

## Lista nr 6 z matematyki dyskretnej

1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić  $(n+2)$ -kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą  $n-1$  nieprzecinających się przekątnych jest równa  $n$ -tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających  $n$  wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile niekrzyżujących się uścisków dloni może wykonać jednocześnie  $n$  par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. (+) Z macierzy  $n \times n$  usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na  $n$  prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu  $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$ .
6. Niech  $k$  i  $m$  będą liczbami naturalnymi takimi, że  $k \leq m$ . Udowodnij, że  $\sum_{i=k}^m \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}$ .
7. Niech  $a, b \in Z$ . Pokaż, że  $a^3|b^2$  implikuje  $a|b$ .
8. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciągu  $a_n$ . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu
$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$
*Wskazówka:* Trzeba użyć funkcji tworzącej  $\frac{1}{1-x}$ .
9. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:
  - (a)  $a_n = n^2$
  - (b)  $a_n = n^3$*Wskazówka:* Przyda się funkcja tworząca  $\frac{1}{1-x}$ .
10. Wyznacz funkcję tworzącą ciągu:  $\binom{n+k}{k}$ .  
*Wskazówka:* Odpowiednia potęga funkcji  $\frac{1}{1-x}$ .
11. Oblicz funkcje tworzące ciągów:
  - (a)  $a_n = n$  dla parzystych  $n$  i  $a_n = 1/n$  dla nieparzystych  $n$

(b)  $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$  ( $H_0 = 0$ ).

12. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciągu  $a_n$ . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu  $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$ . Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu  $\langle b_n \rangle = E^k \langle a_n \rangle$ .

To jest na razie niepełna lista ...