

東大物理工学科 2024

21B00817 鈴木泰雅,¹
suzuki.t.ec@m.titech.ac.jp

第二問

[1.1]

$$m\ddot{x}_n = kx_{n+1}(t) - 2kx_n(t) + kx_{n-1}(t) \quad (1)$$

[1.2]

計算すると

$$m\ddot{c}_q(t) = (2k \cos(q) - 2k) c_q(t), \quad \therefore \ddot{c}_q(t) = \frac{4k}{m} \sin^2(q/2) c_q(t) \quad (2)$$

[1.3]

前の問題より

$$\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \left| \sin\left(\frac{q}{2}\right) \right| \quad (3)$$

[1.4]

$q = 0$ のとき,

$$\ddot{c}_q(t) = 0 \quad \therefore c_q(t) = At^2 + Bt + C \quad (4)$$

[2.1]

(i): $n \leq -1, n \geq 1$ の時

前問と同様にして

$$m\ddot{x}_n = kx_{n+1}(t) - 2kx_n(t) + kx_{n-1}(t) \quad (5)$$

(ii): $n = 0$ の時

M に気を付けて

$$M\ddot{x}_0 = kx_1(t) - 2kx_0(t) + kx_{-1}(t) \quad (6)$$

[2.2]

それぞれ代入して整理すると

$$-\omega_q^2 m (e^{iqn} + R_q e^{-iqn}) = k (e^{iqn} + R_q e^{-iqn}) (2\cos(q) - 2) \quad (7)$$

また,

$$-\omega_q^2 m = k (2\cos(q) - 2) \quad (8)$$

よりそれぞれ成立する.

[2.3]

(i): $n = 0$ のとき

$$M\left(-\omega_q^2(T_q)\right)=k\left(T_q e^{iq}-2 T_q+e^{-iq}+R_q e^{iq}\right) \quad (9)$$

(ii): $n = -1$ のとき

$$-\omega_q^2 m\left(e^{-iq}+R_q e^{iq}\right)=k\left(T_q-2\left(e^{-iq}+R_q e^{iq}\right)+e^{-2 i q}+R_q e^{2 i q}\right) \quad (10)$$

よって, これを行列で表すと

$$\left[\begin{array}{cc} -\omega_q^2 M-k e^{i q}+2 k & -k e^{i q} \\ -k & -\omega_q^2 m e^{i q}+2 k e^{i q}-k e^{-2 i q} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} T_q \\ R_q \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} k e^{i q} \\ \omega_q^2 m e^{-i q}-2 k e^{-i q}+k e^{2 i q} \end{array}\right] \quad (11)$$

[2.4]

計算大変だからやってない.

[3.1]