

Lista nr 6 z matematyki dyskretnej

1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić $(n + 2)$ -kąąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n - 1$ nieprzecinających się przekątnych jest równa n -tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. (+) Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$.
6. Niech k i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq m$. Udowodnij, że $\sum_{i=k}^m \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.
7. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $a^3 | b^2$ implikuje $a | b$.
8. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciąg a_n . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu
$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$
Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.
9. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:
(a) $a_n = n^2$
(b) $a_n = n^3$
Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.
10. Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$.
Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.
11. Oblicz funkcje tworzące ciągów:
(a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n

(b) $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ ($H_0 = 0$).

12. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $\langle b_n \rangle = E^k \langle a_n \rangle$.

To jest na razie niepełna lista ...