2022 年 4 月 22 日配布

電磁気学　演習第 6 回 — 静電場の基本法則

問題 6.1：ガウスの法則とクーロンの法則

(1) 原点に点電荷 q_1 があるときの静電ポテンシャル ϕ と電場 $\boldsymbol{E}$ を，ポアソン方程式 (5.10) を解いて求めよ．

(2) 前小問 (1) の系で，原点から r だけ離れた点にある点電荷 q_2 に働くクーロン力を求めよ．

(3) マクスウェル方程式から，次の**ガウスの法則** (Gauss' Law) が成り立つことを導け．

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{x})\, dV \tag{6.1}$$

(4) z 軸上に一様な線密度 λ の電荷が分布しているとき，z 軸から r だけ離れた点における電場 $\boldsymbol{E}$ をガウスの法則を使って求め，問題 1.2(3) の結果と一致することを確かめよ．

(5) yz 平面上に一様な面密度 σ の電荷が分布しているとき，原点から x 方向に t だけ離れた点における電場 $\boldsymbol{E}$ をガウスの法則を使って求め，問題 1.3(3) の結果と一致することを確かめよ．

問題 6.2*：球対称な系の電位

原点を中心とする半径 a の球全体に電荷 Q が一様に分布しているとする．原点から r だけ離れた点の電位 $\phi(r)$ を求めよう．系の対称性から，球座標系 (r, θ, φ) を用いる．

(1) 電荷分布が球対称なので電位も球対称で，座標 r のみの関数として $\phi(r)$ と表すことができる．従って，ポアソン方程式 (5.10) は次のように書ける．

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi(r)}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{6.2}$$

球内 $(r < a)$ と球外 $(r > a)$ のそれぞれの場合で方程式 (6.2) を積分して解を求めよ．積分定数は未定のままで良い．

(2) 球内 $(r < a)$ と球外 $(r > a)$ のそれぞれの場合で電場 $\boldsymbol{E}(r)$ を求めよ．

(3) 次の条件を満たすように積分定数を決定せよ．

- 無限遠方の電位は零とする $\phi(r) \to 0$ （$r \to \infty$）．
- 原点 $r = 0$ の電位は有限の値である．
- 球表面 $r = a$ で電位と電場は連続である．

（裏に続く）

問題 6.3：静電場のエネルギー

空間に電場 $\boldsymbol{E}$ が存在するときの静電エネルギーを次のように定義する：

$$\omega_e(\boldsymbol{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} E(\boldsymbol{x})^2 \tag{6.3}$$

この量はエネルギーの体積密度（SI 単位は J/m^3）である．

(1) 静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ が与えられているとする．点電荷 q をある点 $\boldsymbol{P}$ から別の点 $\boldsymbol{Q}$ まで，点電荷に働くクーロン力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ に釣り合う力を働かせてゆっくり動かすとする．この移動に必要な仕事が $W = q\left(\phi(\boldsymbol{Q}) - \phi(\boldsymbol{P})\right)$ となることを示せ．

(2) 二つの点電荷 q_1，q_2 を十分に離れていた状態から互いに近づける．はじめの電荷間の距離を無限大，終わりの距離を r とする．電荷を近づけるのに必要な仕事が $W = \dfrac{1}{2}\left(q_1\phi_2(r) + q_2\phi_1(r)\right)$ であることを示せ．

> 電荷は，それ自身が作る電場の影響を受けない．

(3) 前小問 (2) を一般化し，N 個の点電荷 q_i（$i = 1, 2, \ldots, N$）を近づける場合を考える．電荷 i と電荷 j の間の距離を R_{ij} とし，はじめは，それぞれ互いに十分遠く離れていたとする（$R_{ij} = \infty$）．これらの電荷を近づけるのに必要な仕事が $W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} q_i v_i$ と書けることを示せ．ただし ϕ_i は電荷 i が感じる静電ポテンシャルである．

$$v_i = \sum_{j \neq i} \phi_j(R_{ij}) \tag{6.4}$$

(4) 以上の考察から，ある領域の空間 V に電荷 $\rho(\boldsymbol{x})$ が連続的に分布しているとき，そこに貯まっている宣伝エネルギーは次のように書けることがわかる．

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V \tag{6.5}$$

ベクトル解析の公式を用いて式 (6.5) を変形し，次のように書けることを示せ．

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E(\boldsymbol{x})^2\,dV + \frac{\epsilon_0}{2}\oint_{\partial V} \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.6}$$

(5) 電荷分布は局所的であり，遠方の静電ポテンシャルが $\phi(r) \propto 1/r$ で減衰するとする．式 (6.6) の積分範囲を空間全体に広げたとき右辺の第二項が無視できることを示せ．

以上