2022 年 4 月 12 日配布

電磁気学　演習第 3 回 — デルタ関数

問題 3.1：デルタ関数

任意の滑らかな関数 $f(x)$ に対して，次の性質を満たす $\delta(x)$ を Dirac のデルタ関数という．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0), \qquad \delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \tag{3.1}$$

$\delta(x)$ は通常の関数ではなく超関数 (distribution) と呼ばれるものである．

(1) デルタ関数が次の性質の満たすことを示せ（a は零でない実数とする）．

$$x\delta(x) = 0 \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \qquad \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a) + \delta(x+a)\Big)$$

(2) Heavyside の階段関数 $\Theta(x)$ の微分がデルタ関数であることを示せ．

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (x>0) \end{cases}, \qquad \delta(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) \tag{3.2}$$

(3) 次の極限がデルタ関数であることを示せ．

$$\frac{1}{\pi}\lim_{a\to 0+}\frac{a}{x^2+a^2} \tag{3.3}$$

問題 3.2：$1/r$ のラプラシアン

$1/r$ にラプラシアンを作用させたものはデルタ関数である．

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{3.4}$$

右辺は三次元のデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ である．この関係式が成り立つことを確認するために，式 (3.4) を用いずに以下の問いに答えよ．

(1) $r \neq 0$ のとき，次の式が成り立つことを示せ．

$$\Delta\frac{1}{r} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}\right) = 0 \quad (r \neq 0) \tag{3.5}$$

(2) 次の式が成り立つことを示せ．ただし，V は原点を中心とする適当な半径の球領域とする．

$$\int_V \Delta\frac{1}{r}\,\mathrm{d}^3 r = -4\pi \tag{3.6}$$

(3) 次の極限に置き換えることで，(3.4) が成り立つことを示せ．

$$\Delta\frac{1}{r} = \lim_{a\to+0}\Delta\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \tag{3.7}$$

問題 3.3：体積積分とヤコビ行列式

座標 $\boldsymbol{r}$ が 3 つの独立な変数 s, t, u の関数 $\boldsymbol{r}(s,t,u)$ で表されるとする．変数の微小変化 $(\mathrm{d}s, \mathrm{d}t, \mathrm{d}u)$ に対する座標の変化は偏微分係数を用いて次のように書ける．

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\mathrm{d}u \tag{3.8}$$

ここで，右辺の三つのベクトルを辺とする微小平行六面体の体積は

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \right) \tag{3.9}$$

で，これを体積要素として，任意の関数 $F(\boldsymbol{r}) = F(s,t,u)$ の体積積分が次のように定義できる．

$$\int F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint F(s,t,u) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u \tag{3.10}$$

(1) 積分変数を直交座標 (x,y,z) とする．このとき，任意の関数 $F(\boldsymbol{r}) = F(x,y,z)$ の体積積分が次のように書けることを確認せよ．ただし，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は右手系をなすものとする．

$$\int F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3.11}$$

(2) 座標 $\boldsymbol{r}$ の偏微分係数が次のように与えられるとする．

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = J_{11}\boldsymbol{e}_1 + J_{12}\boldsymbol{e}_2 + J_{13}\boldsymbol{e}_3 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = J_{21}\boldsymbol{e}_1 + J_{22}\boldsymbol{e}_2 + J_{23}\boldsymbol{e}_3 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = J_{31}\boldsymbol{e}_1 + J_{32}\boldsymbol{e}_2 + J_{33}\boldsymbol{e}_3 \tag{3.14}$$

このとき，任意の関数 $F(\boldsymbol{r}) = F(s,t,u)$ の体積積分が次のように書けることを示せ．

$$\int F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \iiint F(s,t,u)|J|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u \tag{3.15}$$

$$|J| = \det \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

行列式 (3.16) をヤコビ行列式 (Jacobi's determinant) という．

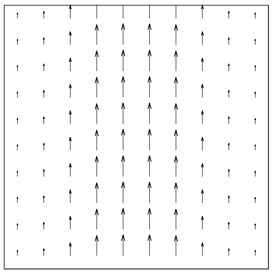
(3) 円筒座標系 (r, θ, z) の場合のヤコビ行列式を求めよ．

(4) 球座標系 (r, θ, φ) の場合のヤコビ行列式を求めよ．

問題 3.4*：ベクトル場の発散と回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ や回転 $\mathrm{rot}\,A$ の意味は直観的に理解するのが難しい．そこで，ベクトル場の発散や回転を二次元の図に表して確認してみよう．

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \left(0, \dfrac{1}{1+x^2}, 0\right)$ を z 軸に垂直な面で図示すると右図のようになる．$\boldsymbol{A}$ の発散と回転を求めよ．



(2) ベクトル場 $\boldsymbol{B}(x,y,z) = \boldsymbol{r}/r^2$ の発散と回転を求めよ．また，$\boldsymbol{B}$ を右図のように図示するとどのようになるか．

(3) 発散と回転がどちらも零となるようなベクトル場はどのようなものが考えられるか（場所によらず一定のベクトル場は自明なので除く）．図 1 のように図示せよ．

以上