

# TOÁN RỜI RẠC

## CHƯƠNG I : KHÁI NIỆM CƠ BẢN

### Các phương pháp chứng minh

# CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

## NỘI DUNG

1. Hàm mệnh đề.
2. Các phương pháp chứng minh.
3. Bài tập.

# 1. Hàm mệnh đề (1/6)

## **Khái niệm:**

- Thường gặp các mệnh đề không xác định như:
  - “ $n$  là một số nguyên lẻ” hay
  - “ $k$  là một số nguyên tố ”,...
- Các mệnh đề này về bản chất không phải là một **mệnh đề logic** vì chúng có thể nhận giá trị 1 (đúng) hoặc 0 (sai) tùy vào giá trị của các đại lượng  $n$ ,  $k$ .
- Tuy nhiên, chúng sẽ trở thành các mệnh đề logic nếu  $n$ ,  $k$  được xác định cụ thể.
  - Ví dụ “ 103 là một số nguyên lẻ” đây là mệnh đề logic có giá trị 1,
  - “8 là một số nguyên lẻ” cũng là một mệnh đề logic nhận giá trị 0.

# 1. Hàm mệnh đề (2/6)

## **Định nghĩa.**

**Mệnh đề  $P(n)$**  phụ thuộc vào đại lượng  **$n$**  để có thể trở thành mệnh đề logic ta gọi là **hàm mệnh đề**.

Đại lượng  $n$  gọi là biến, tập hợp  $D$  các giá trị của biến  $n$  để xác định mệnh đề logic  $P(n)$  gọi là miền xác định của hàm mệnh đề  $P(n)$ .

- **Ví dụ:** theo định nghĩa vừa đưa ra ta có thể biểu diễn như sau:
  - $P(n) = \{ n \text{ là một số nguyên lẻ} \}$
  - $Q(k) = \{ k \text{ là một số nguyên tố} \}$
  - $P(n)$  và  $Q(k)$  là những hàm mệnh đề có cùng miền xác định  $D$  là các số nguyên dương (tập các số tự nhiên).

# 1. Hàm mệnh đề (3/6)

## *Ví dụ về hàm mệnh đề:*

- $F_1(x) = \{x^2 + x + 1 > 0\}$ , khi đó miền xác định của  $F_1$  là  $\mathbb{R}$  các số thực.
- $F_2(x) = \{x^2 - x - 6 = 0\}$ , khi đó miền xác định của  $F_2$  là  $\mathbb{R}$  các số thực.
- $S(n) = \{2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1)\}$ , có miền xác định là tập các số nguyên dương.

# 1. Hàm mệnh đề (4/6)

- Với những giá trị nào của biến thì hàm cho giá trị là một mệnh đề logic đúng?
- Trong các phương pháp suy diễn toán học người ta thường nghiên cứu trường hợp  $F(n)$  luôn đúng với mọi giá trị  $n$  nằm trong  $D$ . Biểu diễn mệnh đề như sau :
  - Với mọi  $n$  ta có  $P(n)$
  - Ví dụ: “Với mọi  $n$  ta có  $S(n)$  “ mệnh đề này đồng nghĩa “ Với mọi  $n$  nguyên dương ta có:  $2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1)$ ”
  - “Với mọi  $x$  ta có  $F_1(x)$ ” tức là “ Với mọi  $x$  số thực ta có  $x^2 + x + 1 > 0$  “

# 1. Hàm mệnh đề (5/6)

- Mệnh đề là sai nếu tồn tại giá trị của biến nằm trong miền xác định mà hàm mệnh đề cho ta một mệnh đề logic sai. Trường hợp này ta thường dùng mệnh đề :
  - Tồn tại  $n$  để không có  $P(n)$ .
  - Ví dụ: “Tồn tại số nguyên dương  $n$  để  $n$  không phải là số lẻ”
  - “Tồn tại số nguyên dương  $k$  để  $k$  không phải là số nguyên tố”
  - “Tồn tại giá trị  $x$  để  $x^2 - x - 6 \neq 0$ ”

# 1. Hàm mệnh đề (6/6)

- Cặp phủ định:
  - Phủ định của mệnh đề “ $P(n)$  đúng với mọi  $n$ ” là mệnh đề “*Tồn tại ít nhất một giá trị  $n_1$  sao cho  $P(n_1)$  sai*”.
  - Phủ định của mệnh đề “*Tồn tại  $n_1$  sao cho  $P(n_1)$  đúng*” là mệnh đề “ $P(n)$  sai với mọi  $n$ ”.
- Ví dụ 01:
  - Có mệnh đề “*Với mọi  $n$  chẵn biểu thức  $n^2 + n + 19$  là số nguyên tố*”. Phủ định của nó là “*Tồn tại số  $n$  chẵn sao cho  $n^2 + n + 19$  là hợp số*”.
  - Để chứng minh sai, cần chỉ ra phủ định của nó là đúng. Ví dụ, với  $n = 38$  ta có  $38^2 + 38 + 19 = 38 \cdot 38 + 38 + 19 = 19(2 \cdot 38 + 2 + 1) = 19 \cdot 79$  là hợp số.
- Ví dụ 02:
  - Mệnh đề “*Tồn tại số thực  $x$  sao cho  $x/(x^2+1) = 2/5$* ”, phủ định là “*Với mọi số thực  $x$  ta có  $x/(x^2+1) \neq 2/5$* ”.
  - Để chứng minh mệnh đề đúng ta chỉ ra rằng với  $x = 2$ , có  $2/(2^2 + 1) = 2/5$ .



## 2. Các phương pháp chứng minh (1/)

- **Một số phương pháp chứng minh cơ bản sau:**
  1. *Phương pháp chứng minh trực tiếp.*
  2. *Phương pháp chứng minh lựa chọn.*
  3. *Phương pháp chứng minh phản chứng.*
  4. *Phương pháp chứng minh qui nạp.*

## 2.1. Phương pháp chứng minh trực tiếp

- **Ý tưởng:** Áp dụng phép duy diễn logic (kéo theo) một cách tuần tự theo bước:

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow B$$

- Ví dụ:
  - Giả sử  $x$  và  $y$  là các số thực sao cho  $2x + y = 1$  và  $x - y = -4$ . Chứng minh rằng  $x = -1$  và  $y = 3$ .
  - Chứng minh. Từ  $2x + y = 1$  và  $x - y = -4 \rightarrow (2x + y) + (x - y) = 1 - 4 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = -1$ . Với  $x = -1$  và  $x - y = -4 \rightarrow -1 - y = -4 \rightarrow y = -1 + 4 = 3$
- Ví dụ:
  - Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  biểu thức  $n^2 - n + 5$  là một số lẻ.
  - Chứng minh. Với mọi số nguyên  $n \rightarrow n(n-1)$  là một số chẵn  $\rightarrow n(n-1)+5 = n^2 - n + 5$  là một số lẻ.

## 2.2. Phương pháp chứng minh lựa chọn (1/2)

- **Ý tưởng:** Khi chứng minh một mệnh đề, thực hiện phép suy diễn có thể xảy ra nhiều khả năng khác nhau cần xem xét. Mỗi khả năng chúng ta có thể vận dụng phương pháp chứng minh trực tiếp.
- Ví dụ:
  - Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  biểu thức  $9n^2 + 3n - 2$  là một số chẵn.
  - Chứng minh. Biến đổi biểu thức ta được  $9n^2 + 3n - 2 = (3n + 2)(3n - 1)$ . Xảy ra hai khả năng:
    - Trường hợp 1:  $(3n + 2)$  là một số chẵn  $\rightarrow (3n + 2)(3n - 1)$  là một số chẵn.
    - Trường hợp 2:  $(3n + 2)$  là một số lẻ  $\rightarrow (3n + 2) - 3 = (3n - 1)$  là một số chẵn  $\rightarrow (3n + 2)(3n - 1)$  là một số chẵn.

## 2.2. Phương pháp chứng minh lựa chọn (2/2)

- Ví dụ:

- Chứng minh rằng nếu  $n$  là một số nguyên lẻ thì tồn tại số nguyên  $m$  sao cho  $n = 4m + 1$  hoặc  $n = 4m + 3$ .
- Chứng minh.
  - Vì  $n$  là một số lẻ  $\rightarrow$  tồn tại  $k$  sao cho  $n = 2k + 1$ . Xảy ra hai khả năng:
  - Trường hợp 1.  $k$  là một số chẵn  $\rightarrow$  tồn tại  $m$  sao cho  $k=2m \rightarrow n = 2k + 1 = 2(2m) + 1 = 4m + 1$ .
  - Trường hợp 2.  $k$  là một số lẻ  $\rightarrow$  tồn tại  $m$  sao cho  $k = 2m + 1 \rightarrow n = 2k + 1 = 2(2m+1) + 1 = 4m + 2 + 1 = 4m + 3$ .

## 2.3. Phương pháp chứng minh phản chứng (1/4)

- **Ý tưởng:** Để chứng minh mệnh đề  $A$  đúng ta cần chứng minh rằng phủ định của  $A$  là sai.

- Ví dụ:

- Chứng minh rằng nếu  $x$  là số thực bất kỳ thì  $x^2 - 4x + 17 \neq 0$

- Chứng minh. Ta cần chứng minh mệnh đề sau:

- $A = \{ \text{Với mọi số thực } x: x^2 - 4x + 17 \neq 0 \}$

- Khi đó phủ định của  $A$  sẽ là

$$= \{ \text{Tồn tại số thực } x \text{ sao cho } x^2 - 4x + 17 = 0 \}$$

- Từ phương trình  $x^2 - 4x + 17 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 13 = (x - 2)^2 + 13 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = -13$ , mệnh đề logic sau cùng là sai.

## 2.3. Phương pháp chứng minh phản chứng (2/4)

- Ví dụ:

- Chứng minh rằng hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$2x + 3y - z = 5$$

$$x - 2y + 3z = 7$$

$$x + 5y - 4z = 0$$

- Chứng minh. Ta dùng phép phản chứng, giả sử tồn tại bộ số  $(x_0, y_0, z_0)$  thỏa mãn :

$$2x_0 + 3y_0 - z_0 = 5 \quad (1)$$

$$x_0 - 2y_0 + 3z_0 = 7 \quad (2)$$

$$x_0 + 5y_0 - 4z_0 = 0 \quad (3)$$

Thực hiện phép tính hai vế sau  $(3) + (2) - (1)$  ta có  $(x_0 + 5y_0 - 4z_0) + (x_0 - 2y_0 + 3z_0) - (2x_0 + 3y_0 - z_0) = 0 + 7 - 5 \rightarrow 0 = 2$  mệnh đề sau cùng sai.

- Phép suy diễn phản chứng cũng được xây dựng dựa vào công thức logic sau:

$$A \rightarrow B \equiv \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

Tức là để chứng minh mệnh đề từ A suy ra B ta bắt đầu từ lập luận nếu B sai thì dẫn đến giả thiết A là sai.

## 2.3. Phương pháp chứng minh phản chứng (3/4)

- Ví dụ:
  - Chứng minh rằng nếu  $n$  là số nguyên và  $n^2$  chẵn thì  $n$  chẵn.
  - Vận dụng phép suy diễn phản chứng ta cần chứng minh nếu  $n$  lẻ suy ra  $n^2$  lẻ.
  - Chứng minh. Nếu  $n$  lẻ ta có  $n = 2m + 1$ , từ đó suy ra  $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$  là một số lẻ.
- Một trong các phương pháp dùng để kiểm chứng tính đúng đắn của mệnh đề logic là chỉ ra một trường hợp mệnh đề đó nhận giá trị sai.
- Phương pháp chứng minh bằng cách chỉ ra phản ví dụ, gọi là phương pháp chứng minh phản ví dụ.

## 2.3. Phương pháp chứng minh phản chứng (4/4)

- Ví dụ:
  - Giả sử ta có mệnh đề “ $n^2 + n + 1$  là số nguyên tố với mọi  $n \geq 1$ ”.
  - Để chỉ ra rằng mệnh đề trên sai, ta đưa ra phản ví dụ với  $n = 4$  ta có  $4^2 + 4 + 1 = 16 + 4 + 1 = 21 = 3.7$  là hợp số, vậy mệnh đề đã cho là sai.
- **Chú ý.** Không thể dùng các ví dụ để chứng minh mệnh đề trên đúng, vì với  $n = 1, 2, 3$  biểu thức trên có giá trị lần lượt là 3, 7, 13 đều là các số nguyên tố.



## 2.4. Phương pháp chứng minh qui nạp (1/3)

- **Ý tưởng:** Sử dụng nguyên lý qui nạp toán học.
  - Giả sử rằng mệnh đề hàm  $P(n)$  phụ thuộc vào biến nguyên dương  $n$  với mọi  $n \geq n_0$   $P(n)$  có thể đúng hoặc sai, khi đó nếu:
    - $P(n_0)$  đúng và
    - Từ  $P(i)$  đúng với mọi  $i \leq k$  ta chứng minh được  $P(k+1)$  đúng thì sẽ  $P(n)$  đúng với mọi  $n \geq n_0$ .
- Trong phép chứng minh qui nạp kinh điển, để đưa ra các công thức tổng quát liên quan đến số tự nhiên  $n$  thường vận dụng theo các bước:
  - **Bước 1. Qui nạp không hoàn toàn để tìm và đưa ra công thức  $P(n)$  tổng quát.** Trong bước này ta thường vận dụng các phép thử và suy diễn để dự đoán công thức.
  - **Bước 2. Qui nạp hoàn toàn hay chứng minh công thức  $P(n)$  đã dự đoán trên bằng phương pháp qui nạp.** Bước này thực hiện qua 2 bước nhỏ hơn như trên đã trình bày.

## 2.4. Phương pháp chứng minh qui nạp (2/3)

- Ví dụ: Tính tổng:  $S_n = 1 + 8 + 27 + \dots + n^3$

- **Bước 1. Qui nạp không hoàn toàn.**

- Với  $n = 1$  có  $S_1 = 1$ ,
- Với  $n = 2$  có  $S_2 = 1 + 8 = 9 = (1 + 2)^2 = [2(2+1)/2]^2$ ,
- Với  $n = 3$  có  $S_3 = 1 + 8 + 27 = 36 = (1 + 2 + 3)^2 = [3(3+1)/2]^2, \dots$
- Với  $n = k$  có  $S_k = 1 + 8 + 27 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2 = [k(k+1)/2]^2, \dots$
- Từ đó ta dự đoán  $S_n = [n(n+1)/2]^2$  với mọi  $n \geq 1$  (\*).

- **Bước 2. Qui nạp hoàn toàn**

- Với  $n = 1$  có  $S_1 = 1 = 1^2$ , công thức đã dự đoán là đúng.
- Bây giờ ta giả sử công thức (\*) đúng với  $n \leq k$  tức là  $S_k = [k(k+1)/2]^2$ , xét  $S_{k+1} = [1 + 8 + \dots + k^3] + (k+1)^3 = [k(k+1)/2]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 [k^2/4 + (k+1)] = (k+1)^2 [k^2 + 4k + 4]/4 = (k+1)^2 [k+2]^2/4 = [(k+1)(k+2)/2]^2$ , tức là công thức (\*) đúng với  $n = k+1$ .

## 2.4. Phương pháp chứng minh qui nạp (3/3)

- Ví dụ:

- Chứng minh bất đẳng thức sau:  $n! \geq 2^{n-1}$  với mọi  $n \geq 1$  (\*\*)
- Trong ví dụ này ta chỉ cần thực hiện bước qui nạp hoàn toàn vì đã có công thức.
- Với  $n = 1$  có  $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$ , bất đẳng thức đã cho đúng.
- Bây giờ ta giả sử bất đẳng thức (\*\*) đúng với  $n = k$  tức là  $k! \geq 2^{k-1}$ , xét  $(k+1)! = k!(k+1) \geq 2^{k-1}(k+1) \geq 2^{(k+1)-1}$ , tức là công thức (\*\*) đúng với  $n = k+1$ .