専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　　２９　大修

時間　午前９：３０－１１：３０

物 理 学 (午 前)

受 験 番 号

注意事項

1．　次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

2．　答案用紙は３枚である。

3．　解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

4．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

5．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

6．　問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

7．　問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

[A]

(1) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2 + bx\right) dx \qquad (a > 0)$$

を計算せよ。

必要ならば $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ であることを用いてよい。

[B] x を正の実数として，ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を次のように定義する。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (x > 0)$$

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ および $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ を求めよ。

(3) $\Gamma(n)$ および $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。ただし n は正の整数とする。

(4) ガンマ関数は 0 および負の整数を除く複素平面上に解析接続することができ (証明不要)，これを $\Gamma(z)$ と書く。このとき $\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)$ を求めよ。

[C] 3 次元の球対称な関数に対する波動方程式は，r を動径座標とする極座標表示で

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(r,t) = v^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} f(r,t) \right\}$$

と与えられる。ただし v は定数であり，$r = 0$ でも f は発散しないものとする。

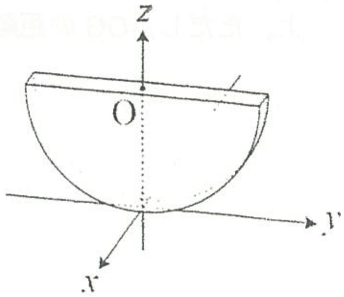
(5) 上の波動方程式の一般解を求めよ。

(6) 初期条件が $f(r, t=0) = \frac{\sin kr}{r}$ かつ $\frac{\partial f(r,t=0)}{\partial t} = 0$ である場合の解を求めよ。

2

半径a，質量Mの一様な半円柱が，図１のように粗い水平面（xy面）上に置かれている。半円柱の厚さは十分薄く，これをyz面内に置かれた半円板とみなすことができるものとする。この半円板はyz面内で水平面上を滑らずに回転し，その際の摩擦による仕事は無視できるものとする。重力加速度をgとして，以下の問いに答えよ。

図１

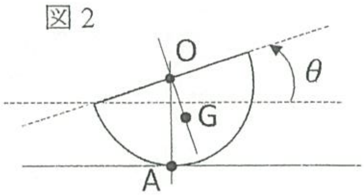


(1) 半円板の弦の中点Oを通り，x軸に平行な軸に関する，半円板の慣性モーメントI_0を求めよ。

(2) 半円板の重心をGとする。OGの距離ℓを求めよ。

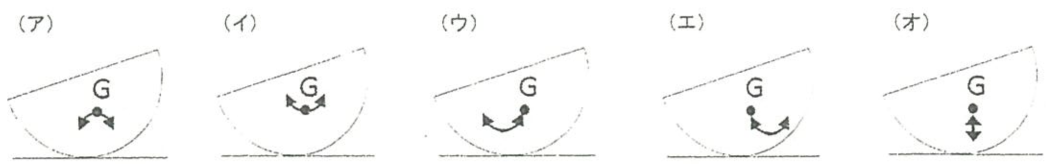
図２のように，yz面内で半円板の弦が水平となす角度を，反時計回り方向を正としてθで表すことにする。また,各瞬間の半円板の接地点をAと呼ぶことにする。はじめに半円板を水平から反時計回りに角度θ_0だけ傾けてから静かに手を離したところ，半円板は滑らずに運動を開始した。

図２



(3) この運動中に，yz面内で半円板の重心Gが描く軌跡の概略を矢印付きの線で示した図として，最も適当なものを図３の中から選んで記号で答えよ。ただし図中に描かれている半円板ならびに点Gは，はじめに半円板を角度θ_0だけ傾けたときのものを表している。

図３



(4) $\theta=0$における接地点の回りの半円板の慣性モーメントを$I_A(0)$として，$\theta=0$となった瞬間の半円板の重心Gの速さv_Gを求めよ。ただし，OGの距離はℓとおくこと。

(5) 半円板の角度がθとなった瞬間の，接地点の回りの半円板の慣性モーメント$I_{\mathrm{A}}(\theta)$を求めよ。ただし，OG の距離はℓとおくこと。

(6) θ_0が小さいとき，半円板は周期的な微小振動を行う。この振動の角振動数ωを求めよ。ただし，OG の距離はℓとおくこと。

3

物質の光学的性質を微視的な観点から考えよう。電磁波が物質を透過するとき，電磁波は物質内の電子と相互作用し，電子状態を反映した微視的な電気分極を生成する。この電気分極により物質特有の光学的性質が現れると考えられる。ここで，電子に対する運動方程式は次のように表されるとする。

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{m}{\tau}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}+m\omega_0^2\boldsymbol{x}(t)=-e\boldsymbol{E}(t) \tag{i}$$

ただし，$e\ (>0)$ は素電荷，m は電子の質量，τ および ω_0 は物質固有の量である。また，$\boldsymbol{E}(t)$ は電磁波の電場，$\boldsymbol{x}(t)$ は電子の平衡位置からの変位である。一般に正弦関数的に時間変化する物理量を複素表示すると便利である。そこで，ここでは角振動数を ω として電場が $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}$ と与えられ，そのときの電子の変位が $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(\omega)e^{-i\omega t}$ と表されるとする。

次の問いに答えよ。

(1) 運動方程式 (i) の左辺第二項および第三項の微視的な起源を説明せよ。

(2) 簡単のため $\tau\to\infty$ の場合を考える。このとき電磁波により物質中に誘起される電流密度 $\boldsymbol{j}(t)$ が，$\omega_\mathrm{p}=\sqrt{n_\mathrm{e}e^2/m\varepsilon_0}$ と定義される角振動数を用いて式 (ii) のように表せることを示せ。ただし，ε_0 は真空の誘電率，n_e は単位体積あたりの電子数である。

$$\boldsymbol{j}(t)=i\omega\varepsilon_0\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2-\omega_0^2}\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t} \tag{ii}$$

(3) 問 (2) の式 (ii) とマックスウェル方程式を用いて，問 (2) の状況での物質の屈折率 $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)/\varepsilon_0\mu_0}$ を ω_p を含む式で表せ。ただし，μ_0 は真空の透磁率，$\varepsilon(\omega)$ および $\mu(\omega)$ は，それぞれ物質の誘電率および透磁率である。

(4) 問 (3) で得られた結果のうち，$\omega<\omega_0$ の領域での振る舞いに関係する身のまわりの物理現象を 1 つ挙げ，その現象を物理的に説明せよ。

(5) 次に $\omega_0=0$ でかつ $\tau\to\infty$ であるような物質を考える。この物質を真空中におき，ω_p よりも小さい角振動数 ω の電磁波を物質に垂直入射させる。このときの反射率 R を問 (3) の結果を使って求めよ。

(6) 問 (5) で考えている光学的性質に関係する身のまわりの物理現象を 1 つ挙げ，その現象を物理的に説明せよ。

専門科目（午後）　　　　　　　　　　　　　　２９　大修

時間　午後１：３０－３：３０

物理学(午後)

受験番号

注意事項

1．　次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

2．　答案用紙は３枚である。

3．　解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

4．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

5．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

6．　問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

7．　問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1 次の周期的ポテンシャル上を運動する質量 m の粒子について考える。

$$U(x) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL), \quad a > 0.$$

ただし $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。x 軸上の点 $x = 0$ と $x = 3L$ は同一視されており，波動関数には常に条件 $\psi(x + 3L) = \psi(x)$ が課されている。ポテンシャル障壁にはさまれた 3 つの区間を図 1 に示すように区間 1，区間 2，区間 3 と呼ぶ。

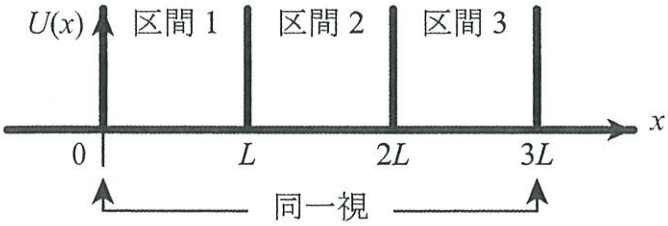


図 1: 周期的 δ-関数型ポテンシャル

次の 3 つの演算子を定義する。

$\hat{H}$: ハミルトニアン演算子。次のように定義される。

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x).$$

$\hat{S}$: シフト演算子。波動関数を L だけ x 軸の正の向きに移動する。すなわち $\hat{S}\psi(x) = \psi(x - L)$ が成り立つ。

$\hat{P}$: 反転演算子。原点 $x = 0$ を中心として波動関数を左右反転する。すなわち $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ が成り立つ。

本問において ω は 1 の三乗根 $e^{2\pi i/3}$ を表すものとする。$1 + \omega + \omega^2 = 0$ が成り立つ。

(1) 以下の文章の空欄に当てはまる適切な式または語句を答えよ。(ウ) と (エ) には全ての固有値を書くこと。

演算子 $\hat{S}$ の逆演算子 $\hat{S}^{-1}$ を任意の波動関数に作用させると $\hat{S}^{-1}\psi(x) = \boxed{\text{(ア)}}$ となる。また，周期境界条件のため $\hat{S}^3$ は $\boxed{\text{(イ)}}$ 演算子である。演算子 $\hat{P}$ を二回繰り返して作用させると波動関数は元に戻ることから $\hat{P}^2$ も $\boxed{\text{(イ)}}$ 演算子である。$\hat{S}$ の固有値は $\boxed{\text{(ウ)}}$，$\hat{P}$ の固有値は $\boxed{\text{(エ)}}$ である。

演算子 $\hat{S}$ と $\hat{H}$ は互いに $\boxed{\text{(オ)}}$ であるから，同時固有状態が存在する。これは $\hat{P}$ と $\hat{H}$ についても同様である。

$\hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P} = \boxed{\quad(\text{カ})\quad}$ が成り立つ。このことから $\psi(x)$ が $\hat{S}$ の固有値 λ に属する固有関数であるとき，$\hat{P}\psi(x)$ もやはり $\hat{S}$ の固有関数であり，固有値は $\boxed{\quad(\text{キ})\quad}$ である。

ポテンシャルの係数 a が無限に大きく，粒子がポテンシャル障壁を透過することができない場合，それぞれの区間内の粒子は孤立した井戸型ポテンシャル内の粒子とみなすことができる。区間1内にのみ存在する粒子の基底状態を表す波動関数は $0 \leq x \leq 3L$ において

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) & 0 \leq x \leq L \\ 0 & L \leq x \leq 3L \end{cases}$$

と与えられる。また，区間2および区間3内にのみ存在する粒子の基底状態を表す波動関数はそれぞれ $\psi_2(x) = \hat{S}\psi_1(x)$，$\psi_3(x) = \hat{S}^2\psi_1(x)$ と与えられる。(図2)

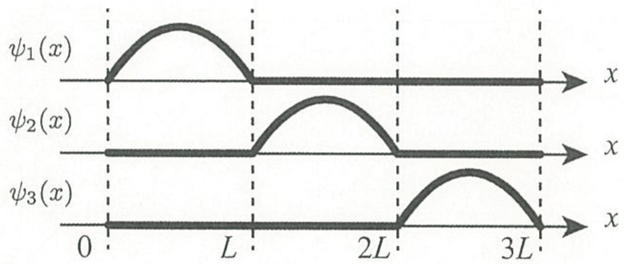


図 2: 波動関数 $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$

ポテンシャルの係数 a が非常に大きいが有限である場合を考える。この場合，$\psi_i(x)$ によって与えられる3つの状態はもはやエネルギー固有状態ではない。エネルギーの小さい方から3つのエネルギー固有状態の波動関数を $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$ とし，それらのエネルギー固有値をそれぞれ E_1, E_2, E_3 とする。a が有限のときには $E_1 = E_2 = E_3$ は成り立たない。以下では，$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$ が近似的に次のように与えられるものとして問題に答えよ。

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x)\right),$$
$$\Phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1(x) + \omega^2\psi_2(x) + \omega\psi_3(x)\right),$$
$$\Phi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1(x) + \omega\psi_2(x) + \omega^2\psi_3(x)\right).$$

(2) E_1, E_2, E_3 に対して以下のいずれかの大小関係が成り立つ。正しいものを選び，記号で答え，それを選んだ理由を簡潔に記せ。

(A) $E_1 < E_2 = E_3$,　(B) $E_1 = E_2 < E_3$,　(C) $E_1 < E_2 < E_3$.

時刻 $t=0$ において粒子の波動関数が $\psi(x,t=0)=\psi_1(x)$ で表される状態にあったとする。この状態はエネルギーの固有状態ではないので，粒子の存在確率密度 $|\psi(x,t)|^2$ は時間的に変化する。この時間発展について考えよう。エネルギー E_1 と E_3 の差を $\Delta E = E_3 - E_1$ とする。

(3) 時刻 t での波動関数 $\psi(x,t)$ をエネルギー固有状態の波動関数 $\Phi_i(x)$ を用いて表せ。

(4) 存在確率密度が初めて元に戻るまでの時間 T を ΔE を用いて表せ。

(5) 時刻 $t=T/2$ における粒子の存在確率密度のグラフを描け。グラフ中に極大値を明示すること。

$\boxed{2}$ 絶縁体や金属の磁気的性質について，電子が持つスピン磁気モーメントが担うとする立場から考察する。電子のスピン磁気モーメントの大きさを μ_0 とする。

まず絶縁体においては電子は局在しているので，N 個の独立したスピンからなる系とみなす。この系が大きさ B の一様磁場中に置かれたとき，磁場と平行な磁気モーメントを持つ電子のエネルギーは $\epsilon = -\mu_0 B$，反平行な磁気モーメントを持つ電子のエネルギーは $\epsilon = +\mu_0 B$ となる。系は温度 T における熱平衡状態にあるとして，以下の問いに答えよ。ただしボルツマン定数を k とする。

(1) 分配関数 Z を求めよ。

(2) 磁化は各スピンの磁気モーメントの総和で与えられる。磁化の大きさ M を求めよ。

(3) $B = 0$ での磁化率 χ を求めよ。

(4) 絶縁体においては磁化率が低温に向かって前問の結果のように増大する。この法則の呼称を答えよ。

次に金属においては電子は自由に運動するので，理想フェルミ気体とみなす。系は温度 T，化学ポテンシャル μ における熱平衡状態にあるとして，以下の問いに答えよ。ただし磁場がないときの一粒子エネルギー ϵ に対する各スピンの状態密度を $D(\epsilon)$ とする。

(5) この系が大きさ B の一様磁場中に置かれたとき，電子数 N と磁化の大きさ M を与える表式をそれぞれ書き下せ。

(6) 電子数 N を一定とする状況において高温極限を考えると $e^{\mu/kT} \ll 1$ が成り立つ。このとき $B = 0$ での磁化率 χ を N を用いて表せ。

(7) 絶対零度において，$B = 0$ での磁化率 χ_0 を $D(\epsilon)$ を用いて表せ。

(8) 金属においては絶対零度でも磁化率が前問の結果のように有限となる。この現象の呼称を答えよ。

3

[A] 時間幅の狭い電気的パルスなどの高速に時間変動する信号を伝送する場合，同軸ケーブルが使われる。以下では同軸ケーブル中を信号が波として伝播する様子を考えよう。同軸ケーブルでは，その構造から容易に類推できるように一様に電気容量とインダクタンスが存在する。単位長さ当たりの電気容量とインダクタンスがそれぞれ C，L の同軸ケーブルを図 1 のように x 軸に沿って張り，$x=0$ に信号源，$x=\ell$ に検出系を接続し，信号源からの信号を遠方の検出系で受けるものとする。

(1) 位置 x にある長さ Δx の同軸ケーブルの微小部分は，電気容量 $C\Delta x$ とインダクタンス $L\Delta x$ をもち，等価回路は，図 2 のように表される。位置 x の同軸ケーブルの 2 線間の電位差と電流をそれぞれ $V(x,t)$，$I(x,t)$ とするとインダクタンスによる誘導起電力とコンデンサーから流出する電流のため，位置 $x+\Delta x$ の電位差と電流は変化する。この電位差の変化 ΔV と電流の変化 ΔI を求め，$V(x,t)$ と $I(x,t)$ に対する方程式を導出せよ。

(2) 時刻 $t=0$ に信号源から時間幅の狭い電圧信号を送出したとき，検出系にこの信号が到達する時刻 t_1 を L，C，ℓ を用いて表せ。

(3) 検出系の入力インピーダンスが抵抗成分 R のみをもつとして，信号源の位置 $x=0$ に幅の狭い信号 $V(0,t)=F(t)$ が生じたとき，検出系で観測される信号 $V(\ell,t)$ を求めよ。なお，検出系で反射された波が，信号源で再び反射されることは無いものとする。

(4) 信号源からの信号が検出系で反射されないためには，検出系の入力抵抗 R をどのような値にすべきか求めよ。

図 1

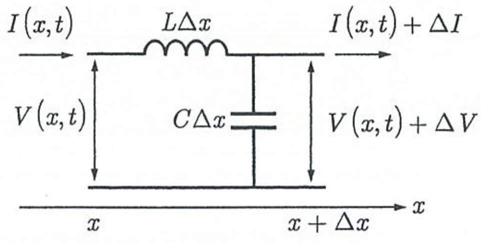


図 2

[B] 光の偏光状態の制御について考えよう。2つの透明な物質の平坦な界面における振幅反射率は，光の偏光方向に依存する。光の入射角と屈折角をそれぞれ θ_1, θ_2 とするとき，s偏光の光とp偏光の光に対する振幅反射率 r_s, r_p は，それぞれ，

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \qquad r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

と表される。

(5) 入射側の物質の屈折率 n_1 が出射側の物質の屈折率 n_2 より小さい場合を考える。s偏光とp偏光の光に対するエネルギー反射率 R の入射角 θ_1 依存性のグラフの概形として最も適当なものを図3の（ア）～（コ）の中から選べ。

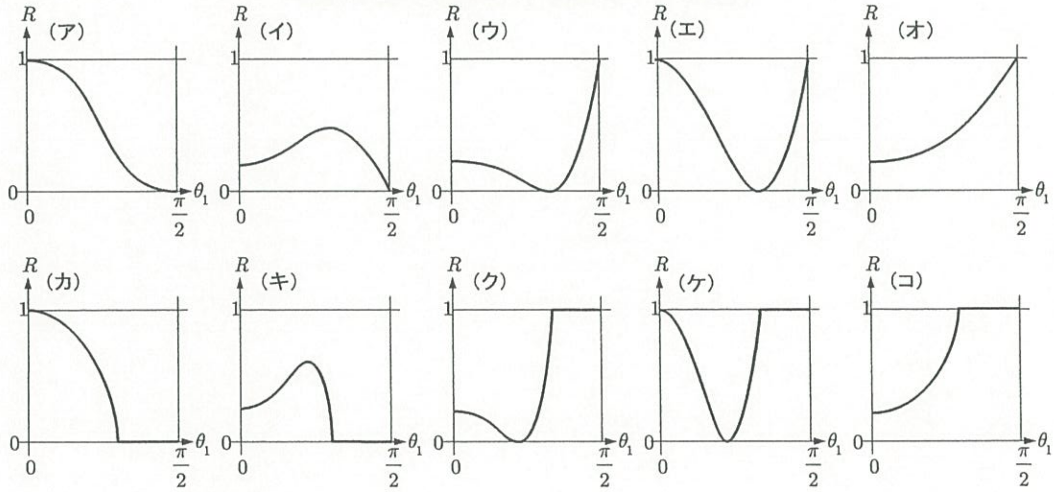


図3

(6) 真空中に置かれた等方的で屈折率が $\sqrt{3}$ の物質表面での反射を利用して，偏光していない光から直線偏光の光を得るためには，光をこの物質にどのような配置で入射させればよいか図を用いて説明せよ。なお，反射光の偏光の向きを明記せよ。

(7) 次に，得られた直線偏光の光から円偏光の光を得る方法を考えよう。まず，円偏光とは，どのような偏光状態であるか述べよ。次いで，直線偏光の光から偏光子，1/4波長板，1/2波長板などの一般的な光学素子を用いて円偏光の光を得る方法を説明せよ。図を用いてもよい。

（このページは落丁ではありません。）