2022 年 5 月 24 日配布

電磁気学　演習第 13 回 — 点電荷と電磁場の相互作用

問題 13.1：ローレンツ力

静電場 $\boldsymbol{E}$ と静磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q にはローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ が働く．

(1) $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は一様として，質量 m，電荷 q の荷電粒子の運動方程式を導け．

(2) 電場と磁場がどちらも z 方向を向いているとする（$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$）．運動方程式を解いて，粒子がどのような運動をするか調べよ．ただし，時刻 $t = 0$ で粒子は原点におり x 方向に速度 v_0 で動いているとする（$\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_x$）．

(3) 電場と磁場が直交しているとする（$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$）．運動方程式を解いて，粒子がどのような運動をするか調べよ．ただし，時刻 $t = 0$ で粒子は原点に静止しているとする．

(4) 静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ 中の位置 $\boldsymbol{r}$ に電荷 q があるとき，その電荷の持つ力学的位置エネルギー $V(\boldsymbol{r})$ を求め，静電磁場中の荷電粒子の一般の場合について，エネルギー保存則を満たされていることを確認せよ．

問題 13.2：ホール効果

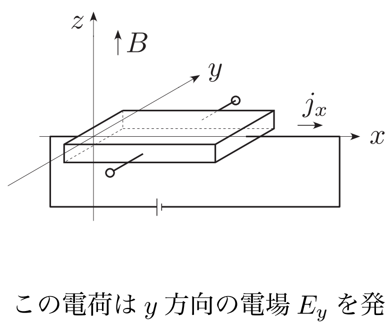
z 方向に磁場 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$，$xy$ 平面内に電場 $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y$ がかかっているときの，電荷 q，質量 m の粒子の運動を考える．

(1) ローレンツ力に加えて，問題 8.1 で考えたような速度で比例する抵抗が働くときの粒子の運動方程式を導け．

(2) $t \to \infty$ で定常状態に達したときので電流密度を

$$\begin{pmatrix} j_x(t) \\ j_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

と表し，伝導率テンソル $\{\sigma_{ij}\}$ の各成分を求めよ．



(3) 右図のように導体試料に z 方向の磁場 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ と x 方向の電場 $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{e}_x$ をかけると，導体中の荷電粒子は x 方向だけでなく y 方向にも移動するので，試料の y 方向の端に電荷が溜まる．この電荷は y 方向の電場 E_y を発生させ，電流 j_y を打ち消す方向に働くので，やがて $j_y = 0$ となり端に溜まる電荷量は一定値に達する．この効果を**ホール効果** (Hall effect) [5] といい，このときの電場 E_y をホール電場と呼ぶ．

（裏に続く）

[5]Edwin Hall (1855 – 1938) が発見した．半導体では「正孔（ホール）」という言葉をよく使うが，こちらは “hole” である．ホール効果と正孔は無関係でないのでややこしいが，間違えて “hole effect” と書かないよう注意．

磁場の強さ B と回路を流れる電流 j_x に対して，E_y を測定して求めた次の量をホール係数という．

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{E_y}{j_x B} \tag{13.1}$$

試料中の荷電粒子の体積密度を n，粒子の電荷を q とすると，ホール係数が $R_{\mathrm{H}} = 1/nq$ となることを示せ．

問題 13.3*：点電荷と電磁場の系

二つの点電荷の運動を考える．簡単のために，二つの点電荷は同じ質量 m と電荷量 q を持つとし，それぞれの位置と速度を $\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2)$ とする．また相対距離を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ とする．

まず，磁場の寄与を考えないで，クーロンの法則から，それぞれの点電荷の運動方程式が次のように書けるとする．

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1}{\mathrm{d}t} = k_e q^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\mathrm{d}t} = -k_e q^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{13.2}$$

(1) 点電荷の運動量と角運動量が保存することを確認せよ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2) = 0 \tag{13.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2) = 0 \tag{13.4}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $V(r)$ を求めよ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_2|^2 + V(r)\right) = 0 \tag{13.5}$$

(3) 次に，磁場の寄与を考えよう．ビオ・サバールの法則とローレンツ力から，点電荷の運動方程式が次のように書けることを示せ．

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = k_e q^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + k_m q^2 \boldsymbol{v}_1 \times \left(\boldsymbol{v}_2 \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \tag{13.6}$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = -k_e q^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - k_m q^2 \boldsymbol{v}_2 \times \left(\boldsymbol{v}_1 \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \tag{13.7}$$

(4) 磁場の寄与が含まれる場合，点電荷の運動量と角運動量が保存するか調べよ．

以上