Phần VIII.
CÂY

Biên soạn : Nguyễn Viết Đông

CÂY

1.ĐN và tính chất
2.Cây khung ngắn nhất
3. Cây có hướng
4.Phép duyệt cây

Định nghĩa và tính chất

1. Định nghĩa cây:

Cho G là đồ thị vô hướng.

a) G được gọi là một *cây* nếu G liên thông và không có chu trình đơn.

b)*Rừng* là đồ thị mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

Định nghĩa và tính chất

2. Điều kiện cần và đủ (cây)

Cho T là đồ thị vô hướng có n đỉnh. Các phát biểu sau đây là tương đương:

i)T là cây

ii)T liên thông và có n-1 cạnh.

iii)T không có chu trình và có n-1 cạnh

iv) T liên thông và mỗi cạnh là một cầu.

v)Giữa hai đỉnh bất kỳ có đúng một đường đi nối chúng với nhau

vi)Tkhông có chu trìnhvà nếu thêm vào một cạnh giữahai đỉnh không kề nhau thì có một chu trình duy nhất.

Định nghĩa và tính chất

3. ĐN cây khung.

Cho G=(V,E) là đồ thị vô hướng.T là đồ thị con khung của G.

Nếu T là một cây thì T được gọi là *cây khung(hay cây tối đại ,hay cây bao trùm)* của đồ thị G.

Cây khung ngắn nhất

1. Định nghĩa.

Cho G là đồ thị có trọng số.Cây khung T của G được gọi là *cây khung ngắn nhất* (cây tối đại ngắn nhất, cây bao trùm ngắn nhất, cây khung tối tiểu)nếu nó là cây khung của G mà có trọng lượng nhỏ nhất.

2. Thuật toán tìm cây khung ngắn nhất

Cây khung ngắn nhất

- a)Thuật toán Kruscal

Cho G là đồ thị liên thông ,có trọng số ,n đỉnh.

Bước 1.Trước hết chọn cạnh ngắn nhất $e_1$trong các cạnh của G.

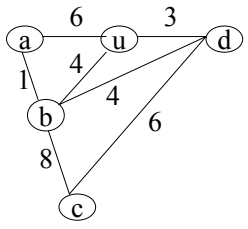
Bước 2.Khi đã chọn k cạnh $e_1,e_2,\ldots e_k$thì chọn tiếp cạnh e_{k+1} ngắn nhất trong các cạnh còn lại của

G sao cho không tạo thành chu trình với các cạnh đã chọn trước.

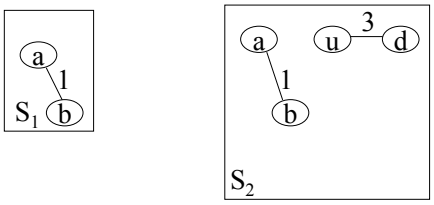
Bước 3. Chọn đủ n-1 cạnh thì dừng.

Cây khung ngắn nhất

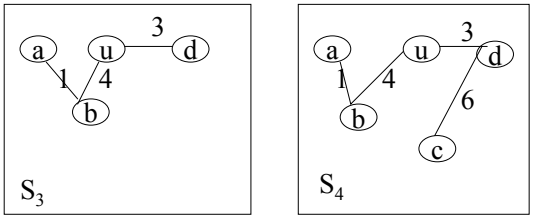
- Ví dụ



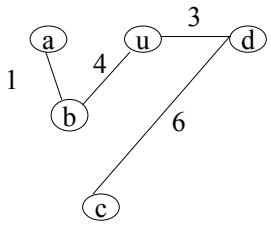
II.Cây khung ngắn nhất



Cây khung ngắn nhất



Cây khung ngắn nhất



Cây khung ngắn nhất

b)Thuật toán Prim.

Bước 1. Chọn 1 đỉnh bất kỳ v_1 để có cây T_1 chỉ gồm 1 đỉnh.

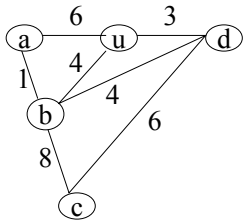
Bước 2.Khi đã chọn cây T_k thì chọn tiếp cây $T_{k+1} = T_k \cup e_{k+1}$.

Trong đó e_{k+1} là cạnh ngắn nhất trong các cạnh có một đầu mút thuộc T_k và đầu mút kia không thuộc T_k

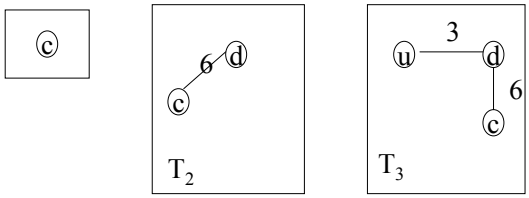
Bước 3.Chọn được cây T_n thì dừng.

Cây khung ngắn nhất

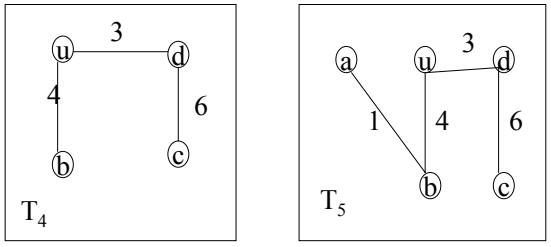
- Ví dụ



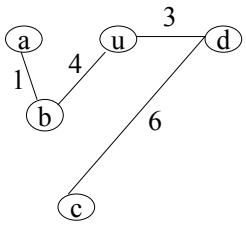
Cây khung ngắn nhất



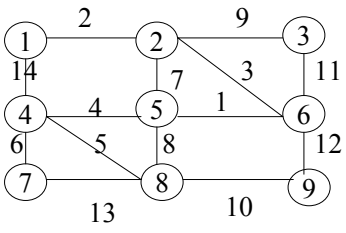
Cây khung ngắn nhất



Cây khung ngắn nhất

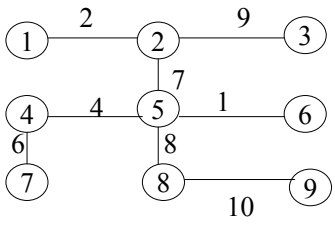


- Đề thi 2004.Hãy trình bày thuật toán tìm cây khungngắn nhất của G chứa cạnh 58 nhưng không chứa cạnh26



Cây khung ngắn nhất

- Giải. Đặt G'=G-26 thì cây khungphải tìm là ở trongG'. Đầu tiên chọn cạnh 58 sau đó áp dụng Kruscal như thông thường.



Cây có hướng

1. ĐN1.

a) *Cây có hướng* là đồ thị có hướng(khôngcó cạnh song song cùng chiều, ngược chiều) mà đồ thị đối xứng của nó là một cây.

b) *Cây có gốc* là một cây có hướng , trong đó có một đỉnh đặc biệt gọi là gốc, từ gốc có đường đi đến mọi đỉnh khác của cây

Nhận xét

Trong một cây có gốc r thì $\deg^-(r)=0$, $\deg^-(v) = 1$ với mọi đỉnh không phải là gốc

Cây có hướng

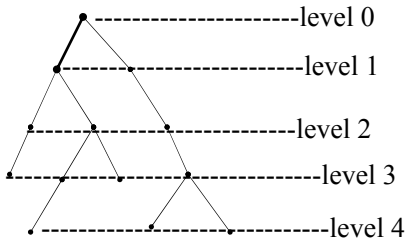
2. ĐN2(level)

Cho cây có gốc r.

- Gốc r được gọi là đỉnh mức 0 (level 0)
- Các đỉnh kề với gốc r được xếp ở phía dưới gốc và gọi là đỉnh mức 1(level1).
- Đỉnh sau của đỉnh mức 1(xếp phía dưới đỉnh mưc1)gọi là đỉnh mức 2.
- ……

Level (v) = k $\Leftrightarrow$ đường đi từ gốc r đến v qua k cung.

Cây có hướng



Cây có hướng

3. ĐN3. Cho T là cây có gốc r

a)Nếu uv là một cung của T thì u được gọi là *cha* của v, còn v gọi là *con* của u.

Đỉnh không có con gọi là *lá* (hay *đỉnh ngoài*). Đỉnh không phải là lá gọi là *đỉnh trong*.

b) Hai đỉnh có cùng cha gọi là *anh em.*

c) Nếu có đường đi $v_1v_2\ldots v_k$ thì $v_1, v_2,.., v_{k-1}$ gọi là *tổ tiên* của v_k,còn v_k gọi là *hậu duệ* của $v_1, v_2,.., v_{k-1}$.

d) Cây con T(v) của T là cây có gốc là v và tất cả các đỉnh khác là mọi hậu duệ của v trong cây T đã cho.

Cây có hướng

4. Định nghĩa 4.

Cho T là cây có gốc.

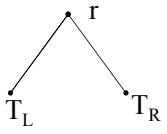
a) T được gọi là *cây k- phân* nếu mỗi đỉnh của T có nhiều nhất là k-con

b) Cây 2- phân được gọi là *cây nhị phân*

c) *Cây k- phân đủ* là cây mà mọi đỉnh trong có đúng k- con.

Cây có hướng

5. ĐN5.Cho T là cây nhị phân có gốc là r.Ta có thể biểu diễn T như hình vẽ dưới với hai cây con. T_L và T_Rlần lượt được gọi là cây con bên trái và cây con bên phải củaT



Cây có hướng

6. ĐN (Độ dài đường đi trong và độ dài đường đi ngoài)

Cho T là cây nhị phân đủ.

a) *Độ dài đường đi trong* là tổng tất cả các mức của các đỉnh trong,ký hiệu IP(T).
b) *Độ dài đường đi ngoài* là tổng tất cả các mức của các lá, ký hiệu EP(T).

Cây có hướng

6. Định lý. Cho T là cây nhị phân đủ với k đỉnh trong và s lá.

Tacó s = k+1 và EP=IP+2k.

7. ĐN.Cho T là cây nhị phân không đủ.Lập T'là cây có được bằng cách sau:

-Thêm vào mỗi lá của T hai con.

-Thêm vào v một con nếu v là đỉnh trong của T mà chỉ có một con.Ta đặt:

IP(T) :=IP(T')& EP(T):=EP(T')

Phép duyệt cây(Tree traversal)

1. ĐN.*Duyệt cây* là liệt kê tất các đỉnh của cây theo một thứ tự nào đó thành một dãy, mỗi đỉnh chỉ xuất hiện một lần .

2.Phép duyệt *tiền thứ tự* (Preoder traversal)

(1) Đến gốc r.

(2) Dùng phép duyệt tiền thứ tự để duyệt các cây con T_1rồi cây con T_2 …từ trái sang phải

Phép duyệt cây

3.Phépduyệt *hậu thứ tự*.(Posoder traversal).

(1)Dùng phép duyệt hậu thứ tự để lần lượt duyệt cây conT_1,T_2,…. từ trái sang phải

(2) Đến gốc r.

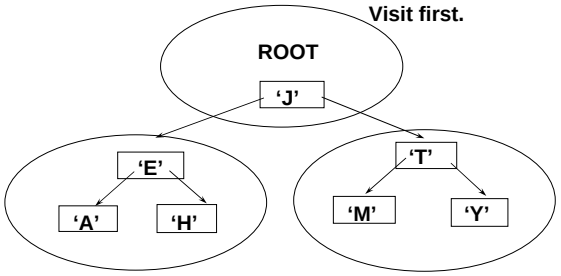
4.Phép duyệt trung thứ tự cho cây nhị phân (Inorder traversal)

(1)Duyệt cây con bên trái T_L theo trung thứ tự

(2) Đến gốc r

(3)Duyệt cây con bên phải theo trung thứ tự.

Preorder Traversal: J E A H T M Y

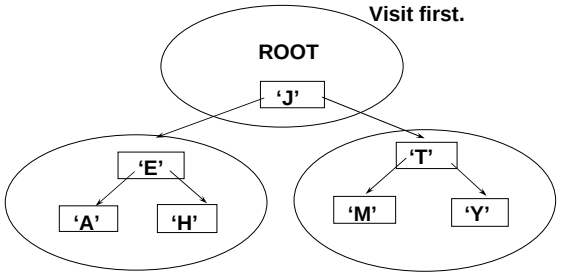


Visit left subtree second

Visit right subtree last

29

Preorder Traversal: J E A H T M Y

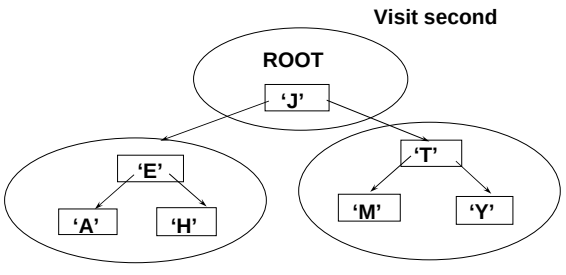


Visit left subtree in Preorder

Visit right subtree in Preorder

30

Inorder Traversal: A E H J M T Y

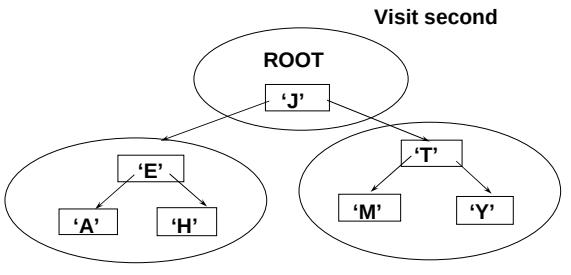


Visit left subtree first

Visit right subtree last

31

Inorder Traversal: A E H J M T Y

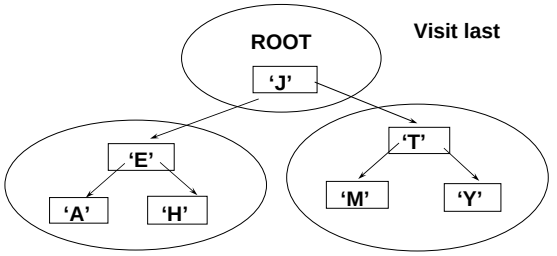


Visit left subtree in Inorder

Visit right subtree in Inorder

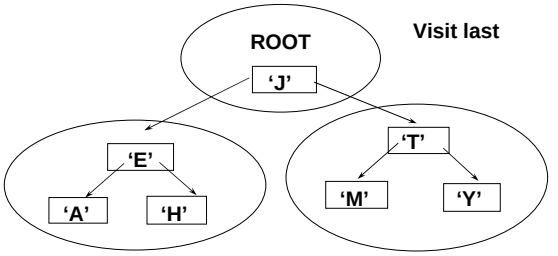
32

Postorder Traversal: A H E M Y T J



33

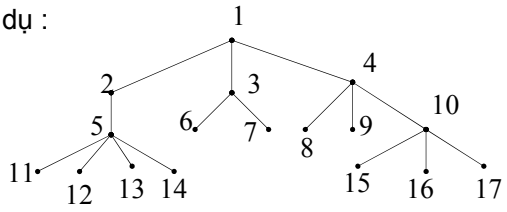
Postorder Traversal: A H E M Y T J



34

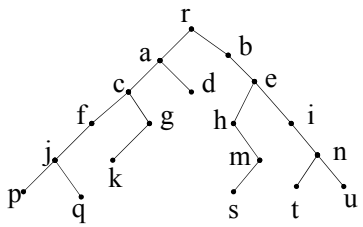
Phép duyệt cây

- Ví dụ :



Preoder:1,2,5,11,12,13,14,3,6,7,4,8,9,10,15,16,17
Posoder:11,12,13,14,5,2,6,7,3,8,9,15,16,17,10,4,1

Phép duyệt cây



Inoder :p,j,q,f,c,k,g,a,d,r,b,h,s,m,e,i,t,n,u

Cây khung có hướng

1. ĐN.Cho G(V,E) là đồ thị có hướng và T=(V,F) là đồ thị con khung của G.Nếu Tlà cây có hướng thì T gọi là *cây khung có hướng(hay cây có hướng tối đại)* của G.
2. *Matrận Kirchhoff* (G không khuyên)

a) Nếu G là đồ thị có hướng thì K(G) =(k_{ij})

$$k_{ij} = \begin{cases} \deg^{-}(i) & khi\ i = j \\ -B_{ij} & khi\ i \neq j \end{cases}$$

Trong đó B_{ij} là số cung đi từ i đến j

Cây khung có hướng

b) Nếu G là đồ thị vô hướng thì K(G) =(k_{ij})

$$k_{ij} = \begin{cases} \deg(i) & khi\ i = j \\ -B_{ij} & khi\ i \neq j \end{cases}$$

Trong đó B_{ij} là số cạnh nối i với j

Cây khung có hướng

3.Định lý.

Cho G là đồ thị không khuyên. Đặt $K_q(G)$ là phần phụ của k_{qq}(Matrận có được từ K(G) bằng cách xoá dòng q và cột q.

Số cây khung có hướng trong G có gốc là đỉnh q bằng det$K_q(G)$

Đề thi

1. Đề thi 2003.

Cho đồ thị có hướng G=(V,E) với V={1,2,3,4,5} xác định bởi matrận kề sau

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Đề thi

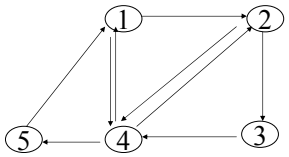
a)Tìm số liên thông đỉnh của G

b)G có là đồ thị Euler không? Tại sao?

c)Tìm số cây có hướng tối đại của G có gốc là đỉnh 1

d)Vẽ các cây trong câu c)

Đề thi



Đề thi

a) Với $A \subseteq V$ ký hiệu G-A để chỉ đồ thị có được từ G có được từ G bằng cách xoá các đỉnh thuộc A và các cung kề với nó.Ta thấy G-A vẫn liên thông nếu A chỉ gồm một đỉnh. G-A không liên thông nếu A ={1,4}. Vậy v(G)=2

b)G liên thông và cân bằng nên G là Euler.

Đề thi

c)Matrận Kirchhoff của G là ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đề thi

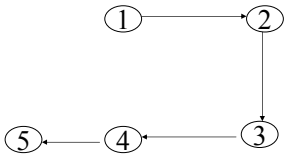
$$K_1(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đề thi

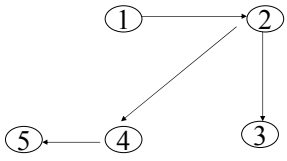
$$\det K_1(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Vậy G có 4 cây có hướng tối đại .
Đó là các cây sau đây

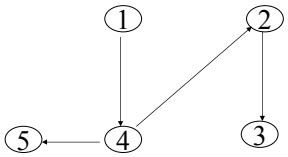
Đề thi



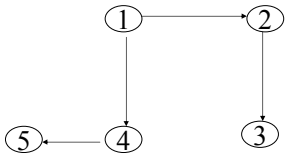
Đề thi



Đề thi

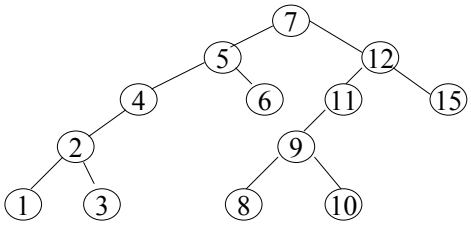


Đề thi



Đề thi

Đề thi 2001.Xét cây nhị phân



Đề thi

- a)Hãy duyệt cây theo thứ tự giữa (trung thứtự). Có nhận xét gì về giá trịcủa các khoá khi duyệt theo thứ tự giữa.
- b) Hãy chèn lần lượt các khoá 13,14 vào cây mà vẫn duy trì được nhân xét trên.

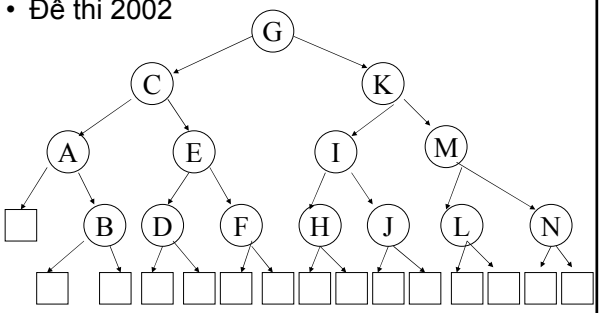
Giải.

a)Duyệt theo thứ tự giữa các khoá sẽ có giá trị tăng dần 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15.

b)Khoá 13 được chèn thành nút con bên trái của nút 15 và khoá14được chèn thành nút con bên phải của nút 13.

Đề thi

- Đề thi 2002



Đề thi

- a)Tìm độ dài đường đi trong và độ dài đường đi ngoài của cây.
- b) Cho biết kết quả duyệt cây theo thứ tự sau.
- c)Xây dựng cây biểu diễn cho thuật toán tìm kiếm nhị phân trên mảng a sắp thứ tự tăng gồm 14 phần tử. Suy ra số lần so sánh khoá trung bình khi dùng thuật toán tìm kiếm nhị phân để tìm xem một phần tử x có nằm trong mảng a hay không.

Đề thi

- Giải.

a) Độ dài đường đi trong
IP=0+2.1+4.2+7.3=31.

Độ dài đường đi ngoài
EP=IP+2n=31+2.14=59.

b)Kết quả dyệt cây theo thứ tự sau:

B,A,D,F,E,C,H,J,I,L,N,M,K.

c)Là cây trong đề bài bằng cách thay tương ứng A,B,C,… bởi 1,2,3,…

Đề thi

- Số phép so sánh khoá trung bình

- Tìm thành công (dừng tại nút trong):

$(IP+n)/n = (31+14)/14 \approx 3,21$

- Tìm không có (dừng tại nút ngoài):

$EP/(n+1) = 59/15 \approx 3,93$.

Đề thi

Đề thi 2000ĐHBK.

a)Xây dựng cây biểu diễn cho thuật toán tìm kiếm nhị phân tên mảng sắp thứ tự tăng gồm 13 phần tử.

b) Tìm độ dài đường đi trong và độ dài đường đi ngoài của cây.

c) Cho biết kêt quả duyệt cây theo thứ tự trước

Appendix

- Thuật toán tìm kiếm nhị phân(binary search):Tìm phần tử x trong dãy số tăng dần.

Nhập: dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tăng dần và phần tử x.

Xuất :vị trí của x trong dãy hoặc 0.

Thuật toán:

k:=1,r:=n

repeat

Appendix

i:=(k+r)div2;
if a_i<x then k:=i+1;
if a_i>x then r : = i-1:
utill(x=a_i or (k>r);
if (x =a_i)then
xuất i (tìm thấy x ở vị trí i)
else
xuất 0(không tìm thấy x trong dãy)