2022年5月6日配布

電磁気学　演習第8回 — 変数分離

問題8.1：変数分離

電荷がない空間の静電場はラプラス方程式 $\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす．

(1) 静電ポテンシャルは極座標 (r, θ, φ) で $\phi(\boldsymbol{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ のように変数分離できる．$R(r)$，$\Theta(\theta)$，$\Phi(\varphi)$ が満たすべき方程式を導け．

(2) 静電ポテンシャルが次の形で書けるとする．$R_0(r)$ と $R_1(r)$ の一般解を求めよ．

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = R_0(r), \qquad \phi_1(\boldsymbol{r}) = R_1(r)\cos\theta \tag{8.1}$$

(3) 問題1.3および6.1で求めたように，平面上に一様に分布する電荷が作る電場は場所によらず一定になる．z 軸方向に一様な電場 $\boldsymbol{E}_z = E_z\boldsymbol{e}_z$ があるときの静電ポテンシャル ϕ_z を求めよ．ただし，原点でのポテンシャルの値を零とする．

(4) 一様な電場 $\boldsymbol{E}_z$ の中に半径 R の導体球があるときの静電場を考える．静電場は遠方では $\boldsymbol{E}_z$ のままであるが，導体球の近くでは球表面に誘導される電荷によって形が変わる．対称性から，この系の静電ポテンシャルは $\phi_0(r)$ と $\phi_1(r)$ の重ね合わせで表すことができることが分かっている．無限遠方 $r \to \infty$ の静電ポテンシャルが ϕ_z に一致することと，導体球の表面 $r = R$ での電位が定数 ϕ_R になることから，$R_0(r)$ と $R_1(r)$ を決定して静電ポテンシャルを求めよ．

問題8.2：ルジャンドル多項式

次のべき級数展開を考える．右辺の展開係数 $P_n(x)$ はルジャンドル多項式 (Legendre polynomials) と呼ばれる．

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{8.2}$$

(1) 式(8.2)の両辺を t について微分し，次の関係式が成り立つことを示せ．

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} \tag{8.3}$$

(2) 式(8.3)の両辺で係数を比較することにより，次の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \tag{8.4}$$

(3) クーロン相互作用の級数展開は $P_n(x)$ を用いて次にように書ける．

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2(x'/r)\cos\theta + (x'/r)^2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \tag{8.5}$$

問題7.2(1)の結果から，$P_0(x)$，$P_1(x)$，$P_2(x)$ を求めよ．

(4) 漸化式 (8.4) を用いて $P_3(x)$，$P_4(x)$ を求めよ．

(5) ルジャンドル多項式は次の微分方程式の解である．

$$\frac{d^2 P_n(\cos\theta)}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0 \tag{8.6}$$

$n = 0, 1, 2$ について，方程式 (8.6) が満たされることを確認せよ．ラプラス方程式の解の角度成分 $\Theta(\theta)$ はルジャンドル多項式を用いて表すことができる．[2]

問題 8.3*：八面体対称なポテンシャル

問題 7.2 では，電荷分布よりも遠方 $r \gg x'$ のポテンシャルを考えた．ここでは，反対に，原点付近 $r \ll x'$ のポテンシャルを考えよう．クーロン相互作用は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{x}'$ について対称なので，この場合の級数展開は次のようになる．

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{x'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{x'}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (r < x') \tag{8.7}$$

(1) N 個の点電荷 q からなる電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$ を考える．$\boldsymbol{r}_i$ は電荷の位置で，すべて原点から距離 a だけ離れているとする（$|\boldsymbol{r}_i| = a$）．原点付近の静電ポテンシャルが次のように表されることを示せ．ただし，$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i/a$ とする．

$$\phi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{N}{a} + \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_i) + \frac{1}{a^3}\sum_{i=1}^{N}\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_i)^2 - r^2}{2} + \cdots\right] \tag{8.8}$$

(2) 前小問 (1) の展開の次の二項（$1/a^4$ と $1/a^5$ に比例する項）を求めよ．

(3) $N = 6$ の点電荷が次のように八面体の頂点の位置にあるとする．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= (a, 0, 0), \quad \boldsymbol{r}_2 = (-a, 0, 0), \quad \boldsymbol{r}_3 = (0, a, 0) \\ \boldsymbol{r}_4 &= (0, -a, 0), \quad \boldsymbol{r}_5 = (0, 0, a), \quad \boldsymbol{r}_6 = (0, 0, -a) \end{aligned} \tag{8.9}$$

このとき，静電ポテンシャルの漸近形が次のように表されることを示せ．

$$\phi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{6}{a} + \frac{7r^4 - 35(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)}{2a^5} + \cdots\right] \tag{8.10}$$

以上

[2] φ に依存しない場合．一般的にはルジャンドル陪関数で表される．