1問目

I (1) $\frac{d}{dx}\left((y')^2 y^\beta + 4y\right) = 2y' \cdot y'' y^\beta + (y')^2 \cdot \beta y^{\beta-1} \cdot y' + 4y' = 0$ である

$\therefore\ 2y'' y^{\beta+2} + (y')^2 \cdot \beta y^{\beta+1} + 4y^2 = 0$

$\therefore\ \underline{\beta = -1}_{//}$

(2) $(y')^2 \frac{1}{y} + 4y = (y'(0))^2 \cdot \frac{1}{y(0)} + 4y(0) = 8$

$\therefore\ (y')^2 = 8y - 4y^2$ $\quad\therefore\ \frac{1}{\sqrt{8y-4y^2}}dy = \pm dx$

$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(y-1)^2}}dy = \pm dx \quad \therefore\ \frac{1}{2}\sin^{-1}(y-1) = \pm x + C$

$\therefore\ y = \sin(\pm 2x + C) + 1$

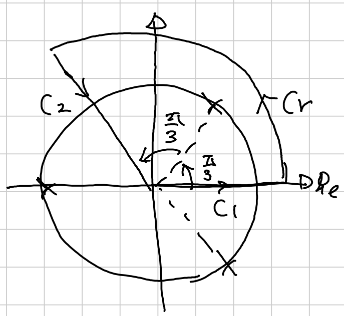
$y(0) = 2 \quad \therefore\ y = \sin(C) + 1 = 2 \quad \therefore\ C = \frac{\pi}{2}$

$y'(0) = 0 \quad \therefore\ y' = \pm 2\cos(\ C\ ) = 0 \quad C = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \underline{y = \cos(\pm 2x) + 1}_{//}$

II

(1)



$\int_C f(z)dz = \int_{C_r} + \int_{C_1} + \int_{C_2}$

$\int_{C_r} = \left|\int \frac{1}{z^3+1}dz\right| \le \left|\int \frac{1}{r^3-1}dz\right| \le \frac{r}{r^3-1}\cdot\frac{2}{3}\pi \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right) \to 0$

$\int_{C_2} = \int_{r \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}}^{0} \frac{1}{z^3+1}dz = e^{-i\frac{2}{3}\pi}\int_r^0 \frac{1}{x^3+1}dx = -e^{+i\frac{2}{3}\pi}\int_{C_1}$

$e^{i\frac{2}{3}\pi}x = z$ とした.

また,留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{2\pi i}{(e^{\frac{\pi}{3}i}+1)(e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{-\frac{\pi}{3}i})} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3} - i)$

$\therefore\ (1 - e^{+i\frac{2}{3}\pi}) \cdot \int_{C_1} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3} - i) \quad \therefore\ \underline{\int_{C_1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}_{//}$

(2)

$\mathrm{Res}\, f(z) = \frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 f(z)\right] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{27} = -\frac{2}{27} \quad \therefore\ \underline{\int_C = -\frac{4\pi i}{27}}_{//}$

III

(1) $XY = wYX$ 行列式をとると $|X|\cdot|Y| = w^n|Y|\cdot|X|$ $\quad |X|\cdot|Y| = |Y|\cdot|X|$ 故.

∧ 正則故 $|X| \neq 0,\ |Y| \neq 0$

$\underline{w^n = 1}_{//}$

(2) Xの固有値を λ,固有ベクトルを $|n\rangle$ とすると. $\quad X|n\rangle = \lambda|n\rangle \longrightarrow YX|n\rangle = \lambda Y|n\rangle$

$= w^{-1}X(Y|n\rangle) = \lambda(Y|n\rangle)$

$\therefore\ X(Y|n\rangle) = w\lambda(Y|n\rangle)$

・これをくりかえすと、固有値：$\lambda, \omega\lambda, \omega^2\lambda \cdots \omega^{n-1}\lambda$ が固有値となる。

$|n\rangle \quad Y|n\rangle, \quad Y^2|n\rangle \cdots \quad Y^{n-1}|n\rangle$

(3) $X^3 = Y^3 = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ をみたす Xの固有値が $1, \omega, \omega^2$ になるもの。

$Y = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&\omega&0 \\ 0&0&\omega^2 \end{bmatrix}$, $|n\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Y|n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, X, $Y^2|n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Y = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$

ためしに $Y = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}$ でとると、

$YX = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&\omega&0 \\ 0&0&\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ \omega&0&0 \\ 0&\omega^2&0 \end{bmatrix}$, $XY = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&\omega&0 \\ 0&0&\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&\omega^2 \\ 1&0&0 \\ 0&\omega&0 \end{bmatrix}$

$= \omega^2 XY$

$\underline{XY = \omega YX}$ //

---

(2) $(y')^2 = 8y - 4y^2$ を $2yy'' - (y')^2 + 4y^2 = 0$ に代入

$2yy'' - (8y - 4y^2) + 4y^2 = 0 \quad \therefore 2yy'' - 4y + 4y^2 = 0 \quad \therefore y'' = -4(y-1)$

$y - 1 = Ae^{-i2x} + Be^{i2x} \quad \therefore (y-1)'' = -4(y-1)$

$\left.\begin{array}{l} 1 = A + B \\ 0 = 2i(-A+B) \end{array}\right\} A = B = \frac{1}{2} \quad \therefore y - 1 = \cos(2x) \quad \therefore \underline{y = \cos(2x) + 1}$ //

$\boxed{\text{まずは線形に直したい。}}$

III

$XY = \omega YX$, $X, Y = n\times n$ の正則行列で解く。

(1) $\det(XY) = \det(\omega YX) = \omega^n \det(XY) \quad \therefore \underline{\omega^n = 1}$ //

λ：Xの固有値の1つをとる。 $Xv_0 = \lambda v_0$

ωYを左から掛けて $\omega YXv_0 = \omega\lambda(Yv_0)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$

$X(Yv_0) = \omega\lambda(Yv_0)$ → 1つのベクトルとして見ればよい、 $\underline{\lambda\omega \text{も固有値}}$

$\omega^n = 1$より、集合としては $\{\lambda, \lambda\omega, \cdots \lambda\omega^{n-1}\}$ で証明完了 $\square$

(2) $X^3 = Y^3 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ が分かっている。$\wedge$ $XY = \omega YX$ $(\omega = e^{2\pi/3i})$ の 3×3 行列である

(1) より、Xは $\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&\omega&0 \\ 0&0&\omega^2 \end{bmatrix}$. $\left(X^3 = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}\right.$ に確かになる。 $\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}$

(IV)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial t}.$$

(1) $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varphi}\cdot\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right] = 0 \quad \therefore\ P = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ が答え. $(a_1 = a_2 = 0,\ a_3 = -1)$

(2) $P = C\varphi$ とする. (C = Constant) なので $\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C\varphi}$ である $\leftarrow$ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ であれば良い.

$\varphi(x,t) = \hat{\varphi}(x,t)e^{-ct}$ 　　　　Cは時間依存はなくここで良い

とおきかえると, $\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = 0 \quad \therefore$ $\hat{\varphi}$ に対する拡散方程式をとけば良い

定数変化　　変数分離 → (境界条件)　　フーリエ

$$\boxed{\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \hat{\varphi}(x,t)\, e^{ikx}\, dx}$$ (逆 fourier)

eで良い

$$-k^2\tilde{\varphi} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = c\tilde{\varphi} \quad \therefore\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = -(C+k^2)\tilde{\varphi} \quad \therefore\ \tilde{\varphi} = \overset{A(k)}{} \exp(\ (C+k^2)t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, A(k)\, e^{ikx-(C+k^2)t}$$

初期条件 $\varphi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, A(k)\, e^{ikx} = e^{-2x} + e^{-3x}$ より

逆フーリエ　$A(k) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-2x} + e^{-3x})\, e^{-ikx}\, dx}$

$$\therefore\ \varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\iint dk\, dx'\ (e^{-2x'} + e^{-3x'})\, e^{ik(x-x') - (C+k^2)t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-ct}\iint dx'\, \varphi_0(x')\, \exp(\underbrace{-tk^2 + ik(x-x')}_{= -t\left(k - \frac{i(x-x')}{2t}\right)^2})$$

$\exp\left(\frac{-(x-x')^2}{2t}\right)$　　$\sqrt{\frac{\pi}{t}}$

$$= \frac{e^{-ct}}{2\sqrt{\pi t}}\int dx'\ (e^{-2x'} + e^{-3x'})\, \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2t}\right)$$

$$= \frac{e^{-ct}}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\left[\exp\left(\frac{(x-4t)^2}{4t}\right) + \exp\left(\frac{(x-3t)^2}{4t}\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

$$= e^{-2x-(4-c)t} + e^{-3x+(9-c)t}$$

(3) $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{5t-x}{2}\right)$

第2問 (その1)

I

(1) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = \begin{cases} E\psi(x) & (x<0) \\ (E-V_0)\psi(x) & (x>0) \end{cases}$$

であり、$E>V_0 \wedge E>0$ の時を考えるので、 $$\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x) \\ C\exp(ik_2x) \end{cases} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},\ k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

(2) 接続条件より

$$\begin{cases} A+B=C \\ ik_1(A-B) = ik_2C \end{cases} \quad \therefore\ C = \frac{2k_1}{k_1+k_2}A$$

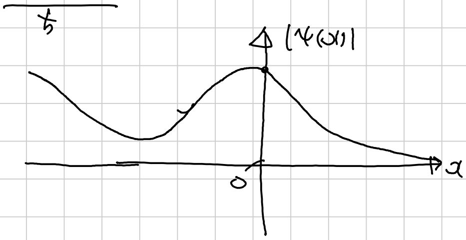
(3) 透過率 T と、反射率 R は、 $T = \frac{k_2|C|^2}{k_1|A|^2}$, $R = \frac{k_2|B|^2}{k_1|A|^2}$ より

$$T+R=1 \quad \therefore\ \frac{k_2|C|^2}{k_1|A|^2} + \frac{k_1|B|^2}{k_1|A|^2} = 1 \quad \therefore\ k_2|C|^2 = k_1|A|^2 - k_1|B|^2$$

(4) $E<V_0$ の時

$$\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_1x) \\ C\exp(-k_2'x) \end{cases} \quad k_2' = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

この時、 $\mathrm{Re}\,(\psi(x))\Big|_{x<0} \propto \cos(\sim x)$, より、



(5) 透過確率 T には、k_2 の情報が含まれており、k_2 は、V_0 が含まれているため、V_0 を知ることができる。

< 具体的な T と R がほしいかな〜

$R = 1 + \left(\frac{2}{(k_1/k_2)+1}\right)^2$ であり、 $\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{E}{V_0-E}}$ を見ることができ

V_0/E の値が分かる。

(6)

S行列を使って表現することを考える

これは $V_0>E$ の時だけか?? 縦だと、$E=V_0$ くらい

$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) - V_0 = E$ が、$E>V_0$ の時の解

II

(1) $(\sigma_x^{(j)})^2 = 1$ $(\sigma_z^{(j)})^2 = 1$ $\{\sigma_x^{(j)}, \sigma_z^{(j)}\} = 0$

(2) $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が σ_z 固有ベクトルなので $\underline{\sigma_x^{(j)}|0\rangle = |1\rangle \quad \sigma_x^{(j)}|1\rangle = |0\rangle}$

(3) $\sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(3)}, \sigma_z^{(2)}\sigma_x^{(3)}$ は可換である。∴ $\exp(-iH_1 t) = \exp(i\sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(3)} t)\cdot\exp(i\sigma_z^{(2)}\sigma_x^{(3)} t)$

ここで $A^2 = I$ をみたす行列Aに対して、

$$\exp(iAt) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iAt)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\cdot I\cdot t^{2n}}_{\cos(t)I} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}i\cdot(-1)^n\cdot A\cdot t^{2n+1}}_{i\sin(t)A} = \cos(t)I + i\sin(t)A$$

ここで $(\sigma_z^{(1)}\cdot\sigma_x^{(3)})^2 = I$ より、

$$\exp(i\sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(3)}) = \cos(t)I + i\sin(t)\cdot\sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(3)}, \quad \exp(i\sigma_z^{(2)}\sigma_x^{(3)}t) = \cos(t)I + i\sin(t)\cdot\sigma_z^{(2)}\cdot\sigma_x^{(3)}$$

$$\therefore U_1(t) = \cos^2(t)I + i\sin(t)\cos(t)(\sigma_z^{(1)}+\sigma_z^{(2)})\sigma_x^{(3)} - \sin^2(t)\sigma_z^{(1)}\cdot\sigma_z^{(2)}$$ //

(4) H_2 も同様にすると、 $H_2 = \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)} - \sigma_z^{(3)} - \sigma_z^{(1)} + I$

$$\therefore \exp(iH_2 t) = \Big(\underbrace{(\cos(t)I + i\sin(t)\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)})(\cos(t)I - i\sin(t)\sigma_z^{(3)})}_{\cos^2(t)I + i\sin(t)\cos(t)(\sigma_x^{(1)}-I)\sigma_z^{(3)} + \sin^2(t)\sigma_z^{(1)}}(\cos(t)I - i\sin(t)\sigma_z^{(1)})\Big)\exp(it)$$

$$= \Big(\cos^3(t)I + \sin^2(t)\cos(t)\sigma_z^{(1)} + \sin^2(t)\cos(t)(I-\sigma_z^{(1)})\sigma_z^{(3)} - i\cos^2(t)\sin(t)\sigma_z^{(1)} - i\sin^3(t)I\Big)\exp(it)$$

$$\therefore U_1\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(I + i(\sigma_z^{(1)}+\sigma_z^{(2)})\sigma_x^{(3)} - \sigma_z^{(1)}\cdot\sigma_z^{(2)}\right)$$

$$U_2\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\left(I + \sigma_z^{(1)} + (I-\sigma_z^{(1)})\sigma_z^{(3)} - i\sigma_z^{(1)} - iI\right)$$

$001 + 001 + (\cancel{001} - \cancel{001})$
$\cancel{+i}\,2\,001 - i\,\cancel{001}$

$\therefore U_2U_1|000\rangle = U_2(\cancel{|000\rangle} + i(2|001\rangle - \cancel{|000\rangle})\frac{1}{2} = U_2\, i|001\rangle = \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}(|001\rangle + |001\rangle + (0) - i|001\rangle - i|001\rangle)$
$= \underline{i|001\rangle}$ //

$U_2U_1|010\rangle = U_2(|010\rangle + i(0) + |010\rangle)\cdot\frac{1}{2} = U_2|010\rangle = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}(|010\rangle + |010\rangle + (0) - i|010\rangle - i|010\rangle)$
$= \underline{|010\rangle}$ //

$U_2U_1|100\rangle = U_2(|100\rangle + i(0) + |100\rangle)\frac{1}{2} = U_2|100\rangle = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}(\cancel{|100\rangle} \cancel{+|100\rangle} + (|100\rangle + |100\rangle) - i|100\rangle - i|100\rangle)$
$= |100\rangle$

$U_2U_1|110\rangle = U_2(\cancel{|110\rangle} - 2i|111\rangle - \cancel{|110\rangle})\frac{1}{2} = U\,i|111\rangle = \frac{-ie^{i\frac{\pi}{4}}i}{2\sqrt{2}}(\underbrace{\cancel{|111\rangle} - \cancel{|111\rangle}}_{=0} - (\cancel{|111\rangle} \cancel{+|111\rangle}) + i\cancel{|111\rangle} - i\cancel{|111\rangle})$

$111 - \cancel{111} + (110 + 110) + i\cancel{111} - i\cancel{111}$

(5)

$$|\psi_\varepsilon\rangle = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\alpha|000\rangle + \beta|110\rangle) + \varepsilon\,(\alpha|100\rangle + \beta|010\rangle)$$

$$\therefore\ U_2(\tfrac{\pi}{4})U_1(\tfrac{\pi}{4})|\psi_\varepsilon\rangle = \underline{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\alpha i\,|001\rangle} + \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\beta\cdot 0 + \underline{\varepsilon\alpha\,|100\rangle} + \underline{\varepsilon\beta\,|010\rangle}$$

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\alpha i\,|00\rangle$$

$$|\phi_0\rangle = \varepsilon\,(\alpha|10\rangle + \beta|01\rangle)$$

$|\phi_0\rangle$ の時 $\underline{\sigma_x^{(1)}}$ を作用させる

$|\phi_1\rangle$ の時は結果は変わらない…

第3問

(1)
$$Z = \frac{1}{N!}\cdot\frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\int\cdots\int \exp\left[-\beta\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2\right)\right]dx_i\,dp_i$$

$$= \frac{1}{N!}z^N \qquad z = \frac{1}{2\pi\hbar}\iint_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\right]dp\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\cdot\sqrt{\pi\cdot 2m/\beta}\cdot\sqrt{\pi\cdot\frac{2}{m\omega^2\beta}} = \frac{1}{\hbar\omega}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\pi\hbar}\cdot\frac{2\pi}{\beta\omega}$$

$$\therefore\ Z = \underline{\frac{1}{N!}\cdot\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^N\cdot\left(\frac{2\pi}{\beta\omega}\right)^N}$$

$$\frac{1}{\hbar\beta\omega}$$

(2)
$$F = -\frac{1}{\beta}\log Z = -\frac{1}{\beta}\cdot N\log\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{2\pi}{\beta\omega}\right) - \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{1}{N!}\right) \qquad \log(N!) \sim N\log N - N = N(\log N - 1)$$

$$\boxed{\sim -\frac{1}{\beta}N\log\left(\frac{2\pi}{\beta\omega}\right) + \frac{1}{\beta}\cdot N(\log N - 1)}$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{\partial\beta}{\partial T}\cdot\frac{\partial F}{\partial\beta} = +\frac{1}{k_BT^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial\beta} = k_B\beta^2\cdot\left(+\frac{1}{\beta^2}N\log\left(\frac{2\pi}{\beta\omega}\right) + \cancel{\frac{1}{\beta^2}N} - \frac{1}{\beta^2}N(\log N - 1)\right)$$

$$= \underline{k_B\left(+N\log\left(\frac{1}{\hbar\beta\omega}\right) - N\log N\right)} = k_BN\left(\log\left(\frac{1}{\hbar\beta\omega}\right) - \log N\right)$$

$$= \underline{k_BN\left(\log\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right) - \log N\right)}$$

$$E = -\frac{d}{d\beta}\log Z = -\frac{d}{d\beta}\cdot\left(\log N! + N\log\left(\frac{1}{\hbar\beta\omega}\right)\right) = \underline{Nk_BT}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = -\frac{1}{\beta}\left(\log\left(\frac{1}{\hbar\omega\beta}\right)\right) + \frac{1}{\beta}(\log N - 1) + \frac{1}{\beta}N\cdot\frac{1}{N} = \underline{-k_BT\log\frac{k_BT}{N\hbar\omega}}$$

各準位のエネルギーの計??⇒ やっぱりカノニカル分布??

(3)
$$E = \hbar\omega\sum_{i=1}^{\infty}\langle n_i\rangle, \qquad \langle n_i\rangle = f_M(\varepsilon_i) = \exp(-\beta(\varepsilon_i - \mu_M))$$ の時

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle n_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\exp(-\beta(\hbar\omega\cdot n - \mu_M)) = \boxed{\exp(\beta\mu_M)\cdot\frac{1}{1-\exp(-\beta\hbar\omega)}}$$

μ_M を温度の関数として表わす。