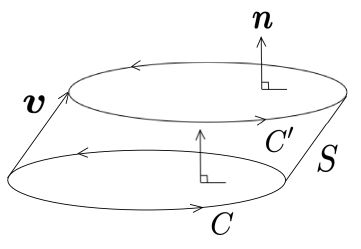
2022 年 5 月 20 日配布

電磁気学　演習第 12 回 — 電磁誘導

問題 12.1：電磁誘導

磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ 中に閉回路 C に沿ったコイルがある場合を考え，C が囲む面を貫く磁束を Φ とする．



(1) 磁場 $\boldsymbol{B}$ が時間変化するとコイルに起電力 ϕ^{em} が誘導される．このとき，次のファラデーの電磁誘導の法則が成り立つことをマクスウェル方程式から導出せよ．

$$\phi^{\mathrm{em}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{12.1}$$

(2) 磁場 $\boldsymbol{B}$ は時間変化しないがコイルが速度 $\boldsymbol{v}$ で等速運動する場合を考える．コイルに沿った回路は，時刻 $\boldsymbol{t} = 0$ で C，微小時間 Δt 後で C' とする．また，コイルの移動による軌跡が作る筒状の面を S とする．このとき，Φ の変化量が次のように書けることを示せ．ただし，$\boldsymbol{n}_S$ は面 S 上での法線ベクトルとする．

$$\Delta\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}_S \,\mathrm{d}S \tag{12.2}$$

(3) $\boldsymbol{n}_S$ の向きを図で示せ．ただし，C，C' 上の法線ベクトルの向きは右上図のとおりとする．

(4) 磁束変化 (12.2) からコイルに誘導される起電力 ϕ^{em} を求めよ．

(5) コイル中の電荷 q を考える．起電力 ϕ^{em} による電場 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{em}}$ から受ける力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}^{\mathrm{em}}$ が，コイルとともに速度 $\boldsymbol{v}$ で磁場 $\boldsymbol{B}$ 中を運動することによるローレンツ力に等しいことを示せ．

問題 12.2：円盤の回転・単極誘導

空間的に一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ 中に，半径 a で質量 m の円盤があるとする．円盤の向きは磁場の方向に直交しているものとし，円盤の存在や運動による磁場の変化は考えないものとする．

(1) 円盤全体に電荷 Q が一様に分布しており，電荷は円盤内で動かないものとする．磁場 $\boldsymbol{B}$ が時間変化すると誘導起電力が発生し，電荷が受ける力によって円盤が回転する．この回転の角振動数が $\omega = -\dfrac{Q}{2m}B(t)$ であることを示せ．

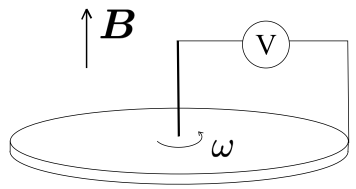
(2) 次に，円盤は導体で電荷が円盤内を自由に動けるとするとし，定磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で円盤を回転させる．図のように円盤の中心と縁に電極をつけ，両端に生じる起電力を観測する．円盤は回転するが，電極は動かないよう固定しているものとする．回転の角振動数が ω であるとして，以下の各問に答えよ．

(2-a) 円盤の中心と縁の 1 点の間に生じる起電力 V^{em} を，線積分を用いて表わせ．

(2-b) (a) の線積分を実行し，起電力を求めよ．

(2-c) 起電力は $V^{\mathrm{em}} = -\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ と書くことができる．右辺の面積分の領域 S をどのようにとれば良いか答えよ．

(2-d) (c) の面積分を実行し，起電力が (b) の結果と一致することを確かめよ．



ヒント

円盤の慣性モーメントは $I = \dfrac{1}{2}a^2 m$ であり，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の間に $I\dfrac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt} = \boldsymbol{N}$ の関係が成り立つ．

問題 12.3*：定常電流

電池の起電力によって定常電流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ が流れる回路を考える．

(1) オームの法則 $\Delta\phi = RI$ が成り立つとして，次のように書けることを示せ．ただし，C は回路を電池の正極から負極まで辿る経路で，V^{ex} は電池の起電力（正極と負極の間の電位差）とする．

$$V^{\mathrm{ex}} = \frac{1}{\sigma}\int_C \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{12.3}$$

(2) 問題 10.2 で見たように，オームの法則の局所的な表現は $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ であるが，電池の内部ではオームの法則が成り立たない．そこで，起電力の作用を有効的に $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ex}}$ と表し，オームの法則を $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \sigma\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}^{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{x})\right)$ と修正する．回路を一周する経路でも式 (12.3) が成り立つとして，V^{ex} と $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ex}}$ の間に成り立つ関係式を導け．

(3) 回路上の電場 $\boldsymbol{E}$ については，静電場の場合と同じく静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ を用いて $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．定常電流の式 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0$ より，$\phi(\boldsymbol{x})$ が満たすべきポアソン方程式を求めよ．

(4) この回路を十分遠方から見たときの $\phi(\boldsymbol{x})$ が，問題 7.2 で求めた電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の作るポテンシャルと同じ形になることを示せ．

以上