2022 年 4 月 19 日配布

# 電磁気学　演習第 5 回 — マクスウェル方程式

電磁場に関する基礎法則をまとめたものが**マクスウェル方程式** (Maxwell's equations) である．

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{x}, t)}{\epsilon_0} \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = 0 \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) \tag{5.4}$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ は電場の強さ，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ は磁束密度[3]，$\epsilon_0$ は真空の誘電率，$\mu_0$ は真空の透磁率であり，$\rho(\boldsymbol{x}, t)$ は電荷密度，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ は電流密度である．また，電磁場中の電荷に働くローレンツ力 (Lorentz force) は次の式で与えられる．

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{5.5}$$

## 問題 5.1：マクスウェル方程式

(1) マクスウェル方程式から，電流について次の連続の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{5.6}$$

(2) マクスウェル方程式から，磁場の発散が時間によらない定数であることを導け．

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)\Big) = 0 \tag{5.7}$$

(3) 空間座標を反転する操作 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$ に対して電場と磁場は次のように変換される．

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}', t) = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t), \qquad \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}', t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \tag{5.8}$$

$\boldsymbol{E}$ のように符号が反転するベクトルを極性ベクトル (polar vector)，$\boldsymbol{B}$ のように符号が反転しないベクトルを軸性ベクトル (axial vector)，あるいは擬ベクトル (pseudo vector) という．空間反転操作に対してマクスウェル方程式が不変であること，すなわち，変換後の電磁場 $\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{B}'$ がマクスウェル方程式をすべて満たすことを確認せよ．

(4) 時間反転操作 $t \to t' = -t$，$\boldsymbol{r}'(t') = \boldsymbol{r}(-t)$ に対してもマクスゥエル方程式は不変である．この性質を満たすために，電磁場電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ は時間反転に対してどのように変換されるべきか．

## 問題 5.2：静電ポテンシャル

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ であるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を**保存力場** (conservative force field) と言う．

[3] 慣習として $\boldsymbol{B}$ を「磁場」と呼ぶことも多い．ただし，単に磁場というと磁場の強さ $\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{B}$ のことを指す場合もあるので注意が必要（$\mu$ は透磁率）．本演習では混乱を避けるため，とくに必要がない限り $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を用いて議論し，$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu$ は補助的にのみ使用する．

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を任意の二点 $\boldsymbol{P}$ から $\boldsymbol{Q}$ まで経路 $C$ に沿って積分した値が，経路 $C$ の選び方によらず一定であることを示せ．

(2) スカラー場 $f(\boldsymbol{x}) = -\int^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ を定義する．ここで，右辺は任意の基準点から $\boldsymbol{x}$ までの線積分である（前小問の結果より経路には依らない）．このスカラー場の勾配が $\boldsymbol{A}$ であることを示せ．

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{5.9}$$

(3) 電磁場が時間依存しない場合，電場は保存力場で $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})$ と書ける．この $\phi(\boldsymbol{x})$ を**静電ポテンシャル** (electrostatic potentail)，または**電位**と呼ぶ．$\phi(\boldsymbol{x})$ が次のポアソン方程式 (Poissson's eqution) を満たすことを示せ．

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}) \tag{5.10}$$

(5) 次の静電ポテンシャルがポアソン方程式 (5.10) の解であることを確認せよ．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}x'^3 \tag{5.11}$$

## 問題 5.3*：電磁ポテンシャルとゲージ自由度

時間で変動する電磁場は，スカラーポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて次のように書ける．$\phi$ と $\boldsymbol{A}$ をあわせて**電磁ポテンシャル** (electromagnetic potentials) という．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x},t) - \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \tag{5.12}$$

(1) マクスウェル方程式から電磁ポテンシャルが満たすべき方程式を導け．

(2) 任意のスカラー場 $\chi$ を用いて，ベクトルポテンシャルを次のように変換する．

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\nabla}\chi(\boldsymbol{x},t) \tag{5.13}$$

このとき，電磁ポテンシャルがマクスウェル方程式を満たすためにはスカラーポテンシャル $\phi$ をどのように変換すればよいか示せ．

(3) 次の条件をローレンツ条件 (Lorenz gauge condition) という[4] この条件が成り立つために $\chi$ が満たすべき方程式を導け．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\,\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial\,t} = 0 \tag{5.14}$$

(4) ローレンツ条件が成り立つとき，$\phi$ と $\boldsymbol{A}$ は連立方程式ではなく，それぞれ独立した方程式を満たすことを確認せよ．

**以上**

[4] デンマーク人の Ludvig Lorenz (1829 – 1891) が導いたもの．ローレンツ力や相対論のローレンツ変換は同時代のオランダ人 Hendrik Lorentz (1851 – 1928) に因むので，英語で表記するときはスペルが若干異なる．