2022 年 4 月 26 日配布

電磁気学　演習第 7 回 — 多重極展開

問題 7.1：グリーンの公式

(1) 任意の閉曲面 S（その囲む領域を V とする）と微分可能なスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$，$\psi(\boldsymbol{r})$ について，次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \int_S \phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_V \phi(\boldsymbol{r})\Delta\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V \tag{7.1}$$

$$\int_V \Big(\phi(\boldsymbol{r})\Delta\psi(\boldsymbol{r}) - \psi(\boldsymbol{r})\Delta\phi(\boldsymbol{r})\Big)\,\mathrm{d}V = \int_S \Big(\phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}) - \psi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})\Big)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.2}$$

(2) 前小問の関係式を用いて，領域 V 内の任意の点 $\boldsymbol{r}_0$ での静電ポテンシャルが次のように書けることを示せ．

$$\phi(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{7.3}$$

(3) 式 (7.3) はポアソン方程式の一般解で，式 (5.11) はその特解である．式 (5.11) が解になるためには，式 (7.3) の右辺第二項が零になるように S での境界条件を適切に選ばなければならない．領域 V は十分大きいものとし，その表面 S 上で静電ポテンシャルは角度によらないと仮定する $\phi(\boldsymbol{r}) \to \phi(r)$ $(r\to\infty)$．このとき，式 (7.3) の右辺第二項が零になるような $\phi(r)$ の関数形を求めよ．

問題 7.2：多重極展開

電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ が作る静電ポテンシャルを考える．

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}^3x' \tag{7.4}$$

ここで，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}' = rx'\cos\theta$ とするとクーロン相互作用は次のように表せる．

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2(x'/r)\cos\theta + (x'/r)^2}} \tag{7.5}$$

電荷 $\rho(\boldsymbol{r})$ が有限の領域にのみ分布すると仮定して，その領域よりも十分遠方 $r \gg x'$ でのポテンシャルの近似形を求めよう．

(1) 式 (7.5) をテイラー展開し，(x'/r) の二次の項まで書き下せ．

(2) 前小問 (1) の結果から，静電ポテンシャルが次のように展開できることを確認せよ．

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{2}\frac{\sum_{i,j=1}^3 Q_{ij}\hat{r}_i\hat{r}_j}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{7.6}$$

ここで，q_0，$\boldsymbol{p}$，Q_{ij} は，それぞれ全電荷量，電気双極子モーメント，電気四極子モーメントテンソル成分であり，$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ とする．

(3) q_0，$\boldsymbol{p}$，Q_{ij} を $\rho(\boldsymbol{x})$ を用いて書き表せ．

問題 7.3：電気双極子

(1) 点 $\boldsymbol{P} = d\boldsymbol{e}_z$ に電荷 q，$\boldsymbol{P}' = -d\boldsymbol{e}_z$ に電荷 $-q$ をおき，qd を一定に保ちながら $d \to 0$ の極限をとったときの静電ポテンシャルを求めよ．

(2) この系の全電荷量 q，電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$，電気四極子モーメントテンソル成分 Q_{ij} を求めよ．

(3) 一般に電荷 q と $-q$ の対について，電荷 $-q$ から電荷 q へ向かう変位ベクトルを $\boldsymbol{d}$ として qd を一定に保ちながら $d \to 0$ の極限をとったものを電気双極子といい，その電気双極子モーメントは $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ である．電場 $\boldsymbol{E}$ の中に電気双極子 $\boldsymbol{p}$ があるとき，この双極子に働く力を求めよ（ここでは，双極子の作る電場は考えなくて良い）．

(4) 原点に電気双極子 $\boldsymbol{p}$ があるときの点 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

問題 7.4：レポート問題

球座標系のラプラス演算子が次のように書けることを示せ．

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{7.7}$$

以上