

東大物理工学科 2016

21B00817 鈴木泰雅,¹

第一問

[1.1]

運動方程式より

$$0 = kv_0 t_0 - \mu mg, \quad t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0} \quad (1)$$

である.

[1.2]

物体 B が右方向に動くという仮説を立てる. ($\dot{x}_B > 0$) ここで運動方程式は

$$m\ddot{x}_B = k(v_0(t + t_0) - x_B) - \frac{2}{3}\mu mg - kx_B \quad (2)$$

となる.

[1.3]

$$m\ddot{x}_B = -2k \left(x_B - \frac{v_0(t + t_0)}{2} + \frac{\mu mg}{3k} \right) \quad (3)$$

であり,

$$X_B = x_B - \frac{v_0(t + t_0)}{2} + \frac{\mu mg}{3k} = x_B - \frac{v_0 t}{2} - \frac{\mu mg}{6k} \quad (4)$$

とすると

$$m\ddot{X}_B = -2kX_B, \quad X_B = A \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \quad (5)$$

であり,

$$X_B(0) = 0 - \frac{v_0 t_0}{2} + \frac{\mu mg}{3k} = -\frac{\mu mg}{6k} \quad (6)$$

$$\dot{X}_B(0) = 0 - \frac{v_0}{2} = -\frac{v_0}{2} \quad (7)$$

であるため,

$$X_B = -\frac{\mu mg}{6k} \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) - \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \quad (8)$$

$$\therefore x_B = \frac{v_0}{2} \left(t - \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right) + \frac{\mu mg}{6k} \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right) \quad (9)$$

である.

[1.4]

$$\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 \ll 1 \quad (10)$$

であるため,

$$\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) \approx \sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^3, \quad \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^2 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^4 \quad (11)$$

よって二次までの近似をすると

$$x_B(t=t_0) = \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \sqrt{\frac{m}{2k}}\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) + \frac{\mu mg}{6k}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^2\right) = \frac{t_0^3 k v_0}{6m} \quad (12)$$

となり, これは物体 A が静止するために

$$k \frac{t_0^3 k v_0}{6m} < \mu mg = t_0 k v_0, \quad \therefore \frac{t_0^2}{6m} k < 1 \quad (13)$$

であることを示せばよい. 解けない??

[2.1]

ラグランジュ方程式を解く. ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m[\dot{q}_A^2 + \dot{q}_B^2 + \dot{q}_C^2] \\ & - k_1 l^2 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{l+q_C}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q_B}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{l+q_C}{l}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{q_B}{l}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^4 \right] \\ & - \frac{1}{2}k_0[(q_C - q_B)^2 + (q_B - q_A)^2] \end{aligned}$$

であるためそれぞれの方程式は一次の形まで書くと

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_A = & -k_1 l^2 \left[-\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)\frac{1}{l} + \left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^3 \frac{1}{l} \right] + k_0(q_B - q_A) \\ \approx & -k_1 l^2 \left[\frac{1}{l} + \frac{2q_A}{l^2} \right] + k_0(q_B - q_A) \\ m\ddot{q}_B = & -k_1 l^2 \left[-\left(\frac{q_B}{l}\right)\frac{1}{l} + \left(\frac{q_B}{l}\right)^3 \frac{1}{l} \right] - k_0\{-(q_C - q_B) + (q_B - q_A)\} \\ \approx & k_1 q_B - 2k_0 q_B + k_0 q_C + k_0 q_A \\ m\ddot{q}_C \approx & -k_1 l^2 \left[\frac{1}{l} + \frac{2q_C}{l} \right] - k_0(q_C - q_B) \end{aligned}$$

である. よってこれを行列で表現すると

$$m \begin{bmatrix} \ddot{q}_A \\ \ddot{q}_B \\ \ddot{q}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_1 - k_0 & k_0 & 0 \\ k_0 & k_1 - 2k_0 & k_0 \\ 0 & k_0 & -2k_1 - k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \\ q_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_1 l \\ 0 \\ k_1 l \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる. ここで, 一般的に

$$m\ddot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q} + B \quad (15)$$

があり対角化して

$$\mathbf{q}' = U\mathbf{q} \quad (16)$$

とすると

$$m\ddot{\mathbf{q}}' = U^{-1}AU\mathbf{q}' + U^{-1}B \quad (17)$$

であり、例えば一つの成分を取り出して

$$m\ddot{q}'_i = aq'_i + b = a\left(q'_i + \frac{b}{a}\right) \quad (18)$$

であり、この基準振動 ω が満たす方程式は

$$-\omega^2 = \frac{a}{m} \quad (19)$$

となるためこれは b に依存しない。よって、行列 A のみの対角化をすればよい。よって、この行列の固有方程式は

$$\det \begin{bmatrix} -2k_1 - k_0 - \lambda & k_0 & 0 \\ k_0 & k_1 - 2k_0 - \lambda & k_0 \\ 0 & k_0 & -2k_1 - k_0 - \lambda \end{bmatrix} = (-2k_1 - k_0 - \lambda)(\lambda^2 + (k_1 + 3k_0)\lambda + 3k_0k_1 - 2k_1^2) = 0$$

であるため固有値は

$$\lambda = -2k_1 - k_0, \frac{1}{2} \left[-(k_1 + 3k_0) \pm \sqrt{9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2} \right] \quad (20)$$

である。よって固有振動数はこれに $1/m$ 倍して -1 をかけて平方したものであるため

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_1 + k_0}{m}}, \sqrt{\frac{1}{2m} \left(k_1 + 3k_0 \mp \sqrt{9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2} \right)} \quad (21)$$

である。

[2.2]

不安定な解はこの固有振動が虚数数の時であり、時刻に対して指数関数的に増大する。

$$9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2 = 9k_0^2 \left[\left(\frac{k_1}{k_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{k_1}{k_0} \right) + 1 \right] \quad (22)$$

は任意の k_1/k_0 で正の値であるが、

$$k_1 + 3k_0 - \sqrt{9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2} < 0 \quad (23)$$

の時この固有振動は不安定になる。よって、

$$9k_1^2 - 6k_1k_0 + 9k_0^2 > (k_1 + 3k_0)^2, \quad \therefore 2k_1^2 - 3k_0k_1 > 0 \quad (24)$$

である。これは

$$\frac{k_1}{k_0} > \frac{3}{2} \quad (25)$$

よって、 k_C の値は

$$k_C = \frac{3}{2}k_0 \quad (26)$$

である。

[2.3]

$$k_1 = \frac{2}{3}k_0 \quad (27)$$

であるためそれぞれ固有振動数に代入すると

$$\sqrt{\frac{7k_0}{3m}}, \sqrt{\frac{k_0}{3m}}, \sqrt{\frac{10k_0}{3m}} \quad (28)$$

である。それぞれの固有ベクトルは

$$-\frac{7k_0}{3} \text{の時} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad -\frac{k_0}{3} \text{の時} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad -\frac{10k_0}{3} \text{の時} : \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

であり、行列 U は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U^{-1}AU = \begin{bmatrix} -\frac{7k_0}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_0}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10k_0}{3} \end{bmatrix} \quad (30)$$

であり、

$$U^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 l \\ 0 \\ k_1 l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となるため、 \mathbf{q}' は \mathbf{q} の成分の線形結合であり、初期値は $\mathbf{q}(0) = \dot{\mathbf{q}}(0) = 0$ であるため、 $\mathbf{q}'(0) = \dot{\mathbf{q}}'(0) = 0$ である。よって解いて

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} k_1 l \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{7k_0}{3m}} t \right) \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

となる。よって、元の座標に戻ると

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \\ q_C \end{bmatrix} = U^{-1}\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} k_1 l \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{7k_0}{3m}} t \right) \right) \quad (33)$$

であるため、

$$q_A : q_B : q_C = 1/2 : 1/6 : -1/3 \quad (34)$$

である。

第二問

[1]

$$\phi(P) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+} \quad (35)$$

[2]

$$\phi(P) = \frac{-q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r + d/2 \cos \theta} + \frac{-q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r - d/2 \cos \theta} \quad (36)$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ -1 + \frac{d}{2r} \cos \theta + 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right\} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (37)$$

となる.

[3]

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(P) = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (38)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (39)$$

である.

[4]

$\theta = \pi/2$ の時,

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{e}_\theta \quad (40)$$

であるため, r 成分は持たない. $\theta_2 = 0$ の時, それぞれ $\mp p$ の電荷は

$$-q : \mathbf{F}_- = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (l - d/2)^3} \mathbf{e}_\theta \quad (41)$$

$$q : \mathbf{F}_+ = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (l + d/2)^3} \mathbf{e}_\theta \quad (42)$$

であるため, $F_- > F_+$ であるから, 反時計回りに回転し始める. 一方. $\theta = -\pi/2$ の時はそれぞれの p_1 からの距離は等しく, (l が十分に大きいため), θ 方向にしか力がかからないため, 回転しない.

[5]

p_2 に作る電場 \mathbf{E} は

$$\mathbf{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 l^3} (2 \cos \theta_1 \mathbf{e}_r + \sin \theta_1 \mathbf{e}_\theta) \quad (43)$$

であり, 書き込んだ図より

$$\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{e}_r = p_2 \cos \theta_2, \quad \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{e}_\theta = -p_2 \sin \theta_2 \quad (44)$$

である. よって

$$U = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 l^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (45)$$

となる.

第三問

[1]

シュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x) \quad (46)$$

であり, この解は

$$\psi(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x), \quad \lambda = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (47)$$

である. ここで, $x = \pm a$ で ψ の時,

$$A = 0, \text{ or } B = 0 \quad (48)$$

である. よって,

$$\psi(x) = A \cos(\lambda x), \quad B \sin(\lambda x) \quad (49)$$

となり, $\psi(\lambda a) = 0$ より,

$$\lambda a = \frac{\pi n_{\text{odd}}}{2}, \quad \lambda a = \frac{\pi n_{\text{even}}}{2} \quad (50)$$

である. よって,

$$\psi(x) = A \cos\left(\frac{\pi n_{\text{odd}}}{2a}x\right), \quad B \sin\left(\frac{\pi n_{\text{even}}}{2a}x\right) \quad (51)$$

である. ここで,

$$\int_{-a}^a \cos^2\left(\frac{\pi n_{\text{odd}}}{2a}x\right) dx = \int_{-a}^a \sin^2\left(\frac{\pi n_{\text{odd}}}{2a}x\right) dx = a \quad (52)$$

であるため,

$$\psi(x) = \sqrt{a} \cos\left(\frac{\pi n_{\text{odd}}}{2a}x\right), \quad \sqrt{a} \sin\left(\frac{\pi n_{\text{even}}}{2a}x\right) \quad (53)$$

であり,

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\pi n}{2a}, \quad E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2} \quad (54)$$

である.

[2]

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (g(x_1)e(x_2) - g(x_2)e(x_1)), \quad (55)$$

$$g(x_1)g(x_2), \quad e(x_1)e(x_2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (g(x_1)e(x_2) + g(x_2)e(x_1)) \quad (56)$$

[3]

$s = 1/2$ より, $m = \pm 1/2$ である. よって,

$$S = 1, \quad M = \pm 1, 0, \quad S = 0, M = 0 \quad (57)$$

であるため, 同時固有状態と全スピンは

$$S = 1, \quad |\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle \quad (58)$$

$$S = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (59)$$

である.

[4]

第四問

[1]

$$X = a(n^+ - n^-) \quad (60)$$

であり, $N = n^+ + n^-$ であるため,

$$X = a(N - 2n^-) \quad (61)$$

であり, n^- と X は一対一対応する. よって, n^- の選び方が全通りであり, 状態数は

$$W = \frac{N!}{(N - n^-)!n^-!} \quad (62)$$

であり,

$$N - 2n^- = n, \quad \therefore n^- = \frac{N - n}{2} \quad (63)$$

の時の状態数は

$$W = \frac{N!}{(\frac{N-n}{2})!(\frac{N+n}{2})!}, \quad \therefore P(n) = \frac{(\frac{N-n}{2})!(\frac{N+n}{2})!}{N!} \quad (64)$$

エントロピーは

$$S = k_B \log W \approx k_B \left(N \log N - \frac{N-n}{2} \log \left(\frac{N-n}{2} \right) - \frac{N+n}{2} \log \left(\frac{N+n}{2} \right) \right) \quad (65)$$

となる.

[2]

X を固定することは n を固定することである. また全体のエネルギーは 0 であるため自由エネルギーは

$$F = -TS = -k_B T \left(N \log N - \frac{N - X/a}{2} \log \left(\frac{N - X/a}{2} \right) - \frac{N + X/a}{2} \log \left(\frac{N + X/a}{2} \right) \right) \quad (66)$$

であるため,

$$\tau = -k_B T \frac{1}{a} \left(\frac{NX/a}{2(N^2 - (X/a)^2)} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{N - X/a}{N + X/a} \right) \right) \quad (67)$$

である. ここで, $X \ll Na$ の時, 二次以上の項を無視すると

$$\log \left(\frac{N - X/a}{N + X/a} \right) = \log \left(\frac{1 - X/(Na)}{1 + X/(Na)} \right) \approx -\frac{X}{Na} - \frac{X}{Na} = -2\frac{X}{Na} \quad (68)$$

$$\frac{NX/a}{2(N^2 - (X/a)^2)} = \frac{X/(Na)}{2(1 - (X/(Na))^2)} \approx \frac{X}{2Na} \quad (69)$$

であるため,

$$\tau \approx -k_B T \frac{1}{a} \left(\frac{X}{2Na} - \frac{X}{Na} \right) = k_B T \frac{X}{2Na^2} \quad (70)$$

となる.

[3]

分配関数はそれぞれ独立な粒子からできているので

$$Z = z^N = (\exp(-\beta\kappa) + \exp(\beta\kappa))^N = (2 \cosh(\beta\kappa))^N \quad (71)$$

であり, エネルギーの期待値は

$$E = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = -N \tanh(\beta\kappa) \kappa \quad (72)$$

また,

$$E = \kappa(-n^+ + n^-), \quad X = a(n^+ - n^-), \quad \therefore X = -\frac{a}{\kappa} E \quad (73)$$

よって,

$$X = Na \tanh(\beta\kappa) \quad (74)$$

である. また, $\kappa\beta \ll 1$ の時,

$$E \approx -N\beta\kappa^2, \quad X \approx Na\beta\kappa \quad (75)$$

である.

[4]

$$\frac{dE}{d\beta} = -\langle E^2 \rangle + (\langle E \rangle)^2 = -(\langle E^2 \rangle - (\langle E \rangle)^2) \quad (76)$$

ゆえ, E の分散は

$$-\frac{dE}{d\beta} = N\kappa \frac{1}{\cosh^2(\beta\kappa)} \quad (77)$$

であり, X の分散は

$$-\frac{a}{\kappa} N\kappa \frac{1}{\cosh^2(\beta\kappa)} \quad (78)$$

である.