2022 年 5 月 27 日配布

電磁気学　演習第 14 回 — エネルギーと運動量の保存則

問題 14.1：マクスウェルの応力（静電場）

二つの互いに重ならない微小体積 V_1，V_2 を考え，それぞれその内部にのみ分布する電荷 $\rho_1(\boldsymbol{x})$，$\rho_2(\boldsymbol{x})$ があるとする．さらにそれぞれの電荷が作る電場を $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x})$ とする．それぞれの電荷に働く力は次のように書ける．

$$\boldsymbol{F}_1^e = \int \rho_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V, \quad \boldsymbol{F}_2^e = \int \rho_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V \tag{14.1}$$

(1) 電荷 ρ_i が，自身の作る電場 $\boldsymbol{E}_i$ から受ける力が零であることを示せ．

$$\boldsymbol{F}_i^{e,(\mathrm{self})} = \int \rho_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{14.2}$$

(2) 前小問の結果から，全電荷を $\rho = \rho_1 + \rho_2$，全電場を $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ として，任意の領域に働く力を $\boldsymbol{F}^e = \displaystyle\int \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V$ と定義できる．この力の x 成分が次の面積分で与えられることを示せ．

$$F_x^e = \int \boldsymbol{t}_x^e \cdot d\boldsymbol{S} = \int \left(t_{xx}^e, t_{xy}^e, t_{xz}^e\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad t_{x\nu}^e = \epsilon_0 E_x E_\nu - \delta_{x\nu}\frac{\epsilon_0}{2}E^2 \tag{14.3}$$

(3) 同様に，面積分が F_y^e，F_z^e を与えるような $\boldsymbol{t}_y^e$ と $\boldsymbol{t}_z^e$ を定義し，空間に働く力を次のように書く．

$$\boldsymbol{F}^e = \int \boldsymbol{T}^e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{T}^e = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_x^e \\ \boldsymbol{t}_y^e \\ \boldsymbol{t}_z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{xx}^e & t_{xy}^e & t_{xz}^e \\ t_{yx}^e & t_{yy}^e & t_{yz}^e \\ t_{zx}^e & t_{zy}^e & t_{zz}^e \end{pmatrix} \tag{14.4}$$

ここで，$\boldsymbol{T}^e$ は次の二階のテンソル量である．$\boldsymbol{T}^e$ の各成分を求めよ．

問題 14.2：マクスウェルの応力（静磁場）

前問題と同様に，二つの互いに重ならない微小体積 V_1，V_2 の内部に局在する定常環電流 $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})$ が存在するとし，それらが作る磁場を $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x})$ とする．

(1) 環電流 $\boldsymbol{j}_i$ が自身の作る磁場 $\boldsymbol{B}_i$ から受ける力が零であることを示せ．

$$\boldsymbol{F}_i^{m,(\mathrm{self})} = \int \boldsymbol{j}_i(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x = 0 \tag{14.5}$$

（裏に続く）

(2) 前小問の結果から，全電流を $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2$，全磁場を $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$ として，任意の領域に働く力を $\boldsymbol{F}^m = \displaystyle\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V$ と定義できる．この力が，応力テンソル $\boldsymbol{T}^m$ の面積分で与えられることを示し，テンソルの各成分を求めよ．

$$\boldsymbol{F}^m = \int \boldsymbol{T}^m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{T}^m = \begin{pmatrix} t^m_{xx} & t^m_{xy} & t^m_{xz} \\ t^m_{yx} & t^m_{yy} & t^m_{yz} \\ t^m_{zx} & t^m_{zy} & t^m_{zz} \end{pmatrix} \tag{14.6}$$

ここで，$\boldsymbol{T}^e$ は次の二階のテンソル量である．$\boldsymbol{T}^e$ の各成分を求めよ．

(3) 静電磁場の場合から一般化して，電磁場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ が存在する任意の領域 V に働くマックスウェルの応力テンソル $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t)$ を次のように定義する．

$$T_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \epsilon_0 \left[E_i(\boldsymbol{x}, t) E_j(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2(\boldsymbol{x}, t) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[B_i(\boldsymbol{x}, t) B_j(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2(\boldsymbol{x}, t) \right] \tag{14.7}$$

このとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{T} \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_j = \epsilon_0 \left[\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \right] - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \tag{14.8}$$

問題 14.3：電磁場のエネルギーと運動量

静電場のエネルギーから拡張して，電磁場のエネルギー密度を次のように定義する．

$$\omega_{\mathrm{em}}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} E(\boldsymbol{x}, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B(\boldsymbol{x}, t)^2 \tag{14.9}$$

(1) ベクトル解析の公式とマクスウェル方程式から，次の等式が成り立つことを示せ．

$$-\frac{\partial}{\partial t} \omega_{\mathrm{em}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) \tag{14.10}$$

ただし，$\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$ はポインティングのベクトル (Poynting's vector) である．

(2) 式 (14.10) の両辺を任意の体積領域 V で積分したときにエネルギー保存則が成り立つことを考察せよ．

(3) 電磁場のマクスウェルの応力テンソルを次のように定義する（$i, j = x, y, z$）．

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i(\boldsymbol{x}, t) E_j(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2(\boldsymbol{x}, t) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[B_i(\boldsymbol{x}, t) B_j(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2(\boldsymbol{x}, t) \right] \tag{14.11}$$

問題 13.3 で考えた点電荷と電磁場の系で，運動量保存が次のように成り立つことを示せ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left((m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2) + \epsilon_0 \mu_0 \int_V \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}V \right) = \oint_{\partial V} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14.12}$$

以上