

2021 年度
物理工学専攻 大学院入学試験問題

物理学 前半（第 1 問，第 2 問）

問題番号 AP1, AP2

解答時間 120 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題文を見ないこと。
2. 第 1 問は解答用紙 3 枚および下書用紙 4 枚、第 2 問は解答用紙 4 枚および下書用紙 4 枚を使用すること。
3. 解答用紙および下書用紙の裏面の使用は禁止する。
4. すべての解答用紙および下書用紙の上方の指定された箇所に，受験番号を忘れずに記入すること。
5. 日本語または英語で解答すること。
6. 解答は解答用紙の実線の内側に記入すること。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 日本語の問題文は 5-9 ページ，英語の問題文は 11-15 ページに書かれている。
9. 問題文のスクロール，拡大および縮小はしてよい。キーボード操作は禁止する。

- ・ 解答には結果だけでなく導出過程も含めること。
- ・ ネットワークトラブルが生じた場合でも解答を続けること。

2021
Department of Applied Physics
The Graduate School Entrance Examination
Physics, first half (Problem 1, Problem 2)
Problem Number AP1, AP2
Answer Time 120 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

- 1. Do not look at the Problems until the start of the examination has been announced.**
- 2. Use 3 Answer Sheets and 4 Draft Sheets for the Problem 1. Use 4 Answer Sheets and 4 Draft Sheets for the Problem 2.**
- 3. Do not use the back faces of the Answer Sheets or the Draft Sheets.**
- 4. Fill in your examinee number in the designated places at the top of all the Answer Sheets and the Draft Sheets.**
- 5. Answers must be written in Japanese or English.**
- 6. Answers must be marked within the solid frame on the Answer Sheets.**
- 7. Any Answer Sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.**
- 8. The Problems are described in Japanese on page 5-9 and in English on page 11-15.**
- 9. Scrolling, expansion and reduction of the Problems are permitted by use of a mouse or other pointing device only. Keyboard operation is prohibited.**

- Show the derivation processes as well as the results.**
- Continue the answer even if network trouble occurs.**

第1問

近年、量子コンピューターが注目を浴びているが、その基礎原理は量子力学である。量子系のエネルギーはハミルトニアン \hat{H} で定義され、時刻 t の状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ に対するシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

で与えられる。ここで i は虚数単位、 d/dt は時間に関する微分、 \hat{H} は系を記述するハミルトニアン、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。時刻 t_0 における初期条件を

$$|\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \quad (2)$$

とする。また、パウリ行列を

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

とする。

[1] 時刻 t における状態ベクトルは、時間発展演算子 $\hat{U}(t - t_0)$ を用いて

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0) |\psi_0\rangle \quad (4)$$

と書くことができる。ハミルトニアンが時間に依存しない場合に $\hat{U}(t - t_0)$ を \hat{H} を用いて表せ。

[2] ハミルトニアン \hat{H} がエルミートであることから時間発展演算子 $\hat{U}(t - t_0)$ がユニタリー演算子であることを示せ。

[3] 設問 [2] の結果を用いて状態ベクトルの内積 $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ は時間に依存しないことを示せ。

まず、1量子ビット系について考える。1量子ビットは2準位系で記述され、その演算は2行2列の行列で記述できる。以下では、ある時刻 $t = \tau$ で考え、 $t_0 = 0$ とおく。

[4] ハミルトニアンが

$$\hat{H} = a\hat{\sigma}_z \quad (5)$$

で与えられるとき、 $\hat{U}(\tau)$ を行列表示で求めよ。ここに、 a はエネルギーの次元を持つ実数である。

[5] 量子コンピューターにおける基本的な演算として、位相シフト変換がある。これは ϕ を実数として

$$\hat{U}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (6)$$

で与えられる。 $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_\phi$ を与えるハミルトニアン \hat{H} を行列表示で一つ求めよ。

[6] NOT 変換は $\hat{U}_{\text{NOT}} = \hat{\sigma}_x$ で与えられる。 $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_{\text{NOT}}$ を与えるハミルトニアン \hat{H} を行列表示で一つ求めよ。

[7] ハミルトニアンが

$$\hat{H} = a [(\sin \theta \cos \phi) \hat{\sigma}_x + (\sin \theta \sin \phi) \hat{\sigma}_y + (\cos \theta) \hat{\sigma}_z] + b \hat{I}_2 \quad (7)$$

で与えられるとき、 $\hat{U}(\tau)$ を行列表示で求めよ。ここに、 θ と ϕ は実数であり、 a と b はエネルギーの次元を持つ実数である。また、 \hat{I}_2 は 2 行 2 列の単位行列である。

[8] アダマール (Hadamard) 変換はパウリ行列を

$$\hat{U}_H^\dagger \hat{\sigma}_z \hat{U}_H = \hat{\sigma}_x, \quad \hat{U}_H^\dagger \hat{\sigma}_x \hat{U}_H = \hat{\sigma}_z \quad (8)$$

の様に変換する演算であり、具体的には

$$\hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

で与えられる。 $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_H$ となるハミルトニアン \hat{H} を行列表示で一つ求めよ。

次に、2 量子ビット系について考える。その演算は 4 行 4 列の行列で記述できる。

[9] 制御位相シフト変換は ϕ を実数として

$$\hat{U}_{C-\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (10)$$

で与えられる。 $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_{C-\phi}$ を与えるハミルトニアン \hat{H} を行列表示で一つ求めよ。4 行 4 列の行列であるが、対角行列であることから設問 [5] との類推を用いて計算せよ。

[10] 制御 NOT 変換は

$$\hat{U}_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

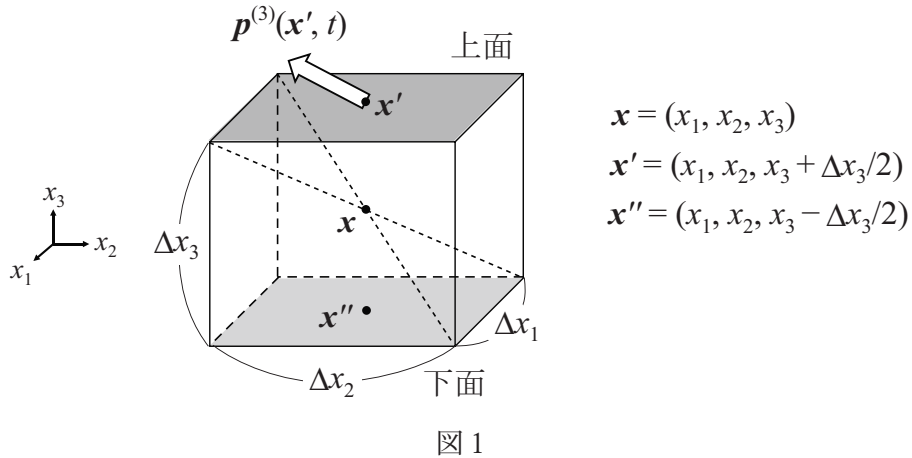
で与えられる。 $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_{\text{CNOT}}$ を与えるハミルトニアン \hat{H} を行列表示で一つ求めよ。

第2問

適当な外力を弾性体に印加すると、弾性体は変形し、変形前の弾性体中における任意の点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ は変位する。変位を十分微小とし、かつ弾性体を連続体と見なす近似では、変位ベクトル \mathbf{u} を \mathbf{x} の関数とした変位ベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ によって時刻 t における変形を表すことができる。変形前の弾性体において、点 \mathbf{x} を中心に含む、十分微小な仮想的な直方体を考える。簡単のため、微小直方体の各辺を直交座標軸 x_1, x_2, x_3 軸に沿ってとり、その長さをそれぞれ $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ とする (図1)。この体積素の変位ベクトル \mathbf{u} は下記のニュートンの運動方程式にしたがって時間発展する。

$$\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (1)$$

ここで、 ρ は弾性体の単位体積あたりの質量、 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ はこの体積素に働く単位体積あたりの力である。この体積素に働く力 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ が、体積素を取り囲む弾性媒質からこの体積素の各表面に加わる力の合力である場合を考えよう。ここで、図1に示した体積素の「上面」を、「 x_3 軸の正方向に法線ベクトルを持ち、位置 $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3/2)$ を中心とする表面」としよう (すなわち、法線ベクトルの向きを着目する体積素から見て外側に向かって定義するものとする)。この微小な面素に、隣接する弾性媒質が及ぼす単位面積当たりの力 (応力) を、応力ベクトル $\mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{x}', t)$ と表す。同様に、 x_1 軸、 x_2 軸の正方向に法線ベクトルを持つ体積素表面に対する応力ベクトルは、それぞれ $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}$ と表される。



- [1] 式 (1) の左辺と右辺の次元が一致していることを示せ。
- [2] \mathbf{x} を中心に含むこの体積素において、 x_3 軸の負方向の法線ベクトルを持ち、位置 $\mathbf{x}'' = (x_1, x_2, x_3 - \Delta x_3/2)$ を中心とする面素 (図1中の「下面」) に働く応力は、 $-\mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{x}'', t)$ となることを数行以内で説明せよ。
- [3] $\mathbf{p}^{(k)}$, \mathbf{F} の x_j 軸方向の成分 ($j, k = 1, 2, 3$) を $p_j^{(k)}, F_j$ とすると、これらは以下の関係を満たす。

$$F_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial p_j^{(k)}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}$$

$j = 1$ の場合について、これを示せ。

変位ベクトルが時刻 t に依存する場合の例として、無限に広がる弾性体中を弾性波が伝搬する場合を考える。簡単のため、弾性的な性質は等方的とすると、応力ベクトル $\mathbf{p}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$ と変位ベクトル

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の成分の間には以下の関係が成り立つ。ここで、以下の式における u_m は \mathbf{u} の x_m 軸方向の成分 ($m = 1, 2, 3$) を表す。

$$p_j^{(k)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n} \frac{1}{2} c_{jkmn} \left(\frac{\partial u_m(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n(\mathbf{x}, t)}{\partial x_m} \right) \quad (j, k, m, n = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$c_{jkmn} = \lambda(\delta_{jk}\delta_{mn}) + \mu(\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km}) \quad (3)$$

ここで δ_{jk} はクロネッカーのデルタを表す。すなわち、

$$c_{jjjj} = \lambda + 2\mu, \quad c_{jjkk} = \lambda \quad (j \neq k), \quad c_{jkjk} = c_{jkkj} = \mu \quad (j \neq k), \quad c_{jkmn} = 0 \quad (\text{左記以外の } j, k, m, n)$$

であり、 λ, μ は \mathbf{x}, t によらない弾性率（正の定数）を表す。

- [4] 変位ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が満たす運動方程式は下記のように表すことができる。A を λ, μ を用いて表せ。計算過程も示すこと。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

- [5] $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が x_1 軸方向に伝播する平面波の弾性波を表している場合を考え、この等方弾性体における縦波平面波と横波平面波の位相速度をそれぞれ定数 ρ, λ, μ を用いて表せ。

半無限の弾性体において、横波平面波の弾性波が境界で反射する場合を考える。境界の位置を $x_2 = 0$ とする。簡単のため、弾性波は x_1 - x_2 面内にのみ変位しており ($u_3(\mathbf{x}, t) = 0$)、変位は x_3 方向には一様 ($\partial u_1 / \partial x_3 = \partial u_2 / \partial x_3 = 0$) であるものとする。なお、弾性体の表面は自由端であり、表面上の任意の位置、任意の時刻において、 $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{0}$ を満たす。表面付近に局在した弾性波が励起される可能性は考えない。

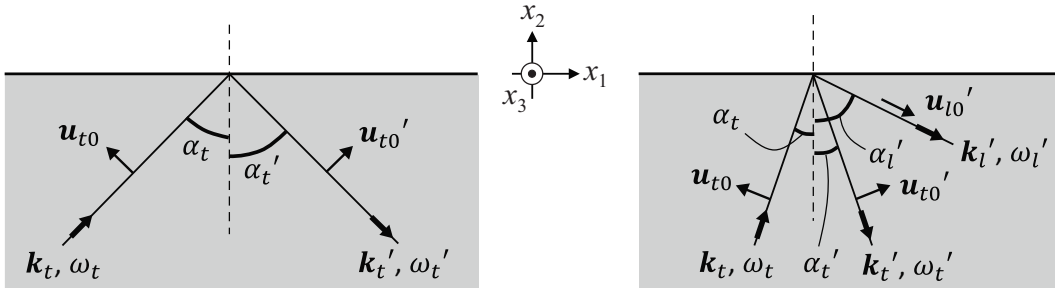


図 2

- [6] ある特別な角度 α_t ($0 \leq \alpha_t < \pi/2$) で、角振動数 ω_t 、波数ベクトル \mathbf{k}_t の横波平面波の弾性波を入射したところ、反射波は横波平面波のみであり、その反射角、角振動数、波数ベクトルはそれぞれ $\alpha_t', \omega_t', \mathbf{k}_t'$ であった (図 2 左)。境界条件 $p_1^{(2)} = 0$ を考えることにより、 α_t', ω_t' を α_t, ω_t を用いてそれぞれ表せ。ここで、横波入射波を $\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}_{t0} \exp(i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x} - \omega_t t))]$ 、横波反射波を $\mathbf{u}_t'(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}_{t0}' \exp(i(\mathbf{k}_t' \cdot \mathbf{x} - \omega_t' t))]$ と置くと、界面を含む任意の位置における変位は $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_t'(\mathbf{x}, t)$ と表せることに留意せよ。なお、 $\text{Re}[\cdot]$ は複素数の実部、 i は虚数単位を表す。

- [7] さらに境界条件 $p_2^{(2)} = 0$ を考え、設問 [6] の状況が起こる入射角 α_t を全て求めよ。

- [8] 設問 [7] で求めた角度以外の入射角で横波平面波の弾性波を入射すると、反射波は横波平面波のみならず、縦波平面波の弾性波も伴う。その反射角、角振動数、波数ベクトルをそれぞれ α_l' , ω_l' , \mathbf{k}_l' とすると、縦波反射波は $\mathbf{u}_l'(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}_{l0}' \exp(i(\mathbf{k}_l' \cdot \mathbf{x} - \omega_l' t))]$ と表される (図 2 右)。このとき、前述の境界条件 $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{0}$ は縦波の反射弾性波も含めて満たされることに留意し、

$$k_t \sin \alpha_t = k_l' \sin \alpha_l'$$

を示せ。ここで k_t, k_l' はそれぞれ $\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_l'$ の絶対値である。

Problem 1

Recently, quantum computation based on quantum mechanics attracts much attention. The energy of quantum systems is defined by the Hamiltonian \hat{H} . The evolution of the state vector $|\psi(t)\rangle$ with time t is described by the Schrödinger equation. It is given by

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1)$$

where i is the imaginary number unit, d/dt is a differential operator with respect to time, and \hbar is Planck's constant divided by 2π . We assume an initial condition at time t_0 as

$$|\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle. \quad (2)$$

The Pauli matrices are given by

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- [1] The state vector at time t is written with the use of the time-evolution operator $\hat{U}(t - t_0)$,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0) |\psi_0\rangle. \quad (4)$$

Express $\hat{U}(t - t_0)$ in terms of \hat{H} when the Hamiltonian is independent of time.

- [2] Show that the time-evolution operator $\hat{U}(t - t_0)$ is a unitary operator by using the fact that the Hamiltonian \hat{H} is Hermitian.
- [3] Show that the inner product of the state vector $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ is independent of time based on the result of Question [2].

First, let us consider one-qubit systems. The one-qubit is described by a two-level system, where its operation is described by a two-by-two matrix. We take a certain time $t = \tau$ and set $t_0 = 0$ in the following questions.

- [4] Express a matrix representation of $\hat{U}(\tau)$ when the Hamiltonian is given by

$$\hat{H} = a\hat{\sigma}_z, \quad (5)$$

where a is a real number with the dimension of energy.

- [5] The phase-shift transformation is a basic operation in quantum computation. It is defined by

$$\hat{U}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where ϕ is a real number. Express one matrix representation of the Hamiltonian \hat{H} that satisfies $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_\phi$.

[6] The NOT transformation is defined by $\hat{U}_{\text{NOT}} = \hat{\sigma}_x$. Express one matrix representation of the Hamiltonian \hat{H} that satisfies $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_{\text{NOT}}$.

[7] Express the matrix representation of $\hat{U}(\tau)$ when the Hamiltonian is given by

$$\hat{H} = a[(\sin \theta \cos \phi) \hat{\sigma}_x + (\sin \theta \sin \phi) \hat{\sigma}_y + (\cos \theta) \hat{\sigma}_z] + b\hat{I}_2, \quad (7)$$

where θ and ϕ are real numbers, a and b are real numbers with the dimension of energy, and \hat{I}_2 is the two-by-two identity matrix.

[8] The Hadamard transformation is an operator which transforms the Pauli matrices as

$$\hat{U}_{\text{H}}^\dagger \hat{\sigma}_z \hat{U}_{\text{H}} = \hat{\sigma}_x, \quad \hat{U}_{\text{H}}^\dagger \hat{\sigma}_x \hat{U}_{\text{H}} = \hat{\sigma}_z, \quad (8)$$

and is explicitly given by

$$\hat{U}_{\text{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Express one matrix representation of the Hamiltonian \hat{H} that satisfies $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_{\text{H}}$.

Next, let us consider two-qubit systems, whose operations are described by four-by-four matrices.

[9] The controlled-phase-shift transformation is defined by

$$\hat{U}_{\text{C-}\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

where ϕ is a real number. Express one matrix representation of the Hamiltonian \hat{H} that satisfies $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_{\text{C-}\phi}$. This question is analogous to Question [5], where the matrix is diagonal although it is a four-by-four matrix.

[10] The controlled-NOT transformation is defined by

$$\hat{U}_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Express one matrix representation of the Hamiltonian \hat{H} that satisfies $\hat{U}(\tau) = \hat{U}_{\text{CNOT}}$.

Problem 2

The application of an external force to an elastic body induces deformation. Let $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ be an arbitrary position in the elastic body before the deformation. Under the approximation that the deformation is sufficiently small and the elastic body is viewed as a continuous medium, the deformation at time t can be expressed by the displacement vector field $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, in which the displacement vector \mathbf{u} is a function of \mathbf{x} . In the elastic medium before the deformation, let us consider a hypothetical infinitesimal volume element of rectangular shape centered at \mathbf{x} . For simplicity, suppose that the sides are parallel to the x_1 -, x_2 -, and x_3 -axes of the Cartesian coordinate system, and let Δx_1 , Δx_2 , and Δx_3 be the length of each side of the rectangular volume element, as shown in Fig. 1. Then, the time-evolution of the displacement vector \mathbf{u} of the volume element obeys the following Newtonian equation of motion:

$$\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \quad (1)$$

where ρ is the mass of the unit volume of the elastic medium, and $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ is the force per unit volume acting on the volume element.

Consider the case that the force acting on the volume element, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, is the sum of the forces that the surrounding elastic medium exerts on each surface of the volume element. Let us represent “the upper surface” indicated in Fig. 1 as “the surface centered at $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3/2)$ with a normal vector toward the positive direction of the x_3 -axis”; that is, we define a normal vector toward the direction from the center of a considered volume element to the outside. Then, we define the stress vector $\mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{x}', t)$ as a force per unit area that the neighboring elastic medium exerts on this surface element. Similarly, $\mathbf{p}^{(1)}$ and $\mathbf{p}^{(2)}$ denote the stress vectors acting on the surfaces of the volume element with normal vectors toward the positive directions of the x_1 - and x_2 -axes, respectively.

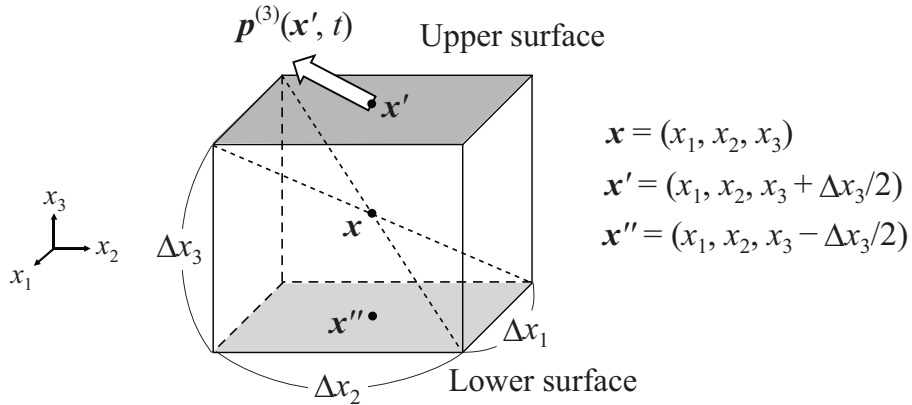


Figure 1

- [1] Show that the left- and right-hand sides of Eq. (1) have the same dimension.
- [2] Regarding the volume element centered at \mathbf{x} , show within a few sentences that $-\mathbf{p}^{(3)}(\mathbf{x}'', t)$ gives the stress vector at “the lower surface” centered at $\mathbf{x}'' = (x_1, x_2, x_3 - \Delta x_3/2)$ with a normal vector toward the negative direction of the x_3 -axis (see Fig. 1).

- [3] Let $p_j^{(k)}$ and F_j ($j, k = 1, 2, 3$) be the components along the x_j -axis of $\mathbf{p}^{(k)}$ and \mathbf{F} , respectively. These quantities satisfy the following relation:

$$F_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial p_j^{(k)}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}.$$

Derive the equation for the case $j = 1$.

Next, we consider an elastic plane wave propagating in an infinite elastic medium, as an example for the case that the displacement vector is time t dependent. For simplicity, the elastic properties are assumed to be isotropic, and thus, the components of the stress vector $\mathbf{p}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$ and the displacement vector $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ satisfy the following relations, where u_m denotes the x_m -axis component of \mathbf{u} ($m = 1, 2, 3$):

$$p_j^{(k)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n} \frac{1}{2} c_{jkmn} \left(\frac{\partial u_m(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n(\mathbf{x}, t)}{\partial x_m} \right) \quad (j, k, m, n = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$c_{jkmn} = \lambda(\delta_{jk}\delta_{mn}) + \mu(\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km}), \quad (3)$$

where δ_{jk} represents the Kronecker delta and hence

$$c_{jjjj} = \lambda + 2\mu, \quad c_{jjkk} = \lambda \quad (j \neq k), \quad c_{jkjk} = c_{jkkj} = \mu \quad (j \neq k), \quad c_{jkmn} = 0 \quad (\text{all other cases}).$$

λ and μ are positive elastic moduli of the elastic medium, which are independent of \mathbf{x} and t .

- [4] The equation of motion for $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ can also be expressed as follows:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

Express λ in terms of μ and λ while showing the derivation.

- [5] Consider the case that $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ describes an elastic plane wave propagating along the x_1 -axis. Obtain the phase velocities of the longitudinal and transverse waves in the isotropic elastic medium by using ρ , λ , and μ .

Consider a semi-infinite elastic medium and suppose that a transverse elastic plane wave is reflected by the surface. We define the position of the surface as $x_2 = 0$. For simplicity, let us assume that the elastic wave is accompanied only by a displacement vector within the x_1 - x_2 -plane (i.e., $u_3(\mathbf{x}, t) = 0$) and the displacement is uniform along the x_3 -direction (i.e., $\partial u_1/\partial x_3 = \partial u_2/\partial x_3 = 0$). Note that the surface of the elastic medium is a free boundary and hence $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{0}$ is satisfied at any arbitrary position on the surface and at any time. Neglect the possibility that a localized elastic wave near the surface is excited.

- [6] When a transverse elastic plane wave with an angular frequency ω_t and a wave vector \mathbf{k}_t arrives at the surface at a certain incident angle α_t ($0 \leq \alpha_t < \pi/2$), we observe only a transverse elastic plane wave as the reflected wave, whose reflection angle, angular frequency, and wave vector are α_t' , ω_t' , and \mathbf{k}_t' , respectively (see the left panel of Fig. 2). By considering the boundary condition, $p_1^{(2)} = 0$, express α_t' and ω_t' in terms of α_t and ω_t . When we express the incident and reflected transverse plane waves as $\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}_{t0} \exp(i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x} - \omega_t t))]$ and $\mathbf{u}_t'(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}_{t0}' \exp(i(\mathbf{k}_t' \cdot \mathbf{x} - \omega_t' t))]$, respectively, note that the displacement at an arbitrary position including the surface is given by $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_t'(\mathbf{x}, t)$. $\text{Re}[\cdot]$ denotes the real part of a complex number and i represents the imaginary number unit.

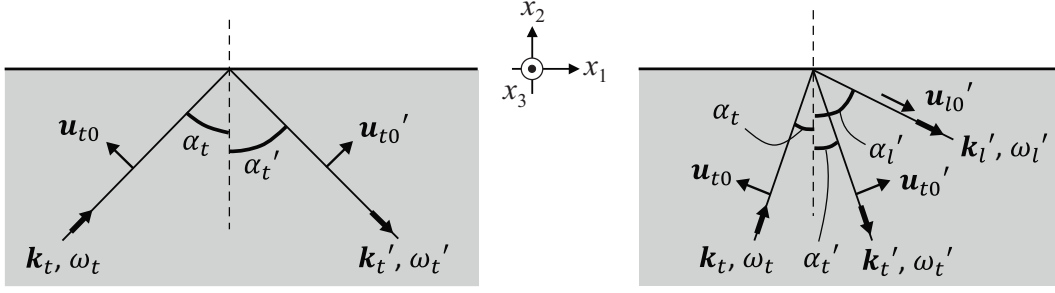


Figure 2

- [7] By further considering the boundary condition, $p_2^{(2)} = 0$, find all possible values of the incident angle α_t for which the situation supposed in Question [6] occurs.
- [8] When a transverse elastic plane wave arrives at the surface at an arbitrary incident angle other than the angles derived in Question [7], the reflected waves consist of not only transverse but also longitudinal elastic plane waves. Let α_l' , ω_l' , and \mathbf{k}_l' be the reflection angle, angular frequency and wave vector of the longitudinal reflected wave, respectively. Then, the reflected transverse plane wave is expressed as $\mathbf{u}_l'(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}_{l0}' \exp(i(\mathbf{k}_l' \cdot \mathbf{x} - \omega_l' t))]$ (see the right panel of Fig. 2). Given that the boundary condition, $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{0}$, holds when taking into account also the longitudinal reflected wave, derive the following relation:

$$k_t \sin \alpha_t = k_l' \sin \alpha_l',$$

where k_t and k_l' denote the magnitude of \mathbf{k}_t and \mathbf{k}_l' , respectively.

2021 年度
物理工学専攻 大学院入学試験問題

物理学 後半（第 3 問, 第 4 問）

問題番号 AP3, AP4

解答時間 120 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題文を見ないこと。
2. 第 3 問は解答用紙 2 枚および下書用紙 4 枚、第 4 問は解答用紙 4 枚および下書用紙 4 枚を使用すること。
3. 解答用紙および下書用紙の裏面の使用は禁止する。
4. すべての解答用紙および下書用紙の上方の指定された箇所に，受験番号を忘れずに記入すること。
5. 日本語または英語で解答すること。
6. 解答は解答用紙の実線の内側に記入すること。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 日本語の問題文は 5-8 ページ，英語の問題文は 9-13 ページに書かれている。
9. 問題文のスクロール，拡大および縮小はしてよい。キーボード操作は禁止する。

- ・ 解答には結果だけでなく導出過程も含めること。
- ・ ネットワークトラブルが生じた場合でも解答を続けること。

2021
Department of Applied Physics
The Graduate School Entrance Examination
Physics, second half (Problem 3, Problem 4)
Problem Number AP3, AP4
Answer Time 120 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

- 1. Do not look at the Problems until the start of the examination has been announced.**
- 2. Use 2 Answer Sheets and 4 Draft Sheets for the Problem 3. Use 4 Answer Sheets and 4 Draft Sheets for the Problem 4.**
- 3. Do not use the back faces of the Answer Sheets or the Draft Sheets.**
- 4. Fill in your examinee number in the designated places at the top of all the Answer Sheets and the Draft Sheets.**
- 5. Answers must be written in Japanese or English.**
- 6. Answers must be marked within the solid frame on the Answer Sheets.**
- 7. Any Answer Sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.**
- 8. The Problems are described in Japanese on page 5-8 and in English on page 9-13.**
- 9. Scrolling, expansion and reduction of the Problems are permitted by use of a mouse or other pointing device only. Keyboard operation is prohibited.**

- Show the derivation processes as well as the results.**
- Continue the answer even if network trouble occurs.**

第3問

同種ボース粒子からなる理想気体におけるボース・アインシュタイン凝縮について考えよう。1粒子状態のエネルギーを ϵ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) として、 $\epsilon_0 (= 0) \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \dots$ が成り立つとする。また、エネルギーが ϵ から $\epsilon + d\epsilon$ の間にある1粒子状態数を $D(\epsilon)d\epsilon$ とする (なお $D(\epsilon)$ は状態数密度、 $d\epsilon$ は正の微小量)。系の温度を $T > 0$ として、ボルツマン定数は簡単のため $k_B = 1$ とする。なお、スピン自由度は考えないものとする。また、粒子の質量を m として、プランク定数を 2π でわった定数を \hbar と書く。化学ポテンシャルを $\mu \leq 0$ とすると、1粒子状態 i を占める粒子数の期待値を表すボース分布は、 $\mu = 0$ かつ $\epsilon_i = 0$ の場合を除いて

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/T} - 1} \quad (1)$$

で与えられる。以下の設問に答えよ。ただし、必要ならば積分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (2)$$

を用いよ。ここで $\zeta(\cdot)$ はゼータ関数である。

- [1] まず、 $N (\gg 1)$ 個の粒子が3次元の箱 (すなわち一辺の長さが L の立方体の領域) に入っている状況を考えよう。この箱内の1粒子波動関数には周期的境界条件が課されており、 L は十分大きいとする。

[1.1] 運動量空間の単位体積あたりの1粒子エネルギー固有状態の数を求め、 L などで表せ。

[1.2] $D(\epsilon)$ を求めよ。(導出過程を明記せよ。) $\rightarrow D(\epsilon)d\epsilon = 4\pi k^2 dk \cdot \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{2\pi^2}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^2}} \epsilon^{1/2} d\epsilon$

[1.3] 全粒子数が N であるという条件は積分で書くことができ、 $\mu < 0$ のとき

$$\int_0^\infty D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = N \quad (3)$$

で与えられる。しかしある T_c より低温だと、この条件を満たす化学ポテンシャルが $\mu \leq 0$ の範囲に存在しなくなる。 $\mu = 0$ の場合に (3) 式の左辺の積分を考えることにより、このような T_c を求め、 L と N などで表せ。

[1.4] 系の温度 T が T_c より低温のとき、基底状態を占める粒子数 N_0 を求め、 N 、 T 、 T_c で表せ。なおここで、基底状態に巨視的な数の粒子が凝縮し N_0 が N のオーダーになることを、ボース・アインシュタイン凝縮と呼ぶ。

[1.5] 前問までの設定で、空間が2次元の場合、ボース・アインシュタイン凝縮が起こらないことを簡潔に議論せよ。(2次元の状態数密度などを係数まで正確に導く必要はない。)

- [2] 空間が2次元の場合を考える。前問までの箱は存在せず、代わりに $N (\gg 1)$ 個の粒子が2次元の調和ポテンシャルに束縛されている状況を考えよう。このポテンシャルは等方的であり、1粒子エネルギーは2つの0以上の整数 (n_x, n_y) を用いて $\epsilon = \hbar\omega(n_x + n_y)$ と書けるとする。ここで $\omega > 0$ は角周波数であり、 $\hbar\omega$ は T に比べて十分小さいとする。また、ゼロ点振動は無視した。

[2.1] $D(\epsilon)$ を求めよ。ただし $\epsilon \gg \hbar\omega$ として、 ϵ の最高次の項だけを求めよ。

[2.2] 全粒子数が N であるという条件は、(3) 式に前問 [2.1] で求めた $D(\epsilon)$ を代入すると得られる。しかしある T_c より低温だと、この条件を満たす化学ポテンシャルが $\mu \leq 0$ の範囲に存在しなくなる。このような T_c を求め、 ω と N などで表せ。

- [2.3] 前問 [2.2] で、 $N \rightarrow \infty$ の熱力学極限をとっても T_c が発散せず、またゼロにもならず有限値にとどまるためには、ポテンシャルをどのように調節すれば良いか考えよう。1 粒子の調和ポテンシャル \hat{V} が、位置演算子 (\hat{x}, \hat{y}) と長さの次元をもつ数 L_0 を用いて

$$\hat{V} = V_0 \left[\left(\frac{\hat{x}}{L_0} \right)^2 + \left(\frac{\hat{y}}{L_0} \right)^2 \right] \quad (4)$$

と書けるとして、 N と L_0 の満たすべき関係を議論せよ。ここで V_0 は L_0 や N には依存しないとする。

- [2.4] 系の温度 T が T_c より低温のとき、基底状態を占める粒子数 N_0 を求め、 N 、 T 、 T_c で表せ。

$$\frac{\hbar}{L_0} < \dots$$

第4問

真空中に置かれた電気的分極率 $\alpha (> 0)$ を持つ中性粒子による電磁波の散乱について考える。中性粒子は入射する電磁波の波長よりも十分小さく、その中心を原点 O にとる。入射波は z 方向にのみ電場をもつ平面波であり、角振動数 ω_0 で振動する。入射波により生じた時間変化する粒子の電気双極子モーメントは z 軸に平行で、その z 成分は $p(t) = \alpha E_0 \cos \omega_0 t$ で表される。ここで $E_0 (> 0)$ は電場の振幅である。入射波により誘起された振動する電気双極子モーメントからの放射を散乱波とする。ここで ε_0, μ_0, c はそれぞれ真空の誘電率、透磁率、光速である。

以下では、入射波により粒子に生じた電気双極子モーメントがつくる、遠方の点 X (座標ベクトル $\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$) におけるポテンシャルを求めよう。ここで極座標を図1のように定義し、点 X における単位ベクトルを $\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ 、 $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ 、 $\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$ とする。原点 O と点 X の距離 r は、入射波の波長 $\frac{2\pi c}{\omega_0}$ よりも十分大きいとする。ここでは中性粒子の電気双極子モーメントを、図2に示す固定された点1、点2上にそれぞれ $+q(t)$ 、 $-q(t)$ の電荷量を置くことにより表現する。点1、2間の距離を定数 l とすると、電気双極子モーメントの z 成分は $q(t)$ を用いて $p(t) = q(t)l = \alpha E_0 \cos \omega_0 t$ と表せる (定数 l は入射波の波長より十分小さい)。

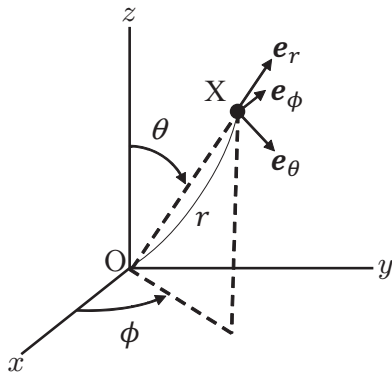


図1

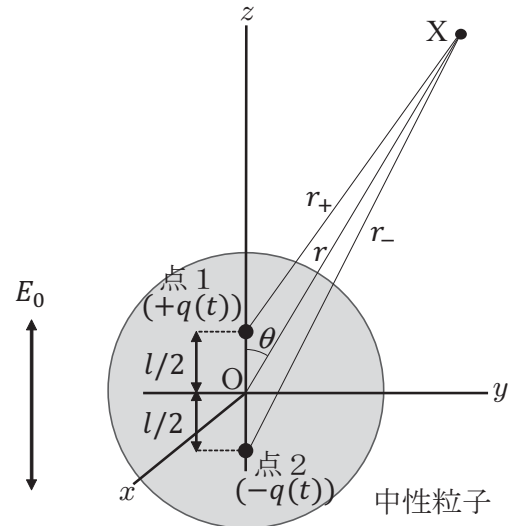


図2

図2のように点 X と点1、点2の距離をそれぞれ r_+ 、 r_- としたとき、電気双極子モーメントがつくる点 X での時間遅延を含むスカラーポテンシャル φ はローレンツゲージで

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{+q(t - \frac{r_+}{c})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_+} + \frac{-q(t - \frac{r_-}{c})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_-} \quad (1)$$

のように書き表せる。設問 [1]-[6] においては電気的分極率が時間に依らない定数 $\alpha = \alpha_0$ であるとして以下の問いに答えよ。

- [1] まず、電場が静電場 $E_0 (\omega_0 = 0)$ であり時間遅延が無視できる場合を考える。このとき、 $l \ll r$ であることを踏まえると、式 (1) のスカラーポテンシャルは

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_0 E_0 \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ C \cdot \frac{1}{r} + D \cdot \frac{1}{r^2} \right\}$$

のように近似できる。 $\frac{l}{r}$ の2次以上の項を無視することで C 、 D を求めよ。

- [2] 以下の設問 [2]-[7] では、 $\omega_0 l \ll c$ を満たす有限の角振動数 $\omega_0 \neq 0$ を持つ電磁波の粒子による散乱を考える。このとき時間遅延を含む式 (1) のスカラーポテンシャルは

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha_0 E_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ F \cdot \frac{1}{r} + G \cdot \frac{1}{r^2} \right\}$$

のように近似できる。 $\frac{l}{r}$, $\frac{\omega_0 l}{c}$ の 2 次以上の項を無視することで F , G に入る式を r , c , ω_0 , t を用いて書き表せ。

- [3] 点 X での時間遅延を含むベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ は以下のように書き表せる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{dp(t - \frac{r}{c})}{dt} \mathbf{e}_z$$

粒子に生じた振動する電気双極子モーメントが作る点 X におけるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を極座標の単位ベクトルと α_0 , r などを用いて書き表せ。ここで、 \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトルである。

点 X における電場と磁束密度を求めよう。ここでは遠方へ伝搬する成分に着目し、設問 [2] で求めたポテンシャル中で $\frac{1}{r}$ の項のみを考え、 $\frac{1}{r^2}$ の項を無視する。また、設問 [4][5] では計算過程であらわれる $\frac{1}{r^2}$ の項も無視せよ。

- [4] 設問 [2] で求めた $\varphi(\mathbf{r}, t)$ に関して、点 X における $\nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$ を極座標の単位ベクトルを用いて書き表せ。ここで、任意の関数 f に対して、以下の式が成り立つことを用いてよい。

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

- [5] 点 X における散乱波の電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を極座標の単位ベクトルを用いて書き表せ。ここで、時間変化する電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} は次の式で与えられる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

必要であれば任意のベクトル $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\phi \mathbf{e}_\phi$ に対して成り立つ次の式を用いてよい。

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi$$

- [6] 粒子により散乱された電磁波のエネルギー流密度を表す点 X におけるポインティングベクトル \mathbf{S} を極座標の単位ベクトルを用いて書き表せ。ここでポインティングベクトル \mathbf{S} は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

また、 \mathbf{S} の大きさ $|\mathbf{S}|$ を θ , ϕ をそれぞれ横軸にとり図示せよ。

- [7] 次に電气的分極率 α が時間的に変化する場合を考える。このような分極率の変調は分子や格子の振動によって生じることがある。電气的分極率 α の時間変化の角振動数 ω_v は入射波の角振動数 ω_0 に比べて小さいとする。このとき電气的分極率は $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega_v t$ で表される。ここで α_0 , α_1 は粒子に依存した定数である。粒子に生じた電気双極子モーメントの z 成分は $p(t) = \alpha(t) E_0 \cos \omega_0 t$ であるとして、粒子により散乱された電磁波の点 X における電場を書き表せ。また、散乱された電磁波の角振動数をすべて書き表せ。

Problem 3

Consider Bose-Einstein condensation of an ideal Bose gas composed of identical particles. Let ϵ_i be the 1-particle energy levels ($i = 0, 1, 2, \dots$) with $\epsilon_0 (= 0) \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \dots$, and let $D(\epsilon)d\epsilon$ be the number of 1-particle states between the energies ϵ and $\epsilon + d\epsilon$, where $D(\epsilon)$ is the density of states and $d\epsilon$ is a small energy increment. Let $T > 0$ be the temperature of the system. For simplicity, set the Boltzmann constant to unity (i.e., $k_B = 1$). We ignore the spin degrees of freedom. Let m be the mass of the particles and \hbar be the Planck constant divided by 2π . Denote the chemical potential by $\mu \leq 0$. Then, the Bose distribution describing the expectation value of the number of particles that occupy the 1-particle state i is given by

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/T} - 1}, \quad (1)$$

except for the case where $\mu = 0$ and $\epsilon_i = 0$. Answer the following Questions. If needed, use the integral formulas

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}, \quad (2)$$

where $\zeta(\cdot)$ is the zeta function.

- [1] Consider the situation that $N(\gg 1)$ particles are confined in a three-dimensional cubic box with side length L . Impose periodic boundary conditions on the 1-particle wavefunction in this box and assume that L is sufficiently large.

- [1.1] Express the number of 1-particle energy eigenstates per unit volume of momentum space in terms of L .
- [1.2] Find $D(\epsilon)$. (Write down the derivation.)
- [1.3] For $\mu < 0$, the condition that the total number of particles is N is given by the following integral equation:

$$\int_0^\infty D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = N. \quad (3)$$

If the temperature of the system is lower than a critical temperature T_c , a chemical potential that satisfies the above condition (3) and $\mu \leq 0$ does not exist. By calculating the integral on the left-hand side of Eq. (3) for $\mu = 0$, express T_c in terms of L and N .

- [1.4] Suppose that the temperature T of the system is lower than T_c . Express the number N_0 of particles that occupy the ground state in terms of N , T , and T_c . Note that Bose-Einstein condensation means that a macroscopic number of particles condense in the ground state and N_0 becomes of the order of N .
- [1.5] Consider the previous setup but now suppose that the spatial dimension is two. Describe concisely the reason why Bose-Einstein condensation does not occur in this case. (You do not need to derive the complete formula of the density of states in two dimensions.)
- [2] Consider the case that the spatial dimension is two. We remove the box of the previous setup and instead assume that $N(\gg 1)$ particles are trapped by a two-dimensional harmonic potential. This potential is isotropic and the 1-particle energy is given by $\epsilon = \hbar\omega(n_x + n_y)$, where n_x and n_y are integers equal to or greater than zero. Here, $\omega > 0$ is the angular frequency and suppose that $\hbar\omega$ is sufficiently smaller than T . Note that the zero-point energy is ignored.

- [2.1] Find $D(\epsilon)$. Suppose that $\epsilon \gg \hbar\omega$ and only write down the highest order term with respect to ϵ .
- [2.2] The condition that the total particle number is N is obtained by substituting $D(\epsilon)$ (obtained in Question [2.1]) to Eq. (3). If the temperature of the system is lower than a critical temperature T_c , a chemical potential that satisfies the above condition and $\mu \leq 0$ does not exist. Express T_c in terms of ω and N .
- [2.3] Consider the adjustment of the potential with which T_c obtained in Question [2.2] does not diverge and does not go to zero when taking the thermodynamic limit $N \rightarrow \infty$. Suppose that the 1-particle potential \hat{V} is written as

$$\hat{V} = V_0 \left[\left(\frac{\hat{x}}{L_0} \right)^2 + \left(\frac{\hat{y}}{L_0} \right)^2 \right], \quad (4)$$

where \hat{x} and \hat{y} are the position operators, L_0 has the dimension of length, and V_0 does not depend on L_0 and N . Find the relationship between N and L_0 to meet the above-mentioned condition of the potential adjustment.

- [2.4] Suppose that the temperature T of the system is lower than T_c . Express the number N_0 of particles that occupy the ground state in terms of N , T , and T_c .

Problem 4

We consider the scattering of an electromagnetic wave by a neutral particle with an electric polarizability $\alpha(>0)$ in vacuum. The particle is sufficiently smaller than the wavelength of the incident electromagnetic wave. The center of the particle is located at the origin O. The incident plane wave with the angular frequency ω_0 has an electric field component only parallel to the z axis. The time-dependent z -component of the electric dipole moment of the particle induced by the incident wave is expressed as $p(t) = \alpha E_0 \cos \omega_0 t$. $E_0(>0)$ is the amplitude of the electric field of the incident wave. The radiation from the oscillating electric dipole moment induced by the incident wave is defined as the scattering wave. Here, ε_0 , μ_0 and c are the dielectric constant and magnetic permeability in vacuum, and the speed of light, respectively.

In the following, consider the potential caused by the electric dipole moment of the particle induced by the incident wave at the point X (position vector $\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$), which is located at a large distance from the particle. The polar coordinates are defined as in Fig. 1. The unit vectors at the point X are $\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$, $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$, $\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$. The distance r between the origin O and point X is sufficiently larger than the wavelength of the incident wave $\frac{2\pi c}{\omega_0}$. Suppose that the electric dipole moment of the particle is expressed by the electric charges $+q(t)$ and $-q(t)$ located at the fixed points 1 and 2 in Fig. 2, respectively. In terms of $q(t)$, the z -component of the electric dipole moment is described as $p(t) = q(t)l = \alpha E_0 \cos \omega_0 t$, where the distance between the fixed points 1 and 2 is l . Here, l is sufficiently smaller than the wavelength of the incident wave.

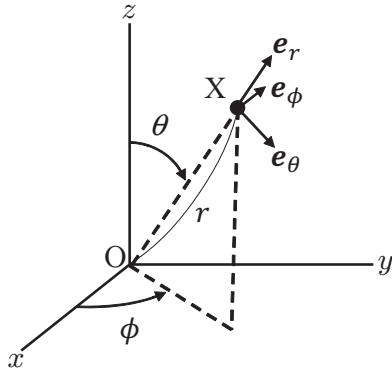


Figure 1

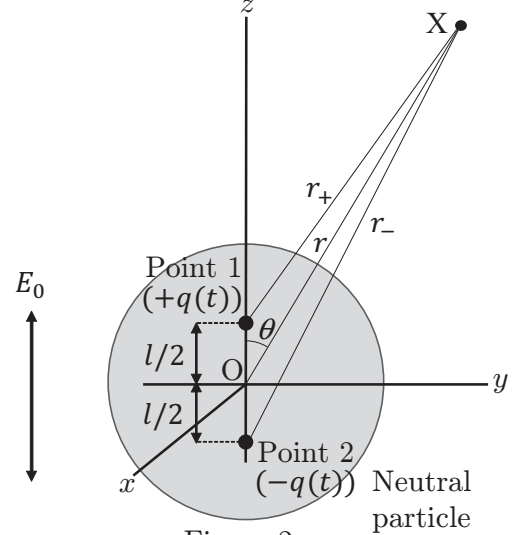


Figure 2

As shown in Fig. 2, the distances from the points 1 and 2 to point X are r_+ and r_- , respectively. The retarded scalar potential φ in Lorentz gauge condition is described as

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{+q(t - \frac{r_+}{c})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_+} + \frac{-q(t - \frac{r_-}{c})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_-}. \quad (1)$$

In the following Questions [1]-[6], assume that the electric polarizability is a time-independent constant given as $\alpha = \alpha_0$.

- [1] First, consider the particle in the static field $E_0(\omega_0 = 0)$ without retardation. On the condi-

tions that $l \ll r$, the scalar potential in Eq. (1) is approximated by

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_0 E_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ C \cdot \frac{1}{r} + D \cdot \frac{1}{r^2} \right\}.$$

Ignoring the second and higher order terms of $\frac{l}{r}$, calculate C and D.

- [2] In Questions [2]-[7], consider the scattering of the electromagnetic field with finite angular frequency $\omega_0 \neq 0$ satisfying $\omega_0 l \ll c$. The scalar potential with retardation in Eq. (1) is approximated by

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha_0 E_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left\{ F \cdot \frac{1}{r} + G \cdot \frac{1}{r^2} \right\}.$$

Ignoring the second and higher order terms of $\frac{l}{r}$ and $\frac{\omega_0 l}{c}$, express F and G by using r , c , ω_0 , and t .

- [3] At the point X, the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ including the retardation is described as follows,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{dp(t - \frac{r}{c})}{dt} \mathbf{e}_z.$$

Describe the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ at point X induced by the oscillating electric dipole moment of the particle, by using α_0 , r and the unit vectors of the polar coordinates. The \mathbf{e}_z is a unit vector along the z direction.

Consider the electric field and magnetic flux density at point X. Considering the propagation of the wave to large distances from the particle, we take into account the terms with $\frac{1}{r}$ and ignore the terms with $\frac{1}{r^2}$ in the potential obtained in Question [2]. In Questions [4] and [5], ignore the terms of $\frac{1}{r^2}$ in the calculation.

- [4] Describe $\nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$, in which $\varphi(\mathbf{r}, t)$ is the scalar potential obtained in Question [2], at point X by using the unit vectors of the polar coordinates. You may use the following equation for an arbitrary function f ,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi.$$

- [5] Describe the electric field \mathbf{E} and magnetic flux density \mathbf{B} at point X by using the unit vectors of the polar coordinates. Here, the time-dependent electric field \mathbf{E} and magnetic flux density \mathbf{B} are expressed by

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

You may use the following formula for an arbitrary vector $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\phi \mathbf{e}_\phi$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi.$$

- [6] Describe the Poynting vector \mathbf{S} , which expresses the energy flux of the electromagnetic wave scattered from the particle, at the point X by using the unit vectors of the polar coordinates. Here, the Poynting vector is expressed as

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Draw the shapes of the amplitude of the Poynting vector $|\mathbf{S}|$ with respect to the horizontal axes θ and ϕ .

- [7] Next, we assume that the electric polarizability α is time-dependent. The oscillations of the electric polarizability can be induced by vibrations of molecules and lattices. The angular frequency of the electric polarizability (ω_v) is smaller than that of the incident wave (ω_0). The electric polarizability is described as $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega_v t$, where α_0, α_1 are constants specific for the particle. The z -component of the electric dipole moment on the particle is expressed as $p(t) = \alpha(t)E_0 \cos \omega_0 t$. Describe the electric field, which is scattered from the particle, at point X. Write all angular frequencies of the scattered electromagnetic wave.