

東大物理工学科 2014

21B00817 鈴木泰雅,¹

第一問

[1]

$$\int r^2 \rho dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} \int_{-a}^a \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} ((a^2 - x^2) dx) d\theta dz \quad (1)$$

$$= \frac{2}{5} ma^2 \quad (2)$$

となる.

[2]

滑らないという条件から,

$$v' = -a\omega' \quad (3)$$

となる.

[3]

線形運動量と角運動量の保存より

$$mv' - o = P, \quad aP = \frac{2}{5} ma^2 (\omega' - \omega) \quad (4)$$

であり, これを解いて

$$\omega' = \frac{2}{7} \omega \quad (5)$$

[4]

線形運動量と角運動量の保存より

$$P_n = mv_n - mv_{n-1}, \quad P_n a = \frac{2}{5} ma^2 (\omega_n - \omega_{n-1}) \quad (6)$$

である. よって,

$$I(\omega_n - \omega_{n-1}) - a(mv_n - mv_{n-1}) = 0, \quad \therefore (I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) \quad (7)$$

よって,

$$(I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) = \cdots (I\omega_0 - amv_0) = \text{Const} \quad (8)$$

より,

$$l = I\omega_n - amv_n = \text{Const} \quad (9)$$

[5]

反発が終わった直後では,

$$\omega_f = -\frac{v_f}{a} \quad (10)$$

の関係が成立するため,

$$l = -I\frac{v_f}{a} - mav_f, \quad \therefore v_f = -\frac{5l}{7ma} \quad (11)$$

である.

また, $v_f = 0$ のとき, $l = 0$ であるため,

$$I\omega_0 - mav_0 = 0, \quad \therefore \frac{2}{5}ma\omega_0 = mv_0 \quad (12)$$

第二問

[1]

電場の大きさはガウスの法則より

$$E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad (13)$$

である。また、電位は

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \phi(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \log \frac{r}{r_0} \quad (14)$$

[2]

上記の表式から見て分かるように、ポテンシャルは、線素からの距離 r のみしか依存しない。また、重ね合わせの原理から

$$\phi = \phi_\lambda + \phi_{-\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left(- \log \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}{r_0} + \log \frac{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}}{r_0} \right) \quad (15)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \log \left(\frac{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta} \right) \quad (16)$$

[3]

必要条件であるため、代入して一定になることを確かめるだけでは十分ではない。逆を示す必要がある。 ϕ が $r = R$ で θ の依存性がない時、

$$D^2 + R^2 - 2DR \cos \theta = C(d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta), \quad \therefore d^2 [C^2 + C(-1 - (R/d)^2) + (R/d)^2] + 2R \cos \theta (Cd - D) = 0$$

であり。これが恒等的に成立するための条件は

$$C = \frac{D}{d}, C = (R/d)^2, 1 \quad \therefore D = \frac{R^2}{d}, d \quad (17)$$

であり、 $D \neq d$ であるため、

$$D = \frac{R^2}{d} \quad (18)$$

となる。

[4]

これをもとに計算すると

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi} \left(-\frac{2}{R} \right) \frac{1 - (d/R)^2}{1 - 2(d/R) \cos \theta + (d/R)^2} \quad (19)$$

である。

[5]

球面上で積分すると

$$\int \sigma(\theta) dS = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta) R d\theta = \frac{\lambda}{4\pi} \left(-\frac{2}{R} \right) R \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (d/R)^n \cos(n\theta) \right] d\theta \quad (20)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi} (-2/R) R 2\pi = -\lambda \quad (21)$$

よって示せた。

[6]

σ_2 の位置は $\theta = \pi/2 - \psi$ であり, まとめると

$$\sigma_1 : \theta = -\psi \quad (22)$$

$$\sigma_2 : \theta = \pi/2 - \psi \quad (23)$$

$$\sigma_3 : \theta = \pi - \psi \quad (24)$$

$$\sigma_4 : \theta = 3\pi/2 - \psi \quad (25)$$

であり, $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ であり,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + 2(d/R) \cos \psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R) \cos \psi + (d/R)^2} \sim \frac{1 + 2(d/R) \cos \psi}{1 - 2(d/R) \cos \psi}, \quad \therefore d \cos \psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \frac{1}{2} R \quad (26)$$

となる. また, 同様にして

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \frac{1 + 2(d/R) \sin \psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R) \sin \psi + (d/R)^2} \quad \therefore d \sin \psi = \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4} \frac{1}{2} R \quad (27)$$

よって,

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \frac{1}{2} R, \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4} \frac{1}{2} R \right) \quad (28)$$

第三問

[1]

$$\psi_S : -J, \quad \psi_A : J \quad (29)$$

である．なお，結合性軌道は対称になり，反結合軌道は反対称になりがちである．

[2]

波動関数は実関数であるため，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x) \psi_R(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_S^* + \psi_A^*) (\psi_S - \psi_A) dx \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_S|^2 - |\psi_A|^2 + \psi_A^* \psi_S - \psi_S \psi_A^*) dx \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_S|^2 - |\psi_A|^2) dx \quad (32)$$

ここで規格化条件とそれぞれの ψ_A, ψ_S は直交しているため

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x) \psi_R(x) dx = 0 \quad (33)$$

であるため直交している．

また，

$$H\psi_L(x) = -J\psi_R(x), \quad H\psi_R(x) = -J\psi_L(x) \quad (34)$$

であり，

$$|\psi_L\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\psi_R\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

とすると，

$$H = -J \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -J\sigma_x \quad (36)$$

[3]

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{-J\sigma_x}{\hbar}t\right) |\psi_L\rangle = (\cos(-Jt/\hbar)\sigma_I - i\sin(-Jt/\hbar)\sigma_X) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-Jt/\hbar) & -i\sin(-Jt/\hbar) \\ -i\sin(-Jt/\hbar) & \cos(-Jt/\hbar) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-Jt/\hbar) \\ -i\sin(-Jt/\hbar) \end{bmatrix} \quad (39)$$

となり，確率は

$$|\langle\psi_R|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(-Jt/\hbar) \quad (40)$$

[4.1]

それぞれの粒子を合成して、まず、二つの粒子が左にいる場合は

$$|0\rangle = |\psi_L\rangle|\psi_L\rangle \quad (41)$$

と表記する．ここで、ハミルトニアンは粒子 1 と粒子 2 それぞれに対する作用の和で書けるため、

$$H = H_1 + H_2 \quad (42)$$

となる．よって、

$$H|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle = (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_L\rangle) = -J(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \quad (43)$$

である．ここで、ボーズ粒子を考えているため

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \quad (44)$$

より、

$$H|0\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \quad (45)$$

であり、

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(H_1|\psi_R\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle(H_2|\psi_L\rangle) + (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_R\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_R\rangle)] \quad (46)$$

$$= -J\frac{1}{\sqrt{2}} [2|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle + 2|\psi_R\rangle|\psi_R\rangle] = -\sqrt{2}J|1\rangle - \sqrt{2}J|2\rangle \quad (47)$$

となり、同様にして

$$H|2\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \quad (48)$$

となる．よって、

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

とするとたしかに与えられた行列を得る．

[4.2]

この固有値を求めれば良い．よって、

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & \sqrt{2}J & 0 \\ \sqrt{2}J & \lambda & \sqrt{2}J \\ 0 & \sqrt{2}J & \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (50)$$

より、 $0, \pm 2J$ となる．

[4.3]

解答例 0

まず、それぞれの固有値と固有ベクトルは

$$E_0 = 0 : \quad |u_0\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$E_1 = -2J : \quad |u_1\rangle = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$E_2 = 2J : \quad |u_2\rangle = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

であり、固有ベクトルは完全系であるため $|\psi(t)\rangle$ は

$$|\psi(t)\rangle = c_0 \exp(-iE_0 t/\hbar) |u_0\rangle + c_1 \exp(-iE_1 t/\hbar) |u_1\rangle + c_2 \exp(-iE_2 t/\hbar) |u_2\rangle \quad (54)$$

であり、初期条件より

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle \quad (55)$$

であるため、

$$|0\rangle = c_0 |u_0\rangle + c_1 |u_1\rangle + c_2 |u_2\rangle \quad (56)$$

であり、これを解いて

$$c_0 = 1/\sqrt{2}, \quad c_1 = 1/2, \quad c_2 = -1/2 \quad (57)$$

となるため、

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_0\rangle + \frac{1}{2} \exp\left(-i(-2J)\frac{t}{\hbar}\right) |u_1\rangle - \frac{1}{2} \exp\left(-i(2J)\frac{t}{\hbar}\right) |u_2\rangle \quad (58)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) + 1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) - 1) \end{bmatrix} \quad (59)$$

であるため、それぞれ確率は

$$P_0(t) = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4(Jt/\hbar) \quad (60)$$

$$P_1(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(2Jt/\hbar) \quad (61)$$

$$P_2(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^4(Jt/\hbar) \quad (62)$$

となる。

解答例 1

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar) |0\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iHt/\hbar)^n \right) |0\rangle \quad (63)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-iHt/\hbar)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-iHt/\hbar)^{2n+1} \right) |0\rangle \quad (64)$$

であり,

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

とする. ここで,

$$A^{2n+1} = 2^n A, \quad A^{2n} = AA^{2n-1} = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1}B \quad (66)$$

であることを利用して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-iHt/\hbar)^{2n} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n (-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n} 2^{n-1} B \quad (67)$$

$$= I + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n (-2Jt/\hbar)^{2n} B \quad (68)$$

$$= I + \frac{1}{2} (\cos(-2Jt/\hbar) - 1) B \quad (69)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-iHt/\hbar)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!} (-1)^n (-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n+1} 2^n A \quad (70)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!} (-1)^n (-2Jt/\hbar)^{2n+1} A \quad (71)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin(-2Jt/\hbar) A \quad (72)$$

となるため

$$|\psi(t)\rangle = \left[I + \frac{1}{2} (\cos(2Jt/\hbar) - 1) B + \frac{i}{\sqrt{2}} \sin(2Jt/\hbar) A \right] |0\rangle \quad (73)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) + 1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) - 1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \cos(2Jt/\hbar) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) - 1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) + 1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar) - 1) \end{bmatrix} \quad (74)$$

となる. よって, 確率は

$$P_0(t) = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4(Jt/\hbar) \quad (75)$$

$$P_1(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2(2Jt/\hbar) \quad (76)$$

$$P_2(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^4(Jt/\hbar) \quad (77)$$



Fig.1. それぞれの様子. 緑が $P_0(t)$, 青が $P_2(t)$, 緑が $P_1(t)$

まず，それぞれの固有値と固有ベクトルは

$$0: \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$-2J: \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$2J: \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

であり，

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

とすると，ユニタリ行列であるため $U^{-1} = U^T$ が成立して，

$$U^T H U = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -2J & \\ & & 2J \end{bmatrix} = D \quad (82)$$

とすると

$$D^n = U^T H^n U \quad (83)$$

であり，

$$\exp(\alpha H) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha H)^n}{n!} = U \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha D)^n}{n!} U^T = U \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \exp(-2\alpha J) & \\ & & \exp(2\alpha J) \end{bmatrix} U^T \quad (84)$$

である．よって

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|0\rangle = U \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \exp(-2(-it/\hbar)J) & \\ & & \exp(2(-it/\hbar)J) \end{bmatrix} U^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

として問題を解くことができる．

[5.1]

$$H|0\rangle = -A|0\rangle, H|2\rangle = -A|2\rangle \quad (86)$$

となるようにすればよい．

$$H = \begin{bmatrix} -A & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & -A \end{bmatrix} \quad (87)$$

となる．

[5.2]

固有エネルギーは

$$-A, \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2} \tag{88}$$

であり,

$$\sqrt{A^2 + 16J^2} = A \sqrt{1 + 16 \left(\frac{J}{A}\right)^2} \approx A \left(1 + 8 \left(\frac{J}{A}\right)^2 \cdots\right) \tag{89}$$

$$= A + 8 \frac{J^2}{A} \tag{90}$$

であるため,

$$-A, \frac{1}{2} \left(A \pm \left(A + 8 \frac{J^2}{A} \right) \right) \tag{91}$$

[5.3]

[6]

第四問

[1]

N 個の粒子からなるハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(r) \right\}, \quad U(r) = \begin{cases} 0 & \text{容器内} \\ \infty & \text{容器の外 } (r > L) \end{cases} \quad (92)$$

よって全体の分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \left[\int \int \int \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) dp_x dp_y dp_z \right]^N \left[\int \int \int \exp(-\beta U(r)) dx dy dz \right]^N \quad (93)$$

$$= \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \quad (94)$$

[2]

内部エネルギーは

$$U = F + TS, \quad F = -k_B T \ln Z, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (95)$$

であるため,

$$F = -k_B T \log \left[\frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \right] \quad (96)$$

$$S = k_B \log \left[\frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} (2mk_B T)^{3N/2} V^N \right] + \frac{3N}{2} k_B \quad (97)$$

$$U = \frac{3N}{2} k_B T \quad (98)$$

[3]

$$P = k_B T N \frac{1}{V} \quad (99)$$

[4]

分配関数は

$$Z = \exp\left(\beta\alpha \frac{N}{V}\right) \frac{1}{N!} \frac{(2mk_B T)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^N} (V - Nb)^N \quad (100)$$

よって, 圧力 P は

$$P = \alpha \frac{N}{V^2} + k_B T \frac{N}{V - Nb} \quad (101)$$

であり, 状態方程式は

$$\left(P + \alpha \frac{N}{V^2}\right) (V - Nb) = Nk_B T \quad (102)$$

[5]

安定な点は最小値を与えている箇所. そして, 不安定点は極大値の箇所である. というのも極値で状態方程式は成立するが, 熱平衡状態は最小値だからである.

[6]

$$dG = -SdT + Vdp \quad (103)$$

であるため,

$$\Delta G = V\Delta p \quad (104)$$

であるため, p の増減に従って G も増減する.

第五問

[1]

位相速度は

$$v = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (105)$$

で与えられるため

$$v = \frac{\omega}{k_1 + ik_2} = \frac{\omega k_1}{k_1^2 + k_2^2} - i \frac{\omega k_2}{k_1^2 + k_2^2} \quad (106)$$

となる.

[2]

$$\tilde{k} = k_1 + ik_2 \quad (107)$$

を代入すると

$$\boldsymbol{E}(z, t) = \text{Re} [\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp \{i((k_1 + ik_2)z - \omega t)\}] = \text{Re} [\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp(-k_2 z) \exp \{i(k_1 z - \omega t)\}] \quad (108)$$

であるため,

$$\frac{1}{e} = \exp(-k_2 z) \quad (109)$$

となるような z を求めれば良い. よって,

$$z = \frac{1}{k_2} \quad (110)$$

[3]

代入すると

$$\tilde{k}^2 = \epsilon\mu\omega^2 + \mu\sigma\omega i \quad (111)$$

であり,

$$\tilde{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 + i(2k_1 k_2) \quad (112)$$

であるため, これらより二次方程式を解いて

$$k_1 = \left[\frac{\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2} \right]^{1/2}, \quad k_2 = \left[\frac{-\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (113)$$

よって整理すると

$$k_1 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{1/2}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (114)$$

となる.

[4]

$d = 1/k_2$ であるため,

$$d = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \right]^{-1/2} \quad (115)$$

となる. ここで, $\sigma \gg \epsilon\omega$ のとき, (良導体のとき)

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[-1 + \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right]^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \quad (116)$$

であり, $\sigma \ll \epsilon\omega$ のとき, (不良導体のとき)

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}} \sqrt{2} \frac{\epsilon\omega}{\sigma} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu\sigma^2}} \quad (117)$$

[5]

今回の系では z 方向に電磁波が進むため, $E_z = 0, B_z = 0$ としてよい. また, 系の設定より $E_y = B_x = 0$ である. よってそれぞれの Maxwell 方程式は z 成分しか持たないため

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \quad (118)$$

であり,

$$B_y = \frac{\tilde{k}}{\omega} \quad (119)$$

が成立する. ここで,

$$\mathbf{B} = \text{Re} [\tilde{\mathbf{B}}_0 \exp \{i(\tilde{k}z - \omega t)\}] \quad (120)$$

とすると,

$$\mathbf{B} = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{E}}_0 \frac{1}{\omega} (k_1 + ik_2) \exp \{i(\tilde{k}z - \omega t)\} \right] \quad (121)$$

でありこれより位相の遅れは

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{k_2}{k_1} \right) \quad (122)$$

である. また,

$$\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{-\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}} = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + (\sigma/\epsilon\omega)^2}}{1 + \sqrt{1 + (\sigma/\epsilon\omega)^2}}} \quad (123)$$

となる. よって, $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \rightarrow \infty$ の時は

$$\frac{k_2}{k_1} \rightarrow 1, \quad \phi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad (124)$$

であり, $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \rightarrow 0$ の時は

$$\frac{k_2}{k_1} \rightarrow 0, \quad \phi = 0, \pi \quad (125)$$

である.

[6]

ポインティングベクトルの時間平均は

$$\frac{1}{\mu} \langle \text{Re } E \text{ Re } B \rangle = \frac{1}{4\mu} \langle (\tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}_0^* e^{i\omega t}) \left(\frac{k_1 + ik_2}{\omega} \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega t} + \frac{k_1 - ik_2}{\omega} \tilde{\mathbf{E}}_0^* e^{i\omega t} \right) \rangle \quad (126)$$

$$= \frac{1}{4\mu} |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \left(\frac{k_1 - ik_2}{\omega} + \frac{k_1 + ik_2}{\omega} \right) = \frac{k_1}{2\mu\omega} |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \quad (127)$$

であり，代入すると

$$\frac{1}{2\mu\omega} |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (128)$$

[7]

$$P = RI^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (129)$$

[8]

$$\langle Q \rangle = \frac{\sigma}{2} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \frac{\sigma}{2} \exp(-2k_2 z) |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \quad (130)$$

であり，

$$\int_0^\infty \langle Q \rangle dz = \frac{\sigma}{4k_2} |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \quad (131)$$

ここで，

$$k_1 k_2 = \frac{\sigma\mu\omega}{2} \quad (132)$$

であるため，

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{\sigma}{2} \exp(-2k_2 z) |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \quad (133)$$

$$= \int_0^\infty \langle Q \rangle dz = \frac{\sigma}{4k_2} |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \quad (134)$$

となっており，入射したエネルギー＝媒質内で発生したジュール熱という関係が求まる．