2022 年 4 月 12 日配布

電磁気学　演習第 1 回 — 準備

（自習問題）ベクトル

ベクトル：$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$
スカラー積：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
ベクトル積：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x)$

(1) 二つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ が作る平行四辺形の面積 S が $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ に等しいことを示せ．ただし，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は互いに平行でないとする．

(2) 三つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ が作る平行六面体の体積 V が $|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})|$ に等しいことを示せ．ただし，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ は互いに平行でなく同一平面上にないものとする．

(3) 任意の三つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ について $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ をスカラー三重積 (scalar triple products) という．スカラー三重積について次の恒等式が成り立つことを示せ．

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.1}$$

(4) 任意の三つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ について $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ をベクトル三重積 (vector triple products) という．ベクトル三重積について次の恒等式が成り立つことを示せ．

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.2}$$

(5) ベクトル三重積について次のヤコビ恒等式 (Jacobi identity) が成り立つことを示せ．

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0 \tag{1.3}$$

(6) 任意のベクトルの四重積 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})$ について次の恒等式が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \cancel{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D})} \\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\end{aligned} \tag{1.4}$$

ヒント

式 (1.4) は三重積についての恒等式 (1.1)，(1.2) を用いて示すことができる．

（自習問題）電磁気学基礎の復習 (1)

位置 $\boldsymbol{x}_0$ に点電荷 q が存在するとき，そのまわりの空間には次の静電場できる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \tag{1.5}$$

ただし，$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ は真空の誘電率である．

(1) z 軸上の点 $\boldsymbol{P} = (0, 0, a)$ と点 $\boldsymbol{P}' = (0, 0, -a)$ に，それぞれ点電荷 q があるとき，x 軸上の点 $\boldsymbol{R} = (R, 0, 0)$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$ を求めよ（$a > 0$ とする）．$\boldsymbol{E}$ はベクトル量なので，大きさだけでなく向きも答えること．

(2) z 軸上に等間隔に並ぶ無限個の点 $\boldsymbol{P}_n = (0, 0, an)$（$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$）を考え，そのそれぞれに点電荷 q があるときの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$ を求めよ．

(3) 電荷の線密度 $\lambda = q/a$ を一定に保ちながら，$q \to 0$ かつ $a \to 0$ の極限をとったときの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$ を求めよ．

（自習問題）電磁気学基礎の復習 (2)

(1) y 軸上の点 $\boldsymbol{Q} = (0, b, 0)$ と $\boldsymbol{Q}' = (0, -b, 0)$ を通る z 軸に平行な二本の直線を考える（$b > 0$ とする）．それぞれの直線状に一様な線密度 λ の電荷が分布しているとき，x 軸上の点 $\boldsymbol{R} = (R, 0, 0)$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$ を求めよ．

(2) z 軸に平行で y 軸上の点 $\boldsymbol{Q}_n = (0, bn, 0)$（$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$）を通るような，等間隔に並ぶ無限本の直線を考える．それぞれの直線に一様な線密度 λ が分布するときの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$ を求めよ．

(3) 面密度 $\sigma = \lambda/b$ を一定に保ちながら，$\lambda \to 0$ かつ $b \to 0$ の極限をとったときの電場 $\boldsymbol{E}(R)$ を求め，$\boldsymbol{E}(R)$ が場所によらず一定であることを示せ．

以上