東大物理工学科 2013

21B00817 鈴木泰雅,[1]

第一問

[1]

連立方程式を解くことによって

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

よって，これらを代入することによって，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

となる．よって示せた．

[2]

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \left(\dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\dot{\phi}\right)^2 + \left(\dot{r}\cos\phi + r\cos\phi\dot{\phi}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \tag{3}$$

であるため示せた．

[3]

r 成分のラグランジュ方程式より

$$\mu\ddot{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\dot{\phi}^2 - U(r)\right) \tag{4}$$

であり，

$$\frac{d}{dr}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right)\frac{d\dot{\phi}}{dr} \tag{5}$$

$$= 2\mu r\dot{\phi}^2 - 4\mu r\dot{\phi}^2 = -2\mu r\dot{\phi}^2 \tag{6}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right) \tag{7}$$

であるため，

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\mu r\dot{\phi}^2 + U(r)\right) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) \tag{8}$$

この物理的な意味としては大きなポテンシャル (一般化したポテンシャル) と見なすことができ，第一項は遠心力によるポテンシャル，第二項は外力によるポテンシャルである．

[4]

両辺に $\dot{r}$ を書けると

$$\mu\dot{r}\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\frac{dr}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) \tag{9}$$

であり，左辺は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu r^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) \tag{10}$$

より確かにエネルギー保存が実現している．

[5]

まず $\boldsymbol{l}$ と垂直であることを示す．そもそも $\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}$ は xy 平面上での運動であったため z 成分も持たない．よって自明に垂直である．また,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)\boldsymbol{e}_y \tag{11}$$

であり，$\boldsymbol{l} = l\boldsymbol{e}_z$ であるため,

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} = l\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)\left(-\boldsymbol{e}_y\right) + l\left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)\boldsymbol{e}_x \tag{12}$$

であるため,

$$\mu\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}\right) \cdot \boldsymbol{r} = \mu l r^2 \dot{\phi} \tag{13}$$

であるため,

$$Ar\cos\alpha = \mu l r^2 \dot{\phi} - \mu k r = l^2 - \mu k r \tag{14}$$

であるため,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\alpha\right) \tag{15}$$

が成立する．

第四問

[1]

それぞれ周期境界条件があるため,

$$p_{x,1} = \frac{2\pi\hbar}{L}n_1, \cdots \tag{16}$$

のように $p_{x,i}, p_{y,i}$ それぞれに関して周期的境界条件が成立する．つまり運動量空間において，$\frac{L}{2\pi\hbar}$ 倍をすると量子状態の数が求められるため E よりも小さいエネルギーの量子状態は

$$\Omega(E) = \frac{L^4}{(2\pi\hbar)^4} \cdot (\text{半径}\sqrt{2mE}\text{の 4 次元球の体積}) \tag{17}$$

である．よって，$E \sim E + dE$ にある量子状態の数は

$$W(E) = \frac{d\Omega(E)}{dE}dE = \frac{L^4}{(2\pi\hbar)^4} \cdot (\text{半径}\sqrt{2mE}\text{の 4 次元球の表面積}) \cdot 2mE\frac{dE}{E} \tag{18}$$

である．よって示せた.

[2]

2 次元球 (円) の体積は図より

$$\int_{-r}^{r} dq_1 2\sqrt{r^2 - q_1^2} \tag{19}$$

で求まる．ここで，2 次元球の表面積はこの体積を r で微分したものだから

$$S_2(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2}} \tag{20}$$

である．同様にして 3 次元球の体積は $q_1 = x, q_2 = y$ として見立てることによって

$$\int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2 2\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2} \tag{21}$$

である．これを r で微分することによって $S_3(r)$ を導ける．同様にして $S_4(r)$ も導ける.

[3]

v_1 を満たす量子状態の個数を W' とすると等確率の原理から

$$P(v_1)dv_1 = \frac{W'}{W(E)} \tag{22}$$

である．ただし今回は規格化をしなくても良いため

$$P(v_1)dv_1 = W' \tag{23}$$

として良い．全体のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + E_2 \tag{24}$$

であり，全体の量子状態は E_2 に関してのみ数え上げすればよい．これは全体のエネルギー

$$\epsilon = E - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{25}$$

として 1 粒子の 2 次元状態であるため

$$\Omega'(\epsilon) = \frac{L^2}{(2\pi\hbar)^2}\pi(2m\epsilon) \tag{26}$$

よって，

$$W' = \frac{d\Omega'}{d\epsilon}d\epsilon = (\text{定数}) \cdot (-mv_1)dv_1 \tag{27}$$

である．よって，$P(v_1) = v_1$?