（令和 4 年 8 月 17 日実施）

令和 5 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：**問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 観測天文学，理論宇宙物理学，素粒子・宇宙論，原子核理論，情報メディア科学，原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 惑星宇宙グループ, 宇宙物質科学グループ，相転移ダイナミクス，飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚 (A4)
	問題 IV	2 枚 (A4)
	問題 V	1 枚 (A4)
	問題 VI	1 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4)（各問題 3 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 質量 m の粒子の 1 次元調和振動子ポテンシャル中の運動は、ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2$$

に従う。ただし、位置演算子と運動量演算子を $\hat{x},\ \hat{p}$ で表し、その交換関係は $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ で与えられる。

1-1. 演算子 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

で定義するとき、ハミルトニアンを $\hat{x}, \hat{p}$ の代わりに $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。

1-2. この系には最低エネルギー状態が存在することを示し、その状態が満たす条件を答えよ。

以下では、上の系のエネルギー固有値が $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ となることを用いてよい。次に、質量 m の二つの粒子がハミルトニアン $\hat{H}$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\hat{x}_2 - \hat{x}_1 - l)^2$$

に従い、直線上を運動する場合を考える。ただし、二つの粒子の位置演算子と運動量演算子を $\hat{x}_i, \hat{p}_i\ (i = 1, 2)$ で表す。

$\rightarrow [P, H] = 0$

1-3. この系において全運動量 $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$ が保存することを示せ。

1-4. この系で全運動量の固有値が P の状態が取りうるエネルギー固有値を求めよ。

1-5. この系にポテンシャルが加えられ、ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\hat{x}_2 - \hat{x}_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k'\hat{x}_1^2$$

で与えられる場合を考える。この系が取りうるエネルギー固有値を求めよ。

$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2}) - k\hat{x}_2\hat{x}_1 + kl\hat{x}_1 - kl\hat{x}_2 + \frac{1}{2}kl^2$

$\cancel{\frac{P^2}{2m} + \hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$ $\frac{\hat{P}_S^2}{4m} + \frac{\hat{P}_A^2}{4m} + \frac{1}{2}k\hat{x}_A^2$

$\Downarrow$

$\hbar\omega(n_A + \frac{1}{2})$

$4m$

問 2 ハミルトニアン $\hat{H}_0$ の固有値 E_i $(i = 1, \cdots)$ のうち、 E_m に対する固有状態は M 重に縮退しており、正規直交な固有状態を $|\psi_{ma}\rangle$ $(a = 1, \cdots, M)$ とする。

$$\hat{H}_0|\psi_{ma}\rangle = E_m|\psi_{ma}\rangle, \quad \langle\psi_{ma}|\psi_{mb}\rangle = \delta_{ab} \ (a, b = 1, \cdots, M)$$

このとき、摂動が加えられたハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}'$$

に対し、E_m から補正を受けた固有値を E'_{ma} とする。但し、摂動により λ の 1 次で縮退は完全に解けるとする。

2-1. 縮退がないとき（$M = 1$)、摂動の 1 次で（λ の 1 次までの量として）E'_{ma} （$a = 1$）を求めよ。

2-2. $M \neq 1$ のとき、摂動の 1 次で E'_{ma} を決定する方程式を導け。

次に、クーロンポテンシャルを受ける粒子を考える。このとき、エネルギーが縮退した $2s$ 軌道と $2p$ 軌道の状態を球座標で表した波動関数は、動径波動関数と球面調和関数の積として

$$\psi_{2lm}(r, \theta, \phi) = R_{2l}(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad l = 0, 1, \quad m = -l, \cdots, l$$

と表される。但し、実関数 $R_{2l}(r)$ は

$$\int_0^\infty (R_{2l}(r))r^2 dr = 1$$

で規格化されており、s 軌道と p 軌道の球面調和関数は

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \ Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}, \ Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \ Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$$

で与えられる。

2-3. クーロンポテンシャルに $\lambda\hat{H}' = \lambda f(r)\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$ の摂動が加えられたとき（$f(r)$ は原点で正則で、遠方で十分に早く 0 になる関数とする)、λ の 1 次では $2s$ 軌道と $2p$ 軌道の縮退は解けないことを示せ。但し、具体的に計算をすることなく証明をしてもよい。

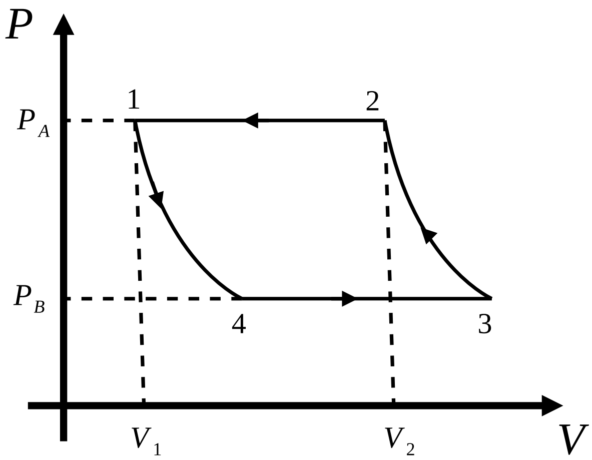
2-4. クーロンポテンシャルに $\lambda\hat{H}' = \lambda\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$ の摂動が加えられたとき、$2s$ 軌道と $2p$ 軌道の状態のエネルギー固有値の補正（変化）を λ の 1 次まで求め、対応する固有関数（λ の 0 次まで）と共に答えよ。但し、$\hat{\boldsymbol{L}}$ は角運動量演算子で

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y = \hbar e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

と表される。また、$\boldsymbol{B}$ は定数 B, θ_0, ϕ_0 を用いて $\boldsymbol{B} = B\ (\sin\theta_0\cos\phi_0, \sin\theta_0\sin\phi_0, \cos\theta_0)$ と表されるとする。

問題 IV

問 1 圧力 P、体積 V、内部エネルギー U のあいだに $PV = \dfrac{1}{3}U$ の関係を持つ作業物質を用いて図のようなヒートポンプを考える。ここで $2 \to 1$ は圧力 P_{A} で体積を V_2 から V_1 $(< V_2)$ に圧縮する準静的定圧過程、$1 \to 4$ は圧力を P_{A} から P_{B} $(< P_{\mathrm{A}})$ に変える準静的断熱過程、$4 \to 3$ は圧力 P_{B} の準静的定圧膨張過程、$3 \to 2$ は準静的断熱圧縮過程である。



1-1. 過程 $2 \to 1$ で作業物質から流出した熱 Q_{A} を求めよ。

1-2. 過程 $3 \to 2$ 上で P と V が満たす関係式を $PV^{\gamma} = P_{\mathrm{A}}V_2^{\gamma}$ の形に書くとき、γ を求めよ。

1-3. 過程 $4 \to 3$ で作業物質に流入した熱を Q_{B} とし、1サイクルで外部から作業物質にされた仕事を W とするとき、このヒートポンプの冷却性能指数は $\epsilon_{\mathrm{c}} = \dfrac{Q_{\mathrm{B}}}{W}$ で表される。ϵ_{c} を $P_{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{B}}$ で表せ。

1-4. 一般の熱力学系において、内部エネルギー U、エントロピー S、体積 V、温度 T、圧力 P とその微小変化量 dU, dS, dV の間に成立する基本関係式

$$dU = TdS - PdV$$

と dU, dS が完全微分であることから成立する

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

を用いて、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

となることを示せ。

1-5. P, V, U の間に $PV = \dfrac{1}{3}U$, $U = Vu(T)$（$u(T)$ は単位体積当りの内部エネルギーで温度 T だけの関数と仮定する。）の関係が成立するとき、**1-4.** の結果を使って、$P \propto T^4$ となることを示せ。

1-6. **1-5.** の作業物質を使うと、上図のヒートポンプにおける定圧過程は等温過程となり、カルノー逆サイクルと解釈できる。**1-3.** で求めた冷却性能指数 $\epsilon_{\rm c}$ を、圧力 $P_{\rm A}$ での温度 $T_{\rm A}$、圧力 $P_{\rm B}$ での温度 $T_{\rm B}$ を用いて表せ。

問 2 i 番目の粒子の位置を $\boldsymbol{r}_i$、運動量を $\boldsymbol{p}_i$ として、ハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2m} + \Phi(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$$

で記述される質量 m の粒子 N $(\gg 1)$ 個からなる古典的な系が、温度 T の熱浴と平衡状態にある。ここで、Φ は粒子間の相互作用ポテンシャルを表している。以下ではボルツマン定数は $k_{\rm B}$ とし、計算に必要なら、積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

を用いてよい。

2-1. この系の１粒子の速度 $\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ の確率密度分布 $f(\boldsymbol{v})$ が

$$f(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2}$$

と表されることを示せ。ただし、$\beta = 1/(k_{\rm B}T)$ である。

2-2. １粒子の速さ v $(\equiv |\boldsymbol{v}|)$ の確率密度分布 $F(v)$ を求め、速さ v の平均値を計算せよ。

次に、質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体が体積 V の立方体容器中にあり、温度 T の熱浴と平衡状態にあるとすると、粒子の速度分布は上の $f(\boldsymbol{v})$ に従う。時刻 $t=0$ で x 軸正方向に垂直な容器壁に断面積 S の小さな穴を開けたところ、気体分子は容器外に漏れ始めた。ただし、容器中の気体が常に温度 T の平衡状態と近似できる程度に穴は小さいものとし、容器外は真空で外に飛び出た分子が容器内に戻ることはないとする。

2-3. このとき、時刻 t での容器中の分子数 $N(t)$ が従う微分方程式を求めよ。また、それを解いて、時刻 $t=0$ に容器中に N_0 個の分子があったとするときの $N(t)$ を求めよ。

2-4. 穴から飛び出る気体分子の x 方向の速度 v_x (>0) の確率密度分布 $\tilde{f}(v_x)$ を求めよ。