

# 東大物理工学科 2016

21B00817 鈴木泰雅,<sup>1</sup>  
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

## 第一問

[1.1]

運動方程式より

$$0 = kv_0 t_0 - \mu mg, \quad t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0} \quad (1)$$

である.

[1.2]

物体 B が右方向に動くという仮説を立てる. ( $\dot{x}_B > 0$ ) ここで運動方程式は

$$m\ddot{x}_B = k(v_0(t + t_0) - x_B) - \frac{2}{3}\mu mg - kx_B \quad (2)$$

となる.

[1.3]

$$m\ddot{x}_B = -2k \left( x_B - \frac{v_0(t + t_0)}{2} + \frac{\mu mg}{3k} \right) \quad (3)$$

であり,

$$X_B = x_B - \frac{v_0(t + t_0)}{2} + \frac{\mu mg}{3k} = x_B - \frac{v_0 t}{2} - \frac{\mu mg}{6k} \quad (4)$$

とすると

$$m\ddot{X}_B = -2kX_B, \quad X_B = A \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \quad (5)$$

であり,

$$X_B(0) = 0 - \frac{v_0 t_0}{2} + \frac{\mu mg}{3k} = -\frac{\mu mg}{6k} \quad (6)$$

$$\dot{X}_B(0) = 0 - \frac{v_0}{2} = -\frac{v_0}{2} \quad (7)$$

であるため,

$$X_B = -\frac{\mu mg}{6k} \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) - \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \quad (8)$$

$$\therefore x_B = \frac{v_0}{2} \left( t - \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right) + \frac{\mu mg}{6k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right) \quad (9)$$

である.

[1.4]

$$\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 \ll 1 \quad (10)$$

であるため,

$$\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) \approx \sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^3, \quad \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^2 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^4 \quad (11)$$

よって二次までの近似をすると

$$x_B(t=t_0) = \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \sqrt{\frac{m}{2k}}\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) + \frac{\mu mg}{6k}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^2\right) = \frac{t_0^3 kv_0}{6m} \quad (12)$$

となり, これは物体 A が静止するために

$$k \frac{t_0^3 kv_0}{6m} < \mu mg = t_0 kv_0, \quad \therefore \frac{t_0^2}{6m}k < 1 \quad (13)$$

であることを示せばよい. 解けない??

[2.1]

ラグランジュ方程式を解く. ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m[\dot{q}_A^2 + \dot{q}_B^2 + \dot{q}_C^2] \\ & - k_1 l^2 \left[ -\frac{1}{2}\left(\frac{l+q_C}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q_B}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{l+q_C}{l}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{q_B}{l}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^4 \right] \\ & - \frac{1}{2}k_0[(q_C - q_B)^2 + (q_B - q_A)^2] \end{aligned}$$

であるためそれぞれの方程式は一次の形まで書くと

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_A = & -k_1 l^2 \left[ -\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)\frac{1}{l} + \left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^3 \frac{1}{l} \right] + k_0(q_B - q_A) \\ \approx & -k_1 l^2 \left[ \frac{1}{l} + \frac{2q_A}{l^2} \right] + k_0(q_B - q_A) \\ m\ddot{q}_B = & -k_1 l^2 \left[ -\left(\frac{q_B}{l}\right)\frac{1}{l} + \left(\frac{q_B}{l}\right)^3 \frac{1}{l} \right] - k_0\{-(q_C - q_B) + (q_B - q_A)\} \\ \approx & k_1 q_B - 2k_0 q_B + k_0 q_C + k_0 q_A \\ m\ddot{q}_C \approx & -k_1 l^2 \left[ \frac{1}{l} + \frac{2q_C}{l} \right] - k_0(q_C - q_B) \end{aligned}$$

である. よってこれを行列で表現すると

$$m \begin{bmatrix} \ddot{q}_A \\ \ddot{q}_B \\ \ddot{q}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_1 - k_0 & k_0 & 0 \\ k_0 & k_1 - 2k_0 & k_0 \\ 0 & k_0 & -2k_1 - k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \\ q_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_1 l \\ 0 \\ k_1 l \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる. ここで, 一般的に

$$m\ddot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q} + B \quad (15)$$

があり対角化して

$$\mathbf{q}' = U\mathbf{q} \quad (16)$$

とすると

$$m\ddot{\mathbf{q}}' = U^{-1}AU\mathbf{q}' + U^{-1}B \quad (17)$$

であり, 例えば一つの成分を取り出して

$$m\ddot{q}'_i = aq'_i + b = a\left(q'_i + \frac{b}{a}\right) \quad (18)$$

であり, この基準振動  $\omega$  が満たす方程式は

$$-\omega^2 = \frac{a}{m} \quad (19)$$

となるためこれは  $b$  に依存しない. よって, 行列  $A$  のみの対角化をすればよい. よって, この行列の固有方程式は

$$\det \begin{bmatrix} -2k_1 - k_0 - \lambda & k_0 & 0 \\ k_0 & k_1 - 2k_0 - \lambda & k_0 \\ 0 & k_0 & -2k_1 - k_0 - \lambda \end{bmatrix} = (-2k_1 - k_0 - \lambda)(\lambda^2 + (k_1 + 3k_0)\lambda + 3k_0k_1 - 2k_1^2) = 0$$

であるため固有値は

$$\lambda = -2k_1 - k_0, \frac{1}{2} \left[ -(k_1 + 3k_0) \pm \sqrt{9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2} \right] \quad (20)$$

である. よって固有振動数はこれに  $1/m$  倍して  $-1$  をかけて平方したものであるため

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_1 + k_0}{m}}, \sqrt{\frac{1}{2m} \left( k_1 + 3k_0 \mp \sqrt{9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2} \right)} \quad (21)$$

である.

[2.2]

不安定な解はこの固有振動が虚数数の時であり, 時刻に対して指数関数的に増大する.

$$9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2 = 9k_0^2 \left[ \left( \frac{k_1}{k_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{k_1}{k_0} \right) + 1 \right] \quad (22)$$

は任意の  $k_1/k_0$  で正の値であるが,

$$k_1 + 3k_0 - \sqrt{9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2} < 0 \quad (23)$$

の時この固有振動は不安定になる. よって,

$$9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2 > (k_1 + 3k_0)^2, \quad \therefore 2k_1^2 - 3k_0k_1 > 0 \quad (24)$$

である. これは

$$\frac{k_1}{k_0} > \frac{3}{2} \quad (25)$$

よって,  $k_C$  の値は

$$k_C = \frac{3}{2}k_0 \quad (26)$$

である.

[2.3]

$$k_1 = \frac{2}{3}k_0 \quad (27)$$

であるためそれぞれ固有振動数に代入すると

$$\sqrt{\frac{7k_0}{3m}}, \sqrt{\frac{k_0}{3m}}, \sqrt{\frac{10k_0}{3m}} \quad (28)$$

である。それぞれの固有ベクトルは

$$-\frac{7k_0}{3} \text{の時: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad -\frac{k_0}{3} \text{の時: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad -\frac{10k_0}{3} \text{の時: } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

であり、行列  $U$  は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U^{-1}AU = \begin{bmatrix} -\frac{7k_0}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_0}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10k_0}{3} \end{bmatrix} \quad (30)$$

であり、

$$U^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 l \\ 0 \\ k_1 l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となるため、 $\mathbf{q}'$  は  $\mathbf{q}$  の成分の線形結合であり、初期値は  $\mathbf{q}(0) = \dot{\mathbf{q}}(0) = 0$  であるため、 $\mathbf{q}'(0) = \dot{\mathbf{q}}'(0) = 0$  である。よって解いて

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} k_1 l \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{7k_0}{3m}} t \right) \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

となる。よって、元の座標に戻ると

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \\ q_C \end{bmatrix} = U^{-1}\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} k_1 l \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{7k_0}{3m}} t \right) \right) \quad (33)$$

であるため、

$$q_A : q_B : q_C = 1/2 : 1/6 : -1/3 \quad (34)$$

である。

## 第二問

[1]

$$\phi(P) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+} \quad (35)$$

[2]

$$\phi(P) = \frac{-q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r + d/2 \cos \theta} + \frac{-q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r - d/2 \cos \theta} \quad (36)$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ -1 + \frac{d}{2r} \cos \theta + 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right\} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (37)$$

となる.

[3]

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(P) = \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (38)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (39)$$

である.

[4]

$\theta = \pi/2$  の時,

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{e}_\theta \quad (40)$$

であるため,  $r$  成分は持たない.  $\theta_2 = 0$  の時, それぞれ  $\mp p$  の電荷は

$$-q : \mathbf{F}_- = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (l - d/2)^3} \mathbf{e}_\theta \quad (41)$$

$$q : \mathbf{F}_+ = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (l + d/2)^3} \mathbf{e}_\theta \quad (42)$$

であるため,  $F_- > F_+$  であるから, 反時計回りに回転し始める. 一方.  $\theta = -\pi/2$  の時はそれぞれの  $p_1$  からの距離は等しく, ( $l$  が十分に大きいため),  $\theta$  方向にしか力がかからないため, 回転しない.

[5]

$p_2$  に作る電場  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 l^3} (2 \cos \theta_1 \mathbf{e}_r + \sin \theta_1 \mathbf{e}_\theta) \quad (43)$$

であり, 書き込んだ図より

$$\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{e}_r = p_2 \cos \theta_2, \quad \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{e}_\theta = -p_2 \sin \theta_2 \quad (44)$$

である. よって

$$U = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 l^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (45)$$

となる.

[6]

また,  $p_2$  が  $p_1$  に作るポテンシャルを考える. 原点を  $p_2$  にして

$$\mathbf{E}_2 = \frac{p_2}{4\pi\epsilon_0 l^3} (2 \cos(\pi - \theta_2) \mathbf{e}_r + \sin(\pi - \theta_2) \mathbf{e}_\theta) = \frac{p_2}{4\pi\epsilon_0 l^3} (-2 \cos \theta_2 \mathbf{e}_r - \sin \theta_2 \mathbf{e}_\theta) \quad (46)$$

であり, 図より

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{e}_r = \cos(\pi - \theta_1) = -p_1 \cos(\theta_1), \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{e}_\theta = p_1 \sin \theta_1 \quad (47)$$

であるため,

$$U_2 = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 l^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (48)$$

となり同じになる. よって, 全体のポテンシャルは

$$U = U_1 + U_2 = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 l^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (49)$$

であり, これが最小となる  $\theta_1, \theta_2$  を求めれば良い. よって

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} U = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 l^3} (-2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} U = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 l^3} (-2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) = 0 \quad (51)$$

よってこれは  $\theta_1, \theta_2$  に関して対称ゆえそれぞれ同じ値になるため

$$\sin(2\theta) = 0, \quad \therefore \theta_1, \theta_2 = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (52)$$

である. ただし,  $\theta_1, \theta_2$  の整数  $n$  は同じ値であるとは限らない. (しっかり Hesse 行列から調べる必要が大いにあるが, ) 例えば  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  の時,

$$U = -\frac{p_1 p_2}{\pi\epsilon_0 l^3} \quad (53)$$

である. あと, 三角不等式からもしっかり調べられる.

[7]

鏡像の電気双極子を考える. すると,  $\theta_1 = -\alpha, \theta_2 = \alpha$  とした場合と変わらないため,

$$U = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 (2h)^3} (-2 \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) = \frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 (2h)^3} (2 \cos^2(\alpha) + 1 - \cos^2(\alpha)) \quad (54)$$

であり, これが最小になるのは,

$$\cos \alpha = 0, \quad \therefore \alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (55)$$

である.