東工大理物 2021

21B00817 鈴木泰雅,[1]
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

第一問

(1)

今回の角運動量の成分は z 軸しか持たないため，慣性モーメントは z 軸を中心に考えれば良い．よって，

$$I_l = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3} ml^2 \tag{1}$$

であり，O まわりは

$$I_a = \int_0^a r^2 \left(\frac{M}{\pi a^2}\right) 2\pi r dr = \frac{Ma^2}{2} \tag{2}$$

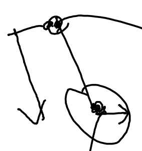
(2)

剛体は質量中心に関してのみ考えれば良いので，

$$V_l = -\int_{l/2}^{l/2\cos\theta} mg = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta), \tag{3}$$

$$V_a = -\int_{l+a}^{l\cos\theta + a\cos\phi} Mg = Mg\left(l(1-\cos\theta) + a(1-\cos\phi)\right) \tag{4}$$

となる．



(3)

剛体の問題では回転の運動エネルギーと固定点の運動エネルギーに分解できる．また，回転の運動エネルギ－は系によらず

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \hat{I} \boldsymbol{\omega} \tag{5}$$

と表現することができる．よって，

$$T_l = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2}_{\text{回転の運動エネルギー}} + \underbrace{0}_{\cancel{\text{固定点 } P \text{ の速度は } 0}} \tag{6}$$

→) 慣性モーメントの基準点

となり，

$$T_a = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{Ma^2}{2}\right)\dot{\phi}^2}_{\text{回転の運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}M\left\{l^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right\}}_{\text{固定点の運動エネルギー}} \tag{7}$$

となる．よって，全体の運動エネルギーは

$$T = T_l + T_a = \frac{1}{6}ml\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}Ma^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mal\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi) \tag{8}$$

(4)

ラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
L =& T - V && (9)\\
=& \frac{1}{6}ml\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}Ma^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mal\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi) && (10)\\
& -mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) - Mg\left(l(1-\cos\theta) + a(1-\cos\phi)\right) && (11)
\end{aligned}
$$

となるためラグランジュ方程式は

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\theta}\left(\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2\right) + \left(Mal\cos(\theta-\phi)\ddot{\phi} - Mal\sin(\theta-\phi)(\dot{\theta}-\dot{\phi})\dot{\phi}\right) && (12)\\
&\quad +Mal\sin(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi} + mg\frac{l}{2}\sin\theta + Mgl\sin\theta = 0 && (13)\\
&\frac{3}{2}Ma^2\ddot{\phi} + \left(Mal\cos(\theta-\phi)\ddot{\theta} - Mal\sin(\theta-\phi)(\dot{\theta}-\dot{\phi})\dot{\theta}\right) + Mga\sin\phi = 0 && (14)
\end{aligned}
$$

であり，微小項を無視することによって，

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\theta}l^2\left(\frac{1}{3}m + M\right) + \ddot{\phi}al(M) + \theta gl\left(\frac{1}{2}m + M\right) = 0 && (15)\\
&\ddot{\phi}\frac{3}{2}a^2(M) + \ddot{\theta}al(M) + \phi ga(M) = 0 && (16)
\end{aligned}
$$

が得られる．

(5)

$m/M \to 0$ のラグランジュ方程式は

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\theta}l^2M + \ddot{\phi}al(M) + \theta glM = 0 && (17)\\
&\ddot{\phi}\frac{3}{2}a^2M + \ddot{\theta}alM + \phi gaM = 0 && (18)
\end{aligned}
$$

となり，$\ddot{\theta}, \ddot{\phi}$ について解くと

$$
\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix} = -\frac{2g}{al}\begin{bmatrix}3/2a & -a\\ -l & l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \phi\end{bmatrix} \tag{19}
$$

となる．この時，基準振動数はこの係数行列の固有値を -1 倍して平方を取った値に等しいので，(詳しくはこちら)

$$
\omega_{\pm}^2 = \frac{g}{al}\left(l + \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{3a}{2}\right)^2 + 4al}\right) \tag{20}
$$

(6)

$$
\omega_{\pm}^2 \approx \frac{g}{a}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a}{l} \pm \sqrt{1 + 7\frac{a}{l}}\right) \approx \frac{g}{a}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a}{l} \pm \left(1 + \frac{7}{2}\frac{a}{l}\right)\right) \tag{21}
$$

となるため，

$$
\omega_{+}^2 \approx \frac{2g}{a}, \quad \omega_{-}^2 \approx -\frac{2g}{l} \tag{22}
$$

であるが，なぜマイナスになってしまうのか...

第二問

(1)

ローレンツ力より，

$$IB_0 \tag{23}$$

である．

(2)

線素 dr が受ける力 dF は

$$dF = IB_0 dr \quad (\text{半時計周り}) \tag{24}$$

より，力のモーメント (torque) は

$$\int_0^a [\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}]_z dr = \frac{1}{2} a^2 I B_0 \tag{25}$$

である．

(3)

ファラデーの電磁誘導の法則より，

$$V_{\mathrm{emf}} = \frac{d}{dt}\left(B_0 \cdot \frac{1}{2} a^2 \int_0^t \omega(t') dt'\right) = \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t) \tag{26}$$

となる．

(4)

レールから棒に流れる向きを正とすると，回路の方程式より

$$V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t) = IR, \quad \therefore I = \frac{1}{R}\left(V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t)\right) \tag{27}$$

(5)

回転の運動方程式は，慣性モーメントが $\frac{1}{3}\lambda a^3$ より，

$$\frac{1}{3}\lambda a^3 \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{2} a^2 I B_0 = \frac{1}{2} a^2 B_0 \frac{1}{R}\left(V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t)\right) \tag{28}$$

であり，終端では $\omega(t)$ が時間依存しなくなるため，

$$\frac{1}{2} a^2 B_0 \frac{1}{R}\left(V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t)\right) = 0, \quad \therefore \omega = \frac{2V}{a^2 B_0} \tag{29}$$

(6)

問題文に書き込んだような問題設定で考える．回路の方程式は

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{2} B_0 a^2 \omega(t) = 0 \tag{30}$$

であり，回転の運動方程式は

$$\frac{1}{3}\lambda a^3 \frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{2} I B_0 a^2 = -\frac{1}{2}\frac{dQ}{dt} B_0 a^2 \tag{31}$$

である．よって，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\lambda a^3\omega(t)+\frac{1}{2}Q(t)B_0a^2\right)=0 \tag{32}$$

より，

$$\omega(t)+\left(\frac{3B_0}{2\lambda a}\right)Q(t)=\mathrm{Const} \tag{33}$$

である．また，$t=0$ で $\omega=0$ とすると，

$$\omega(t)+\left(\frac{3B_0}{2\lambda a}\right)Q(t)=\left(\frac{3B_0}{2\lambda a}\right)Q_0 \tag{34}$$

である．また，回路の方程式より，終端では $dQ=0$ であるため，

$$\frac{Q_\infty}{C}-\frac{1}{2}B_0a^2\omega_\infty=0 \tag{35}$$

であるため，

$$Q_\infty=\frac{1}{2}CB_0a^2\omega_\infty \tag{36}$$

ここで，

$$\omega_\infty+\left(\frac{3B_0}{2\lambda a}\right)\frac{1}{2}CB_0a^2\omega_\infty=Q_0 \tag{37}$$

であるため，

$$\omega_\infty=\left(1+\frac{3B_0^2Ca}{4\lambda}\right)^{-1}Q_0 \tag{38}$$

である．

(7)

そもそも起電力が

$$V_{\mathrm{emf}}=\frac{d}{dt}\left(B(t)\frac{1}{2}a^2\int_0^t\omega(t')dt'\right) \tag{39}$$

とすると方程式が複雑になりすぎて求まらなくない？

第三問

(1)

$\nabla \ln r = \left(\frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2+y^2} \right)$

$$\nabla \ln |\boldsymbol{r}| = \frac{\boldsymbol{r}}{\cancel{r}\, r^2} \tag{40}$$

$\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

である．

(2)

$$\boldsymbol{r} = r\cos\theta\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\boldsymbol{e}_y \tag{41}$$

とすると，

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\nabla = \boldsymbol{e}_r\cdot\nabla \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\nabla = r\boldsymbol{e}_\theta\cdot\nabla \tag{43}$$

であるめ，∇ というベクトルはそれぞれの基底の線形結合より，

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{44}$$

である．よって，

$$\nabla\cdot\nabla = \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{45}$$

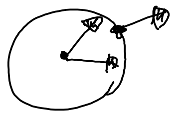
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \boldsymbol{e}_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_\theta\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_r\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{46}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{47}$$

となる．

(3)

$$\Delta \ln |\boldsymbol{r}| = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{48}$$



$I = \oint_S \nabla\cdot\nabla \ln r \, dxdy$

$= \oint_C (\nabla \ln r)\, e_r \cdot 2\pi r \cdot$

である．

(4)

$Q = \partial_x \ln r, P = -\partial_y \ln r$ とすると，グリーンの定理より，

$$I = \oint_C \left(-\partial_y \ln r dx + \partial_y \ln r dy\right) \tag{49}$$

であり，

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \tag{50}$$

であることと，

$$\partial_x \ln r = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}, \quad \partial_y \ln r = \frac{y}{r^2} = \frac{\sin\theta}{r} \tag{51}$$

であるため，

$$I= \oint_C \left\{ -\frac{\sin\theta}{r}\left(cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\right) + \frac{\cos\theta}{r}\left(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta\right) \right\} \tag{52}$$

$$= \oint_C dr = 2\pi \tag{53}$$

である．

(5)

$$\Delta \ln|r| = 2\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{54}$$

である．

(7)

極の値を r とすると，

$$p = \pm\sqrt{k^2 + i\delta} \approx \pm k\left(1 + \frac{1}{2k^2}i\delta\right) \tag{55}$$

である．ここで，問題文に記載したような半円を考えた時

$$J = \int_{-r}^{r} + \int_{r=r} \tag{56}$$

を考えた時，(おそらく x の場合分けをしてジョルダン不等式で評価する必要がある．)

$$\left|\int_\theta \frac{e^{ipx}}{p^2 - k^2 - i\delta}dp\right| \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \to 0 \tag{57}$$

であるため，最初の項のみを考える．よって，留数定理より，

$$J = 2\pi i\frac{e^{i\alpha x}}{2\alpha} \to 2\pi i\frac{e^{ikx}}{2k}, \quad \delta \to 0 \tag{58}$$

となる．