# 東大物理工学科 2017

**21B00817 鈴木泰雅,**[1]

## 第一問

### *[1.1]*

エネルギー保存則より

$$mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2, \quad \therefore v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)} \tag{1}$$

### *[1.2]*

回転系で見ると遠心力がかかるため

$$m\frac{v^2}{R} + N = mg\cos\theta, \quad \therefore N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} = mg(3\cos\theta - 2) = 0 \tag{2}$$

の時に質点が離れるため

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \tag{3}$$

よって，速度は

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \tag{4}$$

### *[2.1]*

$$I = \int dmr'^2 = \frac{3m}{4\pi r^3}\int r'^3 dr' d\theta dz, \quad 0 \leq r' \leq \sqrt{r^2 - z^2} \tag{5}$$

$$= \frac{3m}{4\pi r^3}\cdot 2\pi\int_{-r}^{r}\frac{1}{4}(r^2 - z^2)^2 dz \tag{6}$$

$$= \frac{2}{5}mr^2 \tag{7}$$

### *[2.2]*

図より

$$R\theta = r(\phi - \theta), \quad \therefore (R + r)\dot{\theta} = r\dot{\phi} \tag{8}$$

よって

$$v = \frac{\dot{\theta}}{R + r}, \omega = \dot{\phi} \tag{9}$$

より，

$$(R + r)^2 v = r\omega \tag{10}$$

*[2.3]*

束縛条件は

$$f_r(r') = r' - (r+R) = 0, \quad f_{\theta,\phi}(\theta,\phi) = (R+r)\theta - r\phi = 0 \tag{11}$$

であり，束縛条件がない時のラグランジアンは

$$L_0 = \frac{1}{2}m(\dot{r}'^2 + r'^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\dot{\phi}^2 - mgr'\cos\theta \tag{12}$$

よって，束縛条件がある場合のラグランジュ方程式は

$$m\ddot{r}' - (mr'\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta) = \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial r} = \lambda_r \tag{13}$$

$$mr'^2\ddot{\theta} - mgr'\sin\theta = \lambda_{\theta,\phi}(R+r) \tag{14}$$

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\phi} = \lambda_{\theta,\phi}(-r) \tag{15}$$

よって，$\lambda_{\theta,\phi}$ を消去して，また，$r$ の束縛条件より

$$mr'^2\ddot{\theta} - mgr'\sin\theta = -\frac{m}{5}(R+r)^2\ddot{\theta}, \quad \therefore \frac{7}{5}mr'\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0 \tag{16}$$

ここで，

$$\frac{7}{5}mr'\dot{\theta}\ddot{\theta} - \dot{\theta}mg\sin\theta = 0 \quad \therefore \frac{7}{10}mr'\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = mg(=\mathrm{Const}), \because \text{初期条件から求める} \tag{17}$$

よって，束縛条件より $\dot{r}', \ddot{r}' = 0$ であるため，

$$-mr'\frac{10}{7}\frac{(1-\cos\theta)g}{r'} + mg\cos\theta = \lambda_r, \quad \therefore \cos\theta = \frac{10}{17} \tag{18}$$

また，

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{10}{17}\frac{g}{R+r}} \tag{19}$$

より，

$$v = \frac{\dot{\theta}}{R+r} = \sqrt{\frac{10g}{17}}\frac{1}{(R+r)^{3/2}} \tag{20}$$

*[2.4]*

回転により寄与がかかるから．

*[3.1]*

角運動量と運動量で考える．それぞれ

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P} = rP\sin\alpha\hat{y}, \quad \sin\alpha = \frac{h-r}{r} \tag{21}$$

である，ここで，滑らないという条件は，

$$L = \omega I \tag{22}$$

であり，

$$\omega I = P(h-r), \quad \frac{v}{r}\frac{2}{5}mr^2 = mv(h-r) \tag{23}$$

であり，

$$r = \frac{5}{7}h \tag{24}$$

*[3.2]*

エネルギー保存より (ラグラジアンが陽に時間依存しない)

$$mg(R+r)(1-\cos\theta)+\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}I\omega^2=\text{初期条件} \tag{25}$$

より,

$$\cos\theta=\frac{10}{17}+\frac{7}{17}\frac{P^2}{m^2g(R+r)} \tag{26}$$

## 第四問

*[1.1]*

$M$ 個の中から $N$ 個だけ入る箇所を選択すればよいので，状態数は

$$ {}_M C_N = \frac{M!}{N!(M-N)!} \tag{27} $$

である．よって，

$$ S = k_B \ln \frac{M!}{N!(M-N)!} \approx k_B \left( M \ln M - N \ln N - (M-N) \ln (M-N) \right) \tag{28} $$

*[1.2]*

$$ F = U - TS \tag{29} $$

であるため，相互作用が存在しないため，$F = -TS$ であるため，

$$ F = -k_B T \ln \frac{M!}{N!(M-N)!} \approx k_B \left( M \ln M - N \ln N - (M-N) \ln (M-N) \right) \tag{30} $$

であり，

$$ p_0 = -\frac{\partial F_0}{\partial V} = -\frac{\partial F_0}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial V} = -\frac{\partial F_0}{\partial M}\frac{1}{v} \tag{31} $$

$$ = \frac{k_B T}{v} \ln \frac{1}{1 - M/N} \approx \frac{k_B N T}{V} \tag{32} $$

となる．

*[2.1]*

自由エネルギーは

$$ F = U - TS = -\frac{1}{2} M z \alpha \phi^2 - k_B T \ln \frac{M!}{N!(M-N)!} \approx k_B \left( M \ln M - N \ln N - (M-N) \ln (M-N) \right) \tag{33} $$

よって，

$$ \mu = -\alpha z \phi + k_B T \left[ \ln \phi - \ln (1-\phi) \right] \tag{34} $$

が成立する．

*[2.2]*

これが単調増加になるためには

$$ \frac{\partial \mu}{\partial \phi} > 0 \tag{35} $$

になればよい．よって，

$$ \frac{\partial \mu}{\partial \phi} = -\alpha z + k_B T \left( \frac{1}{\phi} + \frac{1}{1-\phi} \right) > 0 \tag{36} $$

より，

$$ T > \frac{\alpha z \phi (1-\phi)}{k_B}, \quad \because \frac{k_B T - \alpha z \phi(1-\phi)}{\phi(1-\phi)} > 0 \tag{37} $$