

# 東大物理工学科 2014

21B00817 鈴木泰雅,<sup>1</sup>

## 第一問

[1]

$$\int r^2 \rho dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} \int_{-a}^a \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} ((a^2 - x^2) dx) d\theta dz \quad (1)$$

$$= \frac{2}{5} ma^2 \quad (2)$$

となる.

[2]

滑らないという条件から,

$$v' = -a\omega' \quad (3)$$

となる.

[3]

線形運動量と角運動量の保存より

$$mv' - o = P, \quad aP = \frac{2}{5} ma^2 (\omega' - \omega) \quad (4)$$

であり, これを解いて

$$\omega' = \frac{2}{7} \omega \quad (5)$$

[4]

線形運動量と角運動量の保存より

$$P_n = mv_n - mv_{n-1}, \quad P_n a = \frac{2}{5} ma^2 (\omega_n - \omega_{n-1}) \quad (6)$$

である. よって,

$$I(\omega_n - \omega_{n-1}) - a(mv_n - mv_{n-1}) = 0, \quad \therefore (I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) \quad (7)$$

よって,

$$(I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) = \cdots (I\omega_0 - amv_0) = \text{Const} \quad (8)$$

より,

$$l = I\omega_n - amv_n = \text{Const} \quad (9)$$

[5]

反発が終わった直後では,

$$\omega_f = \frac{v_f}{a} \quad (10)$$

の関係が成立するため,

$$l = I \frac{v_f}{a} - mav_f, \quad \therefore v_f = \frac{5l}{3ma} \quad (11)$$

である.

また,  $v_f = 0$  のとき,  $l = 0$  であるため,

$$I\omega_0 - mav_0 = 0, \quad \therefore \frac{2}{5}ma\omega_0 = mv_0 \quad (12)$$

## 第二問

[1]

電場の大きさはガウスの法則より

$$E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad (13)$$

である。また、電位は

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \phi(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \log \frac{r}{r_0} \quad (14)$$

[2]

上記の表式から見て分かるように、ポテンシャルは、線素からの距離  $r$  のみしか依存しない。また、重ね合わせの原理から

$$\phi = \phi_\lambda + \phi_{-\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left( - \log \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}{r_0} + \log \frac{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}}{r_0} \right) \quad (15)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \log \left( \frac{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta} \right) \quad (16)$$

[3]

必要条件であるため、代入して一定になることを確かめるだけでは十分ではない。逆を示す必要がある。 $\phi$  が  $r = R$  で  $\theta$  の依存性がない時、

$$D^2 + R^2 - 2DR \cos \theta = C(d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta), \quad \therefore d^2 [C^2 + C(-1 - (R/d)^2) + (R/d)^2] + 2R \cos \theta (Cd - D) = 0$$

であり。これが恒等的に成立するための条件は

$$C = \frac{D}{d}, C = (R/d)^2, 1 \quad \therefore D = \frac{R^2}{d}, d \quad (17)$$

であり、 $D \neq d$  であるため、

$$D = \frac{R^2}{d} \quad (18)$$

となる。

[4]

これをもとに計算すると

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi} \left( -\frac{2}{R} \right) \frac{1 - (d/R)^2}{1 - 2(d/R) \cos \theta + (d/R)^2} \quad (19)$$

である。

[5]

球面上で積分すると

$$\int \sigma(\theta) dS = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta) R d\theta = \frac{\lambda}{4\pi} \left( -\frac{2}{R} \right) R \int_{-\pi}^{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (d/R)^n \cos(n\theta) \right] d\theta \quad (20)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi} (-2/R) R 2\pi = -\lambda \quad (21)$$

よって示せた。

[6]

$\sigma_2$  の位置は  $\theta = \pi/2 - \psi$  であり, まとめると

$$\sigma_1 : \theta = -\psi \quad (22)$$

$$\sigma_2 : \theta = \pi/2 - \psi \quad (23)$$

$$\sigma_3 : \theta = \pi - \psi \quad (24)$$

$$\sigma_4 : \theta = 3\pi/2 - \psi \quad (25)$$

であり,  $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$  であり,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + 2(d/R) \cos \psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R) \cos \psi + (d/R)^2} \sim \frac{1 + 2(d/R) \cos \psi}{1 - 2(d/R) \cos \psi}, \quad \therefore d \cos \psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \frac{1}{2} R \quad (26)$$

となる. また, 同様にして

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \frac{1 + 2(d/R) \sin \psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R) \sin \psi + (d/R)^2} \quad \therefore d \sin \psi = \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4} \frac{1}{2} R \quad (27)$$

よって,

$$(x_0, y_0) = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \frac{1}{2} R, \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4} \frac{1}{2} R \right) \quad (28)$$

### 第三問

[1]

$$\psi_S : -J, \quad \psi_A : J \quad (29)$$

である。(後の問題と辻褄を合わせるため、理由は分からない。)

[2]

波動関数は実関数であるため、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x) \psi_R(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_S^* + \psi_A^*) (\psi_S - \psi_A) dx \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_S^2 - \psi_A^2 + \psi_A \psi_S - \psi_S \psi_A) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_S^2 - \psi_A^2) dx \quad (31)$$

ここでグラフより

$$\psi_S^2 - \psi_A^2 = 0 \quad (32)$$

より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x) \psi_R(x) dx = 0 \quad (33)$$

であるため直交している。

また、

$$H\psi_L(x) = -J\psi_R(x), \quad H\psi_R(x) = -J\psi_L(x) \quad (34)$$

であり、

$$|\psi_L\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\psi_R\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

とすると、

$$H = -J \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -J\sigma_x \quad (36)$$

[3]

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{-J\sigma_x}{\hbar}t\right) |\psi_L\rangle = (\cos(-Jt/\hbar)\sigma_I - i\sin(-Jt/\hbar)\sigma_X) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-Jt/\hbar) & -i\sin(-Jt/\hbar) \\ -i\sin(-Jt/\hbar) & \cos(-Jt/\hbar) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-Jt/\hbar) \\ -i\sin(-Jt/\hbar) \end{bmatrix} \quad (39)$$

となり、確率は

$$|\langle\psi_R|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(-Jt/\hbar) \quad (40)$$

[4.1]

それぞれの粒子を合成して、まず、二つの粒子が左にいる場合は

$$|0\rangle = |\psi_L\rangle|\psi_L\rangle \quad (41)$$

と表記する．ここで、ハミルトニアンは粒子 1 と粒子 2 それぞれに対する作用の和で書けるため、

$$H = H_1 + H_2 \quad (42)$$

となる．よって、

$$H|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle = (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_L\rangle) = -J(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \quad (43)$$

である．ここで、ボーズ粒子を考えているため

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \quad (44)$$

より、

$$H|0\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \quad (45)$$

であり、

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(H_1|\psi_R\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle(H_2|\psi_L\rangle) + (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_R\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_R\rangle)] \quad (46)$$

$$= -J\frac{1}{\sqrt{2}} [2|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle + 2|\psi_R\rangle|\psi_R\rangle] = -\sqrt{2}J|1\rangle - \sqrt{2}J|2\rangle \quad (47)$$

となり、同様にして

$$H|2\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \quad (48)$$

となる．よって、

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

とするとたしかに与えられた行列を得る．

[4.2]

この固有値を求めれば良い．よって、

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & \sqrt{2}J & 0 \\ \sqrt{2}J & \lambda & \sqrt{2}J \\ 0 & \sqrt{2}J & \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (50)$$

より、 $0, \pm 2J$  となる．

[4.3]

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|0\rangle = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iHt/\hbar)^n \right) |0\rangle \quad (51)$$

$$= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-iHt/\hbar)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-iHt/\hbar)^{2n+1} \right) |0\rangle \quad (52)$$

であり,

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

とする. ここで,

$$A^{2n+1} = 2^n A, \quad A^{2n} = AA^{2n-1} = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1}B \quad (54)$$

であることを利用して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-iHt/\hbar)^{2n} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n (-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n} 2^{n-1} B \quad (55)$$

$$= I + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n (-2Jt/\hbar)^{2n} B \quad (56)$$

$$= I + \frac{1}{2} (\cos(-2Jt/\hbar) - 1) B \quad (57)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-iHt/\hbar)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!} (-1)^n (-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n+1} 2^n A \quad (58)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!} (-1)^n (-2Jt/\hbar)^{2n+1} A \quad (59)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin(-2Jt/\hbar) A \quad (60)$$

となるため

$$|\psi(t)\rangle = \left[ I + \frac{1}{2} (\cos(2Jt/\hbar) - 1) B + \frac{i}{\sqrt{2}} \sin(2Jt/\hbar) A \right] |0\rangle \quad (61)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) + 1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) - 1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \cos(2Jt/\hbar) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) - 1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) + 1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) - 1) \end{bmatrix} \quad (62)$$

となる. よって, 確率は

$$P_0(t) = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4(Jt/\hbar) \quad (63)$$

$$P_1(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(2Jt/\hbar) \quad (64)$$

$$P_2(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^4(Jt/\hbar) \quad (65)$$

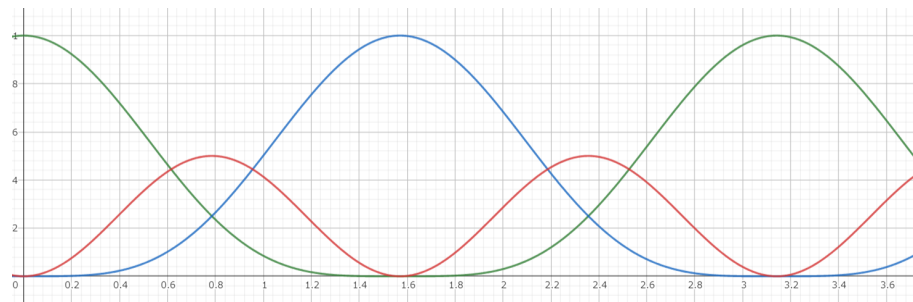


Fig.1. それぞれの様子. 緑が  $P_0(t)$ , 青が  $P_2(t)$ , 緑が  $P_1(t)$

[5.1]

$$H|0\rangle = -A|0\rangle, H|2\rangle = -A|2\rangle \quad (66)$$

となるようにすればよい.

$$H = \begin{bmatrix} -A & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & -A \end{bmatrix} \quad (67)$$

となる.

[5.2]

固有エネルギーは

$$-A, \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2} \quad (68)$$

であり,

$$\sqrt{A^2 + 16J^2} = A \sqrt{1 + 16 \left( \frac{J}{A} \right)^2} \approx A \left( 1 + 8 \left( \frac{J}{A} \right)^2 \cdots \right) \quad (69)$$

$$= A + 8 \frac{J^2}{A} \quad (70)$$

であるため,

$$-A, \frac{1}{2} \left( A \pm \left( A + 8 \frac{J^2}{A} \right) \right) \quad (71)$$

[5.3]

[6]



## 第四問

[1]

$N$  個の粒子からなるハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(r) \right\}, \quad U(r) = \begin{cases} 0 & \text{容器内} \\ \infty & \text{容器の外 } (r > L) \end{cases} \quad (72)$$

よって全体の分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \left[ \int \int \int \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) dp_x dp_y dp_z \right]^N \left[ \int \int \int \exp(-\beta U(r)) dx dy dz \right]^N \quad (73)$$

$$= \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \quad (74)$$

[2]

内部エネルギーは

$$U = F + TS, \quad F = -k_B T \ln Z, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (75)$$

であるため,

$$F = -k_B T \log \left[ \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \right] \quad (76)$$

$$S = k_B \log \left[ \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \right] + \frac{3N}{2} k_B \quad (77)$$

$$U = \frac{3N}{2} k_B T \quad (78)$$

[3]

$$P = k_B T N \frac{1}{V} \quad (79)$$

[4]

分配関数は

$$Z = \exp\left(\beta\alpha \frac{N}{V}\right) \frac{1}{N!} \frac{(2mk_B T)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^N} (V - Nb)^N \quad (80)$$

よって, 圧力  $P$  は

$$P = \alpha \frac{N}{V^2} + k_B T \frac{N}{V - Nb} \quad (81)$$

であり, 状態方程式は

$$\left( P + \alpha \frac{N}{V^2} \right) (V - Nb) = N k_B T \quad (82)$$

[5]

安定な点は最小値を与えている箇所. そして, 不安定点は極大値の箇所である. というのも極値で状態方程式は成立するが, 熱平衡状態は最小値だからである.

[6]

$$dG = -SdT + Vdp \quad (83)$$

であるため,

$$\Delta G = V\Delta p \quad (84)$$

であるため,  $p$  の増減に従って  $G$  も増減する.

## 第五問

[1]

位相速度は

$$v = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (85)$$

で与えられるため

$$v = \frac{\omega}{k_1 + ik_2} = \frac{\omega k_1}{k_1^2 + k_2^2} - i \frac{\omega k_2}{k_1^2 + k_2^2} \quad (86)$$

となる.

[2]

$$\tilde{k} = k_1 + ik_2 \quad (87)$$

を代入すると

$$\boldsymbol{E}(z, t) = \text{Re} [\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp \{i((k_1 + ik_2)z - \omega t)\}] = \text{Re} [\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp(-k_2 z) \exp \{i(k_1 z - \omega t)\}] \quad (88)$$

であるため,

$$\frac{1}{e} = \exp(-k_2 z) \quad (89)$$

となるような  $z$  を求めれば良い. よって,

$$z = \frac{1}{k_2} \quad (90)$$

[3]

代入すると

$$\tilde{k}^2 = \epsilon\mu\omega^2 + \mu\sigma\omega i \quad (91)$$

であり,

$$\tilde{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 + i(2k_1 k_2) \quad (92)$$

であるため, これらより二次方程式を解いて

$$k_1 = \left[ \frac{\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2} \right]^{1/2}, \quad k_2 = \left[ \frac{-\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (93)$$

よって整理すると

$$k_1 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{1/2}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (94)$$

となる.

[4]

$d = 1/k_2$  であるため,

$$d = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{-1/2} \quad (95)$$

となる. ここで,  $\sigma \gg \epsilon\omega$  のとき,

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[ -1 + \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right]^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \quad (96)$$

であり,  $\sigma \ll \epsilon\omega$  のとき,

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \sqrt{2} \frac{\epsilon\omega}{\sigma} = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu\sigma^2}} \quad (97)$$

[5]