数学 カンニングシート

21B00817 鈴木泰雅,[1]

極座標

3 次元

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{1}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{2}$$

ヤコビアンは $r^2\sin\theta$

2 次元

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2} \tag{4}$$

ヤコビアンは r

円柱座標

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{5}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6}$$

ヤコビアンは r

デルタ関数

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{7}$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f(a_i)|}\delta(x - a_i) \tag{8}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \tag{9}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r) \tag{10}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \therefore \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta(r) \tag{11}$$

また、クロネッカーのデルタに関しては次が有名である：

$$\delta_{n,m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \tag{12}$$

三角関数・双曲線関数

展開

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{13}$$
$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots \tag{14}$$
$$\tan(x) \sim 1 + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{15}$$

$$\sinh(x) \sim x + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{16}$$
$$\cosh(x) \sim 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots \tag{17}$$
$$\tanh(x) \sim 1 - \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{18}$$

微分とかの性質

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{19}$$
$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \tag{20}$$

微分は

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \tag{21}$$
$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \tag{22}$$
$$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \tag{23}$$

ベクトル解析

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C = C \cdot (A \times B) = (C \times A) \cdot B = B \cdot (A \times B) \tag{24}$$
$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \tag{25}$$
$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C) \tag{26}$$

また,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{27}$$

となる.

積分

ジョルダン不等式

$$\int_0^{\pi} e^{-r \sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{r} \tag{28}$$

留数定理

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) \tag{29}$$

なお，留数は以下で求められる

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \tag{30}$$

log の入った積分

これは分枝截線に気を付ける．

sin の入った積分

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta \tag{31}$$

の時は $z = e^{i\theta}$ と置いて，原点を中心とする単位円上で積分を行えばよい．∞ などが積分に入っている場合は Re などを最終的に取る方が実は良かったりする．

フーリエ

フーリエ級数展開

$(-\pi, \pi)$ において定義された関数 $f(x)$ に関して

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right), \tag{32}$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \tag{33}$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \tag{34}$$

フーリエ変換

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \tag{35}$$

ラプラス変換

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \tag{36}$$

で与えられる．微分方程式を解く際に覚えなければいけない公式は

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f(0) - \cdots \tag{37}$$

であり，

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}, \quad \mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad \mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{p^2+a^2} \tag{38}$$

特殊関数

ガンマ関数

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx \tag{39}$$

部分積分より

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{40}$$

が成立し，

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n+1) = n! \tag{41}$$

が成立する．

ベータ関数

$$B(z,\xi) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt \tag{42}$$

また，

$$B(z,\xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(z+\xi)} \tag{43}$$

ルジャンドル関数

ルジャンドルの微分方程式は

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{44}$$

この時 $\lambda = n(n+1)$ の値を取る時，解はルジャンドル多項式になる $P_n(x)$ なお，これはロドリゲスの公式により

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{45}$$

ベッセル関数

ベッセルの微分方程式は

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0 \tag{46}$$

エルミート多項式

$$e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^\infty H_n(x)\frac{z^n}{n!} \tag{47}$$

である．各種性質はレポートを見る．なお，エルミート多項式は次のエルミート微分方程式を満たす：

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{48}$$

あとはレポートを見直せば問題ない