2022 年 5 月 10 日配布

電磁気学　演習第 9 回 — 鏡像法

問題 9.1：グリーン関数

ポアソン方程式は，これまでに求めた微分形の代わりに積分形で書くこともできる．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \rho(\boldsymbol{x}') \, \mathrm{d}^3 x' \tag{9.1}$$

(1) 式 (9.1) に現れる $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を**グリーン関数** (Green's function) という．静電ポテンシャルがポアソン方程式を満たすことから，グリーン関数 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ が満たす方程式を導け．

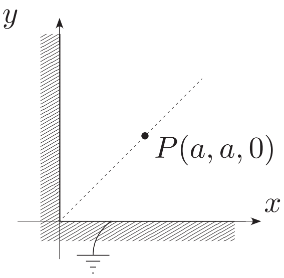
(2) グリーン関数 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を求め，式 (9.1) に代入して静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ を求めよ．

(3) x 軸上の点 $\boldsymbol{P} = (x_0, 0, 0)$ $(x_0 > 0)$ に点電荷 q_0 があるときの静電ポテンシャルを求めよ．

(4) 前小問 (3) の系に，原点を通る yz 平面上に接地された導体板をおくと，導体板上に電荷が誘導され静電ポテンシャルが変化する．その静電ポテンシャルは，導体表面を鏡に見立てて電荷 $\boldsymbol{P}$ が作る像（鏡像）の位置に電荷 q' を置いた場合の静電ポテンシャルとして表すことができることが知られている．このようにしてポテンシャルを決定する方法を鏡像法と言う．鏡像の電荷 q' を適切に選べば導体板表面のいたるところで $\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ となることを示せ．また，そのときの電荷 q' はいくらか．

問題 9.2：鏡像法

右図のように，半平面 A $(x = 0, y > 0)$ と半平面 B $(x > 0, y = 0)$ に接地された導体があり，点 $P = (a, a, 0)$ に電荷 q がある場合の静電場を鏡像法で求めよう．



(1) 半平面 A, B に鏡を置いた場合，点 P の鏡像はいくつ，どの位置に現れるか．

(2) 導体がなく，代わりに鏡像の各点に電荷 q', q'', q''', ... がある場合の静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ を求めよ．また，導体表面で静電ポテンシャルが零になるように鏡像電荷を決定せよ．

(3) 電場 $E_x = -\partial_x \phi$，$E_y = -\partial_y \phi$ の半平面 A,B 上での値をそれぞれ求めよ．

（裏に続く）

(4) 導体表面上に誘導された電荷の面密度 $\omega_e = \varepsilon_0 E$ を積分すれば誘導電荷 Q が求まる．系の対称性より，半平面 A に誘導される電荷 Q_A と半平面 B に誘導される電荷量 Q_B は等しい（$Q_A = Q_B = Q/2$）ので，

$$Q = 2Q_A = 2\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \int_0^{\infty} \mathrm{d}y\, E_x(0, y, z) \tag{9.2}$$

この二重積分を実行し，誘導電荷 Q を求めよ．この静電誘導は完全誘導か，それとも不完全誘導か？

問題 9.3*：鏡像法

半径 a の導体球が接地されているとする．導体球の中心から d（$d > a$）だけ離れた点に電荷 q を置いたときの静電ポテンシャルを鏡像法を使って求めよう．

まず，導体球の中心を原点とし，電荷 q の位置を z 軸上の点 $Q = (0, 0, d)$ とする．球座標 (r, θ, φ) で考えると，系の対称性より φ 成分を考える必用がないので，求める静電ポテンシャルは $\phi(r, \theta)$ と書ける．

(1) 考えなければならない境界条件は $\phi(a, \theta) = 0$ である．この条件を満たすためには，どこに，どれだけの鏡像電荷を置けば良いか答えよ．

(2) 導体球表面の誘導電荷密度 $\omega(\theta) = -\epsilon_0 \left.\dfrac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=a}$ を求めよ．

(3) $\omega(\theta)$ を球表面全体で積分し，全誘導電荷を求めよ．また，この静電誘導が完全誘導か不完全誘導か答えよ．

以上