東工大理物 2020

21B00817 鈴木泰雅,[1]
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

第一問

この問題は中心力の作用する場合の運動の解析である．実は角運動量が保存する条件から運動方程式の自由度を削減することができ，自由度を削減したラウシアンという修正したラグランジアンを得る．これを下に考察していく．まず，極座標における運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) \tag{1}$$

であり，ポテンシャルは

$$U = -G\frac{mM}{r} \tag{2}$$

である．ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) + G\frac{mM}{r} \tag{3}$$

よってラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + G\frac{mM}{r^2} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\ddot{\theta} = 0 \tag{5}$$

である．また，ラグランジアンには θ が陽に含まれていないため，θ に対応する一般化運動量である角運動量が保存する：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \mathrm{Const} =: M_\theta \tag{6}$$

また，この保存量 (第一積分とも呼ぶ) から，速度に対応する成分である $\dot{\theta}$ を逆算すると

$$\dot{\theta} = \frac{M_\theta}{mr^2} \tag{7}$$

であり，これによってラグランジアンの自由度が減り以下の修正したラグランジアンが得られる．なお，ラウシアンは，元のラグランジアンから $M_\theta\dot{\theta}$ 差し引く必要があるため (詳しくは山本解析参照)

$$R := \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_\theta^2}{mr^2} + G\frac{mM}{r} - \frac{M_\theta^2}{mr^2} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{M_\theta^2}{mr^2} + G\frac{mM}{r} \tag{9}$$

となる．このラグランジアンには $\theta, \dot{\theta}$ が含まれておらず，もともと $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ という 4 つの自由度があったが，この式には 2 つの自由度しか存在しない．一般的には $q, \dot{q}$ の $2n$ 個の自由度があった時，第一積分によって，$2n-2$ 個の自由度に削減されるのである．なお，この修正したラグランジアンのことをラウシアンという．また，

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \tag{10}$$

を運動エネルギーの項と見立てるとこの系のポテンシャルは

$$\frac{1}{2}\frac{M_\theta^2}{mr^2} - G\frac{mM}{r} \tag{11}$$

である．このポテンシャルを実効ポテンシャルと言う．

これより自由度が削減したラウシアンからラグランジュ方程式を求めることによって r の時間発展を解析していく．この系のラグランジアンは時間 t に陽に依存しないため，ハミルトニアンも第一積分である．よって，

$$H = \frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\dot{r} - R = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_\theta^2}{mr^2} - G\frac{mM}{r} \tag{12}$$

が保存する．ここで，これらのエネルギー保存と角運動量保存の式より，

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(H - \frac{1}{2}\frac{M_\theta^2}{mr^2} + G\frac{mM}{r}\right)} \tag{13}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M_\theta}{mr^2} \tag{14}$$

が得られる．よってこれらを組み合わせて

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\frac{mr^2}{M_\theta}\sqrt{\frac{2}{m}\left(H - \frac{1}{2}\frac{M_\theta^2}{mr^2} + G\frac{mM}{r}\right)} \tag{15}$$

と表現できる．なお，

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \mp\frac{m}{M_\theta}\sqrt{\frac{2}{m}\left(H - \frac{1}{2}\frac{M_\theta^2}{mr^2} + G\frac{mM}{r}\right)} \tag{16}$$

$$= \mp\sqrt{-\left(\frac{1}{r} - A\right)^2 + A^2 + \frac{2m}{M_\theta^2}H}, \quad A = \frac{Gm^2M}{M_\theta^2} \tag{17}$$

とも表現できる．ここで，

$$\frac{1}{r} - A = \sqrt{A^2 + \frac{2m}{M_\theta^2}H}\cos\eta \tag{18}$$

とすると，

$$\mp\sin\eta = \frac{d}{d\theta}\cos\eta = -\sin\eta\frac{d\eta}{d\theta}, \quad \therefore \frac{d\eta}{d\theta} = \pm 1 \tag{19}$$

と変形できるため，定数 ω を用いて

$$\eta = \pm(\theta + \omega) \tag{20}$$

となり，

$$\frac{1}{r} = A + \sqrt{A^2 + \frac{2m}{M_\theta^2}H}\cos(\theta + \omega) = A\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2m}{M_\theta^2 A^2}H}\cos(\theta + \omega)\right) \tag{21}$$

であり，

$$\begin{cases} H < 0 & \text{楕円} \\ H = 0 & \text{放物線} \\ H > 0 & \text{双曲線} \end{cases} \tag{22}$$

であることが，離心率：

$$e = \sqrt{1 + \frac{2m}{M_\theta^2 A^2}H} \tag{23}$$

を使うことによって分かる．