東大物理工学科 2021

21B00817 鈴木泰雅,[1]
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

第一問

[1]

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)|\psi_0\rangle \tag{1}$$

であるため

$$\hat{U}(t-t_0) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right) \tag{2}$$

[2]

エルミート性より

$$\hat{H}^\dagger = \hat{H} \tag{3}$$

であり，

$$U^\dagger U = \exp\left(\frac{1}{-i\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right) = \exp(0) = 1 \tag{4}$$

よりユリタリ性が示せた.

[3]

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|U^\dagger U\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\psi_0\rangle \tag{5}$$

より時間依存しないため示せた.

[4]

まず，$A^2 = I$ を満たす行列に関して

$$\exp(iaA) = \cos(a)I + i\sin(a)A \tag{6}$$

が成立している．(証明略)
ここで,

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(\tau)\right) = \exp\left(-i\frac{1}{\hbar}\tau a\hat{\sigma_Z}\right) \tag{7}$$

$$= \cos\left(\frac{1}{\hbar}\tau a\right)\sigma_I - i\sin\left(\frac{1}{\hbar}\tau a\right)\sigma_Z \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{\tau}{\hbar}a\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\tau}{\hbar}a\right) \end{bmatrix} \tag{9}$$

となる.

[5]

$$\hat{U}_\phi = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\phi}\end{bmatrix} = e^{i\phi/2}\begin{bmatrix}e^{-i\phi/2} & 0\\ 0 & e^{i\phi/2}\end{bmatrix} = e^{i\phi/2}\hat{U}\left(\frac{\phi\hbar}{2\tau a}\right) \tag{10}$$

$$= \exp\left(i\frac{\phi}{2} + 2in\pi\right)\exp\left(-i\frac{\phi}{2}\sigma_Z\right), n \in \boldsymbol{Z} \tag{11}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(\tau)\right) \tag{12}$$

より両辺を比べて

$$\hat{H} = -\frac{\phi\hbar}{2\tau}(\sigma_I - \sigma_Z) - \frac{2n\pi\hbar}{\tau}\sigma_I \tag{13}$$

$$= -\frac{\hbar}{\tau}\begin{bmatrix}2n\pi & 0\\ 0 & 2n\pi + \phi\end{bmatrix} \tag{14}$$

[6]

ハミルトニアンを

$$\hat{H} = a\sigma_X + c\sigma_I \tag{15}$$

とすると，(σ_X が係数になる理由は行列の展開より自明)

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}\tau\right) = \exp\left(-i\frac{1}{\hbar}a\sigma_X\tau\right)\exp\left(-i\frac{1}{\hbar}c\sigma_I\tau\right) \tag{16}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\sigma_I - i\sin\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\sigma_X\right)\exp\left(-i\frac{1}{\hbar}c\tau\right)\sigma_I \tag{17}$$

となる．(σ_I, σ_X は可換) ここで，少なくとも

$$\cos\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right) = 0 \tag{18}$$

が成立している必要があり，

$$\frac{a\tau}{\hbar} = \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

としてよい．代入すると，

$$\hat{U}(\tau) = -i\sigma_X\exp\left(-i\frac{1}{\hbar}c\tau\right)\sigma_I = -i\exp\left(-i\frac{1}{\hbar}c\tau\right)\sigma_X \tag{20}$$

$$= \sigma_X \tag{21}$$

となれば良いため，

$$\exp\left(-i\frac{1}{\hbar}c\tau\right) = i = e^{i\pi/2} \tag{22}$$

であり，

$$c = -\frac{\hbar\pi}{2\tau} \tag{23}$$

であるため，

$$\hat{H} = \frac{\hbar\pi}{2\tau}\sigma_X - \frac{\hbar\pi}{2\tau}\sigma_I = \frac{\hbar\pi}{2\tau}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{24}$$

となる．

[7]

σ_I と σ_i は可換であるため，

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}\tau\right) \tag{25}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{i\hbar}b\tau\right)\sigma_I \cdot \exp\left[\frac{1}{i\hbar}\left(a(\sin\theta\cos\phi)\sigma_X + a(\sin\theta\sin\phi)\sigma_Y + a(\cos\theta)\sigma_Z\right)\tau\right] \tag{26}$$

となる．ここで，

$$\exp\left(i\sum_j a_j\sigma_j\right) = \sigma_I + \left(i\sum_j a_j\sigma_j\right) - \frac{1}{2!}\left(\sum_j a_j\sigma_j\right)^2 \cdots \tag{27}$$

となるが，$\{\sigma_i, \sigma_k\} = 0$ より，

$$\left(\sum_j a_j\sigma_j\right)^2 = \sum_j a_j^2\sigma_I + \sum_{i<k} a_i a_k \sigma_i \sigma_k + \sum_{i<k} a_i a_k \sigma_k \sigma_i = \sum_j a_j^2 \sigma_I \tag{28}$$

となる．また，今回の場合

$$\sum_j a_j^2 = a^2 \tag{29}$$

であるため，

$$\exp\left(i\sum_j a_j\sigma_j\right) = \sigma_I + i\left(\sum_j a_j\sigma_j\right) - \frac{1}{2!}a^2\sigma_I - i\frac{1}{3!}(-a^2)\left(\sum_j a_j\sigma_j\right) + \cdots \tag{30}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}a^2 + \cdots\right)\sigma_I + i\left(1 - \frac{1}{3!}a^2 + \frac{1}{5!}a^4 + \cdots\right)\left(\sum_j a_j\sigma_j\right) \tag{31}$$

$$= \cos(a)\,\sigma_I + i\sin(a)\frac{1}{a}\left(\sum_j a_j\sigma_j\right) \tag{32}$$

となる．よって，

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}b\tau\right)\sigma_I \cdot \left[\cos(a)\,\sigma_I + i\sin(a)\cdot\left((\sin\theta\cos\phi)\sigma_X + (\sin\theta\sin\phi)\sigma_Y + (\cos\theta)\sigma_Z\right)\right] \tag{33}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{i\hbar}b\tau\right)\begin{bmatrix} i\sin(a)\cos(\theta) + \cos(a) & i\sin(a)\sin(\theta)e^{-i\phi} \\ i\sin(a)\sin(\theta)e^{i\phi} & -i\sin(a)\cos(\theta) + \cos(a) \end{bmatrix} \tag{34}$$

[8]

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_X + \sigma_Z) \tag{35}$$

であるため，上記の式を

$$\phi = 0, \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \tag{36}$$

とすると，

$$\hat{U}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} i \exp\left(\frac{1}{i\hbar}b\tau\right)(\sigma_X + \sigma_Z) \tag{37}$$

となるため，

$$i \exp\left(\frac{1}{i\hbar} b\tau\right) = 1 \tag{38}$$

となればよいので，

$$b = \frac{\pi\hbar}{2\tau} \tag{39}$$

となる．よってこれらよりもとのハミルトニアンは

$$H = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\sigma_X + \sigma_Z\right) + \frac{\pi\hbar}{2\tau}\sigma_I \tag{40}$$

となる．

[9]

σ_Z をより一般化して

$$\sigma_Z = \mathrm{diag}[1, 1, \cdots, -1] \tag{41}$$

とすればよいため，

$$H = \frac{\phi\hbar}{2\tau}\left(\mathrm{diag}[1, 1, \cdots, 1] - \mathrm{diag}[1, 1, \cdots, 1, -1]\right) \tag{42}$$

$$= \frac{\phi\hbar}{\tau}\mathrm{diag}[0, 0, \cdots, 0, 1] \tag{43}$$

[10]

捨て問？方針はこれを二階のパウリ行列のテンソルで展開して，問題 [7] と同様にすればよいが，正直面倒だし証明事項が多い...

第二問

[1]

ρ は $[M/V]$,$\boldsymbol{u}$ は $[L]$，$\boldsymbol{F}$ は $[MLT^{-2}/V]$ となるため，

$$[M/V][L]/[T^2] = [MLT^{-2}/V] \tag{44}$$

より次元が一致する．

[2]

$\Delta x_3 \to 0$ の極限では，釣り合いより応力がかからないとみなせるため，$\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}', t) = -\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}'', t)$ が成立する．$\boldsymbol{p}$ は Δx_3 によらないため，これは任意の Δx_3 成立する．

[3]

定義より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 =& \left(\boldsymbol{p}^{(1)}(\boldsymbol{x}'^{(1)}, t) - \boldsymbol{p}^{(1)}(\boldsymbol{x}''^{(1)}, t)\right)\Delta x_2 \Delta x_3 + \left(\boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{x}'^{(2)}, t) - \boldsymbol{p}^{(2)}(\boldsymbol{x}''^{(2)}, t)\right)\Delta x_3 \Delta x_1 \\ &+ \left(\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}'^{(3)}, t) - \boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}''^{(3)}, t)\right)\Delta x_1 \Delta x_2\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{x}'^{(k)}$ は k 成分を $\Delta x_k/2$ だけ，$\boldsymbol{x}''^{(k)}$ は k 成分を $-\Delta x_k/2$ だけずらしたものである．よって，Δ が十分に微小とすることによって，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial \boldsymbol{p}^{(k)}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_k} \tag{45}$$

となりこれは $j = 1$ でも成立するため示せた．

[4]

これは普通に添え字の計算で終わる．結果のみ書くと

$$A = \mu + \lambda \tag{46}$$

[5]

これは縦波とかの式に変形して位相速度とかに変更すればよい．縦波は $\nabla \times \boldsymbol{u}$，横波は $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ となっている．これらの時間発展を考える．前問より求めた方程式より

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\mu + \lambda)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{47}$$

であるため，まずは両辺を $\nabla \times$ で取ることによって，

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 (\nabla \times \boldsymbol{u})}{\partial t^2} &= \mu \nabla \times \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\mu + \lambda)\nabla \times \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) && (48)\\ &= \mu \nabla \times (\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u})) && (49)\\ &= -\mu \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) && (50)\\ &= \mu \nabla^2 (\nabla \times \boldsymbol{u}) && (51)\end{aligned}$$

また，両辺を $\nabla \cdot$ を取ることによって，

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{u})}{\partial t^2} &= \mu \nabla \cdot \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\mu + \lambda)\nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) && (52)\\ &= (2\mu + \lambda)\nabla^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) && (53)\end{aligned}$$

となり．これらよりそれぞれの位相速度が求まり，

$$(\text{縦波}) : \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad (\text{横波}) : \sqrt{\frac{\rho}{2\mu + \lambda}} \tag{54}$$

となる．

第三問

[1.1]

運動量空間の単位体積あたりの状態数は

$$\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}\frac{4\pi}{3} \tag{55}$$

である．(田崎本との定義の違いは？)

[1.2]

エネルギー ϵ を持つ状態の数は

$$\Omega(\epsilon) = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}\frac{4\pi}{3}(2m\epsilon)^{3/2} \tag{56}$$

より，

$$D(\epsilon) = \frac{d\Omega(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}2\pi(2m)^{3/2}\epsilon^{1/2} \tag{57}$$

とはなる．

[1.3]

左辺の積分を考えると

$$\int_0^\infty D(\epsilon)\frac{1}{e^{\epsilon/T}-1}d\epsilon = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}2\pi(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\epsilon/T}-1}d\epsilon \tag{58}$$

$$= \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}2\pi(2m)^{3/2}T^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{59}$$

これが N と等しい時の温度が T_C であるため，

$$T_C = \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2\frac{1}{2\pi m}\left(N/\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{2/3} \tag{60}$$

[1.4]

ボーズアインシュタイン凝縮では，全体の粒子数 N から T_C の時の個数 N_C を引いた粒子数が基底状態 N_0 となるため，

$$N_0 = N - N_C = \tag{61}$$

第四問

[1]

余弦定理より,

$$r_\pm^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \mp rl\cos\theta, \quad \therefore r_\pm = r\sqrt{1+\left(\frac{l}{2r}\right)^2 \mp \frac{l}{r}\cos\theta} \tag{62}$$

ここで, l/r は微小であるから

$$\boldsymbol{r}_\pm = r\sqrt{1\mp\frac{l}{r}\cos\theta} \quad \therefore \frac{1}{r_\pm} \approx \frac{1}{r}\left(1\pm\frac{l}{2r}\cos\theta\right) \tag{63}$$

よって,

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha_0 E_0}{4\pi\epsilon_0 l}\frac{1}{r}\left\{\left(1+\frac{l}{2r}\cos\theta\right)-\left(1-\frac{l}{2r}\cos\theta\right)\right\} = \frac{\alpha_0 E_0\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \tag{64}$$

よって, $D=1, C=0$ である.

[2]

$\omega_0 l \ll c$ より,

$$q\left(t-\frac{r_\pm}{c}\right) = \frac{\alpha_0 E_0}{l}\cos\left(\omega_0(t-r_\pm/c)\right) \tag{65}$$

であるため,

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\alpha_0 E_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\cos\left(\omega_0(t-r_+/c)\right)}{lr_+}-\frac{\cos\left(\omega_0(t-r_-/c)\right)}{lr_-}\right)\\ &= \frac{\alpha_0 E_0}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 r_+/c)+\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 r_+/c)}{lr_+}-\frac{\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 r_-/c)-\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 r_-/c)}{lr_-}\right\}\\ &= \frac{\alpha_0 E_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\cos(\omega_0 t)\frac{1}{r^2}\right)\cos(\theta)\end{aligned}$$

となる.

[3]

$$p\left(t-\frac{r}{c}\right) = \alpha E_0\cos\left(\omega_0(t-r/c)\right) \tag{66}$$

であるため,

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\left(-\alpha\omega_0 E_0\sin\left(\omega_0(t-r/c)\right)\right)\boldsymbol{e}_z \tag{67}$$

となる. ここで, 図より,

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{68}$$

であるため,

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\left(-\alpha\omega_0 E_0\sin\left(\omega_0(t-r/c)\right)\right)\left(\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) \tag{69}$$

となる.

[4]

$$\nabla\varphi = \frac{\alpha_0 E_0}{4\pi\epsilon_0}\cos(\omega_0 t)\left\{\left(-\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r^3}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right\} \tag{70}$$

[5]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{\alpha_0 E_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\cos(\omega_0 t)\left(\frac{2}{r^3}\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r^3}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) + \frac{\omega_0^2}{c^2 r}\cos\left(\omega_0(t-r/c)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\right)\right] \\ &= \frac{\alpha_0 E_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\cos\theta\left\{\frac{2}{r^3}\cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{c^2 r}\cos(\omega_0(t-r/c))\right\}\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\left\{\frac{1}{r^3}\cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{c^2 r}\cos(\omega_0(t-r/c))\right\}\boldsymbol{e}_\theta\right]\end{aligned}$$

また,

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{71}$$

$$= -\frac{\alpha E_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\left\{\frac{2\sin\theta}{r}\right\}\boldsymbol{e}_\phi \tag{72}$$

[6]