TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 2
BÀI TOÁN ĐẾM

NỘI DUNG

3.1. Giới thiệu bài toán (1/3)

- Với một tập hợp nào đó, cần đếm số phần tử trong tập đó.
- Sử dụng công thức toán học để biểu diễn.
- Nói chung, để đếm, thường đưa về dạng đã biết nhờ thiết lập quan hệ 1-1 giữa chúng.
- Để đếm, có thể sử dụng
  - ***nguyên lý cộng***,
  - ***nguyên lý nhân*** hay
  - ***nguyên lý bù trừ***.

3.1. Giới thiệu bài toán (2/3)

Ví dụ 1:

Có bao nhiêu cách xếp 5 người đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B

Giải:

- Đếm số cách xếp A đứng cạnh B.
- Xem A và B như một vị trí ta có 4! = 24 cách xếp.
- Số này cần được nhân 2 vì A có thể đứng bên trái cũng như bên phải B, nên số cách là 48.
- Mặt khác tổng số cách xếp 5 người thành một hàng ngang là 5! = 120 cách.
- Vậy số cách mà A không đứng cạnh B là 120 - 48 = 72 cách.

3.1. Giới thiệu bài toán (3/3)

Ví dụ 2:

Trên tờ xổ số có:

- Phần đầu gồm 2 chữ cái lấy từ A đến Z (26 chữ cái) và
- Phần sau gồm 4 chữ số lấy từ 0 đến 9 (10 chữ số).
- Hỏi xác suất để trúng giải độc đắc là bao nhiêu?

Giải:

- Số tờ có thể phát hành: $26^2 \times 10^4 = 6\ 760\ 000$.
- Xác suất để trúng giải độc đắc là, nếu có 1 tờ độc đắc:

$$1/6\ 760\ 000 \approx 1{,}48\times10^{-7}$$

3.2. Nguyên lý Bù trừ (1/9)

3.2.1. Giới thiệu về nguyên lý bù trừ

Giả sử có 2 tập A và B, khi đó:

- Số các phần tử trong hợp của hai tập A và B được tính:
  - ***Tổng*** các phần tử của tập A và tập B
  - ***Trừ*** số phần tử của giao tập A và B.
- Công thức: **$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$**.

3.2. Nguyên lý Bù trừ (2/9)

Ví dụ 1 về nguyên lý bù trừ:

- Trong kỳ thi học sinh giỏi cấp thành phố, một trường PTCS có *20 học sinh đạt giải môn Toán*, *11 học sinh đạt giải môn Văn*, trong số đó có *7 em đạt giải đồng thời cả Văn và Toán*. Hỏi trường có bao nhiêu học sinh đạt giải học sinh giỏi?

Lời giải:

- A là tập các học sinh đạt giải môn Toán.
- B là tập các học sinh đạt giải môn Văn.
- Tổng số học sinh đạt giải của trường: $N(A \cup B)$.
- Số các học sinh đạt giải cả hai môn Văn và Toán: $N(A \cap B)$.
- Do vậy,

$$\mathbf{N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 20 + 11 - 7 = 24}$$

3.2. Nguyên lý Bù trừ (3/9)

Ví dụ 2 về nguyên lý bù trừ:

- Xác định số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 chia hết cho 9 hoặc 11?

Lời giải:

- A: tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 chia hết cho 9.
- B: tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 chia hết cho 11.
- $A \cup B$: tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 chia hết cho 9 hoặc 11
- $A \cap B$: tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 chia hết cho cả 9 và 11.
- Lực lượng của A: [1000/9].
- Lực lượng của B: [1000/11].
- 9 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên số nguyên chia hết cho cả 7 và 11 là số nguyên chia hết cho 9.11=99. Số các số này là [1000/99].
- Từ đó ta có: **$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$**

$$= \left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{99} \right\rfloor = 111 + 90 - 10 = 191$$

3.2. Nguyên lý Bù trừ (4/9)

Ví dụ 3 về nguyên lý bù trừ:

- Giả sử một trường đại học có 1503 sinh viên năm thứ nhất. Trong số đó có 453 sinh viên tham gia Câu lạc bộ (CLB) tin học, 267 sinh viên tham gia CLB toán học và 99 sinh viên tham gia cả hai CLB. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không tham gia cả CLB toán học cũng như CLB tin học?

Lời giải:

- Số sinh viên không tham gia CLB toán học cũng như CLB tin học sẽ bằng tổng số sinh viên trừ đi số sinh viên tham gia một trong hai CLB.
- A: tập các sinh viên năm thứ nhất tham gia CLB tin học.
- B: tập các sinh viên tham gia CLB toán học.
- Khi đó ta có $N(A) = 453$, $N(B) = 267$ và $N(A \cap B) = 99$. Số sinh viên tham gia hoặc CLB tin học hoặc CLB toán học là:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 453 + 267 - 99 = 621.$$

- Do vậy có $1503 - 621 = 882$ sinh viên năm thứ nhất không tham gia CLB toán cũng như tin học.

3.2. Nguyên lý Bù trừ (5/9)

3.2.2. Nguyên lý bù trừ:

- Cho A_1, A_2, …, A_n là các tập hữu hạn. Khi đó

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots.$$

$$+ (-1)^{n+1} N\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

3.2. Nguyên lý Bù trừ (6/9)

3.2.2. Nguyên lý bù trừ:

Hệ quả:

- Cho A_k , $1 \leq k \leq m$ là các tập con của tập hữu hạn X thoả mãn tính chất k nào đó, khi đó số phần tử của X không thoả mãn bất cứ tính chất A_k nào là:

$$N(X) - N(A_1 \cup A_2 \cup ... A_m) = N - N_1 + N_2 - .... + (-1)^m N_m$$

- Trong đó N_k là số các phần tử của X thoả mãn k tính chất lấy từ m tính chất đã cho.

3.2. Nguyên lý Bù trừ (7/9)

3.2.2. Nguyên lý bù trừ:

Ví dụ:

- Với trường hợp có 3 tập A, B, C.
- Khi đó, số phần tử của hợp 3 tập trên được tính:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C)$$

$$- N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C)$$

$$+ N(A \cap B \cap C)$$

3.2. Nguyên lý Bù trừ (8/9)

Ví dụ:

- Biết rằng có 1 202 sinh viên học tiếng Anh.
- 813 sinh viên học tiếng Pháp.
- 114 sinh viên học tiếng Nga.
- 103 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp.
- 23 học cả tiếng Anh và tiếng Nga.
- 14 học cả tiếng Pháp và tiếng Nga.
- Nếu tất cả 2 092 sinh viên đều theo học ít nhất một ngoại ngữ, thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?

3.2. Nguyên lý Bù trừ (9/9)

Lời giải:

- E: tập các sinh viên học tiếng Anh,
- F: tập các sinh viên học tiếng Pháp,
- R: tập các sinh viên học tiếng Nga.
- Khi đó:
- $N(E) = 1202$; $N(F) = 813$; $N(R) = 114$; $N(E \cap F) = 103$; $N(E \cap R) = 23$; $N(F \cap R) = 14$

  $$N(S \cup F \cup R) = 2092.$$

- $N(E \cup F \cup R) = N(E) + N(F) + N(R) - N(E \cap R) - N(E \cap F) - N(F \cap R) + N(E \cap F \cap R)$
- Ta có: $2092 = 1202 + 813 + 114 - 103 - 23 - 14 + N(E \cap F \cap R)$
- Như vậy: $N(E \cap F \cap R) = 3$.
- Do vậy có 3 sinh viên theo học cả ba thứ tiếng.

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (1/13)

- Đối với các bài toán đếm, có thể ứng dụng nguyên lý Bù trừ để đưa về các bài toán đơn giản hơn.
- Trong phần này xem xét một số bài toán:
  - ***Bài toán bỏ thư***.
  - ***Bài toán sắp khách Lucas***.

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (2/13)

Bài toán bỏ thư:

- Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ.
- Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì.
- Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu?

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (3/13)

Lời giải bài toán bỏ thư:

- Có tất cả $\boldsymbol{n}!$ cách bỏ thư.
- Cần tìm số cách bỏ thư sao cho không có lá thư nào đúng địa chỉ.
- Gọi X là tập hợp tất cả các cách bỏ thư và $\boldsymbol{A_k}$ là tính chất lá thư thứ $\boldsymbol{k}$ bỏ đúng địa chỉ.
- Theo hệ quả của nguyên lý bù trừ ta có:

$$\overline{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{N_1} + \boldsymbol{N_2} + \cdots + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{N_n}$$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (4/13)

Lời giải bài toán bỏ thư (tiếp):

- Giả sử, lấy k lá thư trong số n lá thư và đúng địa chỉ, khi đó, số cách: C_n^k
- Có $(n-k)!$ cách bỏ để k lá này đúng địa chỉ.
- Vậy: $N_k = C_n^k(n-k)! = \frac{n!}{k!}$
- Hay: $\bar{N} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$
- Do đó, xác suất: $\frac{\bar{N}}{N} = 1 - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (5/13)

Bài toán sắp khách của Lucas:

- Có một bàn tròn xung quanh có ***2n*** ghế.
- Cần sắp chỗ cho ***n*** cặp vợ chồng sao cho các ông ngồi xen kẽ các bà và không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau.
- Hỏi tất cả bao nhiêu cách xếp?

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (6/13)

Bổ đề 1:

- Có bao nhiêu cách lấy ra ***k*** phần tử trong n phần tử xếp trên đường thẳng sao cho ***không có 2 phần tử kề nhau*** cùng được lấy ra?

Lời giải:

- Khi lấy ra ***k*** phần tử ta còn ***n-k*** phần tử.
- Giữa ***n-k*** phần tử này có ***n-k+1*** khoảng trống (kể cả 2 đầu).
- Mỗi cách lấy ra ***k*** khoảng từ các khoảng này sẽ tương ứng với một cách chọn ***k*** phần tử thoả mãn yêu cầu đã nêu.
- Vậy số cách cần tìm là:

$$C_{n-k+1}^{k}$$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (7/13)

Bổ đề 2:

- Có bao nhiêu cách lấy ra ***k*** phần tử trong ***n*** phần tử xếp trên đường tròn sao cho không có ***2 phần tử kề nhau*** cùng được lấy ra?

Lời giải:

- Giả sử tập các phần tử trên là $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, cố định phần tử a_1 trong ***n*** phần tử. Chia các cách lấy thành 2 lớp bài toán:
  - ***Lớp 1***. Các cách mà a_1 được chọn khi đó 2 phần tử kề a_1 là a_2 và a_n sẽ không được chọn và ta phải lấy ***k-1*** phần tử từ ***n-3*** phần tử còn lại. Các phần tử này được xem như trên đường thẳng. Theo bổ đề 1 số cách thuộc lớp này là:

$$\boldsymbol{C_{n-k-1}^{k-1}}$$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (8/13)

Lời giải (tiếp):

- ***Lớp 2***. Các cách mà a_1 không được chọn, khi đó bỏ a_1 đi ta đưa về bài toán lấy ***k*** phần tử từ ***n-1*** phần tử xếp trên đường thẳng. theo bổ đề 1 số cách thuộc lớp này là

$$C_{n-k}^{k}$$

- Vậy theo nguyên lý cộng số cách cần tìm là:

$$C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^{k} = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k}$$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (9/13)

Lời giải bài toán Lucas:

- Gọi số cách phải tìm là M_n.
- Thực hiện việc xếp cho các bà trước (cứ một ghế xếp còn một ghế để trống dành cho các ông).
- Số cách xếp cho các bà là: $2 \times n!$.
- Gọi số cách xếp các ông ứng với một cách xếp các bà là U_n ta được số cách xếp là :

$$M_n = 2 \times n! \times U_n$$

- Vậy, $U_n = ?$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (10/13)

Lời giải bài toán Lucas (tiếp):

- Đánh số các bà (đã xếp) từ 1 đến n.
- Đánh số các ông tương ứng với các bà (ông i là chồng bà i).
- Đánh số các ghế trống theo nguyên tắc:
  - ghế số i nằm giữa bà i và bà i+1 (chú ý vì sắp tròn: n+1=1).
- Mỗi cách xếp các ông được biểu diễn bằng một phép thế φ từ tập (1,2,...,n) với qui ước $\varphi(i)=j$ có nghĩa là ghế i được xếp cho ông j.
- Theo đầu bài, φ phải thoả mãn $\varphi(i)\neq i$ và $\varphi(i) \neq i+1$(*).
- Như vậy U_n là số tất cả các phép thế φ thoả mãn điều kiện (*).

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (11/13)

Lời giải bài toán Lucas (tiếp):

- Xét tập hợp tất cả các phép thế φ của {1,2,...,n}.
- Trên tập này, gọi:

  P_i là tính chất $\varphi(i) = i$ và

  Q_i là tính chất $\varphi(i) = i + 1$.
- Như vậy, ta có 2n tính chất. Theo nguyên lý bù trừ, ta có:

$$U_n = \overline{N} = n! - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots$$

- Trong đó N_k: tổng số tất cả các phép thế thoả mãn k tính chất lấy từ 2n tính chất đang xét.
- Cần tính $N_k =?$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (12/13)

Lời giải bài toán Lucas (tiếp):

- Chú ý: không thể xảy ra đồng thời thoả mãn P_i và Q_i hoặc đồng thời thoả mãn P_{i+1} và Q_i.
- Như vậy, trong các cách lấy ra k tính chất từ 2n tính chất đang xét cần thêm vào điều kiện các P_i và Q_i hoặc P_{i+1} và Q_i không được đồng thời có mặt.
- Gọi số các cách này là g(2n;k) (nói riêng g(2n,k)=0 khi k>n).
- Với mỗi cách lấy ra k tính chất như vậy ($k \leq n$) ta có (n-k)! phép thế thoả mãn chúng.
- Từ đó nhận được:

$$\boldsymbol{N_k = g(2n,k) \times (n-k)!} \text{ và}$$

$$\boldsymbol{U_n = n! - g(2n,1) \times (n-1)! + g(2n,2) \times (n-2)! + \cdots + (-1)^n g(2n,n)}$$

3.3. Biến đổi về bài toán đơn giản (13/13)

Lời giải bài toán Lucas (tiếp):

- Tính g(2n,k), k=1,2,...,n?
- Xếp 2n tính chất đang xét trên một vòng tròn theo thứ tự P_1, Q_1, P_2, Q_2,...,P_n, Q_n, ta thấy rằng g(2n,k) chính là số cách lấy ra k phần tử trong 2n phần tử tạo thành vòng tròn sao cho không có 2 phần tử nào kề nhau cùng được lấy ra.
- Theo bổ đề 2 ta nhận được:

$$g(2n,k) = \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^{k}$$

- Vậy:

$$U_n = n! - \frac{2n}{2n-1} C_{2n-1}^{1} + \frac{2n}{2n-2} C_{2n-2}^{2} - \cdots + (-1)^n \frac{2n}{n} C_n^n$$

- Từ đó, tính được: $\mathbf{M_n = 2 \times n! \times U_n}$

3.4. Quan hệ giữa tập hợp và dãy nhị phân (1/5)

3.4.1. Biểu diễn tập con bằng dãy nhị phân

- Cho A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là một tập hữu hạn,
- Giả sử $B \subseteq A$,
- Khi đó mỗi tập B có thể biểu diễn tương ứng một dãy nhị phân S có độ dài n được xây dựng như sau:

$$\boldsymbol{S_i = \begin{cases} 1 \text{ nếu } a_i \in B \\ 0 \text{ nếu } a_i \notin B \end{cases}}$$

3.4. Quan hệ giữa tập hợp và dãy nhị phân (2/5)

Ví dụ:

- Cho A = {1, 3, 4, 6, 7, 10} và B = { 3, 6, 7, 10},
- Khi đó dãy nhị phân tương ứng sẽ là S = 010111.

- Cách biểu diễn trên làm đơn giản hóa khi lập trình.

3.4. Quan hệ giữa tập hợp và dãy nhị phân (3/5)

Xem xét bài toán:

- Cho A là một tập hữu hạn, B_1, B_2 là các tập con của A.
- Khi đó tương ứng với B_1 và B_2 là các dãy nhị phân S_1, S_2.

- ***Xét các phép toán sau***:
- ***Phép hợp:***
  - Hợp của B_1và B_2 tương ứng là phép cộng logic các phần tử tương ứng của hai dãy S_1, S_2.
  - Ví dụ:
    - Cho A = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ và
    - $B_1=\{a_4, a_5, a_7\}$, ta có $S_1=0001101$
    - $B_2 =\{a_1, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, ta có $S_2=1011110$
    - $S_1 \oplus S_2 =1011111$ tương ứng là tập C = $\{a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\} = B_1 \cup B_2$

3.4. Quan hệ giữa tập hợp và dãy nhị phân (4/5)

- ***Phép giao:***
  - Giao của B_1 và B_2 tương ứng là phép nhân logic các phần tử tương ứng của hai dãy S_1, S_2.
  - Ví dụ:
  - $S_1 \otimes S_2$ =0001100 tương ứng là tập C = $\{a_4, a_5\} = B_1 \cap B_2$
- ***Lấy phần bù:***
  - Phần bù B_1 trong A tương ứng dãy nhị phân là phần bù của S_1.
  - Ví dụ:
  - S_1=0001100 suy ra =1110011 tức là $\{a_1, a_2, a_3, a_6, a_7\}$

3.4. Quan hệ giữa tập hợp và dãy nhị phân (5/5)

3.4.2. Các bài toán đếm

- Cho A = {a_1, a_2,. . .,a_n} là một tập hữu hạn, từ phương pháp biểu diễn các tập con là các dãy nhị phân ta có các kết quả sau:

1. Số tập con của tập A có đúng k phần tử bằng số dãy nhị phân có độ dài n mà trong đó có đúng k phần tử "1" là *tổ hợp chập k từ n phần tử* C_n^k

2. Tổng số các tập con của A (kể cả tập rỗng và A) bằng số dãy nhị phân có độ dài n là:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

3. Tổng số các tập con có số chẵn phần tử của tập A bằng tổng số các tập con có số lẻ phần tử.

3.5. Hệ thức truy hồi (1/26)

3.5.1. Khái niệm và các ví dụ

- ***Ví dụ mở đầu:***
  - Trong một quần thể vi sinh vật số lượng các cá thể tăng gấp đôi sau mỗi giờ. Sau 4 giờ số lượng chúng là bao nhiêu, nếu ban đầu có tất cả 5 cá thể ?
- ***Giải:***
  - Ta giả sử số vi sinh vật sau n giờ là a_n.
  - Vì số vi sinh vật tăng gấp đôi sau mỗi giờ nên ta có quan hệ $a_n = 2a_{n-1}$ với n là số nguyên dương tuỳ ý, với điều kiện ban đầu $a_0 = 5$.
  - Từ đây ta có thể dễ dàng xác định duy nhất a_n đối với mọi n không âm.
  - Cụ thể, với n=4 ta có: $a_4 = 2a_3 = 2.2a_2 = 2.2.2a_1 = 2.2.2.2a_0 = 2^4.5=80$.

3.5. Hệ thức truy hồi (2/26)

3.5.1. Khái niệm và các ví dụ

- ***Khái niệm:***
  - Xét dãy số $\{a_n\}$.
  - Nếu có một công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ với $\forall$ n nguyên và $n \geq n_0$, trong đó n_0 là nguyên không âm, thì công thức đó được gọi hệ thức truy hồi (công thức truy hồi, biểu thức truy hồi) đối với dãy $\{a_n\}$.
  - Dãy số $\{a_n\}$ được gọi là lời giải hay là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thoả mãn hệ thức truy hồi này.

3.5. Hệ thức truy hồi (3/26)

3.5.1. Khái niệm và các ví dụ

- Ví dụ:
  - Cho $\{a_n\}$ là dãy số thoả mãn hệ thức truy hồi:

    $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với n = 2, 3, 4, …, và

    giả sử $a_0 = 5$, $a_1 = 9$. Tìm a_2 và a_3 ?
  - Lời giải:

    Từ hệ thức truy hồi ta có

    $a_2 = a_1 - a_0 = 9 - 5 = 4$ và

    $a_3 = a_2 - a_1 = 4 - 9 = -5$.

3.5. Hệ thức truy hồi (4/26)

3.5.1. Khái niệm và các ví dụ

- Ví dụ:
  - Dãy $\{a_n\}$, với $a_n = 3n$ với mọi n nguyên không âm có là lời giải của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với n = 2, 3, 4, …, hay không? Câu hỏi cũng như vậy đối với $a_n = 2^n$ và $a_n = 5$.
  - Lời giải:
    - Giả sử $a_n = 3n$ với mọi n nguyên không âm. Khi đó với $n \geq 2$ ta thấy rằng $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n - 1)] - 3(n-2) = 3n$. Do đó, $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 3n$ là lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.
    - Giả sử, $a_n = 2^n$ với mọi n nguyên không âm. Rõ ràng $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ và $a_2 = 4$. Vì $a_2 \neq 2a_1 - a_0 = 2.2 - 1 = 3$, do vậy dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 2^n$ không là một lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.
    - Giả sử, $a_n = 5$ với mọi n nguyên không âm. Khi đó với $n \geq 2$ ta thấy $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2.5 - 5 = 5$. Do đó, dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 5$ là lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

3.5. Hệ thức truy hồi (5/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- ***Định nghĩa:***
  - Hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

trong đó c_1, c_2, …, c_k là các số thực và $c_k \neq 0$, được gọi là *hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k* với hệ số hằng số.

- Nếu cho trước k điều kiện đầu: $a_0=C_0$, $a_1=C_1,\ldots,a_{k-1}=C_{k-1}$, thì theo nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học, dãy số thoả mãn hệ thức truy hồi nêu trong định nghĩa sẽ được xác định duy nhất.

3.5. Hệ thức truy hồi (6/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- ***Một số dạng hệ thức truy hồi:***
  - Hệ thức truy hồi $P_n = (1,08)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 1.
  - Hệ thức truy hồi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2.
  - Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 5.
  - Hệ thức $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ không là hệ thức truy hồi tuyến tính.
  - Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ là không thuần nhất.
  - Hệ thức truy hồi $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng số.

3.5. Hệ thức truy hồi (7/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- Phương pháp giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất:
  - Tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
  - Ta có $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n= c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ khi và chỉ khi:

$$r^n=c_1r^{n-1}+ c_2r^{n-2}+\ldots+ c_kr^{n-k}$$

  - Chia cả hai vế cho r^{n-k} và trừ vế phải cho vế trái chúng ta nhận được phương trình tương đương:

$$r^k-c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

  - Vậy,
    - dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là nghiệm khi và chỉ khi r là nghiệm của phương trình đại số trên.
    - Phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi.

3.5. Hệ thức truy hồi (8/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- ***Định lý 01:***
  - Cho c_1, c_2 là hai số thực.
  - Giả sử phương trình $\mathbf{r^2 - c_1 r - c_2 = 0}$ có hai nghiệm phân biệt r_1 và r_2.
  - Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$\mathbf{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}}$$

  khi và chỉ khi $\mathbf{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$ với n = 1, 2, … trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

3.5. Hệ thức truy hồi (9/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- ***Định lý 02:***
  - Cho c_1 và c_2 là các số thực và $c_2 \neq 0$.
  - Giả sử $\mathbf{r^2 - c_1 r - c_2 = 0}$ chỉ có một nghiệm r_0.
  - Dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$\mathbf{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}}$$

khi và chỉ khi $\mathbf{a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n}$ với n = 0, 1, 2, … Trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

3.5. Hệ thức truy hồi (10/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- ***Định lý 03:***
  - Cho $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực.
  - Giả sử rằng phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
  - Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$\mathbf{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}}$$

khi và chỉ khi $\mathbf{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n}$ với n = 0, 1, 2, …, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các hằng số.

3.5. Hệ thức truy hồi (11/26)

- ***Ví dụ 01:***
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

với $a_0 = 2$, $a_1 = 7$

3.5. Hệ thức truy hồi (12/26)

- ***Lời giải ví dụ 01:***
  - Phương trình đặc trưng của bài toán có dạng $r^2 - r - 2 = 0$.
  - Nghiệm của nó là $r = 2$ và $r = -1$.
  - Vậy dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi

    $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$ với các hằng số α_1 và α_2 nào đó.
  - Từ các điều kiện đầu ta suy ra:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1).$$

  - Ta được $\alpha_1 = 3$ và $\alpha_2 = -1$.
  - Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi và điều kiện đầu là dãy $\{a_n\}$:

$$\mathbf{a_n = 3.2^n - (-1)^n.}$$

3.5. Hệ thức truy hồi (13/26)

- ***Ví dụ 02:***
  - Tìm công thức tường minh của các số Fibonaci.

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$$

3.5. Hệ thức truy hồi (14/26)

- ***Lời giải ví dụ 02:***
  - Phương trình đặc trưng có dạng r^2-r-1=0.
  - Nghiệm đặc trưng là: $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
  - Các số Fibonaci được xác định: $f_n = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
  - Vậy nghiệm có dạng: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
  - Với $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

3.5. Hệ thức truy hồi (15/26)

- ***Ví dụ 03:***
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

với các điều kiện đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 6$.

3.5. Hệ thức truy hồi (16/26)

- ***Lời giải ví dụ 03:***
  - Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r = 3$.
  - Do đó nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n3^n,$$

  - Để xác định các hằng số α_1 và α_2 , ta sử dụng các điều kiện đầu:

$$a_0 = 1 = \alpha_1.$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3.$$

  - Ta có được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$.
  - Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi thoả mãn các điều kiện đầu đã cho là:

$$\mathbf{a_n = 3^n + n3^n.}$$

3.5. Hệ thức truy hồi (17/26)

- ***Ví dụ 04:***
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

  với điều kiện đầu $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$.

3.5. Hệ thức truy hồi (18/26)

- ***Lời giải ví dụ 04:***
  - Có thể thấy $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ là 3 nghiệm đặc trưng phân biệt của đa thức đặc trưng tương ứng với hệ thức truy hồi:

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6=0$$

  - Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n.$$

  - Để tìm các hằng số α_1, α_2, α_3, ta dùng các điều kiện đầu:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \alpha_3 3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 4 + \alpha_3 9.$$

  - Ta nhận được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$.
  - Nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này thoả mãn các điều kiện ban đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$:

$$\mathbf{a_n = 1 - 2^n + 2.3^n.}$$

3.5. Hệ thức truy hồi (19/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- ***Định lý 04:***
  - Cho $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực.
  - Giả sử rằng phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có t nghiệm $r_1, r_2, \ldots, r_t$ lặp lần lượt $m_1, m_2, \ldots, m_t$ với

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$$

  - Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$\mathbf{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}}$$

khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} a_n = {} & \left(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}\right) r_1^n + \\ & \left(\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}\right) r_2^n + \\ & + \ldots + \\ & \left(\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}\right) r_t^n \end{aligned}$$

Với n = 0, 1, 2, …, trong đó $\alpha_{i,j}$ là các hằng số.

3.5. Hệ thức truy hồi (20/26)

- ***Ví dụ 05:***
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

với điều kiện đầu $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$.

3.5. Hệ thức truy hồi (21/26)

- ***Lời giải ví dụ 05:***
  - Có thể thấy $r = -1$ là nghiệm lặp 3 của đa thức đặc trưng tương ứng với hệ thức truy hồi:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

  - Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

  - Để tìm các hằng số $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, ta dùng các điều kiện đầu:

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2}$$

$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}.$$

  - Ta nhận được $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$, $\alpha_{1,2} = -2$.
  - Nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này thoả mãn các điều kiện ban đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$:

$$\mathbf{a_n = (1 + 3n - 2n^2)\,(-1)^n.}$$

3.5. Hệ thức truy hồi (22/26)

3.5.2. Giải các hệ thức truy hồi:

- ***Định lý 05:***
  - Với hệ phương trình hồi quy không thuần nhất có dạng:
  - $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + F(n)$
  - Khi đó nghiệm có dạng: **$\{ a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$**
  - Trong đó:
    - $a_n^{(h)}$: nghiệm của $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$
    - $a_n^{(p)}$: nghiệm riêng phương trình, có dạng hồi quy:

$$a_n^{(p)} = c_1a_{n-1}^{(p)} + c_2a_{n-2}^{(p)} + \ldots + c_ka_{n-k}^{(p)} + F(n)$$

3.5. Hệ thức truy hồi (23/26)

- ***Ví dụ 06:***
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n$$

  với điều kiện đầu $a_1 = 3$

3.5. Hệ thức truy hồi (24/26)

- ***Lời giải ví dụ 06:***
  - Ta có $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$.
  - Với F(n) = 2n, nên nghiệm riêng có dạng cn + d.
  - Hơn nữa, nghiệm này thỏa hệ hồi quy, nên ta có:

$$cn + d = 3(c(n-1)+d) + 2n$$

$$\rightarrow (2+2c)n + (2d - 3c) = 0 \text{ với mọi } n$$

$$\rightarrow c = -1;\ d = -3/2$$

$$\text{Vậy } a_n^{(p)} = -\ n - 3/2$$

Nghiệm của hệ hồi quy:

$$\mathbf{a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -\ n - 3/2 + \alpha 3^n.}$$

Lưu ý: tự giải và tìm α.

3.5. Hệ thức truy hồi (25/26)

- ***Ví dụ 07:***
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$$

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

3.5. Hệ thức truy hồi (26/26)

- ***Lời giải ví dụ 07:***
  - Ta có $a_n^{(h)} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$.
  - Với $F(n) = 7^n$, nên nghiệm riêng có dạng $C.7^n$.
  - Hơn nữa, nghiệm này thỏa hệ hồi quy, nên ta có:

$$C.7^n = 5.C.7^{n-1} - 6.C.7^{n-2} + 7^n.$$

$$\rightarrow C = 49/20$$

$$\rightarrow \text{Vậy } a_n^{(p)} = (49/20)\ 7^n.$$

Nghiệm của hệ hồi quy:

$$\mathbf{a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (49/20)\ 7^n + \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n.}$$

Lưu ý: tự giải và tìm α_1 và α_2.