東大物理工学科 2016

21B00817 鈴木泰雅,[1]

第一問

[1.1]

運動方程式より

$$0 = kv_0t_0 - \mu mg, \quad t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0} \tag{1}$$

である.

[1.2]

物体 B が右方向に動くという仮説を立てる. $(\dot{x}_B >)$ ここで運動方程式は

$$m\ddot{x}_B = k(v_0(t+t_0) - x_B) - \frac{2}{3}\mu mg - kx_B \tag{2}$$

となる.

[1.3]

$$m\ddot{x}_B = -2k\left(x_B - \frac{v_0(t+t_0)}{2} + \frac{\mu mg}{3k}\right) \tag{3}$$

であり,

$$X_B = x_B - \frac{v_0(t+t_0)}{2} + \frac{\mu mg}{3k} = x_B - \frac{v_0t}{2} - \frac{\mu mg}{6k} \tag{4}$$

とすると

$$m\ddot{X}_B = -2kX_B, \quad X_B = A\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) \tag{5}$$

であり,

$$X_B(0) = 0 - \frac{v_0t_0}{2} + \frac{\mu mg}{3k} = -\frac{\mu mg}{6k} \tag{6}$$

$$\dot{X}_B(0) = 0 - \frac{v_0}{2} = -\frac{v_0}{2} \tag{7}$$

であるため,

$$X_B = -\frac{\mu mg}{6k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) - \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) \tag{8}$$

$$\therefore x_B = \frac{v_0}{2}\left(t - \sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)\right) + \frac{\mu mg}{6k}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)\right) \tag{9}$$

である.

[1.4]

$$\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 \ll 1 \tag{10}$$

であるため，

$$\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) \approx \sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^3, \quad \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^2 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^4 \tag{11}$$

よって二次までの近似をすると

$$x_B(t=t_0) = \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \sqrt{\frac{m}{2k}}\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right) + \frac{\mu mg}{6k}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0\right)^2\right) = \frac{t_0^3 k v_0}{6m} \tag{12}$$

となり，これは物体 A が静止するために

$$k\frac{t_0^3 k v_0}{6m} < \mu mg = t_0 k v_0, \quad \therefore \frac{t_0^2}{6m}k < 1 \tag{13}$$

であることを示せばよい．解けない？？

[2.1]

ラグランジュ方程式を解く．ラグランジアンは

$$\begin{aligned}
L =& \frac{1}{2}m\left[\dot{q}_A^2 + \dot{q}_B^2 + \dot{q}_C^2\right] \\
&-k_1 l^2\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{l+q_C}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q_B}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{l+q_C}{l}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{q_B}{l}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^4\right] \\
&-\frac{1}{2}k_0\left[(q_C - q_B)^2 + (q_B - q_A)^2\right]
\end{aligned}$$

であるためそれぞれの方程式は一次の形まで書くと

$$\begin{aligned}
m\ddot{q}_A =& -k_1 l^2\left[-\left(\frac{-l+q_A}{l}\right)\frac{1}{l} + \left(\frac{-l+q_A}{l}\right)^3\frac{1}{l}\right] + k_0(q_B - q_A) \\
&\approx -k_1 l^2\left[\frac{1}{l} + \frac{2q_A}{l^2}\right] + k_0\left(q_B - q_A\right) \\
m\ddot{q}_B =& -k_1 l^2\left[-\left(\frac{q_B}{l}\right)\frac{1}{l} + \left(\frac{q_B}{l}\right)^3\frac{1}{l}\right] - k_0\left\{-(q_C - q_B) + (q_B - q_A)\right\} \\
&\approx k_1 q_B - 2k_0 q_B + k_0 q_C + k_0 q_A \\
m\ddot{q}_C \approx& -k_1 l^2\left[\frac{1}{l} + \frac{2q_C}{l}\right] - k_0(q_C - q_B)
\end{aligned}$$

である．よってこられを行列で表現すると

$$m\begin{bmatrix}\ddot{q}_A \\ \ddot{q}_B \\ \ddot{q}_C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2k_1 - k_0 & k_0 & 0 \\ k_0 & k_1 - 2k_0 & k_0 \\ 0 & k_0 & -2k_1 - k_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_A \\ q_B \\ q_C\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-k_1 l \\ 0 \\ k_1 l\end{bmatrix} \tag{14}$$

となる．ここで，一般的に

$$m\ddot{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q} + B \tag{15}$$

があり対角化して

$$\boldsymbol{q}' = U\boldsymbol{q} \tag{16}$$

とすると

$$m\ddot{\boldsymbol{q}}' = U^{-1}AU\boldsymbol{q}' + U^{-1}B \tag{17}$$

であり，例えば一つの成分を取り出して

$$m\ddot{q}_i' = aq_i' + b = a\left(q_i' + \frac{b}{a}\right) \tag{18}$$

であり，この基準振動 ω が満たす方程式は

$$-\omega^2 = \frac{a}{m} \tag{19}$$

となるためこれは b に依存しない．よって，行列 A のみの対角化をすればよい．よって，この行列の固有方程式は

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}-2k_1-k_0-\lambda & k_0 & 0\\ k_0 & k_1-2k_0-\lambda & k_0\\ 0 & k_0 & -2k_1-k_0-\lambda\end{bmatrix} &= (-2k_1-k_0-\lambda)\left(\lambda^2+(k_1+3k_0)\lambda+3k_0k_1-2k_1^2\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

であるため固有値は

$$\lambda = -2k_1-k_0, \frac{1}{2}\left[-(k_1+3k_0)\pm\sqrt{9k_1^2-6k_1k_0+9k_0^2}\right] \tag{20}$$

である．よって固有振動数はこれに $1/m$ 倍して -1 をかけて平方したものであるため

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_1+k_0}{m}}, \sqrt{\frac{1}{2m}\left(k_1+3k_0\mp\sqrt{9k_1^2-6k_1k_0+9k_0^2}\right)} \tag{21}$$

である．

[2.2]

不安定な解はこの固有振動が虚数数の時であり，時刻に対して指数関数的に増大する．

$$9k_1^2-6k_1k_0+9k_0^2 = 9k_0^2\left[\left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{k_1}{k_0}\right)+1\right] \tag{22}$$

は任意の k_1/k_0 で正の値であるが，

$$k_1+3k_0-\sqrt{9k_1^2-6k_1k_0+9k_0^2} < 0 \tag{23}$$

の時この固有振動は不安定になる．よって，

$$9k_1^2-6k_1k_0+9k_0^2 > (k_1+3k_0)^2, \quad \therefore 2k_1^2-3k_0k_1 > 0 \tag{24}$$

である．これは

$$\frac{k_1}{k_0} > \frac{3}{2} \tag{25}$$

よって，k_C の値は

$$k_C = \frac{3}{2}k_0 \tag{26}$$

である．

[2.3]

$$k_1 = \frac{2}{3}k_0 \tag{27}$$

であるためそれぞれ固有振動数に代入すると

$$\sqrt{\frac{7k_0}{3m}}, \sqrt{\frac{k_0}{3m}}, \sqrt{\frac{10k_0}{3m}} \tag{28}$$

である．それぞれの固有ベクトルは

$$-\frac{7k_0}{3}\text{の時：}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad -\frac{k_0}{3}\text{の時：}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad -\frac{10k_0}{3}\text{の時：}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix} \tag{29}$$

であり，行列 U は

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 1\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}, \quad U^{-1}AU = \begin{bmatrix}-\frac{7k_0}{3} & 0 & 0\\0 & -\frac{k_0}{3} & 0\\0 & 0 & -\frac{10k_0}{3}\end{bmatrix} \tag{30}$$

であり，

$$U^{-1}B = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\1/6 & 1/3 & 1/6\\-1/3 & 1/3 & -1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k_1 l\\0\\k_1 l\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-k_1 l\\0\\0\end{bmatrix} \tag{31}$$

となるため，$\boldsymbol{q}'$ は $\boldsymbol{q}$ の成分の線形結合であり，初期値は $\boldsymbol{q}(0) = \dot{\boldsymbol{q}}(0) = 0$ であるため，$\boldsymbol{q}'(0) = \dot{\boldsymbol{q}}'(0) = 0$ である．よって解いて

$$\boldsymbol{q}' = \begin{bmatrix}k_1 l\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{7k_0}{3m}}t\right)\right)\\0\\0\end{bmatrix} \tag{32}$$

となる．よって，元の座標に戻ると

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix}q_A\\q_B\\q_C\end{bmatrix} = U^{-1}\boldsymbol{q}' = \begin{bmatrix}1/2\\1/6\\-1/3\end{bmatrix} k_1 l\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{7k_0}{3m}}t\right)\right) \tag{33}$$

であるため,

$$q_A : q_B : q_C = 1/2 : 1/6 : -1/3 \tag{34}$$

である．

第二問

[1]

$$\phi(P) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_-} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_+} \tag{35}$$

[2]

$$\phi(P) = \frac{-q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r + d/2\cos\theta} + \frac{-q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r - d/2\cos\theta} \tag{36}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left\{-1 + \frac{d}{2r}\cos\theta + 1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right\} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta \tag{37}$$

となる．

[3]

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi(P) = \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta \tag{38}$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) \tag{39}$$

である．

[4]

$\theta = \pi/2$ の時,

$$\boldsymbol{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_\theta \tag{40}$$

であるため，r 成分は持たない．$\theta_2 = 0$ の時，それぞれ $\mp p$ の電荷は

$$-q : \boldsymbol{F}_- = \frac{p}{4\pi\epsilon_0(l - d/2)^3}\boldsymbol{e}_\theta \tag{41}$$

$$q : \boldsymbol{F}_+ = \frac{p}{4\pi\epsilon_0(l + d/2)^3}\boldsymbol{e}_\theta \tag{42}$$

であるため，$F_- > F_+$ であるから，反時計回りに回転し始める．一方．$\theta = -\pi/2$ の時はそれぞれの p_1 からの距離は等しく，(l が十分に大きいため)，θ 方向にしか力がかからないため，回転しない．

[5]

$\boldsymbol{p}_2$ に作る電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 l^3}\left(2\cos\theta_1\boldsymbol{e}_r + \sin\theta_1\boldsymbol{e}_\theta\right) \tag{43}$$

であり，書き込んだ図より

$$\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_r = p_2\cos\theta_2, \quad \boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_\theta = -p_2\sin\theta_2 \tag{44}$$

である．よって

$$U = -\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{E}_1 = -\frac{p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 l^3}\left(2\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) \tag{45}$$

となる．