電磁気 カンニングシート

21B00817 鈴木泰雅,[1]

静電場 (誘電体を含む)

$Maxwell$ 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

ビオ・ザバールの法則

$$d\boldsymbol{B} = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{5}$$

アンペールの法則

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \sum \mu_0 I \tag{6}$$

磁界が電流に及ぼす力

単位長さあたり

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B} \tag{7}$$

が成立する．ただし，この式は二つの電流無限に長いときであり，有限の時は成立しない．

コンデンサー

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \tag{8}$$
$$C_{\text{並列}} = \sum_i C_i, \quad \frac{1}{C_{\text{直列}}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \tag{9}$$

誘電体中の電界

$$\boldsymbol{E}_{\text{全体}} = \boldsymbol{E}_{\text{作用している電場}} + \boldsymbol{E}'_{\text{誘導される電場}} \tag{10}$$
$$= \boldsymbol{E}_{\text{作用している電場}} - \frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_0}\Big|_{\text{球体のとき}} \tag{11}$$
$$= \boldsymbol{E}_{\text{作用している電場}} - \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\Big|_{\text{平面板のとき, 法線方向}} \tag{12}$$
$$= \boldsymbol{E}_{\text{作用している電場}} - \frac{\boldsymbol{P}}{2\epsilon_0}\Big|_{\text{棒のとき, 垂直方向}} \tag{13}$$

なお,

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}_{\text{全体}} = \epsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E}_{\text{全体}} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}_{\text{全体}} + \boldsymbol{P} \tag{14}$$

また，誘電体の表面にある面密度：

$$\sigma_P = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P} = P_n \tag{15}$$

内部にある体積密度：

$$\rho_P = -\nabla \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

磁性体中の磁界

誘電体と同様にして

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_{\text{全体}} &= \boldsymbol{H}_{\text{作用している磁場}} + \boldsymbol{H}'_{\text{誘導される磁場}} \quad (17) \\ &= \boldsymbol{H}_{\text{作用している磁場}} - \frac{N_\alpha \boldsymbol{M}}{\mu_0} \quad (18) \end{aligned}$$

といった形で誘導電場と同じように反磁場が働く．

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}_{\text{全体}} = \mu_0(1+\chi)\boldsymbol{H}_{\text{全体}} = \mu_0 \boldsymbol{H}_{\text{全体}} + \boldsymbol{M} \tag{19}$$

なお，反磁性体と常磁性体の大きな違いは μ, μ_0 の大きさの違いであり，法則自体には違いは全くない．ただし，自発磁化 M_0 などが働く場合は

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}_{\text{全体}} + \boldsymbol{M}_0 \tag{20}$$

になるため上記の公式は使えない．特に自発磁化がない反磁性体などに有効な公式である．

一般の磁化電流

磁性体の内部の空間に分布している磁化電流は

$$\boldsymbol{i}_M = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{21}$$

磁性体の表面に流れる磁化電流は

$$\boldsymbol{j}_M = \frac{-1}{\mu_0} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M} \tag{22}$$

ポテンシャル

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi \tag{23}$$

$Maxwell$ の応力

$$T = \begin{bmatrix} E_x D_x - \frac{1}{2}\boldsymbol{ED} & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \frac{1}{2}\boldsymbol{ED} & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \frac{1}{2}\boldsymbol{ED} \end{bmatrix} \tag{24}$$

となる．

電磁波

空間上の電磁波

平面電磁波の関係：

$$\frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}, \quad \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{25}$$

となり、エネルギーは電波と磁場に半分づつ分かれている。

エネルギーの流れ

ポンティングベクトルは以下で定義される：

$$S = E \times H \tag{26}$$

ただし注意として

$$S = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{Re} \boldsymbol{E} \times \operatorname{Re} \boldsymbol{B} \tag{27}$$

である。運動量の流れは

$$\frac{1}{c^2} \langle S \rangle \tag{28}$$

導体中の電磁波

この時は σ, μ

$$\boldsymbol{E} = \sigma \boldsymbol{J} \tag{29}$$

を使って次の電信方程式を立てられる：

$$\frac{\partial E_x}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{30}$$

完全導体では $\sigma = \infty$ の導体のことであり、超伝導体に似ているが、超伝導体はこれ以外にも様々な性質を持っている。

$Maxwell$ 方程式から得られるもの

Maxwell 方程式から

$$-\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} \times \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}^2 + \epsilon \boldsymbol{E}^2 \right) \right] \tag{31}$$

が得られる。