

TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 1: KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Lý thuyết tổ hợp

NỘI DUNG

1. Khái niệm.
2. Chỉnh hợp lặp.
3. Chỉnh hợp không lặp.
4. Hoán vị.
5. Tổ hợp.
6. Tổ hợp lặp.
7. Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau.
8. Một số công thức tổ hợp.
9. Một số ví dụ.

1. Khái niệm

- **Lý thuyết tổ hợp nghiên cứu:**
 - Các cấu hình tổ hợp,
 - Các phương pháp lựa chọn phần tử hoặc bộ các phần tử trong tập hợp hữu hạn theo các cách khác nhau.
- \Rightarrow Là cơ sở để xây dựng *thuật toán vét cạn*, *các thuật toán sinh phần tử mới*, *các thuật toán lựa chọn phương án tối ưu*, v.v...
- **Một số bài toán:**
 - Các bài toán đếm,
 - Các bài toán về sự tồn tại,
 - Các phương pháp biểu diễn các cấu hình tổ hợp...

2. Chỉnh hợp lặp (1/3)

- **Khái niệm:**

- Chỉnh hợp lặp chập **k** của tập **n** phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự **k** phần tử lấy từ tập gồm **n** phần tử đã cho, mỗi phần tử có thể được lấy lặp lại.

- **Công thức chỉnh hợp lặp:** $A_n^k = n^k$

- **Ví dụ 1:**

- Tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Các bộ $(1, 1, 2)$; $(1, 2, 1)$; $(2, 3, 5)$ và $(2, 3, 2)$

là các chỉnh hợp lặp chập 3 từ 5 phần tử.

2. Chính hợp lặp (2/3)

- **Ví dụ 2.**

- Từ tập $\Omega = \{ a, b, c \}$ có thể đặt được bao nhiêu tên biến có độ dài 4 ký tự?
- Suy luận: Mỗi tên biến có 4 ký tự được chọn từ tập Ω là một bộ 4 phần tử được lấy từ tập Ω vậy có số tên biến có 4 ký tự được chọn từ Ω là $N(\Omega) \times N(\Omega) \times N(\Omega) \times N(\Omega) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

- **Ví dụ 3.**

- Các dãy nhị phân có độ dài n là một chính hợp lặp chập n từ hai phần tử $\{0, 1\}$. Vậy theo công thức chính hợp lặp chập n từ 2 phần tử là : 2^n .

2. Chỉnh hợp lặp (3/3)

- **Ví dụ 4.**

- Bộ môn Khoa học máy tính có 3 giáo viên là Anh, Bình, Dũng ký hiệu là (A, B, D). Có bao nhiêu cách sắp xếp giáo viên dạy hai môn học trong một buổi?
- Suy luận: Mỗi cách sắp xếp giáo viên là chỉnh hợp lặp chập 2 từ 3 phần tử. Theo công thức nêu trên ta có số phương án xếp là $3^2 = 9$. Cụ thể các phương án đó là: (A,A) (B,B) (D,D) (A,B) (A,D) (B,D) (B,A) (D,A) (D,B).

3. Chỉnh hợp không lặp (1/3)

- **Khái niệm:**

- Chỉnh hợp không lặp chập **k** từ **n** phần tử (gọi tắt là chỉnh hợp chập **k**) là một cách sắp xếp có thứ tự **k** phần tử của tập **n** phần tử, mỗi phần tử không được lấy lặp lại.

- **Công thức:**

$$P_n^k = n.(n-1)(n-2).....(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Chỉnh hợp không lặp (2/3)

- **Ví dụ 5.**

- Tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ các bộ $(2, 3, 5)$; $(2, 5, 3)$ là các chỉnh hợp không lặp chập 3 từ 5 phần tử, còn các bộ $(1, 1, 2)$; $(1, 2, 1)$; và $(2, 3, 2)$ không phải là chỉnh hợp không lặp chập 3 từ 5 phần tử, nhưng mặt khác đó lại là chỉnh hợp lặp chập 3 từ 5 phần tử.

- **Ví dụ 6.**

- Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau được chọn từ các số sau $\{1, 3, 4, 5, 7, 6\}$?
- Suy luận: Ký hiệu số có bốn chữ số là $a_1a_2a_3a_4$. Ta có 6 khả năng để chọn số a_1 , sau khi chọn a_1 ta chỉ có 5 khả năng chọn chữ số a_2 , sau đó còn 4 khả năng chọn chữ số a_3 và cuối cùng chỉ còn 3 khả năng chọn chữ số a_4 . Vậy tất cả các số có 4 chữ số khác nhau có thể có là $S = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

3. Chỉnh hợp không lặp (3/3)

- **Ví dụ 7.**

- Có bốn người thi đấu cờ vua là Bình, Cường, Dũng, Kiên tranh hai vị trí nhất, nhì, hãy tính xác suất để Cường đoạt giải nhất ?
- Suy luận: Gọi tập kỳ thủ là $\Omega = \{B, C, D, K\}$. Mỗi khả năng phân chia giải là một chỉnh hợp không lặp chập 2 từ 4 phần tử. Vậy theo công thức ta có $S = 4.3 = 12$. Các khả năng đó là:

$(B, C) (B, D) (B, K) (C, B) (C, D) (C, K)$

$(D, B) (D, C) (D, K) (K, B) (K, C) (K, D)$

Các phương án mà Cường đoạt giải ta có thể chọn như sau ghép Cường với một trong 3 người còn lại, số phương án đó là 3: $(C, B) (C, D) (C, K)$. Vậy xác suất để Cường đoạt giải nhất là

$$P = 3 / 12 = 25 \%$$

4. Hoán vị (1/4)

- **Khái niệm:**

- Hoán vị của **n** phần tử khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự **n** phần tử đó.

- **Công thức:**

$$P_n = n.(n-1)(n-2).....1 = n!$$

4. Hoán vị (2/4)

Ví dụ:

- Có bốn người rủ nhau đi chụp ảnh là Anh, Bắc, Cúc, Dương. Hãy tính xem có bao nhiêu kiểu ảnh chụp mà tất cả bốn người đứng thành một hàng ?
- Suy luận: Ký hiệu tên của bốn người là $\{A, B, C, D\}$. Đầu tiên ta có 4 khả năng chọn người đứng bên trái cùng, sau khi chọn người đứng trái ta có 3 khả năng chọn người đứng kế theo, tiếp đó chỉ có thể chọn được 2 khả năng người còn lại, như vậy theo nguyên lý nhân ta có số kiểu ảnh có thể chụp khác nhau về vị trí đứng là $4.3.2.1 = 4! = 24$. Ta có thể liệt kê các kiểu ảnh là:

(A, B, C, D) (A, B, D, C) (A, C, B, D) (A, C, D, B) (A, D, B, C) (A, D, C, B)
(B, A, C, D) (B, A, D, C) (B, C, A, D) (B, C, D, A) (B, D, A, C) (B, D, C, A)
(C, B, A, D) (C, B, D, A) (C, A, B, D) (C, A, D, B) (C, D, B, A) (C, D, A, B)
(D, B, C, A) (D, B, A, C) (D, C, B, A) (D, C, A, B) (D, A, B, C) (D, A, C, B)

4. Hoán vị (3/4)

Ví dụ:

- Có 5 phong bì gửi và 5 bưu ảnh gửi cho 5 người, có bao nhiêu phương án lựa chọn để gửi bưu ảnh cho 5 người trên ?
- Suy luận: Mỗi phương án lựa chọn bưu ảnh bỏ phong bì để gửi là một hoán vị từ 5 phần tử, vậy số phương án sẽ là $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

4. Hoán vị (4/4)

Ví dụ:

- Giả sử một người bán hàng rong định đi bán hàng tại 8 thành phố. Người này bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một thành phố nào đó, nhưng có thể đến bảy thành phố kia theo thứ tự bất kỳ nào mà người đó muốn. Hỏi người này có thể đi qua tất cả các thành phố này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?
- Suy luận: Vì thành phố đầu tiên đã được xác định, còn 7 thành phố còn lại có thể đi theo thứ tự tùy ý, nên số lộ trình khác nhau chính là số hoán vị của tập gồm 7 phần tử. Do đó có $7! = 5\,040$ cách để người bán hàng chọn hành trình của mình. Nếu muốn tìm lộ trình ngắn nhất thì chị ta phải tính tổng quãng đường cần đi cho mỗi lộ trình có thể, tức là tổng cộng phải tính cho 5 040 lộ trình.

5. Tổ hợp (1/4)

- **Khái niệm:**

- Tổ hợp chập **k** từ **n** phần tử là cách chọn không phân biệt thứ tự **k** phần tử lấy từ tập **n** phần tử đã cho, mỗi phần tử không được lấy lặp lại.

- **Công thức:**

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Từ công thức trên có thể thấy:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^{n-k}$$

5. Tổ hợp (2/4)

- **Ví dụ:**

- Với tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thì các bộ $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$ là các tổ hợp chập 3 từ 5 phần tử, còn các bộ $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 2)$ không phải là tổ hợp chập 3 từ 5 phần tử đã cho. Theo định nghĩa hai bộ $(2, 3, 5)$, $(3, 5, 2)$ chỉ được tính là một tổ hợp chập 3.

5. Tổ hợp (3/4)

- **Ví dụ:**

- Có 5 sinh viên là Anh, Bắc, Cúc, Dương, Giang của Khoa CNTT. Chủ nhiệm khoa muốn chọn để thành lập một tổ 3 người để thực hiện một đề tài khoa học. Hỏi có bao nhiêu phương án để thành lập tổ 3 người đó?
- Suy luận: Ta ký hiệu tên của các sinh viên là A, B, C, D, G. Các phương án thành lập tổ có thể là tổ hợp chập 3 của tập 5 phần tử đó. Cụ thể là:

(A, B, C) (A, B, D) (A, B, G) (A, C, D) (A, D, G)

(B, C, D) (B, C, G) (B, D, G) (C, D, G) (A, C, G)

Như vậy có tất cả 10 phương án lựa chọn để lập tổ 3 người

5. Tổ hợp (4/4)

- **Ví dụ:**

- Có 12 đội bóng tham dự giải chuyên nghiệp quốc gia, các đội thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi có bao nhiêu trận đấu được tổ chức ?
- Suy luận: Mỗi trận đấu là một cặp 2 đội được chọn từ 12 đội đã cho, không kể đến thứ tự và phải khác nhau, vậy số trận đấu là tổ hợp chập 2 từ 12 :

$$12!/(10!.2!) = 66 \text{ trận}$$

6. Tổ hợp lặp (1/5)

- **Khái niệm:**

- Tổ hợp lặp chập **k** từ **n** phần tử là một bộ gồm **k** phần tử không phân biệt thứ tự, mỗi phần tử có thể được lấy lặp lại từ **n** phần tử đã cho.

- **Công thức:**

$$R_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

6. Tổ hợp lặp (2/5)

- **Ví dụ:**

- Giả sử trong một đĩa quả có táo, cam, lê mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả bất kỳ từ đĩa này nếu không phân biệt thứ tự các quả được chọn và các quả cùng loại là giống như nhau.
- Suy luận: Mỗi phương án chọn 4 quả từ 3 loại quả theo yêu cầu nêu trên được gọi là một tổ hợp lặp chập 4 từ tập 3 phần tử táo, cam, lê. Có tất cả 15 cách chọn 4 quả như sau:

4 t _o	4 cam	4 l ^a
3 t _o , 1 cam	3 t _o , 1 l ^a	3 cam, 1 t _o
3 cam, 1 l ^a	3 l ^a , 1 t _o	3 l ^a , 1 cam
2 t _o , 2 cam	2 t _o , 2 l ^a	2 cam, 2 l ^a
2 t _o , 1 cam, 1 l ^a	2 cam, 1 t _o , 1 l ^a	2 l ^a , 1 t _o , 1 cam

6. Tổ hợp lặp (3/5)

- **Ví dụ:**

- Có bao nhiêu cách chọn 4 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 2, 5, 10, 20, 50 và tờ 100 ngàn đồng, nếu thứ tự mà các tờ tiền được chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 4 tờ.
- Suy luận:
 - Có 6 loại tiền, chọn 4 tờ, không phân biệt thứ tự và có thể lặp, do đó, số trường hợp là:

$$R_6^4 = C_{6+4-1}^4 = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

6. Tổ hợp lặp (4/5)

- **Ví dụ:**

- Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

- Suy luận:

- Chúng ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2, x_3 phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp chập 11 từ tập gồm 3 phần tử. Theo công thức trên ta có:

$$R_3^{11} = C_{11+3-1}^{11} = C_{13}^{11} = C_{13}^2 = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

6. Tổ hợp lặp (5/5)

- **Ví dụ:**

- Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \text{ sao cho } x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$$

- Suy luận:

- Một nghiệm của phương trình thoả mãn những điều kiện này ứng với một cách chọn 11 phần tử gồm x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2, x_3 phần tử loại 3, trong đó có ít nhất một phần tử loại 1, hai phần tử loại 2 và ba phần tử loại 3.
- Trước tiên ta chọn 1 phần tử loại 1, 2 phần tử loại 2 và 3 phần tử loại 3, sau đó chọn thêm 5 phần tử nữa thuộc 3 loại. Do vậy, trong trường hợp này ta có số nghiệm là:

$$R_3^5 = C_{5+3-1}^5 = C_7^5 = C_7^2 = \frac{7.6}{1.2} = 21$$

7. Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau (1/3)

• Khái niệm:

- Với một số bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó có thể lập luận:
 - Có n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., và n_k phần tử như nhau thuộc loại k .
 - Số cách chọn n_1 chỗ loại 1 là $C_n^{n_1}$
 - Số cách chọn n_2 chỗ loại 2 là $C_{n-n_1}^{n_2}$

• Công thức:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! (n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2! (n-n_1-n_2)!} \dots$$
$$\frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k! 0!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

7. Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau (2/3)

- **Ví dụ:**

- Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS.
- Giải: Từ SUCCESS có 7 chữ cái, trong đó có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do vậy câu trả lời không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được ta nhận thấy có $C(7,3)$ cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống. Khi đó có $C(4,1)$ cách chọn một chỗ cho một chữ U, còn lại 3 chỗ trống. Có thể đặt chữ C bằng $C(3,2)$ cách, và $C(1,1)$ cách đặt chữ E vào xâu. Theo quy tắc nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo được là

$$C_7^3 C_4^1 C_3^2 C_1^1 = \frac{7!4!3!1!}{3!4!1!3!2!1!1!0!} = \frac{7!}{3!2!1!1!0!} = 420$$

7. Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau (3/3)

- **Ví dụ:**

- Có bao nhiêu cách chia những xấp bài 5 quân cho mỗi người trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân.
- Giải:
 - Các đồ vật là 52 quân bài, còn 5 hộp là 4 người chơi (mỗi hộp xếp 5 quân bài) và mặt bàn đặt số quân bài còn lại (32 quân).
 - Vậy số cách là:

$$\frac{52!}{5! 5! 5! 5! 32!}$$

8. Một số công thức tổ hợp

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$

2. $C_n^k = C_n^{n-k}$

3. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

4. $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i}$ (nhị thức Newton)