

東大物理工学科 2017

21B00817 鈴木泰雅,¹

第一問

[1.1]

エネルギー保存則より

$$mgR = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2, \quad \therefore v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)} \quad (1)$$

[1.2]

回転系で見ると遠心力がかかるため

$$m\frac{v^2}{R} + N = mg \cos \theta, \quad \therefore N = mg \cos \theta - m\frac{v^2}{R} = mg(3 \cos \theta - 2) = 0 \quad (2)$$

の時に質点が離れるため

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \quad (3)$$

よって、速度は

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \quad (4)$$

[2.1]

$$I = \int dm r'^2 = \frac{3m}{4\pi r^3} \int r'^3 dr' d\theta dz, \quad 0 \leq r' \leq \sqrt{r^2 - z^2} \quad (5)$$

$$= \frac{3m}{4\pi r^3} \cdot 2\pi \int_{-r}^r \frac{1}{4}(r^2 - z^2)^2 dz \quad (6)$$

$$= \frac{2}{5}mr^2 \quad (7)$$

[2.2]

図より

$$R\dot{\theta} = r(\dot{\phi} - \dot{\theta}), \quad \therefore (R + r)\dot{\theta} = r\dot{\phi} \quad (8)$$

よって

$$v = \frac{\dot{\theta}}{R + r}, \omega = \dot{\phi} \quad (9)$$

より,

$$(R + r)^2 v = r\omega \quad (10)$$

[2.3]

束縛条件は

$$f_r(r') = r' - (r + R) = 0, \quad f_{\theta,\phi}(\theta, \phi) = (R + r)\theta - r\phi = 0 \quad (11)$$

であり，束縛条件がない時のラグランジアンは

$$L_0 = \frac{1}{2}m(\dot{r}'^2 + r'^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\dot{\phi}^2 - mgr'\cos\theta \quad (12)$$

よって，束縛条件がある場合のラグランジュ方程式は

$$m\ddot{r}' - (mr'\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta) = \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial r} = \lambda_r \quad (13)$$

$$mr'^2\ddot{\theta} - mgr'\sin\theta = \lambda_{\theta,\phi}(R + r) \quad (14)$$

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\phi} = \lambda_{\theta,\phi}(-r) \quad (15)$$

よって， $\lambda_{\theta,\phi}$ を消去して，また， r の束縛条件より

$$mr'^2\ddot{\theta} - mgr'\sin\theta = -\frac{m}{5}(R + r)^2\ddot{\theta}, \quad \therefore \frac{7}{5}mr'\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0 \quad (16)$$

ここで，

$$\frac{7}{5}mr'\dot{\theta}\ddot{\theta} - \dot{\theta}mg\sin\theta = 0 \quad \therefore \frac{7}{10}mr'\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = mg(= \text{Const}), \therefore \text{初期条件から求める} \quad (17)$$

よって，束縛条件より $\dot{r}', \ddot{r}' = 0$ であるため，

$$-mr'\frac{10}{7}\frac{(1 - \cos\theta)g}{r'} + mg\cos\theta = \lambda_r, \quad \therefore \cos\theta = \frac{10}{17} \quad (18)$$

また，

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{10}{17}\frac{g}{R + r}} \quad (19)$$

より，

$$v = \frac{\dot{\theta}}{R + r} = \sqrt{\frac{10g}{17}} \frac{1}{(R + r)^{3/2}} \quad (20)$$

[2.4]

回転により寄与がかかるから．

[3.1]

角運動量と運動量で考える．それぞれ

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = rP\sin\alpha\hat{y}, \quad \sin\alpha = \frac{h - r}{r} \quad (21)$$

である，ここで，滑らないという条件は，

$$L = \omega I \quad (22)$$

であり，

$$\omega I = P(h - r), \quad \frac{v}{r}\frac{2}{5}mr^2 = mv(h - r) \quad (23)$$

であり，

$$r = \frac{5}{7}h \quad (24)$$

[3.2]

エネルギー保存より (ラグランジアンが陽に時間依存しない)