

東大物理工学科 2013

21B00817 鈴木泰雅,¹

第一問

[1]

連立方程式を解くことによって

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (1)$$

よって、これらを代入することによって、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}) \quad (2)$$

となる。よって示せた。

[2]

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = (\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi})^2 + (\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi})^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (3)$$

であるため示せた。

[3]

r 成分のラグランジュ方程式より

$$\mu \ddot{r} = \frac{\partial}{\partial r} (\mu r \dot{\phi}^2 - U(r)) \quad (4)$$

であり、

$$\frac{d}{dr} (\mu r^2 \dot{\phi}^2) = \frac{\partial}{\partial r} (\mu r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} (\mu r^2 \dot{\phi}^2) \frac{d\dot{\phi}}{dr} \quad (5)$$

$$= 2\mu r \dot{\phi}^2 - 4\mu r \dot{\phi}^2 = -2\mu r \dot{\phi}^2 \quad (6)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} (\mu r^2 \dot{\phi}^2) \quad (7)$$

であるため、

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} (\mu r \dot{\phi}^2 + U(r)) = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right) \quad (8)$$

この物理的な意味としては大きなポテンシャル (一般化したポテンシャル) と見なすことができ、第一項は遠心力によるポテンシャル、第二項は外力によるポテンシャルである。

[4]

両辺に \dot{r} を書けると

$$\mu \dot{r} \ddot{r} = -\frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right) \quad (9)$$

であり、左辺は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu r^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right) \quad (10)$$

より確かにエネルギー保存が実現している。

[5]

まず \mathbf{l} と垂直であることを示す．そもそも $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ は xy 平面上での運動であったため z 成分も持たない．よって自明に垂直である．また,

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_x + (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_y \quad (11)$$

であり, $\mathbf{l} = l \mathbf{e}_z$ であるため,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} = l (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) (-\mathbf{e}_y) + l (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_x \quad (12)$$

であるため,

$$\mu (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r} = \mu l r^2 \dot{\phi} \quad (13)$$

であるため,

$$A r \cos \alpha = \mu l r^2 \dot{\phi} - \mu k r = l^2 - \mu k r \quad (14)$$

であるため,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left(1 + \frac{A}{\mu k} \cos \alpha \right) \quad (15)$$

が成立する．

第二問

[1.1]

ビオザバールの公式を使う．

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^2} \quad (16)$$

より

$$dH = \frac{I ds}{4\pi(a^2 + z^2)} \frac{a}{r} = \frac{I a ds}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \therefore H = \frac{I a}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} ds = \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (17)$$

[1.2]

単位長さあたり巻き数は N/l であるため,

$$H = \frac{N}{l} I, \quad \therefore B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad (18)$$

第四問

[1]

エネルギーが一定であるため

$$E = \frac{1}{2}m(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2) \quad (19)$$

であり，このミクロカノニカル分布はこれらの4つの自由度を持ち，上記を満たすような分布である．よって，その状態数 W は

$$W = \# \left[v_{x,1}, v_{y,1}, v_{x,2}, v_{y,2} : E = \frac{1}{2}m(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2) \right] \quad (20)$$

$$= \left(\text{半径} \sqrt{\frac{2E}{m}} \text{の4次元球の表面積} \right) \quad (21)$$

[2]

2次元球(円)の体積は図より

$$\int_{-r}^r dq_1 2\sqrt{r^2 - q_1^2} \quad (22)$$

で求まる．ここで，2次元球の表面積はこの体積を r で微分したものだから

$$S_2(r) = \int_{-r}^r dq_1 \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2}} \quad (23)$$

である．同様にして3次元球の体積は $q_1 = x, q_2 = y$ として見立てることによって

$$\int_{-r}^r dq_1 \int_{-\sqrt{r^2 - q_1^2}}^{\sqrt{r^2 - q_1^2}} dq_2 2\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2} \quad (24)$$

である．これを r で微分することによって $S_3(r)$ を導ける．同様にして $S_4(r)$ も導ける．

[3]

v_1 を固定すると全体の系は

$$E = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2) \quad (25)$$

であり，幅 dv_1 を持つときの状態数は

$$W' = \# \left[v_{x,2}, v_{y,2} : \frac{2E}{m} - v_1^2 = v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2 \right] \quad (26)$$

$$= \left(\text{半径} \sqrt{\frac{2E}{m} - v_1^2} \text{の2次元球の表面積} \right) \cdot dv_1 \quad (27)$$

であるため，等重率の原理から

$$P(v_1) = \frac{S_2 \left(\sqrt{\frac{2E}{m} - v_1^2} \right)}{S_4 \left(\sqrt{\frac{2E}{m}} \right)} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{2E}{m} - v_1^2}}{\pi \left(\sqrt{\frac{2E}{m}} \right)^3} \quad (28)$$

である．

[4]

同様にして、この系の速度を固定しなかったときの全体の状態数は

$$W_N = \# \left[v_{x,1}, v_{x,2}, \dots : N\epsilon = \frac{1}{2}m(v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots) \right] \quad (29)$$

$$= \left(\text{半径} \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}} \text{の } 2N \text{ 次元球の表面積} \right) = S_{2N} \left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}} \right) \quad (30)$$

である。一方、固定した時は

$$W'_N = \# \left[v_{y,1}, v_{y,2}, \dots : N\epsilon = \frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2 = (v_{y,1}^2 + v_{y,2}^2 + \dots) \right] \quad (31)$$

$$= \left(\text{半径} \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2} \text{の } 2N - 2 \text{ 次元球の表面積} \right) = S_{2N-2} \left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2} \right) \quad (32)$$

よって同様にして考えることによって

$$P_N(v_1) = \frac{W'_N}{W_N} = \frac{S_{2N-2} \left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2} \right)}{S_{2N} \left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}} \right)} \quad (33)$$

となる。ここで、規格化因子を無視するとこれらの項は

$$P_N(v_1) \propto \frac{\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2} \right)^{2N-3}}{\left(\sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}} \right)^{2N-1}} = \left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\epsilon} \right)^N \frac{m}{\left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\epsilon} \right)^{3/2} 2N\epsilon} \rightarrow \exp \left(-\frac{mv_1^2}{2\epsilon} \right) \frac{m}{2N\epsilon} \quad (34)$$

である。よって maxwell ボルツマン分布になることが確かめられた。

[4]

よって、

$$\frac{N\epsilon}{k_B T} = \frac{mv_1^2}{2} \frac{1}{\epsilon} \quad (35)$$

であるため、

$$\epsilon = \frac{N\epsilon}{k_B T} \frac{2}{mv_1^2} \quad (36)$$