

## 0 ベクトル解析の復習

### 0.1 内積と外積

**ベクトルの内積** (scalar product)：2つのベクトル  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  に対してベクトルの内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (0.1)$$

で定義される。これは、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  とのなす角を  $\theta$  としたとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$  で与えられるスカラーである。

**ベクトルの外積** (vector product)：2つのベクトル  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  に対してベクトルの外積は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (0.2)$$

で定義される。これはベクトルであり、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  とのなす角を  $\theta$  としたとき、 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$  で与えられるベクトルである。これは図のように  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  の両方に垂直なベクトルであり、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  を満たす。この特別な場合として  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$  となる。

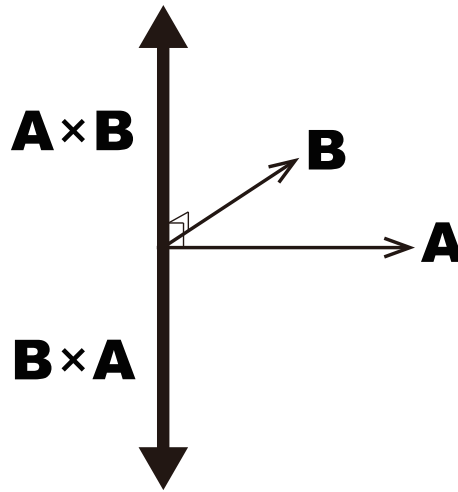


図 0.1: ベクトルの外積

これらの公式を示すのに使われるのが Kronecker のデルタ  $\delta_{ij}$  と、完全反対称テンソル (Levi-Civita テンソル)  $\varepsilon_{ijk}$  である。これらの添え字は  $x, y, z$  の値をとり、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (0.3)$$

また  $\varepsilon_{ijk}$  は、 $-1, 1, 0$  の値をとる。 $\varepsilon_{xyz} = 1$  であり、任意の2つの添え字の交換に対して符号を変え、また任意の2つの添え字の値が等しければ0となる。つまり

$$\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{yxz} = -\varepsilon_{zyx} = -\varepsilon_{xzy} = 1 \quad (0.4)$$

でありそれ以外は0である。こうした記号を用いる際には、式の中に2度出現する添え字については和をとる（総和の $\Sigma$ 記号を省略する）という Einstein の規約を採用する。これに関する公式を下に掲げる。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \quad (0.5)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (0.6)$$

$$\delta_{ij} a_i = a_j \quad (0.7)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (0.8)$$

これらの記号を使うと、以下に挙げる内積、外積に関する公式を証明することができる。ここで現れる  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  をスカラー3重積といい、ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  で作られる平行六面体の（符号付き）体積を表わす。（「符号付き」というのは、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  の3つがこの順に右手系をなすか左手系をなすかによって、+ないし-の符号をつける、という意味。） また、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  をベクトル3重積という。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (0.9)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (0.10)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (0.11)$$

## 0.2 ベクトル場とスカラー場の微分

以下では位置ベクトルを  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  で表すことにする。座標  $\mathbf{x}$  の関数となっているスカラー  $f(\mathbf{x})$  をスカラー場、座標  $\mathbf{x}$  の関数となっているベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_x(\mathbf{x}), A_y(\mathbf{x}), A_z(\mathbf{x}))$  をベクトル場という。ベクトル場やスカラー場に対して微分演算を行うため、微分演算子である  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  を定義する。この記号はナブラ (nabla) と読む。

これを用いて、スカラー場  $f(\mathbf{x})$  に対して**勾配** (gradient)  $\nabla f = \text{grad} f$  を次で定義する。これはベクトル場になる。

$$\nabla f = \text{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (0.12)$$

ベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  に対して**発散** (divergence)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A}$  を次で定義する。これはスカラー場になる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (0.13)$$

ベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  に対して**回転** (rotation)  $\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A} = \text{curl} \mathbf{A}$  を次で定義する。これはベクトル場になる。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (0.14)$$

また、スカラー場  $f(\mathbf{x})$  に対して**ラプラシアン** (Laplacian)  $\Delta f = \nabla^2 f$  を次で定義する。これはスカラー場となる。

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (0.15)$$

ベクトル演算に関する種々の公式を下に掲げる。

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (0.16)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (0.17)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (0.18)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (0.19)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (0.20)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (0.21)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (0.22)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f) \quad (0.23)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (0.24)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (0.25)$$

また、よく用いられる公式として

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (0.26)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (0.27)$$

がある。

### 0.3 ベクトル場とスカラー場の積分

ある領域  $V$  に対してスカラー場  $\phi(\mathbf{x})$  の**体積積分** (volume integral) を次で定義する。

$$\int_V \phi(\mathbf{x}) dV \quad (0.28)$$

ここで  $dV = dx dy dz$  は微小体積を表わし、座標に関する3重積分で表わされる。

$$\int_V \phi(\mathbf{x}) dV = \int \int \int_V \phi(\mathbf{x}) dx dy dz \quad (0.29)$$

またある曲面  $S$  に対して、ベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  の**面積分** (surface integral) を

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (0.30)$$

で定義する。ここで  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  であり、 $dS$  は曲面上の微小面積、 $\mathbf{n}$  は曲面の単位法線ベクトル ( $|\mathbf{n}| = 1$ ) である。なお曲面の単位法線ベクトルは向きが2種類あるため、面積分の際にはどちらの向きをとるか指定しておく必要がある。これは2重積分として

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_S (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy) \quad (0.31)$$

と表わせる。なぜなら  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z) dS$  であり、ここで  $n_x dS = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) dS = dS \cos \theta_x$  ( $\theta_x$  は  $\mathbf{n}$  が  $x$  軸となす角) は微小面積の  $yz$  面への射影であるため、 $yz$  面内の微小面積  $dy dz$  となるからである。

また、曲線  $C$  上のベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  の**線積分** (line integral) を曲線  $C$  に対して

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (0.32)$$

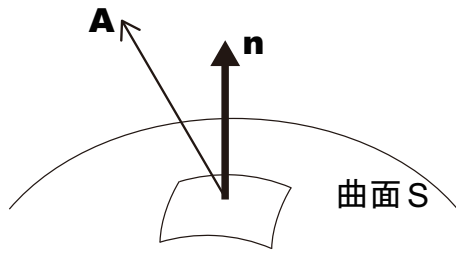


図 0.2: ベクトル場の面積分

で定義する。ここで  $d\mathbf{x} = (dx, dy, dz)$  である。これは別の書き方をすると、 $d\mathbf{x} = \mathbf{t}ds$  であり、 $ds \equiv |d\mathbf{x}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$  は曲線上の微小長さ、 $\mathbf{t}$  は曲線の単位接線ベクトル ( $|\mathbf{t}| = 1$ ) である。なお曲線の単位接線ベクトルは向きが2種類あるため、線積分の際にはどちらの向きをとるか指定しておく必要がある。この線積分は

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (0.33)$$

とかける。なお線積分において始点と終点が一致している場合を特に周回積分 (contour integral) と呼び、周回積分であることを強調するために、

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (0.34)$$

とかくことがある。

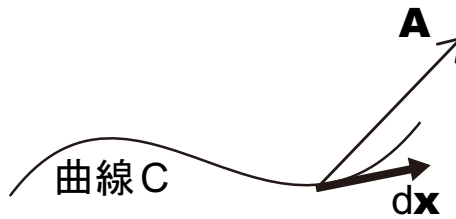


図 0.3: ベクトル場の線積分

## 0.4 Gauss の定理と Stokes の定理

### Gauss の定理 (Gauss theorem)

領域  $V$  とその境界をなす閉曲面  $\partial V$  に対して、

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (0.35)$$

### Stokes の定理 (Stokes theorem)

曲面  $S$  とその境界をなす閉曲面  $\partial S$  に対して、

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (0.36)$$

同様の系統の定理として、線積分については以下の性質がある。

$$\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \quad (0.37)$$

## Green の定理 (Green theorem)

Gauss の定理において、スカラー場  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  に対して  $\mathbf{A} = f\nabla g$  とおいてみると、

$$\int_V (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \int_{\partial V} f \nabla g \cdot d\mathbf{S} \quad (0.38)$$

となる。この式から、この式で  $f$  と  $g$  を取り替えた式を引き算すると **Green の定理**

$$\int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \int_{\partial V} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S} \quad (0.39)$$

が得られる。この定理は偏微分方程式の境界値問題を Green 関数を用いて解く際に使われ、その一つの例が、静電誘導などの静電気学の問題で現れる。

## 0.5 Dirac の $\delta$ 関数

Dirac の  $\delta$  関数  $\delta(x)$  は、

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (0.40)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (0.41)$$

という性質を持つ関数である。この関数は通常関数ではなく「超関数」と呼ばれるものであるが、ここでは厳密な定義には立ち入らず、あたかも通常関数に準ずる形で取り扱う。この  $\delta$  関数は任意関数  $g(x)$  に対して以下のような性質を持つ。

$$\int_a^b \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (a < x_0 < b) \quad (0.42)$$

これが最も基本的な性質であり、逆にこれがデルタ関数の定義と考えてもよい。次に基本的な公式をいくつか挙げておく。

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a : \text{ゼロでない実定数}) \quad (0.43)$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (0.44)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (g(x) : x \text{ の実関数}, x_i : g(x) = 0 \text{ となる } x \text{ の値}) \quad (0.45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x) \quad (0.46)$$

1 次元 (変数  $x$  のみ) の場合だけでなく、高次元の場合にも  $\delta$  関数を考えることができる。例えば 3 次元では  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  に対して

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (0.47)$$

とする。するとある領域  $V$  に対して

$$\int_V \delta(\mathbf{x}) dV = \begin{cases} 1 & : \text{原点が } V \text{ に含まれる} \\ 0 & : \text{原点が } V \text{ に含まれない} \end{cases} \quad (0.48)$$

である。これらを利用すると、 $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  として、

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{r^3}, \quad \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x}) \quad (0.49)$$

である。すなわち

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x}) \quad (0.50)$$

である。なお  $\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x})$  を示すには、

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) = 0 \quad (\mathbf{x} \neq 0) \quad (0.51)$$

および原点を中心とする半径  $R$  の球体の内部  $V$  に対して

$$\begin{aligned} \int_V dV \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) &= \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) \\ &= \int_{\partial V} dS \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{r^3} = \int_{\partial V} dS \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^2} \cdot (\text{半径 } R \text{ の球の表面積}) = 4\pi \end{aligned} \quad (0.52)$$

を組み合わせればよい。

## 1 マクスウェル方程式

### 1.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式は以下のように与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

なお  $\mathbf{E}$  : 電場 [V/m]、 $\mathbf{H}$  : 磁場 [A/m]、 $\mathbf{D}$  : 電束密度 [C/m<sup>2</sup>]、 $\mathbf{B}$  : 磁束密度 [Wb/m<sup>2</sup>]

$\mathbf{j}$  : 電流密度 [A/m<sup>2</sup>]、 $\rho$  : 電荷密度 [C/m<sup>3</sup>] である。これらの法則は順に

(1.1) : ガウスの法則

(1.2) : 磁気単極子が存在しない

(1.3) : ファラデーの電磁誘導の法則

(1.4) : 拡張されたアンペールの法則

を表す。

上で述べた Maxwell 方程式は微分形であり、積分形の Maxwell 方程式は以下で与えられる。

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \, dV, \quad (1.5)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.6)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.7)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.8)$$

ただし  $V$  は空間内の 3 次元領域で  $\partial V$  はその表面。また  $S$  は空間内の曲面で  $\partial S$  はその境界の閉曲線。 $V$  内の全電荷を  $Q$ 、 $S$  を貫く全磁束を  $\Psi$ 、 $S$  を貫く全電束を  $\Phi$ 、 $S$  を貫いて流れる電流の総和を  $I$  とおくと

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (1.9)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.10)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = I + \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (1.12)$$

となる。

### 電荷の保存

$\nabla \cdot (1.4)$  を作ると、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  が得られる。これを連続の方程式と呼ぶ。この方程式は電荷が保存していることを表している。積分形で表すにはこの両辺を領域  $V$  内で積分して

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.13)$$

これは、領域  $V$  内から流出した電流の総和の分だけ、その領域内の電荷が減少することを表す。

なお真空中では

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.14)$$

ただし、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H/m}]$  : 真空の透磁率、 $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \cdots \times 10^{-12} [\text{F/m}]$  : 真空の誘電率、 $c = 299792458 [\text{m/s}]$  : 真空中の光の速さ、である。そのため、**真空中の Maxwell 方程式**は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.18)$$

となる。これ以降、断りの無い限り電磁場は全て真空中の電磁場のみを扱うことにする。真空中での電磁場のエネルギーは以下で与えられる。

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (1.19)$$

ここでは第 1 項が電場のエネルギー、第 2 項が磁場のエネルギーを表している。

### 物質中の電磁場について

(物質中の電磁場については電磁気学 III で扱うが、以下で一部用いるのでここで基本事項を導入しておく) 物質を構成する原子に着目して真空中の Maxwell 方程式を解けばいいはずである。これは原則的には可能だが、実際は物質中の構造は原子核程度の非常に短い長さスケールで変化している。上記のように真空中の Maxwell 方程式を解くためにはそうした微細な構造を知る必要があり、その結果出てくるのは原子核レベルで激しく振動する電磁場である。

しかし実際に計算したいのは、そうしたミクロのレベルで激しく変動する電磁場ではなく、巨視的スケールでの平均化された電磁場の振る舞いである。そのため、真空中の Maxwell 方程式に、物質の性質を巨視的スケールで平均化した場をとりいれて「物質中の電磁場」を記述すると便利である。こうした平均化を行った後

も、真空中の Maxwell 方程式と似た形で物理が記述される。これを用いれば、原子・原子核スケールの電磁場の激しく複雑な変動を考えなくてよく、理論が簡単化される。

この平均化の段階で個々の物質の個性（誘電体、磁性体、超伝導体など）が反映される。真空中では  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  であるが、多くの物質ではこれを  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  と置き換えれば、上で書いた Maxwell 方程式はそのままで成立する。（なお、これが成立しない場合もあり、電磁気学 III で詳述する。） $\varepsilon$ 、 $\mu$  は物質に依存する定数であり、これらをそれぞれ誘電率、透磁率と呼ぶ。

## 1.2 電磁場のエネルギーと運動量

### 電磁場のエネルギーと Poynting ベクトル

真空中では Maxwell 方程式を使うと

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \quad (1.20)$$

と書ける。ただし  $u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$  は電磁場のエネルギー密度を表す。ここで現れた  $\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  を Poynting ベクトルと呼び、単位面積を単位時間に通過するエネルギーの流れを表す。

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (1.21)$$

これを領域  $V$  で積分すると

$$\int_{\partial V} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_V u_{em} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = 0 \quad (1.22)$$

となる。第一項は領域  $V$  から流れ出すエネルギー、第二項は領域  $V$  内の電磁場のエネルギーの変化、第三項は領域  $V$  内の電荷が受けた仕事を表す。第三項が領域  $V$  内の電荷が受けた仕事を表すことは、例えば次のようにして分かる。領域  $V$  内に電荷  $q_1, q_2, \dots$  があるとして、 $\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ 。電荷  $q_i$  が受けた力は  $\mathbf{F}_i = q_i(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B})$ 。従って

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = \sum_i q_i \mathbf{E}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (1.23)$$

### Maxwell 応力と電磁場の運動量

領域  $V$  内の全電荷の運動量の総和  $\mathbf{g}_m$  は、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}_m = \sum_i q_i (\mathbf{E}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)) = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV \quad (1.24)$$

これを Maxwell 方程式を使って変形すると

$$\frac{d}{dt} (g_m)_i + \frac{d}{dt} (g_{em})_i = \int_V \partial_j T_{ij} dV = \int_{\partial V} T_{ij} dS_j \quad (1.25)$$

ただし  $T_{ij} = T_{ij}^{(e)} + T_{ij}^{(m)}$ ,  $T_{ij}^{(e)} = \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \delta_{ij})$ ,  $T_{ij}^{(m)} = \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \delta_{ij})$ ,  $\mathbf{G}_{em} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{P}$  とする。この  $T_{ij}$  は Maxwell の応力テンソルと呼ばれる対称テンソルである。 $\mathbf{g}_m$  は電荷（すなわち物体）の持つ運動量、 $\mathbf{g}_{em}$  は電磁場の持つ運動量と解釈できる。 $T_{ij}$  は電磁場により及ぼされる力であり、電場の部分  $T_{ij}^{(e)}$  と磁場の部分  $T_{ij}^{(m)}$  に分けることができる。行列の形で書けば

$$T^{(e)} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$



$$T^{(m)} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_x B_y & B_y^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 & B_y B_z \\ B_x B_z & B_y B_z & B_z^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

となる。なお (1.25) を微分形で書くと、それぞれの運動量密度を  $\mathbf{G}_m$ ,  $\mathbf{G}_{em}$  と表せば

$$\frac{\partial \mathbf{G}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}_{em}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (1.28)$$

となる。ただしテンソル  $\mathbf{T}$  の微分は、 $(\nabla \cdot \mathbf{T})_i \equiv \partial_j T_{ji}$  とする。

この応力の作用を見るために、例えば界面が  $xy$  面に平行な場合 ( $j = z$ ) を考え、電磁場による Maxwell 応力の  $z$  成分を考える ( $i = z$ )。電場の方を考えると、 $\mathbf{E} \parallel \hat{z}$  なら応力  $T_{zz}^{(e)} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_z^2$ 。つまり電気力線自身は単位面積あたり  $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$  の力で縮まろうとしている。

また、 $\mathbf{E} \parallel \hat{x}$  なら応力  $T_{zz}^{(e)} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2$ 。つまり電気力線同士は単位面積あたり  $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$  の力で反発し合う。

### 電磁場の角運動量

前項で定義した電磁場の運動量、および物体の運動量からそれぞれ角運動量を定義できる。電磁場の角運動量密度は

$$\mathbf{L}_{em} = \mathbf{x} \times \mathbf{G}_{em} = \varepsilon_0 \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (1.29)$$

であり、物体（すなわち電荷）の角運動量密度は

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{x} \times \mathbf{G}_m \quad (1.30)$$

である。すると (1.28) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{L}_{em}}{\partial t} &= \mathbf{x} \times \left( \frac{\partial \mathbf{G}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}_{em}}{\partial t} \right) \\ &= \mathbf{x} \times \nabla \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.31)$$

であるが、ここで  $\mathbf{x} \times \nabla \cdot \mathbf{T}$  の  $i$  成分は

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \nabla \cdot \mathbf{T})_i &= \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l T_{lk} = \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j T_{lk} - \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \partial_l T_{lk}) \\ &= \partial_l (-\varepsilon_{kji} x_j T_{lk}) - 0 = -\partial_l (\mathbf{T} \times \mathbf{x})_{li} \end{aligned} \quad (1.32)$$

となるため、角運動量カレント密度テンソルを

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{M}_{li} \equiv T_{lj} \varepsilon_{ijk} x_k \quad (1.33)$$

と定義すれば、角運動量保存の式

$$\frac{\partial \mathbf{L}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{L}_{em}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.34)$$

が成立する。

## 2 電磁波の伝播

### 2.1 真空中の電磁波

境界のない自由空間が真空であり、自由電荷  $\rho = 0$ 、電流  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  とする。真空中の Maxwell 方程式より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$\frac{\partial}{\partial t}(2.3)$  に (2.4) を代入：

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.5)$$

同様に

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{E} \quad (2.6)$$

これらは波動方程式の形であり、自由空間の場合にはその解は平面波の形

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.7)$$

の線形結合で表される。なお実際の物理量はこの右辺の実部を取りだしたものであることに注意せよ。ここで  $\mathbf{k}$  は波数ベクトル、 $\omega$  は角振動数、 $\mathbf{E}_0$  は偏極ベクトルと呼ばれる。この式を (2.1) に代入すると

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (2.8)$$

(2.3) より

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.9)$$

(2.4) に代入して、

$$\mathbf{E} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.10)$$

これと (2.7) より、 $\omega = ck$ 。等位相面は  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{const.}$  で与えられる。これは  $\mathbf{k}$  に垂直な平面であり、等速度  $c$  (真空中の光速) で  $\mathbf{k}$  の向きに進む。波数ベクトルが同じでも  $\mathbf{E}_0$  は 2 方向の自由度があり、これを偏光という。例えば図 2.2 の上の段の図のように、伝播方向が  $z$  方向の場合に、電場ベクトル  $E_0$  が  $x$  方向、もしくは  $y$  方向の定数ベクトルになっていると、電場は一定の向きを保って振動する。これを直線偏光と呼ぶ。さらに 2 つの直交した偏光方向を持つ直線偏光を重ね合わせることで、円偏光、楕円偏光などが得られる。例えば

$$\mathbf{E} = E_0(1, \mp i, 0) e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.11)$$

という形を考えると、これは  $x$  方向の直線偏光と  $y$  方向の直線偏光を、位相  $\mp \pi/2$  だけずらして重ね合わせたものである。実部をとると実際の場の形が得られる。

$$\mathbf{E} = E_0(\cos(kz - \omega t), \pm \sin(kz - \omega t), 0) \quad (2.12)$$

と表され、上の複号は右円偏光、下の複号は左円偏光である (図 2.2)。

なお自由空間でなく境界があるような場合を今後取り扱うが、この場合は (2.6) の解のうち角振動数  $\omega$  で振動する解

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (2.13)$$

を求めることになる。すると (2.6) は **Helmholtz 方程式**

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0, \quad (\nabla^2 + k^2)\mathbf{B} = 0, \quad (2.14)$$

の形となる。ただしここで  $k$  は  $k = \omega/c$  で定義される。

なお物質中では多くの場合近似的に  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  と書けることを述べた。 $\epsilon$  を誘電率、 $\mu$  を透磁率という。この場合の電磁波の速さは、真空中の場合と同様の計算によって

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.15)$$

となる。

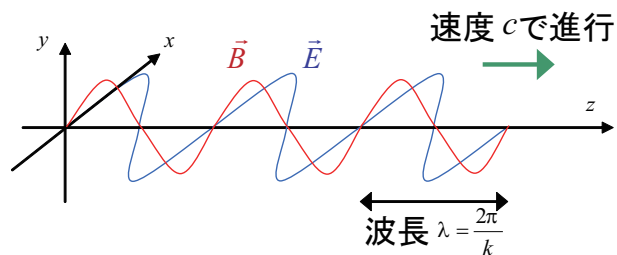


図 2.1: 直線偏光した光

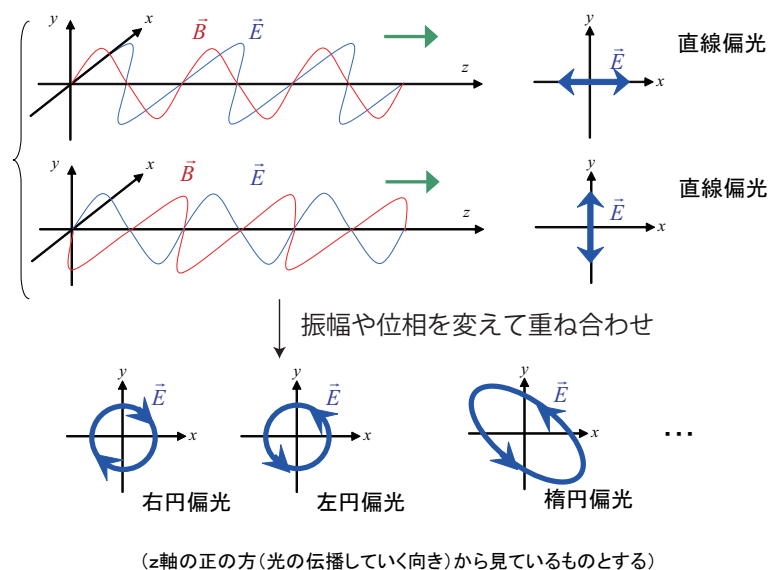


図 2.2: さまざまな偏光

### 電磁波の複素数表示について

ここまでの計算では場の量は全て複素数で扱ったが、これは便宜的なものであり、実際の場の量はこれらの実部で表されることに注意する。式 (2.7)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.16)$$

では、例えば  $\mathbf{E}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\delta}$ ,  $\mathcal{E}_0$ : 実ベクトルとすれば、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta)} \quad (2.17)$$

と書けるが、これは実際の電場としてはその実部

$$\text{Re}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta) \quad (2.18)$$

を表して、虚部は実体をもたない。しかし便宜的に虚部をいれて複素数表示にすることでさまざまな計算が非常に簡単化される。なお Maxwell 方程式等の基本方程式系は全て場に対して線形であるため、こうした複素表示化は問題無く行うことができる。

しかし、注意すべきなのは場同士の積を考える場合である。特に場同士の積の時間平均を行う場合は注意が必要なので、以下に述べる。例えば  $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$ ,  $g(t) = g_0 e^{-i\omega t}$  のように複素表示された 2 つの物理量があるとする。この 2 つの物理量の積の時間平均は

$$\langle \text{Re}f(t) \text{Re}g(t) \rangle = \frac{1}{4} \langle (f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t})(g_0 e^{-i\omega t} + g_0^* e^{i\omega t}) \rangle \quad (2.19)$$

と表される。これを展開して、 $\langle e^{\pm 2i\omega t} \rangle = 0$  を用いると、

$$\langle \text{Re}f(t) \text{Re}g(t) \rangle = \frac{1}{4} (f_0 g_0^* + f_0^* g_0) = \frac{1}{2} \text{Re}(f_0 g_0^*) \quad (2.20)$$

となる。

### 電磁波のエネルギー

ここでは電磁波の持つエネルギー密度を計算しよう。特に  $\mathbf{E}_0$  を実として、

$$\begin{aligned} \text{Re}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \\ \text{Re}\mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \end{aligned}$$

従って、電場エネルギー密度は

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\text{Re}\mathbf{E}|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.21)$$

また磁場エネルギー密度は

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} |\text{Re}\mathbf{B}|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = u_e \quad (2.22)$$

となるので、全エネルギー密度は

$$u_{em} = u_e + u_m = \varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.23)$$

となる。これは時間的、空間的に変動するが、その時間平均は  $\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2$  である。これは上の複素表

示を用いて計算すれば、

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 \text{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{\varepsilon_0}{4} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (2.24)$$

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*) = \frac{\varepsilon_0}{4} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (2.25)$$

$$\langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 \quad (2.26)$$

のように計算される。

### Poynting vector

Poynting vector も同様に計算できる。

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_0} \text{Re} \mathbf{E} \times \text{Re} \mathbf{B} = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\mu_0 \omega} \mathbf{k} \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.27)$$

この時間平均は、

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \text{Re} \mathbf{E} \times \text{Re} \mathbf{B} \rangle = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\mu_0 \omega} \mathbf{k} = \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2}{2} c \hat{k} = \bar{\varepsilon} c \hat{k} \quad (\hat{k} = \mathbf{k}/k) \quad (2.28)$$

これは、平均エネルギー密度  $\bar{\varepsilon}$  が速度  $c$  で、単位ベクトル  $\hat{k}$  の向きに流れていると解釈できる。これも同様に、複素表示を用いて計算すると

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \dots = \bar{\varepsilon} c \hat{k} \quad (\hat{k} = \mathbf{k}/k) \quad (2.29)$$

### 電磁波の運動量

電磁波の運動量の流れは

$$\langle \mathbf{G}_{em} \rangle = \frac{1}{c^2} \langle \mathbf{P} \rangle = \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2}{2c} \hat{k} \quad (2.30)$$

例として、物体に電磁波が垂直入射し、完全に吸収される（黒体）とすると、単位面積に入射する運動量は  $\langle \mathbf{P} \rangle = c \langle \mathbf{G}_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2}{2} \hat{k}$ 。これが電磁波から物体に及ぼされる単位面積当たりの力、つまり圧力となる（輻射圧）。この大きさは  $|\langle \mathbf{P} \rangle| = \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2}{2}$ 。

なお別の場合として、物体表面で完全反射する場合は、 $\mathbf{G}_{em}$  の運動量で入射した電磁波が  $-\mathbf{G}_{em}$  の運動量で反射するため、この差し引きを力積として物体に与え、圧力はこの2倍になる。

## 2.2 媒質界面での電磁場の境界条件

以下では2つの異なる媒質界面での電磁場の境界条件を扱う。基本的には電磁気学 III で扱う物質中の電磁気学の内容であるが、一部、今後使う内容があるので、範囲外であるが以下に記しておく。

### 電場と電束密度

異なる種類の誘電体 1,2 が接している境界面を考えると以下のことが分かる。誘電体 1,2 内の電束密度を  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$  とおくと、電束密度の境界面の法線方向成分は連続、つまり

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (2.31)$$

が成立する。（なお表面の真電荷はゼロとする。）この添え字  $n$  は法線方向成分を表す。この式はガウスの法則を境界面にまたがる閉曲面に適用して得られる。これは、誘電体表面に生じる分極電荷は電束密度に寄与しないことを示している。

電場  $\mathbf{E}$  については、法線方向成分は境界面で連続ではないが、接線成分が連続になる：

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (2.32)$$

この添え字  $t$  は接線方向成分を表す。これを示すには Maxwell 方程式の一つ  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  を、境界面をまたぐ閉曲線に適用して得られる。特に静的な場合には  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  なので任意の場所で  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  を満たす電位  $\phi$  が定義されるが、この電位は境界で連続である。

### 磁場と磁束密度

2 種の異なる媒質 1,2 の境界面での、磁場と磁束密度に関する接続条件を考える。Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.34)$$

を考える。まず (2.33) を用いて、境界をまたぐような柱体を考えて Gauss の定理を適用すると

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (2.35)$$

となる。ただし添え字  $n$  は、境界面の法線ベクトル方向の成分を表す。また、(2.34) を用いて、境界をまたぐような閉曲線を考えて Stokes の定理を適用すると

$$\mathbf{H}_{1,t} = \mathbf{H}_{2,t} \quad (2.36)$$

となる。添え字  $t$  は境界面の接線方向の成分を表す。なおここでは表面電流はゼロとしたが、もし表面電流がある場合はその分だけ磁場の接線方向成分が不連続性を持つ。

### 完全導体表面での電磁場の境界条件

次に、上に述べた例の応用として完全導体を考える。完全導体とは電気伝導率が無限大の導体 ( $\sigma = \infty$ ) である。導体では  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  であるが、完全導体内では  $\sigma = \infty$  なので、電場  $\mathbf{E} = 0$  となる。(さもないと電流密度が無限大となってしまう。) それに伴って完全導体内では電磁波の磁束密度  $\mathbf{B} = 0$  もゼロになる。従って導体表面上で  $\mathbf{E}_t = 0$ ,  $\mathbf{B}_n = 0$  となる。

## 2.3 導波管での電磁波の伝播

制限された空間内を伝播する電磁波は、自由空間中の電磁波とは異なる性質を示す。以下ではその例をいくつか考える。

### 2.3.1 平行導体板にはさまれた空間

まず導波管の例に入る前に、簡単な例として平行導体板にはさまれた空間内の電磁波の伝播を考える。例えば  $y = 0$  および  $y = a$  に無限に広い完全導体板があるとし、この間を  $z$  方向に伝播する電磁波を考える。導体板上での境界条件は  $E_x = 0$ ,  $E_z = 0$ ,  $B_y = 0$  となる。これを満たす電磁波の解を求める簡単な方法は、2つの境界で反射しながら進む電磁波を考えることであり、 $\mathbf{k}_{\pm} = (0, \pm k_{\perp}, k_{\parallel})$  の2つの波数の波を重ね合わせることでできる。それらの電場の一例として

$$\mathbf{E}_+ = (E_+ e^{ik_{\perp}y + ik_{\parallel}z - i\omega t}, 0, 0), \quad \mathbf{E}_- = (E_- e^{-ik_{\perp}y + ik_{\parallel}z - i\omega t}, 0, 0) \quad (2.37)$$

とする（これは後述する TE 波に相当する）となる。これらの和が境界条件  $E_x(y = 0) = 0$ ,  $E_x(y = a) = 0$  を満たす必要がある。まず  $E_x(y = 0) = 0$  より  $E_- = -E_+$  となるので、両方の電場の和は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = (2iE_+ e^{ik_{\parallel}z - i\omega t} \sin(k_{\perp}y), 0, 0) \quad (2.38)$$

となる。さらに  $E_x(y=a)=0$  より、

$$k_{\perp} = \frac{n\pi}{a} \quad (n: \text{整数}) \quad (2.39)$$

である。なお (2.38) より、 $n=0$  のときは電場がゼロとなり、電磁波を表さず不適、また  $n$  が負の場合は正の場合へと帰着されるので、上の  $n$  については正整数のみ考えればよい。すると、簡単のため  $E_0 = 2iE_+$  とおいてみるとマクスウェル方程式を用いて

$$\mathbf{E} = E_0 e^{ik_{\parallel}z - i\omega t} (\sin(k_{\perp}y), 0, 0), \quad (2.40)$$

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{\omega} e^{ik_{\parallel}z - i\omega t} (0, k_{\parallel} \sin(k_{\perp}y), ik_{\perp} \cos(k_{\perp}y)) \quad (2.41)$$

となる。なお分散関係（すなわち角周波数  $\omega$  と波数  $k$  の関係）は、

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 = k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (2.42)$$

となる。これは上式をマクスウェル方程式に入れることで得られる。なお磁束密度  $\mathbf{B}$  は境界条件  $B_y(y=0)=0$ ,  $B_y(y=a)=0$  を自動的に満たしている。なお通常の真空中の電磁波と異なり、伝播方向 ( $z$  方向) に沿った方向にも磁束密度の成分が有限に現れるという特徴がある。

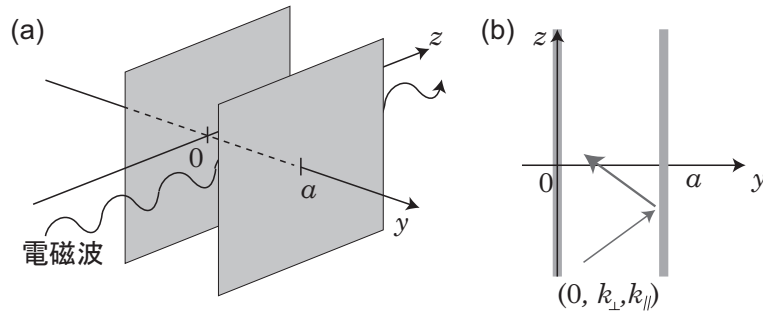


図 2.3: 2 枚の平行導体板の間を伝播する電磁波

$E_0$  は実数としておいて、実数表示をすると、エネルギー密度  $u_{em}$  の時間平均は、 $E_0$  を実数として、

$$\begin{aligned} \langle u_{em} \rangle &= \frac{1}{4} \left( \varepsilon_0 \text{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) + \frac{1}{\mu_0} \text{Re}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*) \right) \\ &= \frac{E_0^2}{4} \left( \varepsilon_0 \sin^2(k_{\perp}y) + \frac{1}{\mu_0 \omega^2} (k_{\parallel}^2 \sin^2(k_{\perp}y) + k_{\perp}^2 \cos^2(k_{\perp}y)) \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

これを  $y$  方向（導体板に垂直な方向）に積分すると

$$\int_0^a dy \langle u_{em} \rangle = \frac{E_0^2 a}{8} \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 \omega^2} (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) \right) = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 a \quad (2.44)$$

となる。

同様の計算により、ポインティングベクトル  $\mathbf{P}$  は時間平均すると  $z$  成分のみを持ち、その値  $P_z$  の時間平均は、

$$\langle P_z \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} k_{\parallel} \sin^2(k_{\perp}y) \quad (2.45)$$

これを  $y$  方向（導体板に垂直な方向）に積分すると

$$\int_0^a dy \langle P_z \rangle = \frac{E_0^2 a}{4\mu_0 \omega} k_{\parallel} \quad (2.46)$$

となる。これらより、電磁波が  $z$  方向にエネルギーを運ぶ速度  $v_z$  は

$$v_z = \frac{\int_0^a dy \langle P_z \rangle}{\int_0^a dy \langle u_{em} \rangle} = \frac{c^2 k_{\parallel}}{\omega} = \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}} c < c \quad (2.47)$$

となる。なおこれは、分散関係 (2.42) から求めた群速度

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_{\parallel}} = \frac{c^2 k_{\parallel}}{\omega} = v_z \quad (2.48)$$

となり一致している。

なお別の例としては、

$$\mathbf{E}_+ = (0, -k_{\parallel}, k_{\perp}) E_+ e^{ik_{\perp} y + ik_{\parallel} z - i\omega t}, \quad \mathbf{E}_- = (0, k_{\parallel}, k_{\perp}) E_- e^{-ik_{\perp} y + ik_{\parallel} z - i\omega t} \quad (2.49)$$

とする（これは後述する TM 波に相当する）となる。これらの和が境界条件  $E_z(y=0) = 0$ ,  $E_z(y=a) = 0$  を満たす必要がある。まず  $E_z(y=0) = 0$  より  $E_- = -E_+$  となるので、両方の電場の和は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 2E_+ e^{ik_{\parallel} z - i\omega t} (0, -k_{\parallel} \cos(k_{\perp} y), ik_{\perp} \sin(k_{\perp} y)) \quad (2.50)$$

となる。 $E_z(y=a) = 0$  より、 $k_{\perp} = \frac{n\pi}{a}$  ( $n$ : 整数) であって、

$$\mathbf{B} = \frac{2E_+(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)}{\omega} e^{ik_{\parallel} z - i\omega t} (\cos(k_{\perp} y), 0, 0) \quad (2.51)$$

すると (2.42) と同じ式が得られる。



### 群速度と位相速度

一般の波動での角周波数  $\omega$  は、伝播方向の波数  $k$  の関数で表される。この  $\omega$  と  $k$  の関係

$$\omega = \omega(k) \quad (2.52)$$

を**分散関係** (dispersion relation) という。例えば真空中の電磁波であれば  $\omega = ck$  と表され、完全に比例関係にあるが、導波管の中を伝播する電磁波等では、(2.42) の  $\omega$  と  $k_{\parallel}$  の関係のように、比例ではなく非線形である。この分散関係から2種類の速度を定義する。

$$v_p = \frac{\omega}{k} : \text{位相速度 (phase velocity)} \quad (2.53)$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} : \text{群速度 (group velocity)} \quad (2.54)$$

まず位相速度は、平面波  $u(x, t) \propto e^{i(kx - \omega t)}$  を考えた場合の等位相面  $kx - \omega t = \text{const.}$  の運動する速度を表している。これは光速を超える場合もあるが、平面波の等位相面は情報を伝えることはできないため、これは「情報を光速より速く伝えることはできない」という相対論の結論に矛盾しない。

一方群速度は、波束を平面波から作ったときの波束の速度である。波束を

$$u(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (2.55)$$

のように平面波の線形結合として作る。 $\hat{u}(k)$  が  $k = k_0$  で最大となるような分布をしていて、 $k = k_0$  から離れると急速に0に近づくとすると、

$$\omega(k) \sim \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) = \omega(k_0) + v_g(k - k_0) \quad (2.56)$$

と近似することが許されて、

$$u(x, t) \sim e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{dk}{2\pi} \hat{u}(k) e^{i(k - k_0)(x - v_g t)} \quad (2.57)$$

と表される。 $e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$  の部分は位相速度  $v_p = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$  で位相が変化していることを表していて、 $\int \frac{dk}{2\pi} \hat{u}(k) e^{i(k - k_0)(x - v_g t)}$  の部分が振幅の情報を表している。この部分は  $x - v_g t$  の関数であるので、波束全体の進行速度は  $v_g$  で与えられる。電磁波の  $v_g$  は光速を超えることはない。

### 2.3.2 導波管内を伝播する電磁波の一般論

以下では  $z$  方向に一様に無限に延びている、完全導体でできた中空パイプの中を伝播する電磁波を考える。すなわち  $z$  軸に垂直な平面で切った断面が一定とする。このような中空導体内を用いると、電磁波が広がらずに  $z$  方向に伝播していくことができる。こうした中空導体を**導波管** (wave guide) という。こうした導波管内の電磁波の伝播を求めよう。

$z$  軸正の向きに伝播する電磁波を考えると、 $z$  軸方向には並進対称性から波数  $k_{\parallel}$  で伝播しているとして、

$$\mathbf{E} = e^{ik_{\parallel} z - i\omega t} (\bar{E}_x(x, y), \bar{E}_y(x, y), \bar{E}_z(x, y),), \quad \mathbf{B} = e^{ik_{\parallel} z - i\omega t} (\bar{B}_x(x, y), \bar{B}_y(x, y), \bar{B}_z(x, y),), \quad (2.58)$$

と置く。Maxwell 方程式より

$$i\omega \bar{B}_x = \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} - ik_{\parallel} \bar{E}_y \quad (2.59)$$

$$i\omega \bar{B}_y = ik_{\parallel} \bar{E}_x - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} \quad (2.60)$$

$$i\omega \bar{B}_z = \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y} \quad (2.61)$$

$$-\frac{i\omega}{c^2} \bar{E}_x = \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} - ik_{\parallel} \bar{B}_y \quad (2.62)$$

$$-\frac{i\omega}{c^2} \bar{E}_y = ik_{\parallel} \bar{B}_x - \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \quad (2.63)$$

$$-\frac{i\omega}{c^2} \bar{E}_z = \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial y} \quad (2.64)$$

となる。これらをよく見ると、 $\bar{E}_z$  と  $\bar{B}_z$  により他の成分が表されている形になっていることが分かる。例えば (2.60)(2.62) から、 $\bar{E}_x$  および  $\bar{B}_y$  を、 $\bar{E}_z$  と  $\bar{B}_z$  で表すと、

$$\begin{pmatrix} ik_{\parallel} & -i\omega \\ -\frac{i\omega}{c^2} & ik_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_x \\ \bar{B}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

より

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_x \\ \bar{B}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \begin{pmatrix} ik_{\parallel} & i\omega \\ \frac{i\omega}{c^2} & ik_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

となる。すなわち

$$\bar{E}_x = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \left( k_{\parallel} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \right) \quad (2.67)$$

$$\bar{E}_y = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \left( k_{\parallel} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \right) \quad (2.68)$$

$$\bar{B}_x = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \left( -\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} + k_{\parallel} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \right) \quad (2.69)$$

$$\bar{B}_y = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \left( \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} + k_{\parallel} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \right) \quad (2.70)$$

と表せる。また残りの Maxwell 方程式から  $\bar{E}_z$ ,  $\bar{B}_z$  はともに 2 次元の Helmholtz 方程式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) \bar{E}_z = 0 \quad (2.71)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) \bar{B}_z = 0 \quad (2.72)$$

を満たす。ただし

$$k_{\perp}^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 \quad (2.73)$$

とおいた。すなわちこれらを満たす  $\bar{E}_z$ ,  $\bar{B}_z$  を求めれば、それより電場・磁場が求まることになり、問題は、2 次元のヘルムホルツ方程式 (2.71) (2.72) を解くことに帰着される。

上のように  $\bar{E}_z$  と  $\bar{B}_z$  についての方程式に分かれるので、特別な解として  $\bar{E}_z = 0$  となる解を考える。これは **TE**(transverse electric) 波と呼ばれ、電場の進行方向成分がゼロとなり電場が完全に横波となるためにこのように呼ばれている。また  $\bar{B}_z = 0$  となる解は **TM**(transverse magnetic) 波と呼ばれ、磁場が完全に横波となっている。また  $\bar{E}_z = 0, \bar{B}_z = 0$  となる解を **TEM** 波と呼ぶ。

### TE 波

$\bar{E}_z = 0$  とおくと、

$$\bar{E}_x = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \omega \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \quad \bar{E}_y = -\frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \omega \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \quad (2.74)$$

$$\bar{B}_x = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} k_{\parallel} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \quad \bar{B}_y = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} k_{\parallel} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \quad (2.75)$$

となる。なお境界条件としては、導体表面での法線方向の磁束密度  $B_n$  がゼロであることだが、それは法線方向の単位ベクトル  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$  を用いて、 $B_n = B_x n_x + B_y n_y \propto \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} n_y = \mathbf{n} \cdot \nabla \bar{B}_z = 0$  と書かれる。つまり境界条件は

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \bar{B}_z = \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial n} = 0 \quad (2.76)$$

である。これはノイマン型境界条件と呼ばれる境界条件の1つである。

### TM 波

$\bar{B}_z = 0$  とおくと、

$$\bar{E}_x = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} k_{\parallel} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} \quad \bar{E}_y = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} k_{\parallel} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} \quad (2.77)$$

$$\bar{B}_x = -\frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} \quad \bar{B}_y = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2} \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} \quad (2.78)$$

と表せる。境界条件としては法線ベクトル  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$  に対して、 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = (n_y \bar{E}_z, -n_x \bar{E}_z, n_x \bar{E}_y - n_y \bar{E}_x) = 0$  であるべきなので、境界上で

$$\bar{E}_z = 0, \quad n_x \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} - n_y \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} = 0 \quad (2.79)$$

という境界条件となる。

### TEM 波

(2.67)-(2.70) において  $\bar{B}_z = 0, \bar{E}_z = 0$  とおくと、通常は全ての場がゼロとなって電磁波とはならない。しかし例外があって  $k_{\parallel} = \frac{\omega}{c}$  (すなわち  $k_{\perp} = 0$ ) のときのみ分母がゼロになるため、これらの式の左辺の場が非ゼロになる可能性がある。すると (2.65) 等より、

$$\bar{E}_x = c \bar{B}_y, \quad \bar{E}_y = -c \bar{B}_x \quad (2.80)$$

となり、また

$$\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y} = 0, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial y} = 0, \quad (2.82)$$

となる。これから、2次元の静電ポテンシャル  $\varphi(x, y)$  を

$$\bar{E}_x = -\partial_x \varphi(x, y), \quad \bar{E}_y = -\partial_y \varphi(x, y), \quad (2.83)$$

として導入すれば、この  $\varphi$  が2次元 Laplace 方程式

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = 0 \quad (2.84)$$

を満たすことが分かる。境界条件としては、導体表面で  $\mathbf{E}_t = 0$ 、すなわち  $\varphi = \text{const.}$  となる。なお Laplace 方程式の解については、導波管断面が単連結であれば導波管内部での  $\varphi$  は一定値であることが知られていて、電磁場はゼロとなる (Earnshaw の定理)。すなわち TEM 波は存在しない。単連結でないときにのみ、非自明な TEM 波の解が存在する。

### 2.3.3 長方形型の導波管内を伝播する電磁波

ここでは例として、 $x$  方向の長さが  $a$ 、 $y$  方向の長さが  $b$  であるような長方形 ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ) の断面を持つ無限に長い導波管を考えよう。

#### TE 波

境界条件は

$$\left. \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0, \quad (2.85)$$

である。これを満たす (2.72) の解は、

$$\bar{B}_z = B_0 \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (2.86)$$

となる。 $n, m$  は負でない整数である。これから (2.72) より、

$$k_\perp^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_\parallel^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \quad (2.87)$$

となる。なお  $n = m = 0$  の場合は  $k_\perp = 0$  となり、上に述べたように TEM 波に対応するが、この場合は領域が単連結なので非自明な TEM 波は存在しない。そのため  $n = m = 0$  の場合は除外する。

なお周波数  $\omega$  は

$$\frac{\omega}{c} = \sqrt{k_\parallel^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} \quad (2.88)$$

となる。例えば  $a > b$  と仮定すると、周波数の最小値は  $\omega_{\min} = \frac{\pi}{a}c$  となる。この周波数より低い電磁波はこの導波管を伝播しない。このような伝播周波数のことを**切断周波数** (cut-off frequency) という。

#### TM 波

$\bar{B}_z = 0$  なので、境界条件は

$$\bar{E}_z|_{x=0,a} = 0, \quad \bar{E}_z|_{y=0,b} = 0, \quad (2.89)$$

となる。このときの Helmholtz 方程式の解は

$$\bar{E}_z = E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (2.90)$$

となる。 $n, m$  は正の整数である。これから

$$k_\perp^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_\parallel^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \quad (2.91)$$

となる。切断周波数は  $n = 1, m = 1$  のときで、 $\omega_{\min} = c\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}}$  となる。

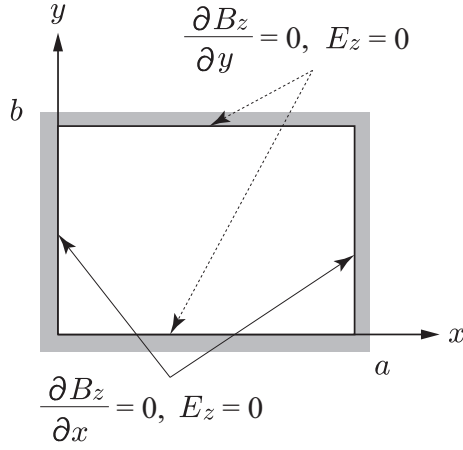


図 2.4: 長方形の断面を持つ導波管の内部の電磁波の境界条件

### 2.3.4 円形断面の導波管内を伝播する電磁波

$x, y$  面内の半径  $a$  の円  $x^2 + y^2 = a^2$  を断面に持つ導波管を考える。ここで円筒座標を考えて、 $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $z = z$  と書く。すると

$$\mathbf{e}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \quad (2.92)$$

となる。すると円筒座標での発散と回転は、 $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_z \mathbf{e}_z$  に対して、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (2.93)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\theta \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \quad (2.94)$$

従ってマクスウェル方程式は、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (2.95)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (2.96)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -\frac{\partial B_\rho}{\partial t} \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \quad (2.98)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \theta} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.99)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} \quad (2.101)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\rho}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.102)$$

なお円筒表面の法線ベクトルが  $\mathbf{e}_\rho$  であるので、境界条件は、 $B_\rho(\rho = a) = 0$ ,  $E_\theta(\rho = a) = E_z(\rho = a) = 0$  である。

ここで導波管内の電磁波の形は

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}}(\rho, \theta) e^{i(k_\parallel z - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}(\rho, \theta) e^{i(k_\parallel z - \omega t)} \quad (2.103)$$

と書けるので、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \bar{E}_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{E}_\theta}{\partial \theta} + ik_{\parallel} \bar{E}_z = 0, \quad (2.104)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \bar{B}_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{B}_\theta}{\partial \theta} + ik_{\parallel} \bar{B}_z = 0, \quad (2.105)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \theta} - ik_{\parallel} \bar{E}_\theta = i\omega \bar{B}_\rho, \quad (2.106)$$

$$ik_{\parallel} \bar{E}_\rho - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \rho} = i\omega \bar{B}_\theta \quad (2.107)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \bar{E}_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{E}_\rho}{\partial \theta} = i\omega \bar{B}_z \quad (2.108)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \theta} - ik_{\parallel} \bar{B}_\theta = -\frac{i\omega}{c^2} \bar{E}_\rho \quad (2.109)$$

$$ik_{\parallel} \bar{B}_\rho - \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \rho} = -\frac{i\omega}{c^2} \bar{E}_\theta \quad (2.110)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \bar{B}_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{B}_\rho}{\partial \theta} = -\frac{i\omega}{c^2} \bar{E}_z \quad (2.111)$$

となる。これから、全ての成分は  $\bar{B}_z$  と  $\bar{E}_z$  のみで表されることが分かる。 $k_{\perp} \equiv \sqrt{(\frac{\omega}{c})^2 - k_{\parallel}^2}$  とおくと、

$$\bar{E}_\rho = \frac{i}{k_{\perp}^2} \left( \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \theta} + k_{\parallel} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \rho} \right), \quad (2.112)$$

$$\bar{E}_\theta = \frac{i}{k_{\perp}^2} \left( -\omega \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \rho} + \frac{k_{\parallel}}{\rho} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \theta} \right), \quad (2.113)$$

$$\bar{B}_\rho = \frac{i}{k_{\perp}^2} \left( k_{\parallel} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \rho} - \frac{\omega}{c^2 \rho} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \theta} \right), \quad (2.114)$$

$$\bar{B}_\theta = \frac{i}{k_{\perp}^2} \left( \frac{k_{\parallel}}{\rho} \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \theta} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \rho} \right), \quad (2.115)$$

さらに、 $\bar{B}_z$ ,  $\bar{E}_z$  は次のような方程式を満たす。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_{\perp}^2 \right) \bar{E}_z = 0, \quad (2.116)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_{\perp}^2 \right) \bar{B}_z = 0 \quad (2.117)$$

このように  $\bar{E}_z$  に関する方程式と  $\bar{B}_z$  に関する方程式に分離されるため、 $\bar{B}_z$  のみ nonzero になる解と、 $\bar{E}_z$  のみ nonzero になる解に分離される。これらがそれぞれ TE 波、TM 波に対応する。

## TE 波

円筒内で  $\bar{E}_z \equiv 0$  となる解を考える。 $\bar{B}_z$  に関する方程式 (2.117) を境界条件

$$\frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \rho}(\rho = a) = 0 \quad (2.118)$$

の下で解けば良い。

この方程式は変数分離法によって解くことができる。 $\bar{B}_z(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$  とおくと、

$$\frac{\rho^2}{R} \left( \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right) + k_{\perp}^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (2.119)$$

左辺は  $\rho$  のみ、右辺は  $\theta$  のみの関数なので、これは定数である。これを  $\nu^2$  とおくと、 $\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\nu^2\Theta$  より、 $\Theta = e^{\pm i\nu\theta}$  となる。これは  $\theta$  の一価関数であることより、 $\nu$  は整数となる。また

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_{\perp}^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (2.120)$$

において、 $x = k_{\perp}\rho$  とおくと、Bessel 方程式

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (2.121)$$

が得られる。

この解として、

$$J_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \quad (2.122)$$

で表される、位数  $\nu$  の Bessel 関数が知られている。なお Bessel 方程式は 2 階線形常微分方程式のため、 $J_{\nu}(x)$  と独立な解がある。 $\nu$  が非整数ならもう一つの解は  $J_{-\nu}(x)$  で与えられる。一方今回の場合  $\nu$  が整数なので、 $\nu = n$  (整数) と書くことにすると、この場合は、

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.123)$$

となり  $J_n(x)$  と  $J_{-n}(x)$  とが独立ではない。このときは

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_{\nu}(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (2.124)$$

で定義される Neumann 関数  $N_n(x)$  が、もう一つの解となる。なお Neumann 関数は  $x = 0$  で発散するため、Neumann 関数から出てくる解は  $\rho = 0$  で発散することになり、物理的には不可能である。そのため Neumann 関数は考えなくてよい。

すると、結局

$$\bar{B}_z(\rho, \theta) = B_0 J_n(k_{\perp}\rho) e^{in\theta} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.125)$$

となる。 $n$  と  $-n$  の 2 つの場合は、場の実部をとると同一になるので、 $n \geq 0$  に限ってよい。Bessel 関数は図 2.3.4 に示すように、 $x = 0$  から  $x$  を増加させていくと振動しながら減衰する。 $J'_n(x)$  の  $m$  番目の零点 (ただし  $x = 0$  を除く) を  $\gamma_{nm}(m = 0, 1, 2, \dots)$  とすると、境界条件を満たすためには

$$k_{\perp} = \frac{\gamma_{nm}}{a} \quad (2.126)$$

となる。導波管内を伝播する電磁波の分散関係は、上の  $k_{\perp}$  を用いて  $(\frac{\omega}{c})^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2$  となる。

### TM 波

円筒内で  $\bar{B}_z \equiv 0$  となる解を考える。 $\bar{E}_z$  に関する方程式 (2.116) を境界条件

$$\bar{E}_z(\rho = a) = 0 \quad (2.127)$$

の下で解けば良い。TE 波のときと同様に解くと

$$\bar{E}_z(\rho, \theta) = E_0 J_n(k_{\perp}\rho) e^{in\theta} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.128)$$

となる。式 (2.127) より、 $J_n(x)$  の  $m$  番目の零点 (ただし  $x = 0$  を除く) を  $\beta_{nm}(m = 0, 1, 2, \dots)$  とすると、境界条件を満たすためには

$$k_{\perp} = \frac{\beta_{nm}}{a} \quad (2.129)$$

となる。導波管内を伝播する電磁波の分散関係は、上の  $k_{\perp}$  を用いて  $(\frac{\omega}{c})^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2$  となる。

なお導波管が単連結のため、TEM 波は存在しない。

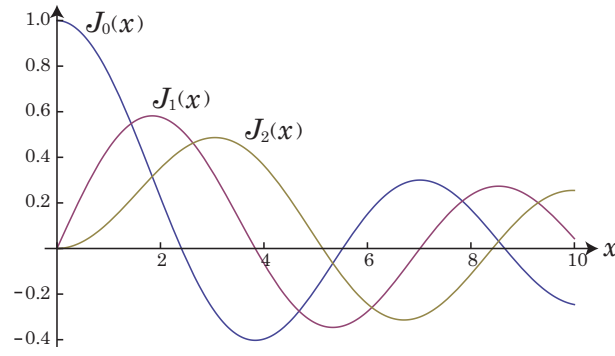


図 2.5: Bessel 関数の例

### 3 電磁波の回折

平面波として伝播している電磁波を、開口部を持つ平面で遮ると、開口部を通った電磁波は直進せず、一部回り込むように伝播する。これを**回折** (diffraction) という。これを簡便な形で表現したのが **Huygens の原理** (ホイヘンスの原理) である。Huygens の原理とは、波面 (つまり等位相面) の上の各点から放出される球面波の包絡線が次の時刻の波面となるというものである。以下ではこれを一般化して数学的に整備した形で説明する。

電磁波には電場・磁場のさまざまな成分を持っているが、そのうちの 1 成分を選んで  $\psi(\mathbf{x}, t)$  とかく。これを用いて回折現象を記述する。 $\psi$  は波動方程式

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.1)$$

を満たすが、これが周波数  $\omega$  を持つとすると、 $\psi(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  と書けて、 $U$  は Helmholtz 方程式

$$(\nabla^2 + k^2) U(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.2)$$

を満たす。ただし  $k \equiv \omega/c$  である。

この Helmholtz 方程式は球面波解

$$U_0(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.3)$$

を持つ。なお  $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であり、

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \quad (3.4)$$

は原点から球対称に広がって伝播する球面波を表している。正確に言うところの球面波解は原点  $\mathbf{x} = 0$  以外で Helmholtz 方程式を満たしており、より正確に書くとこの球面波解は

$$(\nabla^2 + k^2) U_0(\mathbf{x}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

を満たす。(なおこのように、左辺がヘルムホルツ方程式と同一で、右辺が 0 の代わりに  $-\delta^3(\mathbf{x})$  になるような方程式の解を、ヘルムホルツ方程式の Green 関数という。すなわち Helmholtz 方程式の Green 関数は  $\frac{1}{4\pi} U_0(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$  である。これについては後に扱う。)



### 3.1 キルヒホッフの積分表示

ここでは Helmholtz 方程式の解  $U(\mathbf{x})$  について考える。ある点  $P$  と、それを囲む閉曲面  $S$  を考えたときに、以下のような手続きによって、点  $P$  での  $U$  の値  $U(P)$  を、閉曲面  $S$  上での  $U(\mathbf{x})$  の値を用いて表すことができる。ここでは  $U$  が (3.2) を満たし、 $U_0$  が (3.5) を満たすことを用いる。なおこの点  $P$  は、回折現象を観測する点に対応している。

まず記法を簡単にするため、点  $P$  を原点とする座標をとって考えることにする。まず点  $P$  を中心とする囲む小さな球面  $S'$  を考える。 $S$  で囲まれる領域に球面  $S'$  が完全に含まれるように、この球面  $S'$  の半径は十分小さい値とする。このとき、 $S$  と  $S'$  とではさまれる領域  $V$  について Green の定理により、

$$\begin{aligned} \int_S (U \nabla U_0 - U_0 \nabla U) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S'} (U \nabla U_0 - U_0 \nabla U) \cdot \mathbf{n} dS &= - \int_V (U \nabla^2 U_0 - U_0 \nabla^2 U) dV \\ &= - \int_V (U (\nabla^2 + k^2) U_0 - U_0 (\nabla^2 + k^2) U) dV \end{aligned} \quad (3.6)$$

である。なおここでは法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を図 3.1 に示すように内向きにとっているため、マイナスがついている。この右辺は (3.2)、(3.5) から、 $-4\pi \int_V U \delta^3(\mathbf{x}) dV$  となるが、領域  $V$  には点  $P$  が含まれていないのでこれはゼロである。

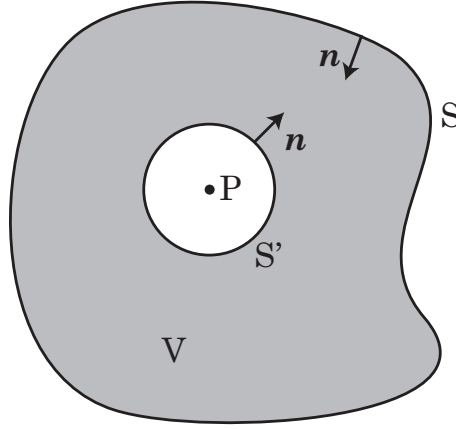


図 3.1: Kirchhoff 積分表示の導出

ここで球面  $S'$  上の積分を評価する。球面上では  $\mathbf{n} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}$  であるので、

$$\begin{aligned} \int_{S'} (U \nabla U_0 - U_0 \nabla U) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S'} \left( U \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) r^2 d\Omega \\ &= \int_{S'} \left( ikrU - U - r \frac{\partial U}{\partial r} \right) e^{ikr} d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。ここで球面  $S'$  の半径  $R$  について  $R \rightarrow 0$  とすると、右辺は第 2 項のみ残り、 $-U(P) \int d\Omega = -4\pi U(P)$  となる。これより、**Kirchhoff の積分表示**

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( U \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \nabla U \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.8)$$

が得られる。これは Helmholtz 方程式を満たす関数  $U(\mathbf{x})$  に関して、点  $P$  での値を、点  $P$  を囲む閉曲面  $S$  上での値から求める式である。

### 3.2 回折

スクリーンに小さな穴があり、そこに点  $P_0$  にある点光源から光があたり、それをスクリーンの反対側にある点  $P$  で観測することを考える。穴のある点を中心とする半球面で、 $P$  を含む大きな半球面を  $S_3$ 、穴を覆う小さな半球面を  $S_1$  として、 $S_1 + S_2 + S_3$  が閉曲面になるようにスクリーンにそった平面上に  $S_2$  を取る。閉曲面  $S_1 + S_2 + S_3$  について、Kirchhoff の積分表示を用いて、点  $P$  での電磁波の値を求める。

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left( \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} \right) \left( U \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \nabla U \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.9)$$

#### 曲面 $S_1$

点光源  $P_0$  から、 $S_1$  上の点  $Q$  へと至るベクトルを  $\mathbf{x}_0 \equiv \overrightarrow{P_0 Q}$  とし、その2点間の距離を  $r_0 \equiv |\mathbf{x}_0|$  とすると、 $Q$  での光の強度は、 $P_0$  から出る球面波から

$$U = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \quad (3.10)$$

となる。すると  $\nabla$  は  $Q$  の位置に関する微分なので

$$\mathbf{n} \cdot \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r_0} \frac{\mathbf{x}_0}{r_0} \cdot \mathbf{n} \quad (3.11)$$

となるが、ここで  $\mathbf{x}_0$  と、 $Q$  での単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  とのなす角を  $\Theta_0$  とおくと、上式は

$$\mathbf{n} \cdot \nabla U = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \left( ik - \frac{1}{r_0} \right) \cos \Theta_0 \quad (3.12)$$

また、観測点  $P$  から、 $S_1$  上の点  $Q$  へと至るベクトルを  $\mathbf{x} \equiv \overrightarrow{PQ}$  とし、その2点間の距離を  $r \equiv |\mathbf{x}|$  とする。さらに  $\mathbf{x}$  と、 $Q$  での単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  とのなす角を  $\Theta$  とおくと、

$$\nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{e^{ikr}}{r} \left( ik - \frac{1}{r} \right) \cos \Theta \quad (3.13)$$

となる。

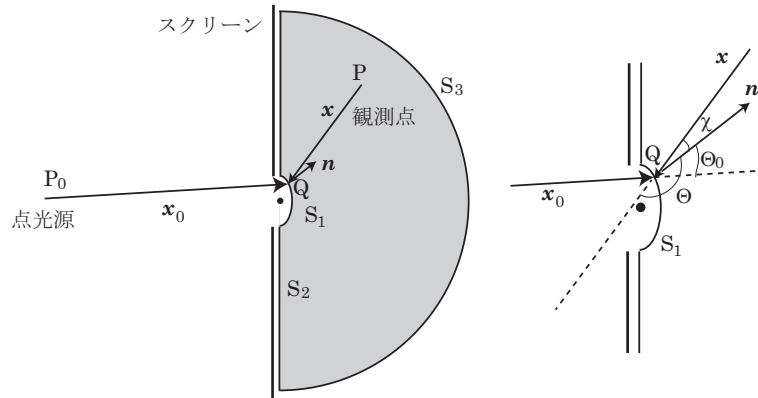


図 3.2: 回折

#### 曲面 $S_2$

曲面  $S_2$  はスクリーン上で点光源と反対側なので、 $U = 0$ ,  $\nabla U = 0$  とおいてよい。(これは本当は近似的にしかな正しくないが、ここではこの近似を採用する)

### 曲面 $S_3$

曲面  $S_3$  上の積分は、曲面の半径  $R$  を十分大きく取るとゼロになる。なぜなら被積分関数は  $1/R^3$  で減衰するが、表面積は  $R^2$  に比例して大きくなるため、全体はたかだか  $1/R$  のオーダーでゼロに収束するためである。

### 回折公式

これらの結果をまとめるときに、 $P$ 、 $P_0$  が  $Q$  から波長に比べて十分遠いとして、 $1/r^2$ 、 $1/r_0^2$  のオーダーの項を無視すると、

$$U(P) = \frac{ikA}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} (\cos \Theta - \cos \Theta_0) dS \quad (3.14)$$

となる。これを **Fresnel-Kirchhoff の回折積分の公式** という。

ここで特に  $S_1$  の取り方は任意なので、特に  $S_1$  を、中心が  $P_0$  で半径が  $r_0 \equiv \overline{P_0 Q}$  である球面にとると、 $\cos \Theta_0 = 1$  であり、 $\rightarrow QP$  が球面の法線となす角を  $\chi$  として、 $\Theta = \pi - \chi$  なので、(3.14) より、

$$U(P) = -\frac{ikA}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} (1 + \cos \chi) dS \quad (3.15)$$

となり、 $\arg(-i) = -\pi/2$  より、回折波は入射波にくらべて位相が  $-\pi/2$  だけ変化していることがわかる。

#### 3.2.1 Fraunhofer 回折

特別な場合として、光源  $P_0$  がスクリーンから非常に遠く、入射波がスクリーンに垂直に進む平面波とみなせる場合を考える。スクリーンの法線方向を  $z$  軸とし、スクリーンの位置を  $z = 0$  とし、座標の原点が穴の中の一点となるようにとる。すると、入射波は  $U = Ae^{ikz}$  と書ける。 $S_1$  はスクリーンの平面上の穴の断面とすると観測点  $P$  での振幅は、Kirchhoff の積分表示から

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left( Ae^{ikz} \nabla \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \nabla (Ae^{ikz}) \right) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{A}{4\pi} \int_{S_1} e^{ikz} \left( \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \left( ik - \frac{1}{r} \right) \cos \Theta - \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) ik \right) dS \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここで  $S_1$  上では  $z = 0$  であり、また観測点がスクリーンから十分離れているとして  $1/r^2$  の項を無視すると、

$$U(P) = \frac{ikA}{4\pi} \int_{S_1} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) (\cos \Theta - 1) dS = -\frac{ikA}{4\pi} \int_{S_1} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) (1 + \cos \chi) dS \quad (3.17)$$

となる。さらに観測点  $P$  がスクリーンから十分遠く、さらに角度  $\chi$  が小さい場合を考えると、 $r$  および  $\chi$  の代わりに、穴の中にある原点から測った距離  $r'$  と角度  $\delta$  で近似できる。

$$U(P) = -\frac{ikA}{4\pi} \frac{1 + \cos \delta}{r'} \int_{S_1} e^{ikr} dS \quad (3.18)$$

なおここでは  $e^{ikr}$  の部分は  $r \sim r'$  と近似しないが、その理由は、ここがスクリーン上の穴  $S_1$  内の点  $Q$  の位置により激しく振動するために、この近似が許されないためである。

穴  $S_1$  上の積分を計算するため、穴の中の点  $Q$  の座標を  $(\xi, \eta, 0)$ 、観測点  $P$  の座標を  $(x, y, z)$  とおくと、

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}, \quad (3.19)$$

ここで穴の大きさ (つまり  $\xi, \eta$ ) が  $r' = \overline{OP}$  より十分小さいとして  $r$  を近似し、 $\xi/r$ 、 $\eta/r$  で展開するとの1次まで残すと

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} = \sqrt{r'^2 - 2(\xi x + \eta y) + \xi^2 + \eta^2} \sim \sqrt{r'^2 - 2(\xi x + \eta y)} = r' \left( 1 - \frac{2(\xi x + \eta y)}{r'^2} \right)^{1/2} \\ &\sim r' - \frac{\xi x + \eta y}{r'} \end{aligned} \quad (3.20)$$

なおここでは、 $\xi/r', \eta/r'$  に関して2次の項の影響が無視できる、つまり

$$\frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{r'} \ll \frac{\pi}{2} \quad (3.21)$$

と仮定している。これは穴が小さい場合に成立する。この仮定の下で、

$$U(P) = C \int_{S_1} e^{-\frac{ik(\xi x + \eta y)}{r'}} dS \quad (3.22)$$

となる。これを **Fraunhofer 回折** の公式という。

### 円形の穴の場合の Fraunhofer 回折

穴が半径  $a$  の円  $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$  だとすると、 $\xi, \eta$  を極座標表示して、さらに観測点の位置  $(x, y, z)$  について  $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$  として、

$$U(P) = C \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\phi r e^{-\frac{ik\rho r \cos \phi}{r'}} = 2\pi C \int_0^a r J_0(k\rho r/r') dr = \frac{2\pi a C r'}{k\rho} J_1(ak\rho/r') \quad (3.23)$$

となり、波の強度は

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left( \frac{2\pi a C r'}{k\rho} J_1(ak\rho/r') \right)^2 \quad (3.24)$$

となる。スクリーン上での強度分布は、動径方向に図 3.2.1 のような形になる

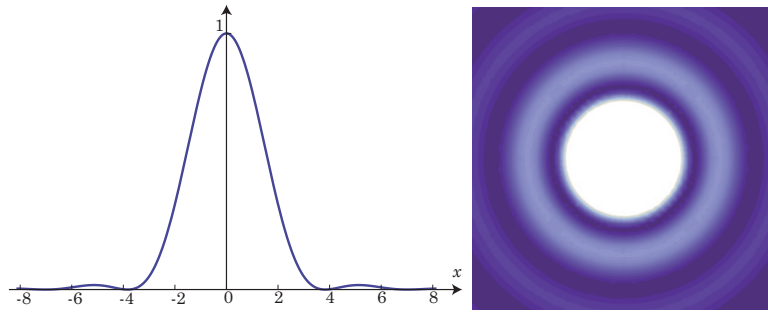


図 3.3: (左) 円形の穴の場合の Fraunhofer 回折の強度分布を表す関数  $(2J_1(x)/x)^2$ 。(右) 円形の穴での回折像。

### 長方形の穴の場合の Fraunhofer 回折

穴が  $-a \leq \xi \leq a, -b \leq \eta \leq b$  のような長方形だとすると、

$$U(P) = C \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b d\eta e^{-\frac{ik(\xi x + \eta y)}{r'}} = 4abC \left( \frac{\sin(kxa/r')}{(kxa/r')} \frac{\sin(kyb/r')}{(kyb/r')} \right) \quad (3.25)$$

となり、波の強度は

$$I(P) = |U(P)|^2 \propto \left( \frac{\sin(kxa/r')}{(kxa/r')} \right)^2 \left( \frac{\sin(kyb/r')}{(kyb/r')} \right)^2 \quad (3.26)$$

となる。スクリーン上での強度分布は、 $x$  軸、 $y$  軸方向とも図 3.2.1 のような形になる

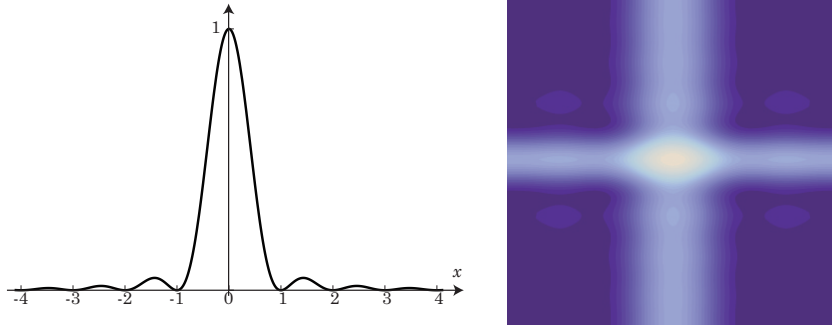


図 3.4: (左) 長方形の穴の場合の Fraunhofer 回折の強度分布を表す関数  $(\sin x/x)^2$ 。(右) 縦横比が 1:2 の長方形の穴での回折像。

### 3.2.2 Fresnel 回折

上の Fraunhofer 回折では、条件 (3.21) を仮定している。これは穴が十分小さく観測面が十分遠いことが仮定されている。この条件が成り立たない場合は **Fresnel 回折** と呼ばれる。この場合は (3.18) の積分を、指数部の近似をせずに計算する必要がある。簡単のために入射波は平面波でそれを穴のほぼ正面で観測することを考え、 $\delta$  が小さいとすると、 $\cos \delta \sim 1$ ,  $r' \sim z$  として、

$$U(P) = -\frac{ikA}{2\pi z} \int_{S_1} e^{ikr} dS \quad (3.27)$$

となる。ここで

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \sim z + \frac{1}{2z} \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\} \quad (3.28)$$

と近似する。これは  $(x - \xi)/z$ ,  $(y - \eta)/z$  が小さいとする近似である。すると、

$$U(P) = -\frac{ikA}{2\pi} \frac{e^{ikz}}{z} \int_{S_1} \exp\left(\frac{ik}{2z} \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}\right) d\xi d\eta \quad (3.29)$$

となる。

#### ナイフエッジによる Fresnel 回折

$z = 0$  面内の  $\xi \leq 0$  の領域のみに障害物があるときに、これによる Fresnel 回折を計算してみよう。

$$U(x, y) = -\frac{ikA}{2\pi} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^\infty \exp\left(\frac{ik}{2z}(x - \xi)^2\right) d\xi \int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{ik}{2z}(y - \eta)^2\right) d\eta \quad (3.30)$$

となる。この積分をもう少し見やすい形にするため、

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(\xi - x), \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(\eta - y), \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(-x), \quad (3.31)$$

とおくと

$$U(x) = -\frac{iAe^{ikz}}{2} \int_{\alpha_0}^\infty e^{i\frac{\pi}{2}\alpha^2} d\alpha \int_{-\infty}^\infty e^{i\frac{\pi}{2}\beta^2} d\beta = \frac{(1-i)Ae^{ikz}}{2} [C(\infty) - C(\alpha_0) + i(S(\infty) - S(\alpha_0))] \quad (3.32)$$

となる。なおここで、

$$C(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha, \quad S(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha \quad (3.33)$$

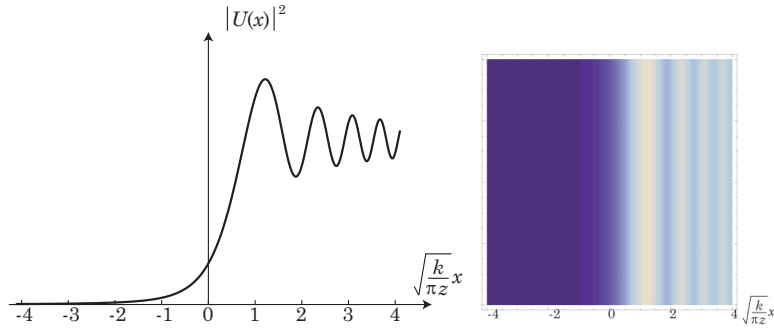


図 3.5: (左) ナイフエッジでの Fresnel 回折の強度分布。(右) 回折像。

は **Fresnel 積分** と呼ばれる。なお特に  $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$  である。電磁波の強度は

$$|U(x)|^2 \propto (C(\infty) - C(\alpha_0))^2 + (S(\infty) - S(\alpha_0))^2 \quad (3.34)$$

である。

## 4 電磁ポテンシャルとゲージ変換

### 4.1 電磁ポテンシャルとゲージ変換

式 (1.2) より

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.1)$$

と書ける。 $\mathbf{A}$  をベクトルポテンシャルという。これを式 (1.3) に代入すると

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.2)$$

従って

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.3)$$

ここで  $\phi$  をスカラーポテンシャルという。 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  は観測可能量であるが、そこから上記の手続きに従って  $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  を求めるときには偏微分方程式を解くことになり、任意関数分の不定性が生じる。(常微分方程式での積分定数に相当する。) この不定性はゲージ自由度と呼ばれる。実際、 $\chi(\mathbf{x}, t)$  を任意関数として、

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (4.4)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4.5)$$

としても、これらによって決まる  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  は同じになる。この変換を**ゲージ変換**という。これらの式を Maxwell 方程式の残りの式に代入すると

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (4.6)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (4.7)$$

#### 4.1.1 Coulomb gauge

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を満たすゲージをクーロンゲージと呼ぶ。このときは、元々の  $\mathbf{A}$  に対して適切に  $\chi$  を選んで、ゲージ変換後のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$  が  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$  を満たすようにする。すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla\chi) = 0 \implies \nabla^2\chi = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (4.8)$$

という方程式を解いて  $\chi$  を求める。これは  $\chi$  に関する Poisson (ポアソン) 方程式である。

すると Coulomb gauge でのスカラーポテンシャルを  $\phi_C$ 、ベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}_C$  と書くと、

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_C = 0, \quad (4.9)$$

$$-\nabla^2\phi_C = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{A}_C + \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \mu_0\mathbf{j}, \quad (4.11)$$

となる。

#### Poisson 方程式の解

式 (4.10) や (4.8) は Poisson 方程式である。この解は以下のように書くことができる。例えば静電気学においては、電位  $\phi$  は電荷密度  $\rho$  と

$$-\nabla^2\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (4.12)$$

のように Poisson 方程式で結ばれていて、これを解くのは電荷分布から電位分布を求めることであってその解は、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.13)$$

となる。これが解になるのは、

$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\right) = -\delta^3(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

を用いると確かめられる。すなわち、(4.13) から、

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}}^2 \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad (4.15)$$

となる。(4.14) は物理的には、原点にある、単位電荷を持つ点電荷の作る電位分布が  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{x}|}$  となっていることを意味する。また数学的には、Poisson 方程式の Green 関数が  $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$  で与えられると表現される。すなわち Green 関数を知ることによって Poisson 方程式の一般解が書き下せたことになる。

### Poisson 方程式の Green 関数

上で Poisson 方程式の Green 関数について述べた。ここで Poisson 方程式の Green 関数の求め方について説明する。Poisson 方程式の Green 関数は

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

を満たす関数として定義される。ここで両辺を 3 次元 Fourier 変換する。

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{G}(\mathbf{k}), \quad \tilde{G}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) \quad (4.17)$$

とすると、上の方程式は  $k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) = 1$  となり、 $\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2}$  なので、

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} \quad (4.18)$$

となる。ここで  $\mathbf{k}$  について極座標表示して計算を行うが、その際には極座標の基準となる  $k_z$  軸は  $\mathbf{x}$  の方向に取ることにとすると、

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2} k^2 \sin \theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{2 \sin kr}{kr} \quad (4.19)$$

となる。ただし  $|\mathbf{x}| = r$  とおいた。ここで  $\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$  という公式を用いると、

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} \quad (4.20)$$

となり、(4.14) と一致する。

上記のことを用いると、(4.10) の解は

$$\phi_C(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.21)$$

また、(4.8) の解は

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.22)$$

となる。つまり与えられたベクトルポテンシャルに対して、ゲージ変換に用いる関数  $\chi$  を上のように選べば Coulomb ゲージを満たす。

#### 4.1.2 Lorenz gauge

今度は別のゲージとして、Lorenz gauge

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.23)$$

を満たすように電磁ポテンシャルをとることを考える。与えられたベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$ 、スカラーポテンシャル  $\phi$  に対して、ゲージ変換

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4.24)$$



を行ったときに変換後の電磁ポテンシャルが Lorenz gauge を満たすとする、

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4.25)$$

という  $\chi$  についての方程式になるので、これを解いて  $\chi$  を求める。すると Lorenz ゲージを採用した場合の電磁ポテンシャルの満たす方程式は

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (4.26)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (4.27)$$

となる。この式から、与えられた電荷、電流分布に対して  $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  を求めることができ、電磁場を計算することができる。これを次に行う。

## 4.2 遅延ポテンシャル解

Lorenz ゲージでベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルの満たす方程式は (4.26)(4.27) である。この方程式に従って、例えば電荷密度  $\rho$  や電流密度  $\mathbf{j}$  が時間変化する場合にスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルを求めることができる。

$\rho$  と  $\phi$  を時間についてフーリエ変換して、

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \rho(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.28)$$

とおくと、式 (4.26) は

$$(\Delta + k^2) \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{\tilde{\rho}(\omega, \mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad (4.29)$$

となる。ただし  $k \equiv \omega/c$  とした。同様に、式 (4.27) は

$$(\Delta + k^2) \tilde{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{x}) = -\mu_0 \tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{x}) \quad (4.30)$$

を与える。(4.29)(4.30) は非斉次の Helmholtz 方程式であり、以下では Green 関数を用いてこの方程式を解く。

## Helmholtz 方程式の Green 関数

Helmholtz 方程式の Green 関数の求め方について説明する。Helmholtz 方程式の Green 関数は

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x}) \quad (4.31)$$

を満たす関数として定義される。ここで両辺を 3 次元 Fourier 変換する。

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3K}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}} \tilde{G}(\mathbf{K}), \quad \tilde{G}(\mathbf{K}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) \quad (4.32)$$

とすると、上の方程式は  $(K^2 - k^2)\tilde{G}(\mathbf{K}) = 1$  となり、 $\tilde{G}(\mathbf{K}) = \frac{1}{K^2 - k^2}$  なので、

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3K}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}}}{K^2 - k^2} \quad (4.33)$$

となる。ここで  $\mathbf{K}$  について極座標表示して計算を行うが、その際には極座標の基準となる  $K_z$  軸は  $\mathbf{x}$  の方向に取ることにとすると、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dK \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{iKr \cos \theta}}{K^2 - k^2} K^2 \sin \theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dK K^2 \frac{e^{iKr} - e^{-iKr}}{iKr} \frac{1}{K^2 - k^2} \\ &= \frac{1}{i(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dK K \frac{e^{iKr}}{K^2 - k^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。ただし  $|\mathbf{x}| = r$  とおいた。このままでは被積分関数の極  $K = \pm k$  が積分経路上にあるため、積分経路上で被積分関数が発散してしまい積分ができない。しかしこの被積分関数の特異点を実軸上から無限小だけずらすことで積分することができる。この特異点のずらし方はいくつかあるが、これらはグリーン関数に関する異なる境界条件に対応している。ここでは一例として、 $k \rightarrow k + i\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) のように無限小  $\epsilon$  の正の虚部を  $k$  に与えるとしてみよう。こうすると  $\omega = ck \rightarrow ck + i\epsilon c$  のように  $\omega$  にも正の無限小の虚部がつくことになり、逆フーリエ変換すると  $e^{-i\omega t}$  の依存性を持つ項は  $e^{-i\omega t} \rightarrow e^{-i\omega t} e^{c\epsilon t}$  となり、 $t \rightarrow -\infty$  でゼロとなるような境界条件に対応する。これは**遅延グリーン関数** (retarded Green function) に対応していて、物理的には、ある時刻での入力、それより後の時刻での出力にのみ現れるという因果律を示している。一方例えば、 $k \rightarrow k - i\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) のように無限小  $-\epsilon$  の負の虚部を  $k$  に与えるときには**先進グリーン関数** (advanced Green function) となり、 $t \rightarrow \infty$  でゼロになる解を表す。

まず  $k \rightarrow k + i\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) とすると、(4.34) の被積分関数の特異点は図 4.2(a) のように極がずれる。そのため、図のように上半平面を通る半円の経路を取れば、

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (4.35)$$

が得られる。これが遅延 Green 関数である。同様に、今度は  $k \rightarrow k - i\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) とすると、図 4.2(b) のように極がずれるため、

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (4.36)$$

が得られる。これは先進 Green 関数である。

### 4.2.1 遅延ポテンシャル解の導出

上の、ヘルムホルツ方程式の遅延グリーン関数 (4.35) を用いて、波動方程式 (5.5) の解を書き下そう。

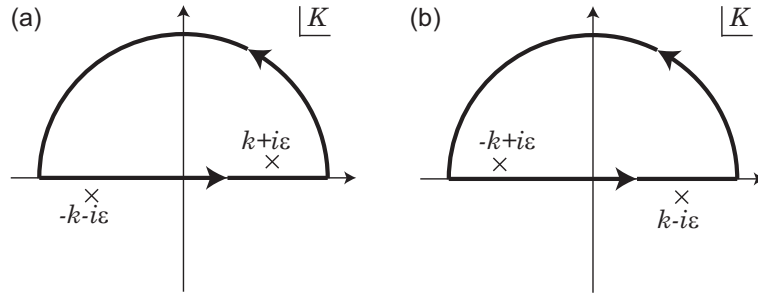


図 4.1: Helmholtz 方程式の Green 関数を求めるための積分経路。(a) 遅延、(b) 先進 Green 関数に対応する。

まずは (4.31) の解が遅延グリーン関数 (4.35)、すなわち

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r \equiv |\mathbf{x}| \quad (4.37)$$

であるので、これを重ね合わせることで式 (4.29) の解は、

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{e^{i(\omega/c)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.38)$$

となる。これを逆フーリエ変換することで、 $\phi(t, \mathbf{x})$  が得られる。

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{e^{i(\omega/c)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-i\omega t}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\omega \quad (4.39)$$

となり、ここで  $\omega$  積分は実行できて、

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t_0, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad t_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \quad (4.40)$$

となる。同様に、

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad t_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \quad (4.41)$$

である。上の式 (4.40)(4.41) は**遅延ポテンシャル** (retarded potential) と呼ばれており、時間に依存する一般的な電荷・電流密度の場合の、波動方程式 (4.26)(4.27) の解である。

### 遅延ポテンシャルが (4.26)(4.27) の解である証明

上の遅延ポテンシャルの式 (4.40)(4.41) が (4.26)(4.27) の解であることを数学的に示しておく。 $t_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  より、

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1, \quad \nabla t_0 = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.42)$$

である。なお  $\nabla$  は  $\mathbf{x}$  に関する微分を表している。これより、

$$\frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t} = \frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0}, \quad \nabla \rho(t_0, \mathbf{x}') = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} \quad (4.43)$$

これを用いて、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial^2 \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0^2} d\mathbf{x}' \quad (4.44)$$

である。また、

$$\nabla \phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{-1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} + \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \rho(t_0, \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}' \quad (4.45)$$

$$\nabla^2 \phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{1}{c^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial^2 \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0^2} + \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(t_0, \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}' \quad (4.46)$$

となるので、 $\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  より、

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(t, \mathbf{x}) \quad (4.47)$$

が言える。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  についても同様である。

### 遅延ポテンシャルが Lorenz ゲージを満たすことの証明

$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  として、遅延ポテンシャルの式を次のように書き直す。

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t_0, \mathbf{x}')}{R} \delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right) dt_0 d\mathbf{x}', \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{R} \delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right) dt_0 d\mathbf{x}'$$

としておくと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\rho(t_0, \mathbf{x}')}{R} \frac{\partial \delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right)}{\partial t} dt_0 d\mathbf{x}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(t_0, \mathbf{x}')}{R} \frac{\partial \delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right)}{\partial t_0} dt_0 d\mathbf{x}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} \delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right) dt_0 d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (4.48)$$

となり、さらに、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') \cdot \nabla \left( \frac{\delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right)}{R} \right) dt_0 d\mathbf{x}' = \frac{-\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{\delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right)}{R} \right) dt_0 d\mathbf{x}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')) \frac{\delta\left(t_0 - t + \frac{R}{c}\right)}{R} dt_0 d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.49)$$

である。これらを合計すると被積分関数に  $\frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} + \nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')$  が現れ、これは電荷の連続方程式よりゼロとなる。すなわち Lorenz ゲージ条件

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (4.50)$$

が成り立つ。

### 4.3 Lorenz ゲージにおける電磁場

今度は上で扱った Lorenz ゲージによる電磁ポテンシャルから電磁場を求める。ただし、 $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  とする。上で用いた式

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1, \quad \nabla t_0 = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \quad (4.51)$$

を用いる。

#### 電場 $\mathbf{E}$

式 (4.45) および

$$\frac{\partial \mathbf{A}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t} d\mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} d\mathbf{x}' \quad (4.52)$$

を用いて、電場は次のようになる。

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{-\hat{\mathbf{R}}}{cR} \frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} + \frac{-\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \rho(t_0, \mathbf{x}') \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} d\mathbf{x}' \quad (4.53)$$

ここで  $\rho$  と  $\mathbf{j}$  とは連続の方程式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  という式で結びついている。そのためこの連続の式を用いて書き直すことを考える。

$$\frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} + \nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')|_{t_0=\text{const.}} = 0 \quad (4.54)$$

この第2項では、 $t_0$  も  $\mathbf{x}'$  に依存しているが、 $\nabla'$  はその部分の  $t_0$  依存性には作用していない、ということを意味している。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} &= -\nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')|_{t_0=\text{const.}} = -\nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') + \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} \cdot \nabla' t_0 \\ &= -\nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') + \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} \cdot \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

となる。これを電場の式に代入すると、

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \left( -\nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') + \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} \cdot \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \right) + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \rho(t_0, \mathbf{x}') \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} d^3\mathbf{x}' \quad (4.56)$$

第一項を部分積分すると

$$\int d^3\mathbf{x}' \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} (-\nabla' \cdot \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')) = \int d^3\mathbf{x}' \left( -\frac{1}{cR^2} \mathbf{j} + 2 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{j}}{cR^4} \mathbf{R} \right) \quad (4.57)$$

なので、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} - \left( \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) \hat{\mathbf{R}} \right) d^3\mathbf{x}' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \left( \rho \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} - \frac{1}{cR^2} \mathbf{j} + \frac{2}{cR^2} (\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \hat{\mathbf{R}} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

## 磁束密度 $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{1}{R} \nabla \times \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') + \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') \right) d^3\mathbf{x}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( -\frac{1}{cR} \hat{\mathbf{R}} \times \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} - \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \times \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}') \right) d^3\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.59)$$

## 電磁波の放射

有限の領域にある電荷が時間変化することで生じる電磁場が、電磁波として無限遠までエネルギーを輸送することを電磁波の**放射** (radiation) という。原点付近にある電荷の時間変動で遠くまでエネルギーが運ばれるためには、原点からの距離を  $r$  として、Poynting ベクトルが  $O(\frac{1}{r^2})$  のオーダーになる必要がある。 $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  とも長距離で最も支配的な項が  $O(\frac{1}{r})$  であるから、これらの積となる項のみが放射を与える。すなわち、 $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$  として、

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} - \left( \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) \hat{\mathbf{R}} \right) d^3\mathbf{x}' \quad (4.60)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{cR} \hat{\mathbf{R}} \times \frac{\partial \mathbf{j}(t_0, \mathbf{x}')}{\partial t_0} d^3\mathbf{x}' \quad (4.61)$$

#### 4.4 電気双極子放射

今度は遅延ポテンシャル解 (4.40)(4.41) の応用として、次のような簡単な場合に遅延ポテンシャルを近似的に計算することを考えよう。すなわち電流・電荷分布が原点付近のみに存在するとして、電流・電荷分布の存在する領域の幅を  $d$  とし、原点から十分遠く離れた点 ( $d \ll |\mathbf{x}|$ ) での電磁波の近似的な値を求める。すなわち、 $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}| = r$  とし、 $1/r$  で展開していき  $1/r$  の高次項を無視する。

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + r'^2} \sim r \left( 1 - \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{r} \right) + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (4.62)$$

$$t_0 \equiv t - \frac{R}{c} \sim t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{c} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (4.63)$$

$$\rho(t_0, \mathbf{x}') \sim \rho\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right) + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right) + \dots, \quad (4.64)$$

上式での  $\dots$  には、電荷分布の 2 階以上の微分係数が含まれるが、電荷密度の運動が十分遅いとして無視する。また  $t' \equiv t - \frac{r}{c}$  とおく。これは原点から計った遅延時間を表している。すると、 $1/r$  のオーダーの項のみ残せば、 $\frac{1}{R} \sim \frac{1}{r}$  としてよく、

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \rho(t', \mathbf{x}') + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \dots \right] \frac{1}{r} d^3\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[ \int \rho(t', \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' + \frac{\hat{\mathbf{x}}}{c} \cdot \int \mathbf{x}' \frac{\partial \rho}{\partial t'} d^3\mathbf{x}' + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{x}}}{cr} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt'} \end{aligned} \quad (4.65)$$

となる。ただし

$$Q \equiv \int \rho(t', \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}', \quad \mathbf{p}(t') \equiv \int \mathbf{x}' \rho(t', \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (4.66)$$

はそれぞれ総電荷と総電気双極子モーメントであり、これらは仮定により原点付近のみに存在している。電荷の保存から  $Q$  は時間に依存しない。また右辺は時刻  $t' = t - \frac{r}{c}$  における値である。すると式 (4.65) において、第一項は原点に電荷量  $Q$  の点電荷がある場合のスカラーポテンシャルに対応し、電荷が時間的に一定の場合でも存在する項である。一方第二項が今注目したい項であって、電気双極子モーメントが時間変化することでスカラーポテンシャルを生み出す項である。そのためここでは  $Q = 0$  としておき第二項の寄与のみ考える。なおここでは  $O(\frac{1}{r})$  を残し  $O(\frac{1}{r^2})$  の項を無視した。そのため、上の第二項が無視できない (つまり  $O(\frac{1}{r^2})$  とならない) ためには  $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$ , つまり  $r \gg \lambda$  (電磁波の波長) となる必要がある。

同様にベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \mathbf{j}(t', \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'} d^3\mathbf{x}' + \dots \end{aligned} \quad (4.67)$$

となるが、ここでは第 1 項のみ考える。これが許されるための条件は、 $\frac{d\omega}{c} \ll 1$  である。すなわち  $d \ll \lambda$  であればよい。まとめると以上の近似が許される条件は

$$d \ll \lambda \ll R \quad (4.68)$$

である。ここで電流が原点付近の有限の領域にのみ存在するので、この空間積分について部分積分を行い、電荷の連続の式を用いて

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = - \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' = \int \mathbf{x}' \frac{\partial \rho(\mathbf{x}')}{\partial t'} d\mathbf{x}' \quad (4.69)$$

とできるので、ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \mathbf{x}' \frac{\partial}{\partial t'} \rho(t', \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{p}(t')}{dt'} \quad (4.70)$$

となって、やはり電気双極子モーメントの時間微分の遅延時間  $t' = t - \frac{r}{c}$  の値で表される。ここまでの結果をまとめると、

$$\phi(t, \mathbf{x}) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0 cr} \hat{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \quad (4.71)$$

となり、ともに  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}(t')}{dt'}$ 、すなわち電気双極子モーメントの時間微分の遅延時間  $t' = t - \frac{r}{c}$  の値で表される。これらの項による電磁波の放射を**電気双極子放射** (electric dipole radiation) と呼ぶ。次に式 (4.71) から、電場・磁場の値を求めよう。ただし場が  $1/r$  のオーダーとなる項のみ残す。 $\nabla(t - \frac{r}{c}) = -\hat{\mathbf{x}}/c$  から、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\sim -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{x}}}{cr} \cdot \dot{\mathbf{p}} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \right) \\ &\sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} [\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} [\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{p}})] \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{B} \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \nabla \times \dot{\mathbf{p}} \sim -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad (4.73)$$

となる。これは図 4.4 に示すような形で、原点から放射される球面波となり、電場と磁場は進行方向 ( $\hat{\mathbf{x}}$ ) に対してともに垂直であり、電場と磁場も互いに垂直である。

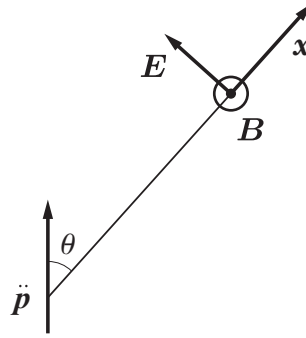


図 4.2: 電気双極子放射による電場と磁場

#### 4.4.1 電気双極子放射での放射エネルギー

次に電気双極子放射での電磁波が運ぶエネルギーについて考える。図 4.4 のように、 $\mathbf{x}$  と  $\ddot{\mathbf{p}}$  とのなす角を  $\theta$  とおく。電場・磁場について図に示す方向を正とすると、電場の強さは、 $-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} |\ddot{\mathbf{p}}| \sin \theta$ 、磁束密度の強さは、 $-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} |\ddot{\mathbf{p}}| \sin \theta$  であり、そのためポインティングベクトル  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{cr^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta \quad (4.74)$$

これから分かるように、電磁波は  $\ddot{\mathbf{p}}$  に垂直な方向 ( $\theta = 90^\circ$ ) に最も強く放射される。

単位時間あたり放射される全エネルギー  $W$  は、 $\mathbf{P}$  を、原点中心の半径  $r$  の球面上で積分して、

$$W = \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{cr^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta r^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \int |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta d(\cos \theta) d\phi = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (4.75)$$

となり、積分に用いた球面の半径には依存しない。すなわち無限に遠くまで、球面波の形でエネルギーを伝えていくことが分かる。なお  $\mathbf{p} \propto e^{-i\omega t}$  のように周波数  $\omega$  で振動する電気双極子の場合、放射される全エネルギーは  $\omega^4$  に比例する。



## 4.5 磁気双極子放射

今度は電気双極子モーメントがゼロの場合、次のオーダーの項を考える。さきほど式 (4.67) で第1項を考え、これが電気双極子モーメントの時間微分で与えられることを示した。もし電気双極子モーメントがない場合は、次のオーダーの項として、この式 (4.67) の第2項を考える。

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \int \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'} d^3 \mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \int (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j} d^3 \mathbf{x}' \right) \quad (4.76)$$

となる。

ここで  $\mathbf{x}'$  と  $\mathbf{j}$  の2つの添え字について対称部分と反対称部分に分ける。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の第  $k$  成分につき、

$$\begin{aligned} \int (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}') j_k d^3 \mathbf{x}' &= \sum_m \int \hat{x}_m x'_m j_k d^3 \mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \int \hat{x}_m (x'_m j_k - x'_k j_m) d^3 \mathbf{x}' + \frac{1}{2} \sum_m \int \hat{x}_m (x'_m j_k + x'_k j_m) d^3 \mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.77)$$

となる。この第1項（反対称部分）を**磁気双極子放射** (magnetic dipole radiation)、第2項（対称部分）を**電気4重極子放射** (electric quadrupole radiation)、と呼ぶ。

まずは磁気双極子放射を考える。式 (4.77) の第一項は、ベクトル表示にすると

$$\frac{1}{2} \int ((\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = -\frac{1}{2} \int (\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{j})) d^3 \mathbf{x}' \quad (4.78)$$

となる。従って、

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{8\pi cr} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \int (\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{j})) d^3 \mathbf{x}' \right) \quad (4.79)$$

である。ここで

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \frac{1}{2} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}) d^3 \mathbf{x}' \quad (4.80)$$

は電流密度  $\mathbf{j}$  による磁気双極子モーメントであるので、これを用いると、

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial t'} \times \hat{\mathbf{x}} \quad (4.81)$$

と書ける。従って、電場、磁束密度は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r} \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}) \quad (4.83)$$

となる。電気双極子放射と同様に、電場と磁場と  $\mathbf{x}$  は全て互いに垂直である。電磁波が運ぶエネルギーについて考える。 $\mathbf{x}$  と  $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$  とのなす角を  $\theta$  とおくと、ポインティングベクトル  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{1}{r^2} |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 \sin^2 \theta \quad (4.84)$$

となる。

#### 4.6 電気四重極子放射

ベクトルポテンシャルの式の中の (4.77) の第 2 項 (対称部分) が電気 4 重極子放射に対応することを述べた。実際このベクトルポテンシャルの式を変形すると**電気 4 重極子モーメント**

$$\mathbf{Q}_{ij} \equiv \int (x'_i x'_j) \rho(t', \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (4.85)$$

で表されることがわかる。これを見てみよう。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_m \hat{x}_m \int (x'_m j_k + x'_k j_m) d^3 \mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \hat{x}_m \sum_l \int \frac{\partial}{\partial x'_l} (x'_k x'_m) j_l d^3 \mathbf{x}' \\ &= -\frac{1}{2} \sum_m \hat{x}_m \int (x'_k x'_m) \sum_l \frac{\partial j_l}{\partial x'_l} d^3 \mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \hat{x}_m \int (x'_k x'_m) \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 \mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \hat{x}_m \frac{\partial \mathbf{Q}_{km}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.86)$$

したがって、

$$A_k(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi cr} \sum_m \hat{x}_m \ddot{\mathbf{Q}}_{km}(t') \quad (4.87)$$

となる。ベクトル表記をすると

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi cr} \ddot{\mathbf{Q}}(t') \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (4.88)$$

となる。

一方、電気 4 重極子はスカラーポテンシャルにも影響を与える。式 (4.65) の展開の次の次数を考えると

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0}{8\pi r} \hat{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (4.89)$$

となる。

これらを用いて、電磁場は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{8\pi cr} \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{Q}}(t') \cdot \hat{\mathbf{x}}) \quad (4.90)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{8\pi c^2 r} \hat{\mathbf{x}} \times (\ddot{\mathbf{Q}}(t') \cdot \hat{\mathbf{x}}) \quad (4.91)$$

となり、電場、磁場、 $\hat{\mathbf{x}}$  は互いに垂直であり、 $\mathbf{E} = -c\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$  となる。Poynting ベクトルは

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{64\pi^2 c^3 r^2} \left( \hat{\mathbf{x}} \times (\ddot{\mathbf{Q}}(t') \cdot \hat{\mathbf{x}}) \right)^2 \hat{\mathbf{x}} \quad (4.92)$$

なお上の式から、電気 4 重極子モーメント  $\mathbf{Q}_{ij}$  については、trace の項を分離して、

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} - \frac{1}{3}\text{Tr}Q & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} - \frac{1}{3}\text{Tr}Q & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} - \frac{1}{3}\text{Tr}Q \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\text{Tr}Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

のように分けると、第二項 (trace の項) は  $\hat{\mathbf{x}} \times (\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{trace}}(t') \cdot \hat{\mathbf{x}}) = 0$  となり、放射に寄与しない

## 5 特殊相対性理論

### 5.1 相対性原理

物理現象の記述はどのような観測者からみるかで変わる。位置を指定する座標系と時間を指定する時計を合わせて基準系と呼ぶ。さまざまな基準系のうち、外力を受けていない物体が一定の速度で運動するような基準系を**慣性系** (inertial frame) と呼ぶ。

#### 5.1.1 ガリレイ変換と相対性原理

ある慣性系  $S$  で測ったときの物体の位置を  $\mathbf{x}$ 、時刻を  $t$  とおく。この慣性系  $S$  に対して、一定の速度  $\mathbf{v}$  で運動する慣性系  $S'$  を考え、この慣性系から見たときの位置を  $\mathbf{x}'$ 、時刻を  $t'$  とする。( $t = 0$  で位置と座標が一致しているとした) すると両慣性系での座標と時刻の関係は、

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \quad (5.1)$$

$$t' = t \quad (5.2)$$

となる。この  $(\mathbf{x}, t)$  と  $(\mathbf{x}', t')$  の間の変換を **Galilei 変換** という。例えば Newton の運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (5.3)$$

に Galilei 変換を施すと

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} = \mathbf{F} \quad (5.4)$$

となり、両慣性系で Newton の運動方程式は不変となる。これを Newton の運動方程式は Galilei の相対性原理を満たすという。すなわちどの基準系も平等である。

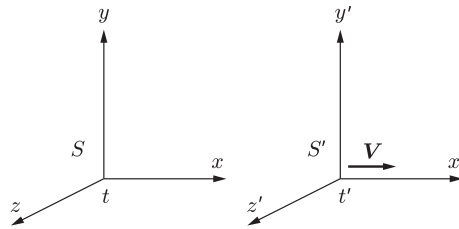


図 5.1: Galilei 変換

一方で電磁波の議論に出てきた波動方程式

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad (5.5)$$

については、

$$\nabla = \nabla', \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla' + \frac{\partial}{\partial t'} \quad (5.6)$$

となるので、

$$\left( \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla' \frac{\partial}{\partial t'} + (\mathbf{v} \cdot \nabla')^2 \right) \right) \psi = 0 \quad (5.7)$$

となり、元の波動方程式と同じにならない。すなわち波動方程式は Galilei の相対性原理を満たさない。電磁波の波動方程式は Maxwell 方程式から出るので、これは Maxwell 方程式が Galilei の相対性原理を満たさないことを示している。これは言い換えると、さまざまな慣性系のなかで、波動方程式が (5.5) の形で表されるような特別な慣性系があることを意味している。しかし、光の速さに関するマイケルソン・モーリーの実験が示したのは、光の速さはどの慣性系で測っても同じ値  $c$  であり、特別な慣性系は存在しないということである。

### 5.1.2 Einstein の相対性原理

電磁気現象が Galilei の相対性原理を満たすべきだと考えると、上の議論から Maxwell 方程式を修正する必要がある。しかし Einstein はむしろ、(マイケルソン・モーリーの実験が示しているように) Maxwell 方程式がどのような慣性系でも成り立つように、相対性原理の考え方を変えなければいけないと考えた。すなわち

- Einstein の相対性原理 : 自然法則は全ての慣性系において同じ形になる。
- 光速不変の原理 : 光の速度は全ての慣性系で、光源の速度によらず一定である。

という出発点から理論を構築することにした。これについて以下説明する。

## 5.2 世界間隔

ある時刻  $t$  にある座標  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  に起こる**事象** (event) を考える。空間と時間を合わせて  $(x, y, z, t)$  という 4 次元空間内の点として表現すると便利である。

このとき、2 つの事象  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  と  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  の間の**世界間隔** (world distance) を

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2} \quad (5.8)$$

で定義する。なお無限に近接した 2 つの事象の世界間隔  $ds$  は

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (5.9)$$

となる。

例えばある慣性系  $S$  から見たとき、 $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  から発した光が  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  に到達したとすると上の定義から  $s_{12} = 0$  である。これを別の慣性系  $S'$  で見たとき、 $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$  から発した光が  $(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$  に到達したとすると、光速不変の原理から  $s'_{12} = 0$  となる。つまりある慣性系で世界間隔がゼロ ( $s_{12} = 0$ ) であれば、他の慣性系でも世界間隔がゼロ ( $s'_{12} = 0$ ) であることがいえる。

このことから出発して、実は 2 つの事象の世界間隔は慣性系によらず不変である

$$s_{12}^2 = s'^2_{12} \quad (5.10)$$

ということがいえる。

### 世界間隔が慣性系によらず一定であることの証明

慣性系  $S$  と  $S'$  で、無限に近接した2つの事象の世界間隔を  $ds$ ,  $ds'$  とおき、それが等しいことを示す。 $ds = 0$  のとき  $ds' = 0$  なので、これらは同じオーダーの無限小量であり、

$$ds^2 = a ds'^2 \quad (5.11)$$

と書ける。この  $a$  は空間の一様性、並進不変性等により、両慣性系での相対速度の大きさのみに依存する。そこで慣性系  $S$  での2つの事象の間の世界間隔の微小量  $ds^2$  を、相対速度  $\mathbf{v}_1$  で運動する慣性系  $S_1$ 、および相対速度  $\mathbf{v}_2$  で運動する慣性系  $S_2$  で見たときの世界間隔  $ds_1^2$ ,  $ds_2^2$  は

$$ds^2 = a(v_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(v_2) ds_2^2 \quad (5.12)$$

となる。すると  $S_1$  と  $S_2$  の相対速度  $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  であるので、 $S_1$  と  $S_2$  を比較すると、

$$ds_1^2 = a(v_{12}) ds_2^2, \quad (5.13)$$

となるため、

$$a(v_{12}) = \frac{a(v_2)}{a(v_1)} \quad (5.14)$$

となる。ここで  $\mathbf{v}_1$  と  $\mathbf{v}_2$  との角度を変えていくと右辺は変化しないため、左辺も変化しないはずである。そのため左辺は  $v_{12}$  の大きさによらず一定値であり、それは (5.14) より 1 になる。そのため  $ds^2 = ds'^2$  となる。これを積分すると有限の世界間隔についても、慣性系によらず一定である ( $s_{12} = s'_{12}$ ) ことがいえる。

2つの事象の世界間隔は、その定義 (5.8) から、次の3つの場合に分類される。

$$s_{12}^2 > 0 : \text{時間的 (time-like)}, \quad (5.15)$$

$$s_{12}^2 < 0 : \text{空間的 (space-like)}, \quad (5.16)$$

$$s_{12}^2 = 0 : \text{光的 (light-like)}, \quad (5.17)$$

なお上の議論により、この分類は慣性系の取り方によらない。例えば同一の座標で異なる時刻で起こる事象 ( $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ ,  $t_1 \neq t_2$ ) の世界間隔は時間的であり、同一時刻で異なる座標で起こる事象 ( $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ ,  $t_1 = t_2$ ) の世界間隔は空間的である。

次にある事象が原点  $O$  で時刻  $t = 0$  で起きたとする ( $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ )。このとき、 $(x', y', z', t')$  で起こる別の事象を、 $(0, 0, 0, 0)$  での事象との世界間隔が時間的か空間的か光的かで分類することを考える。これは  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$  で与えられる4次元空間内の円錐面 (**光円錐** (light cone) と呼ばれる) で区切られていて、この円錐の内側は時間的、外側は空間的な世界間隔の事象を表している (図 5.2)。

#### 5.2.1 Lorentz 変換

2つの慣性系  $S$ ,  $S'$  の間の座標変換がどのようなになるか考えよう。それぞれの慣性系での座標と時刻を  $(x, y, z, t)$ ,  $(x', y', z', t')$  として、それらの関係を書き下す。時刻  $t = t' = 0$  において原点が一致しているとする。すると世界間隔の不変性から

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (5.18)$$

となる。求める変換はこの関係を満たすはずであり、線形変換となる。このような線形変換を **Lorentz 変換** という。

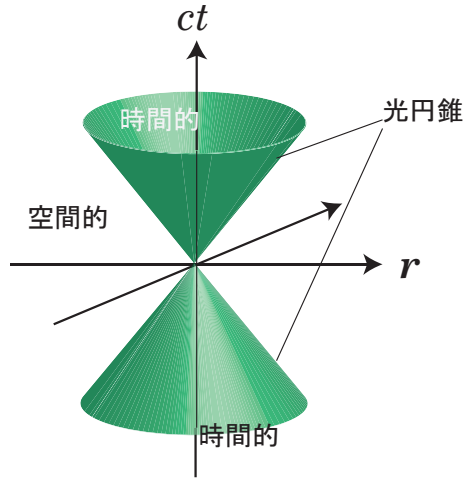


図 5.2: 光円錐

一つの Lorentz 変換の例としては、時刻を変えない空間内の回転である。例えば  $z$  軸まわりの回転は

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & -\sin \theta & \\ & \sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

と表され、これは明らかに世界間隔を不変にする。同様に空間内の回転は全て Lorentz 変換である。

別の Lorentz 変換としては

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & & \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

という形のものがある。これは  $ct$ - $x$  平面内の回転のようなものであるが、通常の回転とは異なる。これも  $(ct)^2 - x^2$  を不変に保つため、世界間隔も不変である。

上の Lorentz 変換がどのようなものか考えて見よう。 $S'$  系での座標の原点  $x' = 0$  は、 $S$  系では  $ct \sinh \psi = x \cosh \psi$  より、 $x/t = c \tanh \psi$  と表される。これより  $S$  系からみた  $S'$  系の速さ  $v$  は

$$v = c \tanh \psi \quad (5.21)$$

と表される。ここで  $\beta \equiv \frac{v}{c}$  とおくと、

$$\tanh \psi = \beta, \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh \psi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.22)$$

となる。すなわち Lorentz 変換 (5.20) は、

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad (5.23)$$

と書ける。これを  $x$  軸方向への **Lorentz boost** と呼ぶ。なお相対速度が光速に比べて十分遅い場合 ( $|\beta| = |v/c| \ll 1$ ) には、これは Galilei 変換  $t' = t$ ,  $x' = x - ct$  に帰着する。なお上の式の逆変換を考えると、

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

となり、ちょうど上の式の行列で  $v \rightarrow -v$  とした式と一致する。

### Lorentz 収縮

慣性系  $S'$  において静止している棒があり、その端点の座標を  $x'_1, x'_2$  とおく、これらは  $S'$  系では時刻  $t'$  によらず一定値である。これを  $S'$  に対して  $x$  方向に速さ  $v$  で動いている  $S$  系で、両端を同時刻  $t$  に観測する。式 (5.23) の Lorentz 変換の式を用いると両端点の座標  $x_1, x_2$  は

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(-\beta ct + x_1), \quad x'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(-\beta ct + x_2), \quad (5.25)$$

を満たす。すると  $S$  系、 $S'$  系で観測した棒の長さ  $\Delta x \equiv x_2 - x_1$ ,  $\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1$  は

$$\Delta x = \sqrt{1-\beta^2} \Delta x' \quad (5.26)$$

という関係になり、すなわち速度  $v$  で観測している観測者から見ると、棒が静止している座標系で測った長さ (固有長さ) より  $\sqrt{1-\beta^2}$  倍だけ短くなる。これを **Lorentz 収縮** と呼ぶ。

### 時計の遅れ

今度は  $S$  系で単一の点  $(x, y, z)$  において時刻  $t_1, t_2$  において起こる 2 つの事象の間の時間間隔  $\Delta t \equiv t_2 - t_1$  を考える。これを  $S'$  系で観測するときの時間間隔を  $\Delta t' \equiv t'_2 - t'_1$  とおくと

$$ct'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(ct_1 - \beta x), \quad ct'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(ct_2 - \beta x), \quad (5.27)$$

から  $\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta t$  となる。すなわちある慣性系で同一地点で起こる 2 事象の間の時間間隔 (固有時間) を、それに対して速度  $\mathbf{v}$  で運動している慣性系から見るときには、時間間隔が  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  倍に伸びているようにみえる。

### 速度の合成

$S$  系に対して  $x$  軸方向に速度  $v$  で運動している  $S'$  系を考えると、それらの間の Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \tanh \psi = \frac{v}{c} \quad (5.28)$$

さらに  $S'$  系に対して  $x$  軸方向に速度  $v'$  で運動している  $S''$  系を考えると、それらの間の Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi' & -\sinh \psi' \\ -\sinh \psi' & \cosh \psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}, \quad \tanh \psi' = \frac{v'}{c} \quad (5.29)$$

となる。これより  $S$  系と  $S''$  系の関係は

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi + \psi') & -\sinh(\psi + \psi') \\ -\sinh(\psi + \psi') & \cosh(\psi + \psi') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

となるので、 $S$  系に対する  $S''$  系の速度を  $v''$  とおくと、 $\tanh(\psi + \psi') = \frac{v''}{c}$  であるので

$$v'' = c \tanh(\psi + \psi') = c \frac{\tanh \psi + \tanh \psi'}{1 + \tanh \psi \tanh \psi'} = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad (5.31)$$

となる。これが速度の合成則である。 $v, v' \ll c$  であれば通常の数値の合成則  $v'' = v + v'$  となる。一方  $v, v'$  が光速  $c$  に近づいてくると  $v'' = v + v'$  からずれてくるが、 $v < c, v' < c$  のために  $v''$  が光速  $c$  を超えることはない。

### 5.3 4元記法

Lorentz 変換では時間と空間が両方からんだ変換となるため、時間座標  $ct$  と空間座標  $x, y, z$  をまとめた4次元空間のベクトルとみなす記法を導入すると便利である。(注意：以下では添え字を上付きで書くものと下付きで書くものがあるので注意せよ)

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \mathbf{x}) \quad (5.32)$$

と書いて**時空座標**と呼ぶ。この空間での距離は世界間隔であり、

$$x^2 \equiv \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (5.33)$$

とかかれる。なお

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

は **Minkowski 計量** と呼ばれる。この Minkowski 計量で距離が定義される距離空間を **Minkowski 空間 (時空)** と呼ぶ。なお以下では、上と下に現れる同じ添え字については和をとるものとして、和の記号  $\sum$  を省略することにする (**Einstein の規約**)。このような添え字を**ダミー添字**と呼び、ダミー添え字について和を取ることを**縮約**をとるといふ。すると式 (5.33) は簡単に

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (5.35)$$

となる。

### 5.4 反変ベクトルと共変ベクトル

上で導入した記法では、Lorentz 変換は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (5.36)$$

という形に表される。 $\Lambda^\mu_\nu$  は Lorentz 変換で現れる  $4 \times 4$  行列である。これは  $x^2$  を不変に保つことから

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad (5.37)$$

を満たしている。また Minkowski 計量  $g_{\mu\nu}$  の逆行列を  $g^{\mu\nu}$  とすると、

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu \quad (5.38)$$

となる。 $\delta^\rho_\mu$  は Kronecker のデルタである。



これらを元にして、Lorentz 変換の下でのベクトルの変換性を2つに分類する。まず  $x^\mu$  と同様に、

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \quad (5.39)$$

のように変換する量  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A})$  を**反変ベクトル** (contravariant vector) と呼ぶ。2つの反変ベクトル  $A^\mu$  と  $B^\mu$  の内積は

$$AB \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (5.40)$$

で定義され、特に  $A^\mu$  の2乗長さは  $A^2 \equiv g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$  で定義される。

一方、反変ベクトル  $A^\mu$  から、

$$A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -\mathbf{A}) \quad (5.41)$$

として定義される量を**共変ベクトル** (covariant vector) という。共変ベクトルは Lorentz 変換の下で、

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = g_{\mu\nu} A'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma} A_\sigma = \Lambda_\mu^\sigma A_\sigma \quad (5.42)$$

と変換される。なおここでは

$$\Lambda_\mu^\sigma = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma} \quad (5.43)$$

と定義している。ここで (5.37) から

$$\Lambda_\nu^{\sigma'} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\nu\mu} \Lambda^\mu_\rho g^{\rho\sigma'} \Lambda^\nu_\sigma = \delta_\sigma^{\sigma'} \quad (5.44)$$

となるので、 $\Lambda_\nu^{\sigma'}$  と  $\Lambda^\nu_\sigma$  とは逆行列の関係： $\Lambda_\mu^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$  にある。これより反変ベクトルの変換性は、

$$A'_\mu = A_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu \quad (5.45)$$

と書き換えることができる。

共変ベクトル  $A_\mu$  と反変ベクトル  $B^\nu$  のスカラー積を  $A_\mu B^\mu (= g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu)$  で定義すると、これは Lorentz 変換の下で不変である。

先ほど  $x^\mu$  が反変ベクトルであることを述べたが、 $x^\mu$  に関する微分

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (5.46)$$

は共変ベクトルである。なぜなら、

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (5.47)$$

となる。同様に

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (5.48)$$

は反変ベクトルである。反変ベクトル  $\partial^\mu$  と共変ベクトル  $\partial_\mu$  の内積

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (5.49)$$

は**ダランベルシアン** (D'Alembertian) と呼ばれる Lorentz 不変な演算子である。

なお以上の例から分かるように、反変ベクトルは上付き添え字、共変ベクトルは下付き添え字として書き、添え字の縮約は必ず上付き添え字と下付き添え字の対で行う。

## 4元テンソル

Lorentz 変換の下で2つの4元反変ベクトル同士のテンソル積  $A^\mu B^\nu$  と同じ変換性をもつ量  $A^{\mu\nu}$  を**2階の反変4元テンソル**といい、その変換性は、

$$A^{\mu\nu} \rightarrow A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma A^{\rho\sigma} \quad (5.50)$$

となる。また  $A^\mu_\nu \equiv g_{\nu\rho} A^{\mu\rho}$  を**混合テンソル**、 $A_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma}$  を**共変テンソル**という。それらの変換性は反変テンソルにならって定義される。

## 完全反対称テンソル

完全反対称テンソル  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  を

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu\nu\rho\sigma \text{が} 0123 \text{の偶置換} \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \text{が} 0123 \text{の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (5.51)$$

で定義する。例えば  $\epsilon^{0123} = 1$ ,  $\epsilon^{1023} = -1$  である。これから対応する共変テンソルを

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\rho\rho'} g_{\sigma\sigma'} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \quad (5.52)$$

で定義する。例えば  $\epsilon_{0123} = -1$  である。Lorentz 変換性は

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\rho_{\rho'} \Lambda^\sigma_{\sigma'} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \quad (5.53)$$

であるがこれは実は

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = (\det \Lambda) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (5.54)$$

となる。(例えば  $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2, \sigma = 3$  とおくと右辺の係数は  $(\det \Lambda)$  に等しいことが分かる。他の場合も同様) Lorentz 変換の行列の行列式  $(\det \Lambda)$  は、(5.37) より、 $(\det \Lambda) = \pm 1$  である。特に  $(\det \Lambda) = 1$  のような Lorentz 変換に限れば、 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  は Lorentz 不変なテンソルである。

## 5.5 相対論的力学

### 4元ベクトルによる運動の記述

慣性系において質点の運動は

$$x^\mu(t) = (ct, \mathbf{x}(t)) \quad (5.55)$$

という、時刻  $t$  の関数として表され、これは4次元時空内の曲線となる。この曲線を質点の**世界線** (world line) と呼ぶ。この  $t$  に関する微分から定義される

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = (c, \mathbf{v}(t)), \quad \frac{d^2 x^\mu(t)}{dt^2} = (0, \mathbf{a}(t)) \quad (5.56)$$

をそれぞれ**4元速度** (four-velocity)、**4元加速度** (four-acceleration) という。なお  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$  および  $\mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2}$  は3次元速度および加速度である。

相対論では、別の慣性系に移ると時刻  $t$  が Lorentz 変換により変化するため、運動を記述するパラメタとして時刻  $t$  を用いるのは不便である。そのため世界線上の点を表す任意のパラメタ  $\lambda$  を導入して、 $\lambda$  の値と世界線上の点が一対一に対応するようにする。すると4元速度、4元加速度はそれぞれ  $\frac{dx^\mu(t)}{d\lambda}$ ,  $\frac{d^2 x^\mu(t)}{d\lambda^2}$  となる。この  $\lambda$  の取り方には任意性があるが、便利な選び方として、

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cd\tau)^2 \quad (5.57)$$

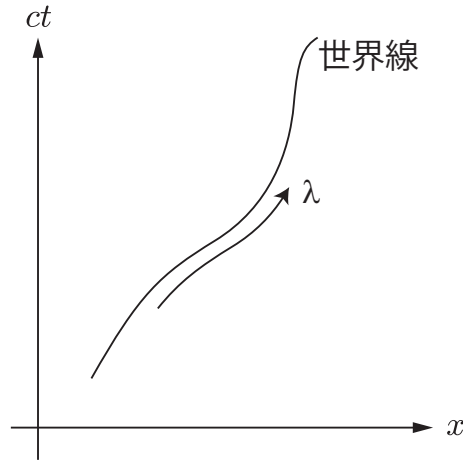


図 5.3: 世界線

で定義される固有時間  $\tau$  を用いるとよいが、これは固有時間  $\tau$  が Lorentz 不変であるためである。これを用いて質点の 4 元固有速度を

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.58)$$

で定義すると、

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.59)$$

であるので、

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (5.60)$$

と表され、これは反変ベクトルである。そのノルムは一定値

$$u^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2 \quad (5.61)$$

である。同様に、質点の 4 元固有加速度を

$$a^\mu(\tau) = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (5.62)$$

で定義する。なお式 (5.61) を  $\tau$  で微分すると

$$u^\mu a_\mu = 0 \quad (5.63)$$

のように、4 元速度と 4 元加速度が直交することがいえる。

#### 4 元運動量

質量  $m$  の粒子の **4 元運動量** (four-momentum) を

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = m u^\mu = m \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (5.64)$$

で定義すると、そのノルムは

$$p^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2 \quad (5.65)$$

となり一定値となる。なお  $p^\mu$  の各成分は

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5.66)$$

で与えられる。第 1,2,3 成分は運動量という意味を持っているとし、第 0 成分はエネルギーに相当するという  
ことにして、

$$p^0 = \frac{E}{c}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.67)$$

として**エネルギー**  $E$  を定義する。これらから

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5.68)$$

および

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2} \quad (5.69)$$

という関係式が得られる。

なお非相対論的極限 ( $v \ll c$ , つまり  $\beta \ll 1$ ) では

$$E \sim mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (5.70)$$

となり、運動量は Newton 力学と一致し、エネルギーは、静止エネルギー  $mc^2$  の定数を除くと Newton 力学と一致する。

### 相対論的運動方程式

質量  $m$  の質点の運動方程式は相対論では

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu \quad (5.71)$$

すなわち

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \quad (5.72)$$

と表される。 $F^\mu$  は 4 元力 (four-force) と呼ばれる反変ベクトルである。なお 4 元速度と 4 元加速度は直交するので、 $u^\mu F_\mu = 0$  となる。

なお  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$ ,  $F^\mu = (F^0, \mathbf{F})$  のように成分に分けると、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \mathbf{F} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (5.73)$$

$$\frac{d}{dt} p^0 = F^0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (5.74)$$

のようになる。(5.73) は、非相対論的極限で Newton の運動方程式に相当する。

## 5.6 作用原理

Newton 力学では、運動方程式は作用が極値となる条件が定める Euler-Lagrange 方程式として定式化することができた。これを作用原理という。ここでは相対論における運動方程式においても同様に定式化し、作用原理から導く。

## 非相対論的粒子

解析力学で定式化されているとおり、非相対論的で粒子の一般化座標を  $q_i$ 、速度を  $\dot{q}_i$ 、Lagrangian を  $L(q, \dot{q})$  として、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (5.75)$$

で作用  $S$  を定義する。この作用  $S$  が極値を持つ条件  $\delta S = 0$  は、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5.76)$$

となり、これが Newton の運動方程式となる。

## 相対論的粒子

相対論についても同様に、作用  $S$  を定義して、その極値の条件  $\delta S = 0$  が運動方程式を定めるようにしたい。慣性系によらずに同じ形の方程式を得るためには、作用  $S$  が Lorentz 不変である必要がある。 $d\tau$  が Lorentz 不変であることから、自由粒子の作用としては

$$S = Amc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \quad (5.77)$$

の形であると予想される。 $A$  は無次元の定数である。

式 (5.77) を時間で表すと

$$S = Amc^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{dt} dt = Amc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (5.78)$$

となる。これより Lagrangian は

$$L = Amc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.79)$$

となる。これが非相対論的極限で通常の自由粒子の Lagrangian と一致するようにする。非相対論的極限では

$$L = Amc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sim Amc^2 \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = Amc^2 - A \frac{m}{2} v^2 \quad (5.80)$$

となり、この第2項が自由粒子の Lagrangian と一致するように、 $A = -1$  と定める。すなわち、作用  $S$  は

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{dt} dt = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (5.81)$$

また Lagrangian  $L$  は

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.82)$$

である。

これより座標  $x^i$  の共役運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.83)$$

で、(5.66) と一致している。すると運動方程式は

$$\frac{d}{dt} p_i = 0 \quad (5.84)$$

となる。Hamiltonian は

$$H = \sum_i p_i \dot{x}^i - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.85)$$

であり、エネルギーの式 (5.67) と一致する。

次に世界線のパラメタを  $\lambda$  として運動方程式を記述する。作用は、

$$\begin{aligned} S &= -mc \int ds, \quad ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ \Rightarrow S &= -mc \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \end{aligned} \quad (5.86)$$

となり、 $\lambda$  を時間、 $x^\mu(\lambda)$  を一般化座標と考えて運動方程式を立てる。ラグランジアンは

$$L = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (5.87)$$

となり、 $x^\mu$  に共役な運動量は

$$\frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^\mu}{d\lambda})} = -\frac{mc \frac{dx_\mu}{d\lambda}}{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \quad (5.88)$$

で、Euler-Lagrange 運動方程式は、

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\frac{dx_\mu}{d\lambda}}{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \right) = 0 \quad (5.89)$$

となる。なお特に  $\lambda$  として固有時間  $\tau$  を選ぶと、 $x^\mu$  に共役な運動量は  $-p_\mu$  であり、運動方程式は  $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$  となる。

## 6 電磁場中での荷電粒子の運動

### 6.1 電磁場中の荷電粒子の力学

以下では電荷  $q$  を持つ荷電粒子の力学を相対論で記述する。

#### 4元電流密度カレント

荷電粒子の4元座標を  $x^\mu(t) = (ct, \mathbf{x}(t))$  とおくと、その電荷密度、電流密度は

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q\dot{\mathbf{x}}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad (6.1)$$

となる。これから4元電流密度カレント  $j^\mu(x) = (c\rho, \mathbf{j})$  を定義すると、

$$j^\mu(x) = q \frac{dx^\mu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad (6.2)$$

となる。また連続の方程式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  は

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (6.3)$$

と書ける。

#### 荷電粒子と電磁場の相互作用

荷電粒子が電磁場中にあるときを考える。非相対論的な場合の、質量  $m$ 、電荷  $q$  の荷電粒子の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (6.4)$$

となる。なお粒子の運動を  $x^\mu(t)$  と書き、電磁場は各時刻での粒子の位置での電磁場の値  $\phi \equiv \phi(t, \mathbf{x}(t))$ 、 $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t))$  である。これを相対論的な場合に拡張しよう。第一項についてはその相対論的拡張はすでに前章で議論した。その結果を用いて、

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} - q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (6.5)$$

となる。作用  $S$  は

$$S = \int dt \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} - q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) \quad (6.6)$$

となる。これを Lorentz 不変な形に書き換える。まず第1項は

$$-mc^2 \int d\tau \quad (6.7)$$

となる。

#### 4元ポテンシャル

4元ポテンシャルを

$$A^\mu(x) = (A^0(x), \mathbf{A}(x)) = \left( \frac{1}{c}\Phi(x), \mathbf{A}(x) \right) \quad (6.8)$$

で定義すると、(6.6) の第2,3項は、

$$-q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} = -qA^\mu(x) \frac{dx_\mu}{dt} \quad (6.9)$$

と表されるため、作用は

$$S = \int \left( -mc^2 d\tau - qA^\mu(x) \frac{dx_\mu}{d\tau} d\tau \right) \quad (6.10)$$

と、明示的に Lorentz 不変である。

世界線のパラメタ  $\lambda$  を用いると、作用は

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left( -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} - qA^\mu(x) \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (6.11)$$

と書ける。すなわち Lagrangian は

$$L = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} - qA^\mu(x) \frac{dx_\mu}{d\lambda} \quad (6.12)$$

である。

### Euler-Lagrange 運動方程式

Lagrangian(6.5) を用いると、位置  $\mathbf{x}$  に共役な運動量  $\mathbf{P}$  は、

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \quad (6.13)$$

となる。Euler-Lagrange 運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{d}{dt} (p^i + qA^i) + q \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - q \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \dot{x}^j \\ &= \frac{dp^i}{dt} + \left( q \frac{\partial A^i}{\partial t} + q \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \dot{x}^j \right) + q \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - q \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \dot{x}^j \\ &= \frac{dp^i}{dt} + q \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial t} \right) + q \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \\ &= \frac{dp^i}{dt} - qE^i - q\epsilon^{ijk} \dot{x}^j B^k = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

となる。ただし

$$E^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial t}, \quad B^i = \epsilon^{ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \quad (6.15)$$

である。すなわち相対論的運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.16)$$

となり、右辺は電荷に働いている力である。

Hamiltonian は

$$H = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}} + q\Phi \quad (6.17)$$

となり、(6.13) を用いて、

$$\frac{(H - q\Phi)^2}{c^2} = m^2 c^2 + (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 \rightarrow H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2} + q\Phi \quad (6.18)$$



と表される。非相対論的近似の下では

$$H = mc^2 + \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi \quad (6.19)$$

である。

### ゲージ変換

4元ポテンシャルでは、ゲージ変換は

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad (6.20)$$

と表される。ここで  $\chi(x)$  は任意関数である。ゲージ変換によって、作用は

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S - q \int \partial_\mu \chi(x) dx^\mu \\ &= S - q \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\chi(x(t))}{dt} dt \\ &= S - q(\chi(x(t_2)) - \chi(x(t_1))) \end{aligned} \quad (6.21)$$

荷電粒子の運動を定めるために変分をとるときには、始点  $x(t_1)$  および終点  $x(t_2)$  の位置は固定して考える。そのため、作用が極値を取る条件はゲージ変換を行っても変化しない。

### 共变的運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^\mu}{d\lambda})} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= \frac{d}{d\lambda} \left( -mc \frac{\frac{dx_\mu}{d\lambda}}{\sqrt{\frac{dx_\nu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} - qA_\mu \right) + q\partial_\mu A_\nu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left( -mc \frac{\frac{dx_\mu}{d\lambda}}{\sqrt{\frac{dx_\nu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \right) + qF_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

となる。ここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.23)$$

は**場の強さテンソル** (field strength tensor) と呼ばれる。

特に  $\lambda$  として固有時間  $\tau$  をとると  $\sqrt{\frac{dx_\nu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = c$  から、運動方程式は

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = qF_{\mu\nu} u^\nu, \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6.24)$$

となる。

### 場の強さテンソル

場の強さテンソル  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  は2つの添え字について反対称 ( $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ ) である反対称テンソルである。このテンソルの各成分は

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \partial_t A^i + \partial_{x^i} A^0 = -\frac{1}{c} E^i, \quad (6.25)$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (6.26)$$

となり、行列で書くと

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^1 & -\frac{1}{c}E^2 & -\frac{1}{c}E^3 \\ \frac{1}{c}E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ \frac{1}{c}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ \frac{1}{c}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

となる。なおこの  $F^{\mu\nu}$  はゲージ変換 (6.20) の下で不変であることは直ちに確かめられる。

## 6.2 電磁場の共変形式

Lorenz ゲージ条件

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6.28)$$

のもとでは、電磁ポテンシャル  $\phi, \mathbf{A}$  は

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.29)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.30)$$

を満たす。ここで **4元ポテンシャル**  $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \mathbf{A})$  および **4元電流密度ベクトル**  $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$  を導入すると、上の (6.29)(6.30) は

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (6.31)$$

また Lorenz ゲージ条件 (6.28) は

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (6.32)$$

さらに連続の方程式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  は

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6.33)$$

なお  $j^\mu, A^\mu$  とも、反変ベクトルとして変換する。

### Maxwell 方程式の共変形

Maxwell 方程式を 4元ベクトルの形式で書き直すと

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (6.34)$$

$$\partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\sigma F^{\mu\nu} = 0 \quad (6.35)$$

となる。なお (6.35) は、 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  から自明に成立することが分かる。この式 (6.35) を **Bianchi 恒等式**という。

### 双対テンソル

$F^{\mu\nu}$  に対してその**双対テンソル** (dual tensor) を

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (6.36)$$

で定義する。すると、

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & -\frac{1}{c}E^3 & \frac{1}{c}E^2 \\ B^2 & \frac{1}{c}E^3 & 0 & -\frac{1}{c}E^1 \\ B^3 & -\frac{1}{c}E^2 & \frac{1}{c}E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

と表される。このとき (6.35) は

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (6.38)$$

と書き直せる。

### 6.3 Maxwell 方程式と変分原理

前に電磁場中の荷電粒子の運動方程式を作用原理から導いた。ここでは、電磁場の Maxwell 方程式が作用原理から導かれることを示す。作用としては

$$S = \int dt \int d^3x \left( -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \right) \quad (6.39)$$

という形にとる。これは作用に対して要請される基本的な性質を満たしていることを指摘しておく。まず Lorentz 変換性であるが、4次元体積要素  $dt d^3x$  は Lorentz 不変であり、また被積分関数であるラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \quad (6.40)$$

も、添え字が完全に縮約されていることから Lorentz 不変であることが分かる。またゲージ変換性については、ゲージ変換 (6.20) のもとで  $\mathcal{L}$  の第1項は不変である。また第2項の変化分について  $\partial^\mu j_\mu = 0$  をもちいると、 $\mathcal{L}$  の変化は全微分  $\partial^\mu (\chi j_\mu)$  となり、変化分は積分でゼロとなるため、作用はゲージ不変である。

この作用から Maxwell 方程式が導かれる事を確かめておく。ポテンシャル  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  の変分  $A_\mu(\mathbf{x}, t) \rightarrow A_\mu(\mathbf{x}, t) + \delta A_\mu(\mathbf{x}, t)$  を考えるが、この際、時間の始点  $t = t_1$  と終点  $t = t_2$  での  $A_\mu$  は固定しておく。すなわち  $\delta A_\mu(\mathbf{x}, t_1) = 0 = \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_2)$  とする。すると、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\frac{1}{2\mu_0} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \delta A_\mu j^\mu = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \delta A_\nu j^\nu \\ &= -\partial_\mu \left( \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \delta A_\nu \right) + \left( \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu \right) \delta A_\nu \end{aligned} \quad (6.41)$$

このうち第一項は積分すると  $\delta A_\mu(\mathbf{x}, t_1) = 0 = \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_2)$  からゼロになる。第二項をゼロにする条件から Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (6.42)$$

が得られる。

#### 荷電粒子がある場合

ここで電荷  $q$  の荷電粒子の場合に、上の作用がどのようなになるか書き下してみよう。この荷電粒子が時間とともに  $\mathbf{x}(t)$  のように運動するとき、これによる電荷密度、電流密度は、

$$\rho = q \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{j} = q \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) = \rho \mathbf{v} \quad (6.43)$$

となる。従って4元電流密度は

$$\begin{aligned}
j^\mu(x) &= (c\rho, \mathbf{j}) = (c\rho, \rho\mathbf{v}) = \rho \frac{dx^\mu(t)}{dt} = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \frac{dx^\mu(t)}{dt} \\
&= \int dt' q\delta(t - t')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \frac{dx^\mu(t')}{dt'} = \int dt' qc\delta(ct - ct')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \frac{dx^\mu(t')}{dt'} \\
&= cq \int d\tau \delta^4(x - x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}
\end{aligned} \tag{6.44}$$

である。ここで4次元のデルタ関数を

$$\delta^4(x - x(\tau)) \equiv \delta(x^0 - x^0(\tau))\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) \tag{6.45}$$

で定義している。すると、(6.39)の第2項は、

$$\begin{aligned}
- \int dt \int d^3x A^\mu j_\mu &= - \int dt \int d^3x q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \frac{dx_\mu(t)}{dt} A^\mu(\mathbf{x}) \\
&= -q \int dt \frac{dx_\mu(t)}{dt} A^\mu(\mathbf{x}(t))
\end{aligned} \tag{6.46}$$

で前に導いた式に帰着される。すなわち荷電粒子と電磁場をまとめた作用は

$$S = \int dt \left( -mc^2 \frac{d\tau}{dt} - qA_\mu \frac{dx^\mu}{dt} \right) - \int dt d^3x \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{6.47}$$

となる。

## 6.4 エネルギー運動量の保存

Maxwell 方程式  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$  に  $F_{\nu\rho}$  をかけると、左辺は Bianchi 恒等式を用いて

$$\begin{aligned}
F_{\nu\rho} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu (F_{\nu\rho} F^{\mu\nu}) - (\partial_\mu F_{\nu\rho}) F^{\mu\nu} = \partial_\mu (F_{\nu\rho} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\nu F_{\mu\rho}) F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu (F_{\nu\rho} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}) F^{\mu\nu} = \partial_\mu (F_{\nu\rho} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (\partial_\rho F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu (F_{\nu\rho} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \partial_\rho (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{6.48}$$

のように変形される。すなわち、全体の等式は

$$\partial_\mu \left( F_{\nu\rho} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \mu_0 F_{\nu\rho} j^\nu \tag{6.49}$$

となる。

ここでさらに電磁場のエネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  を

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( -F^{\mu\sigma} F^\nu_\sigma + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \tag{6.50}$$

で定義すると上の式はさらに

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = j^\nu F^{\mu\nu} \tag{6.51}$$

と変形される。この式は系の運動量とエネルギーの保存を示す式であることを以下にみてみよう。

まずは  $T^{\mu\nu}$  の性質を調べる. 定義から  $T^{\mu\nu}$  は対称テンソル ( $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ ) であり、

$$T^{00} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = u_{em} : \text{エネルギー密度} \quad (6.52)$$

$$T^{0i} = \frac{1}{c\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = c(\mathbf{p}_{em})^i : \text{運動量密度} \quad (6.53)$$

$$T^{ij} = \frac{1}{c^2\mu_0} \left( -E^i E^j + \frac{1}{2}\delta^{ij}\mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( -B^i B^j + \frac{1}{2}\delta^{ij}\mathbf{B}^2 \right) = -(\mathbf{T}_{em})^{ij} : \text{Maxwell 応力テンソル} \quad (6.54)$$

のようになる。すると、(6.51) で  $\nu = 0$  では  $\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = j_i F^{i0}$ 、すなわち

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + c \nabla \cdot \mathbf{p}_{em} = -\mathbf{j} \cdot \frac{1}{c} \mathbf{E} \quad (6.55)$$

となる。ここで Poynting ベクトルは  $\mathbf{P} = c^2 \mathbf{p}_{em}$  と表されるので、

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{P} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (6.56)$$

となり、以前導いた電磁場のエネルギー保存の式である。(6.51) で  $\nu = i$  とすると同様にして、電磁場の運動量保存の式が得られる。

電流および電荷が荷電粒子によるものである場合を考えて、荷電粒子による 4 元電流密度 (6.44) を用いると、運動方程式 (6.24) より

$$\begin{aligned} j_\mu F^{\mu\nu} &= cq \int d\tau \delta^4(x - x(\tau)) \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} F^{\mu\nu} = -mc \int d\tau \delta^4(x - x(\tau)) \frac{d^2 x^\nu(\tau)}{d\tau^2} \\ &= mc \int d\tau \frac{d}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau)) u^\nu(\tau) = mc \int d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu(\tau)} \delta^4(x - x(\tau)) u^\nu(\tau) \\ &= -mc \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^4(x - x(\tau)) u^\nu(\tau) \end{aligned} \quad (6.57)$$

これから、粒子のエネルギー運動量テンソル

$$T_m^{\mu\nu} = mc \int d\tau \delta^4(x - x(\tau)) u^\mu(\tau) u^\nu(\tau) = m\gamma \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) \frac{dx^\mu(t)}{dt} \frac{dx^\nu(t)}{dt} \quad (6.58)$$

を定義すると、(6.51) は

$$\partial_\mu (T^{\mu\nu} + T_m^{\mu\nu}) = 0 \quad (6.59)$$

となり、これは荷電粒子と電磁場を合計した全エネルギーおよび運動量の保存を示している。

## 6.5 電磁場の Lorentz 変換

以下では Lorentz 変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  により電磁場がどのように変換されるかをみていく。電磁ポテンシャルの変換

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \quad (6.60)$$

と変換し、電磁場テンソル  $F^{\mu\nu}$  は

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (6.61)$$

と変換する。

例として  $z$  軸方向の Lorentz ブーストを考える。 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$  を用いて、Lorentz 変換行列は

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

となるので、電磁ポテンシャルの変換は

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^3) \quad (6.63)$$

$$A'^1 = A^1 \quad (6.64)$$

$$A'^2 = A^2 \quad (6.65)$$

$$A'^3 = \gamma(-\beta A^0 + A^3) \quad (6.66)$$

電磁場テンソルは

$$F'^{01} = \gamma F^{01} - \beta\gamma F^{31} \quad (6.67)$$

$$F'^{02} = \gamma F^{02} - \beta\gamma F^{32} \quad (6.68)$$

$$F'^{03} = F^{03} \quad (6.69)$$

$$F'^{12} = F^{12} \quad (6.70)$$

$$F'^{13} = -\gamma\beta F^{10} + \gamma F^{13} \quad (6.71)$$

$$F'^{23} = -\gamma\beta F^{20} + \gamma F^{23} \quad (6.72)$$

となる。電場と磁束密度に直せば

$$E'^1 = \gamma(E^1 - vB^2) \quad (6.73)$$

$$E'^2 = \gamma(E^2 + vB^1) \quad (6.74)$$

$$E'^3 = E^3 \quad (6.75)$$

$$B'^1 = \gamma\left(B^1 + \frac{v}{c^2}E^2\right) \quad (6.76)$$

$$B'^2 = \gamma\left(B^2 - \frac{v}{c^2}E^1\right) \quad (6.77)$$

$$B'^3 = B^3 \quad (6.78)$$

となる。

なお一般の方向のローレンツブースト変換に対する電磁場の変換は、上を一般化することで得られる。系  $S$  から系  $S'$  への速度  $\mathbf{v}$  のローレンツブーストを考える。 $\mathbf{v}$  方向の単位ベクトル  $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$  を導入するとよい。例えば位置ベクトル  $\mathbf{x}$  については、 $\mathbf{n}$  に平行な成分  $\mathbf{x}_\parallel \equiv (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  および垂直な成分  $\mathbf{x}_\perp \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_\parallel$  に分ければ

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \quad (6.79)$$

$$\mathbf{x}'_\parallel = \gamma(-\beta x^0 \mathbf{n} + \mathbf{x}_\parallel) \quad (6.80)$$

$$\mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp \quad (6.81)$$

のようになり、 $\mathbf{v}$  に垂直な成分は変換により不変で、 $\mathbf{v}$  に平行な成分のみ時刻と混ざる形で変換する。

電磁場の変換は同様な形でかくと

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad (6.82)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \quad (6.83)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad (6.84)$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_{\perp}) \quad (6.85)$$

$$(6.86)$$

となり、 $\mathbf{v}$  に速度に平行な成分は変化せず、 $\mathbf{v}$  に垂直な成分については電場と磁束密度が混ざる。

## 7 運動する電荷の作る電磁場

### 7.1 一様な一定電磁場中の荷電粒子の運動

ここでは今までの定式化の例として、一様な一定電磁場中の荷電粒子の運動を考える。

#### 7.1.1 一様な一定電場中の荷電粒子の運動

例えば、 $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ 、 $\mathbf{B} = 0$  の中での電荷  $q$ 、質量  $m$  の荷電粒子の運動を考え、初期条件が  $t = 0$  で  $\mathbf{p} = (p_0, 0, 0)$  であるとする。運動方程式は

$$\frac{dp^1}{dt} = 0, \quad \frac{dp^2}{dt} = qE \quad (7.1)$$

であるので、その解は

$$p^1 = p_0, \quad p^2 = qEt \quad (7.2)$$

となる。そのためエネルギーは

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2} \quad (7.3)$$

となる。ただし  $\mathcal{E}_0 \equiv \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2}$  とする。従って、速度  $\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}$  は、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2 qEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}} \quad (7.4)$$

となる。仮に時刻  $t = 0$  で原点  $(x, y) = (0, 0)$  にあったとすると、

$$x = \frac{p_0 c}{qE} \sinh^{-1} \frac{cqEt}{\mathcal{E}_0}, \quad y = \frac{1}{qE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2} - \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \quad (7.5)$$

となる。これより軌道の方程式は

$$y = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \cosh \frac{qEx}{p_0 c} - \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \quad (7.6)$$

というカタナリー（懸垂線）となる。なお非相対論極限では  $p_0 = mv_0$ 、 $\mathcal{E}_0 \sim mc^2$  と近似できて、

$$y = \frac{qE}{2mv_0^2} x^2 \quad (7.7)$$

という放物線となる。

### 7.1.2 一様な一定磁場中の荷電粒子の運動

例えば、 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 、 $\mathbf{E} = 0$  の中での電荷  $q$ 、質量  $m$  の荷電粒子の運動を考える。運動方程式は

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.8)$$

である。 $\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}$  であり、磁場は電荷に仕事をしないので、運動エネルギー  $\mathcal{E}$  は一定である。そのため、

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{qc^2}{\mathcal{E}} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.9)$$

となり、これは非相対論的な場合の式

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.10)$$

と、係数を除いて形は同じである。そのため、非相対論的な場合と同様に、 $z$  方向には等速度運動、 $xy$  面内では等速円運動を行い、全体としてはらせん運動となる。

## 7.2 一定速度で運動する電荷の作る電磁場

一定速度  $\mathbf{v}$  で運動する電荷  $q$  が作る電磁場を、Lorentz 変換を利用して計算する。 $S$  系で電荷が  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$  で運動しているとすると、電荷と同じ速度で移動する  $S'$  系からみると電荷は静止しているので、 $S'$  系で電荷が原点  $(x'_0, y'_0, z'_0) = (0, 0, 0)$  にあるとして、それを  $(x', y', z')$  で時刻  $t'$  において観測するとき

$$\Phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{A}' = 0 \quad (7.12)$$

である。電場と磁束密度は

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{r}' = (x', y', z') \quad (7.13)$$

$$\mathbf{B}' = 0, \quad (7.14)$$

となる。これを Lorentz 変換すれば、 $S$  系での電磁ポテンシャルは

$$\Phi = \gamma\Phi' = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'}, \quad (7.15)$$

$$\mathbf{A} = \gamma\beta \frac{\Phi'}{c} = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r'} \mathbf{v}, \quad (7.16)$$

となる。ところで、 $S'$  系で原点（点電荷の位置）から出た光が、観測点  $(x', y', z')$  に時刻  $t'$  に到着するとして、原点から光が出た時刻を  $t'_0$  とする。これを Lorentz 変換したとき、 $S$  系では時刻  $t_0$  に電荷の位置  $(x_0, y_0, z_0)$  をでた光が時刻  $t$  に  $(x, y, z)$  に着くことになるとする。この Lorentz 変換で、座標は次のように変換される。

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta z), \quad (7.17)$$

$$0 = x_0, \quad 0 = y_0, \quad 0 = \gamma(z_0 - \beta ct_0), \quad ct'_0 = \gamma(ct_0 - \beta z_0), \quad (7.18)$$

このとき、

$$\mathbf{r}' = (x', y', z'), \quad r' = |\mathbf{r}'| \quad (7.19)$$

$$\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = |\mathbf{r}| \quad (7.20)$$



とおくと、上で書いたことより

$$r = c(t - t_0), \quad r' = c(t' - t'_0) \quad (7.21)$$

であるので、 $r'$  は

$$r' = c(t' - t'_0) = \gamma [c(t - t_0 - \beta(z - z_0))] = \gamma \left( r - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \right) \quad (7.22)$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} \quad (7.23)$$

などと表される。したがって

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}}{r - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}, \quad (7.24)$$

これは

$$A^\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{c}{cr - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}, \frac{\mathbf{v}}{cr - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{u^\mu}{(x - x_0) \cdot u} \quad (7.25)$$

と書ける。これは後述する **Liénard-Wiechert ポテンシャル** (リエナール・ヴィーヘルト・ポテンシャル) である。

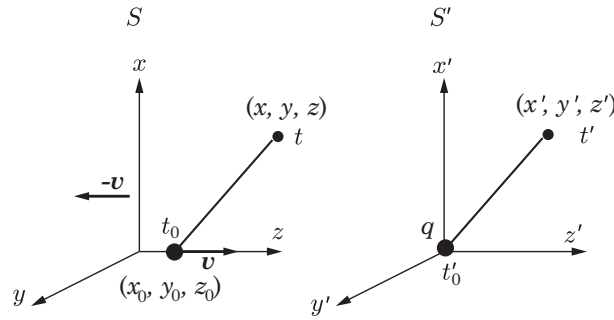


図 7.1: Liénard-Wiechert ポテンシャル

### 7.3 4元ポテンシャルの表式

上では一定速度で運動する電荷を考えたが、以下ではより一般的な電荷の運動を考える。Maxwell 方程式は (6.35) に書いたように、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (7.26)$$

$$\partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\sigma F^{\mu\nu} = 0 \quad (7.27)$$

と書かれて、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (7.28)$$

と書かれる。これを用いて、電流密度テンソル  $j^\mu$  から 4元ポテンシャル  $A^\mu$  を求める式を以下で導出する。(7.28) は (7.27) を恒等的にみたして、一方 (7.26) に代入すると、

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\nu \quad (7.29)$$

となる。Lorenz ゲージを採用すれば  $\partial_\mu A^\mu = 0$  となるので、これは非斉次波動方程式

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu \quad (7.30)$$

を満たす。以下では 3 次元波動方程式の Green 関数を求め、それを用いて 4 元ポテンシャルの式を書き下す。

### 3 次元波動方程式の Green 関数の導出

Green 関数を

$$\partial_\mu \partial^\mu D(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (7.31)$$

で定義する。なお  $\delta^4(x - x') \equiv \delta(x^0 - x'^0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  で定義する。この式より  $D(x, x') = D(x - x')$  の形で書けるので、

$$\partial_\mu \partial^\mu D(x) = \delta^4(x) \quad (7.32)$$

を満たす  $D(x)$  を求めればよい。ここで Fourier 変換して、

$$D(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) e^{-ikx} \quad (7.33)$$

とする。ただし  $kx \equiv k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  である。すると

$$\delta^4(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \quad (7.34)$$

より  $\tilde{D} = -\frac{1}{k^2}$  となる。すなわち、

$$D(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2} = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0 x^0}}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2} \quad (7.35)$$

$k^0$  積分では積分路上に極  $k^0 = \pm |\mathbf{k}|$  がある。これを  $k^0 = \pm |\mathbf{k}| - i\epsilon$  ( $\epsilon$ : 正の無限小) とするときが遅延 Green 関数に対応する。

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \theta(x^0) \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{e^{-i|\mathbf{k}|x^0} - e^{i|\mathbf{k}|x^0}}{2|\mathbf{k}|} \quad (7.36)$$

となり、球座標表示をして

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{i}{2(2\pi)^3} \theta(x^0) \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi k \sin \theta e^{ik|\mathbf{x}| \cos \theta} (e^{-ikx^0} - e^{ikx^0}) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \theta(x^0) \int_0^\infty dk (e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|}) (e^{-ikx^0} - e^{ikx^0}) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \theta(x^0) \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ik|\mathbf{x}| - ikx^0} - e^{ik|\mathbf{x}| + ikx^0}) \\ &= \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \theta(x^0) (\delta(|\mathbf{x}| - x^0) - \delta(|\mathbf{x}| + x^0)) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \theta(x^0) \delta(|\mathbf{x}| - x^0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \delta(x^2) \end{aligned} \quad (7.37)$$

となる。ここで  $\delta(x^2) = \delta((x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2) = \frac{1}{2|\mathbf{x}|} (\delta(x^0 - |\mathbf{x}|) + \delta(x^0 + |\mathbf{x}|))$  を用いた。この遅延 Green 関数  $D(x)$  は、時間の向きを変えない Lorentz 変換 (固有 Lorentz 変換) に対して不変である。

この遅延 Green 関数を用いると、4 元ポテンシャルは

$$A^\mu(x) = A_{in}^\mu(x) + \mu_0 \int d^4x' D(x-x') j^\mu(x') \quad (7.38)$$

となる。ただし  $A_{in}^\mu(x)$  は斉次波動方程式  $\partial_\nu \partial^\nu A_{in}^\mu(x) = 0$  の解である。

#### 7.4 運動する電荷の作る電磁ポテンシャル

4 元電流カレント  $j^\mu(x)$  の作る電磁場は、上で求めた結果から、

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' dt' \frac{\delta(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} j^\mu(\mathbf{x}', t') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j^\mu(\mathbf{x}', t_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (7.39)$$

$$t_0 = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (7.40)$$

であり、これは (4.40)(4.41) と一致している。この式を運動する点電荷に適用する。電荷  $q$  の点電荷の時刻  $t$  での位置を  $\mathbf{x}_2(t)$  として、

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q\dot{\mathbf{x}}_2(t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)), \quad (7.41)$$

であり、これを上式に代入する。

第一に、スカラーポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' dt' \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2(t'))\delta(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t')|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t')|} \end{aligned} \quad (7.42)$$

デルタ関数の引数を  $f(t')$  とおくと、積分のうちで残るのは、

$$f(t') = t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t')| \quad (7.43)$$

をゼロとするような時刻  $t'$  のみである。そのような時刻を  $t_0$  とおくと、これはちょうど、時刻  $t_0$  に位置  $\mathbf{x}_2(t_0)$  から出発した電磁波が、時刻  $t$  に位置  $\mathbf{x}$  に到達したことを表している。このデルタ関数部分をさらに計算する。公式から  $\delta(f(t')) = \frac{\delta(t' - t_0)}{|f'(t_0)|}$  であり、さらに

$$f'(t_0) = 1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t_0)) \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t_0)|} = 1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (7.44)$$

となる。ただし

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t_0), \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}_2(t_0), \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c = \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)/c \quad (7.45)$$

である。従って、

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\beta})} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)/c} \quad (7.46)$$

となる。同様に、

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{x}}_2(t_0)}{r - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)/c} \quad (7.47)$$

である。すなわち、

$$A^\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)/c} (c, \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)) \quad (7.48)$$

が導かれて、これは Liénard-Wiechert ポテンシャルと呼ばれる。前に電荷が一定速度の場合についてこの形を導出したが、ここで見たように、この Liénard-Wiechert ポテンシャルは電荷の任意の運動について用いることができる。

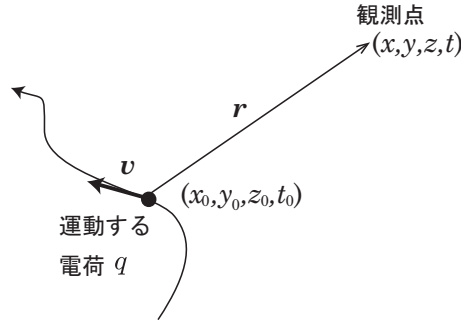


図 7.2: Liénard-Wiechert ポテンシャル

## 7.5 運動する荷電粒子が作る電磁場

$s = r - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)/c$  を用いると電磁ポテンシャルは

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s} \dot{\mathbf{x}}_2(t_0) \quad (7.49)$$

と書かれている。これから電場、磁場を求めるときには、 $t$  や  $\mathbf{x}$  での微分を行う必要がある。そのためにまず  $\frac{\partial t_0}{\partial t}$  および  $\nabla t_0$  を求める。

$$t - t_0 = \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t_0)| \quad (7.50)$$

なので、これを  $t$  で微分すると

$$1 - \frac{\partial t_0}{\partial t} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)}{cr} \frac{\partial t_0}{\partial t} = -\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\beta} \frac{\partial t_0}{\partial t} \quad (7.51)$$

なお  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t_0)$  である。従って、

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{r}{s} \quad (7.52)$$

となる。同様に、(7.50) に  $\nabla$  を作用させて、

$$\nabla t_0 = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{c(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\beta})} = -\frac{\mathbf{r}}{cs} \quad (7.53)$$

となる。

次にこれらを用いて、 $s$  の、 $t$  や  $\mathbf{x}$  についての微分を計算しよう。

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial t_0}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial t_0} = \frac{r}{s} \left( \frac{\partial r}{\partial t_0} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_0} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_0} \right) = \frac{r}{s} \left( -\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{c} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) \quad (7.54)$$

となる。また (7.52) と (7.54) から  $\frac{\partial s}{\partial t_0}$  が求まるので、

$$\begin{aligned} \nabla s &= \frac{\partial s}{\partial t_0} \nabla t_0 + \nabla(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})|_{t_0: \text{fixed}} = \left( -\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c} \mathbf{v}^2 - \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \left( -\frac{\mathbf{r}}{cs} \right) + \hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta} \\ &= \frac{r}{s} \hat{\mathbf{r}} (1 - \beta^2) - \frac{r}{s} (1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} + \frac{r^2}{c^2 s} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (7.55)$$

さらに

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}}(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{r}{s} \dot{\mathbf{v}}(t_0), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}(t_0) \cdot \nabla t_0 = -\frac{\mathbf{r}}{cs} \cdot \dot{\mathbf{v}}(t_0) \quad (7.56)$$

となる。これらを用いて電場、磁束密度が計算できる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}}{s}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{s^2} \nabla s + \frac{\mathbf{v}}{c^2 s^2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{c^2 s} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r}{s^3} (1 - \beta^2) (\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{r^2}{c^2 s^3} \hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}}) \right]\end{aligned}\quad (7.57)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}}{s} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( -\frac{1}{s^2} \nabla s \times \mathbf{v} + \frac{1}{s} \nabla \times \mathbf{v} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{r}{s^3} (1 - \beta^2) (\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{r}}) + \frac{r^2}{c^2 s^3} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}})) \right]\end{aligned}\quad (7.58)$$

となる。ここでは  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}_2(t_0)$ 、 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  である。なおこれらは

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} \quad (7.59)$$

を満たす。

## 7.6 加速する電荷から放射される電磁波

加速する電荷から遠くへ放射される電磁波を考える。電荷が存在する範囲に比べて十分遠くで電磁波を観測するとして、 $r$  の次数を考えると、式 (7.57)(7.58) の第 1 項は加速度に依存しない項で、 $O(1/r^2)$  となり、第 2 項は加速度に依存する項で、 $O(1/r)$  となる。遠方での Poynting ベクトル  $\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  が  $O(1/r^2)$  となれば遠方でのエネルギー放出に寄与する。そのためここでは第 2 項のみ考える。これを**加速度場** (acceleration field) もしくは**放射場** (radiation field) と呼ぶ。

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{c^2 s^3} \hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}}) \quad (7.60)$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{r^2}{c^2 s^3} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}})) \quad (7.61)$$

この放射場の性質について調べる。電荷の速度の向き  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  と観測者への向き  $\hat{\mathbf{r}}$  とのなす角を  $\theta$  とおくと、 $s = r(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\beta}) = r(1 - \beta \cos \theta)$  となる。従って Poynting ベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad}) = \frac{1}{c\mu_0} \hat{\mathbf{r}} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \\ &= \hat{\mathbf{r}} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{c^2 s^3} \right)^2 |\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}})|^2 \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{r^2 (1 - \beta \cos \theta)^6} |\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}})|^2\end{aligned}\quad (7.62)$$

これを用いると、電荷の運動により単位時間あたりに放出されるエネルギーの総和  $W$  は、電荷の位置を中心として電荷から十分離れた半径  $r$  の球面上で Poynting ベクトルを面積分すればよく、

$$W = \int \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = \int \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^6} |\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}})|^2 d\Omega \quad (7.63)$$

である。ここで  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  は微小立体角である。なおこれは観測者からみた単位時間あたり放射エネルギーであり、一方荷電粒子からみた単位時間あたり放射エネルギーは、微小立体角あたりにして、上の被積分関数に  $\frac{dt}{dt_0} = \frac{s}{r} = 1 - \beta \cos\theta$  をかけて、

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{(1 - \beta \cos\theta)^5} |\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \beta) \times \dot{\mathbf{v}})|^2 \quad (7.64)$$

となる。

### 7.6.1 非相対論的な場合

ここで電荷の速度が光速より十分小さい場合を考えると、 $\beta \ll 1$  より、

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{v}}), \quad \mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad} \quad (7.65)$$

なので Poynting ベクトルは

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c r^2} |\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{v}})|^2 \quad (7.66)$$

となる。さらに  $\dot{\mathbf{v}}$  と  $\hat{\mathbf{r}}$  とのなす角を  $\Theta$  とおくと、Poynting ベクトルは

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c r^2} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \Theta \quad (7.67)$$

となる。これは  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、つまり加速度と垂直方向に最も放射が強いことになる。単位時間あたりに放出されるエネルギーの総和は、

$$W = \int \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 d\Omega = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin^3 \Theta = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \quad (7.68)$$

となり、加速度の2乗に比例する。これを Larmor の公式という。

#### (例) サイクロトロン放射

半径  $a$  の円上を角振動数  $\omega$  で等速円運動をする荷電粒子を考えると、その位置は  $(a \cos \omega t, a \sin \omega t, 0)$  であり、その加速度は

$$\dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 (a \cos \omega t, a \sin \omega t, 0) \quad (7.69)$$

となる。さらに観測者の方向を  $\hat{\mathbf{r}} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$  と書くと、

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -a\omega^2 \sin\theta \cos(\phi - \omega t) \quad (7.70)$$

となる。すると微小立体角  $d\Omega$  について、単位時間あたりの放射エネルギーを時間平均をとって求めると

$$\frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \langle (a\omega^2)^2 (1 - \sin^2\theta \cos^2(\phi - \omega t)) \rangle d\Omega = \frac{\mu_0 q^2}{32\pi^2 c} (a\omega^2)^2 (1 + \cos^2\theta) d\Omega \quad (7.71)$$

となる。ここでは

$$|\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{v}})|^2 = |(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{v}}|^2 = \dot{\mathbf{v}}^2 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2 \quad (7.72)$$

を用いた。これを立体角で積分すると、単位時間あたりの全放射エネルギーは

$$W = \int \frac{\mu_0 q^2}{32\pi^2 c} (a\omega^2)^2 (1 + \cos^2\theta) d\Omega = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{6\pi c} \quad (7.73)$$

となる。これは **cyclotron 放射** と呼ばれる。

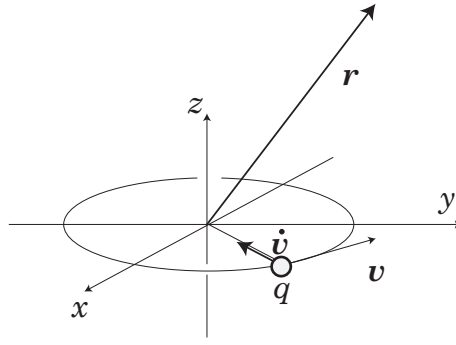


図 7.3: cyclotron 放射

### 7.6.2 相対論的な場合

#### (例) 粒子の速度と加速度とが平行な場合： 制動放射

荷電粒子が速度に平行な力をうけて加速または減速する場合を考えると、電磁波が放射される。これを**制動放射** (bremsstrahlung) という。(7.60)(7.61) より、速度  $\mathbf{v}$ 、加速度  $\dot{\mathbf{v}}$  と観測者へ至るベクトル  $\mathbf{r}$ 、電場  $\mathbf{E}_{rad}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}_{rad}$  の関係は図のようになる。

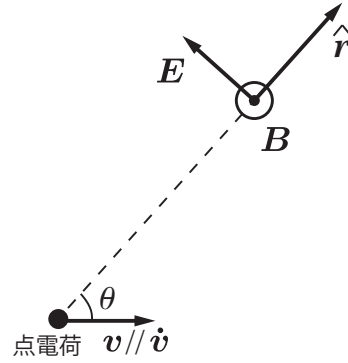


図 7.4: 制動放射

すると  $\beta$  を  $z$  軸にとり、 $\hat{\mathbf{r}}$  と  $\beta$  がなす角を  $\theta$  として、電荷が単位時間あたり立体角  $d\Omega$  に放出するエネルギーは (7.64) より、

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \quad (7.74)$$

となる。これは図 7.5 のように、電荷の前方方向にピークを持つ。

単位時間あたりの全放出エネルギーは、

$$W = \int \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2 (1 - \beta \cos \theta)^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 r^2 d\Omega = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \gamma^6 \quad (7.75)$$

となる。 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  である。

#### (例) 粒子の速度と加速度とが垂直な場合： synchrotron 放射

例えば粒子が円運動をしているときには加速度と速度が垂直となる。このような場合を考えよう。速度  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ 、加速度  $\dot{\mathbf{v}} = (\dot{v}, 0, 0)$  とし、 $\mathbf{r}$  の球座標表示の角度部分を  $\theta, \phi$  とする。ここで、 $\dot{\mathbf{v}}$  と  $\hat{\mathbf{r}}$  のなす角を  $\Theta$

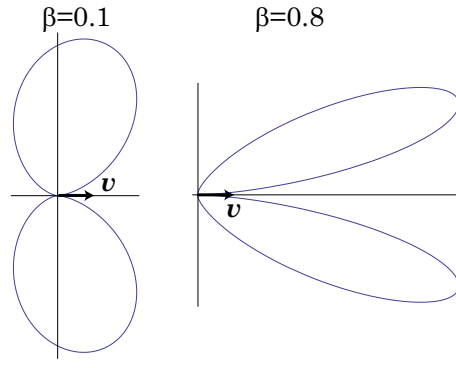


図 7.5: 制動放射の角度分布。  $\beta = 0.1$  および  $\beta = 0.8$  の場合を示す

とすると、 $\cos \Theta = \cos \phi \sin \theta$  となるので、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \beta) \times \dot{\mathbf{v}}) &= (\hat{\mathbf{r}} - \beta)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \dot{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \beta)) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} - \beta)|\dot{\mathbf{v}}| \cos \Theta - \dot{\mathbf{v}}(1 - \beta \cos \theta)\end{aligned}\quad (7.76)$$

なので、

$$\begin{aligned}|\hat{\mathbf{r}} \times ((\hat{\mathbf{r}} - \beta) \times \dot{\mathbf{v}})|^2 &= (\hat{\mathbf{r}} - \beta)^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2 \cos^2 \Theta + |\dot{\mathbf{v}}|^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - 2(\hat{\mathbf{r}} - \beta) \cdot \dot{\mathbf{v}} |\dot{\mathbf{v}}| \cos \Theta (1 - \beta \cos \theta) \\ &= |\dot{\mathbf{v}}|^2 ((1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2) \cos^2 \Theta + (1 - \beta \cos \theta)^2 - 2 \cos^2 \Theta (1 - \beta \cos \theta)) \\ &= |\dot{\mathbf{v}}|^2 ((1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (7.77)$$

となり、Poynting ベクトルは

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c r^2 (1 - \beta \cos \theta)^6} |\dot{\mathbf{v}}|^2 [(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi \sin^2 \theta] \quad (7.78)$$

となる。単位時間あたり  $d\Omega$  に放出されるエネルギーは

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P} (1 - \beta \cos \theta) = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c (1 - \beta \cos \theta)^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 [(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi \sin^2 \theta] \quad (7.79)$$

全放出エネルギーは

$$\begin{aligned}W &= \int \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \int d(\cos \theta) d\phi \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^5} [(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi \sin^2 \theta] \\ &= \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \gamma^4\end{aligned}\quad (7.80)$$

となる。

### チェレンコフ放射

これまで、電荷が加速度運動すると電磁波を放射することを見てきた。電荷が等速度運動するときには通常電磁波を放出しない。一方、媒質中では真空中に比べて光の速度が遅くなるため、媒質中の光速より電荷が速く運動することができる。そのときには等速度運動であっても電磁波が放出される。この現象を **Cherenkov 放射**、この電磁波を **Cherenkov 光** という。

ここでは誘電率  $\varepsilon$ 、透磁率  $\mu$  の媒質を考える。この媒質中の光速は  $c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  である。この中を速度  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$  で運動する荷電粒子を考える。まず荷電粒子とともに運動する観測者 ( $S'$  系) から見たときに原点  $(x', y', z') = (0, 0, 0)$  に静止しているとして、Lorentz 変換すると

$$c_n t' = \gamma'(c_n t - \beta' z), \quad z' = \gamma'(-\beta' c_n t + z), \quad x = x', \quad y = y' \quad (7.81)$$



となる。ただし、

$$\beta' = \frac{v}{c_n}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (7.82)$$

となる。電磁ポテンシャルは

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon s}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu q \mathbf{v}}{4\pi s}, \quad (7.83)$$

となる。ここで (7.22)(7.23) と同様にして、

$$s = r - \beta' \cdot \mathbf{r} = \frac{r'}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'} \sqrt{\gamma'^2(z - vt)^2 + (x^2 + y^2)} = \sqrt{(z - vt)^2 + (1 - \beta'^2)(x^2 + y^2)}, \quad (7.84)$$

である。真空中では必ず  $s > 0$  となるが、媒質中では  $\beta' = \frac{v}{c_n}$  が 1 より大きいと  $s = 0$  となりうる。それは、

$$(z - vt)^2 = (\beta'^2 - 1)(x^2 + y^2), \quad (7.85)$$

という円錐上で起こり、このとき電磁ポテンシャルが発散する。これがちょうどパルス状の衝撃波として伝わる電磁波となっていて、円錐面がちょうどその波面となっていて、これがチェレンコフ光に相当する。

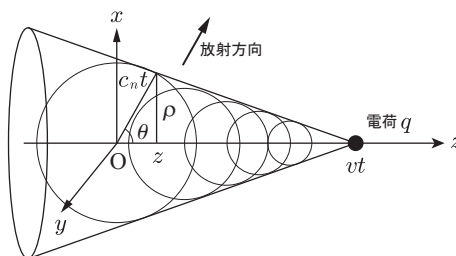


図 7.6: Cherenkov 放射

## 7.7 電荷による電磁波の散乱

荷電粒子が存在している領域に電磁波が入射すると、荷電粒子が力を受けて運動し、その加速度により電磁波が放射される。これを荷電粒子による電磁波の散乱という。

### 7.7.1 Thomson 散乱

例えば  $z$  軸正の向きに進む平面波の電磁波が電子の位置へと入射するとして、電子の位置での電場を

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E}_0 = (E_0, 0, 0) \quad (7.86)$$

とする。電子の運動は非相対論的に扱う。磁場は  $\mathbf{B} = (0, \frac{E_0}{c}, 0)e^{-i\omega t}$  となるので、磁場が電子に及ぼす Lorentz 力の効果は無視できて、電子の加速度は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{-e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (7.87)$$

となる。電子の電荷を  $q = -e$  とした。

観測者へ向かう方向の単位ベクトル  $\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  と、加速度ベクトル ( $x$  方向) のなす角を  $\Theta$  とおくと、 $\cos \Theta = \sin \theta \cos \phi$  となる。立体角  $d\Omega$  への放射エネルギーは Larmor の公式から

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \sin^2 \Theta = \frac{\mu_0 e^4}{32\pi^2 c m^2} |\mathbf{E}_0|^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \quad (7.88)$$

となる。一方、入射波の単位面積あたりのエネルギーの流量密度は  $f = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathbf{E}_0|^2$  である。これから、単位面積を通して入射した単位強度の電磁波に対して、単位時間に単位立体角へと放射される強度の割合を散乱の微分断面積 (differential cross section) という。今の場合の電磁波の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{f} \frac{dW}{d\Omega} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \quad (7.89)$$

となる。

また、入射波が偏光していないとすると、上の式を偏光方向  $\phi$  について平均をとればよく、

$$\left. \frac{dW}{d\Omega} \right|_{\text{unpolarized}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dW}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^4}{32\pi^2 cm^2} |\mathbf{E}_0|^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (7.90)$$

となる。この場合の微分断面積は

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{unpolarized}} = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (7.91)$$

となる。全断面積はこれを積分して、

$$\sigma = \int \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{unpolarized}} d\Omega = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (7.92)$$

となる。これは Thomson 散乱の断面積の公式であって、 $r_e$  は古典電子半径と呼ばれ、

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.817 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (7.93)$$

で定義される定数である。

### 7.7.2 Rayleigh 散乱

Thomson 散乱では電子が自由に動ける場合を考えた。今度は電荷が調和ポテンシャルで物質中に束縛されている場合を考える。これを Rayleigh 散乱という。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\omega_0^2 \mathbf{x} - e\mathbf{E} \quad (7.94)$$

となる。ここで  $\mathbf{x} \propto e^{-i\omega t}$  と仮定して解を求めると、

$$\mathbf{x} = \frac{-e\mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{-i\omega t} \quad (7.95)$$

となる。すなわち加速度は

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e\mathbf{E}_0\omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{-i\omega t} \quad (7.96)$$

となる。従って、Rayleigh 散乱での微分断面積  $\frac{d\sigma_R}{d\Omega}$  は、Thomson 散乱での微分断面積  $\frac{d\sigma_T}{d\Omega}$  と比べると、

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2 \quad (7.97)$$

となって、 $\omega_0 \ll \omega$  の時は Thomson 散乱に帰着され、一方  $\omega_0 \gg \omega$  の時は  $\omega^4$  に比例する。

## 7.8 放射の反作用

荷電粒子が加速度を持って運動すると電磁波を放射するが、それにより粒子は力学的エネルギーを失う。これを電磁波の放射の**反作用** (reaction) という。

### Abraham-Lorentz の公式

電荷  $q$ 、質量  $m$  の荷電粒子が運動するとき、その速度が光速に比べて十分小さい非相対論的な場合 ( $v \ll c$ ) においては、放射で粒子が失うエネルギーは、単位時間あたりに、Larmor の公式により

$$\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \quad (7.98)$$

となる。以下では粒子が周期的な運動をしているとして、1 周期  $t = t_1 \sim t = t_2$  を考える。放射の反作用により粒子が受ける力を  $\mathbf{F}_{rad}$  とおくと、1 周期の間にその力がする仕事  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} dt$  は

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\dot{\mathbf{v}}|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} dt \quad (7.99)$$

となる。なお運動が周期的であることから、部分積分の表面項はゼロとなる。するとこの式から、

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \mathbf{F}_{rad} - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \ddot{\mathbf{v}} \right) dt = 0 \quad (7.100)$$

従って粒子が受ける力の時間平均は

$$\bar{\mathbf{F}}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \ddot{\mathbf{v}} \quad (7.101)$$

となる。この力を **Lorentz 摩擦力** という。

電場中の荷電粒子の運動を例にとり、Lorentz 摩擦力が無視できる条件を考察する。運動方程式は

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \ddot{\mathbf{v}} \quad (7.102)$$

である。第一近似として摩擦力を無視すると  $\dot{\mathbf{v}}^{(0)} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$  となるので、これを用いると Lorentz 摩擦力は

$$\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{q}{m} \dot{\mathbf{E}} \quad (7.103)$$

でありこれが電場からの力  $q\mathbf{E}$  と比べて無視できるためには、電磁場の角振動数を  $\omega$  として、

$$\frac{\mu_0 q^2 \omega}{6\pi c m} \ll 1 \quad (7.104)$$

が必要である。これは電磁波の波長に直すと

$$\lambda \equiv 2\pi c / \omega \gg \frac{\mu_0 q^2}{3m} = \frac{q^2}{3\varepsilon_0 c^2 m} \sim r \equiv \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m} \quad (7.105)$$

この  $r$  は電子の古典半径、すなわち、静止エネルギー  $mc^2$  と同じクーロンエネルギーを持つ電荷の半径を表している。

### 古典的原子模型の不安定性

水素原子の古典的模型を考える。電子が半径  $r$  の円運動をしているとして

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e^2 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad (7.106)$$

これを用いると電磁波として放出されるエネルギーは

$$W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{2}{3m^2 c^3 r^4} \quad (7.107)$$

となる。力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (7.108)$$

となる。したがって放射によりエネルギーを失うと回転半径は小さくなっていく。これを式で表すと

$$\frac{dE}{dt} = -W \quad (7.109)$$

なので、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4r_e^2}{3r^2} c \quad (7.110)$$

となる。ただし  $r_e$  は古典電子半径である。初期条件として  $t = 0$  のときに半径  $r$  が Bohr 半径  $r = a_B = 5.3 \times 10^{-11} \text{m}$  とすると、

$$t = \frac{a_B^3 - r^3}{4r_e^2 c} \quad (7.111)$$

となり、時刻  $t = \frac{a_B^3}{4r_e^2 c} \sim 1.56 \times 10^{-11} \text{s}$  において半径がゼロとなる。すなわち古典的原子模型は不安定である。