

東工大理物 2021

21B00817 鈴木泰雅,¹
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

第一問

(1)

今回の角運動量の成分は z 軸しか持たないため、慣性モーメントは z 軸を中心に考えれば良い。よって、

$$I_l = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3} ml^2 \quad (1)$$

であり、 O まわりは

$$I_a = \int_0^a r^2 \left(\frac{M}{\pi a^2} \right) 2\pi r dr = \frac{Ma^2}{2} \quad (2)$$

(2)

剛体は質量中心に関してのみ考えれば良いので、

$$V_l = - \int_{l/2}^{l/2 \cos \theta} mg = mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta), \quad (3)$$

$$V_a = - \int_{l+a}^{l \cos \theta + a \cos \phi} Mg = Mg (l(1 - \cos \theta) + a(1 - \cos \phi)) \quad (4)$$

となる。

(3)

剛体の問題では回転の運動エネルギーと固定点の運動エネルギーに分解できる。また、回転の運動エネルギーは系によらず

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{I} \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

と表現することができる。よって、

$$T_l = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \dot{\theta}^2}_{\text{回転の運動エネルギー}} + \underbrace{0}_{\text{固定点 } P \text{ の速度は } 0} \quad (6)$$

となり、

$$T_a = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{Ma^2}{2} \right) \dot{\phi}^2}_{\text{回転の運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2} M \{ l^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\phi}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \}}_{\text{固定点の運動エネルギー}} \quad (7)$$

となる。よって、全体の運動エネルギーは

$$T = T_l + T_a = \frac{1}{6} ml \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} Ma^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} Ml^2 \dot{\theta}^2 + Mal\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \quad (8)$$

(4)

ラグランジアンは

$$L = T - V \quad (9)$$

$$= \frac{1}{6}ml\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}Ma^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mal\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) \quad (10)$$

$$-mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) - Mg(l(1 - \cos\theta) + a(1 - \cos\phi)) \quad (11)$$

となるためラグランジュ方程式は

$$\ddot{\theta} \left(\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2 \right) + (Mal\cos(\theta - \phi)\ddot{\phi} - Mal\sin(\theta - \phi)(\dot{\theta} - \dot{\phi})\dot{\phi}) \quad (12)$$

$$+ Mal\sin(\theta - \phi)\dot{\theta}\dot{\phi} + mg\frac{l}{2}\sin\theta + Mgl\sin\theta = 0 \quad (13)$$

$$\frac{3}{2}Ma^2\ddot{\phi} + (Mal\cos(\theta - \phi)\ddot{\theta} - Mal\sin(\theta - \phi)(\dot{\theta} - \dot{\phi})\dot{\theta}) + Mga\sin\phi = 0 \quad (14)$$

であり，微小項を無視することによって，

$$\ddot{\theta}l^2 \left(\frac{1}{3}m + M \right) + \ddot{\phi}al(M) + \theta gl \left(\frac{1}{2}m + M \right) = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{\phi}\frac{3}{2}a^2(M) + \ddot{\theta}al(M) + \phi ga(M) = 0 \quad (16)$$

が得られる．

(5)

$m/M \rightarrow 0$ のラグランジュ方程式は

$$\ddot{\theta}l^2M + \ddot{\phi}al(M) + \theta glM = 0 \quad (17)$$

$$\ddot{\phi}\frac{3}{2}a^2M + \ddot{\theta}alM + \phi gaM = 0 \quad (18)$$

となり， $\ddot{\theta}, \ddot{\phi}$ について解くと

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = -\frac{2g}{al} \begin{bmatrix} 3/2a & -a \\ -l & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる．この時，基準振動数はこの係数行列の固有値を -1 倍して平方を取った値に等しいので，(詳しくは [こちら](#))

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g}{al} \left(l + \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{3a}{2} \right)^2 + 4al} \right) \quad (20)$$

(6)

$$\omega_{\pm}^2 \approx \frac{g}{a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a}{l} \pm \sqrt{1 + 7 \frac{a}{l}} \right) \approx \frac{g}{a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a}{l} \pm \left(1 + \frac{7}{2} \frac{a}{l} \right) \right) \quad (21)$$

となるため，

$$\omega_+^2 \approx \frac{2g}{a}, \quad \omega_-^2 \approx -\frac{2g}{l} \quad (22)$$

であるが，なぜマイナスになってしまうのか...

第二問

(1)

ローレンツ力より,

$$IB_0 \quad (23)$$

である.

(2)

線素 dr が受ける力 dF は

$$dF = IB_0 dr \quad (\text{半時計周り}) \quad (24)$$

より, 力のモーメント (torque) は

$$\int_0^a [\mathbf{r} \times d\mathbf{F}]_z dr = \frac{1}{2} a^2 IB_0 \quad (25)$$

である.

(3)

ファラデーの電磁誘導の法則より,

$$V_{\text{emf}} = \frac{d}{dt} \left(B_0 \cdot \frac{1}{2} a^2 \int_0^t \omega(t') dt' \right) = \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t) \quad (26)$$

となる.

(4)

レールから棒に流れる向きを正とすると, 回路の方程式より

$$V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t) = IR, \quad \therefore I = \frac{1}{R} \left(V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t) \right) \quad (27)$$

(5)

回転の運動方程式は, 慣性モーメントが $\frac{1}{3} \lambda a^3$ より,

$$\frac{1}{3} \lambda a^3 \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{2} a^2 IB_0 = \frac{1}{2} a^2 B_0 \frac{1}{R} \left(V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t) \right) \quad (28)$$

であり, 終端では $\omega(t)$ が時間依存しなくなるため,

$$\frac{1}{2} a^2 B_0 \frac{1}{R} \left(V - \frac{1}{2} a^2 B_0 \omega(t) \right) = 0, \quad \therefore \omega = \frac{2V}{a^2 B_0} \quad (29)$$

(6)

問題文に書き込んだような問題設定で考える. 回路の方程式は

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{2} B_0 a^2 \omega(t) = 0 \quad (30)$$

であり, 回転の運動方程式は

$$\frac{1}{3} \lambda a^3 \frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{2} IB_0 a^2 = -\frac{1}{2} \frac{dQ}{dt} B_0 a^2 \quad (31)$$

である。よって,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} \lambda a^3 \omega(t) + \frac{1}{2} Q(t) B_0 a^2 \right) = 0 \quad (32)$$

より,

$$\omega(t) + \left(\frac{3B_0}{2\lambda a} \right) Q(t) = \text{Const} \quad (33)$$

である。また, $t = 0$ で $\omega = 0$ とすると,

$$\omega(t) + \left(\frac{3B_0}{2\lambda a} \right) Q(t) = \left(\frac{3B_0}{2\lambda a} \right) Q_0 \quad (34)$$

である。また, 回路の方程式より, 終端では $dQ = 0$ であるため,

$$\frac{Q_\infty}{C} - \frac{1}{2} B_0 a^2 \omega_\infty = 0 \quad (35)$$

であるため,

$$Q_\infty = \frac{1}{2} C B_0 a^2 \omega_\infty \quad (36)$$

ここで,

$$\omega_\infty + \left(\frac{3B_0}{2\lambda a} \right) \frac{1}{2} C B_0 a^2 \omega_\infty = Q_0 \quad (37)$$

であるため,

$$\omega_\infty = \left(1 + \frac{3B_0^2 C a}{4\lambda} \right)^{-1} Q_0 \quad (38)$$

である。

(7)

そもそも起電力が

$$V_{\text{emf}} = \frac{d}{dt} \left(B(t) \frac{1}{2} a^2 \int_0^t \omega(t') dt' \right) \quad (39)$$

とすると方程式が複雑になりすぎて求まらない？

第三問

(1)

$$\nabla \ln |\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (40)$$

である.

(2)

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (41)$$

とすると,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \nabla = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \nabla = r \mathbf{e}_\theta \cdot \nabla \quad (43)$$

であるめ, ∇ というベクトルはそれぞれの基底の線形結合より,

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (44)$$

である. よって,

$$\nabla \cdot \nabla = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (45)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mathbf{e}_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (46)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (47)$$

となる.

(3)

$$\Delta \ln |\mathbf{r}| = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (48)$$

である.

(4)

$Q = \partial_x \ln r, P = -\partial_y \ln r$ とすると, グリーンの定理より,

$$I = \oint_C (-\partial_y \ln r dx + \partial_x \ln r dy) \quad (49)$$

であり,

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (50)$$

であることと,

$$\partial_x \ln r = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}, \quad \partial_y \ln r = \frac{y}{r^2} = \frac{\sin \theta}{r} \quad (51)$$

であるため,

$$I = \oint_C \left\{ -\frac{\sin \theta}{r} (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + \frac{\cos \theta}{r} (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \right\} \quad (52)$$

$$= \oint_C dr = 2\pi \quad (53)$$

である.

(5)

$$\Delta \ln |r| = 2\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (54)$$

である.

(7)

極の値を r とすると,

$$p = \pm \sqrt{k^2 + i\delta} \approx \pm k \left(1 + \frac{1}{2k^2} i\delta \right) \quad (55)$$

である. ここで, 問題文に記載したような半円を考えた時

$$J = \int_{-r}^r + \int_{r=r} \quad (56)$$

を考えた時, (おそらく x の場合分けをしてジョルダン不等式で評価する必要がある.)

$$\left| \int_{\theta} \frac{e^{ipx}}{p^2 - k^2 - i\delta} dp \right| \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \rightarrow 0 \quad (57)$$

であるため, 最初の項のみを考える. よって, 留数定理より,

$$J = 2\pi i \frac{e^{i\alpha x}}{2\alpha} \rightarrow 2\pi i \frac{e^{ikx}}{2k}, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (58)$$

となる.