（令和 4 年 8 月 17 日実施）

令和 5 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	3 枚 (A4)
解答紙	問題 I	2 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 図 1 に示すように、3 台の台車が自然長 l、バネ定数 k のバネで連結されている。台車の質量は m、それぞれの台車の重心位置は x_1, x_2, x_3 とする。ただし、$x_1 < x_2 < x_3$ であり、台車は x 軸上のみを運動する。また摩擦の効果は無視してよい。

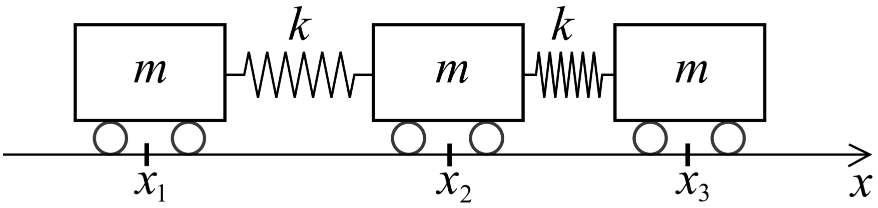

図 1

1-1. 運動エネルギーと弾性エネルギーを求め、ラグランジアンを導け。

1-2. x_1, x_2, x_3 それぞれに対する運動方程式を導け。

1-3. $x_j - c_j = A_j \exp(i\omega t), (j = 1, 2, 3)$ として特性方程式を導き、基準振動数を全て求めよ。ここで c_j は静止しているときの各台車の重心位置である。

1-4. $A_1 = A$ として、それぞれの基準振動について A_2, A_3 を A で表せ。

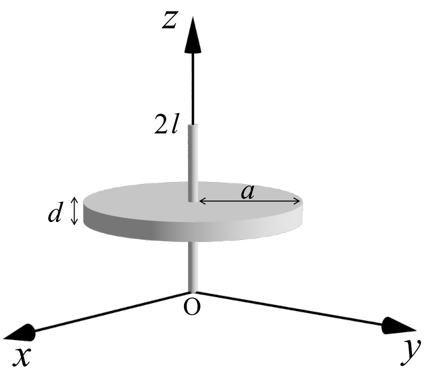

図 2

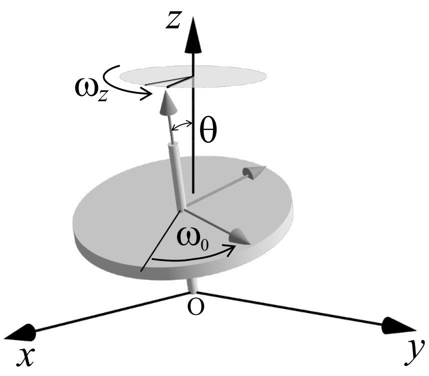

図 3

問 2 図 2 に示すような半径 a、厚み d の円盤と、質量の無視できる長さ $2l$ の棒からなるコマの運動を考える。円盤は質量 M の一様な物質でできており、重心がちょうど棒の中心に来るように固定されている。棒の下端は原点 O に固定されており、コマは O を支点として自由に回転できる。コマには $-z$ 方向に重力が働いている。摩擦や空気抵抗は無視できるとし、重力加速度は g とする。

まず、図 2 のように棒が z 軸と一致している場合を考える。

2-1. コマの z 軸回りの慣性モーメント I_z を求めよ。

2-2. コマが z 軸回りに角速度 ω_0 で回転しているときの角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を求めよ。

2-3. $z=0$ を位置エネルギーの基準として、回転するコマの力学的エネルギー E を求めよ。

次に、図 3 のように棒を z 軸から θ だけ傾け、棒の回りに自転速度 ω_0 で回転させると、コマは z 軸回りに角速度 ω_z で歳差運動をする。

2-4. 重力によりコマに働くトルク $\boldsymbol{N}$ を求めよ

2-5. コマの自転速度 ω_0、および歳差運動の角速度 ω_z は重力により時間変化しないことを示せ。

歳差運動の復習

ω_0 と ω_z をよび表現する

問題 II

問 1 幅 w、長さ L の 2 枚の薄い導体板を図 (a) のように d だけ離して設置したコンデンサがあり、極板間には誘電率が ε の誘電体が挟んである。ただし $d \ll w, L$ であり、端の効果は考えなくて良いものとする。また導体板の抵抗は無視できるものとする。

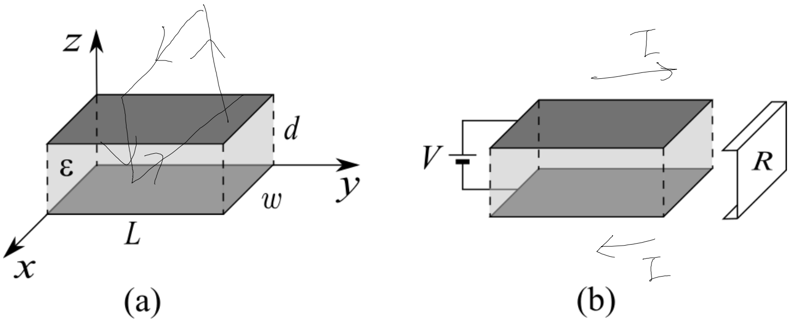

図 1

1-1. このコンデンサに $z = d$ の側がプラスとなるように電圧 V を印加したときに上下の電極に誘起される電荷を求めよ。

次に、図 1(b) のように、このコンデンサの左端 $(y = 0)$ に $z = d$ の側がプラスとなるように電圧 V を印加し、右端 $(y = L)$ に図 1(b) 右のようなコの字型の均一な抵抗 R を接続したところ、y 方向に均一な電流 I が流れた。

1-2. このときに極板間に発生する磁場 H の大きさと向きを求めよ。

1-3. 極板間におけるポインティングベクトルの大きさと向きを求めよ。

1-4. 極板間におけるエネルギーの流れが、抵抗 R で消費される電力に等しいことを示せ。

$J = \frac{I}{w}\left(\delta(z-d) - \delta(z) \right) e_y$

問 2 自己インダクタンス L_1, L_2 のコイル 1,2 が、図 2(a) のように距離 d だけ離れて固定してあり、それらの相互インダクタンスが M であるものとする。このとき、コイル 1,2 を流れる電流を I_1, I_2 とすると、それぞれのコイルに生じる鎖交磁束が

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$
$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

となることを使って以下の問に答えよ。

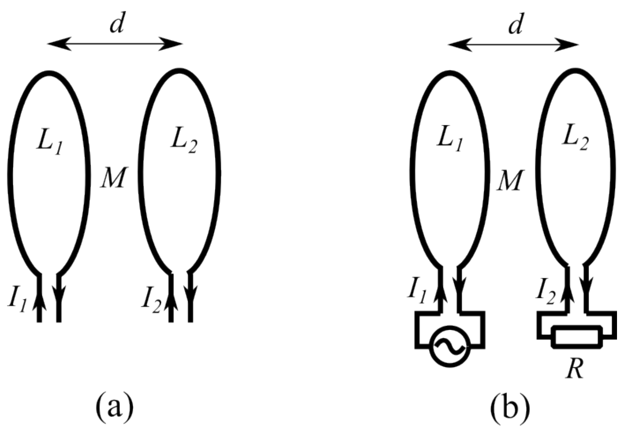

図 2

2-1. コイルに蓄えられるエネルギーが電流の変化の仕方によらないことを利用して、コイル 1 に電流 I_1、コイル 2 に電流 I_2 が流れているときに、空間に蓄えられているエネルギーが

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

となることを示せ。

次に、図 2(b) のようにコイル 2 に抵抗 R をつなぎ、コイル 1 に振動電流 $I_1 = I_0 \sin \omega t$ を流した。

2-2. コイル 2 に流れる電流 I_2 の従う微分方程式を求めよ。

2-3. $I_2 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ とおいて A, B を求めることによりこの微分方程式を解け。

2-4. 相互インダクタンス M が、コイル間の距離を x として $x = d$ の近傍で $M(x) = ax + b$ と表されるものとする。このときコイル間に働く力の時間平均を求めよ。

問 3 等方物質中のマックスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

と表される。これについて以下の問いに答えよ。なお必要ならば公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使って良い。

3-1. これらのマックスウェル方程式が電荷の保存則 $\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ を満たしていることを示せ。

3-2. $\rho = 0$ の場合に $\boldsymbol{E}$ が $e^{i\omega t}$ のような時間変化をすると仮定して、$\boldsymbol{E}$ が

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - i\mu\omega\sigma^* \boldsymbol{E} = 0$$

を満たすことを示せ。ただし $\sigma^* \equiv \sigma + i\omega\varepsilon$ は複素伝導度である。

3-3. ε, μ, σ を実数定数とし、$\omega\varepsilon \ll \sigma$ を仮定する。このとき、z 方向に進む電磁波を $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[i\omega t - (\alpha + i\beta)z]$ として上式の解を求め、z 方向へ進むときの単位長さあたりのエネルギーの減衰率を ω, σ, μ を用いて表せ。またこの減衰はなぜ生じるか定性的に説明せよ。