東大物理工学科 2024

21B00817 鈴木泰雅,[1]
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

第二問

[1.1]

$$m\ddot{x}_n = kx_{n+1}(t) - 2kx_n(t) + kx_{n-1}(t) \tag{1}$$

[1.2]

計算すると

$$m\ddot{c}_q(t) = (2k\cos(q) - 2k)\, c_q(t), \quad \therefore \ddot{c}_q(t) = -\frac{4k}{m}\sin^2(q/2)c_q(t) \tag{2}$$

[1.3]

前の問題より

$$\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right| \tag{3}$$

[1.4]

$q = 0$ のとき,

$$\ddot{c}_q(t) = 0 \quad \therefore c_q(t) = At + B \tag{4}$$

[2.1]

(i): $n \leq -1, n \geq 1$ の時

前問と同様にして

$$m\ddot{x}_n = kx_{n+1}(t) - 2kx_n(t) + kx_{n-1}(t) \tag{5}$$

(ii): $n = 0$ の時

M に気を付けて

$$M\ddot{x}_0 = kx_1(t) - 2kx_0(t) + kx_{-1}(t) \tag{6}$$

[2.2]

それぞれ代入して整理すると

$$-\omega_q^2 m\left(e^{iqn} + R_q e^{-iqn}\right) = k\left(e^{iqn} + R_q e^{-iqn}\right)(2cos(q) - 2) \tag{7}$$

また,

$$-\omega_q^2 m = k\,(2cos(q) - 2) \tag{8}$$

よりそれぞれ成立する.

[2.3]

(i):$n=0$ のとき

$$M\left(-\omega_q^2\left(T_q\right)\right)=k\left(T_q e^{iq}-2T_q+e^{-iq}+R_q e^{iq}\right) \tag{9}$$

(ii):$n=-1$ のとき

$$-\omega_q^2 m\left(e^{-iq}+R_q e^{iq}\right)=k\left(T_q-2\left(e^{-iq}+R_q e^{iq}\right)+e^{-2iq}+R_q e^{2iq}\right) \tag{10}$$

よって，これを行列で表すと

$$\begin{bmatrix} -\omega_q^2 M-ke^{iq}+2k & -ke^{-iq} \\ -k & -\omega_q^2 m e^{iq}+2ke^{iq}-ke^{2iq} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_q \\ R_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ke^{iq} \\ \omega_q^2 m e^{-iq}-2ke^{-iq}+ke^{-2iq} \end{bmatrix} \tag{11}$$

これに ω_q を代入すると

$$\begin{bmatrix} \frac{M}{m}k(e^{iq}+e^{-iq}-1)-ke^{iq}+2k & -ke^{iq} \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_q \\ R_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ke^{-iq} \\ -k \end{bmatrix} \tag{12}$$

[2.4]

下の式より

$$-kT_q+kR_q=-k \quad \therefore R_q=T_q-1 \tag{13}$$

となる．また，上の方の式より

$$T_q=\frac{e^{-iq}-e^{iq}}{M/m(e^{iq}+e^{-iq}-1)-2e^{iq}+1} \tag{14}$$

となる．

[2.5]

$M=m$ のとき

$$T_q=1 \tag{15}$$

であり，加えた撃力がそのまま減衰することなく伝わることを示している．

$M=\infty$ のとき

$$T_q=0 \tag{16}$$

となり，これは撃力が伝わらないことを意味している．

[3.1]

$$A_q=C_q e^{iqL}, \quad D_q=B_q e^{iqL} \tag{17}$$

が成立し，それぞれ代入すると

$$\begin{bmatrix} C_q \\ B_q \end{bmatrix}=S_q\begin{bmatrix} C_q \\ B_q \end{bmatrix}e^{iqL} \tag{18}$$

となる．よって，

$$\begin{bmatrix} 1-T_q e^{iqL} & -R_q e^{iqL} \\ -R_q e^{iqL} & 1-T_q e^{iqL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_q \\ B_q \end{bmatrix}=0 \tag{19}$$

となり，$C_q\neq 0, B_q\neq 0$ であるため，

$$\left(1-T_q e^{iqL}\right)^2-(R_q e^{iqL})^2=0 \tag{20}$$

[3.2]

$M=m$ の時，$T_q=1, R_q=0$ より，

$$e^{iqL}=1 \tag{21}$$

である．よって，

$$q=\frac{2\pi n}{L}, \quad 0<n<\left\lfloor\frac{L}{2}\right\rfloor \tag{22}$$

また，前問と同様の運動方程式になるため A_q, B_q をそれぞれ独立に扱うことができるため

$$\omega_q=2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right| \tag{23}$$

となる．

[3.3]

$M=2m$ の時,

$$T_q=\frac{e^{-iq}-e^{iq}}{2e^{-iq}-1}, \quad R_q=\frac{-e^{-iq}-e^{iq}+1}{2e^{-iq}-1} \tag{24}$$

よって，代入して整理すると

$$e^{2iqL}\left(-4-4\cos q+1\right)=0 \tag{25}$$

である．よって，虚部と実部がそれぞれ 0 になることからまず，虚部に関して

$$\sin(qL)=0, \quad \therefore q=\frac{n\pi}{L}, \quad n\in\mathbb{Z} \tag{26}$$

また，$q=\frac{n\pi}{L}$ のとき，$\cos(qL)=(-1)^n$ であるため,