2022 年 5 月 17 日配布

電磁気学　演習第 11 回 — 磁気双極子

問題 11.1：磁気双極子

(1) 経路 C に電流 I が流れているとき，$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \boldsymbol{x}' \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ で定義される量を磁気双極子モーメントという．経路 C を xy 平面上の半径 a の円形経路上に電流 I が流れているときの $\boldsymbol{m}$ を求めよ．

(2) 前小問 (1) で $m = |\boldsymbol{m}|$ を一定に保ちながら $a \to 0$ の極限をとったものを磁気双極子という．原点に磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ があるとき，遠方での磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

(3) 原点に電気双極子 $\boldsymbol{p}$ があるときの，遠方での電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求め，前小問 (2) の結果と比較せよ．

問題 11.2：磁気双極子

磁場 $\boldsymbol{B}$ が磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ に及ぼす力を考えよう．

(1) xy 平面上の半径 a の円形経路 C を考える．磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ は，経路 C に沿って流れる環電流 I の $a \to 0$ の極限である．経路 C 上の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}'(\theta) = a\cos\theta \boldsymbol{e}_x + a\sin\theta \boldsymbol{e}_y$ とすると，微小部分 $d\boldsymbol{x}'$ の電流に働くアンペールの力は $d\boldsymbol{F}(\theta) = I d\boldsymbol{x}'(\theta) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}'(\theta))$ である．このとき，円の中心を挟んで反対の位置にある二つの微小部分に働く力の和が

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\theta) + \mathrm{d}\boldsymbol{F}(\theta+\pi) = 2I\, d\boldsymbol{x}' \times \Big((\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{B}_0 \Big) \tag{11.1}$$

と書けることを示せ．ただし，$\boldsymbol{B}_0$ は円 C の中心における磁場とする．

(2) 前小問 (1) の力を $\theta = 0 \to \pi$ で積分して磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ に働く力を求めよ．また，問題 7.3(3) で求めた電場が電気双極子に及ぼす力と比較せよ．

(3) 位置 $\boldsymbol{r}$ の物体に働く力が，スカラー場 $U(\boldsymbol{r})$ を用いて $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r})$ と書けるとき，$U(\boldsymbol{r})$ を力学的位置エネルギーという．原点の磁気双極子 $\boldsymbol{m}_1$ が作る磁場が，位置 $\boldsymbol{r}$ の別の磁気双極子 $\boldsymbol{m}_2$ に及ぼす力を求め，磁気双極子 $\boldsymbol{m}_2$ の力学的位置エネルギーを求めよ．

問題 11.3：ボーア磁子

ボーアの原子模型では，正電荷の原子核の周りを負電荷の電子が軌道運動している．

(1) 質量 m，電荷 e の電子が半径 a の円軌道上を速度 v で周回しているとする．この電子の運動によって，どれだけの環電流 I が円軌道上を流れるとみなせるか．

(2) 環電流 I によって生じる磁気双極子モーメントの大きさ m を求めよ．

(3) ボーアは，電子の角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ がプランク定数 $\hbar$ の整数倍に等しいときに限り，エネルギーを失うことなく安定して円運動を行うことができると唱えた（量子条件）．

$$|\boldsymbol{L}| = \hbar l \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \tag{11.2}$$

このとき，前小問 (2) で求めた m が，ある量 μ_{B} の整数倍で表されることを示し，μ_{B} を求めよ．

(4) 一様な電場 $\boldsymbol{E}$ の下で電気双極子 $\boldsymbol{p}$ が回転のトルク $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ を受けることを示せ．

(5) 同様に，磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ は磁場 $\boldsymbol{B}$ の下でトルク $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ を受ける．このとき，磁場中の磁気双極子の向きが一般にどのような運動をするか考察せよ．

問題 11.4*：極性ベクトルと軸性ベクトル

位置 $\boldsymbol{r}(t)$ に点電荷 q があるとする．

(1) 電荷 q は静止しているとする（$\partial \boldsymbol{r}/\partial t = 0$）．電荷 q が作る静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ をガウスの法則より求めよ．

(2) 電荷 q が運動しているとする．電荷 q が作る磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ をビオ・サバールの法則より求めよ．

(3) 空間座標を反転する操作 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$ を考える．点電荷の軌跡は $\boldsymbol{r}'(t) = -\boldsymbol{r}(t)$ となる．この操作に対して，前小問 (1), (2) で求めた $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が，それぞれ次のように変換されることを示せ．

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}') = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \tag{11.3}$$

これは，問題 5.1 で説明したように，$\boldsymbol{E}$ が空間反転で符号を変える極性ベクトルであり，$\boldsymbol{B}$ は符号を変えない擬ベクトルであることを示す．

(4) 時間反転操作 $t \to t' = -t$，$\boldsymbol{r}'(t') = \boldsymbol{r}(-t)$ に対して，電場と磁場がどのように変換されるか示せ．

問題 5.1 で解いたように，空間反転と時間反転に対してマクスウェル方程式は不変である．

以上