Phần IV
Hệ thức đệ quy

Biên soạn:
TS.Nguyễn Viết Đông

Tài liệu tham khảo

[1] TS. Trần Ngọc Hội, Toán rời rạc

[2] GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc, Nhà xuất bản giáo dục.

[3] Nguyễn Viết Hưng's Slides

Định nghĩa

Một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp k là một hệ thức có dạng:

$$\boxed{x_n = a_1x_{n-1} + ... + a_kx_{n-k} + f_n} \qquad \textbf{(1)}$$

trong đó :

- $a_k \neq 0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ là các hệ số thực
- $\{f_n\}$ là một dãy số thực cho trước
- $\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

Định nghĩa

Trường hợp dãy $f_n = 0$ với mọi n thì (1) trở thành:

$$\boxed{x_n = a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} \qquad (2)}$$

Ta nói (2) là một hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp k

Nghiệm tổng quát

- Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa (1) được gọi là một nghiệm của (1).
  - Nhận xét rằng mỗi nghiệm $\{x_n\}$ của (1) được hoàn toàn xác định bởi k giá trị ban đầu x_0, $x_1, \ldots, x_{k-1}$.
- Họ dãy số $\{ x_n = x_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ được gọi là nghiệm tổng quát của (1) nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của (1)

Nghiệm riêng

Cho $\{x_n\}$ là nghiệm tổng quát của (1) và với mọi k giá trị ban đầu $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa:

$$x_0 = y_0, x_1 = y_1, \ldots, x_{k-1} = y_{k-1} \qquad (*)$$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi nghiệm riêng ứng với điều kiện ban đầu (*).

Mục đích giải hệ thức đệ qui

- Giải một hệ thức đệ qui là đi tìm nghiệm tổng quát của nó.
- Nếu hệ thức đệ qui có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải tìm nghiệm riêng thỏa điều kiện ban đầu đó.

Fibonacci (1170-1250)

Một số ví dụ

Ví dụ 1(Dãy Fibonacci)

Bài toán:Một đôi thỏ(gồm một thỏ đực và một thỏ cái)cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con(cũng gồm một đực và một cái),mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn.Tính F_n là số đôi thỏ có ở tháng n?

Một số ví dụ

Giải:

Tháng đầu tiên và tháng thứ 2 chỉ có mộtđôithỏ.Sang tháng thứ 3 đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ, vì thế tháng này sẽ có hai đôi thỏ .Với n≥3 ta có

$F_n = F_{n-1}$+Số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ n.

Do các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ n-1 chưa đẻ con ở tháng thứ n , và ở tháng này mỗi đôi thỏ có ở tháng n-2 sẽ đẻ ra được một đôi thỏ con nên số đội thỏ được sinh ra ở tháng thứ n chính bằngF_{n-2}

Một số ví dụ

Như vậy việc giải bài toán Fobonacci dẫn ta tới việc khảo sát dãy số (F_n), xác định bởi

$F_1 = 1$

$F_2 = 1$

$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ với n >2.

Một số ví dụ

Ví dụ2: Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm một hệ thức đệ qui cho x_n

Một số ví dụ

Với n = 1, ta có $x_1 = 1$.

Với n = 2, ta có $x_2 = 2$

Với n > 2, để khảo sát x_n ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:
Trường hợp 1: Bước đầu tiên gồm 1 bậc.
Khi đó, cầu thang còn n-1 bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là x_{n-1}.

Ví dụ

Trường hợp 2: Bước đầu tiên gồm 2 bậc.

Khi đó, cầu thang còn n-2 bậc nên số cách đi hết cầu thang trong trường hợp này là x_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó ta có:

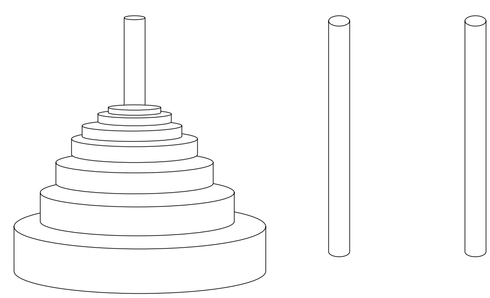
$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Một số ví dụ

Vậy ta có hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp 2:

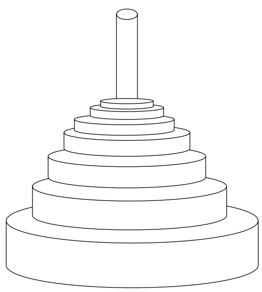
$$\boxed{\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}}$$

Example3: The tower of Hanoi puzzle consists of three pegs mounted on a board and disks with different sizes.

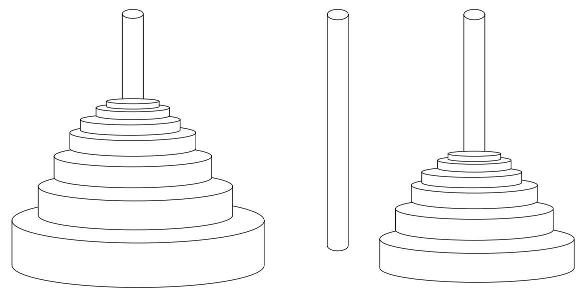


How can we move the disks to the 2nd peg, following the rule: **larger disks are never placed on top of smaller ones**?

How can we move the disks to the 2nd peg, one in a time,following the rule: **larger disks are never placed on top of smaller ones?**

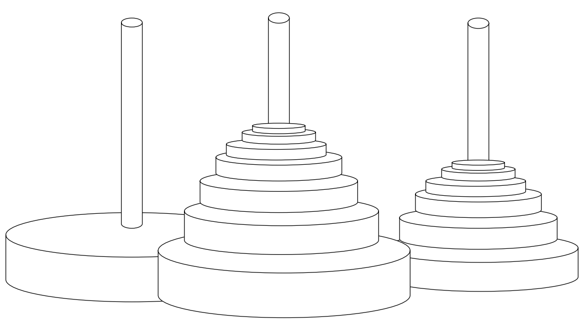


■ Let H_n be the minimum number of moves to complete the puzzle. First we must move the top $(n - 1)$ disks to the 3rd peg, using at least H_{n-1} moves



■ We need one more move to take the largest disk to peg 2

■ Then carry $(n - 1)$ smaller disks from 3rd peg to the 2nd peg, using at least H_{n-1} moves .



Modeling with Recurrence Relations

■ First, move the top $(n - 1)$ disks to the 3rd peg, using at least H_{n-1} moves

■ one more move to take the largest disk to peg 2

■ carry $(n - 1)$ smaller disks from 3rd peg to the 2nd peg, using at least H_{n-1} moves .

Thus $H_n = 2H_{n-1} + 1$

■ In fact we can prove by induction that

$$\boldsymbol{H_n = 2\, H_{n-1} + 1}$$

■ We can prove by induction that

$$H_n = 2\,H_{n-1} + 1$$

■ To solve this recurrence relation, we write

$$H_n + 1 = 2\,H_{n-1} + 2 = 2(H_n + 1)$$

■ This is a geometric progression, so the solution is:

$$H_n + 1 = C\,2^n$$

Since $H_1 = 1$, we have $C = 1$ and

$$\boldsymbol{H_n = 2^n - 1}$$

E.g. $H_{64} = 18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615$:

It takes 500 billion years to solve the puzzle !!

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

$$\boxed{x_n = a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} \quad (2)}$$

Phương trình đặc trưng của (2) là phương trình bậc k định bởi:

$$\boxed{\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - \ldots - a_k = 0} \quad (*)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Trường hợp k = 1

Phương trình đặc trưng (*) trở thành

$$\lambda - a_1 = 0$$

nên có nghiệm là $\lambda_0 = a_1$

Khi đó, (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{x_n = C\lambda_0^n}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Ví dụ: Hệ thức đệ qui

$$\begin{cases} 2x_n - 3x_{n-1} = 0; \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

là một hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp 1

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Phương trình đặc trưng: $2\lambda - 3 = 0$ có nghiệm là $\lambda_0 = 3/2$

Do đó nghiệm tổng quát là:

$$x_n = C\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Từ điều kiện ban đầu $x_1 = 1$, ta có :

Suy ra:

$$C * \frac{3}{2} = 1$$

$$C = \frac{2}{3}$$

Do đó nghiệm của hệ thức đệ qui đã cho là:

$$x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

Trường hợp k = 2:

Phương trình đặc trưng (*) trở thành:

$$\boxed{\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0} \qquad (*)$$

a) Nếu (*) có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

b) Nếu (*) có nghiệm kép thực λ_0 thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{x_n = (A + nB)\lambda_0^n}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất

c) Nếu (*) có hai nghiệm phức liên hợp được viết dưới dạng lượng giác :

$$\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

thì (2) có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{x_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)}$$

Ví dụ:

Giải các hệ thức đệ qui sau:

Ví dụ 1 $2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0$

Ví dụ 2 $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 4. \end{cases}$

Ví dụ 3 $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0; \\ x_1 = 4;\ x_2 = 4. \end{cases}$

Một số ví dụ

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$.

Do đó nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = A + B(1/2)^n}$$

Một số ví dụ

$$\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 2;\ x_1 = 4. \end{cases} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$$

có nghiệm thực kép là $\lambda_0 = 3/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = (A + nB)(3/2)^n$$

Một số ví dụ

Từ điều kiện ban đầu $x_0 = 2$; $x_1 = 4$ ta suy ra:

$$\begin{cases} A = 2 \\ \frac{3}{2}(A+B) = 4 \end{cases}$$

Suy raA = 2 và B = 2/3

Vậy nghiệm của (2) là:

$$\boxed{x_n = (3 + n)(3/2)^{n-1}}$$

Một số ví dụ

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0 \\ x_1 = 4;\ x_2 = 4 \end{cases} \qquad (3)$$

Phương trình đặc trưng của (3) là:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm phức liên hợp là $\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$

Ta viết hai nghiệm trên dưới dạng lượng giác:

$$\lambda = 2(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3})$$

Do đó nghiệm tổng quát của (3) là

$$x_n = 2^n(C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2\sin\frac{n\pi}{3})$$

Từ điều kiện ban đầu $x_1 = 4$; $x_2 = 4$ ta suy ra:

$$\begin{cases} 2(\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2) = 4 \\ 4(-\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2) = 4 \end{cases}$$

Suy ra: $C_1 = 1, C_2 = \sqrt{3}$

Vậy nghiệm của (3) là : $x_n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3})$

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

$x_n = a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} + f_n$ (1)

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$x_n = a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k}$ (2)

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - \ldots - a_k = 0$ (*)

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Nghiệm tổng quát của (1) = Nghiệm tổng quát của (2) + Một nghiệm riêng của (1)

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Cách tìm một nghiệm riêng của (1) khi vế phải f_n của (1) có dạng đặc biệt như sau:

- $f_n = \beta^n P_r(n)$, trong đó $P_r(n)$ là một đa thức bậc r theo n; β là một hằng số
- $f_n = P_m(n)\cos n\varphi + Q_l(n)\sin n\varphi$, trong đó $P_m(n)$, $Q_l(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, l theo n; φ là hằng số ($\varphi \neq k\pi$).
- $f_n = f_{n1} + f_{n2} + \ldots + f_{ns}$, trong đó các f_{n1}, $f_{n2}, \ldots, f_{ns}$ thuộc 2 dạng đã xét ở trên

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Khi đó ta xét $\lambda_0 = \beta$. Có 3 trường hợp nhỏ:

Trường hợp 1:

Trường hợp 2:

Trường hợp 3:

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Nếu $\lambda_0 = \beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$\boxed{x_n = \beta^n Q_r(n)}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Nếu $\lambda_0 = \beta$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$\boxed{x_n = n\beta^n Q_r(n)}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Nếu $\lambda_0 = \beta$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$\boxed{x_n = n^2\beta^n Q_r(n)}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Chú ý:

$Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_0$ là đa thức tổng quát có cùng bậc r với $P_r(n)$, trong đó $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_0$ là r+1 hệ số cần xác định.

Các hệ số xác định như thế nào ?

Để xác định các hệ số trên ta cần thế x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ vào **(1)** và cho n nhận r + 1 giá trị nguyên nào đó hoặc đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế để được một hệ phương trình. Các hệ số trên là nghiệm của hệ phương trình này

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Khi đó ta xét $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Có 2 trường hợp nhỏ:

Trường hợp 1

Trường hợp 2

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Nếu $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$\boxed{x_n = R_k(n)\cos n\varphi + S_k(n)\sin n\varphi}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Nếu $\lambda_0 = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$\boxed{x_n = n(R_k(n)\cos n\varphi + S_k(n)\sin n\varphi)}$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Ghi chú:

$R_k(n)$, $S_k(n)$ là các đa thức tổng quát theo n có bậc $k = \max\{m,l\}$ với $2k+2$ hệ số cần xác định:

$$R_k(n) = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \ldots + A_0$$

$$S_k(n) = B_k n^k + B_{k-1} n^{k-1} + \ldots + B_0$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

Bằng cách như trên ta tìm được nghiệm riêng x_{ni} ($1 \le i \le s$) của hệ thức đệ qui:

$$\boxed{a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_{ni}}$$

Khi đó $x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{ns}$ là một nghiệm riêng của (1)

Ví dụ:

a) $2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1.$

b) $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}; \\ x_0 = 1;\ x_1 = -2. \end{cases}$

d) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = \cos\frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2})\sin\frac{n\pi}{4}$

e) $x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2 - n)2^{n-2} + 3.4^n$

Ví Dụ 1

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1 \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boxed{\mathbf{x_n = C_1 + C_2(1/2)^n}}$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là $f_n = 4n+1$ có dạng $P_r(n)$ là đa thức bậc r = 1 theo n.

Vì $\lambda_0 = 1$ *là* nghiệm đơn của *phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$x_n = n(an + b) \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

2n(an+b) -3(n-1)[a(n-1)+b] + (n-2)[a(n-2) + b] = 4n + 1.

Cho n lần lượt nhận hai *giá trị* n = 0; n = 1 *ta được hệ:*

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ 3a + b = 5. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được a = 2; b = -1. *Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:*

$$\boxed{x_n = n(2n - 1)} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2(1/2)^n + n(2n - 1)}$$

Ví Dụ 2

$$\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Xét hệ thức đệ qui:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n. \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (*)$$

có một nghiệm thực kép là $\lambda = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2).3^n.} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là $f_n = (18n + 12)3^n$ có dạng $\beta^n P_r(n)$ với $\beta = 3$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc r = 1 theo n.

Vì $\lambda_0 = 3$ *là* nghiệm kép của *phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$x_n = n^2(an + b)3^n \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

$$(n+1)^2[a(n+1) + b]3^{n+1} - 6n^2[an+b]3^n + 9(n-1)^2[a(n-1) + b]3^{n-1} = (18n+12)3^n$$

Cho n lần lượt nhận hai *giá trị* n = 0; n = 1 *ta được hệ:*

$$\begin{cases} 6b = 12; \\ 54a + 18b = 90. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được a = 1; b = 2. *Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là:*

$$\boxed{x_n = n^2(n+2)\,3^n} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)3^n + n^2(n+2)\,3^n} \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 2$; $x_1 = 0$ *vào (6) ta được:*

$$\begin{cases} C_1 = 2; \\ 3C_1 + 3C_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$C_1 = 2$; $C_2 = -5$.

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$\boxed{x_n = (n^3 + 2n^2 - 5n + 2)3^n}$$

Ví Dụ 3

$$\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1} \\ x_0 = 1;\ x_1 = -2 \end{cases}$$

Xét hệ thức đệ qui:

$$4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1} \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0 \qquad (*)$$

có một nghiệm thực kép là $\lambda = 3/2$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n.} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).
Vế phải của (1) là

$$f_n = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}$$

có dạng $\beta^n P_r(n)$ với $\beta = 2$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc r = 2 theo n.

Vì $\beta = 2$ không *là* nghiệm của *phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$x_n = (an^2 + bn + c)2^n \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được :

$$\mathbf{4[a(n+1)^2 + b(n+1) + c)2^{n+1} - 12[an^2 + bn + c]\,2^n + 9[a(n-1)^2 + b(n-1) + c]\,2^{n-1} = (2n^2 + 29n + 56)2^{n-1}}$$

Cho n lần lượt nhận ba *giá trị* n = -1; n = 0; n = 1 *ta được hệ:*

$$\begin{cases} 3a + \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}c = \frac{29}{4}; \\ \frac{25}{2}a + \frac{7}{2}b + \frac{1}{2}c = 28; \\ 40a + 8b + c = 87. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được a = 2; b = 1; c = -1. *Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là*

$$\boxed{x_n = (2n^2 + n - 1)2^n} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = (C_1 + nC_2)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1)\, 2^n} \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 1$; $x_1 = -2$ *vào (6) ta được:*

$$\begin{cases} C_1 - 1 = 1; \\ \frac{3}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 + 4 = -2. \end{cases}$$

Từ đó ta có: $C_1 = 2$; $C_2 = -6$.

Thế vào (6) ta có nghiệm riêng cần tìm của (1) là:

$$\boxed{x_n = (2 - 6n)(3/2)^n + (2n^2 + n - 1)\, 2^n}$$

Ví Dụ 4

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = \cos\frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2})\sin\frac{n\pi}{4} \qquad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2.2^n.} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = \cos\frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2})\sin\frac{n\pi}{4}$$

có dạng $\alpha\cos n\varphi + \beta\sin n\varphi$ với $\varphi = \pi/4$

Vì

$$\lambda_0 = \cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}$$

không *là* nghiệm của *phương trình đặc trưng (*) nên (1) có một nghiệm riêng dạng:*

$$x_n = a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4} \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được:

$$a\cos\frac{(n+2)\pi}{4} + b\sin\frac{(n+2)\pi}{4} - 3[a\cos\frac{(n+1)\pi}{4} + b\sin\frac{(n+1)\pi}{4}]$$
$$+2(a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4}) = \cos\frac{n\pi}{4} - (3 - 3\sqrt{2})\sin\frac{n\pi}{4}$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị n = 0; n = -1; *ta được hệ:*

$$\begin{cases} (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})a + (1 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})b = 1; \\ (3\frac{\sqrt{2}}{2} - 3)a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = 2\sqrt{2} - 3. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được a = 1; b = -1. *Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của (1) là*

$$\boxed{x_n = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2.2^n + \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}}$$

Ví Dụ 5

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n \quad (1)$$

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất là:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0 \quad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ (*)

có hai nghiệm thực phân biệt là $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$\boxed{x_n = C_1 + C_2.\ 3^n.}$ (3)

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của (1).

Vế phải của (1) là

$$f_n = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3.4^n$$

có dạng ở Trường hợp 4.

Xét các hệ thức đệ qui:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 \quad (1')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = (2-n)2^{n-2} \quad (1'')$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3.4^n \quad (1''')$$

Lý luận tương tự như trên ta tìm được:

Một nghiệm riêng của (1') là $\boxed{x_{n1} = -10n}$

Một nghiệm riêng của (1'') là $\boxed{x_{n2} = n2^n}$

Một nghiệm riêng của (1''') là $\boxed{x_{n3} = 4^{n+2}}$

Suy ra một nghiệm riêng của (1) là:

$\boxed{x_{n1} = -10n + n2^n + 4^{n+2}}$ *(4)*

Từ (3) và (4) ta suy ra nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\boxed{x_n = C_1 + C_2.3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}}$$

Vídụ(**Bài 4** Đề thi2007)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui:

$a_n = a_{n-1} + 6\,a_{n-2}$

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu $a_0 = 1$, $a_1 = 5$ của hệ thức đệ qui:

$a_n = a_{n-1} + 6\,a_{n-2} + 50n\,3^{n-1}$

Đáp án: 1,5đ

a) Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 6 = 0$ có 2 nghiệm $r_1 = 3$, $r_2 = -2$ nên nghiệm tổng quát có dạng: $a_n = c\,3^n + d\,(-2)^n$ **(0,5đ)**

b) Ta tìm nghiệm đặc biệt có dạng $n(An+B)3^n$:

$(An^2 + Bn)\,3^n = (A(n-1)^2 + B(n-1))\,3^{n-1} + 6\,(A(n-2)^2 + B(n-2))\,3^{n-2} + 50n\,3^{n-1}$

$10An - 50n + 5B - 9A = 0$ hay $A = 5$, $B = 9$ **(0,5đ)**

Do đó nghiệm tổng quát có dạng: $a_n = c\,3^n + d\,(-2)^n + (5n^2 + 9n)\,3^n$

Các điều kiện ban đầu cho:

$a_0 = c + d = 1$,

$a_1 = 3c - 2d + 42 = 5$

giải hệ phương trình trên ta được $c = -7$, $d = 8$ **(0,5đ)**

<u>Vídụ(Đềthi2006).</u> Cho X = $\{0,1,2\}$. Mỗi chuỗi ký tự có dạng $a_1a_2...a_n$ với $a_1, a_2,..,a_n \in$ X (n nguyên dương)được gọi là một từ có chiều dài n trên X. Gọi L_n là số các từ có chiều dài n trên X không chứa 2 số 2 liên tiếp.

a)Tìm một công thức truy hồi cho L_n.

b)Tìm biểu thức của L_n theo n.

<u>Đápán.</u> (2 điểm)

a)1 điểm

_ Số các từ có chiều dài n mà $a_1 = 0$ là L_{n-1}

_ Số các từ có chiều dài n mà $a_1 = 1$ là L_{n-1}

_ Số các từ có chiều dài n mà $a_1 = 2$:

+ Có L_{n-2} từ mà $a_2 = 0$

+ Có L_{n-2} từ mà $a_2 = 1$

Vậy $L_n = 2L_{n-1} + 2L_{n-2}$ (n > 3)

b)1 điểm

Các từ có chiều dài 1 là : 0,1,2. $L_1 = 3$;

Các từ có chiều dài 2 là : 00,01,02,10,11,12,20,21 . $L_2 = 8$;

Ta quy ước $L_0 = 1$ thì hệ thức đệ quy thoả với n >1

Phương trình đặc trưng $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

Nghiệm tổng quát :

$$L_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ (1+\sqrt{3})A + (1-\sqrt{3})B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ B = \dfrac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + (\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}})(1-\sqrt{3})^n$$

Ví dụ (Đềthi2006).

a)Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui :

$a_n= 4a_{n-1}- 4\ a_{n-2}$

b)Tìm nghiệm của hệ thức đệ qui:

$a_n= 4a_{n-1}- 4\ a_{n-2}+3.\ 2^{n+1}$

thoả điều kiện đầu:$a_0=4,a_1=4$

Đáp án

a)Phương trình đặc trưng $x^2-4x+4 = 0$ có nghiệm kép x = 2nên nghiệm tổng quát có dạng

$a_n = (A+nB)\ 2^n$ (0,5đ)

b) Vì β=2 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $Cn^2 2^n$.

Ta có $Cn^2 2^n = 4C(n-1)^2 2^{n-1} - 4C(n-2)^2 2^{n-2} + 3.2^{n+1}$

$\Leftrightarrow$ C = 3 (0,5đ)

Do đó nghiệm tổng quát có dạng

$a_n = A\ 2^n + Bn2^n + 3n^2 2^n$

Sử dụng ĐKĐ

$a_0 = A = 4$

$a_1 = 2A+2B +6 = 4$ .Nên B = -5

Đềthi 2006

Cho X={0,1,2}.Gọi a_n là số các từ có chiều dài n trên X trong đó số 1và số 2 không xuất hiện liên tiếp.

a) Chứng minh rằng a_n thoả hệ thức đệ qui:

$a_n = 2a_{n-1}+a_{n-2}$ với n>2.

b)Tìm biểu thức của a_n theo n.

Đềthi 2006

Đáp án (2,5 điểm)

a)1 điểm

Gọi b_n, c_n, d_n lần lượt là số từ $x_1x_2\ldots x_n$ ứng với $x_1= 0, x_1=1, x_1=2$.

Ta có $b_n = a_{n-1}$; $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$; $d_n= b_{n-1}+d_{n-1}$

Dođóa$_n = b_n + c_n + d_n = a_{n-1} + b_{n-1} + d_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$

$= a_{n-1}+a_{n-2}+(d_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}) = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-1}$

$=2a_{n-1}+a_{n-2}$

Đềthi 2006

b)1,5 điểm.

Các từ có chiều dài 1 là 0,1,2 nên a_1 =3.

Các từ có chiều dài 2 thoả yêu cầu là: 00,01,02,10,12,20,21 nên a_2 =7.Ta qui ước a_0=1thì hệ thức đệ qui thoả với n >1. Phương trình đặc trưng $x^2 - 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm là

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Đềthi 2006

Do đó nghiệm tổng quát là

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$$

Trong đó A và B xác định bởi

$$A + B = 1$$
$$A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = 3$$

Đềthi 2006

Suy ra

$$A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, B = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$L_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

Đề thi 2005

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui:

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

b) Tìm nghiệm của hệ thức đệ qui:

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2.\ 4^n$

thoả điều kiện đầu $a_0 = 12$, $a_1 = 8$

Đề thi 2005

Một người gửi 100 triệu đồng vào một quĩ đầu tư vào ngày đầu của một năm . Ngày cuối cùng của năm người đó được hưởng hai khoản tiền lãi. Khoản thứ nhất là 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm, khoản lãi thứ hai là 45% của tổng số tiền có trong tài khoản của năm trước đó.Gọi $P_n$là số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ n.

a) Tìm công thức truy hồi cho P_n

b) Tìm biểu thức của $P_n$theo n.

Đề thi 2004

Một bãi giữ xe được chia thành n lô cạnh nhau theo hàng ngang để xếp xe đạp và xe máy.Mỗi xe đạp chiếm một lô còn mỗi xe máy chiếm hai lô.Gọi L_n là số cách xếp cho đầy n lô.

a)Tìm một công thức đệ qui thoả bởi L_n

b) Tìm biểu thức của L_n theo n.

Bài tập về nhà

Giải các hệ thức đệ qui sau:

1) $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$

Bài tập về nhà

Giải các hệ thức đệ qui sau:

4) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128.8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$

6) $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = -\frac{3}{2}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{n\pi}{3}.$

Bài tập về nhà

Giải các hệ thức đệ qui sau:

7) $\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2.5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128.8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$

9) $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 20 + n2^{n-2} + 3^n$

10.

Tìm hệ thức đệ qui cho x_n, trong đó x_n là số miền của mặt phẳng bị phân chia bởi n đường thẳng trong đó không cóhai đường nào song song và không có ba đường nào đồng qui. Tìm x_n