

第 4 章 イオントラップ

研究プロジェクト・実験レポート

鈴木泰雅 (Taiga Suzuki), 共同実験者：青木幸一

suzuki.t.ec[at]m.titech.ac.jp

学籍番号：21B00817

実験日：

2023/10/17, 2023/10/20, 2023/10/24, 2023/10/31

目次

1	実験の目的	1
2	実験の原理	1
2.1	イオントラップの原理	1
2.1.1	ポテンシャルの形	1
2.1.2	スタビリティダイアグラム	2
2.2	イオンの運動の近似	3
2.3	操作電圧によるイオンの運動	3
2.3.1	操作電圧が一定の場合	4
2.4	比電荷の理論的計算	5
2.5	抵抗率	5
3	実験装置	6
3.1	実験方法	6
3.1.1	準備	6
3.1.2	実験 1	6
3.1.3	実験 2(解析)	6
3.1.4	実験 3	6
3.1.5	実験 4	7
3.2	実験装置	7
3.2.1	イオントラップ装置	7
3.2.2	低電圧直流電源	7
3.2.3	高圧インバーター	7

3.2.4	Cockcroft-Walton 回路	8
4	実験結果	9
4.1	実験 1	9
4.2	実験 2	9
4.3	実験 3	11
4.4	実験 4	13
5	考察	15
5.1	実験 2 に対する考察	15
5.2	実験 3	16
5.2.1	比電荷に関して	16
5.2.2	比空気抵抗に関して	17
5.3	実験 4	17
6	終わりに	18

1 実験の目的

イオントラップは質量分析装置へ応用されており 2023 年現在では量子計算においてデバイスの候補の一つとして挙げられている。この実験の目的は、イオントラップの原理を理解し、実際にイオントラップを観測し、その解析を行って考察をすることである。

2 実験の原理

イオントラップには時間的に変動する電場を利用するポールトラップと静磁場と静電場を利用するペニングトラップがあるが、本実験ではポールトラップを利用する。

仮想的に、荷電粒子を原点 O 付近で捕獲することを考える。

2.1 イオントラップの原理

2.1.1 ポテンシャルの形

荷電粒子が原点 O 付近でトラップされるには、原点 O 付近で x, y, z に対してそれぞれが極値を持つようなポテンシャルを考えればよい。つまり以下のようなポテンシャルである：

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{2r_0^2} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2). \quad (2.1)$$

ただし、 r_0 は実験で定まる定数であり、 Ψ_0 は時間変動する値である。ポテンシャルがラプラス方程式：

$$\Delta \Psi = 0 \quad (2.2)$$

を満たすとする、

$$\Delta \Psi = \frac{\Psi_0}{2r_0^2} (\alpha + \beta + \gamma) = 0 \quad (2.3)$$

が成立する。単純な形として、 $\alpha = \beta = 1, \gamma = -2$ の場合を考える。

$$\Psi_0 = V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t \quad (2.4)$$

となる場合、以下の図のように、 Ψ_0 は左右のポテンシャルを行き来するので、たしかにイオンはポテンシャルの極小値にいたることが分かる：

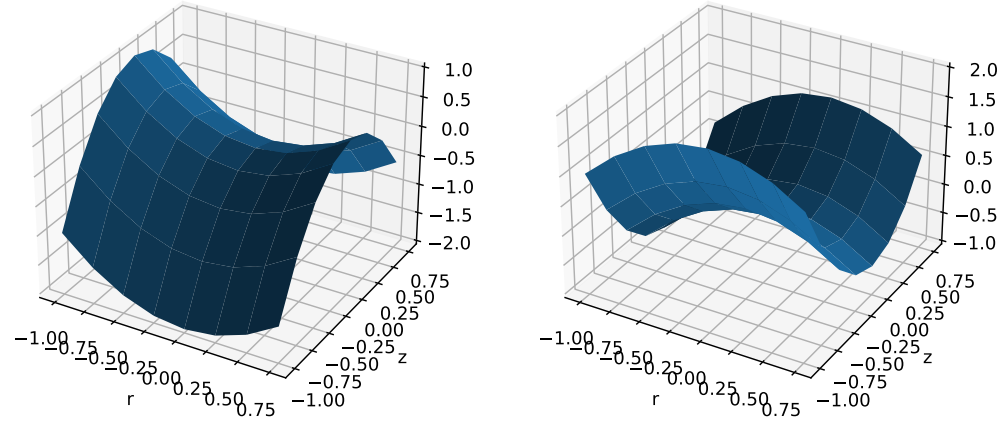


図 2.1: ポテンシャルの図であり、左右のグラフを時間変動で行き来する。

ここで、 V_{dc} をオフセット電圧、 $V_{ac} \cos \Omega t$ が交流電圧の成分である。

2.1.2 スタビリティダイアグラム

このポテンシャル中での荷電粒子の運動方程式を解いてみる。荷電粒子の荷電を e 、質量を m とする。すると、円筒座標中でのそれぞれの電場は

$$E_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\Psi_0}{r_0^2} r, \quad E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 2 \frac{\Psi_0}{r_0^2} z \quad (2.5)$$

となる。よって運動方程式は

$$m\ddot{z} = eE_z = \frac{2e}{r_0^2} (V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t) z \quad (2.6)$$

$$m\ddot{r} = eE_r = -\frac{e}{r_0^2} (V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t) r \quad (2.7)$$

となることが分かる。よって、

$$\tau = \frac{\Omega t}{2}, \quad a_z = -\frac{8eV_{dc}}{mr_0^2\Omega^2} = -2a_r, \quad q_z = \frac{4eV_{ac}}{mr_0^2\Omega^2} = -2q_r \quad (2.8)$$

と置くことによって Mathieu 方程式と呼ばれる方程式を導出できる：

運動方程式

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} + (a_i - 2q_i \cos 2\tau) u_i = 0 \quad (i = z, r). \quad (2.9)$$

この一般解は

$$u_i(\tau) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \cos(2n + \beta_i)\tau + B \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \sin(2n + \beta_i)\tau \quad (2.10)$$

となることが分かっている。 r と z に関しての安定領域は以下の図のそれぞれの曲線で囲まれた箇所である。

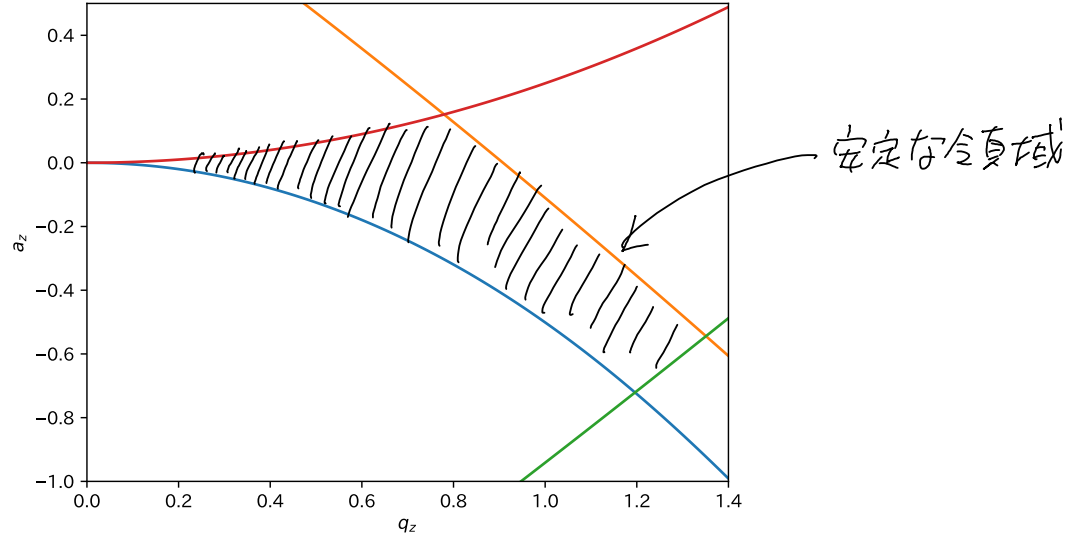


図 2.2: 変数 q_z, a_z の安定領域の図. この囲まれた領域を Stability diagram と言う.

なお, 代表的な点として, $V_{dc} = 0$ の時, $a_z = 0$ であることから, $q_{\max} = 0.92$ ほどの値であることが分かるので,

$$0 < q_z < q_{\max} = 0.92 \quad (2.11)$$

から比電荷を計算し, 以下の式にそれぞれの値を代入することで,

$$0 < \frac{e}{m} < \frac{q_{\max} r_0^2 \Omega^2}{4V_{ac}} \quad (2.12)$$

を満たす比電荷がトラップされることが分かる.

2.2 イオンの運動の近似

$a_i, q_i^2 \ll 1$ の条件下では,

$$u_j \approx u_{1j} \cos(\omega_i t + \phi_i) \left\{ 1 + \frac{q_i}{2} \cos(\Omega t) \right\} \quad (2.13)$$

であり,

$$\omega_i = \frac{\Omega t}{2} \sqrt{\frac{q_i^2}{2} + a_i} \quad (2.14)$$

と近似ができる. ここで, マイクロモーションの項 $\left\{ 1 + \frac{q_i}{2} \cos(\Omega t) \right\}$ が十分に小さいとすると

$$u_j \approx u_{1j} \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (2.15)$$

と近似することができ, 調和振動子の形に近似することが可能である.

2.3 操作電圧によるイオンの運動

式 (2.4) に加えて, 上下のキャップ電極の間に操作電圧 $v = v_0 \cos \omega t$ を印加した場合のトラップ粒子の z 方向の運動方程式は以下ようになる: (ただし, 同時にトラップされる粒子は少ないとした.)

$$m\ddot{z} = -m\omega_z^2 z + \left(\frac{ev_0}{2z_0} \right) \cos \omega t - kz, \quad \omega_z = \frac{\Omega t}{2} \sqrt{\frac{q_z^2}{2} + a_z}. \quad (2.16)$$

特に, $V_{dc} = 0$ の場合は $a_z = 0$ より, $\omega_z = \frac{e}{m} \frac{\sqrt{2}V_{ac}}{r_0^2\Omega}$ となる.

一般解は

$$z(t) = c_1 \exp(\alpha t) + c_2 \exp(\beta t) + A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.17)$$

$$\frac{A}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_z^2 - \omega^2)^2 + (k\omega/m)^2}} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{2z_0} \quad (2.18)$$

で表されるが, 安定する領域でトラップできている場合, t がある程度大きい場合, 前 2 項は 0 に収束するため, 最終的には

$$z(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.19)$$

という単振動になる. ここで, 操作電圧の周波数を変えて実験し, ω_1 と ω_2 のそれぞれの運動の振幅 A_1, A_2 がそれぞれ得られたとする:

$$g_1 \equiv \frac{A_1}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_z^2 - \omega_1^2)^2 + (k\omega/m)^2}} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{2z_0}, \quad (2.20)$$

$$g_2 \equiv \frac{A_2}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_z^2 - \omega_2^2)^2 + (k\omega/m)^2}} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{2z_0}, \quad (2.21)$$

$$\omega_z = \frac{e}{m} \frac{\sqrt{2}V_{ac}}{r_0^2\Omega}. \quad (2.22)$$

この時, それぞれの式より比電荷を満たす方程式求めると以下の通りとなった:

$$a = 4 \left(\frac{V_{ac}^2}{r_0^4 \Omega^2} \right)^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \quad (2.23)$$

$$b = -\frac{1}{4z_0^2} \left(\left(\frac{\omega_1}{g_2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{g_1} \right)^2 \right) \quad (2.24)$$

$$c = -\omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \quad (2.25)$$

$$a(e/m)^4 + b(e/m)^2 + c = 0 \quad (2.26)$$

また, これを元の式に代入することで, k の値を求めることができる.

2.3.1 操作電圧が一定の場合

次に, 操作電圧が一定:

$$v = v_C \quad (2.27)$$

の場合を考える. この時の運動方程式は

$$m\ddot{z} = -m\omega_z^2 z + \frac{ev_C}{2z_0} - k\dot{z}, \quad \omega_z = \frac{e}{m} \frac{\sqrt{2}V_{ac}}{r_0^2\Omega} \quad (2.28)$$

であり, これは

$$Z := z - \frac{ev_C}{2z_0 m \omega_z^2} \equiv z - z_C \quad (2.29)$$

と変数変換した時,

$$m\ddot{Z} = -m\omega_z^2 Z - k\dot{Z} \quad (2.30)$$

という空気抵抗がある場合のばね振動になる．この場合，十分に時間が立てばバネは運動を $Z = 0$ の位置で停止するため， $z = z_C$ で運動が停止する．よって，

$$\frac{ev_C}{2z_0m\omega_z^2} = v_C, \omega_z = \frac{e}{m} \frac{\sqrt{2}V_{ac}}{r_0^2\Omega} \quad (2.31)$$

より，比電荷を求めると，

比電荷

$$\frac{e}{m} = \frac{r_0^4\Omega^2}{4z_0z_CV_{ac}^2}v_C \quad (2.32)$$

と表すことができる．

2.4 比電荷の理論的計算

荷電粒子が一樣物質密度 ρ で半径 r の球形な導体であると仮定する．半径 r に電荷 e がたまっているとき，中心からの距離 $R(>r)$ での電場をガウスの法則から求める．

ガウスの法則より，

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{e}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.33)$$

であり， r での電場は

$$V(r) := - \int_{\infty}^r \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.34)$$

となり，物質密度の定義より，

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (2.35)$$

となるため，比電荷を V, r, ϵ_0, ρ で表すと，

比電荷

$$\frac{e}{m} = \frac{3V\epsilon_0}{r^2\rho} \quad (2.36)$$

となる．

2.5 抵抗率

無限流体中を球形粒子が一定速度で運動するとき流体の抵抗係数 k は次で与えられる [6]

$$k = 3\pi\mu D_p \quad \mu : \text{流体の粘性}, D_p : \text{粒子の半径}. \quad (2.37)$$

ここで，空気の粘性は [7] より，

$$\mu \approx 1.81 \cdot 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s} \quad (2.38)$$

で与えられる．

3 実験装置

3.1 実験方法

3.1.1 準備

まず図のようにイオントラップを組み立てる．そしてそれぞれが，

- (トラップ電圧)：低電圧直流電源 → 高圧インバーター → リング電極
- (操作電圧)：ファンクションジェネレーター → オシロスコープ → 上キャップ電極
- (粒子帯電用の電圧)：低電圧直流電源 → 発振回路 → Cockcroft-Walton 回路 → 入射針

となるように絶対の装置を組み立てる．ここで，それぞれの 低電圧直流電源 と リング電極 などは一対一対応するため代表的な値を測定し記録した．

また，イオントラップ内の様子が見えるように，PC に接続しているカメラを設置した．

3.1.2 実験 1

まず，以下の条件で実際のイオントラップをした：

- リング電極 電圧: 高圧インバーター入力 $V = 9V$
- キャップ電極 電圧: $V = 10V_{p-p}$, $f = 1\text{Hz}$ 正弦波
- 粒子帯電 電圧: $V = 2.5\text{kV}$ (正負どちらでも良い)

次に，トラップ粒子の電荷の正負が反転している粒子をトラップした．まずは Cockcroft-Walton 回路の向きを変えないで上記と同じ条件でイオンをトラップし，次に Cockcroft-Walton 回路の向きを変えてイオンを逆電荷で帯電させて，トラップした．

3.1.3 実験 2(解析)

まず，実験 1 の測定データを元に， $(e/m)_{\max}$ を求める．そして，荷電粒子の運動を数値計算した．ただし，数値計算のパラメータは以下を用いた：

$V_{\text{dc}}[\text{V}]$	$e/m \text{ (C/kg)}$
0	0.1
0	$0.5 (< (e/m)_{\max})$
0	$1.5 (> (e/m)_{\max})$
300	0.5
-300	0.5

表 3.1: 数値計算に用いたパラメータの表

3.1.4 実験 3

操作電圧を印加し，それぞれ，3 種類の $\omega/2\pi (= 0.5, 1.0, 1.5\text{Hz})$ で， v_0 を 1,2,3,4,5V と変化させトラップしたイオンの振幅 A を測定した．これは各粒子の動画を 100 フレームほど取り，粒子が z 方向に動いたピクセルを記録し，そのピクセルを後であらかじめ長さの分かっている棒を同じ位置，カメラで測定し，それぞれの振幅を m に換算する方法を取っ

ている．ただし，実験の開始から終了まで同じイオンがトラップされているようにした．

そして，式 (2.26) に基づいてそれぞれことなる振動数の組み合わせ 3 つの比電荷を求め，平均値を取る．そこで，考察として得られた値が式 (2.36) に整合するかを確かめた．

3.1.5 実験 4

操作電圧を正弦波ではなく，一定電圧 $v = v_c$ にする．イオンをトラップし，操作電圧 $v_C = (-4.0, -2.0, 0, 2.0, 4.0V)$ でそれぞれの距離 z_C を記録した．これは各粒子の動画を取り， z_C を記録し，そのピクセルを後で m に換算する方法を取っている．ただし，ファンクションジェネレーターにて一定電圧の生成方法は AMPL を最下限まで回し振幅を限りなく小さくしたうえで周波数を 10Hz 以上にした．そして，OFFSET 電圧を変えることで電圧を調整した．そして，測定が終了次第，式 (2.32) より比電荷を求め，理論値 (2.36) と整合するかを確かめた．

3.2 実験装置

以下では代表的な実験装置を説明した．

3.2.1 イオントラップ装置

実際に使用したイオントラップ装置は以下の図に示す構造であり，ポール型を採用している．キャップ電極とリング電極にそれぞれ電流を流すことでイオントラップできる構造をしている．以下にこの装置の固有の値を表記した：

特徴 (1) リング電極の最短内半径： $r_0 = 11\text{mm}$

特徴 (2) キャップ電極と原点の最短距離： $z_0 = r_0/\sqrt{2} = 7.78\text{mm}$

なお実験装置を図示すると以下の通りである：

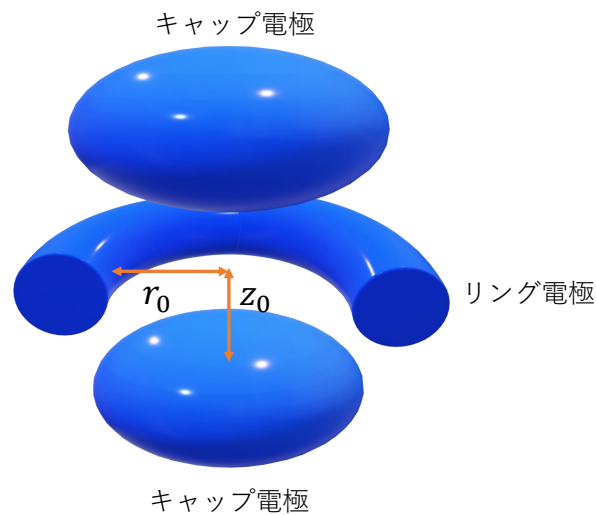


図 3.1: イオントラップの概略図．キャップ電極とリング電極に電流を流すことでイオンをトラップする．

3.2.2 低電圧直流電源

10V 程度の一定電圧または電流を供給する実験器具である．

3.2.3 高圧インバーター

リング電極に印加する交流高電圧を生成する器具である．

3.2.4 Cockcroft-Walton 回路

交流から直流に昇圧する回路である．ダイオードの向きが反転するため，裏表の回路を使いトラップしたいイオンの正負を選択できる．

4 実験結果

それぞれの実験番号のラベルは前節の実験方法に記載されている。

4.1 実験 1

実験 1 で使用した条件である，高圧インバーター入力に 9V になるような場合のリング電極の電圧 V_{ac} と周波数 f_{ac} は以下の表の通りとなった。

高圧インバーター入力 [V]	リング電極の電圧 V_{ac} [kV]	周波数 f_{ac} [kHz]
9.0	2.86	1.70

表 4.1: リング電極の高圧インバーターに対する電圧と周波数の値

また，粒子帯電の電圧が 2.5kV になるような低電圧直流電源と発振回路の値は以下の表の通りとなった。

粒子帯電の電圧 [kV]	低電圧直流 [A]	発振回路の電圧 [kV]	発振回路の周波数 [kHz]
2.5	0.03	0.74	25

表 4.2: 粒子帯電の低電圧直流電源と発振回路に対する値

また，以下の写真のように，実際にイオンをトラップすることができた：

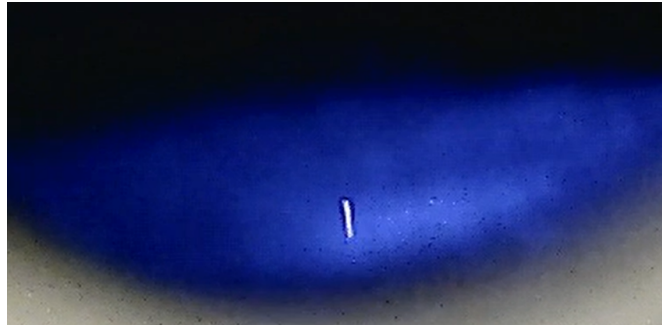


図 4.1: 実際のイオントラップの様子．図中を上下に激しく運動していた．図中の白い線はイオンが振動していたために現れている．

実験 1 の逆の電荷を捕まえるトラップはうまくトラップすることができなかった。

4.2 実験 2

実験の原理の式 (2.9) を数値計算のルンゲクッタ法を使用して求めた．表 (??) を数値としてそれぞれ代入して，5つのシミュレーションを計算すると以下の図がそれぞれ得られた．それぞれの値に応じて，それぞれ z 方向と r 方向のに関してシミュレーションを行った．なお，初期条件は表 (4.1) と表 (4.2) のデータと，イオントラップ装置の固有の値： $r_0 = 11\text{mm}$, $z_0 = 7.78\text{mm}$ を使った．

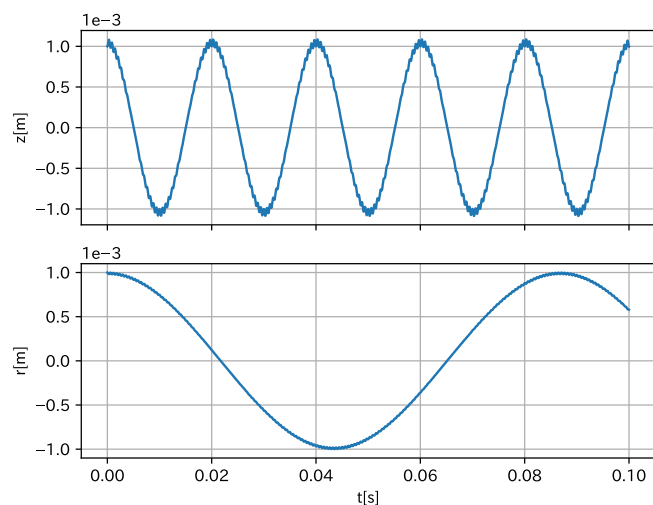


図 4.2: $V_{dc} = 0.00[V]$, $e/m = 0.10[C/kg]$ の時のシミュレーション結果 z, r で安定領域で振動していることがわかる。

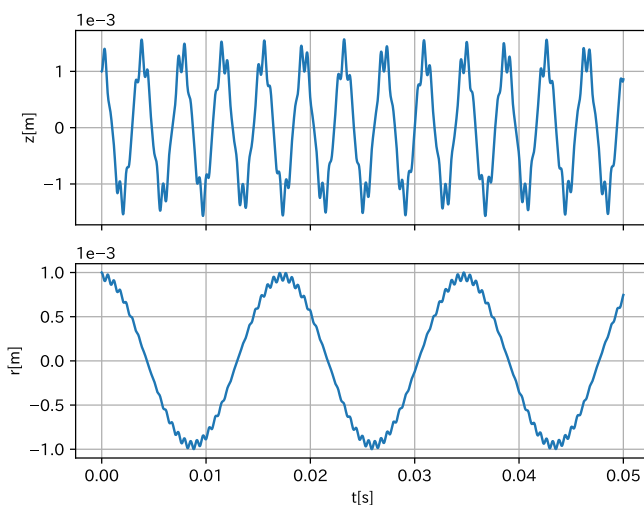


図 4.3: $V_{dc} = 0.00[V]$, $e/m = 0.50[C/kg]$ の時のシミュレーション結果 z, r で安定領域で振動していることがわかる。

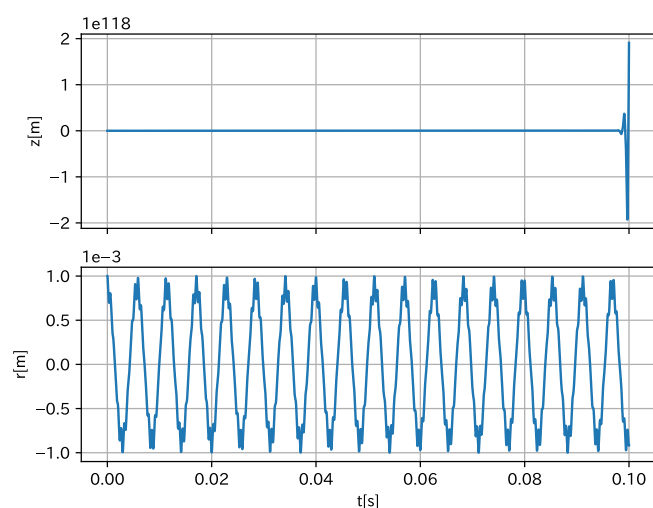


図 4.4: $V_{dc} = 0.00[V]$, $e/m = 1.50[C/kg]$ の時のシミュレーション結果 z 方向では安定せず, r 方向では安定領域で振動していることが分かる。

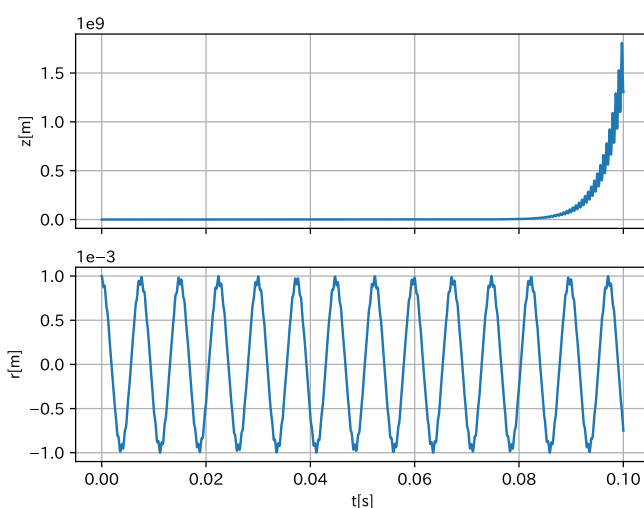


図 4.5: $V_{dc} = 300[V]$, $e/m = 0.50[C/kg]$ の時のシミュレーション結果 z 方向では発散し, r 方向では安定領域で振動していることが分かる。

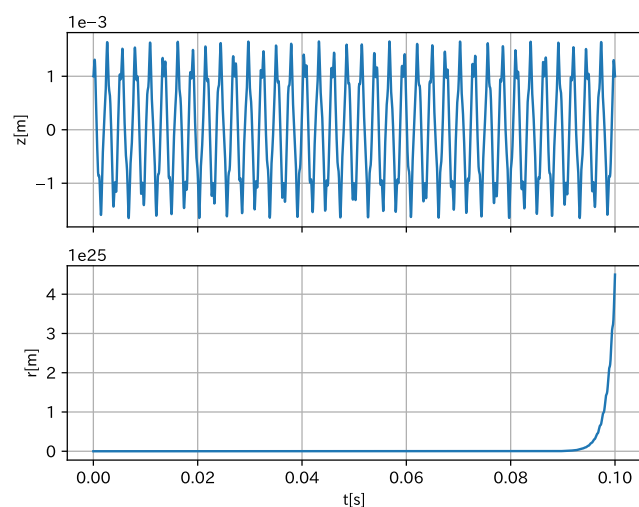


図 4.6: $V_{dc} = -300[V]$, $e/m = 0.50[C/kg]$ の時のシミュレーション結果 r 方向では発散し, z 方向では安定領域で振動していることが分かる。

なお, それぞれの q_z, a_z の値は以下の表の通りとなった.

$V_{dc}[V]$	$e/m[C/kg]$	a_z	q_z
0.00	0.10	0.00	0.08
0.00	0.50	0.00	0.41
0.00	1.50	0.00	1.24
300	0.50	-0.09	0.41
-300	0.50	0.09	0.41

表 4.3: a_z, q_z の計算結果. これらを元に stability diagram を元に考察のセクションで考察を行う.

4.3 実験 3

まず, 実験 1 の条件下でトラップした. そこで, 実験方法にあるように, 3 種類の $\omega/2\pi (= 0.5, 1.0, 1.5\text{Hz})$ で, v_0 を 1, 2, 3, 4, 5V と変化させトラップしたイオンの動画を 100 フレームほど取った. そしてフレーム合成を実行し, 動いた振幅を求めた. 以下は実際にフレーム合成を行った図である:

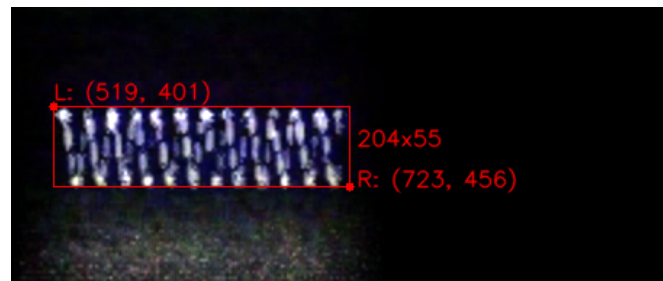


図 4.7: 実際のイオントラップフレーム合成の様子. 横軸が時間, 縦軸が z 方向の運動となっておりたしかに振動していることが分かる.

すべてに対してフレーム合成が終わった後, それぞれを m に変換して, 横軸 v_0 でそれぞれの振動数でプロットをした, 以下がそれぞれの振動数に対するプロットである.

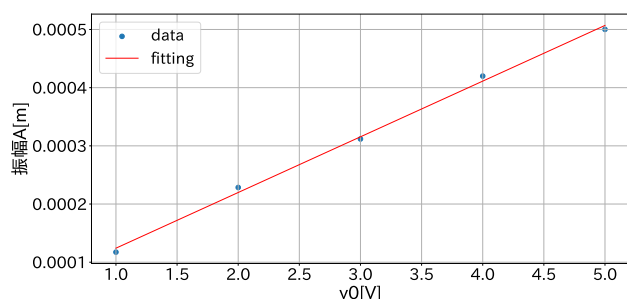


図 4.8: $\omega/2\pi = 0.5\text{Hz}$ での v_0 vs 振動振幅のグラフ。線形フィッティングできていることが分かる。

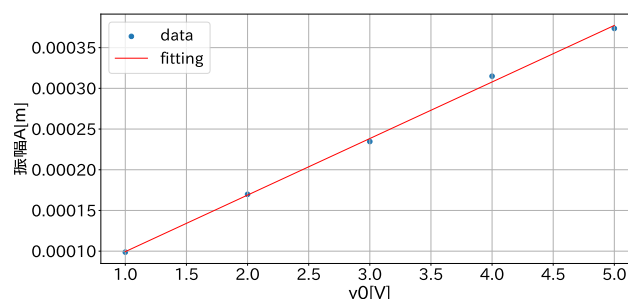


図 4.9: $\omega/2\pi = 1.0\text{Hz}$ での v_0 vs 振動振幅のグラフ。線形フィッティングできていることが分かる。

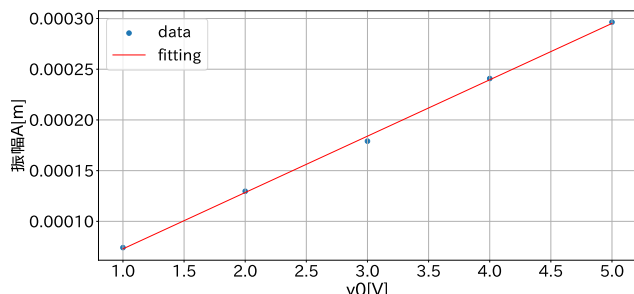


図 4.10: $\omega/2\pi = 1.5\text{Hz}$ での v_0 vs 振動振幅のグラフ。線形フィッティングできていることが分かる。

ここで、それぞれの傾きは以下の表の通りとなった。

$\omega/2\pi = 0.5\text{Hz}$ での傾き $g_1[\text{m/V}]$	$\omega/2\pi = 1.0\text{Hz}$ での傾き $g_2[\text{m/V}]$	$\omega/2\pi = 1.5\text{Hz}$ での傾き $g_3[\text{m/V}]$
9.57e-05	6.95e-05	5.56e-05

表 4.4: 実験結果から得た g_1, g_2, g_3 の値の表。ただし、指数表記を採用した。

ここで、それぞれの g の値から式 (2.26) より、求めることができる。表 (4.1) と表 (4.2) のデータと、イオントラップ装置の固有の値: $r_0 = 11\text{mm}$, $z_0 = 7.78\text{mm}$ の値をそれぞれ代入してこの 2 次方程式 (4 次方程式) を求めると、それぞれの g の組み合わせで 3 つの解が得られた:

$$g_1, g_2 \text{ の組み合わせ: } \frac{e}{m} = 0.0574[\text{C/kg}], \quad (4.1)$$

$$g_2, g_3 \text{ の組み合わせ: } \frac{e}{m} = 0.0701[\text{C/kg}], \quad (4.2)$$

$$g_1, g_3 \text{ の組み合わせ: } \frac{e}{m} = 0.0596[\text{C/kg}]. \quad (4.3)$$

よってこれらの平均値を比電荷の値とすると

比電荷

実験 3 より得られた比電荷の値は

$$\frac{e}{m} = 0.0623[\text{C/kg}] \quad (4.4)$$

となった。

一方、比空気抵抗の値も同様にして求まり、

比空気抵抗

実験 3 より得られた比空気抵抗の値は

$$\frac{k}{m} = 9.85 \cdot 10^3 \quad [/\text{s}] \quad (4.5)$$

となった。

これらの値の妥当性に関しては考察のセクションで行っている。

4.4 実験 4

実際にイオンをプロットし、ファンクションジェネレーターにて低電圧をかけると以下の図のように画面中にはほとんどとまった状態のイオンを捕獲することができた。

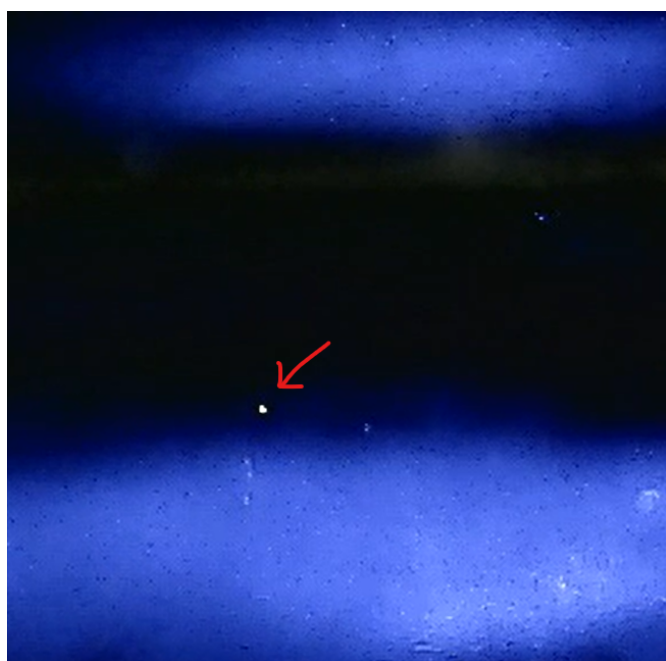


図 4.11: 実際のイオントラップの様子。本実験で計測したイオンを矢印で示した。たしかにその場にとどまっていることが分かる。

$v_C = 0V$ の位置を中心としてそこからのずれを z_C とした。なお、測定の再はイオンは多少振動するため、100 フレームほど経過させた後に以下の図のように動いた場所の中心の値を v_0 による補正前の z_C として採用した。



図 4.12: 横軸が時間 (s), 縦軸が z 方向の移動である。図から分かる通り多少の振動をしている。

式 (2.32) より、比電荷は

$$\frac{e}{m} = \frac{r_0^4 \Omega^2}{4z_0(z_C/v_C)V_{ac}^2} \quad (4.6)$$

と求めることができるため、得られたデータから z_C/v_C を求めれば比電荷 e/m が求まる。それぞれ得られた v_C を横軸、縦軸を z_C とすると以下のグラフが得られた。

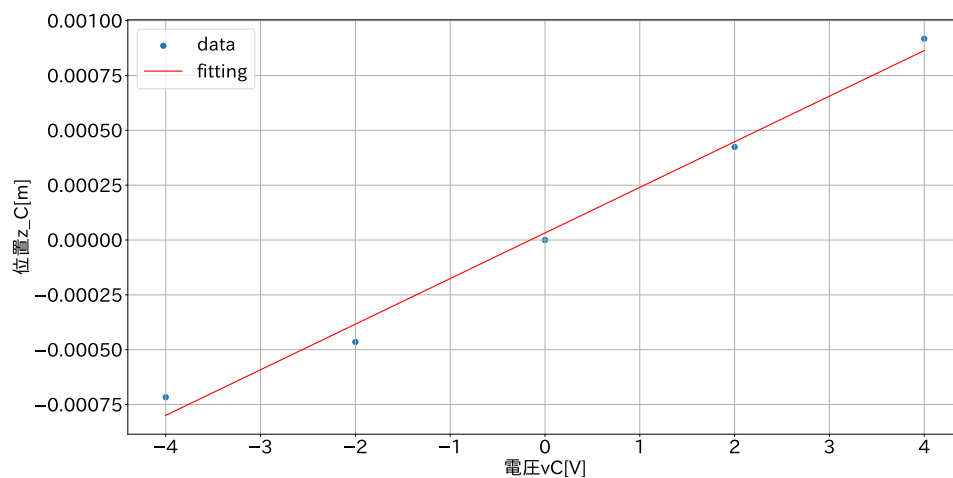


図 4.13: v_C を横軸, 縦軸を z_C とした時のグラフ. フィッティングできていることが分かる.

このグラフの傾きは

$$\frac{z_C}{v_C} = 2.08 \cdot 10^{-4} [\text{m/V}] \quad (4.7)$$

であるため,

比電荷

実験 4 より得られた比電荷の値は

$$\frac{e}{m} = 0.0316 [\text{C/kg}] \quad (4.8)$$

となった.

5 考察

5.1 実験 2 に対する考察

シミュレーション結果にて、安定的にシミュレーションできた場合を ▲, r, z どちらか一方でもできなかった場合を △ とすると以下の表にまとめられる.

ラベル	$V_{dc}[V]$	$e/m[C/kg]$	a_z	q_z	判定
プロット 1	0.00	0.10	0.00	0.08	▲
プロット 2	0.00	0.50	0.00	0.41	▲
プロット 3	0.00	1.50	0.00	1.24	△
プロット 4	300	0.50	-0.09	0.41	△
プロット 5	-300	0.50	0.09	0.41	△

表 5.1: 実験 2 で得られたデータと, それに対する判断を追加した表.

ここで, stability diagram を思い出し, 上の表で求めた点を stability diagram にプロットすると以下の表が得られた. なお, それぞれのラベルは上の表のラベルに一致する.

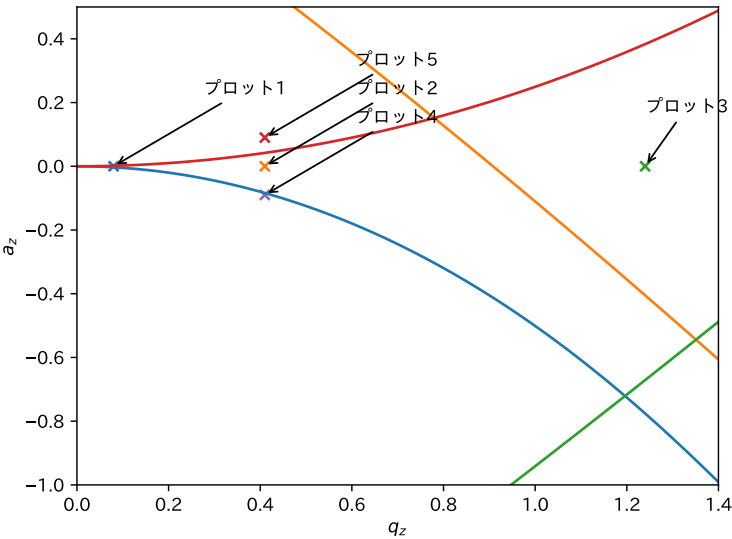


図 5.1: stability diagram に各変数を代入した時の図. プロット 3,4,5 がたしかに安定領域からはみ出していることが分かる.

となりたしかに, この安定領域内にある V_{dc} と e/m の条件ではシミュレーションができており, 領域内でない V_{dc} と e/m の条件ではたしかに安定的にシミュレーションができないことが分かる.

まず, プロット 3,4,5 に関して, より詳しくプロットすると, 以下の図が得られた.

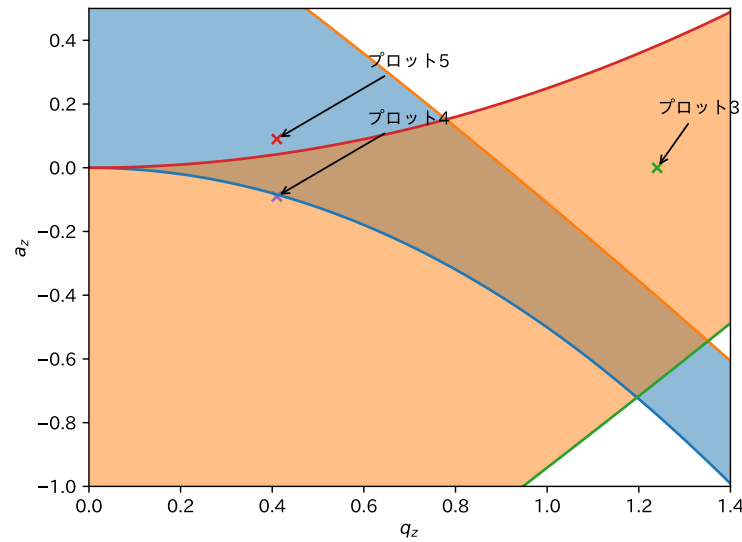


図 5.2: プロット 3,4,5 を細かく示した図. 赤い領域が r に関して安定領域, 青い領域が z に関して安定領域である.

プロット 3 に関しては r に関して安定領域であり, z に関しては不安定な領域にいる. これは実験結果の図 (4.4) の説明がつく.

プロット 4 に関しては r に関して安定領域であり, z に関しては不安定な領域にいる. これは実験結果の図 (4.5) の説明がつく.

プロット 5 に関しては z に関して安定領域であり, r に関しては不安定な領域にいる. これは実験結果の図 (4.6) の説明がつく. ここで, それぞれの値が発散をしてしまった理由は $V_{dc}(= \pm 300V)$ の絶対が大きくなると, V_{ac} の項である振動電圧項の効果が弱くなり, ポテンシャル図 (2.1) を見て分かるように, Ψ_0 の時間変化の項が弱くなればポテンシャルは時間で変化せず, ポテンシャルの溝に粒子が落ちてしまうからと考えられ, たしかに発散することが分かる.

5.2 実験 3

5.2.1 比電荷に関して

実験 3 で求めた比電荷:

$$\frac{e}{m} = 0.0623[\text{C/kg}] \quad (5.1)$$

が妥当な値であることを確認する. もともと, 実験の原理では式 (2.36):

$$\frac{e}{m} = \frac{3V\epsilon_0}{r^2\rho} \quad (5.2)$$

で与えられていた. これらを組み合わせて, 真空の誘電率 ϵ_0 の値がずれなく求まるかを確認する.

まず, 鉄粉の質量密度は [3] より,

$$\rho = 7874\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (5.3)$$

であり, 鉄粉の半径は [4] より,

$$r \sim 10 \cdot 10^{-6}\text{m} \quad (5.4)$$

と見積もることができる。また、表 (4.1) より、鉄粉は 2500V の電位を持っているため、これらを代入して、 ϵ_0 を求めると、

$$\epsilon_0 \approx 6.54 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1} \quad (5.5)$$

となった。ここで、国際標準の真空の誘電率の値は [5] より、

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1} \quad (5.6)$$

となっている。たしかにオーダーとして一致しており、妥当な結果が得られたと判断できる。

5.2.2 比空気抵抗に関して

そもそも終端速度は実験の原理で述べたように、

$$k = 3\pi\mu D_p \quad \mu : \text{流体の粘性}, D_p : \text{粒子の半径} \quad (5.7)$$

であり、空気の粘性は [7] より、

$$\mu \approx 1.81 \cdot 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s} \quad (5.8)$$

で与えられるため、

$$\frac{k}{m} = \frac{3\pi\mu r}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho} = \frac{9\mu}{4r^2 \rho} \approx 51.7 [1/\text{s}] \quad (5.9)$$

となった。これは実験結果：

$$\frac{k}{m} = 9.85 \cdot 10^3 \quad [1/\text{s}] \quad (5.10)$$

とオーダー 10 ほどずれてしまう。ストークスの法則は簡略化したモデルであり、また粒子の半径もばらつきがあり、オーダーとして 10 ほどずれるので、大きな誤差ではないことが分かる。よって、 k/m も十分に妥当な値であると言える。

5.3 実験 4

実験 4 で求めた比電荷：

$$\frac{e}{m} = 0.0316 [\text{C/kg}] \quad (5.11)$$

が妥当な値であることを確認する。実験 3 と同様にして比電荷の値から真空の誘電率の値を求める。実験 3 の考察と同様にして、 $\rho = 7874 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $r \sim 10 \cdot 10^{-6} \text{m}$, $V = 2500 \text{V}$ を式 (2.36) に代入して、真空の誘電率を計算すると、

$$\epsilon_0 \approx 3.31 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1} \quad (5.12)$$

となった。ここで、国際標準の真空の誘電率の値は [5] より、

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1} \quad (5.13)$$

となっている。たしかにオーダーとして一致しており、妥当な結果が得られたと判断できる。

6 終わりに

イオンと聞くと微小な粒子であり，外界の微細な粒子や流体が障壁となりトラップができないと思われるが，実際にトラップができることに驚いた．

また，そのノイズがある一方，比電荷から求めた真空の誘電率がオーダーとして一致することにも驚いた．超伝導量子ビットは超伝導状態が実現できず，また実際に超伝導量子ビットを作成することに変な労力が掛かる一方 [8]，トラップしたイオンの電子の状態を操作し，実際に量子計算に応用しようという動きは面白く，大変興味深いテーマであった．

参考文献

- [1] 実験の教科書
- [2] Drakoudis, A. , Söllner, M. , Werth, G.. (2006). Instabilities of ion motion in a linear Paul trap. International Journal of Mass Spectrometry. 252. 61-68. 10.1016/j.ijms.2006.02.006.
- [3] HEISHIN 社ホームページ <https://www.eng-book.com/sample/pdf/P268.pdf>
- [4] 不二製作所ホームページ <https://www.fujimfg.co.jp/kenmazai/abrasive-reducingironpowder/>
- [5] NIST ホームページ <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?ep0>
- [6] 流体工学用語事典「ストークスの抵抗法則」 <http://www.sptj.jp/powderpedia/words/11122/>
- [7] 流体工業株式会社ホームページ技術資料気体 1-2 <https://www.ryutai.co.jp/shiryou/gas/gas-nendo.htm>
- [8] P. Krantz and M. Kjaergaard and F. Yan and T. P. Orlando and S. Gustavsson and W. D. Oliver, "A quantum engineer's guide to superconducting qubits" <https://doi.org/10.1063%2F1.5089550>