東大物理工学科 2014

21B00817 鈴木泰雅,[1]

第一問

[1]

$$\int r^2 \rho dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}\int_{-a}^{a}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}}((a^2-x^2)xdx)d\theta dz \tag{1}$$

$$= \frac{2}{5}ma^2 \tag{2}$$

となる．

[2]

滑らないという条件から，

$$v' = -a\omega' \tag{3}$$

となる．

[3]

線形運動量と角運動量の保存より

$$mv' - o = P, \quad aP = \frac{2}{5}ma^2(\omega' - \omega) \tag{4}$$

であり，これを解いて

$$\omega' = \frac{2}{7}\omega \tag{5}$$

[4]

線形運動量と角運動量の保存より

$$P_n = mv_n - mv_{n-1}, \quad P_n a = \frac{2}{5}ma^2(\omega_n - \omega_{n-1}) \tag{6}$$

である．よって，

$$I(\omega_n - \omega_{n-1}) - a(mv_n - mv_{n-1}) = 0, \quad \therefore (I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) \tag{7}$$

よって，

$$(I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) = \cdots (I\omega_0 - amv_0) = \mathrm{Const} \tag{8}$$

より，

$$l = I\omega_n - amv_n = \mathrm{Const} \tag{9}$$

[5]

反発が終わった直後では,

$$\omega_f = \frac{v_f}{a} \tag{10}$$

の関係が成立するため,

$$l = I\frac{v_f}{a} - mav_f, \quad \therefore v_f = \frac{5l}{3ma} \tag{11}$$

である.

また, $v_f = 0$ のとき, $l = 0$ であるため,

$$I\omega_0 - mav_0 = 0, \quad \therefore \frac{2}{5}ma\omega_0 = mv_0 \tag{12}$$

第二問

[1]

電場の大きさはガウスの法則より

$$E(r)\cdot 2\pi rl=\frac{1}{\epsilon_0}\lambda l,\quad \therefore E(r)=\frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \tag{13}$$

である．また，電位は

$$\phi(r)-\phi(r_0)=\phi(r)=-\int_{r_0}^{r}E(r)dr=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\log\frac{r}{r_0} \tag{14}$$

[2]

上記の表式から見て分かるように，ポテンシャルは，線素からの距離 r のみしか依存しない．また，重ね合わせの原理から

$$\phi= \phi_\lambda+\phi_{-\lambda}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(-\log\frac{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}{r_0}+\log\frac{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}{r_0}\right) \tag{15}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{b^2+r^2-2br\cos\theta}{a^2+r^2-2ar\cos\theta}\right) \tag{16}$$

[3]

必要条件であるため，代入して一定になることを確かめるだけでは十分ではない．逆を示す必要がある．ϕ が $r=R$ で θ の依存性がない時，

$D^2+R^2-2DR\cos\theta=C(d^2+R^2-2dR\cos\theta),\quad \therefore d^2\left[C^2+C(-1-(R/d)^2)+(R/d)^2\right]+2R\cos\theta(Cd-D)=0$

であり．これが恒等的に成立するための条件は

$$C=\frac{D}{d},C=(R/d)^2,1\quad \therefore D=\frac{R^2}{d},d \tag{17}$$

であり，$D\neq d$ であるため，

$$D=\frac{R^2}{d} \tag{18}$$

となる．

[4]

これをもとに計算すると

$$\sigma(\theta)=\frac{\lambda}{4\pi}\left(-\frac{2}{R}\right)\frac{1-(d/R)^2}{1-2(d/R)\cos\theta+(d/R)^2} \tag{19}$$

である．

[5]

球面上で積分すると

$$\int\sigma(\theta)dS=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\theta)Rd\theta=\frac{\lambda}{4\pi}\left(-\frac{2}{R}\right)R\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(d/R)^n\cos(n\theta)\right]d\theta \tag{20}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi}(-2/R)R2\pi=-\lambda \tag{21}$$

よって示せた．

[6]

σ_2 の位置は $\theta = \pi/2 - \psi$ であり，まとめると

$$\sigma_1 : \theta = -\psi \tag{22}$$
$$\sigma_2 : \theta = \pi/2 - \psi \tag{23}$$
$$\sigma_3 : \theta = \pi - \psi \tag{24}$$
$$\sigma_4 : \theta = 3\pi/2 - \psi \tag{25}$$

であり，$cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ であり，

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + 2(d/R)\cos\psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R)\cos\psi + (d/R)^2} \sim \frac{1 + 2(d/R)\cos\psi}{1 - 2(d/R)\cos\psi}, \quad \therefore d\cos\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\frac{1}{2}R \tag{26}$$

となる．また，同様にして

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \frac{1 + 2(d/R)\sin\psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R)\sin\psi + (d/R)^2} \quad \therefore d\sin\psi = \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}\frac{1}{2}R \tag{27}$$

よって，

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\frac{1}{2}R, \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}\frac{1}{2}R\right) \tag{28}$$

第三問

[1]

$$\psi_S : -J, \quad \psi_A : J \tag{29}$$

である．(後の問題と辻褄を合わせるため，理由は分からない．)

[2]

波動関数は実関数であるため，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x)\psi_R(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_S^* + \psi_A^*\right)\left(\psi_S - \psi_A\right)dx \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_S^2 - \psi_A^2 + \psi_A\psi_S - \psi_S\psi_A\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_S^2 - \psi_A^2\right)dx \tag{31}$$

ここでグラフより

$$\psi_S^2 - \psi_A^2 = 0 \tag{32}$$

より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x)\psi_R(x)dx = 0 \tag{33}$$

であるため直交している．
また，

$$H\psi_L(x) = -J\psi_R(x), \quad H\psi_R(x) = -J\psi_L(x) \tag{34}$$

であり，

$$|\psi_L\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad |\psi_R\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{35}$$

とすると，

$$H = -J\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = -J\sigma_x \tag{36}$$

[3]

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{-J\sigma_x}{\hbar}t\right)|\psi_L\rangle = (\cos(-Jt/\hbar)\sigma_I - i\sin(-Jt/\hbar)\sigma_X)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{37}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(-Jt/\hbar) & -i\sin(-Jt/\hbar)\\ -i\sin(-Jt/\hbar) & \cos(-Jt/\hbar)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{38}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(-Jt/\hbar)\\ -i\sin(-Jt/\hbar)\end{bmatrix} \tag{39}$$

となり，確率は

$$|\langle\psi_R|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(-Jt/\hbar) \tag{40}$$

[4.1]

それぞれの粒子を合成して，まず，二つの粒子が左にいる場合は

$$|0\rangle = |\psi_L\rangle|\psi_L\rangle \tag{41}$$

と表記する．ここで，ハミルトニアンは粒子 1 と粒子 2 それぞれに対する作用の和で書けるため，

$$H = H_1 + H_2 \tag{42}$$

となる．よって，

$$H|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle = (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_L\rangle) = -J(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \tag{43}$$

である．ここで，ボーズ粒子を考えているため

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \tag{44}$$

より，

$$H|0\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \tag{45}$$

であり，

$$\begin{aligned} H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(H_1|\psi_R\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle(H_2|\psi_L\rangle) + (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_R\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_R\rangle)\right] & (46) \\ &= -J\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle + 2|\psi_R\rangle|\psi_R\rangle\right] = -\sqrt{2}J|1\rangle - \sqrt{2}J|2\rangle & (47) \end{aligned}$$

となり，同様にして

$$H|2\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \tag{48}$$

となる．よって，

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{49}$$

とするとたしかに与えられた行列を得る．

[4.2]

この固有値を求めれば良い．よって，

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & \sqrt{2}J & 0 \\ \sqrt{2}J & \lambda & \sqrt{2}J \\ 0 & \sqrt{2}J & \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{50}$$

より，$0, \pm 2J$ となる．

[4.3]

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp(-iHt/\hbar)|0\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-iHt/\hbar)^n\right)|0\rangle & (51) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-iHt/\hbar)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-iHt/\hbar)^{2n+1}\right)|0\rangle & (52) \end{aligned}$$

であり，

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

とする．ここで，

$$A^{2n+1} = 2^n A, \quad A^{2n} = AA^{2n-1} = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1}B \tag{54}$$

であることを利用して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-iHt/\hbar)^{2n} &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n(-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n}2^{n-1}B && (55)\\
&= I + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n(-2Jt/\hbar)^{2n}B && (56)\\
&= I + \frac{1}{2}\left(\cos(-2Jt/\hbar) - 1\right)B && (57)\\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-iHt/\hbar)^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!}(-1)^n(-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n+1}2^n A && (58)\\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!}(-1)^n(-2Jt/\hbar)^{2n+1}A && (59)\\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin(-2Jt/\hbar)A && (60)
\end{aligned}$$

となるため

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \left[I + \frac{1}{2}\left(\cos(2Jt/\hbar) - 1\right)B + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar)A\right]|0\rangle && (61)\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)+1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)-1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \cos(2Jt/\hbar) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)-1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)+1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)-1) \end{bmatrix} && (62)
\end{aligned}$$

となる．よって，確率は

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4(Jt/\hbar) && (63)\\
P_1(t) &= |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(2Jt/\hbar) && (64)\\
P_2(t) &= |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^4(Jt/\hbar) && (65)
\end{aligned}$$

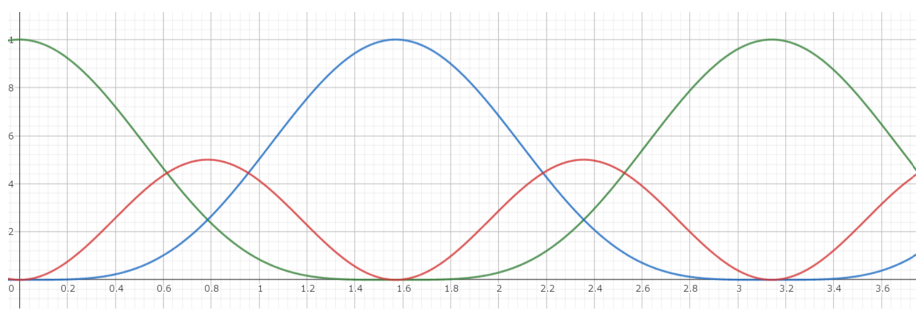

Fig.1. それぞれの様子．緑が $P_0(t)$, 青が $P_2(t)$, 緑が $P_1(t)$

[5.1]

$$H|0\rangle = -A|0\rangle, H|2\rangle = -A|2\rangle \tag{66}$$

となるようにすればよい．

$$H = \begin{bmatrix} -A & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & -A \end{bmatrix} \tag{67}$$

となる．

[5.2]

固有エネルギーは

$$-A, \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2} \tag{68}$$

であり，

$$\sqrt{A^2 + 16J^2} = A\sqrt{1 + 16\left(\frac{J}{A}\right)^2} \approx A\left(1 + 8\left(\frac{J}{A}\right)^2 \cdots\right) \tag{69}$$

$$= A + 8\frac{J^2}{A} \tag{70}$$

であるため，

$$-A, \frac{1}{2}\left(A \pm \left(A + 8\frac{J^2}{A}\right)\right) \tag{71}$$

[5.3]

[6]

第四問

[1]

N 個の粒子からなるハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(r) \right\}, \quad U(r) = \begin{cases} 0 & \text{容器内} \\ \infty & \text{容器の外} \ (r > L) \end{cases} \tag{72}$$

よって全体の分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \left[\int\int\int \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m} \right) dp_x dp_y dp_z \right]^N \left[\int\int\int \exp\left(-\beta U(r) \right) dx dy dz \right]^N \tag{73}$$

$$= \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \tag{74}$$

[2]

内部エネルギーは

$$U = F + TS, \quad F = -k_B T \ln Z, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{75}$$

であるため,

$$F = -k_B T \log \left[\frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \right] \tag{76}$$

$$S = k_B \log \left[\frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \right] + \frac{3N}{2} k_B \tag{77}$$

$$U = \frac{3N}{2} k_B T \tag{78}$$

[3]

$$P = k_T N \frac{1}{V} \tag{79}$$

[4]

分配関数は

$$Z = \exp\left(\beta\alpha \frac{N}{V} \right) \frac{1}{N!} \frac{(2mk_B T)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^N} (V - Nb)^N \tag{80}$$

よって，圧力 P は

$$P = \alpha \frac{N}{V^2} + k_B T \frac{N}{V - Nb} \tag{81}$$

であり，状態方程式は

$$\left(P + \alpha \frac{N}{V^2} \right) (V - Nb) = N k_B T \tag{82}$$

[5]

安定な点は最小値を与えている箇所．そして，不安定点は極大値の箇所である．というのも極値で状態方程式は成立するが，熱平衡状態は最小値だからである．

[6]

$$dG = -SdT + Vdp \tag{83}$$

であるため，

$$\Delta G = V\Delta p \tag{84}$$

であるため，p の増減に従って G も増減する．

第五問

[1]

位相速度は

$$v = \frac{\omega}{\tilde{k}} \tag{85}$$

で与えられるため

$$v = \frac{\omega}{k_1 + ik_2} = \frac{\omega k_1}{k_1^2 + k_2^2} - i\frac{\omega k_2}{k_1^2 + k_2^2} \tag{86}$$

となる.

[2]

$$\tilde{k} = k_1 + ik_2 \tag{87}$$

を代入すると

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp\left\{i((k_1 + ik_2)z - \omega t)\right\}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp\left(-k_2 z\right) \exp\left\{i(k_1 z - \omega t)\right\}\right] \tag{88}$$

であるため,

$$\frac{1}{e} = \exp(-k_2 z) \tag{89}$$

となるような z を求めれば良い. よって,

$$z = \frac{1}{k_2} \tag{90}$$

[3]

代入すると

$$\tilde{k}^2 = \epsilon\mu\omega^2 + \mu\sigma\omega i \tag{91}$$

であり,

$$\tilde{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 + i(2k_1k_2) \tag{92}$$

であるため, これらより二次方程式を解いて

$$k_1 = \left[\frac{\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2}\right]^{1/2}, \quad k_2 = \left[\frac{-\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2}\right]^{1/2} \tag{93}$$

よって整理すると

$$k_1 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{94}$$

となる.

[4]

$d = 1/k_2$ であるため,

$$d = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{-1/2} \tag{95}$$

となる．ここで，$\sigma \gg \epsilon\omega$ のとき,

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[-1 + \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right]^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \tag{96}$$

であり，$\sigma \ll \epsilon\omega$ のとき,

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \sqrt{2} \frac{\epsilon\omega}{\sigma} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu\sigma^2}} \tag{97}$$

[5]