

# 物 理 工 学 専 攻 入 学 試 験 問 題

## 物 理 学 I

(2問出題, 2問解答)

平成28年8月30日(火) 9:30~11:30

### 注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。
3. 出題された2問とも解答すること。
4. 答案用紙が2枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

## 第1問

- [1] 質量  $m$  の3つの物体 A、B、C が、図1のように、それぞれバネ定数  $k$  のバネで結ばれ、摩擦のある水平面上に置かれている。 $\mu$  を最大静止摩擦係数、 $g$  を重力加速度とし、それぞれの物体に働く最大静止摩擦力を  $\mu mg$ 、動摩擦力を  $\frac{2\mu}{3}mg$  とする。最初にバネは自然長にあり、これらの物体は静止している。この状態から、図1に示すように、物体 C を  $x$  軸上の正の向きに一定の速度  $v_0$  で動かす。これらの物体は  $x$  方向のみに運動するとして、以下の設問 [1.1]–[1.4] に答えよ。

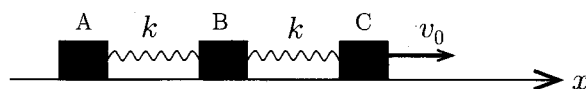


図 1

$$\frac{\mu^2 m g^2}{6 k v_0^2} < 1$$

$$\frac{\mu^2 m g^2}{6 k v_0^2} < 1$$

- [1.1] 物体 C が動き始めてから、物体 B が動き出すまでの時間  $t_0$  を求めよ。
- [1.2] 物体 B が動き始めてから、しばらくの間、物体 A は静止したままである。時刻  $t$  における物体 B の重心の位置を  $x_B(t)$  とするとき、この間の物体 B の運動方程式を書き下せ。ただし、物体 B が動き始めた時刻を  $t = 0$  とし、 $x_B(t = 0) = 0$  とする。  $\dot{x}_B(0) = 0$  とする。
- [1.3] 設問 [1.2] で得た運動方程式を解いて、物体 B の重心の位置  $x_B(t)$  を求めよ。
- [1.4]  $t_0$  が時間の次元をもつ量  $\sqrt{\frac{m}{k}}$  と比較して十分に小さいとする ( $t_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \ll 1$ )。この場合に、設問 [1.3] で得た  $x_B(t)$  に  $t = t_0$  を代入し、 $x_B(t = t_0)$  を  $t_0$ 、 $v_0$ 、 $k$ 、 $m$  のみを用いて近似的に表現せよ。また、得られた近似式に基づき、 $t = t_0$  において物体 A が静止しているかどうかを理由をつけて簡単に説明せよ。
- [2] 質量  $m$  の3つの質点 A、B、C が、図2(a)のように、それぞれバネ定数  $k_0$  かつ自然長  $l$  のバネで連結され、 $x$  方向に摩擦なく運動する。これらの質点には、バネから受ける力に加えて、以下のようなポテンシャル  $U(x)$  による力が作用している。

$$U(x) = k_1 l^2 \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right] \quad (k_1 > 0)$$

この  $U(x)$  の概略図を図2(b)に示す。質点 A、B、C は最初に  $x = -l$ 、 $0$ 、 $l$  に配置され、ちょうど力のつり合いの位置にある。以下の設問 [2.1]–[2.3] に答えよ。

- [2.1]  $k_1$  の値は、この力のつり合いの位置が安定であるように設定されているものとする。これらの質点が、つり合いの位置からわずかにずれ、微小振動を始めた。質点 A、B、C のつり合いの位置からの変位を、それぞれ  $q_A$ 、 $q_B$ 、 $q_C$  とする。つり合いの位置からの変位は十分に小さいとして、これらの質点の運動方程式を  $q_A$ 、 $q_B$ 、 $q_C$  に関して1次の形に書き下せ。また、この微小振動の固有振動数をすべて求めよ。
- [2.2] ある  $k_c$  より大きい  $k_1$  に対して、この微小振動の基準振動の1つは不安定である。 $k_1 > k_c$  における、この不安定な基準振動は、[2.1] で求めた固有振動数のうち、どれに対応するか答えよ。さらに、この  $k_c$  を求めよ。
- [2.3]  $k_1 = \frac{4k_c}{9}$  ( $< k_c$ ) の場合に、設問 [2.2] で考察した基準振動における質点 A、B、C の変位の比  $q_A : q_B : q_C$  を求めよ。

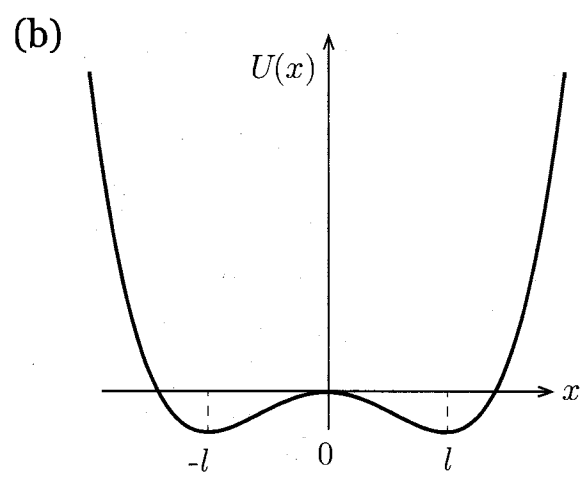
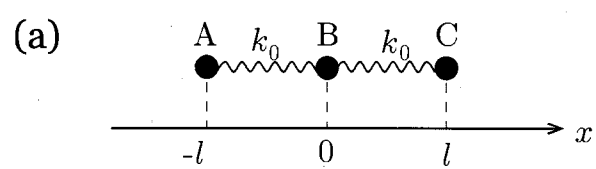


图 2

## 第2問

図1に示すように、電荷  $\pm q$  ( $q > 0$ ) の2つの点電荷が距離  $d$  だけ離れて真空中に置かれている。このとき、ある点Pにおける静電場を考えよう。2つの点電荷の中点をO、点Oから点Pまでの距離を  $r$ 、正電荷から点Pまでの距離を  $r_+$ 、負電荷から点Pまでの距離を  $r_-$  とする。また、負電荷を始点とし正電荷を終点とするベクトルを  $\vec{d}$  (大きさ  $|\vec{d}| = d$ )、2つの点電荷による電気双極子モーメントを  $\vec{p} = q\vec{d}$  (大きさ  $|\vec{p}| = p$ )、 $\vec{OP}$  が  $\vec{p}$  となす角を  $\theta$  とする。真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

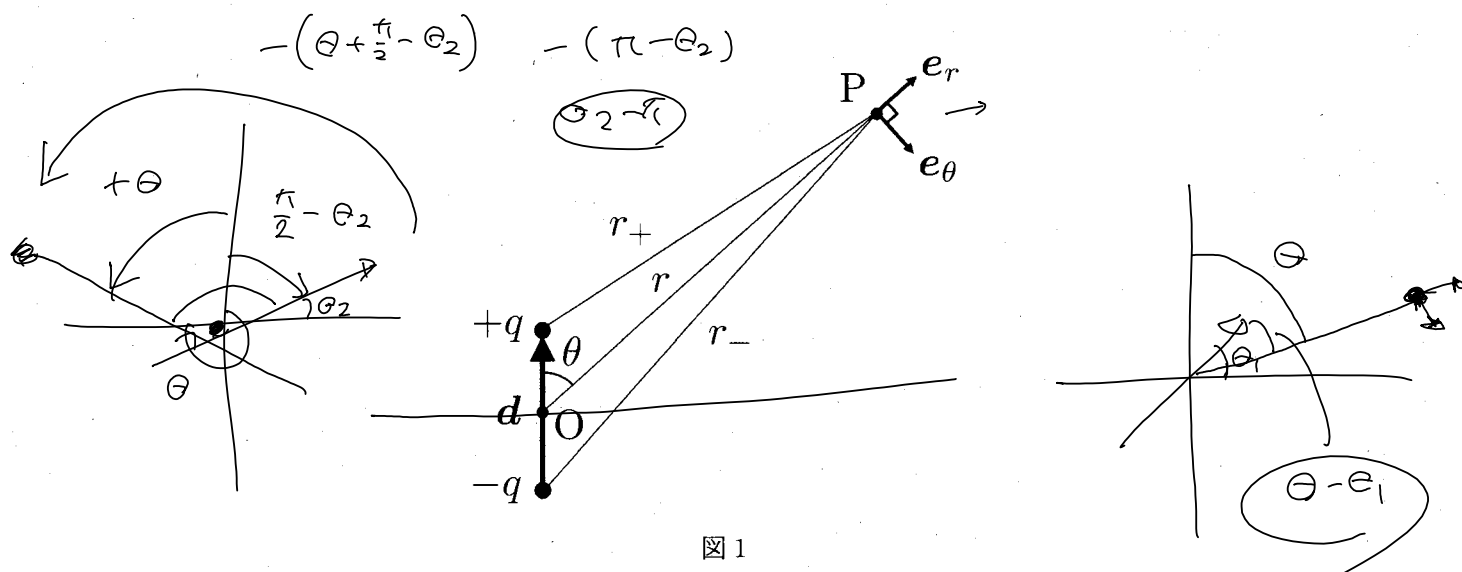
[1] 点Pにおける静電ポテンシャル  $\phi(P)$  を  $\epsilon_0$ 、 $q$ 、 $r_+$ 、 $r_-$  を用いて表せ。

[2]  $r \gg d$  の場合に成り立つ静電ポテンシャル  $\phi(P)$  の近似式を  $\epsilon_0$ 、 $d$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $\theta$  を用いて表せ。ただし、 $d/r$  に関する2次以上の項は無視せよ。

[3]  $r \gg d$  のとき、点Pにおける電場は以下の式 (1) で表される。

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad (1)$$

[2] の結果から式 (1) を導出する過程を示せ。ただし、図1に示すように、 $\vec{e}_r$  は  $\vec{OP}$  と同じ向きの単位ベクトル、 $\vec{e}_\theta$  は  $\vec{d}$  と  $\vec{e}_r$  の張る平面上にあり  $\vec{e}_r$  と垂直な単位ベクトルである。



以下では、電気双極子の空間的な大きさが無視でき、電気双極子の作る電場が式 (1) で表されるものとする。また、電気双極子を単に双極子と記す。

図2に示すように、真空中に双極子1および2が距離  $l$  だけ離れて置かれている。それぞれの双極子の位置は固定されており、双極子モーメント  $\vec{p}_1$ 、 $\vec{p}_2$  の向きは紙面内を回転できるものとする。 $\vec{p}_1$  および  $\vec{p}_2$  が双極子1、2を通る直線となす角をそれぞれ  $\theta_1$  および  $\theta_2$  とする。

- [4] 図2において、 $p_1$ の向きは固定されており、 $p_2$ のみ紙面内を回転できるものとする。初期状態 (a)  $(\theta_1, \theta_2) = (\pi/2, 0)$  および (b)  $(\theta_1, \theta_2) = (\pi/2, -\pi/2)$  のそれぞれの場合について、双極子1のつくる電場による $p_2$ の振る舞いを、{時計回りに回り始める、反時計回りに回り始める、回転しない} のいずれかで答えよ。

- [5] 双極子1のつくる電場  $E_1$  の中に置かれた双極子2のエネルギー  $U = -p_2 \cdot E_1$  を  $\epsilon_0$ 、 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $l$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$  を用いて表せ。ここで、 $p_1$ 、 $p_2$  はそれぞれ  $p_1$ 、 $p_2$  の大きさである。

- [6] 図2において、 $p_1$ 、 $p_2$  のいずれも紙面内を自由に回転できる場合について考える。[5] で求めた  $U$  はこの系のポテンシャルエネルギーである。最も安定な向き  $(\theta_1, \theta_2)$  を全て求め、そのときの  $U$  を  $\epsilon_0$ 、 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $l$  を用いて表せ。結論を導き出す過程も記せ。

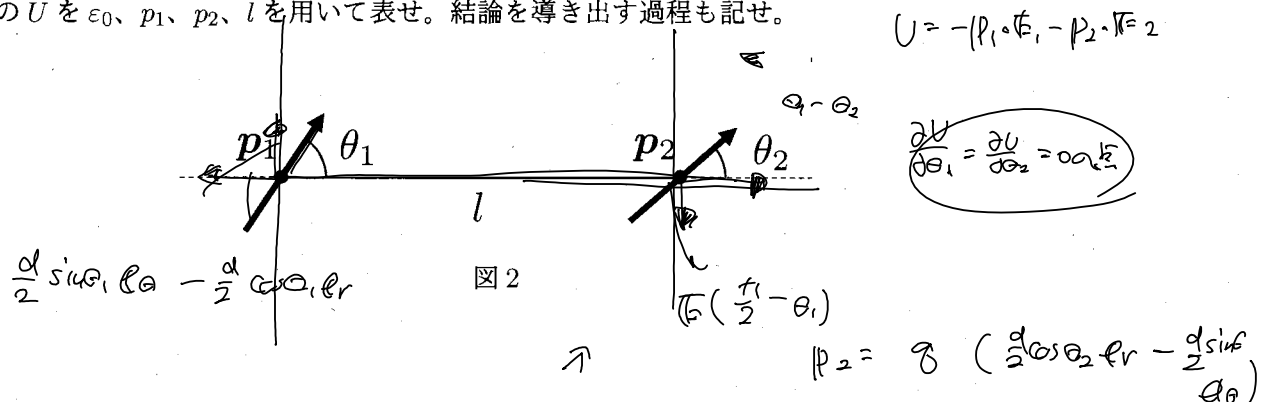
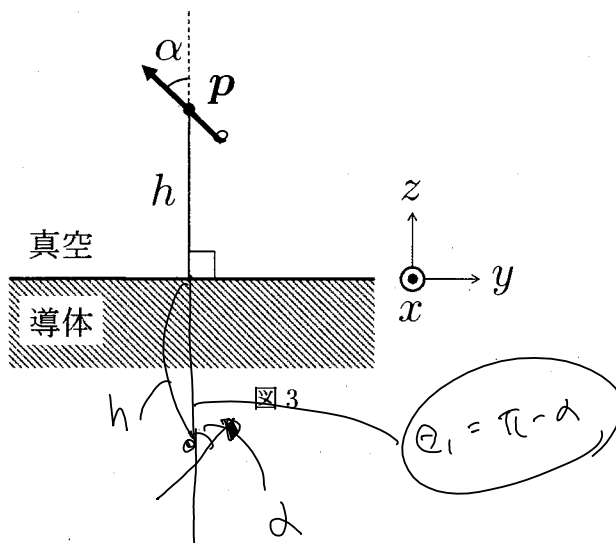


図3に示すように、 $x$  および  $y$  方向に無限に広がる接地された導体の表面 ( $z = 0$ ) から距離  $h$  だけ離れた位置に双極子を置いた。双極子の双極子モーメントを  $p$ 、その大きさを  $p$  とする。

- [7] この系のポテンシャルエネルギー  $U'$  を  $\epsilon_0$ 、 $p$ 、 $h$ 、 $\alpha$  を用いて表せ。ただし、 $\alpha$  は導体表面の法線と  $p$  のなす角である。また、 $h$  が無限に大きいとき  $U' = 0$  とせよ。

- [8] 双極子の位置は導体表面から距離  $h$  の位置に固定されているが、双極子モーメント  $p$  の向きは紙面内を自由に回転できるものとする。 $p$  が最も安定となる向き  $\alpha$  を全て求めよ。



# 物 理 工 学 専 攻 入 学 試 験 問 題

## 物 理 学 II

(4問出題, 3問解答)

平成28年8月30日(火) 13:00~16:00

### 注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。
3. 出題された4問のうちから3問を選び解答すること。
4. 答案用紙が3枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

## 第1問

以下のポテンシャル  $V(x)$  中にある質量  $m$  の粒子の1次元運動を考える。プランク定数  $\hbar$  を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$  とし、各問に答えよ。

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < -\frac{a}{2}) \\ 0 & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ +\infty & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

ただし  $a$  は正の定数とする。

- [1] 1粒子のとりうる軌道状態を考える。すべてのエネルギー固有値とその規格化された固有関数を求めよ。ここではスピンの自由度は考えない。

以下では [1] で求めた基底状態と第1励起状態のみを考え、それぞれの波動関数を  $g(x)$ 、 $e(x)$  と表せよ。

- [2] 2つの同種粒子を考える。粒子間には相互作用が働かないものとする。2つの粒子から構成される軌道波動関数を  $\Psi(x_1, x_2)$  とする。ここで  $x_1, x_2$  はそれぞれ粒子1、粒子2の座標である。このとき2つの粒子の入れ替えに対して  $\Psi(x_1, x_2) = +\Psi(x_2, x_1)$  を満たす対称型、もしくは  $\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1)$  を満たす反対称型の波動関数のみが許される。 $g(x)$ 、 $e(x)$  を用いて構成可能な2粒子の軌道波動関数4つを全て書き表せ。なおここではスピンの自由度を考えない。

次に  $s = \frac{1}{2}$  のスピンを持つ2つの同種フェルミ粒子がとりうる状態を考える。粒子1のスピン演算子を  $\hat{s}_1 = (\hat{s}_{1x}, \hat{s}_{1y}, \hat{s}_{1z})$ 、粒子2のスピン演算子を  $\hat{s}_2 = (\hat{s}_{2x}, \hat{s}_{2y}, \hat{s}_{2z})$  とする。 $\hat{s}_{1z}$ 、 $\hat{s}_{2z}$  の固有状態で、固有値が正の状態を  $|\uparrow\rangle_1$ 、 $|\uparrow\rangle_2$ 、負の状態を  $|\downarrow\rangle_1$ 、 $|\downarrow\rangle_2$  とする。2粒子の合成スピン演算子を  $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2 = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$  とする。なお磁場はゼロとし、[6]を除いて粒子間には相互作用が働かないものとする。

- [3] ここではスピンの自由度のみを考える。2粒子のスピンのみで構成される状態のうち、 $\hat{S}^2$  と  $\hat{S}_z$  の同時固有状態と、そのときの全スピン  $S$  をすべて求めよ。
- [4] [2] で求めた軌道状態と [3] で求めたスピン状態の積で表される6つの独立なエネルギー固有状態と、それぞれのエネルギー固有値を求めよ。
- [5] [4] で求めた2粒子状態それぞれに対して、粒子間距離の2乗の期待値  $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$  を求めよ。なお以下の定積分を記号  $A$ 、 $B$ 、 $C$  で置き換えてもよい。

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)^2 dx, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e(x)^2 dx, \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) e(x) dx$$

- [6] ハミルトニアンに  $V_0 x_1 x_2$  で表される摂動ポテンシャルを加える。[4] で求めた各状態に対応するエネルギー固有値を  $V_0$  に関して1次の範囲で求めよ。必要ならば [5] の記号  $A$ 、 $B$ 、 $C$  を用いてよい。

## 第2問

温度  $T$  の熱平衡状態にある、直線上を自由に折れ曲がるひも状分子を考える。簡単のために、分子は図1のように長さ  $a$  の棒状の部分  $N$  個がつながった形をしているものとする。隣り合う棒の間の角度は  $0$  あるいは  $\pi$  となり、それぞれの棒は右向きあるいは左向きとなる。この分子の形状は、始点からのそれぞれの棒の向きで一意に定めることができる。たとえば図1に示された分子の形状は、(右、右、左、左、左、右、...) である。分子に沿って右方向に  $x$  軸をとる。始点は  $x = 0$  に固定されているものとし、終点の座標を  $X$  とする。 $N$  は偶数、ボルツマン定数を  $k_B$  として、以下の問いに答えよ。ただし整数  $M (\gg 1)$  に対して  $\log(M!) \cong M \log M - M$  ( $\log$  は自然対数) と近似せよ。

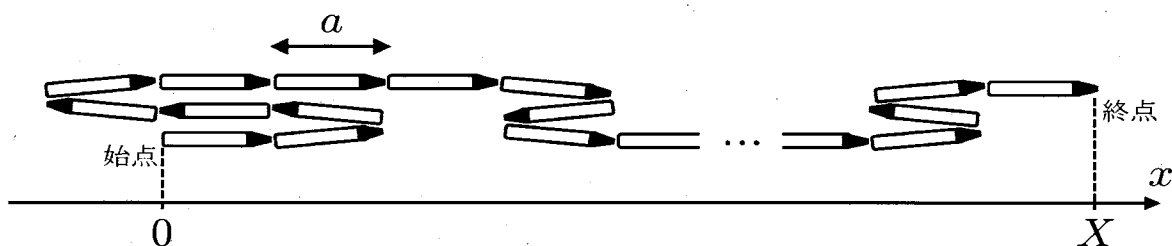


図1

まず分子のエネルギーがそれぞれの棒の向きにはよらない場合を考える。

- [1] 分子全体の中で右向きの棒の数が  $n^+$ 、左向きの棒の数が  $n^-$  であるとする。このとき終点の座標  $X$  を  $n^+$ 、 $n^-$ 、 $a$  を用いて表せ。また  $n$  を  $-N \leq n \leq N$  なる偶数として、 $X = na$  となる確率  $P(n)$  を  $N$ 、 $n$  を用いて表せ。さらにこのときの分子のエントロピー  $S$  を、 $N \pm n \gg 1$  として  $N$ 、 $n$ 、 $k_B$  を用いて表せ。
- [2] 終点を座標  $X (> 0)$  に固定することを考える。ここで  $N \pm X/a \gg 1$  とする。このとき終点を固定するために必要な力  $\tau$  はヘルムホルツ自由エネルギーを  $F$  として

$$\tau = \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_T$$

で与えられる。 $\tau$  を求めよ。また  $X \ll Na$  のときの  $\tau$  と  $X$  との関係を求めよ。

次に  $x$  軸の方向に外場を印加した場合を考える。このとき右向きの棒は  $-\kappa$ 、左向きの棒は  $+\kappa$  のエネルギーをとるものとする。ここで  $\kappa$  は定数である。

- [3] 分配関数を求め、分子のエネルギー  $E$  の期待値  $\langle E \rangle$ 、および分子の終点の座標の期待値  $\langle X \rangle$  を  $T$  の関数として求めよ。また  $|\kappa| \ll k_B T$  のときの  $\langle E \rangle$ 、 $\langle X \rangle$  の表式を求めよ。
- [4] 分子のエネルギーの分散  $\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ 、および分子の終点の座標の分散  $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  を求めよ。いずれも  $T$  の関数として求めよ。



### 第3問

静的な磁束密度  $\mathbf{B}_{\text{ex}}$  中の一様かつ等方的な媒質中を直線偏光の光が通過すると、電場ベクトル  $\mathbf{E}$  の振動面はある角度だけ回転する。これはファラデー効果と呼ばれ、その回転角は媒質の複素比誘電率テンソル  $\tilde{\epsilon}$  の成分と関係付けることができる。以下、真空の誘電率と透磁率を、それぞれ  $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$  と

する。ベクトルの転置を  $(v_1, v_2, v_3)^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  と書く。

まず、媒質中における束縛された電子の運動を考慮することで、複素比誘電率テンソルを求めよう。ここで、電子の質量を  $m$ 、電子の電荷を  $-e$  ( $< 0$ ) とする。空間的に一様な、時間的に振動する複素電場ベクトル  $\mathbf{E}_{\text{ex}} = (E_x, E_y, 0)^T \exp(-i\omega t)$  により ( $\omega > 0$ )、電子は複素変位ベクトルが  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)^T \exp(-i\omega t)$  の形で表される強制振動を行うとする。電子は電場  $\mathbf{E}_{\text{ex}}$  による力に加えて、静的な磁束密度  $\mathbf{B}_{\text{ex}} = (0, 0, B)^T$  ( $B > 0$ ) によるローレンツ力と、 $-m\omega_0^2 \mathbf{u}$  ( $\omega_0 > 0$ ) の復元力を受けるとして、以下の設問 [1]、[2] に答えよ。

[1] 電子の運動方程式を書き下し、 $u_x$ 、 $u_y$  を求めよ。

[2] 媒質の電気分極密度ベクトルを  $\mathbf{P}$ 、電子の密度を  $n$  とすると、 $\mathbf{P} = \epsilon_0(\tilde{\epsilon}\mathbf{E}_{\text{ex}} - \mathbf{E}_{\text{ex}}) = -ne\mathbf{u}$  の関係が成り立つ。 $+z$  方向の磁束密度  $\mathbf{B}_{\text{ex}}$  中における媒質の複素比誘電率テンソル  $\tilde{\epsilon}$  は、

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & i\gamma & 0 \\ -i\gamma & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表される。 $\epsilon_{xx}$  と  $\gamma$  を  $\omega$  および  $B$  の関数として書け。また、 $\omega_0 \gg \omega > 0$ 、 $\omega_0 \gg eB/m$  のとき、 $\gamma > 0$ 、 $\epsilon_{xx} > 1$  が成り立つことを示せ。

次に、 $+z$  方向の磁束密度  $\mathbf{B}_{\text{ex}}$  下の媒質中を、偏光状態を変えずに伝搬する平面波を考える。この平面波の電場ベクトル  $\mathbf{E}$  および磁場ベクトル  $\mathbf{H}$  は、以下のように表される。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{k}$  は波数ベクトル、 $\mathbf{E}_0$  と  $\mathbf{H}_0$  は位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  にも時刻  $t$  にもよらない複素定数ベクトルである。この平面波は、以下の方程式を満たす。

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \mu_0 \omega \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\tilde{\epsilon} \epsilon_0 \omega \mathbf{E}_0 \quad (3)$$

ここで  $\omega > 0$  とし、 $\tilde{\epsilon}$  は式 (1) の形をもち、 $0 < \gamma < \epsilon_{xx}$  を満たすものとする。

[3] 式 (3) から  $\mathbf{H}_0$  を消去し、以下の方程式を導出せよ。 $c$  は真空中の光速を表す。

$$(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} - |\mathbf{k}|^2 \mathbf{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}_0 = \mathbf{0} \quad (4)$$

さらに平面波が波数ベクトル  $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)^T$  で媒質中を  $+z$  方向に進むものとする。

[4] 式 (4) が、 $\mathbf{E}_0$  の  $x$  成分がゼロでない解をもつのは、 $k_z = k_+$  と  $k_z = k_-$  ( $0 < k_- < k_+$ ) という2つの場合のみである。 $k_{\pm}$  を  $\epsilon_{xx}$ 、 $\gamma$ 、 $\omega$ 、 $c$  を用いて表し、それらに対応する解  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0\pm}$  を求めよ。ただし、 $|\mathbf{E}_{0\pm}| = E$  とする。

- [5] [4] で得られた  $E_{0\pm}$  を用いて、 $E_{\pm}(z, t) = E_{0\pm} \exp(ik_{\pm}z - i\omega t)$  を定義する。 $E_{+}(z = 0, t)$  の  $x$  成分と  $y$  成分それぞれの実部の時間依存性を図示せよ。

図1に示すように、 $0 \leq z \leq l$  の領域を占める厚さ  $l$  の媒質に対して、 $+z$  の向きに伝搬する平面波が入射する。この平面波は直線偏光で、 $z = 0$  での電場ベクトルが以下のように表されるものとする。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \Big|_{z=0} = (E, 0, 0)^T \exp(-i\omega t) \quad (5)$$

- [6] 式 (5) の境界条件を満たす  $E(\mathbf{r}, t)$  を、[5] で定義した  $E_{+}(z, t)$  と  $E_{-}(z, t)$  の線形結合で表せ。 $z = l$  における平面波の電場ベクトルは、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \Big|_{z=l} = \mathbf{F} \exp \left( i \frac{k_{+} + k_{-}}{2} l \right) \exp(-i\omega t) \quad (6)$$

と表すことができる。ベクトル  $\mathbf{F}$  を求めよ。さらに、媒質を通過したことによる平面波の偏光面の回転角を  $\theta$  とする。 $\theta$  を  $k_{+}$ 、 $k_{-}$ 、 $l$  を用いて表せ。ただし、媒質の表面における反射の影響は無視する。

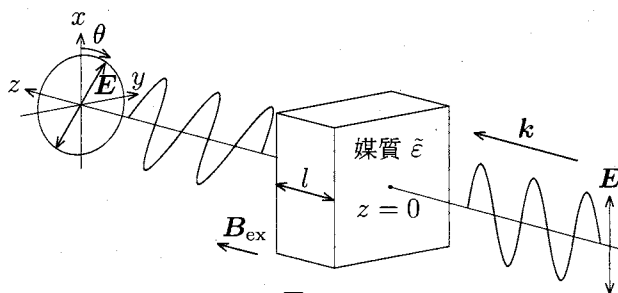


図 1

- [7] 図2に示すように、[6] で角度  $\theta$  回転した平面波が  $z$  軸に垂直に置かれた鏡で反射されて、再び  $z = 0$  に戻ってきたとする。このとき、電場の振動面の  $x$  軸に対する回転角を求めよ。

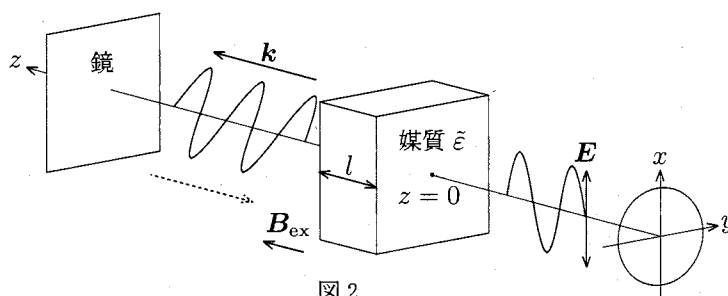


図 2

## 第4問

図1に示す電子線の散乱実験について考える。試料に波数  $k$  (波長  $\lambda = 2\pi/|k|$ ) の電子線を入射し、散乱された波数  $k'$  の電子線を面型ディテクタで観測する。試料に入射する電子線は平面波であり、弾性散乱のみを考え多重散乱は無視する。以下の設問に答えよ。

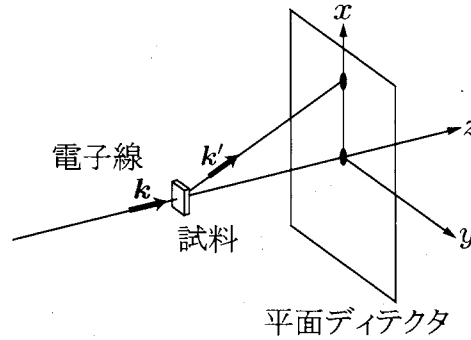


図1

- [1] 波長  $\lambda = 0.01 \text{ nm}$  の電子線を発生させるために必要な電子の加速電圧を、以下の物理定数を用いて求めよ。ただし相対論的補正は無視せよ。

プランク定数:  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 、電子の電荷:  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

電子の質量:  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

原子の集合からなる試料を考える。 $j$  番目の原子の座標を  $\mathbf{r}_j$  とすると、散乱ベクトル  $\mathbf{K} (= \mathbf{k}' - \mathbf{k})$  に対応する散乱電子波の振幅  $A(\mathbf{K})$  は、原子散乱因子  $f_j$  を用いて

$$A(\mathbf{K}) = \sum_j f_j \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_j)$$

と表される。以下では原子散乱因子の  $\mathbf{K}$  依存性を無視する。

- [2] 図2に示すように、 $f_j = f$  を持つ同種の原子が間隔  $a$  で正方格子状に並んでいる試料を考える。原子が  $x$  方向に  $N_x$  個、 $y$  方向に  $N_y$  個並んでおり、 $z$  方向の積層はないものとする。左下の原子の位置を原点とする。このとき、散乱ベクトル  $\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z)$  に対して  $A(\mathbf{K})$  は、ある関数  $L$  を用いて

$$A(\mathbf{K}, N_x, N_y) = fL(K_x, N_x)L(K_y, N_y)$$

と表されることを示せ。散乱強度は  $|A(\mathbf{K}, N_x, N_y)|^2$  に比例する。 $N_x = 1, 2, 3$  のそれぞれについて、 $|L(K_x, N_x)|^2$  の概形を  $0 \leq K_x \leq 2\pi/a$  の区間で描け。

- [3] 図3に示す菱形の単位胞中に1つの原子を有する単原子層からなる2次元結晶の逆格子の基本ベクトルを求めよ。また、この結晶に電子線を垂直入射させたときに得られる回折角 ( $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{k}'$  がなす角度) のうち、小さい方から3つ ( $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ ) を、結晶の格子定数  $a$  および電子線の波長  $\lambda$  を用いて表せ。ただし、2次元結晶を構成する原子数は  $a_1$ 、 $a_2$  方向ともに十分多いとする。さらに、回折角が小さい場合、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  に対応する平面ディテクタ上での電子線回折パターンの概形を描け。

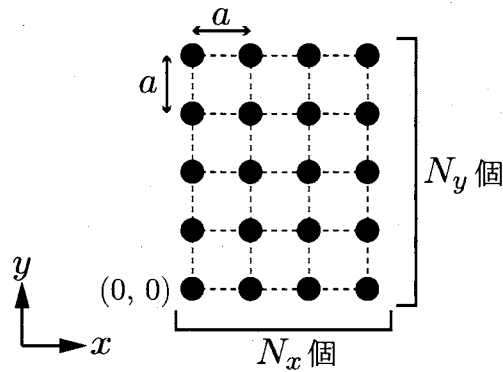


図2

次に、単位胞中に原子が複数存在する単結晶試料による電子線回折を考える。 $n$  番目の単位胞内の  $\alpha$  番目の原子の座標を  $\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_\alpha$ 、その原子散乱因子を  $f_\alpha$  とすると、 $A(\mathbf{K})$  は次式で表される。

$$A(\mathbf{K}) = \sum_n \sum_\alpha f_\alpha \exp[-i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_\alpha)]$$

- [4] 図4に示すような、単位胞内に2種の原子を含む正六角形を隙間なく並べたハニカム構造からの回折パターンについて考える。原子Aと原子Bの原子散乱因子の比が  $f_A/f_B = 1/2$  であるとき、[3]で得られた回折ピークを強度により分類し、それぞれの強度比を求めよ。
- [5] 図3で示す原子層が原子配置を保ったまま原子同士が重なるように面直方向に等間隔で積層した層状結晶試料の回折パターンについて考える。積層数が十分に多いとき、積層面に垂直な電子線の入射に対しては、[3]で考えた回折ピークは観測されなくなり、試料の積層面を入射電子線に対して少し傾けると、それらの回折ピークが観測された。その理由を述べよ。

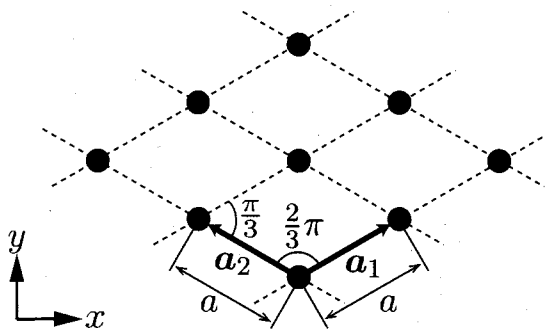


図3

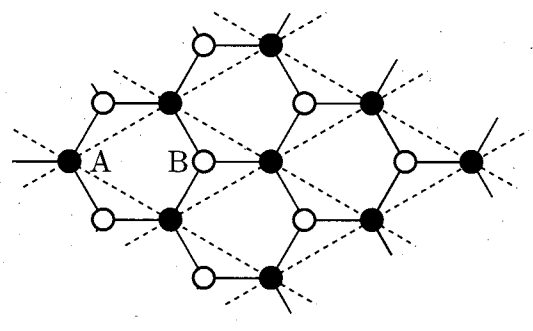


図4