東大物理工学科 2020

21B00817 鈴木泰雅, [1]
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

第一問

[1.1]

万有引力と遠心力が釣り合う点なので,

$$G\frac{mM}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R} \tag{1}$$

よって,

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} \tag{2}$$

である.

[1.2]

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{R} > 0 \tag{3}$$

を満たせばよいので

$$v_2 = \sqrt{G\frac{2M}{R}} \tag{4}$$

である.

[1.3]

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} =: E \tag{5}$$

であり,

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r} + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{Mm}{r} \tag{6}$$

が成立する.また,面積速度が一定である：

$$h = r^2\dot{\theta} = rv \tag{7}$$

であるため,

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r} \tag{8}$$

であるから,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r} + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} \tag{9}$$

であり,長軸の位置にいるとき,$\dot{r} = 0$ であるため,

$$E = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} \tag{10}$$

であり，それぞれの位置を $r_\pm$ とすると，

$$r_\pm = -G\frac{mM}{2E} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G^2m^2M^2}{E^2} + 2\frac{mv^2}{E}} \tag{11}$$

であり，長軸の長さは

$$a = r_+ + r_- = -G\frac{mM}{E} = G\frac{M}{G\frac{M}{R} - \frac{1}{2}v^2} \tag{12}$$

である．

[2.1]

円運動をしているため

$$2mR_0\omega_0^2 = G\frac{2mM}{R_0^2}, \quad \therefore \omega_0 = \sqrt{G\frac{M}{R_0^3}} \tag{13}$$

である．

[2.2]

z 軸周りの慣性モーメントは

$$I_z = \int_0^l r^2 \left(m\delta(r-1/2) + m\delta(m+l/2)\right) dr = \frac{ml^2}{2} \tag{14}$$

[2.3]

回転系で考える．それぞれの地球の中心からの距離は

$$r_\pm = \sqrt{R_0^2 + (l/2)^2 \pm 2R_0(l/2)\cos\phi} \approx R_0\left(1 \pm \frac{l}{2R_0}\cos\phi\right) \tag{15}$$

である．よって，トルクは

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = -\left[\frac{l}{2}mR_0\left(1+\frac{l}{2R_0}\cos\phi\right)\omega_0^2\sin\phi\right] + \left[\frac{l}{2}mR_0\left(1-\frac{l}{2R_0}\cos\phi\right)\omega_0^2\sin\phi\right] \tag{16}$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(2\phi)ml^2\omega_0^2 \tag{17}$$

である．

[2.4]

トルクが 0 の時

$$\sin(2\phi) = 0 \quad \therefore \phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \pi \tag{18}$$

である．また，運動方程式は

$$I_z\dot{\omega}_z = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{19}$$

ゆえ

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\phi} = -\frac{1}{4}\sin(2\phi)l^2\omega_0^2 \approx -\frac{1}{4}2\phi l^2\omega_0^2 \tag{20}$$

である．よって，

$$\ddot{\phi} = -\omega_0^2\phi \tag{21}$$

となるため微小振動の角振動数は

$$\omega_0 \tag{22}$$

である．

第二問

[1.1]

ファラデーの法則より

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{23}$$

であるため，

$$E 2\pi r = -\mu_0 H_0 \cos(2\pi f t) \cdot 2\pi f \cdot \pi r^2 \tag{24}$$

であるため，

$$E = -\mu_0 H_0 \cos(2\pi f t) \cdot f\pi r \tag{25}$$

である．

[1.2]

全体の起電力は

$$E = \int_0^R dr \left(-\mu_0 H_0 \cos(2\pi f t) \cdot f\pi r\right) \tag{26}$$

であり，微小円環で発生する電力 P は

$$P = EI = \frac{E^2}{\rho} = \left(\mu_0 H_0 \cos(2\pi f t) \cdot f\pi r\right)^2 / \rho \tag{27}$$

である．よって，答えは

$$\int_0^R PL2\pi r dr = \left(\mu_0 H_0 \cos(2\pi f t) \cdot f\pi\right)^2 \frac{1}{\rho} \frac{1}{4} R^4 L 2\pi \tag{28}$$

[1.3]

$$\int_0^t \left(\left(\mu_0 H_0 \cos(2\pi f t) \cdot f\pi\right)^2 \frac{1}{\rho} \frac{1}{4} R^4 L 2\pi \right) dt \frac{1}{C} \tag{29}$$

[2.1]

ビオサバールの法則より

$$\boldsymbol{B} = \frac{I a^2}{2\mu_0 (a^2 + x^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_x \tag{30}$$

である．詳しくはカステラの p232

[2.2]

それぞれの磁束密度を足し合わせて

$$\boldsymbol{B} = \frac{Ia^2}{2\mu_0(a^2+(x+b)^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x - \frac{Ia^2}{2\mu_0(a^2+(x-b)^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x \tag{31}$$

である．ここで $x \sim 0$ の時,

$$(a^2+(x\pm b)^2)^{-3/2} = (a^2+b^2+x^2\pm 2bx)^{-3/2} = (a^2+b^2)^{-3/2}\left(1+\frac{x^2\pm 2bx}{a^2+b^2}\right)^{-3/2} \tag{32}$$

$$= (a^2+b^2)^{-3/2}\left(1-\frac{3}{2}\frac{x^2\pm 2bx}{a^2+b^2}+\frac{15}{8}\left(\frac{x^2\pm 2bx}{a^2+b^2}\right)^2+\cdots\right) \tag{33}$$

となる．ここで，x^2 の項は無視するため

$$(a^2+(x\pm b)^2)^{-3/2} \approx (a^2+b^2)^{-3/2}\left(1\mp\frac{3}{2}\frac{2bx}{a^2+b^2}\right) \tag{34}$$

である．よって，

$$\boldsymbol{B} = \frac{Ia^2}{2\mu_0}(a^2+b^2)^{-3/2}\left(-\frac{3bx}{a^2+b^2}\right)\boldsymbol{e}_x = -3\frac{Ia^2}{\mu_0}(a^2+b^2)^{-1/2}bx\boldsymbol{e}_x \tag{35}$$

[2.3]

$$\boldsymbol{B} = \frac{Ia^3}{2\mu_0(a^2+(x+b)^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x + \frac{Ia^3}{2\mu_0(a^2+(x-b)^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x \tag{36}$$

となる．よって，二次の項まで考えると

$$\boldsymbol{B} = \frac{Ia^3}{2\mu_0}\left[2+x^2\left(-\frac{3}{2(a^2+b^2)}+\frac{15}{2}\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}\right)\right] \tag{37}$$

である．よって，この二次の項を 0 にするような a, b の関係式は

$$-\frac{3}{2(a^2+b^2)}+\frac{15}{2}\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2} = 0 \quad \therefore a = 2b \tag{38}$$

である．

第三問

[1.1]

$x = 0$ での境界条件により

$$1 + r = t \tag{39}$$

であり，微小区間 $-\epsilon, \epsilon$ でシュレディンガー方程式を積分すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right) + \alpha\psi(0) = 0 \tag{40}$$

となる．よって，

$$-\frac{\hbar^2}{2m} ik\left(t - (1-r)\right) + \alpha t = 0, \quad \therefore t = \frac{i(-1+r)}{2C - i} \tag{41}$$

[1.2]

これらを解くと

$$r = \frac{-C^2 - iC}{1 + C^2}, \quad t = \frac{1 - iC}{1 + C^2} \tag{42}$$

となる．

[2.1]

分からん

[2.2]

分からん

[3]

それぞれの境界条件より，

$$1 = t_1 + r_1, \quad 1 = \frac{1}{2C} i(t_1 - r_1 - 1), \tag{43}$$

$$t_1 e^{ikL} + r_1 e^{-ikL} = e^{ikL}, \quad e^{ikL} = \frac{1}{2C} i(e^{ikL} - t_1 e^{ikL} + r_1 e^{-ikL}) \tag{44}$$

ここで未知数は t_1, r_1, L の 4 つであり方程式は 4 つあるためこれは L に関して解くことができる．よって解くと

$$r_1 = Ci, \quad t_1 = 1 - Ci, \quad e^{-2ikL} = 1, -1 \tag{45}$$

となってしまいすべてを満たす L が存在しなくなってしまう....

第四問

[1]

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right) = -\frac{nk_BT}{(1-bn)^2}(-b) - 2an = \frac{bnk_BT}{(1-bn)^2} - 2an \tag{46}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right) = 2b^2\frac{nk_BT}{(1-bn)^3} - 2a \tag{47}$$

である．よって，

$$n_C = \frac{1}{3b}, \quad T_C = \frac{8a}{9k_Bb} \tag{48}$$

となる．また，圧力は

$$P_C = \frac{a}{3b^2} \tag{49}$$

である．

[2]

多変数関数の逆関数の積分がこれでいいのか分からないけど…

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{N}{n^2}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)^{-1} = -\frac{N}{n^2}\left(\frac{bnk_BT}{(1-bn)^2} - 2an\right)^{-1} \tag{50}$$

であり，$n_C = n, T > T_C$ の時，

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{N}{n_C^2}\frac{4}{3k_B(T-T_C)} \tag{51}$$

である．ここで，

$$-\frac{n_C}{N}\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{n_C}\frac{4}{3k_B(T-T_C)} \tag{52}$$

である．この時，

[3]

まず，Z_0 を求めるとガウス積分より

$$Z_0 = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\left(\frac{2m\pi}{k_BT}\right)^{3N/2} \tag{53}$$

となる．