2022 年 4 月 15 日配布

電磁気学　演習第 4 回 — ガウスの定理とストークスの定理

問題 4.1：面積分

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について，ある面 S 上での面積分を次のように定義する．

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S \tag{4.1}$$

ここで，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ は面 S 上の各点での単位法線ベクトルである．

(1) 面 S が媒介変数 u, v を用いて $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ と表されるとする．次に示す媒介変数についての $\boldsymbol{r}$ の微分のベクトル積について，その大きさと向きが何を表すかを考察せよ．

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v} \tag{4.2}$$

(2) 面積分 (4.1) を u と v についての二重積分で表わせ．

(3) 単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ の面積分は面 S の表面積を与える．

$$\int_S \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \mathrm{d}S = S \tag{4.3}$$

S を半径 a の球の表面とし，面上の点 $\boldsymbol{r}$ を θ, φ を媒介変数として $\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = a\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + a\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + a\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z$ とする．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求め，面積分 (4.3) を実行することで表面積 S を求めよ．

(4) 各辺が x, y, z 軸に平行な微小直方体を考える．辺の長さはそれぞれ $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ とする．直方体の六つの面について面積分を計算し，次の**ガウスの定理** (Gauss's theorem) [1]が成り立つことを確認せよ．ただし，$S = \partial V$ は領域 V の表面とする．

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V \tag{4.4}$$

問題 4.2：ガウスの定理

(1) 次の場合で式 (4.4) の両辺の積分を計算し，ガウスの定理が成り立つことを確認せよ．

(a) $\boldsymbol{A}$ は z 方向の定ベクトル場 $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_z$ とする．
積分領域は z 軸を中心軸とする円柱領域（底面の半径 a，高さ h）とする．

(b) ベクトル場を $\boldsymbol{A} = (-x, y, 0)$ とする．積分領域は前小問 (a) と同じとする．

(c) ベクトル場を $\boldsymbol{A} = (0, 0, z)$ とする．積分領域は原点を中心とする半径 a の球領域とする．

(2) ガウスの定理を用いて面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を求めよ．ただし，ベクトル場は $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}/r^3$ で，積分領域は原点を中心とする半径 a の球領域とする．

[1]発散定理 (divergence theorem) ともいう．

(3) ガウスの定理を用いて面積分 $\int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を求めよ．ただし，ベクトル場は $\boldsymbol{A}=\mathrm{sgn}(z)\boldsymbol{e}_z$ とし，積分領域は原点を中心とする半径 a の球領域とする．$\mathrm{sgn}(x)$ は符号関数である．

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases} \tag{4.5}$$

問題 4.3：線積分とストークスの定理

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ について，ある曲線 C に沿った線積分を次のように定義する．

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x \tag{4.6}$$

ここで，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ は曲線 C 上の各点での接線ベクトルである．

(1) 媒介変数 u に対して点 $\boldsymbol{r}(u)$ が動く軌跡を曲線 C とするとき，接線ベクトル $\boldsymbol{t}(u)$ を求めよ．

(2) 線積分 (4.6) を u の積分として表わせ．

(3) 原点を中心とする半径 a の円を C とする．C は xy 平面上にあり，z 軸を左に見ながら回る向きに進むものとする．次の積分を計算せよ．

$$\boldsymbol{I}=\int_C \boldsymbol{x}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4.7}$$

(4) xy 平面上の四点 $\boldsymbol{A}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}=(x+\mathrm{d}x,y,z)$, $\boldsymbol{C}=(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z)$, $\boldsymbol{D}=(x,y+\mathrm{d}y,z)$ が作る長方形 S を考える．$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{A}$ と一周する経路 C について，次の**ストークスの定理** (Stokes' theorem) [2]が成り立つことを示せ．

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.8}$$

問題 4.4*：ガウスの定理とストークスの定理

(1) 原点を中心とする半径 a の球の内部を V とし，その表面を $S=\partial V$ とする．球座標 (r,θ,φ) を用いて $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ として式 (4.4) の両辺を計算し，ガウスの定理が成り立つことを示せ．

(2) XY 平面上で原点を中心とする半径 a の円を S とし，その縁を $C=\partial S$ とする．円筒座標 (r,θ,z) を用いて $\boldsymbol{A}(r,\theta,z)=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_z\boldsymbol{e}_z$ として式 (4.8) の両辺を計算し，ストークスの定理が成り立つことを示せ．ただし，線積分は z 軸を左にみる向きに辿るものとする．

以上

[2]回転定理 (curl theorem) ともいう．