東大物理工学科 2014

21B00817 鈴木泰雅,[1]

第一問

[1]

$$\int r^2 \rho dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}\int_{-a}^{a}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}}((a^2-x^2)xdx)d\theta dz \tag{1}$$
$$= \frac{2}{5}ma^2 \tag{2}$$

となる.

[2]

滑らないという条件から,

$$v' = -a\omega' \tag{3}$$

となる.

[3]

線形運動量と角運動量の保存より

$$mv' - o = P, \quad aP = \frac{2}{5}ma^2(\omega' - \omega) \tag{4}$$

であり，これを解いて

$$\omega' = \frac{2}{7}\omega \tag{5}$$

[4]

線形運動量と角運動量の保存より

$$P_n = mv_n - mv_{n-1}, \quad P_n a = \frac{2}{5}ma^2(\omega_n - \omega_{n-1}) \tag{6}$$

である．よって,

$$I(\omega_n - \omega_{n-1}) - a(mv_n - mv_{n-1}) = 0, \quad \therefore (I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) \tag{7}$$

よって,

$$(I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) = \cdots (I\omega_0 - amv_0) = \mathrm{Const} \tag{8}$$

より,

$$l = I\omega_n - amv_n = \mathrm{Const} \tag{9}$$

[5]

反発が終わった直後では,

$$\omega_f = \frac{v_f}{a} \tag{10}$$

の関係が成立するため,

$$l = I\frac{v_f}{a} - mav_f, \quad \therefore v_f = \frac{5l}{3ma} \tag{11}$$

である.

また, $v_f = 0$ のとき, $l = 0$ であるため,

$$I\omega_0 - mav_0 = 0, \quad \therefore \frac{2}{5}ma\omega_0 = mv_0 \tag{12}$$

第二問

[1]

電場の大きさはガウスの法則より

$$E(r)\cdot 2\pi rl=\frac{1}{\epsilon_0}\lambda l,\quad \therefore E(r)=\frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \tag{13}$$

である．また，電位は

$$\phi(r)-\phi(r_0)=\phi(r)=-\int_{r_0}^{r}E(r)dr=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\log\frac{r}{r_0} \tag{14}$$

[2]

上記の表式から見て分かるように，ポテンシャルは，線素からの距離 r のみしか依存しない．また，重ね合わせの原理から

$$\phi=\phi_\lambda+\phi_{-\lambda}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(-\log\frac{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}{r_0}+\log\frac{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}{r_0}\right) \tag{15}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{b^2+r^2-2br\cos\theta}{a^2+r^2-2ar\cos\theta}\right) \tag{16}$$

[3]

必要条件であるため，代入して一定になることを確かめるだけでは十分ではない．逆を示す必要がある．ϕ が $r=R$ で θ の依存性がない時，

$$D^2+R^2-2DR\cos\theta=C(d^2+R^2-2dR\cos\theta),\quad \therefore d^2\left[C^2+C(-1-(R/d)^2)+(R/d)^2\right]+2R\cos\theta(Cd-D)=0$$

であり．これが恒等的に成立するための条件は

$$C=\frac{D}{d},C=(R/d)^2,1\quad \therefore D=\frac{R^2}{d},d \tag{17}$$

であり，$D\neq d$ であるため，

$$D=\frac{R^2}{d} \tag{18}$$

となる．

[4]

これをもとに計算すると

$$\sigma(\theta)=\frac{\lambda}{4\pi}\left(-\frac{2}{R}\right)\frac{1-(d/R)^2}{1-2(d/R)\cos\theta+(d/R)^2} \tag{19}$$

である．

[5]

球面上で積分すると

$$\int\sigma(\theta)dS=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\theta)Rd\theta=\frac{\lambda}{4\pi}\left(-\frac{2}{R}\right)R\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(d/R)^n\cos(n\theta)\right]d\theta \tag{20}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi}(-2/R)R2\pi=-\lambda \tag{21}$$

よって示せた．

[6]

σ_2 の位置は $\theta = \pi/2 - \psi$ であり，まとめると

$$\sigma_1 : \theta = -\psi \tag{22}$$
$$\sigma_2 : \theta = \pi/2 - \psi \tag{23}$$
$$\sigma_3 : \theta = \pi - \psi \tag{24}$$
$$\sigma_4 : \theta = 3\pi/2 - \psi \tag{25}$$

であり，$cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ であり，

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + 2(d/R)\cos\psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R)\cos\psi + (d/R)^2} \sim \frac{1 + 2(d/R)\cos\psi}{1 - 2(d/R)\cos\psi}, \quad \therefore d\cos\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\frac{1}{2}R \tag{26}$$

となる．また，同様にして

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \frac{1 + 2(d/R)\sin\psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R)\sin\psi + (d/R)^2} \quad \therefore d\sin\psi = \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}\frac{1}{2}R \tag{27}$$

よって，

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\frac{1}{2}R, \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}\frac{1}{2}R\right) \tag{28}$$

第三問

[1]

$$\psi_S : J, \quad \psi_A : -J \tag{29}$$

である．シュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} + U(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \tag{30}$$

であり，波動関数は ψ_S は二つの極値は上に凸，一方，ψ_S は上下それぞれに凸であるため．

[2]

波動関数は実関数であるため，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x)\psi_R(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_S^* + \psi_A^*)(\psi_S - \psi_A)\, dx \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_S^2 - \psi_A^2 + \psi_A\psi_S - \psi_S\psi_A\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_S^2 - \psi_A^2\right) dx \tag{32}$$

ここでグラフより

$$\psi_S^2 - \psi_A^2 = 0 \tag{33}$$

より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x)\psi_R(x)dx = 0 \tag{34}$$

であるため直交している．
また，

$$H\psi_L(x) = 0, \quad H\psi_R(x) = J\psi_L(x) \tag{35}$$

であり，

$$|\psi_L\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\psi_R\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

とすると，

$$H = J\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

[3]

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{H}{\hbar}t\right)|\psi_L\rangle = \begin{bmatrix} 0 & \exp(-iJ\hbar t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{38}$$

となり，確率は 0 である．

[4]