北海道大学令和五年度大学院入試

出口裕暉

作成日: 2024 年 1 月 3 日

午前問題 I （力学）

問 1

1-1 解答

各台車の運動エネルギーは位置 x_i $(i = 1, 2, 3)$ を用いて $m\dot{x}_i^2/2$ となる.また, バネの持つ弾性エネルギーは $k(x_{i+1} - x_i - l)^2/2$ であるのでラグランジアン $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - l)^2 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l)^2 \tag{1.1.1}$$

となる.

1-2 解答

オイラーラグランジ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1.2}$$

であるから, $i = 1, 2, 3$ について計算すると

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = m\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1 - l) = 0 \tag{1.1.3}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1 - l) - k(x_3 - x_2 - l) = 0 \tag{1.1.4}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2 - l) = 0 \tag{1.1.5}$$

となる.したがって, 運動方程式は以下のようになる:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - l) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - l) + k(x_3 - x_2 - l) \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2 - l) \end{cases} . \tag{1.1.6}$$

1-3 解答

$x_j - c_j = A_j \exp(\mathbf{i}\omega t), (j = 1, 2, 3)$ として特性方程式を解く. c_j は静止しているときの各台車の重心位置である.これを用いるとバネ長は $l = c_3 - c_2 = c_2 - c_1$ となり, これを運動方程式に代入すると

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - c_2 - x_1 + c_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - c_2 - x_1 + c_1) + k(x_3 - c_3 - x_2 + c_2) \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - c_3 - x_2 + c_2) \end{cases} \tag{1.1.7}$$

となる.これに $x_j - c_j = A_j \exp(\mathbf{i}\omega t), (j = 1, 2, 3)$ を代入すると

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 e^{\mathbf{i}\omega t} &= k(A_2 - A_1)e^{\mathbf{i}\omega t} \\ -\omega^2 A_2 e^{\mathbf{i}\omega t} &= -k(A_2 - A_1)e^{\mathbf{i}\omega t} + k(A_3 - A_2)e^{\mathbf{i}\omega t} \\ -\omega^2 A_3 e^{\mathbf{i}\omega t} &= -k(A_3 - A_2)e^{\mathbf{i}\omega t} \end{cases} \tag{1.1.8}$$

であり, すべて式を $\exp(\mathbf{i}\omega t)$ で割って, 行列の形で表すと

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.1.9}$$

となる. A_1, A_2, A_3 が自明でない解を持つためには行列の行列式がゼロでなければならない.よって,

$$(k - m\omega^2)^2(2k - m\omega^2) - k^2(k - m\omega^2) - k^2(k - m\omega^2) = 0 \tag{1.1.10}$$

$$(k - m\omega^2)(m\omega^2 - 3k)m\omega^2 = 0 \tag{1.1.11}$$

であるから基準振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{1.1.12}$$

である.

1-4 解答

$A_1 = A$ としたとき A_2, A_3 を A で表す.基準振動数が $\omega = \sqrt{k/m}$ のとき (1.1.9) 式に代入すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.1.13}$$

となるため, $A_2 = 0, A_1 + A_3 = 0$ という関係が出てくる.したがって, $A_2 = 0, A_3 = -A$ となる.

基準振動数が $\omega = \sqrt{3k/m}$ のとき (1.1.9) 式に代入すると

$$\begin{pmatrix} -2k & -k & 0 \\ -k & -k & -k \\ 0 & -k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.1.14}$$

となるため, 計算すると $A_2 = -2A, A_3 = A$ となる.

問 2

2-1 解答

コマの z 軸回りの慣性モーメントを求める.

慣性モーメントの定義

回転軸回りの慣性モーメント I は原点を回転軸上にとると, 密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を使って

$$I = \int \rho(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_\omega)\boldsymbol{n}_\omega|^2 d^3\boldsymbol{r} \tag{1.2.1}$$

と定義される. $\boldsymbol{n}_\omega$ は回転軸方向の単位ベクトルである.ベクトル $\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_\omega)\boldsymbol{n}_\omega$ は回転軸から微小体積の方向を向いており, 大きさは回転軸と微小体積の距離である.また, 回転軸回りの角運動量は

$$L_\omega = I\omega \tag{1.2.2}$$

と書くことができ, 運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1.2.3}$$

となる.(導出は各自確認してください)

今回は円柱状の剛体であるため, 円筒座標を用いて計算を行う.体積密度は $\rho = M/\pi a^2 d$ であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \int_0^d \int_0^{2\pi} \rho r^2 \; r d\theta dz dr \\ &= 2\pi d\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \\ &= \frac{1}{2}Ma^2 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

となる.

2-2 解答

回転軸回りの角運動量は (1.2.2) 式で与えられるので

$$\boldsymbol{L} = (0, 0, I\omega_0) \tag{1.2.5}$$

となる. 2-3 解答

回転するコマの力学的エネルギーは回転の運動エネルギーと位置エネルギーの和で書くことができるので

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgl \tag{1.2.6}$$

となる.

2-4 解答

重力によりコマに働くトルク $\boldsymbol{N}$ を求める.トルクは位置 $\boldsymbol{r}$ とそこに働く力 $\boldsymbol{F}$ を用いて $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ と定義される.図 1.1 のようにコマの回転軸が xy 平面上にあるとき,位置 $\boldsymbol{r}$ はコマの重心であり,力はコマに働く重力の $\boldsymbol{r}$ に垂直な成分となる.したがって,トルクは画面手~~前~~側に働くと考えられる.この方向は極座標における ϕ 方向であるため

て 奥

$$\boldsymbol{N}=Mgl\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.2.7}$$

となる.

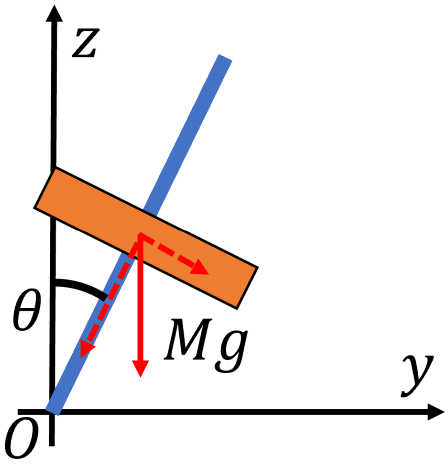


図 1.1　コマに働く力

午前問題 II （電磁気学）

問 1

1-1 解答

極板に誘起される電荷の面密度を σ とする.この極板が作る電場の大きさははガウスの法則から $E=\sigma/2\varepsilon$ となり,コンデンサの内部は面密度 σ の作る電場と,面密度 $-\sigma$ の作る電場の重ね合わせになっているので電場の大きさは σ/ε となる.電圧と電場の関係 $V=Ed$ から,面密度は $\sigma=\varepsilon V/d$ と計算でき,総電荷 Q は面積をかければいいので

$$Q=Lw\sigma=\frac{wL\varepsilon V}{d} \tag{2.1.1}$$

となる.

1-2 解答

マクスウェルアンペールの式から磁場について

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.1.2}$$

という式が成り立つ.今回電圧は一定であるため極板にたまる電荷から作られる電場は時間変化しない.また,磁場は磁束密度とは異なり,物質中でも真空中でも変わらない値を持つため,上式は周りの物質に関係

なく成り立つ.これをある閉曲面をとって面積分を行い,ストークスの定理を用いると

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{S} \tag{2.1.3}$$

となる.

図 2.2 のような閉曲面を考え,(2.1.3) 式を計算する.極板に流れる電流により生じる磁場は,線電流の集合であると考えると x 軸成分以外は互いに打ち消しあうため経路のうち x 軸方向しか積分に寄与しない.よって,(2.1.3) 式の右辺は

て軸では??

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = 2lH \tag{2.1.4}$$

となる. H は磁場の大きさである.右辺は電流密度が $\boldsymbol{j} = (0, I/w, 0)$ であることを用いると

$$\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{Il}{w} \qquad \frac{I}{Lw} \tag{2.1.5}$$

$S=(\cdots, dw, 0)$

となる.したがって,磁場の大きさは

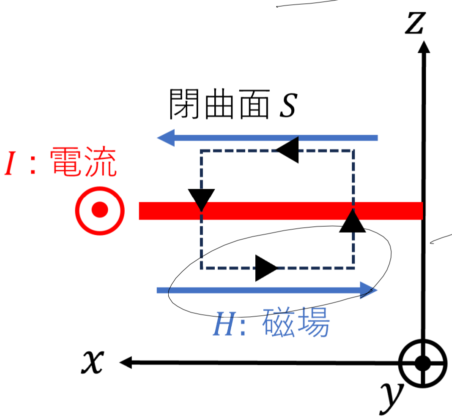
$$H = \cancel{\frac{I}{2w}} \qquad \frac{I}{2L^2}d \tag{2.1.6}$$

となり,下の極板の寄与も考えると極板間の磁場 $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = (-\frac{I}{w}, 0, 0) \tag{2.1.7}$$

$-\frac{I}{L^2}d$

となる.



2の部分only

図 2.2　極板に流れる電流と生じる磁場の関係

1-3 解答

ポインティングベクトルは $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ で定義される.極板に誘起された電荷により生じる電場は $V = Ed$ とオームの法則から $\boldsymbol{E} = (0, 0, -RI/d)$ となるため

$$\boldsymbol{S} = (0, \frac{RI^2}{wd}, 0) \tag{2.1.8}$$

となる.

1-4 解答

ポインティングベクトルが y 軸方向であるため xz 平面を流れるエネルギーは wdS で求めることができる.よって, エネルギーの流れは RI^2 となり, 抵抗で消費するエネルギーと一致する.

問 2

2-1 解答

コイル1, 2に生じる起電力をそれぞれ V_1, V_2 とすると磁束 Φ_1, Φ_2 を用いて

$$V_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \tag{2.2.1}$$

$$V_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt} \tag{2.2.2}$$

となる.誘導起電力は電流が増えるならば減らす方向に, 減るならば増やす方向に起電力を生じる.一定の電流を流し続けるためには外部から誘導起電力と同じだけの電位を与えればよい.よって, 上式から-をとったものが外部から与える電位になる.第一式に I_1, 第二式に I_2 をかけると

$$I_1V_1 = \frac{L_1}{2}\frac{d}{dt}(I_1)^2 + M\frac{d}{dt}(I_1I_2) - MI_2\frac{dI_1}{dt} \tag{2.2.3}$$

$$I_2V_2 = \frac{L_2}{2}\frac{d}{dt}(I_2)^2 + MI_2\frac{dI_1}{dt} \tag{2.2.4}$$

となり, 両辺足し合わせると

$$I_1V_1 + I_2V_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2\right) \tag{2.2.5}$$

という形になる.左辺は単位時間あたりに回路に与える仕事を表しており, 両辺を時間で積分すると左辺が外部から加えられた仕事になり, 右辺が回路に蓄えられているエネルギーの式になるため,

$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 \tag{2.2.6}$$

が成り立つ.

2-2 解答

コイル2に生じる起電力 V_2 はオームの法則から $V_2 = RI_2$ となるので (2.2.2) 式から

$$V_2 = RI_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt} \tag{2.2.7}$$

となるので $I_1 = I_0 \sin\omega t$ を代入して整理すると

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + RI_2 + MI_0\omega\cos\omega t = 0 \tag{2.2.8}$$

となる.

2-3 解答

(2.2.8) 式に $I_2 = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ を代入すると

$$L_2(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t) + R(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + MI_0\omega\cos\omega t = 0 \tag{2.2.9}$$

$$(L_2A\omega + RB + MI_0\omega)\cos\omega t + (RA - L_2B\omega)\sin\omega t = 0 \tag{2.2.10}$$

となる.この式が任意の t で成り立つためには

$$\begin{cases} L_2A\omega + RB + MI_0\omega = 0 \\ RA - L_2B\omega = 0 \end{cases} \tag{2.2.11}$$

が成り立たなければならない.これを A, B について解くと $A = L_2\omega B/R$ より, 第一式に代入して

$$\frac{(L_2\omega)^2}{R}B + RB + MI_0\omega = 0 \tag{2.2.12}$$

より,

$$\begin{cases} A &= -\frac{L_2\omega^2 MI_0}{(L_2\omega)^2 + R^2} \\ B &= -\frac{R\omega MI_0}{(L_2\omega)^2 + R^2} \end{cases} \tag{2.2.13}$$

となる.したがって, I_2 は

$$I_2 = -\frac{\omega MI_0}{(L_2\omega)^2 + R^2}(R\sin\omega t + L_2\omega\cos\omega t) \tag{2.2.14}$$

となる.

2-4 解答

コイル間に働く力は空間に蓄えられているエネルギー U に対して $F = -dU/dx$ で求められる.今回の場合, U は

$$U = \cancel{\frac{1}{2}L_1I_0^2\sin^2\omega t} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2M^2I_0^2L_2}{\{(L_2\omega)^2 + R^2\}^2}(R\sin\omega t + L_2\omega\cos\omega t)^2 - \frac{\omega M^2I_0^2}{(L_2\omega)^2 + R^2}(R\sin\omega t + L_2\omega\cos\omega t)\sin\omega t \tag{2.2.15}$$

となる.この表式の中で x に依存するものは M のみであるので M の項を考えればよい.よって,

$$F = \frac{\omega I_0^2}{(L_2\omega)^2 + R^2}(R\sin\omega t + L_2\omega\cos\omega t)\left\{\frac{1}{2}\frac{\omega L_2}{(L_2\omega)^2 + R^2}(R\sin\omega t + L_2\omega\cos\omega t) - \sin\omega t\right\}2M\frac{dM}{dx} \tag{2.2.16}$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

となり, 時間平均をとると $\sin^2\omega t, \cos^2\omega t$ の項が残るので

$$\begin{aligned} < F > &= \frac{\omega I_0^2}{(L_2\omega)^2 + R^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\omega L_2}{(L_2\omega)^2 + R^2}R^2 - R\right\}M\frac{dM}{dx} + \frac{1}{2}\frac{\omega I_0^2(L_2\omega)^3}{\{(L_2\omega)^2 + R^2\}^2}M\frac{dM}{dx} && (2.2.17) \\ &= \frac{\omega I_0^2}{(L_2\omega)^2 + R^2}\left[\frac{\omega L_2}{2} - R\right]M\frac{dM}{dx} && (2.2.18) \end{aligned}$$

となる. M を計算して代入すると

$$< F > = \frac{\omega I_0^2 a(ax + b)}{(L_2\omega)^2 + R^2}\left[\frac{\omega L_2}{2} - R\right] \tag{2.2.19}$$

となる, (ぜったいちゃうやろ)

問 3

問題文で与えられている式は以下の五つである:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{2.3.1}$$

3-1 解答

物質中のマクスウェル方程式が電荷の保存則 $\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ を満たすことを示す.電荷密度の時間微分は一つ目の式を用いて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.3.2}$$

となる.電流密度の発散は四つ目の式を用いて

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{H} - \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \varepsilon \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\varepsilon \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.3.3}$$

となる.したがって, 電流保存の式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\varepsilon \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \varepsilon \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{2.3.4}$$

となる.

3-2 解答

$\rho = 0$ の場合電場 $\boldsymbol{E}$ が $e^{\mathbf{i}\omega t}$ に比例する時間変化をするとき $\boldsymbol{E}$ が満たす方程式を求める. $\rho = 0$ であるときマクスウェル方程式の第一式から $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ が成り立つ.また, 第三式の回転をとると

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \tag{2.3.5}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \tag{2.3.6}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{2.3.7}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mathbf{i}\omega\mu(\sigma + \mathbf{i}\omega\varepsilon)\boldsymbol{E} \tag{2.3.8}$$

となる.したがって, $\sigma^* = \sigma + \mathbf{i}\omega\varepsilon$ とすれば

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mathbf{i}\omega\mu\sigma^* \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3.9}$$

が成り立つ.

3-3 解答

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathbf{i}\omega t - (\alpha + \mathbf{i}\beta)z]$ を (2.3.9) 式に代入すると

$$(\alpha + \mathbf{i}\beta)^2 \boldsymbol{E} = \mathbf{i}\omega\mu\sigma^* \boldsymbol{E} \tag{2.3.10}$$

となり, $\boldsymbol{E}$ で割って σ^* を入れると

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\mathbf{i}\alpha\beta = \mathbf{i}\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon \tag{2.3.11}$$

であり, 実部と虚部が一致することを用いると

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon \\ 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma \end{cases} \tag{2.3.12}$$

が成り立つ. $\beta = \mu\omega\sigma/2\alpha$ を代入すると

$$\alpha^2 - \frac{\mu^2\omega^2\sigma^2}{4\alpha^2} + \omega^2\mu\varepsilon = 0 \tag{2.3.13}$$

$$\alpha 4 + \omega^2\mu\varepsilon\alpha^2 - \frac{\mu^2\omega^2\sigma^2}{4} = 0 \tag{2.3.14}$$

$$\left(\alpha^2 + \frac{\mu\omega^2\varepsilon}{2}\right)^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{4}(\omega^2\varepsilon^2 + \sigma^2) = 0 \tag{2.3.15}$$

と計算できる.ここから α について計算すと

$$\left(\alpha^2 + \frac{\mu\omega^2\varepsilon}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{4}(\omega^2\varepsilon^2 + \sigma^2)} \tag{2.3.16}$$

$$\alpha^2 = -\frac{\mu\omega^2\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{4}(\omega^2\varepsilon^2 + \sigma^2)} \tag{2.3.17}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{-\frac{\mu\omega\sigma}{2}\left(\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon^2}{\sigma^2} + 1}\right)} \tag{2.3.18}$$

となる.ここで $\sigma \gg \omega\varepsilon$ であることを用いると根号の中身が正であるから, $\pm$ はマイナスのほうであり,

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} \tag{2.3.19}$$

ok

と近似できる.したがって,

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}, \qquad \beta = \pm\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} \quad (\text{複号同順}) \tag{2.3.20}$$

となる.電場の表式から β は位相の変化のみであり, 波の減衰には α がかかわることがわかる.よって, z 軸方向に単位長さ進むと電場の大きさは $\exp\left[-\sqrt{\mu\omega\sigma/2}\right]$ 倍になる.したがって, 電場のエネルギー $\varepsilon \boldsymbol{E}^2/2$ は $\exp\left[-\sqrt{2\mu\omega\sigma}\right]$ 倍になる. この電磁波の持つエネルギーの減衰は物質中において光が吸収されることに起因する.吸収されたエネルギーは物質の分極を誘起したり, 電子の励起などに使われる.(知らんけど)

午後問題 I (量子力学)

午後問題 II (熱・統計力学)