東大物理工学科 2014

21B00817 鈴木泰雅,[1]

第一問

[1]

$$\int r^2 \rho dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}\int_{-a}^{a}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}}((a^2-x^2)xdx)d\theta dz \tag{1}$$

$$= \frac{2}{5}ma^2 \tag{2}$$

となる.

[2]

滑らないという条件から,

$$v' = -a\omega' \tag{3}$$

となる.

[3]

線形運動量と角運動量の保存より

$$mv' - o = P, \quad aP = \frac{2}{5}ma^2(\omega' - \omega) \tag{4}$$

であり，これを解いて

$$\omega' = \frac{2}{7}\omega \tag{5}$$

[4]

線形運動量と角運動量の保存より

$$P_n = mv_n - mv_{n-1}, \quad P_n a = \frac{2}{5}ma^2(\omega_n - \omega_{n-1}) \tag{6}$$

である．よって,

$$I(\omega_n - \omega_{n-1}) - a(mv_n - mv_{n-1}) = 0, \quad \therefore (I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) \tag{7}$$

よって,

$$(I\omega_n - amv_n) = (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) = \cdots (I\omega_0 - amv_0) = \mathrm{Const} \tag{8}$$

より,

$$l = I\omega_n - amv_n = \mathrm{Const} \tag{9}$$

[5]

反発が終わった直後では,

$$\omega_f = -\frac{v_f}{a} \tag{10}$$

の関係が成立するため,

$$l = -I\frac{v_f}{a} - mav_f, \quad \therefore v_f = -\frac{5l}{7ma} \tag{11}$$

である.

また，$v_f = 0$ のとき，$l = 0$ であるため,

$$I\omega_0 - mav_0 = 0, \quad \therefore \frac{2}{5}ma\omega_0 = mv_0 \tag{12}$$

第二問

[1]

電場の大きさはガウスの法則より

$$E(r)\cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda l, \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \tag{13}$$

である．また，電位は

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \phi(r) = -\int_{r_0}^{r} E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\log\frac{r}{r_0} \tag{14}$$

[2]

上記の表式から見て分かるように，ポテンシャルは，線素からの距離 r のみしか依存しない．また，重ね合わせの原理から

$$\phi = \phi_\lambda + \phi_{-\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(-\log\frac{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}{r_0} + \log\frac{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}{r_0}\right) \tag{15}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{b^2+r^2-2br\cos\theta}{a^2+r^2-2ar\cos\theta}\right) \tag{16}$$

[3]

必要条件であるため，代入して一定になることを確かめるだけでは十分ではない．逆を示す必要がある．ϕ が $r=R$ で θ の依存性がない時，

$D^2+R^2-2DR\cos\theta = C(d^2+R^2-2dR\cos\theta), \quad \therefore d^2\left[C^2+C(-1-(R/d)^2)+(R/d)^2\right] + 2R\cos\theta(Cd-D) = 0$

であり．これが恒等的に成立するための条件は

$$C = \frac{D}{d}, C = (R/d)^2, 1 \quad \therefore D = \frac{R^2}{d}, d \tag{17}$$

であり，$D \neq d$ であるため，

$$D = \frac{R^2}{d} \tag{18}$$

となる．

[4]

これをもとに計算すると

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi}\left(-\frac{2}{R}\right)\frac{1-(d/R)^2}{1-2(d/R)\cos\theta+(d/R)^2} \tag{19}$$

である．

[5]

球面上で積分すると

$$\int\sigma(\theta)dS = \int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\theta)Rd\theta = \frac{\lambda}{4\pi}\left(-\frac{2}{R}\right)R\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(d/R)^n\cos(n\theta)\right]d\theta \tag{20}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi}(-2/R)R2\pi = -\lambda \tag{21}$$

よって示せた．

[6]

σ_2 の位置は $\theta = \pi/2 - \psi$ であり，まとめると

$$\sigma_1 : \theta = -\psi \tag{22}$$
$$\sigma_2 : \theta = \pi/2 - \psi \tag{23}$$
$$\sigma_3 : \theta = \pi - \psi \tag{24}$$
$$\sigma_4 : \theta = 3\pi/2 - \psi \tag{25}$$

であり，$cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ であり，

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + 2(d/R)\cos\psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R)\cos\psi + (d/R)^2} \sim \frac{1 + 2(d/R)\cos\psi}{1 - 2(d/R)\cos\psi}, \quad \therefore d\cos\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\frac{1}{2}R \tag{26}$$

となる．また，同様にして

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_4} = \frac{1 + 2(d/R)\sin\psi + (d/R)^2}{1 - 2(d/R)\sin\psi + (d/R)^2} \quad \therefore d\sin\psi = \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}\frac{1}{2}R \tag{27}$$

よって，

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\frac{1}{2}R, \frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}\frac{1}{2}R\right) \tag{28}$$

第三問

[1]

$$\psi_S : -J, \quad \psi_A : J \tag{29}$$

である．なお，結合性軌道は対称になり，反結合軌道は反対称になりがちである．

[2]

波動関数は実関数であるため，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x)\psi_R(x)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_S^* + \psi_A^*\right)\left(\psi_S - \psi_A\right)dx \qquad (30)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\psi_S|^2 - |\psi_A|^2 + \psi_A^*\psi_S - \psi_S\psi_A^*\right)dx \qquad (31)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\psi_S|^2 - |\psi_A|^2\right)dx \qquad (32)
\end{aligned}$$

ここで規格化条件とそれぞれの ψ_A, ψ_S は直交しているため

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_L^*(x)\psi_R(x)dx = 0 \tag{33}$$

であるため直交している．

また，

$$H\psi_L(x) = -J\psi_R(x), \quad H\psi_R(x) = -J\psi_L(x) \tag{34}$$

であり，

$$|\psi_L\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad |\psi_R\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{35}$$

とすると，

$$H = -J\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = -J\sigma_x \tag{36}$$

[3]

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \exp\left(-i\frac{-J\sigma_x}{\hbar}t\right)|\psi_L\rangle = \left(\cos(-Jt/\hbar)\sigma_I - i\sin(-Jt/\hbar)\sigma_X\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad (37)\\
&= \begin{bmatrix}\cos(-Jt/\hbar) & -i\sin(-Jt/\hbar)\\ -i\sin(-Jt/\hbar) & \cos(-Jt/\hbar)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad (38)\\
&= \begin{bmatrix}\cos(-Jt/\hbar)\\ -i\sin(-Jt/\hbar)\end{bmatrix} \qquad (39)
\end{aligned}$$

となり，確率は

$$|\langle\psi_R|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(-Jt/\hbar) \tag{40}$$

[4.1]

それぞれの粒子を合成して，まず，二つの粒子が左にいる場合は

$$|0\rangle = |\psi_L\rangle|\psi_L\rangle \tag{41}$$

と表記する．ここで，ハミルトニアンは粒子 1 と粒子 2 それぞれに対する作用の和で書けるため，

$$H = H_1 + H_2 \tag{42}$$

となる．よって，

$$H|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle = (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_L\rangle) = -J(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \tag{43}$$

である．ここで，ボーズ粒子を考えているため

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_R\rangle|\psi_L\rangle + |\psi_L\rangle|\psi_R\rangle) \tag{44}$$

より，

$$H|0\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \tag{45}$$

であり，

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(H_1|\psi_R\rangle)|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle(H_2|\psi_L\rangle) + (H_1|\psi_L\rangle)|\psi_R\rangle + |\psi_L\rangle(H_2|\psi_R\rangle)\right] \tag{46}$$

$$= -J\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2|\psi_L\rangle|\psi_L\rangle + 2|\psi_R\rangle|\psi_R\rangle\right] = -\sqrt{2}J|1\rangle - \sqrt{2}J|2\rangle \tag{47}$$

となり，同様にして

$$H|2\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle \tag{48}$$

となる．よって，

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{49}$$

とするとたしかに与えられた行列を得る．

[4.2]

この固有値を求めれば良い．よって，

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & \sqrt{2}J & 0\\ \sqrt{2}J & \lambda & \sqrt{2}J\\ 0 & \sqrt{2}J & \lambda\end{bmatrix} = 0 \tag{50}$$

より，$0, \pm 2J$ となる．

[4.3]

解答例 0

まず，それぞれの固有値と固有ベクトルは

$$E_0 = 0: \quad |u_0\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$E_1 = -2J: \quad |u_1\rangle = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$E_2 = 2J: \quad |u_2\rangle = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{bmatrix} \tag{53}$$

であり，固有ベクトルは完全系であるため $|\psi(t)\rangle$ は

$$|\psi(t)\rangle = c_0 \exp(-iE_0 t/\hbar)|u_0\rangle + c_1 \exp(-iE_1 t/\hbar)|u_1\rangle + c_1 \exp(-iE_1 t/\hbar)|u_1\rangle \tag{54}$$

であり，初期条件より

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle \tag{55}$$

であるため，

$$|0\rangle = c_0|u_0\rangle + c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle \tag{56}$$

であり，これを解いて

$$c_0 = 1/\sqrt{2}, \quad c_1 = 1/2, \quad c_2 = -1/2 \tag{57}$$

となるため，

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_0\rangle + \frac{1}{2}\exp\left(-i(-2J)\frac{t}{\hbar}\right)|u_1\rangle - \frac{1}{2}\exp\left(-i(2J)\frac{t}{\hbar}\right)|u_2\rangle \tag{58}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)+1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)-1) \end{bmatrix} \tag{59}$$

であるため，それぞれ確率は

$$P_0(t) = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4(Jt/\hbar) \tag{60}$$

$$P_1(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(2Jt/\hbar) \tag{61}$$

$$P_2(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^4(Jt/\hbar) \tag{62}$$

となる．

解答例 1

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|0\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-iHt/\hbar)^n\right)|0\rangle \tag{63}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-iHt/\hbar)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-iHt/\hbar)^{2n+1}\right)|0\rangle \tag{64}$$

であり,

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

とする. ここで,

$$A^{2n+1} = 2^n A, \quad A^{2n} = AA^{2n-1} = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1}B \tag{66}$$

であることを利用して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-iHt/\hbar)^{2n} &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n(-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n}2^{n-1}B && (67)\\
&= I + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n(-2Jt/\hbar)^{2n}B && (68)\\
&= I + \frac{1}{2}\left(\cos(-2Jt/\hbar) - 1\right)B && (69)\\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-iHt/\hbar)^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!}(-1)^n(-\sqrt{2}Jt/\hbar)^{2n+1}2^n A && (70)\\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{(2n+1)!}(-1)^n(-2Jt/\hbar)^{2n+1}A && (71)\\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin(-2Jt/\hbar)A && (72)
\end{aligned}$$

となるため

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \left[I + \frac{1}{2}\left(\cos(2Jt/\hbar) - 1\right)B + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar)A\right]|0\rangle && (73)\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)+1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)-1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \cos(2Jt/\hbar) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)-1) & i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) & \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)+1) \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Jt/\hbar) \\ \frac{1}{2}(\cos(2Jt/\hbar)-1) \end{bmatrix} && (74)
\end{aligned}$$

となる. よって, 確率は

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^4(Jt/\hbar) && (75)\\
P_1(t) &= |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(2Jt/\hbar) && (76)\\
P_2(t) &= |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^4(Jt/\hbar) && (77)
\end{aligned}$$

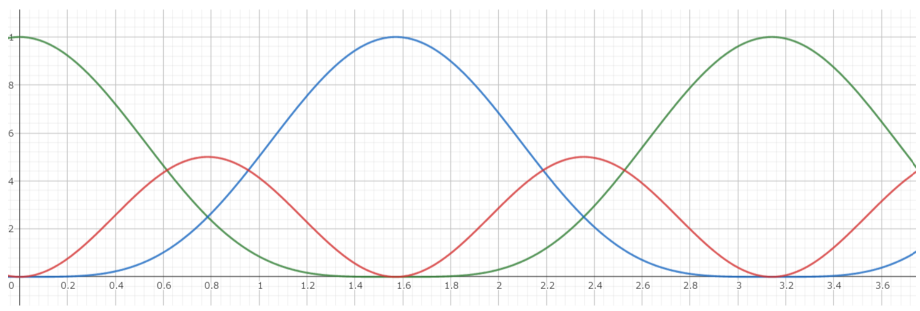

Fig.1. それぞれの様子. 緑が $P_0(t)$, 青が $P_2(t)$, 緑が $P_1(t)$

解答例 2

まず，それぞれの固有値と固有ベクトルは

$$0: \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{78}$$

$$-2J: \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{79}$$

$$2J: \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{bmatrix} \tag{80}$$

であり，

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \tag{81}$$

とすると，ユニタリ行列であるため $U^{-1} = U^T$ が成立して，

$$U^T H U = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -2J & \\ & & 2J \end{bmatrix} = D \tag{82}$$

とすると

$$D^n = U^T H^n U \tag{83}$$

であり，

$$\exp(\alpha H) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha H)^n}{n!} = U \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha D)^n}{n!} U^T = U \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \exp(-2\alpha J) & \\ & & \exp(2\alpha J) \end{bmatrix} U^T \tag{84}$$

である．よって

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|0\rangle = U \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \exp(-2(-it/\hbar)J) & \\ & & \exp(2(-it/\hbar)J) \end{bmatrix} U^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{85}$$

として問題を解くことができる．

[5.1]

$$H|0\rangle = -A|0\rangle, H|2\rangle = -A|2\rangle \tag{86}$$

となるようにすればよい．

$$H = \begin{bmatrix} -A & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & -A \end{bmatrix} \tag{87}$$

となる．

[5.2]

固有エネルギーは

$$-A, \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2} \tag{88}$$

であり,

$$\sqrt{A^2 + 16J^2} = A\sqrt{1 + 16\left(\frac{J}{A}\right)^2} \approx A\left(1 + 8\left(\frac{J}{A}\right)^2 \cdots\right) \tag{89}$$

$$= A + 8\frac{J^2}{A} \tag{90}$$

であるため,

$$-A, \frac{1}{2}\left(A \pm \left(A + 8\frac{J^2}{A}\right)\right) \tag{91}$$

[5.3]

[6]

第四問

[1]

N 個の粒子からなるハミルトニアンは

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{p^2}{2m}+U(r)\right\},\quad U(r)=\begin{cases}0 & \text{容器内}\\ \infty & \text{容器の外}\ (r>L)\end{cases} \tag{92}$$

よって全体の分配関数は

$$Z=\frac{1}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\left[\int\int\int\exp\left(-\beta\frac{p^2}{2m}\right)dp_xdp_ydp_z\right]^N\left[\int\int\int\exp\left(-\beta U(r)\right)dxdydz\right]^N \tag{93}$$

$$=\frac{1}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^N}(2mk_BT)^{3N/2}V^N \tag{94}$$

[2]

内部エネルギーは

$$U=F+TS,\quad F=-k_BT\ln Z,\quad S=-\frac{\partial F}{\partial T} \tag{95}$$

であるため,

$$F=-k_BT\log\left[\frac{1}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^N}(2mk_BT)^{3N/2}V^N\right] \tag{96}$$

$$S=k_B\log\left[\frac{1}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^N}(2mk_BT)^{3N/2}V^N\right]+\frac{3N}{2}k_B \tag{97}$$

$$U=\frac{3N}{2}k_BT \tag{98}$$

[3]

$$P=k_TN\frac{1}{V} \tag{99}$$

[4]

分配関数は

$$Z=\exp\left(\beta\alpha\frac{N}{V}\right)\frac{1}{N!}\frac{(2mk_BT)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^N}(V-Nb)^N \tag{100}$$

よって，圧力 P は

$$P=\alpha\frac{N}{V^2}+k_BT\frac{N}{V-Nb} \tag{101}$$

であり，状態方程式は

$$\left(P+\alpha\frac{N}{V^2}\right)(V-Nb)=Nk_BT \tag{102}$$

[5]

安定な点は最小値を与えている箇所．そして，不安定点は極大値の箇所である．というのも極値で状態方程式は成立するが，熱平衡状態は最小値だからである．

[6]

$$dG = -SdT + Vdp \tag{103}$$

であるため,

$$\Delta G = V\Delta p \tag{104}$$

であるため, p の増減に従って G も増減する.

第五問

[1]

位相速度は

$$v = \frac{\omega}{\tilde{k}} \tag{105}$$

で与えられるため

$$v = \frac{\omega}{k_1 + ik_2} = \frac{\omega k_1}{k_1^2 + k_2^2} - i\frac{\omega k_2}{k_1^2 + k_2^2} \tag{106}$$

となる.

[2]

$$\tilde{k} = k_1 + ik_2 \tag{107}$$

を代入すると

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp\left\{i((k_1 + ik_2)z - \omega t)\right\}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp\left(-k_2 z\right) \exp\left\{i(k_1 z - \omega t)\right\}\right] \tag{108}$$

であるため,

$$\frac{1}{e} = \exp(-k_2 z) \tag{109}$$

となるような z を求めれば良い．よって,

$$z = \frac{1}{k_2} \tag{110}$$

[3]

代入すると

$$\tilde{k}^2 = \epsilon\mu\omega^2 + \mu\sigma\omega i \tag{111}$$

であり,

$$\tilde{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 + i(2k_1 k_2) \tag{112}$$

であるため，これらより二次方程式を解いて

$$k_1 = \left[\frac{\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2}\right]^{1/2}, \quad k_2 = \left[\frac{-\epsilon\mu\omega^2 + \sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2}\right]^{1/2} \tag{113}$$

よって整理すると

$$k_1 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{114}$$

となる.

[4]

$d = 1/k_2$ であるため，

$$d = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right]^{-1/2} \tag{115}$$

となる．ここで，$\sigma \gg \epsilon\omega$ のとき，(良導体のとき)

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}}\left[-1+\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right]^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}}\sqrt{\frac{\epsilon\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \tag{116}$$

であり，$\sigma \ll \epsilon\omega$ のとき，(不良導体のとき)

$$d \sim \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2\right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu\omega^2}}\sqrt{2}\frac{\epsilon\omega}{\sigma} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu\sigma^2}} \tag{117}$$

[5]

今回の系では z 方向に電磁波が進むため，$E_z = 0, B_z = 0$ としてよい．また，系の設定より $E_y = B_x = 0$ である．よってそれぞれの Maxwell 方程式は z 成分しか持たないため

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x = -\mu\frac{\partial}{\partial t}H_y = -\frac{\partial}{\partial t}B_y \tag{118}$$

であり，

$$B_y = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tag{119}$$

が成立する．ここで，

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{B}}_0 \exp\left\{i(\tilde{k}z-\omega t)\right\}\right] \tag{120}$$

とすると，

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_0\frac{1}{\omega}(k_1+ik_2)\exp\left\{i(\tilde{k}z-\omega t)\right\}\right] \tag{121}$$

でありこれより位相の遅れは

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \tag{122}$$

である．また，

$$\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{-\epsilon\mu\omega^2+\sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2+(\mu\sigma\omega)^2}}{\epsilon\mu\omega^2+\sqrt{(\epsilon\mu\omega^2)^2+(\mu\sigma\omega)^2}}} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+(\sigma/\epsilon\omega)^2}}{1+\sqrt{1+(\sigma/\epsilon\omega)^2}}} \tag{123}$$

となる．よって，$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \to \infty$ の時は

$$\frac{k_2}{k_1} \to 1, \quad \phi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \tag{124}$$

であり，$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \to 0$ の時は

$$\frac{k_2}{k_1} \to 0, \quad \phi = 0, \pi \tag{125}$$

である．

[6]

ポインティングベクトルの時間平均は

$$\frac{1}{\mu}\langle \mathrm{Re}\, E\, \mathrm{Re}\, B\rangle = \frac{1}{4\mu}\langle(\tilde{\boldsymbol{E}}e^{-i\omega t} + \tilde{\boldsymbol{E}}^* e^{i\omega t})(\frac{k_1 + ik_2}{\omega}\tilde{\boldsymbol{E}}e^{-i\omega t} + \frac{k_1 - ik_2}{\omega}\tilde{\boldsymbol{E}}^* e^{i\omega t})\rangle \tag{126}$$

$$= \frac{1}{4\mu}|\tilde{\boldsymbol{E}}|^2 \left(\frac{k_1 - ik_2}{\omega} + \frac{k_1 + ik_2}{\omega}\right) = \frac{k_1}{2\mu\omega}|\tilde{\boldsymbol{E}}|^2 \tag{127}$$

であり，代入すると

$$\frac{1}{2\mu\omega}|\tilde{\boldsymbol{E}}|^2 \sqrt{\frac{\epsilon\mu\omega^2}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{128}$$

[7]

$$J^2\sigma = \sigma^3 \boldsymbol{E}^2 ? \tag{129}$$

[8]