2022年5月13日配布

電磁気学　演習第10回 — 静磁場の基本法則

問題 10.1：ビオ・サバールの法則

(1) 電磁場は時間変化しないとする．マクスウェル方程式から静磁場 $\boldsymbol{B}$ が満たすべき方程式を求めよ．

(2) ベクトルポテンシャルを用いて磁場を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ と表すとする．さらに，次の条件

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{10.1}$$

が成り立っていると仮定する．このとき，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の満たすべき方程式を導き，その解を求めよ．

(3) 仮定した条件が妥当であること，すなわち，得られた解が式 (10.1) を満たすことを示せ．

(4) 求めた解に対応する磁場磁場 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ がビオ・サバールの法則を満たすことを示せ．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \, \mathrm{d}^3 x' \tag{10.2}$$

問題 10.2：オームの法則とジュールの法則

(1) 断面積 S の無限に長い円柱内に電荷 q の荷電粒子が一様な体積密度 n で分布し，平均速度 v で円柱の軸方向に移動しているとする．この円柱を流れる電流密度 j を求めよ．

(2) 円柱に平行に一様な電場 $\boldsymbol{E}$ をかけると荷電粒子はクーロン力を受けて加速するが，同時に速度に比例した抵抗を受けるものとする．粒子の運動方程式は次のようになる．

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} - \frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}(t) \tag{10.3}$$

緩和時間 τ は正の定数とする．電場 $\boldsymbol{E}$ を一定として運動方程式を解き，$t \to \infty$ で系が定常状態に達することを示せ．

(3) 定常状態で電流密度が $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ と表せることを示せ．また，比例係数 σ を求めよ．

(4) 円柱の長さ l の部分について，その両端の電位差 $\Delta\phi$ を求め，オームの法則 (Ohm's law) $\Delta\phi = RI$ が成り立つことを示せ．また，この長さ l の部分の抵抗 R を求めよ．

(5) $\boldsymbol{E}$ が粒子を長さ l だけ移動させることで為した仕事 w を求めよ．また，単位時間あたりに端を通過した粒子数 N をかけることにより，ジュールの法則 (Joule's law) $W = Nw = RI^2$ が成り立つことを示せ．

問題 10.3：回路を流れる電流

細い導線の回路に電流 I が流れているとする．

(1) 問題 10.1(2) で求めたベクトルポテンシャルが $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}'|}$ と書けることを示せ．回路に沿った経路を C とし，$d\boldsymbol{x}'$ は点 $\boldsymbol{x}'$ の接線方向の微小ベクトルとする．

(2) この回路を十分遠方から見たときのベクトルポテンシャルが

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{x}') \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{10.4}$$

と近似できることを示せ.

(3) 任意の閉回路 C について次の二つの式が成り立つことを示せ.

$$\oint_C \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}') + \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{x}') = 0 \tag{10.5}$$

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2} \oint_C (\boldsymbol{x}' \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r} \tag{10.6}$$

(4) 前小問 (2) で求めたベクトルポテンシャルが磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ を用いて

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{10.7}$$

の形で表されることを示し，$\boldsymbol{m}$ を求めよ（ただし，$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ とする）.

以上