2022 年 4 月 12 日配布

電磁気学　演習第 2 回 — ベクトル解析

（自習問題）完全半対称テンソル

幾何ベクトルについての演算を考える上で，次の量を定義すると便利である．

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad \text{(Kronecker のデルタ)} \tag{2.1}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (3,2,1),(2,1,3),(1,3,2) \\ 0 & \text{（上記以外）} \end{cases} \qquad \text{（三次元完全反対称テンソル）} \tag{2.2}$$

ϵ_{ijk} は「レヴィ＝チビタの記号」(Levi-Civita symbol) とも呼ばれる．i, j, k のうち任意の二つの数字を入れ替える操作を**置換** (permutation) といい，基準となる配列 $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ に対して偶数回の置換で実現するものを偶置換 (even permutation)，奇数回の置換で実現するものを奇置換 (odd permutation) という．ϵ_{ijk} は奇置換に対して符号が反転し，偶置換に対して符号を変えない．

(1) 任意の 3×3 正方行列 A の行列式が次のように書けることを確認せよ．

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \tag{2.3}$$

問題 2.1：ベクトル解析の基礎

任意の幾何ベクトルは，互いに線型独立な三つの基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ の線形結合で表される．

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \boldsymbol{e}_i = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3 \tag{2.4}$$

基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は正規直交（長さが 1 でたがいに直交）で，次の関係式が成り立つとする．

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{2.6}$$

三次元空間の基底の取り方には，式 (2.6) と符号が等しくなるもの（$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$）と，符号が反対になるもの（$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_3$）の二種類に分類でき，片方を**右手系** (right-handed system)，他方を**左手系** (left-handed system) という．物理学では一般に右手系を正として定義する．

(1) 図 1(a) の基底の向きを右手系とする．他の図 (b)〜(f) が右手系か左手系かを調べよ．

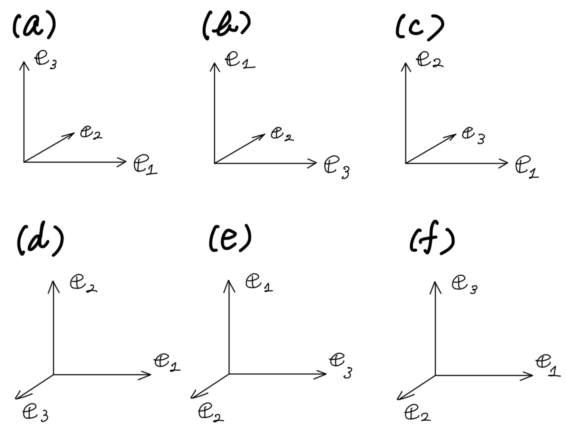

図 1: 直交基底のさまざまなとり方.

(2) 上記の定義式 (2.4)〜(2.6) を用いて，次の関係式が成り立つことを示せ.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_i B_j \boldsymbol{e}_k \tag{2.8}$$

(3) 一般的な XYZ 直交座標系を考え，$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z$ とする．このとき，式 (2.7) と式 (2.8) が，従来の幾何学における内積とベクトル積の定義と一致することを確認せよ.

(4) ϵ_{ijk} が基底のスカラー三重積と一致すること，すなわち次式が成り立つことを示せ.

$$\epsilon_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \tag{2.9}$$

(5) 完全半対称テンソルについて次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{2.10}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \tag{2.11}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{2.12}$$

(6) 恒等式 (2.10) を用いて，次の関係式が成り立つことを示せ.

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{2.13}$$

問題 2.2：ナブラ演算子

空間の各点 $\boldsymbol{r}$ で値が定義されるスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ について考える．座標 $\boldsymbol{r}$ と場 $\phi(\boldsymbol{r})$ を，それぞれ三変数関数 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$，$\phi(x,y,z)$ とみなすとき，これらの全微分と偏微分についての次の関係式が成り立つ.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z \tag{2.14}$$

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{2.15}$$

ここで，ナブラ (nabla) 演算子 $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$ を用いると，

$$\mathrm{d}\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2.16}$$

と書くことができる．$\boldsymbol{\nabla}\phi$ を $\phi(\boldsymbol{r})$ の**勾配** (gradient) という．

(1) 円筒座標系 $\boldsymbol{r}(r,\theta,z) = r\cos\theta\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ を考え，座標 r，θ を変化させたときに $\boldsymbol{r}$ が変化する向きの単位ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ と定義する．$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ を，$\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ を用いて表わせ．

(2) 円筒座標系のナブラ演算子が次のように書けることを示せ．

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.17}$$

(3) 三次元極座標（球座標）系 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi) = r\cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_x + r\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_y + r\cos\theta\boldsymbol{e}_z$ を考える．単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ を，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ を用いて表わせ．

(4) 球座標系のナブラ演算子が次のように書けることを示せ．

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2.18}$$

問題 2.3*：場の発散・勾配・回転

ナブラ演算子：$\boldsymbol{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$
ラプラス演算子 (laplacian)：$\Delta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$
勾配 (gradient)：$\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi = (\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$
発散 (divergence)：$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$
回転 (rotation) ：$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y,\ \partial_z A_x - \partial_x A_z,\ \partial_x A_y - \partial_y A_x)$

表記を簡潔にするため，偏微分 $\partial/\partial x$ を ∂_x と書く．

任意のスカラー場 $\phi(\boldsymbol{x})$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ について，次の関係式が成り立つことを示せ．

(1) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0$
(2) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0$
(3) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$
(4) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$

以上