Phần III.
Tập hợp, ánh xạ, phép đếm

Biên soạn:

TS.Nguyễn Viết Đông

Tài liệu tham khảo

- [1]GS.TS Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc, NXB Giáo dục
- [2]TS. Trần Ngọc Hội, Toán rời rạc

Tập hợp

1.Các phép toán trên tập hợp.

Phép hợp: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

Phép giao : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

Hiệu : $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

Hiệu đối xứng

$x \in A \oplus B \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B$.

Phần bù :Cho $A \subset E$ thì

$$\overline{A} = E \setminus A$$

Tập hợp

Tích Descartes:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$

$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1,2,\ldots,n\}$

Tập hợp

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I,\ x_i \in A_i\}$$

Tập hợp

2.Tính chất của phép toán trên tập hợp

2.1) Tính luỹ đẳng:

$A \cap A = A$ và $A \cup A = A$

2.2) Tính giao hoán:

$A \cap B = B \cap A$ và $A \cup B = B \cup A$.

2.3) Tính kết hợp:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

và $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Tập hợp

2.4) Tính phân phối:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

và $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.5) Công thức De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{và} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Suy ra:

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

và $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Tập hợp

Mở rộng

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

Tập hợp

3.Số phần tử của tập hợp hữu hạn.

Cho A là tập hợp hữu hạn.Số phần tử của tập A ký hiệu là |A|.Ta có:

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2) $|A \times B| = |A|\,|B|$
3) $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, $\wp(A)$ là tập các tập con của A

Ánh xạ

1.Định nghĩa và ký hiệu

1.1. Định nghĩa

Cho hai tập hơp X, Y $\neq \varnothing$. Một ánh xạ f từ X vào Y là qui tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với môt phần tử duy nhất y của Y mà ta ký hiệu là f(x) và gọi là ảnh của x qua ánh xạ f. Ta viêt:

$f : X \to Y$

$x \mapsto f(x)$

Ánh xạ

1.2. Ánh xạ bằng nhau

Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là bằng nhau nếu

$\forall x \in X, f(x) = g(x)$

1.3. Ảnh và ảnh ngược

Cho ánh xạ f từ X vào Y và $A \subset X$, $B \subset Y$. Ta định nghĩa:

Ánh xạ

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

$\quad = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$

$\forall y \in Y, y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x);$

$\forall y \in Y, y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x).$

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$\forall x \in X, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B;$

$\forall x \in X, x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B.$

Ánh xạ

Ta thường ký hiệu $f(X)$ bởi Imf và $f^{-1}(\{y\})$ bởi $f^{-1}(y)$. Imf được gọi là ***ảnh*** của ánh xạ f.

Tính chất:

$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

$f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$;

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Ánh xạ

2. PHÂN LOẠI ÁNH XẠ

2.1. Đơn ánh

Ta nói $f : X \to Y$ là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau, nghĩa là:

$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Ánh xạ

- $f : X \to Y$ là một đơn ánh

$\Leftrightarrow$ $(\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

$\Leftrightarrow$ $(\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ có nhiều nhất một phần tử).

$\Leftrightarrow$ $(\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có nhiều nhất một nghiệm $x \in X$.

- Suy ra:

$f : X \to Y$ không là một đơn ánh

$\Leftrightarrow(\exists x, x' \in X, x \neq x'$ và $f(x) = f(x'))$.

$\Leftrightarrow(\exists y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có ít nhất hai nghiệm $x \in X$

Ánh xạ

2.2. Toàn ánh:

Ta nói $f : X \to Y$ là một ***toàn ánh*** nếu Imf = Y.

Những tính chất sau được suy trực tiếp từ định nghĩa.

$f : X \to Y$ là môt toàn ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x))$

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \neq \varnothing)$;

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có nghiệm $x \in X$.

Suy ra:

$f : X \to Y$ không là một toàn ánh

$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x))$;

$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, f^{-1}(y) \neq \varnothing)$;

Ánh xạ

2.3. Song ánh và ánh xạ ngược:

Ta nói $f : X \to Y$ là một ***song ánh*** nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Tính chất.

$f : X \to Y$ là một song ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x))$;

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ có đúng một phần tử);

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có duy nhất một nghiệm $x \in X$.

Ánh xạ

- Xét $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, theo tính chất trên, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ta gọi đây là ***ánh xạ ngược*** của f và ký hiệu f^{-1}. Như vậy:

$f^{-1} : Y \to X$

$y \mapsto f^{-1}(y) = x$ với $f(x) = y$.

Ánh xạ

Cho $P(x) = x^2 - 4x + 5$ và các ánh xạ

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ định bởi $f(x) = P(x)$;

$g : [2, +\infty) \to \mathbf{R}$ định bởi $g(x) = P(x)$;

$h : \mathbf{R} \to [1, +\infty)$ định bởi $h(x) = P(x)$;

$k : [2, +\infty) \to [1, +\infty)$ định bởi $k(x) = P(x)$;

Hãy xét xem ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh và tìm ánh xạ ngươc trong trường hợp là song ánh.

Ánh xạ

3. TÍCH (HỢP THÀNH)CỦACÁC ÁNH XẠ

3.1. Định nghĩa: Cho hai ánh xạ

$f : X \to Y$ và $g : Y' \to Z$

trong đó $Y \subset Y'$. Ánh xạ tích h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi:

$h : X \to Z$

$x \mapsto h(x) = g(f(x))$

- Ta viết:

$h = g \circ f : X \to Y \to Z$

$x \mapsto f(x) \mapsto h(x) = g(f(x))$

Ánh xạ

3.2. Định lý:

Xét f : X $\rightarrow$ Y là một song ánh. Khi đó:

f o f^{-1} = Id_Y

f^{-1} o f = Id_X

trong đó ký hiệu Id_X là ánh xạ đồng nhất X $\rightarrow$ X định bởi $Id_X(x) = x, \forall x \in X$; ta gọi Id_X là ánh xạ đồng nhất trên X, tương tự Id_Y là ánh xạ đồng nhất trên Y.

Ánh xạ

<u>4.Lực lượng của tập hợp</u>.

Mỗi tập A ta đặt tương ứng với một đối tượng |A| gọi là *lực lượng của tập* A ,sao cho |A| = |B| khi và chỉ khi tồn tại song ánh từ A vào B.Lực lượng của tập A còn được gọi là *bản số của* A và ký hiệu là cardA.Lực lượng của tập rỗng là số 0 Lực lượng của tập {1,2,…,n} là n.

Ánh xạ

Lực lượng của tập số tự nhiên ký hiệu là $\aleph_0$ (đọc là alép không) và gọi là *lực lượng đếm được*, còn lực lượng của tập số thực được gọi là *lực lượng continum* và ký hiệu là $\aleph$ (alep).

Tập hợp số hữu tỷ, tập hợp số nguyên, tập số chẵn có lực lượng đếm được.

Khoảng (0 ; 1), đoạn [0 ; 1] có lực lượng continum

5. Mathematical Induction(QuinạpTH)
5.1. Mathematical Induction

Prove that if a set S has $|S| = n$, then $|P(S)| = 2^n$

Base case (n=0): $S = ø$, $P(S) = \{ø\}$ and $|P(S)| = 1 = 2^0$

Assume P(k): If $|S| = k$, then $|P(S)| = 2^k$

Inductive hypothesis

Prove that if $|S'| = k+1$, then $|P(S')| = 2^{k+1}$

$S' = S \cup \{a\}$ for some $S \subset S'$ with $|S| = k$, and $a \in S'$.

Partition the power set of S' into the sets containing a and those not.

We count these sets separately.

5.1.Mathematical Induction

Assume P(k): If $|S| = k$, then $|P(S)| = 2^k$

Prove that if $|S'| = k+1$, then $|P(S')| = 2^{k+1}$

$S' = S \cup \{a\}$ for some $S \subset S'$ with $|S| = k$, and $a \in S'$.

Partition the power set of S' into the sets containing a and those not.

$P(S') = \{X : a \in X\} \cup \{X : a \notin X\}$

$P(S') = \{X : a \in X\} \cup P(S)$

Since the elements of the 2nd set are the subsets of S.

5.1.Mathematical Induction

Prove that if $|S'| = k+1$, then $|P(S')| = 2^{k+1}$

$S' = S \cup \{a\}$ for some $S \subset S'$ with $|S| = k$, and $a \in S'$.

$P(S') = \{X : a \in X\} \cup P(S)$

$\{X : a \in X\} = \{\{a\} \cup X' : a \notin X'\}$

So $|\{X : a \in X\}| = |P(S)|$

Subsets containing a are made by taking any set from P(S), and inserting a.

$|P(S')| = |\{X : a \in X\}| + |P(S)|$

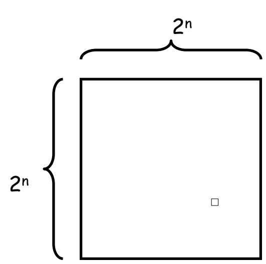
$= 2\,|P(S)|$

$= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

A cool example

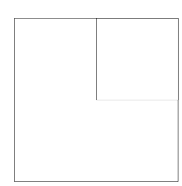
Deficient Tiling

A 2^n x 2^n sized grid is *deficient* if all but one cell is tiled.



A cool example

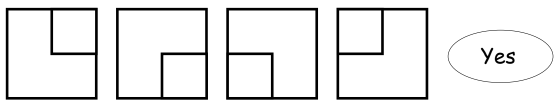
We want to show that all 2^n x 2^n sized deficient grids can be tiled with tiles shaped like:



A cool example

Base case

Is it true for $2^1 \times 2^1$ grids?

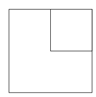


Inductive Hypothesis:

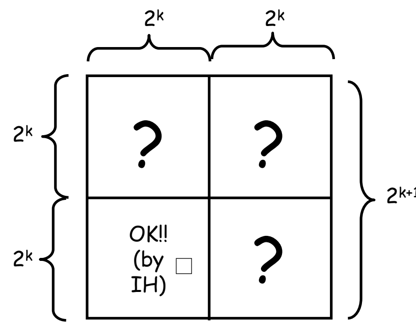
We can tile a $2^k \times 2^k$ deficient board using our fancy designer tiles.

Use this to prove:

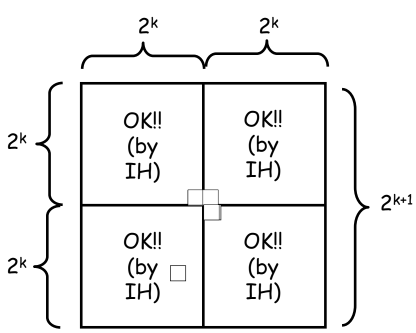
We can tile a $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ deficient board using our fancy designer tiles.



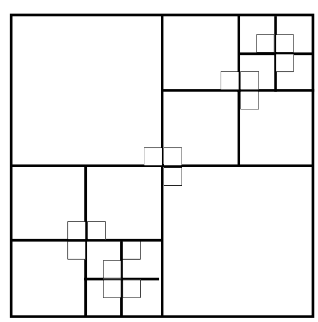
A cool example



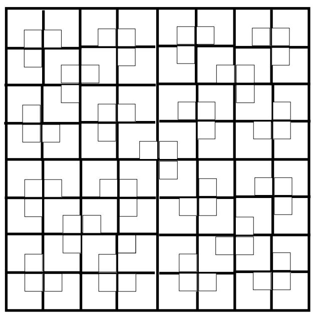
A cool example



A cool example



A cool example



Why does it work?

Definition:

A set S is "well-ordered" if every non-empty subset of S has a least element.

Given (we take as an axiom): the set of natural numbers ($\mathbf{N}$) is well-ordered.

Is the set of integers ($\mathbf{Z}$) well ordered?

No.
$\{ x \in \mathbf{Z} : x < 0 \}$ has no least element.

Why does it work?

Is the set of non-negative reals ($\mathbf{R}$) well ordered?

No.
$\{ x \in \mathbf{R} : x > 1 \}$ has no least element.

Note. any set can be well-ordered by redefining <.

5.2.Strong Mathematical Induction

If

- P(0) and
- $\forall n \geq 0\ (P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1)$

Then

- $\forall n \geq 0\ P(n)$

In our proofs, to show P(k+1), our inductive hypothesis assures that ALL of P(0), P(1), … P(k) are true, so we can use ANY of them to make the inference.

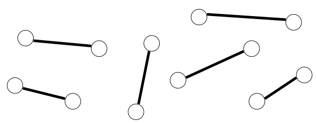
5.2.Strong Mathematical Induction

An example.

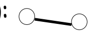
Given n green points and n orange points in a plane with no 3 collinear,

prove that there is a way to match them,

green to orange, so that none of the segments between the pairs intersect.

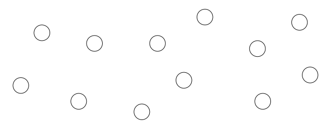


Strong Mathematical Induction

Base case (n = 1): 

Assume any matching problem of size less than (k+1) can be solved.

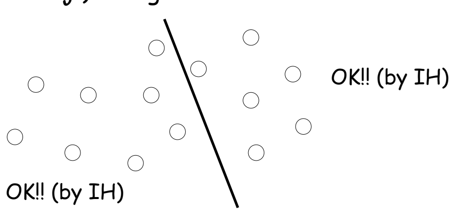
Show that we can match (k+1) pairs.



Strong Mathematical Induction

Show that we can match (k+1) pairs.

Suppose there is a line partitioning the group into a smaller one of j greens and j oranges, and another group of (k+1 - j) greens and (k+1 - j) oranges.

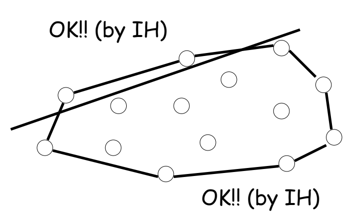


Strong Mathematical Induction

How do we know such a line always exists?

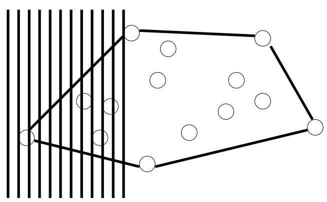
Consider the convex hull of the points:

If there is an alternating pair of colors on the hull, we're done!



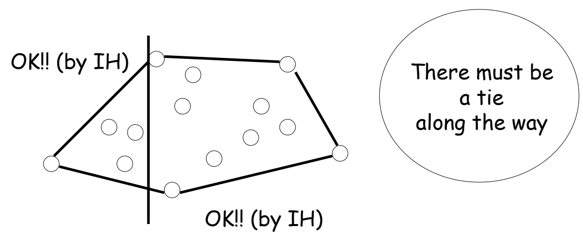
If there is no alternating pair, all points on hull are of the same color.

Notice that any sweep of the hull hits an orange point first and also last.
We sweep on some slope not given by a pair of points.



Notice that any sweep of the hull hits an orange point first and also last. We sweep on some slope not given by a pair of points.

Keep score of # of each color seen. Orange gets the early lead, and then comes from behind to tie at the end.



5.3. Inductive Definitions

We completely understand the function $f(n) = n\,!$, right?

As a reminder, here's the definition:

$$n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,\ n \geq 1$$

But equivalently, we could define it like this:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & \text{if } n > 1 \\ 1, & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

Recursive Case

Base Case

Inductive (Recursive) Definition

5.4. Inductive Definitions

Another VERY common example:

Fibonacci Numbers

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ n = 0 \\ 1 & \text{if } \ n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Base Cases

Recursive Case

Is there a non-recursive definition for the Fibonacci Numbers?

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

5.4. Inductive Definitions

Our examples so far have been inductively defined functions.

Sets can be defined inductively, too.

Give an inductive definition of $S = \{x: x \text{ is a multiple of } 3\}$

$3 \in S$ Base Case

$x, y \in S \rightarrow x + y \in S$

$x, y \in S \rightarrow x - y \in S$ Recursive Cases

No other numbers are in S.

5.5. Inductive Definitions of Strings

Let Σ be a finite set called an alphabet.

The set of strings on Σ, denoted Σ^* is defined as:

- $\lambda \in \Sigma^*$, where λ denotes the null or empty string.
- If $x \in \Sigma$, and $w \in \Sigma^*$, then $wx \in \Sigma^*$, where wx is the concatenation of string w with symbol x.

5.5. Inductive Definitions of Strings

If $x \in \Sigma$, and $w \in \Sigma^*$, then $wx \in \Sigma^*$, where wx is the concatenation of string w with symbol x.

Example: Let $\Sigma = \{a, b, c\}$. Then
$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\}$

How big is Σ^*? Infinite

Are there any infinite strings in Σ^*? No.

Is there a largest string in Σ^*? No.

5.5. Inductive Definitions of Strings

Inductive definition of the ***length*** of strings (the length of string w is denoted by $|w|$.):

- $|\lambda| = 0$
- If $x \in \Sigma$, and $w \in \Sigma^*$, then $|wx| = |w| + 1$

I point this out because the length of strings is something we might like to use for an inductive argument.

5.5. Inductive Definitions of Strings

Inductive definition of the ***reversal*** of a string (the reversal of string w is denoted by w^R.):

- $\lambda^R = \lambda$
- If $x \in \Sigma$, and $w \in \Sigma^*$, then $(wx)^R = ?$ $x(w)^R$

For example $(abc)^R = cba$

because $(abc)^R = c(ab)^R$
$= cb(a)^R$
$= cba(\lambda)^R$
$= cba\lambda = cba$

Phép đếm

1.Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
1.1.Nguyên lý cộng.
Nếu có m cách chọn x, n cách chọn đối tượng y và nếu cách chọn đối tượng x không trùng với bất kỳ cách chọn đối tượng y nào ,thì có m+n cách chọn 1 trong các đối tượng đã cho.
1.2.Nguyên lý nhân.
Nếu có m cách chọn đối tượng x và cứ mỗi cách chọn x luôn luôn có n cách chọn đối tượng y thì có m.n cách chọn cặp đối tượng (x:y)

Phép đếm

Ví dụ.

Cho A và B là hai tập hợp.Tập hợp các ánh xạ từ A vào B được ký hiệu bởi B^A.Giả sử $|A|=m$, $|B|= n$ thì $|B^A|= n^m$.Thật vậy, mỗi phần tử a_i thuộc A có n cách chọn ảnh $f(a_i)$của nó trong tập B.Theo qui tắc nhân ta có $n.n. \ldots n = n^m$ cách chọn bộ $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$.Tức là ta có n^m ánh xạ f.

Phép đếm

2. Hoán vị.

a) Định nghĩa.

Cho tập hợp A gồm n phần tử .Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phầntử của A được gọi là một ***hoán vị của n*** phần tử.Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n

b) $P_n = n!$

c) Ví dụ :Nếu A là tập hợp n phần tử thì số song ánh từ A vào A là n!

Phép đếm

3. Chỉnh hợp.

a) Định nghĩa .

Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử ($1 \le k \le n$)sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một ***chỉnh hợp chập k của n*** phần tử.Số các chỉnh hợp chập k của n ký hiệu là A_n^k

b)Công thức $\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Phép đếm

4.Tổ hợp.

a) Định nghĩa.

Cho tập hợp A gồm n phần tử.Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một ***tổ hợp chập k của n phần tử.Số*** các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k hay $\binom{n}{k}$

Phép đếm

b) Công thức $\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

c) Tính chất

$$C_n^{n-k} = C_n^k \text{ với mọi } 0 \le k \le n;$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \text{ với mọi } 1 \le k \le n$$

Phép đếm

5. Hoán vị lặp.

a) Định nghĩa

Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau(i =1,2,…,k;$n_1+n_2,\ldots,n_k=n$).Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một ***hoán vị lặp*** của n.

Phép đếm

b) Số hoán vị của n đối tượng, trong đó có n_1 đối tượng giống nhau thuộc loại 1, n_2 đối tượng giống nhau thuộc loại 2,..., n_k đối tượng giống nhau thuộc loại k, là

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$$

Phép đếm

Ví dụ: Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

Giải. Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3!1!2!1!} = 420 \quad .$$

Phép đếm

6.Tổ hợp lặp.

a) Định nghĩa.

Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là ***tổ hợp lặp chập k của n.*** Số các tổhợp lặp chập k của n được ký hiệu là

$$K_n^k$$

Phép đếm

b) Công thức $\boxed{K_n^k = C_{n+k-1}^k}$

c)Hệ quả**. Số nghiệm nguyên không âm $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (mỗi x_i đều nguyên không âm) của phương trình $x_1+ x_2+\ldots+ x_n = k$ là**

$$\boxed{K_n^k = C_{n+k-1}^k}$$

Phép đếm

Số cách chia k vật đồng chất nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n

$$\boxed{K_n^k = C_{n+k-1}^k}$$

Phép đếm

Ví dụ: Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1+ x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (1)$$

thỏa điều kiện $x_1 \le 3$; $x_2 \ge 2$; $x_3 > 4$ (*).

Giải.

Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \le 3$; $x_2 \ge 2$; $x_3 \ge 5$.

Xét các điều kiện sau:

$x_2 \ge 2$; $x_3 \ge 5$ (**)

$x_1 \ge 4$; $x_2 \ge 2$; $x_3 \ge 5$ (***)

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện (*), (**), (***). Ta có:

Phép đếm

$$p = q - r.$$

Trước hết ta tìm q.

Đặt

$$x_1' = x_1;\ x_2' = x_2 - 2;\ x_3' = x_3 - 5;\ x_4' = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$x_1'+ x_2' + x_3' + x_4' = 13 \qquad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

Phép đếm

Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$

Vậy $q = C_{16}^{13}$.

Lý luận tương tự, ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$

Suy ra $p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (∗) là 340

Phép đếm

Ví dụ: Tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi, biết rằng hộp 2 và 3 chứa không quá 6 bi.

Giải.

Trước hết ta tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi. Nhận xét rằng ta cần lấy 5 bi để xếp trước vào hộp 1, do đó số bi còn lại chỉ là 25. Suy ra số cách xếp trong trường hợp này bằng số cách xếp 25 bi vào 5 hộp mà không có điều kiện gì thêm. Số đó là

Phép đếm

$$K_5^{25} = C_{5+25-1}^{25} = C_{29}^{25} = 23751.$$

Tương tự ta có

- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp 2 chứa ít nhất 7 bi là:

$$K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18} = C_{22}^{18}$$

Phép đếm

- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là:

$$K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18} = C_{22}^{18}$$

Phép đếm

Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, mỗi hộp 2 và 3 chứa ít nhất 7 bi là:

$$K_5^{11} = C_{5+11-1}^{11} = C_{15}^{11}$$

Phép đếm

Sử dụng công thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ta suy ra số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, đồng thời hộp 2 hay hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là

$$K_5^{18} + K_5^{18} - K_5^{11} = C_{22}^{18} + C_{22}^{18} - C_{15}^{11} = 13265.$$

Phép đếm

Theo yêu cầu của bài toán, khi xếp 30 viên bi vào 5 hộp thì hộp 1 phải có ít nhất 5 bi còn mỗi hộp 2 và 3 phải có không quá 6 bi. Do đó số cách xếp này sẽ bằng hiệu của hai cách xếp (1) và (2), tức là bằng

$$23751 - 13265 = 10486.$$

Phép đếm

7. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Giả sử có n vật cần đặt vào k hộp. Khi đó tồn tại ít nhất một hộp chứa từ $\lceil n/k \rceil$ vật trở lên, trong đó $\lceil n/k \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng n/k.

Phép đếm

Ví dụ. Trong số 100 người luôn luôn có ít nhất là $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người có sinh nhật trong cùng một tháng.

Ví dụ. Cần tạo ít nhất bao nhiêu mã vùng để đảm bảo cho 84 triệu máy điện thoại, mỗi máy một số thuê bao biết rằng mỗi số thuê bao gồm 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0?

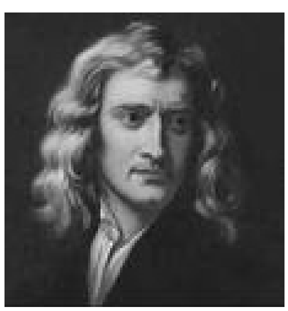
Phép đếm

Giải. Theo Nguyên lý nhân, có 9 triệu số thuê bao khác nhau có dạng 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0. Theo Nguyên lý Dirichlet, trong số 84 triệu máy điện thoại có ít nhất là

$$\lceil 84/9 \rceil = 10$$

máy có cùng một số thuê bao. Do đó, để đảm bảo mỗi máy một số thuê bao cần tạo ra ít nhất là 10 mã vùng.

Isaac Newton
(1643-1727)



Khai triển nhị thức Newton

Với x, y $\in$ **R** và n là số nguyên dương ta có:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

Mở rộngKhai triển nhị thức Newton

.

Với các số nguyên không âm $n_1,n_2,\ldots,n_k$ thoả $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$, ký hiệu

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$$

Mở rộng Khai triển nhị thức Newton

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n =$$

$$\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$$

Bài tập

1. Cho tập hợp X ≠ ∅ và A, B, C ⊂ X. Chứng minh rằng:

a) (A ∪ B) \ (A ∪ C) = B \ (A ∪ C);

b) (A ∩ B) \ (A ∩ C) = A ∩ (B \ C);

c) (A ∪ B) \ C = (A \ C) ∪ (B \ C);

d) (A ∩ B) \ C = (A \ C) ∩ (B \ C);

e) (A \ B) \ C = A \ (B ∪ C) = (A \ C) \ (B \ C).

2. Cho các tập hợp X, Y ≠ ∅ và A, B ⊂ X; C, D ⊂ Y. Chứng minh rằng:

Bài tập

a) A × (C ∪ D) = (A × C) ∪ (A × D);

b) (C ∪ D) × A = (C × A) ∪ (D × A);

c) A × (C ∩ D) = (A × C) ∩ (A × D);

d) (C ∩ D) × A = (C × A) ∩ (D × A);

e) A × (C \ D) = (A × C) \ (A × D);

f) (C \ D) × A = (C × A) \ (D × A);

g) (A × C) \ (B × D) = [(A \ B) × C] ∪ [A × (C \ D)];

h) (A × C) ∪ (B × D) ⊂ (A ∪ B) × (C ∪ D);

i) (A × C) \ (B × D) ⊃ (A \ B) × (C \ D)

Bài tập

3. Trong các trường hợp sau hãy xem ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Tìm ánh xạ ngược cho các song ánh.

a) $f : (0, +\infty) \to R$ định bởi $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$;
b) $f : (0, +\infty) \to [2, +\infty)$ định bởi $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$;
c) $f : (e, +\infty) \to R$ định bởi $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$;
d) $f : (e, +\infty) \to (2, +\infty)$ định bởi $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$;
e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ định bởi $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3$;
f) $f : \mathbf{R} \to (3, +\infty)$ định bởi $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3$;
g) $f : (0, +\infty) \to (3, +\infty)$ định bởi $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3$;

Bài tập

4. Cho ánh xạ $f : [\ln 2, +\infty) \to [9/2, +\infty)$ định bởi:

$f(x) = 2e^x - e^{-x} + 1$.

a) Chứng minh f là một song ánh và tìm f^{-1}.

b) Tìm ánh xạ h thỏa $f \circ h \circ f = f \circ g$ trong đó $g : [\ln 2, +\infty) \to [\ln 2, +\infty)$ định bởi $g(x) = e^x$.

Bài tập

5)

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$

trong mỗi trường hợp sau:

a) $x_1 \geq 3$, $x_2 \leq 4$.
b) $x_1 > 3$, $x_2 < 4$.
c) $2 \leq x_1 \leq 8$, $x_2 \leq 4$, $x_3 > 3$, $x_4 < 6$

Bài tập

6. a) Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

b) (Bài 2 Đề thi 2007)

Có bao nhiêu bộ ba số nguyên không âm (x_1, x_2, x_3) thỏa:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

trong đó $x_1 > 2$, $x_2 < 4$

Bài tập

7) Đề thi 2003.

a)Có bao nhiêu cặp tập hợp con A,B của một tập hợp 8 phần tử sao cho $A \cap B = \varnothing$

b) Có bao nhiêu cặp tập hợp con A,B của một tập hợp 8 phần tử sao cho :

$|A \cup B| \neq |A| + |B|$

- 8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)};$$