						
f						

There are edges from b to a, c, and f

22

Finding the adjacency matrix



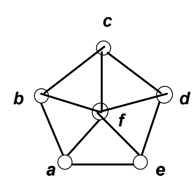
W_5

FROM \ TO	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	1
b	1	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	0	1
d						
e						
f						

There are edges from c to b, d, and f

23

Finding the adjacency matrix



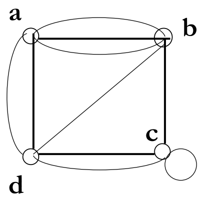
W_5

FROM \ TO	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	1
b	1	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	0	1
d	0	0	1	0	1	1
e	1	0	0	1	0	1
f	1	1	1	1	1	0

Note. This matrix is symmetric. i.e. $a_{ij} = a_{ji}$.However the representing matrix of a directed graph is not symmetric.

24

Finding the adjacency matrix



$$
\begin{array}{c} \\ \text{FROM} \end{array}
\begin{array}{c|cccc}
 & \multicolumn{4}{c}{\text{TO}} \\
 & a & b & c & d \\
\hline
\mathbf{a} & 0 & 3 & 0 & 2 \\
\mathbf{b} & 3 & 0 & 1 & 1 \\
\mathbf{c} & 0 & 1 & 1 & 2 \\
\mathbf{d} & 2 & 1 & 2 & 0
\end{array}
$$

Note. The adjacency matrix is still symmetric, but no longer a zero-one matrix

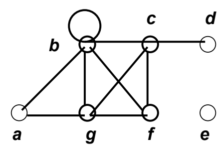
❖ The ***adjacency matrix*** of a directed multigraph is defined similarly but no longer symmetric.

Degree of a vertex

Find the degree of all the other vertices.

deg(*a*) deg(c) deg(f) deg(*g*)

deg(*b*) = 6



deg(*d*) = 1

deg(*e*) = 0

26

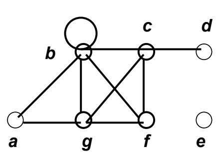
Degree of a vertex

Find the degree of all the other vertices.

deg(*a*) = 2 deg(c) = 4

deg(f) = 3 deg(*g*) = 4

deg(*b*) = 6



deg(*d*) = 1

deg(*e*) = 0

27

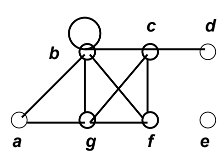
Degree of a vertex

Find the degree of all the other vertices.

deg(*a*) = 2 deg(c) = 4 deg(f) = 3 deg(*g*) = 4

TOTAL of degrees = 2 + 4 + 3 + 4 + 6 + 1 + 0 = 20

deg(*b*) = 6



deg(*d*) = 1

deg(*e*) = 0

28

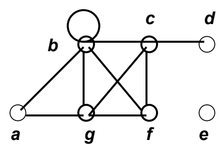
Degree of a vertex

Find the degree of all the other vertices.

deg(a) = 2 deg(c) = 4 deg(f) = 3 deg(g) = 4

TOTAL of degrees = 2 + 4 + 3 + 4 + 6 + 1 + 0 = 20

TOTAL NUMBER OF EDGES = 10



deg(*d*) = 1

deg(*e*) = 0

29

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- b) Định lý

Cho đồ thị G=(V,E) , m là số cạnh (cung)

i)

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ii)Nếu G có hướng thì

•iii) Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

4) Đẳng cấu

a) ĐN

Cho hai đồ thị G=(V,E) và G’=(V’,E’)

Ta nói rằng G *đẳng cấu* G’, kýhiệuG≅G’,nếu tồn tại song ánh f:V→ V’sao cho:

uv là cạnh của G ⇔f(u)f(v) là cạnh củaG’

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

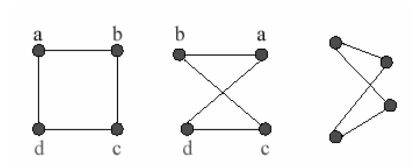
b) Nhận xét

Nếu G và G' là các đơn đồ thị vô hướng đẳng cấu qua ánh xạ f thìchúng có:

- cùng số đỉnh
- cùng số cạnh
- cùng số đỉnh với bậc cho sẵn

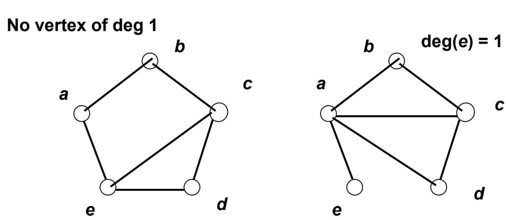
•deg v = deg f(v)

Graph Isomorphism



Note. ***Isomporphic*** **s**imple graphs must have the same ***invariants***:

✓The number of vertices
✓The number of edges
✓The degrees of the vertices



Non-isomorphic graphs

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

5. Đồ thị con

Cho hai đồ thị G=(V,E)và G'=(V',E') (cùng vô hướng hoặc cùng có hướng).G' được gọi là *đồ thị con* của G, ký hiệuG'≤ G nếu V' ⊆ V và E' ⊆ E

NếuV' = V và E' ⊆ E thì G' được gọi là *đồthị con khung của G*

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

6. Đường đi , chu trình, đồ thị liên thông

ĐN1.Cho G =(V,E) là đồ thị vô hướng u,v$\in$V

Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau $v_0e_1v_1e_2\ldots v_{k-1}e_kv_k$ sao cho

$v_0=u$, $v_k = v$, $e_i=v_{i-1}v_i$, $i=1,2,\ldots,k$

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

b) Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*

d) Đường đi được gọi là *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN2. Cho G= (V,E).Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

u~v $\Leftrightarrow$ u = v hay có một đường đi từ u đến v

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v *liên thông với nhau*
b) Mỗi lớp tương đương được gọi là *một thành phần liên thông* của G
c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông thì G gọi là *liên thông*

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN3. cho G=(V,E) là đồ thị vô hướng liên thông

a) Đỉnh v được gọi là *đỉnh khớp* nếu G – v không liên thông (G – v là đồ thị con của G có được bằng cách xoá v và các cạnh kề với v)
b) Cạnh e được gọi là *cầu* nếu G- e không liên thông(G-e là đồ thị con của G có được bằng cách xoá cạnh e)

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN4.Cho G=(V,E)vô hướng liên thông, không phải K_n ,n>2.

a)Số liên thông cạnh của G, ký hiệu e(G) là số cạnh ít nhất màkhi xoá đi G không còn liên thông nữa.

b)Số liên thông đỉnh của G, ký hiệu v(G) là số đỉnh ít nhất màkhi xoá đi G không còn liên thông nữa.

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN5 .Cho G =(V,E) là đồ thị có hướng u,v$\in$V

a)Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cung liên tiếp nhau $v_0e_1v_1e_2\ldots v_{k-1}e_k$ sao cho v_0=u, v_k=v

$e_i=v_{i-1}v_i$, i= 1,2,,…,k.

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

b) Đường đi không có *cung* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*

d) Đường đi được gọi là *mạch*(chu trình) nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

- ĐN6. Cho đồ thị có hướng G= (V,E).Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

u~v $\Leftrightarrow$ u = v hay có một đường đi từ u đến v và đường đi từ v đến u

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v ***liên thông mạnh với nhau***

b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một ***thành phần liên thông mạnhcủa G***

c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông mạnh thì G gọi là ***liên thông mạnh***

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

7.Một số đồ thị vô hướng đặc biệt

a) Đồ thị đủ cấp n: K_n

Là đơn đồ thị cấp n mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có một cạnh

b) ***Đồ thị k-đều*** :

Là đồ thị mà mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau và bằng k.

c) ***Đồ thị lưỡng phân***

$G = (V,E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Mọi cạnh của G đều nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản

d) ***Đồ thị lưỡng phân đủ***

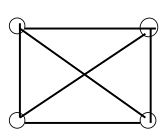
Là đồ thị đơn, lưỡng phân,mỗi đỉnh trong V_1 đều kề với mọi đỉnh trong V_2.

e) ***Đồ thị bù***

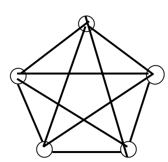
Cho $K_n=(V,E)$, $G (V,E_1)$, $\overline{G} =(V,E\backslash E_1)$

$\overline{G}$ gọi là đồ thị bù của G. Đồ thị G được gọi là tự bù nếu G đẳng cấu với đồ thị bù của nó

Some Special Simple Graphs



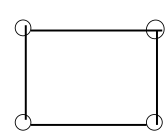
K_4



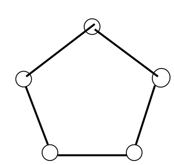
K_5

Complete graph K_n

Some Special Simple Graphs



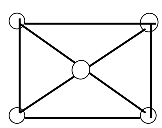
C_4

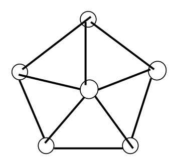


C_5

Cycle C_n

Some Special Simple Graphs





Wheele W_n

Đề thi

1)2000. ĐHBK

Cho đồ thị vô hướng , đơn G có 7 đỉnh trong đó có một đỉnh bậc 6.Hỏi G có liên thông không?

Giải : Đỉnh bậc 6 nối với 6 đỉnh còn lại . Do đó hai đỉnh bất kỳ đều có một đường đi qua đỉnh bậc 6

Đề thi

2)2001,ĐHBK

Cho đồ thị vô hướng G liên thông mà mỗi đỉnh đều có bậc bằng 20.Chứng minh rằng nếu xoá đi một cạnh bất kỳ thì đồ thị thu được vẫn còn liên thông

Đề thi

- Giải:
- Giả sử ta xoá cạnh uv. Ta chỉ cần chứng minh vẫn có đường đi từ u đến v.
- Phản chứng. Giả sử không có đường đi từ u đến v. Khi đó thành phần liên thông G’ chứa u mà không chứa v.Trong G’ u có bậc 19, mọi đỉnh khác đều có bậc 20.Tổng các bậc trong G’ là số lẻ .Vô lý.

Đề thi

3)2002,ĐHKHTN.

Đồ thị G gồm n đỉnh, 41 cạnh, mọi đỉnh đều có bậc p. Nếu p lẻ và p> 1 thì đồ thị G có liên thông không?

Giải: Từ công thức bậc của đỉnh ta có np=2.41.
Vì p lẻ nên p là ước cúa 41. Mà 41 là số nguyên tố nên p=41.Vậy n=2
Gchỉ có 2 đỉnh mà cả 2 đỉnh đều có bậc 41. Nếu G không liên thông thì G phải tách thành 2 thành phần liên thông,mà mỗi thành phần liên thông đều có bậc 41 (lẻ) vô lý

Đề thi

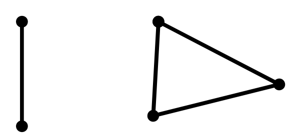
4)2005, ĐHKHTN.

Vẽ đơn đồ thị vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc2,2,3,3,3,5

Đề thi

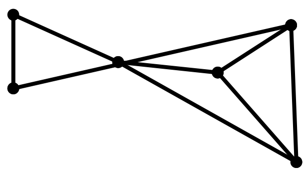
- Giải :
- Nhận xét:Đỉnh bậc 5 nối với 5 đỉnh còn lại. Do đó ta chỉ phải quan tâmđến 5 đỉnh còn lại. Ta xét đơn đồ thịvới 5 đỉnh và các bậc là 1,1,2,2,2.
- TH1: Hai đỉnh bậc 1 nối với nhau, 3 đỉnh bậc 2 nối với nhau tạo thành chu trình

Đề thi



Đề thi

Suy ra đồ thị cần tìm là

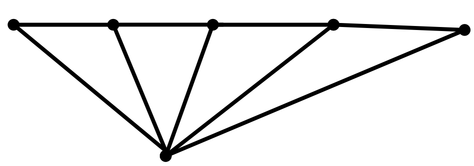


Đề thi

- TH2: Hai đỉnh bậc 1 không nối với nhau. Khi đó hai đỉnh bậc 1 phải nối với hai đỉnh bậc 2 khác nhau và đỉnh bậc hai còn lại phải nối với hai đỉnh bậc hai ấy

Đề thi

- Suy ra đồ thị cần tìm là:



Đề thi

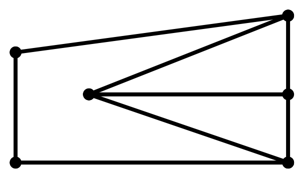
5)2006 , ĐHKHTN.Vẽ đồ thị đơn vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc 2,2,3,3,3,3

Giải:

TH1: 2 đỉnh bậc 2 nối với nhau.Nếu chúng nối đến cùng một đỉnh bậc 3 thì đỉnh bậc 3 này chỉ nối đếnmột trong 3 đỉnh còn lại;không thể được. Như vậy hai đỉnh bậc hai nối đến hai đỉnh bậc 3 khác nhau.Bỏ 2 đỉnh bậc hai ta sẽ được một đơn đồ thị vô hướng gồm 4 đỉnh vớibậc 2,2,3,3. Để ý rằng trong đồ thị này mỗi đỉnh bậc 2 đều nối với 2 đỉnh bậc3 và do đó 2 đỉnh bậc 3 cũng nối với nhau.

Đề thi

Ta được

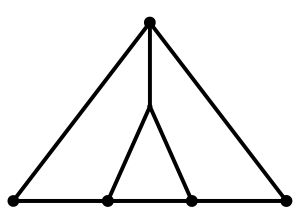


Đề thi

TH2: 2 đỉnh bậc 2 không nối với nhau nhưng nối đến cùng một đỉnh bậc3. Khiấy nếu bỏ đi hai cạnh này ta được một đồ thị6 đỉnh với bậc 1,1,1,3,3,3.Nếu 2 đỉnh bậc 1 nối với nhau hoặc nối đến cùng một đỉnh bậc 3 thì bỏ đi 2 đỉnh này còn lại một đồ thị đỉnh với bậc 1,3,3,3 hoặc 1,1,3,3: không thể được.Như vậy mỗi đỉnh bậc 1 nối đên1 đỉnh bậc 3 khác nhau.Bỏ đi đỉnh bậc 1 sẽ còn lại một chu trình2,2,2

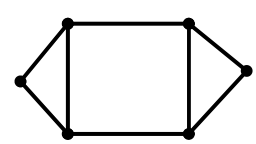
Đề thi

và ta được đồ thị



Đề thi

- TH3 :2 đỉnh bậc 2 không nối với nhau và mỗi đỉnh nối đến 2 đỉnh bậc 3 khác nhau.Khi ấy nếu bỏ đi hai đỉnh này sẽ còn lại một chu trình2,2,2,2và ta được



Đề thi

6)Đề thi07

Tìm tất cả các đơn đồ thị vô hướng (sai khác mộtđẳng cấu) gồm 6 đỉnh với bậc :

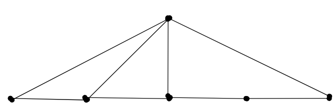
2, 2, 2, 3, 3, 4

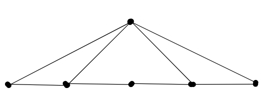
Đề thi

<u>**Giải**</u> **2,5 đ** (vẽ mỗi đồ thị được **0,5đ**. Lý luận đầy đủ đây là 4 lời giải duy nhất: **0,5đ**)

- **Trường hợp 1**: đỉnh bậc 4 nối đến 2 đỉnh bậc 3 và 2 đỉnh bậc 2. Bỏ đỉnh bậc 4 và 4 cạnh tương ứng ta sẽ được 1 đồ thị đơn vô hướng gồm 5 đỉnh với bậc 1, 1, 2, 2, 2.
- **Trường hợp 1a**: mỗi đỉnh bậc 1 đều nối với 1 đỉnh bậc 2 (phải khác nhau). Do đó đỉnh bậc 2 còn lại sẽ nối đến 2 đỉnh bậc 2 trên. Chúng tạo thành một dây chuyền 1,2,2,2,1. Ta được 2 đồ thị không đẳng cấu nhau

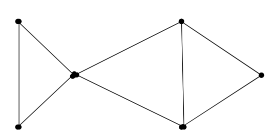
Đề thi





Đề thi

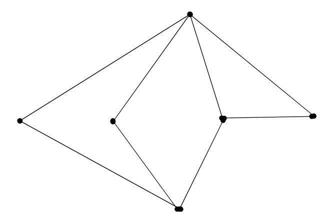
- **Trường hợp 1b**: 2 đỉnh bậc 1 nối nhau. Như vậy 3 đỉnh bậc 2 tạo thành một dây chuyền. Ta được đồ thị



Đề thi

- **Trường hợp 2**: đỉnh bậc 4 nối đến 3 đỉnh bậc 2 và 1 đỉnh bậc 3. Khi ấy nếu bỏ đi đỉnh bậc 4 và các cạnh tương ứng ta sẽ được 1 đồ thị đơn vô hướng gồm 5 đỉnh với bậc 1, 1, 1, 2, 3. Khi ấy đỉnh bậc 3 chỉ có thể nối đến 2 đỉnh bậc 1 và đỉnh bậc 2. Đỉnh bậc 1 còn lại sẽ nối đến đỉnh bậc 2, và ta được

Đề thi



Đề thi

7)2007.Xét đơn đồ thị vô hướng G với 6 đỉnh có bậc lần lượt là 2,2,3,3,3,3.Chứng minh rằng G là đồ thị liên thông

Bài toán đường đi ngắn nhất

1. Đồ thị có trọng số

a)Đồ thị G = (V,E)gọi làđồthịcótrọngsố(haychiều dài, trọng lượng)nếu mỗicạnh(cung)e được gánvớimột số thựcw(e).Ta gọi w(e) là *trọng lượng* của e.

b) Độ dài của đường đi từ u đến v bằng tổng độ dài các cạnh mà đường đi qua

c) Khoảng cách giữa 2 đỉnh u,v là độ dài ngắn nhất của các đường đi từ u đến v

Bài toán đường đi ngắn nhất

2.Matrận khoảng cách.

Cho G=(V,E) V={v_1,v_2,…,v_n}là đơn đồ thị có trọng số.Ma trận khoảng cách của G là ma trận D= (d_{ij}) xác định như sau

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & khi\ i = j \\ w(v_i, v_j) & khi\ v_i v_j \in E \\ \infty & khi\ v_i v_j \notin E \end{cases}$$

Bài toán đường đi ngắn nhất

4.Thuật toán Dijkstra

a)Bài toán.

Cho G =(V,E) đơn ,liên thông, có trọng số dương (w(u,v) >0 với mọi u khác v).Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến v và tính khoảng cách d(u,v).

Bài toán đường đi ngắn nhất

b)Phương pháp

Xác định tuần tự các đỉnh có khoảng cách đến u_0 từ nhỏ đến lớn.

- Trước tiên đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất đến u_0 là u_0.
- Trong V\{u_0} tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất(đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0)giả sử đó là u_1

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Trong V\{u_0,u_1} tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất(đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0 hoặc u_1)giả sử đó là u_2

…………………………

- Tiếp tục như trên cho đến bao giờ tìm đuợckhoảng cách từ u_0đến mọi đỉnh .

Nếu G có n đỉnh thì

$0 = d(u_0,u_0) < d(u_0,u_1) \le d(u_0,u_2) \le \ldots \le d(u_0,u_{n-1})$

Bài toán đường đi ngắn nhất

c)Thuật toánDijkstra

Bước1. i:=0, S:=V\{u_0}, L(u_0):=0, L(v):= ∞với mọi v ∈S và đánh dấu đỉnh v bởi(∞,-).

Nếu n=1 thì xuất d(u_0,u_0)=0=L(u_0)

Bước2. Với mọi v ∈S và kề với u_i(nếu đồ thị có hướng thì v là đỉnh sau củau_i), đặt

L(v):=min{L(v),L(u_i)+w(u_i,v)}

Xác định k =minL(v)

v∈S

Bài toán đường đi ngắn nhất

Nếu k=L(v_j) thì xuất d(u_0,v_j)=k và đánh dấu v_j bởi (L(vj);ui).

u_{i+1}:=v_j S:=S\{u_{i+1}}

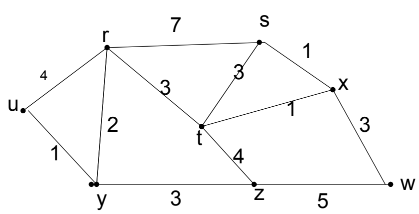
Bước3 i:=i+1

Nếu i = n-1 thì kết thúc

Nếu không thì quay lại Bước 2

Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 1. Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0đến các đỉnh còn lại

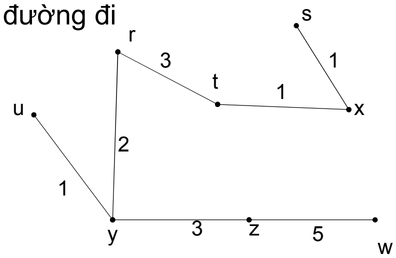


Bài toán đường đi ngắn nhất

u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	(4,u_0)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(1u_0)*	(∞,-)	(∞,-)
-	(3,y)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)	(∞,-)	-	(4,y)*	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)*	(∞,-)	-	-	(9,z)
-	-	(9,t)	-	(7,t)*	-	-	(9,z)
-	-	(8,x)*	-	-	-	-	(9,z)
-	-	-	-	-	-	-	(9,z)*

Bài toán đường đi ngắn nhất

Cây đường đi



Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 2(ĐHKHTN,2006).

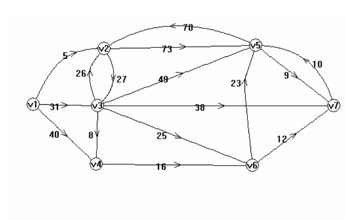
- **Câu 5.** Cho đồ thị có trọng số G = (V, E) , V = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , v_7}xác định bởi ma trận trọng số D

Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ v_1 đến các đỉnh v_2,v_3,v_4, v_5, v_6,v_7

Bài toán đường đi ngắn nhất

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

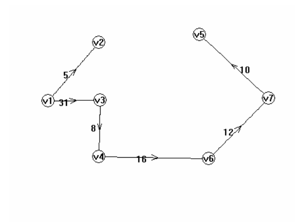
Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(5,v_1)^*$	$(31,v_1)$	$(40,v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	$(31,v_1)^*$	$(40,v_1)$	$(78,v_2)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	$(39,v_3)^*$	$(78,v_2)$	$(56,v_3)$	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	$(55,v_4)^*$	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	-	$(67,v_6)^*$
-	-	-	-	$(77,v_7)$	-	-

Bài toán đường đi ngắn nhất



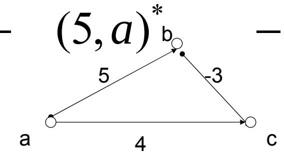
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập3(ĐHKHTN2005).

Cho một ví dụ chứng tỏ rằng thuật toán Dijkstrađể tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác không áp dụng được cho đồ thị có trọng lượng nếu có cạnh có trọng lượng âm

Bài toán đường đi ngắn nhất

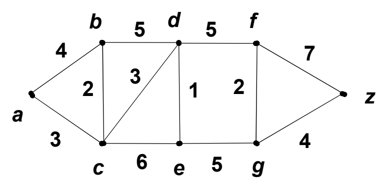
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & (\infty,-) & (\infty,-) \\ - & (5,a) & (4,a)^* \\ - & (5,a)^* & - \end{pmatrix}$$



Bài toán đường đi ngắn nhất

BÀI 4(Đề2007)

Dùng thuật toán Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh ***a*** đến đỉnh ***z*** và chiều dài của nó trong đồ thị vô hướng có trọng lượng sau:



a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*z*
0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)	(3.*a*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)	**(3.*a*)**	(6.*c*)	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	(6.*c*)	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	(7.*d*)	(11.*d*)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	(11.*d*)	(12,*e*)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	(12,*e*)	(18,*f*)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	**(12,*e*)**	(16,*g*)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	**(12,*e*)**	**(16,*g*)**

Bài toán đường đi ngắn nhất

5.Thuật toán Ford – Bellman.

Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0đến các đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm.

Bước 1. $L_0(u_0)=0$ và $L_0(v)=\infty \ \ \forall v \neq u_0$.

Đánh dấu đỉnh v bằng (∞ ,-) ; k=1.

Bước 2. $L_k(u_0) = 0$ và

$L_k(v)=\min\{L_{k-1}(u)+w(u,v)/u$ là đỉnh trước của v}

Nếu $L_k(v)=L_{k-1}(y)+w(y,v)$thì đánh dấu đỉnh v bởi $(L_k(v),y)$

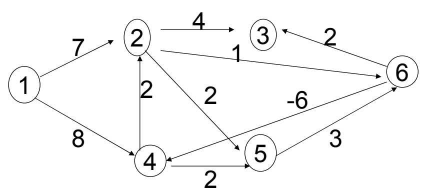
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bước 3. Nếu $L_k(v)=L_{k-1}(v)$ với mọi v, tức $L_k(v)$ ổn định thì dừng.Ngược lại đến bước4.

Bước 4. Nếu k=n thì dừng.Gcó mạch âm.Nếu $k \leq n-1$ thì trở về bước2 với k:=k+1

Bài toán đường đi ngắn nhất

- BT1.



Bài toán đường đi ngắn nhất

k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)
6	0	(4,4)	(7,6)	(-1,6)	(4,4)	(5,2)

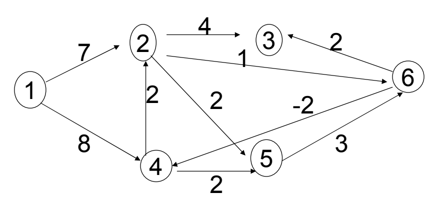
Bài toán đường đi ngắn nhất

- k=n=6 . $L_k(i)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm.Chẳng hạn

4→2→6→4 có độ dài -3

Bài toán đường đi ngắn nhất

- BT2.

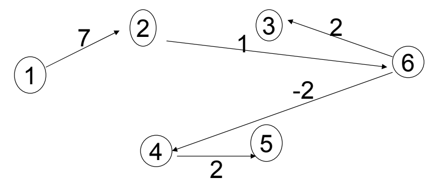


Bài toán đường đi ngắn nhất

k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)
5	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)

Bài toán đường đi ngắn nhất

- BT2.



Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

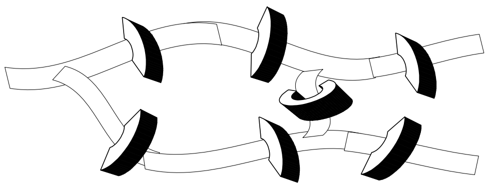
Euler

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Hamilton (1755-1804)

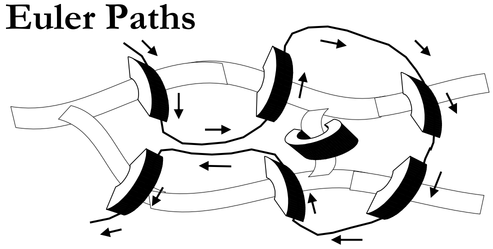
Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Problem. The town of Königsberg was divided into four sections by the branch of the Pregel River



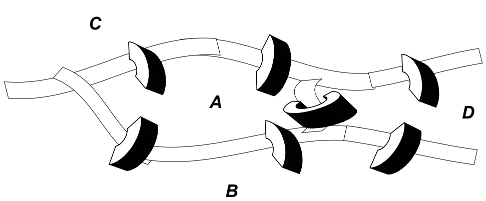
These four sections are connected by seven bridges

Euler Paths



Question. Can one cross seven bridges and return to the starting point without crossing any bridge twice?

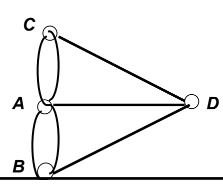
In the eighteen[th] century, Euler solved this problem using Graph Theory



Euler modeled this problem using the multigraph:

✓ four sections correspond to four vertices *A*, *B*, *C*, *D*.

✓ each bridge corresponds to an edge



Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

1. Đường đi Euler.

a) ĐN

i) Đường đi Euler là đường đi qua tất cả các cạnh mỗi cạnh (cung) đúng một lần.

Chu trình Euler là chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị mỗi cạnh đúng một lần.

ii) Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

b) Điều kiện cần và đủ.

i)Cho G=(V,E) là đồ thị vô hướng liên thông.

G là đồ thị Euler ⇔ Mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Nếu G có hai đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn thì G có đường đi Euler.

ii) Cho G là đồ thị có hướng liên thông.

G là đồ thị Euler ⇔G cân bằng.

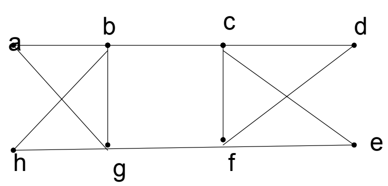
Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- c)Thuật toán Fleury để tìm chu trình Euler.

Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của Gvà tuân theo qui tắc sau:

- Mỗi khi đi qua một cạnh nào đó thì xoá nó đi, sau đó xoá đỉnh cô lập nếu có.
- Không bao giờ đi qua một cầu trừ phi không còn cách đi nào khác

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton



abcfdcefghbga

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

2. Đường đi Hamilton.

a) ĐN

Đường đi Hamilton là đường điqua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.

Định nghĩa tương tự cho chutrìnhHamilton(mạchHamilton).

Đồ thi gọi là đồ thị Hamilton nếu nó có chu trình Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

b) Điều kiện đủ (cho đồ thị đơn vô hướng).

i) Định lý Ore(1960). Cho đồ thị G có n đỉnh.

Nếu deg(i)+deg(j) $\geq n \geq 3$ với i và j là hai đỉnh không kề nhau tuỳ ý thì G là Hamilton.

ii) Định lý Dirac (1952) Cho đồ thị G có n đỉnh.

Nếu deg(i) $\geq n/2$ với i tuỳ ý thì G là Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

c)Qui tắc để xây dựng một chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là Hamilton.

Qui tắc 1:Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H

Qui tắc 2: Không có chu trình con(chu trình có chiều dài <n) nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Qui tắc 3:Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xoá tất cả các cạnh kề với i mà ta chưa dùng(vì không được dùng đến nữa). Điều này lại có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại dùng qui tăc1.
- Qui tắc 4: Không có đỉnh cô lập hay cạnh treo nào được tạo nên sau khi áp dụng qui tắc 3.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- d) Điều kiện đủ cho đồ thị có hướng , đơn(không có khyên và không có cạnh song song cùng chiều)

ĐK Meyniel: ij và ji $\notin E \Rightarrow$ deg(i)+deg(j)$\geq$2n-1 với i,j tuỳ ý.

ĐLMeyniel(1973) Nếu G là đồ thị đơn, liên thông mạnh và thoả ĐK Meyniel thì G là đồ thị Hamilton.

ĐL Camion(1959) Nếu G là đơn đồ thị đủ, liên thông mạnh thì G Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- ĐLGhouila-Houri(1960) Nếu G là đơn đồ thị liên thông mạnh sao cho mọi đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn n thì G Hamilton.
- ĐL Woodall(1972). Cho G là đơn đồ thị thoả

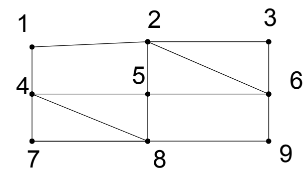
ij $\notin$E $\Rightarrow$deg$^+$(i)+deg$^-$(j)$\geq$n, với mọi i,j

thì G Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Đề thi2004(ĐHKHTN)

Đồ thi sau đây có Hamilton không?



Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Giả sử G có chu trình Hamilton H, theo qui tăc1,tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 đều ở trong H:12,14,23,36,47,78,69,89. Ta có chu trình con là 1,2,3,6,9,8,7,4,1.

Vậy G không là đồ thị Hamilton.

Đề thi 20005(ĐHKHTN).Cho G là đồ thị không hướng, đơn, n$\geq$ 3(n là số đỉnh), deg(i)+deg(j)$\geq$n-1.Chứng minh rằng G có đường đi Hamilton.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Giải:

Ta thêm vào đồ thị G một đỉnh z và nối z với mỗi đỉnh của G bởi một cạnh, ta thu được đồ thị G’ có n+1 đỉnh.Bậc của mọi đỉnh trong G’ đều lớn hơn bậc cũ của nó một đơn vị (trừz).Do đó trong G’thì

deg’(i)+deg’(j)=deg(i)+1+deg(j) +1$\geq$ n-1+2=n+1

deg’(i)+deg’(z) =deg(i)+1+n $\geq$ n+1(với i,j $\neq$z).

Theo ĐL Ore thì G’ là đồ thị Hamilton,suy ra G có đường đi Hamilton