

専門科目（午前）

30 大修

時間 午前9：30－11：30

物理学（午前）

受験番号

注意事項

1. 次ページ以降の3題すべてに解答せよ。
2. 答案用紙は3枚である。
3. 解答は1題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。
4. 各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。
5. 答案用紙は、解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。
6. 問題冊子および計算用紙の第1ページに受験番号を記入せよ。
7. 問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

- [A] 図 1 のように、質量 M 、長さ ℓ の一様密度の剛体でできた棒があり、なめらかで摩擦のない水平な床の上に垂直に置かれている。棒が置かれている床上の点を原点とし、水平に x 軸を、鉛直上向きに y 軸をとる。いま、棒の上端を x 軸正の向きにわずかに傾けて静かに手を放すと、棒は床の上を滑りながら倒れ始める。図 2 のように、棒の重心 G の座標を (X, Y) 、棒が鉛直線となす角度を θ として、以下の問に答えよ。棒の太さは無視できるものとする。また、棒が倒れ始めてから床に着くまでの間、棒の床側の端点が床から離れることはない。重力加速度は g である。

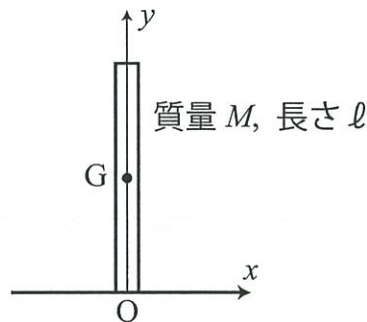


図 1

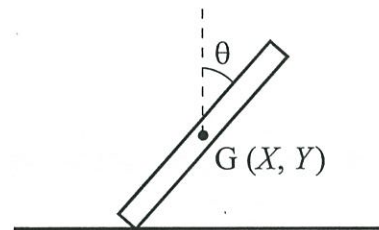


図 2

- (1) この棒の、端点を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント I_0 、重心 G を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント I_G をそれぞれ求めよ。
- (2) 棒が床から受ける垂直抗力を N として、棒の重心運動、および重心 G を通り紙面に垂直な軸の周りの回転運動に関する運動方程式を書け。慣性モーメントは I_0 または I_G を用いて表すこと。解答欄には答のみを記入すること。
- (3) 棒が倒れる間のエネルギー保存を表す式を書け。慣性モーメントは I_0 または I_G を用いて表し、初期条件のエネルギーと等式で結ぶこと。解答欄には答のみを記入すること。

以下の (4)(5) では、解答に I_0 や I_G を用いてはならない。

- (4) 棒の角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ を θ の関数として表せ。解答に N を含めてはならない。
- (5) 垂直抗力 N を θ の関数として表せ。

- [B] 大問 [A] では、棒の端点が床を滑る場合を考えた。次に、図 3 のように、棒の床側の端点が床を滑らず、原点 O の周りを自由に回転できる場合を考えてみよう。大問 [A] と同様、棒の上端を x 軸正の向きにわずかに傾けて静かに手を放し、棒を倒し始めるものとして、以下の問に答えよ。棒の太さは無視できる。重力加速度は g である。

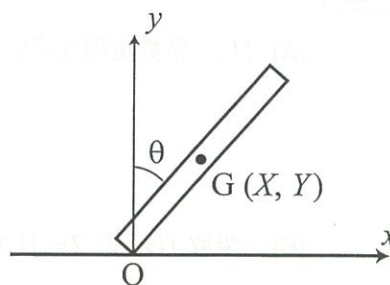


図 3

- (6) 棒の端点が床を滑る場合と滑らない場合のそれぞれについて、棒が床に着く瞬間の重心 G の速さ v_f と、このときの角速度 ω_f の間の関係を求めよ。ただし、いずれの場合も、棒が鉛直線となす角度を θ として、角速度は $\frac{d\theta}{dt}$ で定義するものとする。解答欄には答のみを記入すること。
- (7) 棒の端点が床を滑る場合と滑らない場合で、棒が床に着く瞬間の角速度 ω_f はどちらが大きくなるか。以下の選択肢から適切なものを選んで記号で解答せよ。また、その理由を、前問の結果を踏まえて簡潔に記述せよ。
- (ア) 端点が床を滑る方が ω_f は大きい。
 (イ) 端点が床を滑らない方が ω_f は大きい。
 (ウ) 二つの場合で ω_f の値は等しい。

2

[A] (1) 留数定理を用いて次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

[B] 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を次式で定義する。

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

(2) パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) (G(k))^* dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (g(x))^* dx$$

が成立することを示せ。 $G(k)$ は $g(x)$ のフーリエ変換, $*$ は複素共役を表す。

(3) 関数 $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ。解答欄には答のみを記入すること。

(4) 問 (2) および (3) の結果を使って次の積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^2} dy$$

[C] ベッセル関数 $J_n(x)$ の母関数表示

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

から次の式が導かれる。

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}$$

以下の問に答えよ。

(5) ベッセル関数の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta - in\theta} d\theta$$

を導け。

(6) ベッセル関数 $J_0(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を求めよ。

(このページは落丁ではありません。)

3

真空の誘電率を ε_0 として以下の問に答えよ。

[A] 中性原子の分極について考える。

(1) 図1のように、点電荷 $+q$ と、それを中心とする半径 a の球内に総電荷 $-q$ の電荷が一様に分布した球状電荷分布によって、中性原子をモデル化する。中心からの距離を r として、点電荷がつくる電場 \vec{E}_+ 、球状電荷分布がつくる電場 \vec{E}_- の動径成分 $E_{+,r}$ と $E_{-,r}$ を求めよ。

(2) 問(1)の中性原子に一樣な電場 \vec{E}_{ext} をかけた場合を考える。図2のように、球状電荷分布の中心からベクトル \vec{d} だけ離れた位置に点電荷がつりあって静止しているとする(ただし、 $|\vec{d}| < a$)。このときに発生している電気双極子モーメント $\vec{p} \equiv q\vec{d}$ と \vec{E}_{ext} の比例関係 $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_{\text{ext}}$ を表す分極率 α を a を用いて表せ。

(3) 問(2)において、電気双極子モーメント \vec{p} がつくる電位 ϕ_p について考える。点電荷の位置と球状電荷分布の中心との中点からみて、 \vec{d} から角度 θ の方向で距離 R が十分に離れた場所 ($R \gg a$) における電位は、 $\phi_p(R, \theta) \simeq$ (ア) $\cos\theta$ と近似できる。空欄(ア)に入る式を求めよ。

(4) 問(2)(3)において、電気双極子モーメント \vec{p} がつくる電場 \vec{E}_p を描くと、 \vec{p} に平行な電場の成分 $E_{p,\parallel}$ が0になる場所が存在することがわかる。これらの場所は、十分遠方 ($R \gg a$) においては R によらず、中点からみて \vec{d} から角度 θ_1 の方向に存在する。 $\cos\theta_1$ を求めよ。

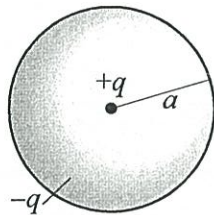


図1

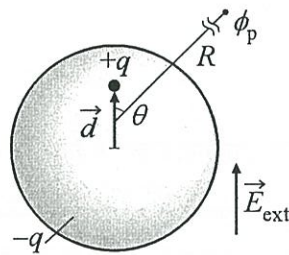


図2

[B] 誘電体について考える。

(5) 一様な電気分極 \vec{P} をもつ誘電体が無限に広がっているとする。この誘電体に半径 b の球状の穴をあけたとき、 \vec{P} によって電場が発生する。この電場の球の中心における値を求めよ。ただし、無限遠に分極電荷は存在しないものとする。

(6) 誘電体中では、粗視化した電場 \vec{E} によって電気分極 \vec{P} が生じると考える。ここでは、感受率 χ を用いて $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ と表せるものとする。この誘電体が、分極率 α の中性原子の集団によって構成されているものとして、 χ と α の関係を求めよう。

ある中性原子に注目すると、その双極子モーメント $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_L$ を引き起こす電場 \vec{E}_L は、当該の双極子モーメントに働く局所的な電場であるから、 \vec{E} とは異なる。その違いを $\vec{E}_L = \vec{E} + \vec{E}_{\text{cor}}$ と表す。 \vec{E}_{cor} は、図3のように、当該の \vec{p} を取り除くように球状の穴をあけたことによってできる電場であると考えられると、問(5)に帰着される。誘電体が、密度 n の電気双極子モーメント \vec{p} の集団によって構成されているとして、 χ を α と n を用いて表せ。

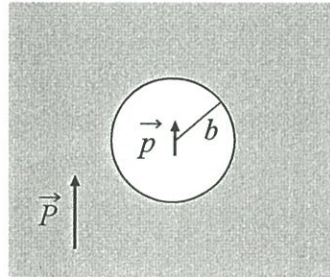


図 3

専門科目（午後）

30 大修

時間 午後 1 : 30 - 3 : 30

物 理 学 (午 後)

受 験 番 号

注意事項

1. 次ページ以降の 3 題すべてに解答せよ。
2. 答案用紙は 3 枚である。
3. 解答は 1 題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。
4. 各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。
5. 答案用紙は、解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。
6. 問題冊子および計算用紙の第 1 ページに受験番号を記入せよ。
7. 問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

N 個 ($N \gg 1$) の分子からなる鎖を考える。各分子は2つの状態 A, B を自由にとることができる、各分子の状態は互いに独立である。分子の長さは、状態 A では長さ a 、状態 B では長さが十分短く 0 と見なす (図 1)。分子 N 個の長さの総和が、この分子鎖の長さとなる。ボルツマン定数を k_B とおく。以下の問に答えよ。なお (4)(6)(8) は導出過程も記せ。(1)(2)(3)(5)(7) は答のみ記せ。



図 1

- (1) この系をカノニカルアンサンブルで扱う。この鎖の張力 f とつりあうように外力 f で引っ張られているとすれば1分子の状態 A はエネルギー $-af$ 、状態 B はエネルギーゼロと考えてよい。温度 T で、この1分子の分配関数 z_1 を求めよ。
- (2) (1) から、 N 個の分子からなる鎖全体の分配関数 z_N を求めることができ、そこから分子鎖の自由エネルギー G は $G = -k_B T \log z_N$ で求められる。 G を求めよ。
- (3) 分子鎖の張力を f とすると、長さを ΔL だけ増加させるためには外から $f\Delta L$ の仕事をする必要があるため、温度 T 、エントロピー S 、内部エネルギー U に関して $dU = fdL + TdS$ が成り立つ。この式から、 L, S の代わりに f と T を独立変数とすることで得られる熱力学関数が自由エネルギー G となり、その微小変化 dG の式が得られる。 dG の式を求めよ。
- (4) 温度 T 、張力 f のときの分子鎖の長さ L を求めよ。

- (5) (a) $af = 0$, (b) $af = \frac{1}{3}$, (c) $af = 3$ の3つの場合の分子鎖の長さ L の温度変化をまとめて図に示すと図2の5つのグラフのいずれかになる。それぞれの場合に該当するグラフを選択し、その低温極限 $T \rightarrow 0$ での値をそれぞれ答えよ。

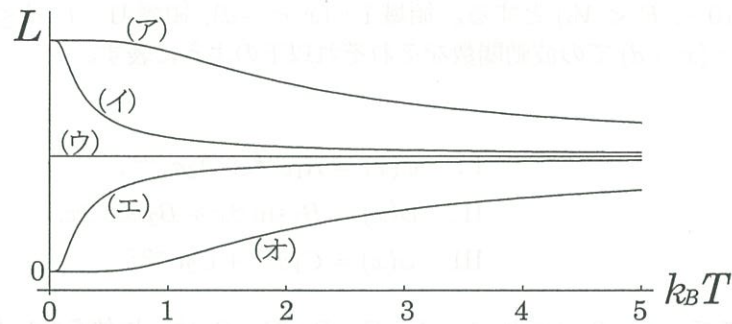


図 2

- (6) 温度 T , 張力 f のときのエントロピー S を求めよ。
- (7) (a) $af = 0$, (b) $af = \frac{1}{3}$, (c) $af = 3$ の3つの場合のエントロピー S の温度変化をまとめて図に示すと図3の5つのグラフのいずれかになる。それぞれの場合に該当するグラフを選択せよ。また高温極限 $T \rightarrow \infty$ での値は共通であるが、その値を答えよ。

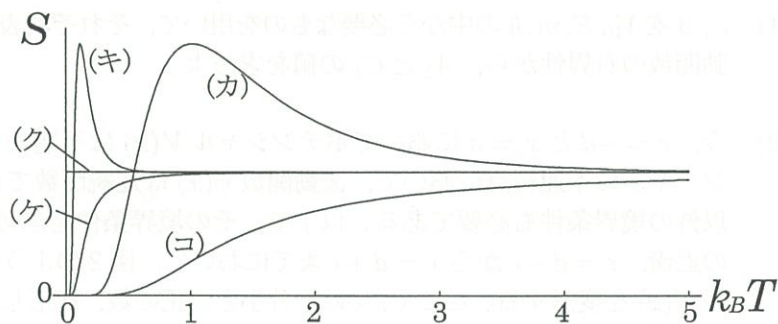


図 3

- (8) 温度を T に保ったままで分子鎖を長さ $\frac{Na}{2}$ から $\frac{2Na}{3}$ まで準静的に伸ばすときに、鎖が放出する熱を求めよ。

2

図1のように、幅 $2d$ 、有限の深さ $V_0 > 0$ で与えられる一次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ の下での質量 m の粒子の束縛状態を考える。束縛状態のエネルギーを E ($0 < E < V_0$) とする。領域 I : ($x < -d$)、領域 II : ($-d \leq x \leq d$)、領域 III : ($x > d$) での波動関数をそれぞれ以下のように表す。

$$\text{I: } \psi(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x},$$

$$\text{II: } \psi(x) = B_1 \sin \beta x + B_2 \cos \beta x,$$

$$\text{III: } \psi(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}.$$

ここで、 $\alpha > 0, \beta > 0, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ は x に依らない数とする。ポテンシャル $V(x)$ の下での時間に依らないシュレディンガー方程式は以下で与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + (V(x) - E) \psi(x) = 0.$$

$\psi'(x), \psi''(x)$ はそれぞれ $\psi(x)$ の x についての一階微分と二階微分を表す。以下の問に答えよ。波動関数の規格化は考えなくてよい。また、(1), (2), (3) は解答欄に答のみ記入すること。

- (1) α, β を V_0, E, m, \hbar の中から必要なものを用いて、それぞれ表せ。また、波動関数の有界性から、 A_2 と C_1 の値を求めよ。
- (2) 今、 $x = -d$ と $x = d$ においてポテンシャル $V(x)$ は不連続である。ポテンシャルの不連続点において、波動関数 $\psi(x)$ は連続関数であるが、それ以外の境界条件も必要である。以下で、その境界条件を求めよう。 $x = d$ の近傍、 $x = d - \epsilon$ から $x = d + \epsilon$ までにおいて、図2のようにポテンシャル $V(x)$ を変形する。ここで、 ϵ は十分小さい正の数、変形したポテンシャルを $\tilde{V}(x)$ とする。ポテンシャル $\tilde{V}(x)$ に対するシュレディンガー方程式を $x = d - \epsilon$ から $x = d + \epsilon$ まで積分すると次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \boxed{\text{ア}} &= \frac{2m}{\hbar^2} \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} (\tilde{V}(x) - E) \psi(x) dx \\ &\simeq \frac{2m}{\hbar^2} \psi(d) \left[\int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \tilde{V}(x) dx - \boxed{\text{イ}} \right] \\ &\rightarrow \boxed{\text{ウ}} \quad (\epsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

- (a) 積分を実行し、 $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる式を ψ' を用いて簡潔に表せ。
- (b) 波動関数 $\psi(x)$ は x の連続関数であるので、十分小さい ϵ に対して、二行目のように近似出来る。 $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる式を、 E, d, ϵ の中から必要なものを用いて簡潔に表せ。

(c) $\tilde{V}(x)$ が有界であることと E が有限であることを用いて、 $\epsilon \rightarrow 0$ における極限值 $\square{\text{ウ}}$ を求めよ。

($\square{\text{ア}} \rightarrow \square{\text{ウ}}$ ($\epsilon \rightarrow 0$) がもう一つの境界条件を与える。)

(3) 元のポテンシャル $V(x)$ に対する波動関数 $\psi(x)$ が $x = -d, x = d$ において満たすべき全ての境界条件を、 $A_1, B_1, B_2, C_2, \alpha, \beta, d$ の中から必要なものを用いて具体的に書き下せ。ただし、上で求めた A_2 と C_1 の値を代入すること。

(4) $\tilde{\alpha} = \alpha d, \tilde{\beta} = \beta d$ とする。 $B_1 \neq 0$ の解と $B_2 \neq 0$ の解が存在する。それぞれの場合に対して、 $\tilde{\alpha}$ を $\tilde{\beta}$ を用いて簡潔に表せ。

(5) V_0 が与えられたときの束縛状態の個数を、 $\tilde{\gamma} \equiv d\sqrt{2mV_0}/\hbar$ を用いて表そう。まず、 $\tilde{\gamma}^2$ を $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ を用いて簡潔に表せ。次に、この関係式と (4) で求めた関係式を使って、束縛状態の個数を $\tilde{\gamma}$ を用いて簡潔に表せ。必要なら天井関数 $\lceil \cdot \rceil$ を用いてよい。天井関数 $\lceil X \rceil$ は、実数 X に対して X 以上の最小の整数である。

(6) $\tilde{\gamma} \ll 1$ のとき、基底状態のエネルギーを E_0 とする。このとき、次の関係式が成り立つ。 $\square{\text{エ}}$ に当てはまる数を求めよ。

$$(V_0 - E_0)/V_0 \simeq \square{\text{エ}} \tilde{\gamma}^2$$

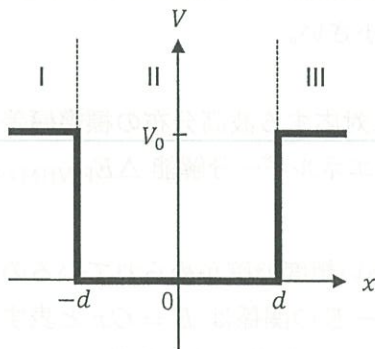


図1

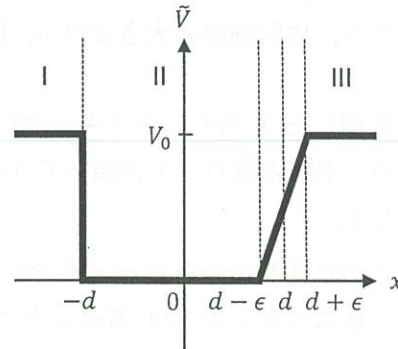


図2

図 1 のように、キセノンを封入した比例計数管を用いて X 線エネルギースペクトルを測定する。放射線源と検出器の間には、直径 d_1 の円形の穴の開いた鉛の板を置き、その穴を通る放射線を計測する。比例計数管の入射窓は十分大きく、鉛の板の穴を通ってくる放射線のビームが窓の外にはみ出ることはない。この比例計数管は、約 2 keV から 30 keV までのエネルギー範囲の X 線を 10% 以上の効率で検出できることがわかっている。比例計数管で X 線が検出されると、X 線エネルギーにほぼ比例した波高を持つ信号パルスが発生する。その信号を分析して、波高値 x の度数分布をヒストグラムとして記録する。ヒストグラムのビン幅 Δx は一定値である。ヒストグラムの n 番目のビンには、 $(n-1)\Delta x < x \leq n\Delta x$ という範囲の波高値 x を持つ信号パルスの数が加算される。

放射線源 ^{109}Cd を用いて 22.1 keV の X 線を 10.0 秒間照射したところ、図 2 のような波高分布が得られた。ここで、波高値の単位はヒストグラムのビン幅としてある（即ち、 $\Delta x = 1.000$ ）。以下の問において、誤差は 1σ (68%信頼区間の半幅、標準偏差) を示すこと。

- (1) この信号が検出されるにあたって、X 線とキセノン分子との間の反応過程で最も支配的なものの一つを以下の選択肢から選べ。
 (a) 原子核散乱 (b) レイリー散乱 (c) コンプトン効果 (d) 光電効果
 (e) 自由-自由遷移 (f) 電子対生成 (g) クーロン散乱 (h) 光解離反応
- (2) ^{109}Cd 放射線源の 22.1 keV X 線放射能 R (単位時間あたりに放射する平均光子数) の推定値を誤差とともに記せ。図 1 において $l_1 = 20.0$ cm, $l_2 = 10.0$ cm, $d_1 = 4.00$ mm, この比例計数管の 22.1 keV 光子の検出効率は 0.20 である。これらの数値及び照射時間は、それぞれ相対精度 1% で測られているものとする。また、放射線源の大きさは d_1 より十分小さい。
- (3) 計測した X 線のエネルギー 22.1 keV に対応する波高分布の標準偏差をまず求め、本問末尾の注を参照して計測装置のエネルギー分解能 $\Delta E_{\text{FWHM}}/E$ を計算せよ。
- (4) この計測装置のゼロ点と線形性は十分高い精度で確かめられているので、得られるスペクトルの波高値 x とエネルギー E の関係は $E = Cx$ と表すことができる。このデータから、比例定数 C を求め、誤差と共に解答せよ。

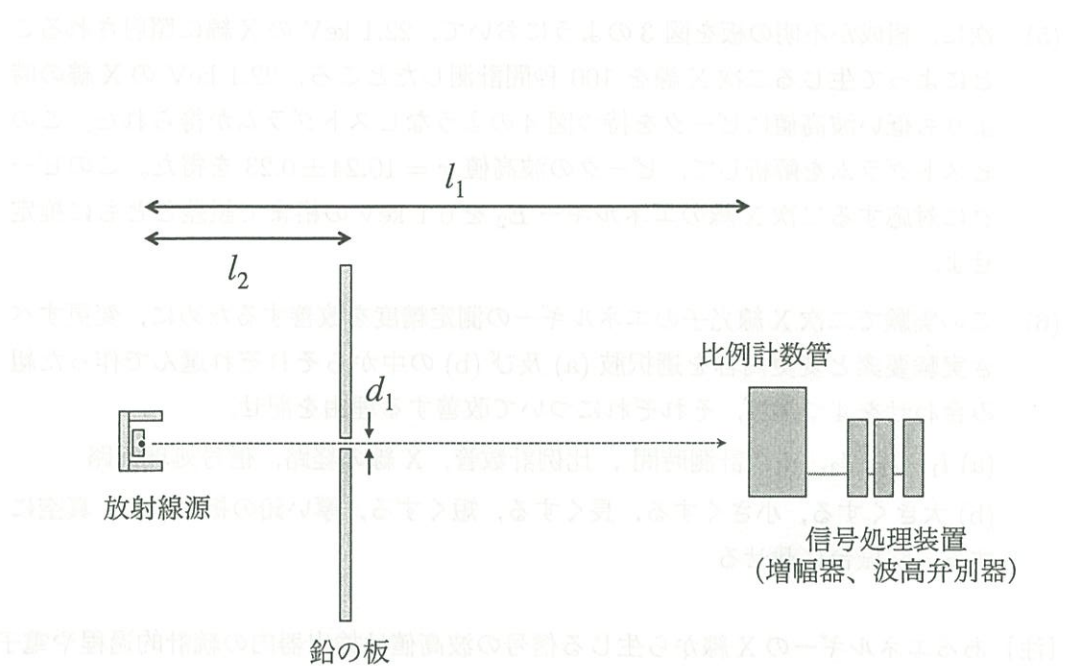


図 1

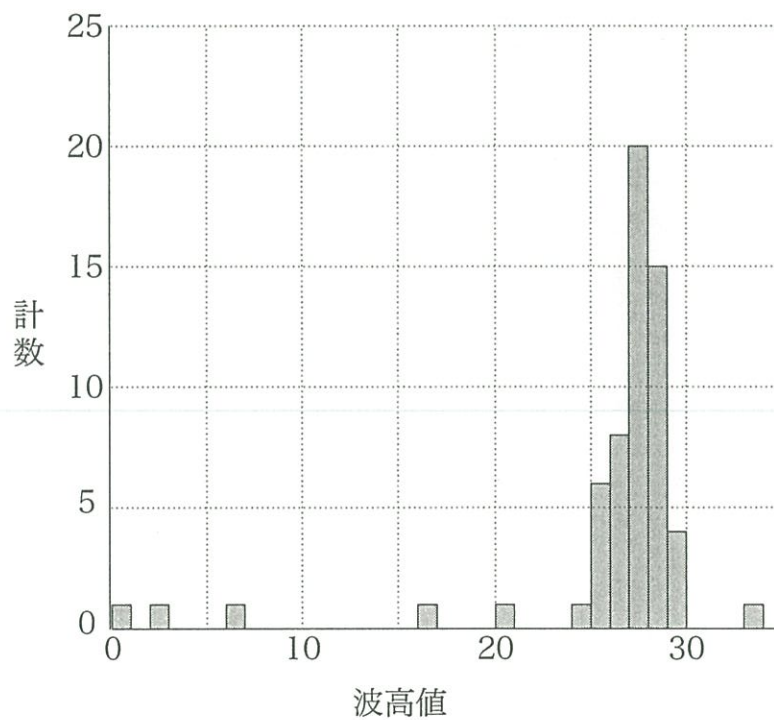


図 2

- (5) 次に、組成が不明の板を図 3 のようにおいて、22.1 keV の X 線に照射されることによって生じる二次 X 線を 100 秒間計測したところ、22.1 keV の X 線の時よりも低い波高値にピークを持つ図 4 のようなヒストグラムが得られた。このヒストグラムを解析して、ピークの波高値 $x = 10.24 \pm 0.23$ を得た。このピークに対応する二次 X 線のエネルギー E_2 を 0.1 keV の桁まで誤差とともに推定せよ。
- (6) この実験で二次 X 線光子のエネルギーの測定精度を改善するために、変更すべき実験要素と変更内容を選択肢 (a) 及び (b) の中からそれぞれ選んで作った組み合わせを 4 つ挙げ、それぞれについて改善する理由を記せ。
- (a) l_1 , l_2 , l_3 , d_1 , 計測時間, 比例計数管, X 線の経路, 信号処理回路
- (b) 大きくする, 小さくする, 長くする, 短くする, 厚い鉛の板で覆う, 真空にする, 防振台に載せる

【注】あるエネルギーの X 線から生じる信号の波高値は検出器内の統計的過程や電子回路の雑音のために揺らぎ、X 線光子のエネルギーに比例する値を中心として散らばる。この揺らぎは多くの場合はほぼ正規分布で表すことができる。この揺らぎ幅をエネルギー分解能と呼び、本問では、 $\Delta E_{\text{FWHM}}/E$ という比で表す。ここで、 ΔE_{FWHM} は、単一エネルギーの X 線光子が作るヒストグラムのピークの幅を度数が最大値の 1/2 になるエネルギー幅で表したもので、正規分布の場合は標準偏差の 2.35 倍である。

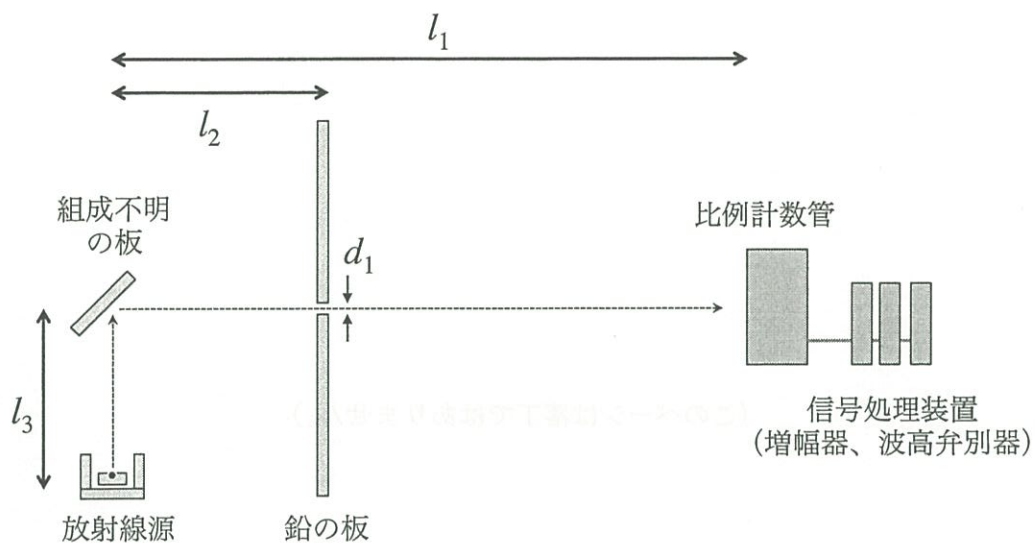


図 3

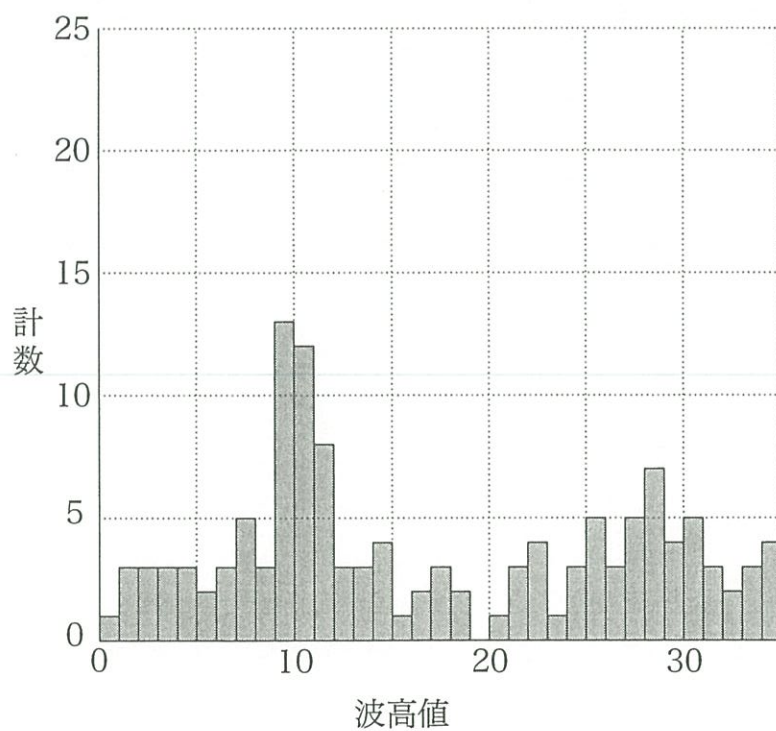


図 4

(このページは落丁ではありません。)