東大物理工学科 2013

21B00817 鈴木泰雅,[1]

第一問

[1]

連立方程式を解くことによって

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

よって，これらを代入することによって，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

となる．よって示せた．

[2]

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \left(\dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\dot{\phi}\right)^2 + \left(\dot{r}\cos\phi + r\cos\phi\dot{\phi}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \tag{3}$$

であるため示せた．

[3]

r 成分のラグランジュ方程式より

$$\mu\ddot{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\dot{\phi}^2 - U(r)\right) \tag{4}$$

であり，

$$\frac{d}{dr}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right)\frac{d\dot{\phi}}{dr} \tag{5}$$

$$= 2\mu r\dot{\phi}^2 - 4\mu r\dot{\phi}^2 = -2\mu r\dot{\phi}^2 \tag{6}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r^2\dot{\phi}^2\right) \tag{7}$$

であるため，

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\mu r\dot{\phi}^2 + U(r)\right) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) \tag{8}$$

この物理的な意味としては大きなポテンシャル (一般化したポテンシャル) と見なすことができ，第一項は遠心力によるポテンシャル，第二項は外力によるポテンシャルである．

[4]

両辺に $\dot{r}$ を書けると

$$\mu\dot{r}\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\frac{dr}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) \tag{9}$$

であり，左辺は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu r^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)\right) \tag{10}$$

より確かにエネルギー保存が実現している．

[5]

まず $\boldsymbol{l}$ と垂直であることを示す．そもそも $\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}$ は xy 平面上での運動であったため z 成分も持たない．よって自明に垂直である．また,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)\boldsymbol{e}_y \tag{11}$$

であり，$\boldsymbol{l} = l\boldsymbol{e}_z$ であるため,

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} = l\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)(-\boldsymbol{e}_y) + l\left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)\boldsymbol{e}_x \tag{12}$$

であるため,

$$\mu\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}\right) \cdot \boldsymbol{r} = \mu l r^2 \dot{\phi} \tag{13}$$

であるため,

$$Ar\cos\alpha = \mu l r^2 \dot{\phi} - \mu k r = l^2 - \mu k r \tag{14}$$

であるため,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\alpha\right) \tag{15}$$

が成立する．

第二問

[1.1]

ビオザバールの公式を使う．

$$dH = \frac{I}{4\pi}\frac{ds \times r}{r^2} \tag{16}$$

より

$$dH = \frac{Ids}{4\pi(a^2+z^2)}\frac{a}{r} = \frac{Iads}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}, \quad \therefore H = \frac{Ia}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} ds = \frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{17}$$

[1.2]

単位長さあたり巻き数は N/l であるため，

$$H = \frac{N}{l}I, \quad \therefore B = \mu_0\frac{N}{l}I \tag{18}$$

[1.3]

Maxwell 方程式より

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \therefore \oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}) = -\mu_0\frac{N}{l}S\frac{dI}{dt} \tag{19}$$

であり，$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ はちょうどコイル内の電圧であるため，

$$L = \mu_0\frac{N}{l}S \tag{20}$$

である．

[2]

電場に関して考える．定義より下向きを正として，また，$r = d/2 + x$ より，

$$V = E(x,t)x, \quad \therefore v_0 \sin\omega t = E(r,t)\left(r - \frac{d}{2}\right) \tag{21}$$

よって

$$E(r,t) = \frac{v_0\sin\omega t}{r - d/2} \tag{22}$$

となる．

Maxwell 方程式より

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{23}$$

であり，空間内に発生する電流は 0 であるため，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{24}$$

となり，対称性から，図のように経路を取ると

$$B(t)\cdot 2\pi r = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0\epsilon_0 E'(r,t)\pi r^2 = \mu_0\epsilon_0\pi r^2\frac{v_0\omega\cos\omega t}{r-d/2} \tag{25}$$

となる．よって，

$$B(r) = \frac{r}{2}\mu_0\epsilon_0\frac{v_0\omega\cos\omega t}{r-d/2} \tag{26}$$

となる．

[3.1]

回路の方程式より半時計周りを正とすると

$$0 = \frac{Q(t)}{C} + L\frac{dI}{dt} \tag{27}$$

であり，これを t でもう一度微分すると

$$0 = \frac{I}{C} + L\frac{d^2 I}{dt^2} \tag{28}$$

となるため，角周波数 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ の単振動になる．実際に初期条件から解くと

$$I = -\omega CV sin(\omega t), \quad Q = CV\cos(\omega t) \tag{29}$$

となる．

[3.2]

それぞれのエネルギーは

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2\cos^2(\omega t), \quad E_L = \frac{1}{2}L\omega^2 C^2 V^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}CV^2\sin^2(\omega t) \tag{30}$$

となる．よってそれぞれの和は初期状態のエネルギーに一致する．

[3.3]

$$C = \epsilon_0\frac{S}{d} \tag{31}$$

より，C が 2 倍になる．

第三問

[1]

それぞれ固有方程式を解いて

$$\sigma_x: \quad \lambda = 1: \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta), \quad \lambda = -1: \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta) \tag{32}$$

$$\sigma_y: \quad \lambda = 1: \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+i\beta), \quad \lambda = -1: \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-i\beta) \tag{33}$$

[2.1]

代入すると x 軸方向しかないことに注意して，

$$H_{SO} = -\left(\frac{\gamma E}{\hbar}\right) p_x \sigma_y \tag{34}$$

である．

[2.2]

$\chi =\uparrow,\downarrow$ であり，σ_y の固有状態は求まっているため

$$\psi_1 = e^{ikx}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+i\beta), \quad \psi_2 = e^{ikx}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-i\beta) \tag{35}$$

それぞれの固有値は

$$E_1 = \frac{\hbar^2k^2}{2m} - \left(\frac{\gamma E}{\hbar}\right)\hbar k, \quad E_2 = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + \left(\frac{\gamma E}{\hbar}\right)\hbar k \tag{36}$$

[2.3]

ハミルトニアンは

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \left(\frac{\gamma E}{\hbar}\right)\hbar\sigma_y + \frac{1}{2}g\mu_B B\sigma_x = \begin{bmatrix} \frac{\hbar^2k^2}{2m} & \frac{\hbar^2k^2}{2m} - i\left(\frac{\gamma E}{\hbar}\right)\hbar + \frac{1}{2}g\mu_B B \\ \frac{\hbar^2k^2}{2m} + i\left(\frac{\gamma E}{\hbar}\right)\hbar + \frac{1}{2}g\mu_B B & \frac{\hbar^2k^2}{2m} \end{bmatrix} \tag{37}$$

これを対角化して固有エネルギーを求めると

$$E_\pm = \frac{\hbar^2k^2}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}g\mu_B B\right)^2 + (\gamma E)^2} \tag{38}$$

第四問

[1]

エネルギーが一定であるため

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2\right) \tag{39}$$

であり，このミクロカノニカル分布はこれらの 4 つの自由度を持ち，上記を満たすような分布である．よって，その状態数 W は

$$W = \#\left[v_{x,1}, v_{y,1}, v_{x,2}, v_{y,2} : E = \frac{1}{2}m\left(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2\right)\right] \tag{40}$$

$$= \left(\text{半径}\sqrt{\frac{2E}{m}}\text{の 4 次元球の表面積}\right) \tag{41}$$

[2]

2 次元球 (円) の体積は図より

$$\int_{-r}^{r} dq_1 2\sqrt{r^2 - q_1^2} \tag{42}$$

で求まる．ここで，2 次元球の表面積はこの体積を r で微分したものだから

$$S_2(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2}} \tag{43}$$

である．同様にして 3 次元球の体積は $q_1 = x, q_2 = y$ として見立てることによって

$$\int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2 2\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2} \tag{44}$$

である．これを r で微分することによって $S_3(r)$ を導ける．同様にして $S_4(r)$ も導ける．

[3]

v_1 を固定すると全体の系は

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2\right) \tag{45}$$

であり，幅 dv_1 を持つときの状態数は

$$W' = \#\left[v_{x,2}, v_{y,2} : \frac{2E}{m} - v_1^2 = v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2\right] \tag{46}$$

$$= \left(\text{半径}\sqrt{\frac{2E}{m} - v_1^2}\text{の 2 次元球の表面積}\right) \cdot dv_1 \tag{47}$$

であるため，等重率の原理から

$$P(v_1) = \frac{S_2\left(\sqrt{\frac{2E}{m} - v_1^2}\right)}{S_4\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{2E}{m} - v_1^2}}{\pi\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)^3} \tag{48}$$

である．

[4]

同様にして，この系の速度を固定しなかったときの全体の状態数は

$$W_N = \#\left[v_{x,1}, v_{x,2}, \cdots : N\epsilon = \frac{1}{2}m\left(v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \cdots\right)\right] \tag{49}$$

$$= \left(\text{半径}\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}\text{の } 2N \text{ 次元球の表面積}\right) = S_{2N}\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}\right) \tag{50}$$

である．一方，固定した時は

$$W'_N = \#\left[v_{y,1}, v_{y,2}, \cdots : N\epsilon = \frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2 = \left(v_{y,1}^2 + v_{y,2}^2 + \cdots\right)\right] \tag{51}$$

$$= \left(\text{半径}\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2}\text{の } 2N-2 \text{ 次元球の表面積}\right) = S_{2N-2}\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2}\right) \tag{52}$$

よって同様にして考えることによって

$$P_N(v_1) = \frac{W'_N}{W_N} = \frac{S_{2N-2}\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2}\right)}{S_{2N}\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}\right)} \tag{53}$$

となる．ここで，規格化因子を無視するとこれらの項は

$$P_N(v_1) \propto \frac{\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2}\right)^{2N-3}}{\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}\right)^{2N-1}} = \left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\epsilon}\right)^N \frac{m}{\left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\epsilon}\right)^{3/2} 2N\epsilon} \to \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2\epsilon}\right)\frac{m}{2N\epsilon} \tag{54}$$

である．よって maxwell ボルツマン分布になることが確かめられた．

[4]

よって，

$$\frac{N\epsilon}{k_B T} = \frac{mv_1^2}{2}\frac{1}{\epsilon} \tag{55}$$

であるため，

$$\epsilon = \frac{N\epsilon}{k_B T}\frac{2}{mv_1^2} \tag{56}$$

第五問

[1]

ガウスの法則より

$$4\pi r^2 D(r) = 4\pi a^2 \sigma, \quad \therefore D(r) = \sigma \frac{a^2}{r^2} \tag{57}$$

[2]

この場合は空間に電流が流れないため

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{58}$$

[3]

上式を図中の C を囲む平面に関して積分をして，Stokes の定理より

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{59}$$

[4]

$\boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求める．立体角をうまく使ったからできるのか？しっかり調べておく必要があるが今回は愚直に計算していく．

$$\int_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^d dr' D(r\cos\phi\cos\theta) \cdot \cos\phi r' \tag{60}$$

である．ここで，

$$r' = r\cos\theta\tan\phi, \quad dr' = r\cos\theta \frac{1}{\cos\phi^2} d\phi \tag{61}$$

より，

$$\int_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S} = 2\pi \int_0^{\phi=\theta} r\cos\theta \frac{1}{\cos\phi^2} d\phi \sigma \frac{a^2}{(r\cos\phi\cos\theta)^2} \cos\phi r\cos\theta\tan\phi \tag{62}$$

$$= 2\pi \int_0^{\theta} a^2 \sigma \frac{1}{\cos^4\phi} \sin\phi d\phi = 2\pi a^2 \sigma \left(\frac{1}{\cos^3\theta} - 1 \right) = \Psi \tag{63}$$

となる．よって，

$$d\Psi = -\frac{6\pi a^2 \sigma}{\cos^4\theta} d\theta \tag{64}$$

また，

$$vt = \frac{d}{\tan\theta} \tag{65}$$

であるため，

$$vdt = -\frac{d}{\sin^2\theta} d\theta, \quad \therefore d\theta = -\frac{v\sin^2\theta}{d} dt \tag{66}$$

となることから．

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{6\pi a^2 v\sigma}{d\cos^4\theta} \sin^2\theta = \frac{6\pi a^2 v\sigma}{r\cos^4\theta} \sin\theta, \quad \because d = r\sin\theta \tag{67}$$

[5]

よって,

$$H \cdot 2\pi d = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{6\pi a^2 v\sigma}{r\cos^4\theta}\sin\theta \tag{68}$$

より,

$$H = \frac{3a^2 v\sigma}{r\cos^4\theta}\sin\theta \tag{69}$$

[6]

$$u(r.t) = \frac{\mu_0}{2}H^2 \tag{70}$$

[7]

全空間で積分すると

$$U = 2\pi\int_a^\infty dr\int_0^\pi \frac{\mu_0}{2}H^2 = 9\pi\mu_0 a^4 v^2\sigma^2\int_a^\infty dr\frac{1}{r^2}\int_0^\pi \frac{1}{\cos^8\theta}\sin\theta^2\sin\theta d\theta \tag{71}$$

$$= 9\pi\mu_0 a^4 v^2\sigma^2\frac{1}{a}\frac{4}{35} = \frac{36}{35}\mu_0 a^3 v^2\sigma^2 \tag{72}$$

となる.

[8]

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{36}{35}\mu_0 a^3 v^2\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{72}{35}\mu_0 a^3\sigma^2\right)v^2 \tag{73}$$

となるため,質量が重くなると考えられる.この理由は電磁誘導が起きて帯電球が動きにくくなるから・