

素粒子標準模型

を超える物理の基礎

丸 信人

大阪公立大学 理学研究科 /
南部陽一郎物理学研究所

2023/9/20-22 @瀬戸内
マーカーインスティテュート 2023

PLAN

⑥ 万物論小生問題

⑦ GUT

⑧ SUSY

⑨ Extra Dimension

あつがうテーマが“大きいので、あまり深く
議論してませんが、模型構築の
エンセンスをお話し“それは”....

(Standard Model の基本的知識は前提
としますが、直感的な質問に下さい)

⑨ References

GUT

- H. Georgi, LIE ALGEBRAS IN PARTICLE PHYSICS
FROM ISOSPIN TO UNIFIED THEORIES
- T.-P. Cheng and L.-F. Li
Gauge theory of elementary particle Physics
[参考]

SUSY, Extra Dimension 全体

- C. Csaki and P. Tanedo,
Beyond the Standard Model
Lectures at the 2013 European School of
High Energy Physics, 1602.04228 [hep-ph]
- 林青司, 素粒子の標準模型と超ひず
(丸善出版)
- Particle Data Group o Review
[参考]

SUSY

- S. Martin, A Supersymmetry Primer
hep-ph/9709356
- J. Terning, Modern Supersymmetry
OXFORD UNIVERSITY PRESS
- 解説記事 「超対称性」 数理科学 2019年3月号
the

Extra Dimensions

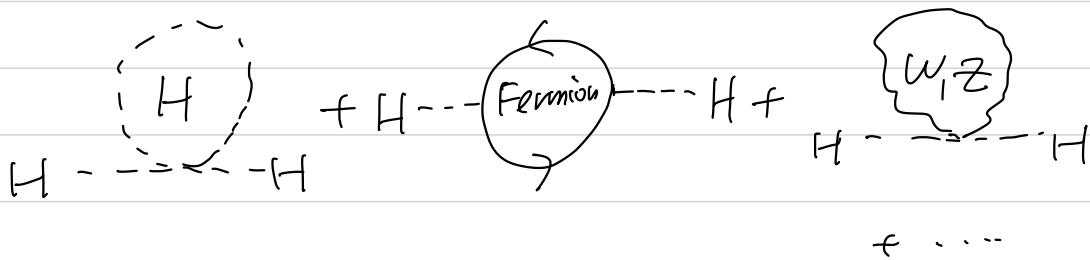
- R. Sundrum, To the Fifth Dimension and Back, hep-th/0508134
- 原3核三者著手夏の学校 2022
〔 デーシベーラス統合理論の現状と
今後の展望 〕 講義全録 YouTubeチャンネル
the

階層性問題

⑨ Standard Model の構成みて、ヒッグス場の質量を計算すると、不自然な $\times 10^4$ メタの微調整が避けられない

$$m_H^2 = m_0^2 + \delta m^2 \approx (125 \text{ GeV})^2$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 物理的な 古典的 量子補正 実験値
 ヒッグス質量



Standard Model が $M_p \sim 10^{18} \text{ GeV}$ まで正しいと仮定すると

$$\int \frac{d^4 k}{k^2 - m^2} = \int_0^{M_p} dk^2 \frac{\pi k^2}{k^2 - m^2} \approx M_p^2$$

$$m_H^2 = \cancel{O(M_p^2)} - O(M_p^2) \approx (125 \text{ GeV})^2$$

系統的な相殺あるいは

1. ラメタ向の(不自然な)微言調整が不可避

自然界でこのような相殺が起こっていると
信じられるか？ パラメタの微調整をいこ、
より自然に実現できたらどうか？

基本理論の立場からすると、ElectroWeak(EW)スケール($\sim 0(100\text{GeV})$)がプロトクスケールに比べて、非常に小さいことが問題

$\Lambda = 1000 \text{ GeV} (= 1 \text{ TeV})$ あたりにて
新しい物理があると仮定すると、

$$\int \frac{d^4 k}{k^2 - m^2} = \int_0^\infty dk^2 \frac{\pi k^2}{k^2 - m^2} \approx (1 \text{ TeV})^2$$

↓

$$m_H^2 = \mathcal{O}((1 \text{ TeV})^2) - \mathcal{O}((1 \text{ TeV})^2) \approx (125 \text{ GeV})^2$$

または。

$$m_H^2 \approx \frac{1}{16\pi^2} \mathcal{O}((1 \text{ TeV})^2) \approx (125 \text{ GeV})^2$$

のよう(= より)自然に理解できる。

不自然な微調整をうけいれる立場も

ありうるが、多くの素粒子論研究者は、

Standard Model を拡張した新しい物理

(ニホン)で自然に実現されるべきと考える

テラスケールの新しい物理へのアプローチ

① ダイナミクス \Rightarrow 組合せ子模型

② 対称性 \Rightarrow 超対称模型

③ 幾何学 \Rightarrow 余剰次元模型

標準模型を超える物理

⑦ ユニカラーモデル

⑨ 超対称モデル

⑧ リトルヒッグスモデル

⑦ 古典的スケール不変モデル

⑨ 大玉の余剰次元モデル

⑥ 曲がった余剰次元モデル

⑨ ニュージ・ヒッグス統一モデル

}

4次元モデル

}

高次元モデル

より多く

§ Grand Unified Theory (GUT)

* Standard Model : $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
 (SM)

Strong interaction
weak interaction
Electromagnetic int.

4つの群の積

一つの理論で統一される

* U(1)_Y の固有値は量子化され必要がない。
しかし、西島・中野・Gell-Mann の法則

$$Q_{em} = T_3^L + \frac{Y}{2}$$

↑ ↑

電荷数 量子化されねばならぬ

* matter multiplets と弱い

$$f\left(3, 2, \frac{1}{6}\right) \quad u_R\left(3, 1, \frac{2}{3}\right) \quad d_R\left(3, 1, -\frac{1}{3}\right)$$

$$l\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) \quad e_R\left(1, 1, 1\right)$$

$\times 3$ (世代)

* SM (2. 1929 free parameter ゼロ)

gauge coupling: $g_3, g, g' \longrightarrow 3$

changed fermion masses: $M_{ud,s,c,b,t} \rightarrow q$
 $M_{e,\mu,\tau}$

Vckm: 3 mixing angles, 1 phase $\longrightarrow 4$

v : Higgs field v

λ : Higgs potential $\propto v^4$ } 組合

θ : QCD θ parameter

✓ \bar{F} data: 3 masses + 3 mixing angles
 + 1 phase (Dirac v)
 + 2 additional phases
 (Majorana v)

$$L_{QCD} \supset \frac{\theta}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a \leftarrow \text{4つの不変性}$$

data $|\theta| < 10^{-10}$ \rightarrow P & CP 不破壊
 from n EDM "strong CP problem"

* 上の問題は、もし Standard model Σ
が大きな Non-Abelian gauge group

$$G \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$
 にうねる

たてたに解決

\Rightarrow Georgi & Glashow が 1番簡単な場合

(Σ 簡単 : $G = SU(5)$ (minimal $SU(5)$ GUT))

1974年

⑨ SU(5) GUT

* matter sector

SU(5) の生成子は、 traceless

⇒ U(1)_{em} charge operator は、 SU(5) の
diagonal 生成子の線形結合

⇒ quarks & leptons は、 U(1)_{em} 電荷
と 1, 2, 3 だけ SU(5) multiplets の
成分 で “たしかに” たりしない。

例 $(\nu_e, e)_L \quad Q_{\nu_e} + Q_e = 0 - 1 = -1$

この電荷を cancel する fields は何か？

$$Q_{d_R} = -\frac{1}{3} \xrightarrow[\text{conjugation}]{} \text{charge} \quad Q_{d_L^c} = \frac{1}{3} \times 3 = +1$$

$(d^c)_L$

(S)
T

charge conjugation 1/2 chirality $\in \{1, -1/2\}$

$$(d_R)^C \equiv \underbrace{C(\gamma^0)^T (R d)}^{\gamma^2 \gamma^0} = C(\gamma^0)^T R d^*$$

$$= L C(\gamma^0)^T d^* = L d^C = (d^C)_L$$

* 上の考察より、

RH d の反対 \bar{d} + LH charged leptons = S^* 表現

$$\Psi^i = ((d_{1R})^C, (d_{2R})^C, (d_{3R})^C, \nu_{eL}, e_L)$$

$$= ((d^{C1})_L, (d^{C2})_L, (d^{C3})_L, \nu_{eL}, e_L)$$

$$= (d^{C1}, d^{C2}, d^{C3}, e, -\nu_e)_L$$

$$l_a^a = \epsilon^{ab} l_b = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$$

(conversion)

$$d_R \left(3, 1, -\frac{1}{3} \right)_R, L \left(1, 2, -\frac{1}{2} \right)_L$$

$$(3^*, 1, \frac{1}{3})_L$$

S^* 表現

* 残りの quarks & leptons

$$q_L(3, 2, \frac{1}{6})_L \quad u_R(3, 1, \frac{2}{3})_R \quad e_R(1, 1, -\frac{1}{3})_R$$

!! c.c.

$$(u_R)^c(3^*, 1, -\frac{2}{3})_L \quad (e_R)^c(1, 1, 1)_L$$

$$\left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \quad 3 \times 2 + 3^* \times 1 + 1 = \underline{\underline{10}} \leftarrow \text{SU}(5) \text{ の } 2P_{\text{皆}}^{\text{階}} \\ \text{反対称} \overline{\text{テクニカル}} \\ \Psi_{ij}^{ij}\}$$

$$\Psi_{ij} = \begin{pmatrix} (u_R)^c & & & & & & \\ & 0 & (u_{3R})^c - (u_{2R})^c & -u_{1L} & -d_{1L} & & \\ & -(u_{3R})^c & 0 & (u_{1R})^c & -u_{2L} & -d_{2L} & \\ & (u_{2R})^c - (u_{1R})^c & & 0 & -u_{3L} & -d_{3L} & \\ u_{1L} & u_{2L} & u_{3L} & & 0 & - (e_R)^c & \\ d_{1L} & d_{2L} & d_{3L} & & (e_R)^c & & 0 \end{pmatrix}_{q_L}$$

(\leftrightarrow : (123) の 偶奇 (2+3))

$$= \begin{pmatrix} 0 & u^{c_3} & -u^{c_2} & -u_1 & -d_1 \\ -u^{c_3} & 0 & u^{c_1} & -u_2 & -d_2 \\ u^{c_2} & -u^{c_1} & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^+ \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \quad \leftarrow [10\text{表現}\right]$$

他の SM fermions が $SU(5)$ の $3 \times (5^* \oplus 10)$
表現にまとめられた。

この組合せは gauge anomaly を 無効

$$m_{\text{link}}^2 \propto \text{tr}(\tau_{CR}^a \{\tau_{CB}^b, \tau_{CR}^c\})$$

$$= A(R) \text{tr}(\tau_{(N)}^a \{\tau_{(N)}^b, \tau_{(N)}^c\})$$

$$A(N^*) = -A(N)$$

$$+) A\left(\frac{N(N-1)}{2}\right) = (N-4) A(N)$$

$$= (N-5) A(N) \stackrel{\uparrow}{=} 0$$

\uparrow
 $SU(5)$

* SM fermions は、左巻きと右巻きの間に非対称

\Rightarrow charge conjugation のもとで非対称ともいえる。

\Rightarrow complex representation にうちこまわる

ランク 4 をもつ他の 4-レジアムの代表種

$SO(8)$, $SO(9)$, $Sp(8)$, F_4 , $SU(3) \times SU(3) \dots$

$SU(3) \times SU(3)$ 以外は、 complex rep. が特徴的

* LO 表現は、2つの 5 表現のテンソル積からつくる。

$$[(3, 1, -\frac{1}{3})_L \oplus (1, 2, \frac{1}{2})_L] \otimes [(3, 1, -\frac{1}{3})_L \oplus (1, 2, \frac{1}{2})_L]_A$$

$$= \underbrace{(3 \times 3)_A}_{\frac{1}{3}^*}, 1, -\frac{2}{3})_L \oplus (3, 2, \frac{1}{6})_L \oplus (1, \underbrace{(2 \otimes 2)_A}_{\frac{1}{4}}, 1)_L$$

$$= (u_R)^c \oplus l_L \oplus (e_R)^c$$

* generator structure $T^a \in SU(5)$

① $SU(2)$ generators

$$T^a = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0^a \end{pmatrix} \quad a=1,2,3$$

② $SU(3)$ generators

$$T^a = \begin{pmatrix} \lambda^{a-3}/2 & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad a=4, \dots, 11$$

③ $U(1)_Y$ generator

$$T^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{5}} Y$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \text{diag} \left(\overbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}^{\text{(d}_R)^c}, \overbrace{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^L \right)$$

normalization

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (a, b = 0, \dots, 23)$$

④ $SU(5) / (SU(3) \times SU(2) \times U(1))$ generators

$$T^a = \begin{pmatrix} 0 & \text{(diag)} \\ \text{(diag)} & 0 \end{pmatrix} \quad a = (1, \dots, 23)$$

color & weak charges

陽子崩壊も重要

* Gauge bosons

$$\text{gauge bosons} = \text{adjoint rep. of } SU(5) \\ = 24\text{-dim rep.}$$

$$24 = (8, 1)_0 \oplus (1, 3)_0 \oplus (1, 1)_0 \oplus (3, 2^*)_{-\frac{1}{6}} \oplus (3^*, 2)_{\frac{5}{6}}$$

↑
gluons ↑
weak ↑
hyper charge

$\text{SM}_{12} \overset{\text{gauge}}{\underset{\text{bosons}}{\rightarrow}}$

行列表示では、 $A_\mu = \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a T^a$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G_\mu - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & \begin{matrix} X_{1\mu} & Y_{1\mu} \\ X_{2\mu} & Y_{2\mu} \\ X_{3\mu} & Y_{3\mu} \end{matrix} \\ \hline X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & \begin{matrix} W_\mu^3 & \frac{3B_\mu}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^+ & -\frac{W_\mu^3 + 3B_\mu}{\sqrt{2}} \end{matrix} \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 & W_\mu^- \end{pmatrix}$$

* matter coupling of gauge bosons

$$D_\mu \psi = \left[\partial_\mu + i g_S \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a T^a \right] \psi$$



$$g_3 = g_2 = g_S, \underbrace{g_1 = \frac{\sqrt{3}}{5} g_S}_{\text{@M}_GUT}$$

weak mixing angle ガンマを3.66

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_2^2 + g_1^2} = \frac{\frac{3}{5} g_S^2}{g_S^2 + \frac{3}{5} g_S^2} = \frac{3}{8}$$

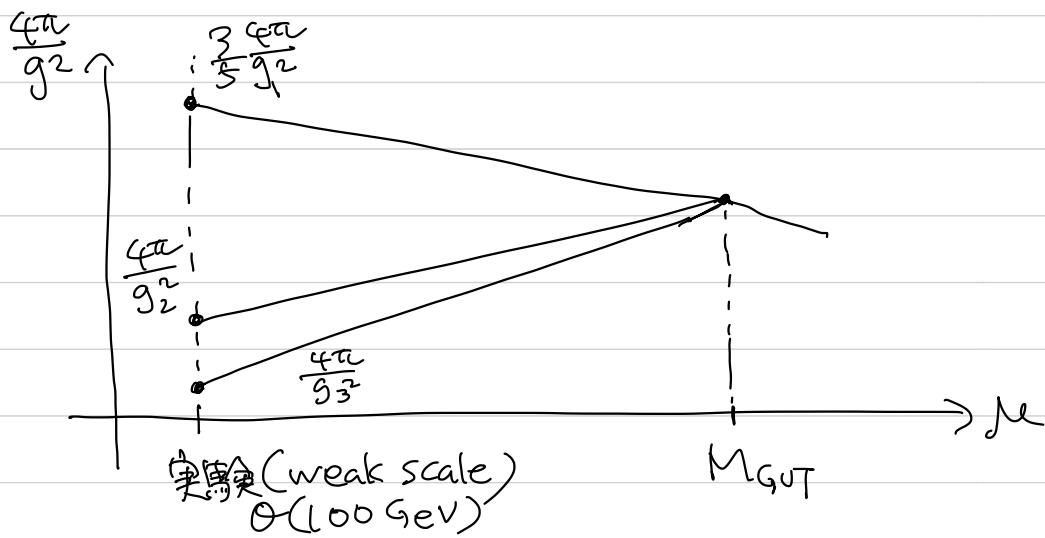
@M_{GUT} ≈ 10¹⁵ GeV

* gauge coupling unification \rightarrow M_{GUT} の決定

$g_{3,2,1}(M)$ の $<4=2$ 構成 \rightarrow 3 構成

↓ エリートスケール

$g_1(M) \nearrow g_{2,3}(h) \searrow \Rightarrow$ 一致する値



$g_{1,2}$ が実験で精度よく測定されてるので、

$g_{1,2}$ の発展から $M_{\text{GUT}}, \alpha(M_{\text{GUT}})$ を決定。

その点から g_3 を weak scale まで延長し、

実験誤差範囲に含まれるかを測定する。

参考

ゲージ結合定数の μ 依赖性方程式(1-loop)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{g_3^2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}} + \frac{1}{6\pi}(4F-33) \log\left(\frac{M_{\text{GUT}}}{\mu}\right) \\ \frac{4\pi}{g_2^2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}} + \frac{1}{6\pi}(4F-22) \log\left(\frac{M_{\text{GUT}}}{\mu}\right) \\ \frac{3}{5} \frac{4\pi}{g_1^2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}} + \frac{1}{6\pi} 4F \log\left(\frac{M_{\text{GUT}}}{\mu}\right) \quad (F: \text{法則}) \end{array} \right.$$

$(\alpha_{\text{GUT}} = \frac{4\pi}{g_1^2(M_{\text{GUT}})})$

参考

実験データ

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\text{em}}^{-1}(M_2) = (27.916 \pm 0.015) \\ \alpha_3(M_2) = 0.1184 \pm 0.0007 \\ \alpha_2(M_2) = \alpha_{\text{em}}(M_2) \sin^2 \theta_W(M_2) \\ \qquad = 0.001807 \pm 0.0002 \\ \sin^2 \theta_W(M_2) = 0.23116 \pm 0.00013 \end{array} \right.$$

$$* \sin^2 \theta_W(\mu) = \frac{3}{8} \left[1 + \frac{55}{9\pi} \alpha_{\text{em}}(\mu) \log\left(\frac{\mu}{M_{\text{GUT}}}\right) \right]$$

$$\rightarrow \sin^2 \theta_W(M_2) \approx 0.20$$

$$\mu = M_2, M_{\text{GUT}} = 2 \times 10^{15} \text{GeV}$$

$$\alpha_{\text{em}}(\mu) \exp$$

g_{12} の RG E の
導出式

* GUT symmetry breaking

$2 \rightarrow 2^{\text{GUT}} \rightarrow 2$: $M_{\text{GUT}}, M_W \Rightarrow$ 2 step breaking

$$\boxed{\begin{aligned} \text{SU}(5) &\xrightarrow{M_{\text{GUT}}} \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \\ &\xrightarrow{M_W} \text{SU}(3)_C \times \text{U}(1)_{\text{em}} \end{aligned}}$$

Higgs potential

$$V(\Sigma, H) = V(\Sigma) + V(H) + \lambda_4 (\text{tr} \Sigma^2) [H]^2 + \lambda_5 H^+ \Sigma^2 H$$

$$V(\Sigma) = -M^2 (\text{tr} \Sigma^2) + \lambda_1 (\text{tr} \Sigma^2)^2 + \lambda_2 (\text{tr} \Sigma^4)$$

$$V(H) = -m^2 (|H|^2 + \lambda_3 |H|^4)$$

Σ : 24-dim adj. rep

H : 5-dim 基本表現

colored Higgs
 $\begin{pmatrix} H_3 \\ H_2 \\ H_1 \end{pmatrix}$
 SM Higgs

$$<4224\text{ 考虑到 }> \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow -\Sigma \\ H \rightarrow -H \end{array} \right. \Sigma \text{ 旋进 } \\ \text{gauge 不变性}$$

1st stage of SSB @ M_{GUT}

$$O = \frac{\partial V(\Sigma, H=0)}{\partial \Sigma} = \frac{dV(\Sigma)}{d\Sigma} \rightarrow (\Sigma) の決定$$

$$\langle \Sigma \rangle = v \text{ drag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$$

$$\text{ただし}, \sum_{i=1}^5 \sigma_i = 0, \text{ で } O(M_{GUT})$$

とします。

$$\therefore V(\Sigma) = -M^2 v^2 \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 + \lambda_1 v^4 \left(\sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 \right)^2 + \lambda_2 v^4 \sum_{i=1}^5 \sigma_i^4$$

$$O = \frac{dV(\Sigma)}{d\Sigma} = \frac{dV(\Sigma)}{dv}$$

$$= 2v \left[-M^2 \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 + 2\lambda_1 v^2 \left(\sum \sigma_i^2 \right)^2 + 2\lambda_2 v^2 \sum \sigma_i^4 \right]$$

$$\begin{cases} ① \langle \Sigma \rangle = v(2, 2, 2, -3, -3) & v \neq 0 \\ ② \langle \Sigma \rangle = (0, 0, 0, 0, 0) \end{cases} \quad \text{Eks.}$$

$$① 0 = -M^2(4 \times 3 + 9 \times 2) + 2\lambda_1 v^2 (12 + 18)^2 + 2\lambda_2 v^2 (16 \times 3 + 8 \times 2)$$

$$\Rightarrow \boxed{M^2 = 60\lambda_1 v^2 + 14\lambda_2 v^2} \Rightarrow v \sim \mathcal{O}(M)$$

$$V(\langle \Sigma \rangle) = -M^2 v^2 \times 30 + \lambda_1 v^4 \times 900 + \lambda_2 v^4 \times 210$$

$$= 30v^4(-3\lambda_1 - 7\lambda_2)$$

①が真空で実現されるためには、 $V(\langle \Sigma \rangle) < 0$

$$\Leftrightarrow -30\lambda_1 - 7\lambda_2 < 0$$

* covariant derivative of Σ

$$\begin{aligned} D_\mu \Sigma &= \partial_\mu \Sigma + i g_5 \underbrace{[A_\mu, \Sigma]}_{\text{adj. rep. } (= \text{作用するベクトル}, \text{支換子} \rightarrow \text{並行}, \text{共変に} \rightarrow \text{並行})} \\ &= D_\mu \tilde{\Sigma} + i g_5 [A_\mu, (\Sigma)] \\ &\quad \downarrow \\ \Sigma &= (\Sigma) + \tilde{\Sigma} \end{aligned}$$

参考

$$D_\mu \Sigma \xrightarrow{\text{SUSY}} \partial_\mu (U \Sigma U^\dagger)$$

$$+ i g_5 \left[U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g_5} (\partial_\mu U) U^\dagger, U \Sigma U^\dagger \right]$$

$$\begin{aligned} &= (\partial_\mu U) \Sigma U^\dagger + U (\partial_\mu \Sigma) U^\dagger + \underline{U \Sigma (\partial_\mu U^\dagger)} \\ &\quad \cancel{+ (\partial_\mu U) \Sigma U^\dagger} + i g_5 (U A_\mu \Sigma U^\dagger - U \Sigma A_\mu U^\dagger) \\ &\quad - (\partial_\mu U) \Sigma U^\dagger + \underline{U \Sigma U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger} \stackrel{\text{II C}}{=} \cancel{\partial_\mu (U U^\dagger) = 0} \\ &= U (\partial_\mu \Sigma) U^\dagger - U \partial_\mu U^\dagger \end{aligned}$$

* gauge boson mass

$$[D_\mu \Sigma]^2 \text{ の中の } [g_S [A_\mu(\Sigma)]]^2 \text{ の } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ と等しい}.$$

$$[A_\mu(\Sigma)] = \frac{v}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} \left(G - \frac{2}{\sqrt{30}} B \right) & X Y \\ \hline X^+ & w+B \\ Y^+ & w-B \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline -3 & -3 \end{array} \right]$$

$$= \frac{v}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} 2 \left(G - \frac{2}{\sqrt{30}} B \right) & -3(XY) \\ \hline 2X^+ & -3(w+B) \\ 2Y^+ & -3(-w+B) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} 2 \left(G - \frac{2}{\sqrt{30}} B \right) & 2(XY) \\ \hline -3X^+ & -3(w+B) \\ -3Y^+ & -3(-w+B) \end{array} \right]$$

$$= \frac{5v}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} 0 & XY \\ \hline X^+ & 0 \\ Y^+ & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow M_X = M_Y = \frac{5}{\sqrt{2}} g_S v$$

would-be NG bosons

$$\left[\begin{array}{c|c} \sum_X \sum_Y & \\ \hline \sum_X^+ & \sum_Y^+ \end{array} \right]$$

$$V(\Sigma, H) = V(\Sigma) + V(H)$$

$\curvearrowleft -m^2 |H|^2$

$$+ 30\lambda_4 v^2 |H|^2 + \lambda_5 v^2 H^+ \begin{pmatrix} \epsilon_4 & 0 \\ 0 & \epsilon_9 \end{pmatrix} H$$

$\curvearrowleft m_3^2 |H_3|^2 + m_2^2 |H_2|^2$

\curvearrowleft colored Higgs mass

$$\left. \begin{array}{l} m_3^2 = -m^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_5)v^2 \sim O(M_{GUT}) \\ m_2^2 = -m^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_5)v^2 \approx 0 \end{array} \right\}$$

\curvearrowleft SM Higgs mass

$M_{GUT} \approx 2, m_2^2 = 0 \approx 3 \approx$ fine-tuning

\times

doublet-triplet
splitting problem

$v \sim O(M_{GUT}), m \sim O(M_{GUT})$

(3 \leftrightarrow a fine-tuning)

$V(H) = -m^2 |H|^2 + \lambda_3 |H^2|^2 \rightarrow$ WS model of Higgs potential

$$O = \frac{\partial V(H)}{\partial H^+} = H \left(-m^2 + 2\lambda_3 |H|^2 \right)$$

$$\therefore \langle H \rangle = 0, \sqrt{\frac{2\lambda_3}{m^2}}$$

* doublet-triplet splitting problem の UCOA 補足

① Sliding singlet mechanism

Witten(98)

idea $SU(5)$ singlet の VEV $\langle \Sigma \rangle$ をシフトする。

$$W = \overline{H} \left(\begin{matrix} \Sigma & S \\ \begin{matrix} \uparrow \\ \text{superpotential} \end{matrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ \text{SU}(5) \text{ singlet} \end{matrix} \end{matrix} \right) H$$

$$\langle \Sigma \rangle = \underbrace{V}_{\mathcal{O}(M_{\text{GUT}})} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \text{ by } W(\Sigma)$$

$$\mathcal{O} = \frac{\partial W}{\partial H} = (\langle \Sigma \rangle + \langle S \rangle) H \leftarrow \langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}$$

$$\therefore \langle S \rangle = -\langle \Sigma \rangle \Leftrightarrow \langle S \rangle = 3V$$

$$\text{すなはち, } \langle \Sigma \rangle + \langle S \rangle = V \text{diag} \begin{pmatrix} 5, 5, 5, 0, 0 \end{pmatrix}$$

triplet mass \swarrow doublet massless

② Missing partner mechanism

$\left. \begin{array}{l} \text{SU(5) Masiero, Nanopoulos} \\ \text{Tamvakis, Yanagida (1982)} \\ \text{Georgi (1982)} \\ \text{Dimopoulos, Wilczek (1981)} \end{array} \right\}$

Idea

$SU(5)$ が「 $5 + \bar{5}$ 」で構成され、 triplet Higgs
 は Dirac mass $\Sigma \pm \zeta$ 、 doublet Higgs
 は massless な $\{ \pm 3 \}$ τ_2 model で構成。

$$W \supset \lambda \bar{5}_H 50_H \langle \overline{\psi} \psi_H \rangle + \lambda' \overline{5}_H \overline{50}_H \langle \bar{\psi} \psi_H \rangle$$

$$\begin{aligned}
 50 &= (8, 2) \oplus (6, 3) \oplus (\bar{6}, 1) \oplus (3, 2) \\
 &\quad \oplus (\bar{3}, 1) \oplus (1, 1)
 \end{aligned}$$

- No doublet $(1, 2)$ Higgs \rightarrow massless
- $(\bar{3}, 1)$ は $5 \supset (3, 1)$ に Dirac mass $\Sigma \pm \zeta$
 $\Rightarrow \Theta(M_{\text{GUT}})$ massive

$$75 = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{\LARGE } \square & \text{\LARGE } \square \\ \hline \end{array} = 4^{\{i,j\}}_{[k,l]} \left(= (50 \otimes 5)_A \right)$$

③ Pseudo NG boson mechanism \rightarrow SU(6) model

global symmetry $\underline{\text{SU}(6)_1 \times \text{SU}(6)_2}$ (diagonal $\text{SU}(6)$
is gauged)

$$\text{Higgs: } \sum_{\text{4}} (35_1), H(6_2), \bar{H}(\bar{6}_2)$$

もし、 $V \otimes V$ の形で

を次のようにならせる

૪૩૮.

$$(\Sigma) = \nabla \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, -2, -2)$$

$$\langle H \rangle = (\vec{H}) = \nabla \left((1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \right)$$

- $SU(6)_1 \xrightarrow{\text{ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ }} SU(4) \times SU(2) \times U(1)$
- NG bosons $(\bar{3}, 2)_{-\frac{1}{6}} \oplus (\bar{3}, 2)_{-\frac{1}{6}} \oplus (\bar{1}, 2)_{\frac{1}{2}} \oplus (\bar{1}, 2)_{\frac{1}{2}}$
- $\xrightarrow{\frac{SU(6)}{SU(4) \times SU(2) \times U(1)}}$ eaten
- $SU(6)_2 \xrightarrow{\text{ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ }} SU(5)$
- NG bosons $(\bar{3}, 1)_{-\frac{1}{3}} \oplus (\bar{3}, 1)_{\frac{1}{3}} \oplus (\bar{1}, 2)_{\frac{1}{2}} \oplus (\bar{1}, 2)_{-\frac{1}{2}} \oplus (\bar{1}, 1)_0$

• gauge symmetry breaking

$$SU(6) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

↑
diagonal of
 $SU(6)_1 \times SU(6)_2$

$(SU(4) \times SU(2) \times U(1)) \cap SU(5)$

$$35 - (8 + 3 + 1) = \boxed{23 \text{ NG bosons}}$$

$\frac{SU(6)}{SU(3) \times SU(2) \times U(1)}$ of gauge bosons (= eaten)

massless
doublets

$$h_1 = \frac{V h_S - 3 V h_F}{\sqrt{V^2 + 9v^2}}, \quad h_2 = \frac{V h_S - 3 V h_F}{\sqrt{V^2 + 9v^2}}$$

直立子
斜張子

* proton decay (GUT の予言)

GUT では、quark と lepton が同一の multiplet
に属する。つまり

$\Rightarrow q \leftrightarrow l$ by gauge interaction

proton が lepton に
decay する。

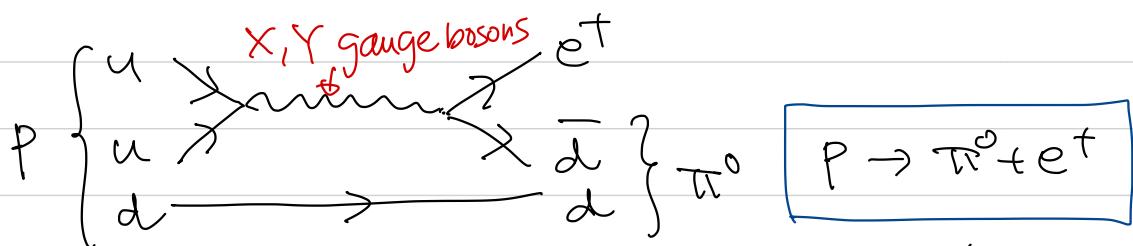
(ハーリオンが放出する)

$$\left(\begin{array}{c|c} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ \hline X_1^* & X_2^* & X_3^* \\ Y_1^* & Y_2^* & Y_3^* \end{array} \right)$$

X, Y gauge bosons

(color と weak charge を
持つもの)

例 (d=6 WOLOOS*)



proton lifetime $\tau_p \sim \left[\left(\frac{g^2}{M_{GUT}} \right)^2 m_p^5 \right]^{-1} \frac{\hbar}{c^2}$

SU(5) case

$$g_{\text{GUT}}^2 \sim \frac{1}{40}$$

$$\tau_p \approx \left[\left(\frac{1}{40} \frac{1}{(10^{15})^2} \right)^2 15 \right]^{-1} \times 6.6 \times 10^{-25} (\text{s})$$

$$\approx 3 \times 10^{31} (\text{yrs}) \quad \left(T_{\text{universe}} \approx 10^{10} (\text{yrs}) \right)$$

* カミオカンデ実験 (KAMIOKANDE)

Nucleon Decay Experiment

1983年完成 3600t 超純水K 地下1000m
1000 ピの光電子増倍管

$\tau_p \sim 10^{31} (\text{yrs}) \Rightarrow 10^{31 \sim 32}$ の核子を 1 年内
observe すると、平均 1 つ decay

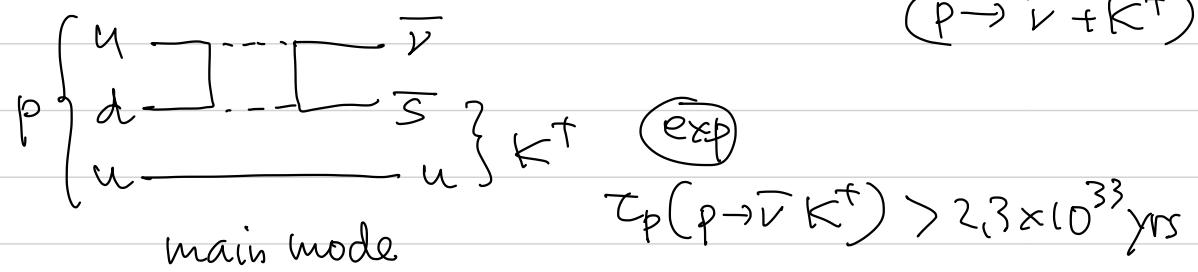
$$\downarrow \text{mass} \approx \frac{10^{31 \sim 32}}{6 \times 10^{23}} \approx 10^{7 \sim 8} (\text{g})$$

$$\approx 10^{4 \sim 5} \text{ kg} \approx 10 \sim 100 \text{ t 水}$$

$\Theta(0) \text{ events/yr}$

data $\tau_p > 10^{34}$ yrs \rightarrow SU(5) GUT ~~排除~~
 $C_P \rightarrow \pi^0 + (e^+)$ 水中で光速を超える運動
 \Rightarrow フィバーラボ

minimal SUSY SU(5) GUT $\Rightarrow \tau_p > 10^{35}$ yrs
 $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV \rightarrow $\tau_p > 10^{32}$ yrs
 $(p \rightarrow e^+ + \pi^0)$
 $(p \rightarrow \bar{\nu} + K^+)$



SuperKamiokande

5000 t, 1996 年発表
 11,200 photo multipliers

HyperKamiokande

260,000 t, 2027 年開始予定
 40,000 photo mul.
 SuperKa W/L の $\frac{1}{7}$ 以上

proton lifetime τ
 $T_{1/2} \approx 10^{37}$ yrs
 up date

* Fermion mass prediction

Yukawa coupling

$$\psi(5^*) \psi(10) \bar{\psi}(5^*)$$



down-type quarks
charged leptons

$$\psi(10) \psi(10) H(5)$$

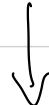


up-type quarks

SU(5) GUT 2:1:2

Yukawa coupling

$$m_e = m_d, m_\mu = m_s, m_c = m_b @ M_{\text{GUT}}$$



$\sim 10^{15} \text{ GeV}$

$$\frac{m_b}{m_c} \sim \frac{m_s}{m_\mu} \sim \frac{m_d}{m_e} \sim 3 @ 10 \text{ GeV}$$

Bottom-Tau
unification

$$\begin{array}{l} \tilde{\tau}^L \tilde{\tau}^R \\ \tilde{t}^L \tilde{t}^R \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} m_b \sim 4 \sim 5 \text{ GeV} \\ m_c \sim 1.7 \sim 1.8 \text{ GeV} \end{array} \right)$$

SU(5) GUT
Bottom-Tau unification

* $SO(10)$ GUT

ν_R : SM singlet required from seesaw mechanism

$SO(10)$ は 16 次元スカラル表現 でモード

$$16 = 10_{-1} \oplus 5^*_{+3} \oplus 1_{-5}$$

$(SU(5) \times U(1))$
分解

q, u_R^c, e_R^c d_R^c, l^c ν_R

1 世代の quarks & leptons の 12 の表現
に相当する。(右端を ν も含む)

② gauge boson = adjoint rep. of $SO(10)$

$$45 = 24 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 1$$

\uparrow

$SU(5)$ gauge bosons

$(SU(5) \text{ 分解})$

② GUT symmetry breaking

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} SO(10) \rightarrow SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \\ \textcircled{2} SO(10) \rightarrow SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4) \\ \qquad \qquad \qquad \rightarrow SU(2)_L \times U(1) \times SU(3) \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \quad SO(10) \rightarrow SU(5) ?$$

$SO(10)$ の極大部分群: $SU(5) \times U(1)$

$$\textcircled{2} \quad SO(10) \text{ rep. の } SU(5) \times U(1) \text{ 分解 (1<つめ)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 = 5_2 \oplus 5_{-2}^* \text{ (vector)} \\ 45 = 24_6 \oplus 10_4 \oplus 10_{-4}^* \oplus \underline{1_0} \text{ (E)} \\ 54 = 15_4 \oplus 15_{-4}^* \oplus 24_6 \text{ (E-1)} \\ 120 = 5_2 \oplus 5_{-2}^* \oplus 10_{-6} \oplus 10_6^* \oplus 45_2 \oplus 45_{-2}^* \text{ (E)} \\ 126 = \underline{1_{-10}} \oplus 5_{-2}^* \oplus 10_{-6} \oplus 15_6^* \oplus 45_2 \oplus 50_{-2}^* \text{ (E/2)} \\ 210 = \underline{1_0} \oplus 5_{-8} \oplus 5_8^* \oplus 10_4 \oplus 10_{-4}^* \oplus 24_6 \oplus 40_{-4} \\ 16 = 10_{-1} \oplus 5_{-3}^* \oplus \underline{1_{-5}} \text{ (spinor)} \qquad \oplus 40_4^* \oplus 75_0 \text{ (E)} \end{array} \right.$$

* GUT Higgs の候補

$SU(5)$ 分解 $U = E_6 (= \underline{SU(5) \text{ singlet}} \oplus \text{その他})$

i.e. $\boxed{16, 45, 126, 210}$ ————— (*)
or 16^* or 126^*

Yukawa coupling = $\underbrace{16_i 16_j (\text{Higgs})}_{SO(10) \text{ invariant}}$

$\supset \frac{1}{\sqrt{v_R}} 1 1 (\text{Higgs}) v_R$ mass term

Seesaw mechanism (= F^Y)

$M_{V_R} \sim 10^{14 \sim 15} \text{ GeV}$ で 3 世代を思いつける。

GUT Higgs は、 V_R は mass ∞ で 3 世代。

Yukawa coupling to "SO(10) invariant" が 1 つ は 1 つ。

Higgs = $\boxed{10 \text{ or } 120 \text{ or } 126^*}$ ————— (*) (*)

$$\therefore 16 \otimes 16 = 10 \oplus 120 \oplus 126 \quad \text{to be},$$

Higgs の表現は、これらとのテンソル積 (= Singlet "1" と 合成もと = "3")

上記の表現 $10, 120, 126^*$ に対する。

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 \otimes 10 = 1 \oplus 45 \oplus 54 \\ 120 \otimes 120 = 1 \oplus 45 \oplus 54 \oplus 210 \oplus 210 \oplus 770 \\ \quad \oplus 945 \oplus 1050 \oplus 1050^* \oplus 4125 \\ \quad \oplus 5940 \\ 126 \otimes 126^* = 1 \oplus 45 \oplus 210 \oplus 770 \oplus 5940 \oplus 8910 \end{array} \right.$$

(*) \oplus (*) \oplus $\Rightarrow 126^*$ が better

ホーリー GUT, M_{GUT} で SM fermion が massless

(= 23 でかく) 自動的に実現

SM Yukawa

$$\therefore 16 \otimes 16 \otimes 126_H^* \supset 1 \otimes 1 \otimes 1 + \underbrace{(10+5^*) \otimes (10+5^*) \otimes 1}_{\text{SU}(5) \text{ invariant}} + \underbrace{\text{23}}_{\text{to be}}$$

$SU(10)$ の構成と、SM fermion Yukawa と、
 10 rep の Higgs と用いる。

$$16 \ 16 \ 10_H \supset \underbrace{10 \ 10 \ 5_H}_{\begin{array}{l} 10 = Q, u_R, e_R \\ 5^* = \ell, d_R \end{array}} \oplus \underbrace{10 \ 5^* \ 5^*_H}_{\begin{array}{l} \text{up-type} \\ \text{quarks} \\ \text{down-type quarks} \\ \text{charged leptons} \end{array}}$$

$$* \quad SO(10) \xrightarrow{(126^*)} SU(5) \xrightarrow{\text{?}} SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

45 rep と $\underline{24}$ rep も考慮する

$$(45) = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i\sigma_2 & -1 \end{pmatrix}$$

2nd
anti-sym
tensor

$$= \begin{pmatrix} ? & a_1 & & & & \\ -a_1 & & a_2 & & & \\ & -a_2 & & a_3 & & \\ & & -a_3 & & a_4 & \\ & & & -a_4 & & a_5 \\ & & & & -a_5 & \end{pmatrix}$$

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ for unbroken \mathbb{Z}_3 flavor.

$$\langle 45 \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_2 \otimes i\sigma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 I_3 \otimes i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad \text{eigen}$$

$$[\langle 45 \rangle, T_p^a] = 0 \quad \text{except } T_{12}^a \text{ and } T_{13}^a.$$

$SU(10)$ generator

$$\Rightarrow T^a = \begin{pmatrix} A_2 \otimes I_2 + S_2 \otimes \sigma_2 & 0 \\ 0 & A_3 \otimes I_2 + S_3 \otimes \sigma_2 \end{pmatrix}$$

(A_n : $n \times n$ anti-sym matrices)
 S_n : $n \times n$ sym matrices)

check

$$[I_2 \otimes i\sigma_2, A_2 \otimes I_2 + S_2 \otimes \sigma_2]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & -iS_2 \\ iS_2 & A_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} iS_2 & A_2 \\ -A_2 & iS_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iS_2 & A_2 \\ -A_2 & iS_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \textcircled{OK}$$

$$[I_3 \otimes i\sigma_2, A_3 \otimes I_2 + S_3 \otimes \sigma_2]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & -iS_3 \\ iS_3 & A_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} iS_3 & A_3 \\ -A_3 & iS_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iS_3 & A_3 \\ -A_3 & iS_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \textcircled{OK}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \propto \sigma_2 \\ S_2 \propto \sigma_{1,3}, 1 \times 2 \text{ の規則性結合} \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \times 2 \text{ block}_{(2)} \quad \text{SU(2)} \times U(1)$$

Σ 生成

$$\begin{pmatrix} A_3 \propto \lambda_{1,2,4,5,6,7} \text{ の規則性結合} \\ S_3 \propto \lambda_{3,8}, 1 \times 3 \text{ の規則性結合} \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \times 3 \text{ block}_{(2)} \quad \text{SU(3)} \times U(1)$$

Σ 生成

$$\Rightarrow SU(5) \xrightarrow{(45)} SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

(註) $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$ と 2 つ 2 つ "to"。
 $(126^*) \supset (1_{10}) \supset SU(5) \times U(1)$ が $U(1)$ が broken である。
 $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$ と 2 つ 2 つ "to"

left-right symmetric

$$\textcircled{2} \quad SO(10) \rightarrow SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$$

$$\rightarrow SU(2)_L \times U(1)_Y \times SU(3)_C$$

Parti-Salam
GUT

LH

$$(2, 1, 4) = (2, 1, 3) \oplus (2, 1, 1)$$

$(\bar{q}, \bar{l})_L$

RH

$$(1, 2, 4) = (1, 2, 3) \oplus (1, 2, 1)$$

$$(\begin{matrix} u & \bar{u} \\ d & \bar{d} \\ e & \bar{e} \end{matrix})_R$$

lepton number
as the 4th color

⑦ $SO(10)$ 表現の $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$ の分解 (1C7行)

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 10 = (2, 2, 1) \oplus (1, 1, 6) \\
 16 = (2, 1, 4) \oplus (1, 2, 4^*) \\
 45 = (3, 1, 1) \oplus (1, 3, 1) \oplus (1, 1, 15) \oplus (2, 2, 6) \\
 54 = (\underline{1, 1, 1}) \oplus (3, 3, 1) \oplus (1, 1, 20) \oplus (2, 2, 6) \\
 120 = (2, 2, 1) \oplus (1, 1, 10) \oplus (1, 1, 10^*) \oplus (3, 1, 6) \\
 \quad \oplus (1, 3, 6) \oplus (2, 2, 15) \\
 126 = (1, 1, 6) \oplus (3, 1, 10^*) \oplus (1, 3, 10) \oplus (2, 2, 15) \\
 210 = (\underline{1, 1, 1}) \oplus (1, 1, 15) \oplus (2, 2, 6) \oplus (3, 1, 15) \\
 \quad \oplus (\underline{1, 3, 15}) \oplus (2, 2, 10) \oplus (2, 2, 10^*)
 \end{array}
 \right.$$

6 \oplus 3 \oplus 1/2 ($SU(3) \times U(1)$)

* Symmetry breaking

$$SO(10) \xrightarrow{\text{or } (210)} SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$$

$$\xrightarrow{(210) \supset (1, 3, 15)} SU(2)_L \times U(1)_R \times SU(3)_C \times U(1)_{B-L}$$

$$\xrightarrow{(26) \supset (1, 3, 10)} SU(2)_L \times U(1)_Y \times SU(3)_C$$

$$\frac{Y}{2} = I_{3R} + \sqrt{\frac{2}{3}} I_{B-L} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

⑨ check of hypercharges

$$\frac{Y}{2} = I_{3R} + \sqrt{\frac{2}{3}} I_{B-L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$Y(g_L) = \frac{1}{3}, \quad Y(\ell) = -1$$

$$\Rightarrow Y(u_R) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad Y(v_R) = 1 - 1 = 0$$

$$Y(d_R) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \quad Y(e_R) = -1 - 1 = -2$$

* E₆ GUT

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fundamental rep. } 27 = 16 \oplus 10_{-2} \oplus 1_4 \\ \text{adjoint rep. } 78 = 45_0 \oplus 1_0 \oplus 16_{-3} \oplus 16_3^* \end{array} \right.$$

$SO(10) \times U(1)$ 分解

E_6 breaking pattern (27 < 27 & 3.)
 $T_2 \subset T_1 \subset T_0$

1-step breaking

$$E_6 \longrightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

$$(35)_\text{sym}^1 \& (35)_\text{anti-sym}$$

$$\therefore 27 \times 27 = 27^* \oplus 35_1^{\text{sym}} \oplus 35_1^{\text{anti-sym}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 35_1^{\text{sym}} = 1_{-8} \oplus 10_{-2} \oplus 16_{-5} \oplus 54_4 \oplus 126_{-2} \oplus 144_1 \\ 35_1^{\text{anti-sym}} = 10_{-2} \oplus 16_{-5}^* \oplus 16_0 \oplus 45_4 \oplus 120_{-2} \oplus 144_1 \end{array} \right.$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow

$SO(10) \times U(1)$ 分解

$(l, l, 0)$ under $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ が含まれる
のは、
 $SU(5)$ の 24, 75 のみ
 \cap
 $SO(10)$ の 45

Motivation of Supersymmetry

- ① gauge hierarchy problem の 解
- ② gauge coupling unification
- ③ dark matter

§ Solution to the gauge hierarchy problem

SM に於ける Higgs (mass)² の 1-loop
 correction のうち、top quark loop の寄り
 が支配的

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: } H \cdots \text{ (top quark loop)} \cdots H \\
 & L_{\text{top}} = -\frac{y_t}{\sqrt{2}} H \bar{t}_L t_R \\
 & \Delta m_H^2 (\text{top}) = -N_C \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{ color } \left(\text{f.h.c.} \right) \\
 & m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}} \langle H \rangle \\
 & \text{fermion loop} \\
 & \text{Tr} \left[\frac{i}{k-m_t} \left(\frac{-iy_t}{\sqrt{2}} \right) \frac{i}{k+m_t} \left(\frac{-iy_t}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
 & = -\frac{N_C}{2} |y_t|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [(k+m_t)^2]}{(k^2 - m_t^2)^2} \\
 & \quad \text{Tr} (k^2 + 2m_t k + m_t^2) \\
 & \quad 4(k^2 + m_t^2)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\bar{p}} = -\frac{iN_c}{8\pi^2} |y_t|^2 \left[-\underbrace{\Lambda^2}_{\text{Wick rotation cutoff integral } (\Lambda)} + 3m_t^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_t^2}{m_t^2} \right) + (\text{finite at } \Lambda \rightarrow \infty) \right]$$

cut off scale $\Lambda = 700$, 2次の収斂性
(2次発散)

2の2次発散を cancel するには

N つの Scalars ϕ_L, ϕ_R を新たに導入する

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Scalar interaction}} &= -\frac{\lambda}{2} H^2 (|\phi_L|^2 + |\phi_R|^2) \\ &\quad - H (m_L |\phi_L|^2 + m_R |\phi_R|^2) \\ &\quad - m_L^2 |\phi_L|^2 - m_R^2 |\phi_R|^2 \end{aligned}$$

Scalar loop ($\simeq \pm 3$ Higgs (mass) $)^2$ の寄与

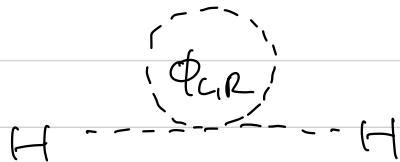


Fig 1



Fig 2

$$\text{Fig 1} = -i \lambda N \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{k^2 - m_L^2} + \frac{i}{k^2 - m_R^2} \right]$$

$\frac{1}{2}$ が消えるのは

H と 2 頃の

対応する \sim 相殺

$$\Rightarrow -\frac{i\lambda N}{16\pi^2} \left[2\Lambda^2 - \sum_{i=L,R} m_i^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_i^2}{m_i^2} \right) + (\text{finite}) \right]$$

Wick rotation
cutoff integral

$$\begin{aligned}
 \text{Fig 2} &= N \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\left(\frac{i}{k^2 - m_L^2} (-i\mu_L) \right)^2 + (L \leftrightarrow R) \right] \\
 &= \frac{iN}{16\pi^2} \left[\sum_{i=L,R} \mu_i^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_i^2}{m_i^2} \right) + (\text{finite}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\Lambda^2 : \frac{iN_c}{8\pi^2} |y_t|^2 - \frac{i\lambda N}{8\pi^2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{N = N_c, |y_t|^2 = \lambda}$$

$$\ln \Lambda^2 : -\frac{3N_c}{8\pi^2} i \left[|y_t|^2 m_t^2 + \frac{i\lambda N}{16\pi^2} (m_L^2 + m_R^2) \right]$$

$$+ \frac{iN}{16\pi^2} (m_L^2 + m_R^2) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{m_L^2 = m_R^2 = m_t^2, m_L^2 = m_R^2 = 2\lambda m_t^2}$$

この条件を満たすのが: Supersymmetry

Boson \leftrightarrow Fermion

SUSY が破れたあとでは、

$$\delta m_H^2 \sim \frac{g^2}{(6\pi)^2} m_{\tilde{t}}^2 \log\left(\frac{m_{\tilde{t}}^2}{m_t^2}\right)$$

$m_Z \sim \Theta(7\text{TeV})$ で“あれは”、

$$\delta m_H^2 \sim \Theta((100\text{GeV})^2) \quad \begin{pmatrix} \text{Higgs mass} \\ \text{はるか後世} \end{pmatrix}$$

{ Gauge coupling unification

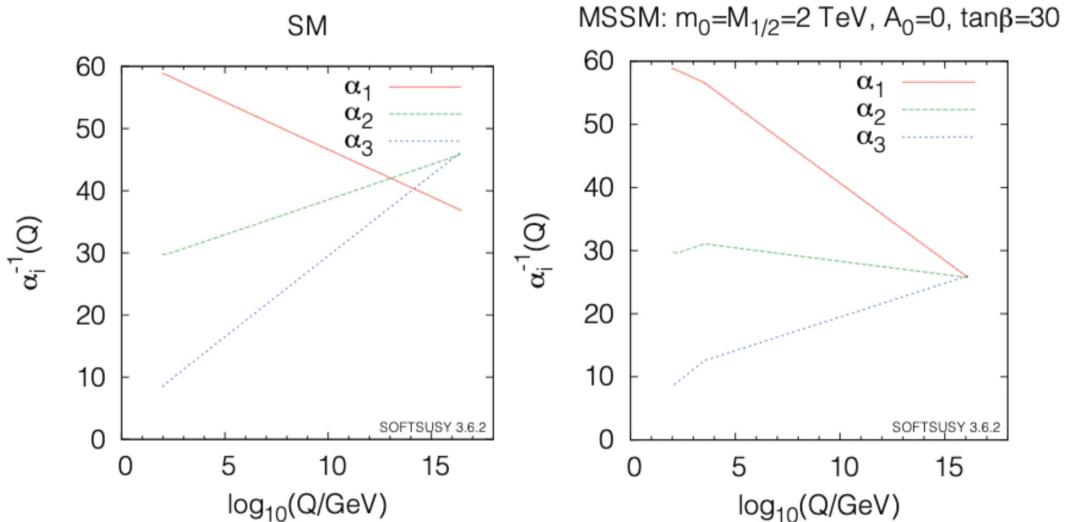
LEP 実験

low energy (= おける) gauge coupling の

精密測定 が進むと, Standard model

では, gauge coupling が統一せず, MSSM

では, よく一致することがわかる。



$\mathcal{O}(\text{TeV})$ の SUSY particles の寄与 (= E)
unification が実現

§ Dark matter

Dark matter が「HTD」する条件

- { ① EM neutral
- ② massive
- ③ stable

これらを HTD の Standard model 粒子とし、
neutrino が「あるが」、残り質量を説明で「ない」
→ Beyond the Standard Model

SUSY では、最も軽い SUSY 粒子が候補
LSP (lightest Super Particle)

- { ⑥ lightest neutralino → $\tilde{\chi}_1^0$ familiar
 \tilde{B} (bino), \tilde{W}^0 (wino) $\tilde{H}^0_u, \tilde{H}^0_d$ (higgsino)
- ⑦ gravitino (\rightarrow 後述)
- ⑧ S neutrino → direct search で「まだ」 excluded

* Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM)

Standard model \in SUSY 扩張 GUT 最小模型

⑨ quarks, lepton \Rightarrow scalar field \times 多重項
 \hookrightarrow squark, slepton

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ q \end{pmatrix}_L \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ u \end{pmatrix}_R \quad \bar{D} = \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ d \end{pmatrix}_R \quad L = \begin{pmatrix} \tilde{\ell} \\ \ell \end{pmatrix}_L \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ e \end{pmatrix}_R$$

⑨ $W, Z, \gamma, G \Rightarrow$ fermion field \times 多重項

$$V_W = \begin{pmatrix} \tilde{w}_\mu \\ w_\mu \end{pmatrix} \quad V_Z = \begin{pmatrix} \tilde{z}_\mu \\ z_\mu \end{pmatrix} \quad V_\gamma = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_\mu \\ \gamma_\mu \end{pmatrix} \quad V_G = \begin{pmatrix} \tilde{g}_\mu \\ g_\mu \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow gaugino photino gluino

$\left($ これらは多重項に正確には 補助場 が “ \uparrow ”
 必要で省略している $\right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \tilde{q} + \sqrt{2}\theta q + F_q \\ V = \bar{\partial}^{\mu\nu} V_\mu + i\theta \lambda + i\bar{\theta} \bar{\lambda} + \phi^2 D \end{array} \right.$$

EOM + λ “SUSY”
 Lagrangian を構成

⑨ Higgs scalar field は fermion field と多重項

しかし、MSSMでは以下的理由から 最低
2つは必要

① Higgs field と多重項をなす fermion は
Weyl fermion である T_2 と $Higgsino$

$$\begin{aligned} & \left(SU(2)_L\right)^2 U(1)_Y \text{ P(2)}^- \\ & \text{SU}(2)_L \text{ Witten P(2)}^- \end{aligned}$$

② SM Yukawa coupling (quark)

$$\mathcal{L} = \underbrace{Y_d \bar{d} H Q}_{\text{そのまま SUSY で}} + \underbrace{Y_u \bar{u} \tilde{H} Q}_{\text{できない}}$$

そのまま SUSY で

できる

$\tilde{H} = i\sigma^2 H^*$ のために

そのまま SUSY で

できない

(複素共役場ができない)

上人上手い。 up-type quark は結合する

Higgs scalar と重入する (複素共役である)

最も一般的な構成可能なホテンション項
は、

$$\mathcal{L}_1 = \int d^3\theta \left[\underbrace{Y_u Q^i H_u \bar{U}^j}_{\text{up-type Yukawa}} + \underbrace{Y_d Q^i H_d \bar{D}^j}_{\text{down-type Yukawa}} \right]$$

θ^2 頂点を含む

$$+ \underbrace{Y_e^{ij} L^i H_d \bar{E}^j}_{\text{charged lepton Yukawa}} + \underbrace{\mu H_u H_d}_{\mu\text{-term}}$$

$\hookrightarrow M_{H_u H_d}$
(Higgsino mass)

$$\left(Q = \tilde{Q}_0 + \sqrt{2} \theta \tilde{Q}_F + \theta^2 F_Q \text{ etc} \right)$$

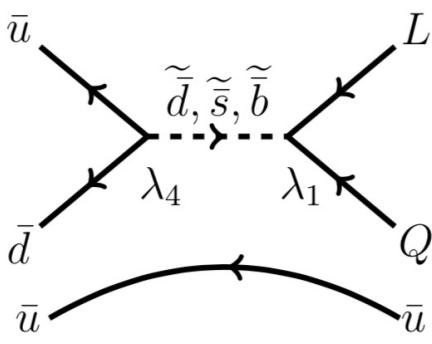
$i, j = 1, 2, 3$ 世代数

$\hookrightarrow \frac{1}{2} 22\text{-次元}$

$$\mathcal{L}_2 = \int d^2\theta \left[\lambda_1^{ijk} Q L^i \bar{D}^j E^k + \lambda_2^{ijk} L^i \bar{L}^j E^k \right. \\ \left. + \lambda_3 L^i H u + \lambda_4 \bar{D}^i \bar{D}^j \bar{U}^k \right]$$

β and/or γ interactions

実際、squark exchanger による proton decay



が“ホーリー

$p \rightarrow e^+ \pi^0$ or $\bar{\nu} \pi^0$

(← from Csaki's lecture note)

squark mass は、SUSY breaking scale で

通常 $O(10 \text{ TeV})$ 附近で、この interaction が

suppress 四 fermion と四 gluon

シンボル的な方法は、matter parity を譲る

$$\mathbb{Z}_2 \text{ symmetry} \quad P_M = (-1)^{3(B-L)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_M(\gamma) = (-1)^{3 \times \frac{1}{3}} = -1 \\ P_M(\ell) = (-1)^{3 \times (-1)} = -1 \\ P_M(\text{Higgs}) = (-1)^0 = +1 \\ P_M(\text{gauge}) = (-1)^0 = +1 \end{array} \right.$$

Superpartner
も同じ parity

$$P_M(\text{Yukawa}) = P_M(\mu\text{-term}) = +1$$

$$P_M(Q\bar{L}\bar{D}) = P_M(L\bar{L}\bar{E}) = P_M(L\bar{H}u)$$

$$= P_M(\bar{U}\bar{D}\bar{D}) = -1$$

通常(?) matter parity が守られるべき

R-parity を譲る。

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2S}$$

spin

SM particle +
superparticle -1

(spin (= 3 区別))

matter parity の 保存 (\Leftrightarrow) R-parity の 保存

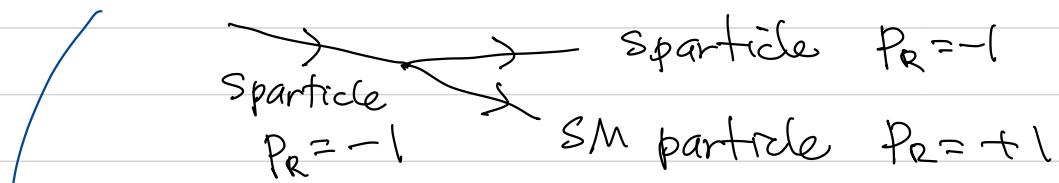


∴ Lorentz 不変性理論で “ある” matter
が “ある g, ℓ を からす” 偶数回含む

$$\Rightarrow (-1)^{2S} \text{ factor } (\text{ たとえ } \tau \text{ は } \tau \text{ は } \tau)$$

* R-parity 保存からの帰結

① 最も軽い superparticle は 安定である



最も軽量の superparticle は、反応先が

t_{\pm} (LSP)
Lightest supersymmetric particle (LSP)

② LSP が、EM neutral & color singlet
 \Rightarrow WIMP DM の 候補

- ② LSP 上へトの Super particle は、LSP まで
“今まで” decay する
- ③ Collider 実験では、^{それが} SM まで $P_T = +1$ の τ が Sparticle は 生成し、
LSP まで decay する。LSP は missing energy
で identify

SUSY breaking

現実世界では、SUSYは成立していない
もく SUSYが成立 $\Leftrightarrow m_{\text{boson}} = m_{\text{fermion}}$

- SUSY breaking の問題は、2つの側面がある
- { ① SUSYを自発的に破るメカニズム
 - ② SUSYの破れを、MSSMに伝達するメカニズム

① について

$$\text{SUSY代数 } \{ Q, \bar{Q} \} = 2 \sigma^\mu P_\mu$$

$\hookrightarrow \sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$

↑
 SUSY変換の生成子 並進演算子
 boson \leftrightarrow fermion

\curvearrowright SUSY変換を2回作用 = 並進

この代数より $P_\mu = \frac{1}{4} \bar{\sigma}_\mu \{ Q, \bar{Q} \} + \text{おのこ}$

$$H = P_0 = \frac{1}{4} (Q_i \bar{Q}_i + \bar{Q}_i Q_i + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2)$$

\curvearrowleft Hamiltonian

$$\langle 0 | H[0] \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 | Q_i \bar{Q}_i + \bar{Q}_i Q_i + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2 | 0 \rangle$$

$\rightarrow \begin{cases} = 0 & (\Rightarrow Q[0] = 0 \text{ SUSY is unbroken}) \\ \neq 0 & (\Rightarrow Q[0] \neq 0 \text{ SUSY is broken}) \end{cases}$

\rightarrow 真空でのエネルギー $\langle 0 | H[0] \rangle$ が SUSY の order parameter

(注) SUSY が gauge 化した SUGRA では、この主張は成立しない

また、真空のエネルギー は、補助場 F, D の期待値の和で与えられる

$$V = \underbrace{\sum_i |\langle F_i \rangle|^2}_{\text{matter multiplet}} + \underbrace{\sum_a \frac{g^2}{2} (\langle D^a \rangle)^2}_{\text{vector multiplet}}$$

から の寄与

から の寄与

“F-type breaking”

vector multiplet

から の寄与

D-type breaking

どうのようでも理論論議において、SUSY が成り立つのか？

通常は、 $\frac{\langle D^a \rangle}{\langle \rangle} = 0$ を満たす解が容易に

$$\sum_i \langle \phi_i^+ \rangle T^a \langle \phi_i^- \rangle \quad (T^a: \text{generator})$$

得られるので、このレバーベルのモード $\langle F_i \rangle \neq 0$ となる理論を採用する。

する上での重要な考慮

- ① 非renormalization 定理 (non renormalization theorem)
- ② Witten 指数

- ① 非renormalization 定理

相互作用項（スピンホトンチャージ）が 重力の範囲内で量子補正をうけない

スードボテンシヤル

$$\rightarrow F_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\right)^* \text{ より 古典レベルで..}$$

$$\langle F_i \rangle = 0 \text{ ならば } \langle F_i \rangle = 0 @ \text{any loop}$$

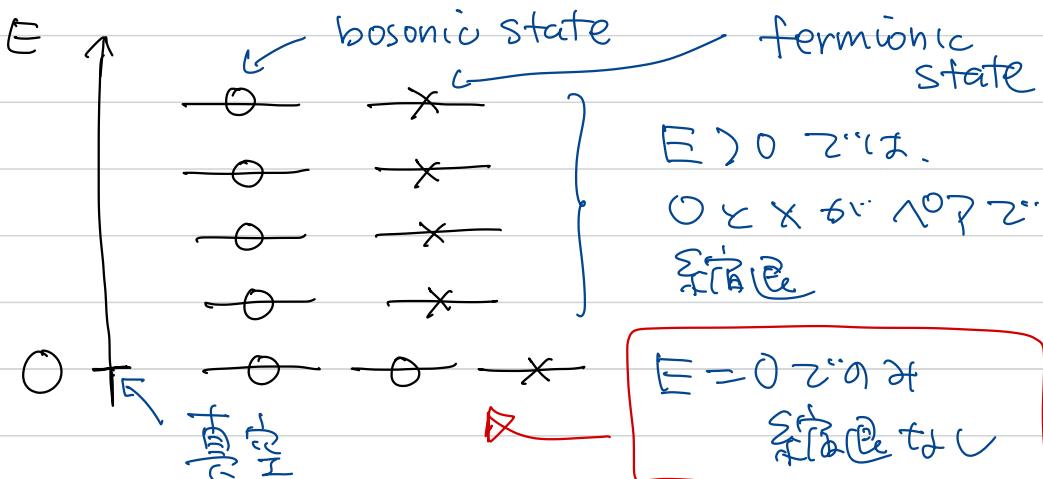
$\langle F_i \rangle \neq 0$ by non-perturbative effects

Dynamical SUSY Breaking

② Witten 指数 = $\text{Tr}(-1)^F$ (F : フェルミオン数)

Witten 指数は、SUSY 真空の数をカウント

SUSY 理論のエネルギースペクトル



$$t, 2. \quad \boxed{\text{Tr}(-1)^F \neq 0 \Rightarrow \text{SUSY}}$$



Super Yang-Mills theory }
Massive Super QCD }

破壊的



Chiral SQCD と、SUSY を 破壊的 model
を作り (massless SQCD + singlet と
破壊的 作り)

② 超対称性の破れの伝達機構

① で生成した超対称性の破れをどのように Standard model へ伝えるか？

一番 simple なのは、MSSM の枠内で SUSY の破れが ダイレクトに 伝達する。

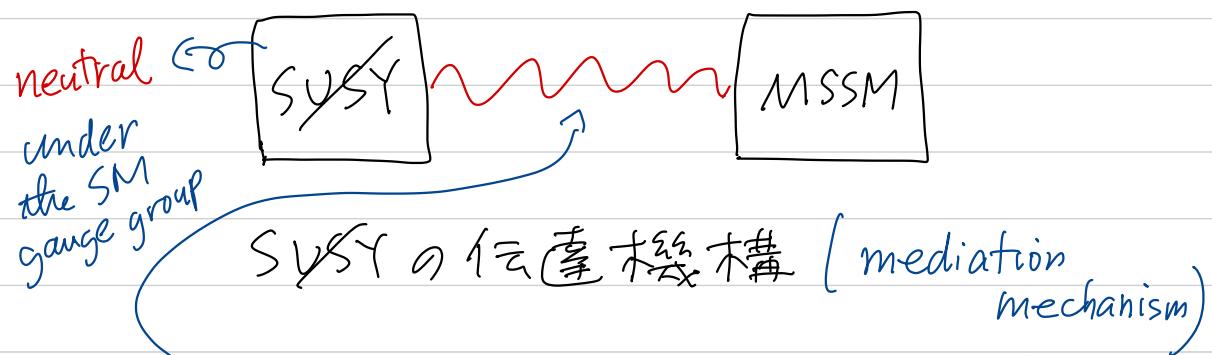
このはうまくいかない

\therefore SUSY mass sum rule

$$\begin{aligned} \text{Str } m^2 &= \sum_{J: \text{spin}} (2J+1) (-1)^{2J} m_J^2 \\ &\Rightarrow (m^2 + F) + (m^2 - F) \\ &\quad \begin{array}{l} \text{F-type} \\ \text{SUSY breaking} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{boson} \\ - 2 \times m^2 \end{array} \quad \leftarrow \text{fermion} \end{aligned}$$

(ex. $\gamma\gamma\gamma$ の場合, がたす $\gamma\gamma\gamma$ の重なり)
スカラーアクションが存在する \rightarrow 未発見
 $P_{\gamma\gamma\gamma} \gamma\gamma\gamma: 1\sim 3 \text{ MeV}$

超対称性が破れるセグメントと MSSM セグメント
を分ける必要がある。



この部分をどの interaction で伝達
させるか。バリエティがある

- gravity mediation \rightarrow gravity
- gauge mediation \rightarrow SM gauge int.
- anomaly mediation \rightarrow superconformal anomaly
- gaugino mediation
- Dirac gaugino mediation } gaugino
- Radion mediation \rightarrow radion
- :

* Soft SUSY breaking terms in MSSM

SUSY の 破れを パラメトリズ "し、
2 次発散を新たに生じない項が 分類済

$$\mathcal{L}_{\text{Soft}} = -\frac{1}{2} \left(M_3 \tilde{q} \tilde{q} + M_2 \tilde{W} \tilde{W} + M_1 \tilde{B} \tilde{B} \right) + \text{h.c.}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. - \left(A_w \tilde{q} H_u \tilde{\nu} + A_d \tilde{q} H_d \tilde{d} \right. \right. \\
 & \left. \left. + A_e \tilde{\ell} H_d \tilde{e} \right) + \text{h.c.} \right. \\
 & \text{gaugino} \\
 & \text{mass} \\
 & \text{A-term} \\
 & \quad \left(\text{Yukawa 相互作用の SUSY 版} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left(- \left(m_{\tilde{g}}^2 \tilde{q}^f \tilde{q}^f - m_{\tilde{u}}^2 \tilde{u}^f \tilde{u}^f - m_{\tilde{d}}^2 \tilde{d}^f \tilde{d}^f \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - m_{\tilde{\ell}}^2 \tilde{\ell}^f \tilde{\ell}^f - m_{\tilde{e}}^2 \tilde{e}^f \tilde{e}^f \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - m_{H_u}^2 h^+ h_u - m_{H_d}^2 h^+ h_d \right) \right. \\
 & \left. - \left(B h_u h_d + \text{h.c.} \right) \right. \\
 & \quad \text{B-term (holomorphic scalar mass)}
 \end{aligned}$$

これらの 10\% メタは、~~SUSY~~ の伝達機構を
指定しないかぎり フリー

どの伝達機構を採用するかで、
 SUSY 10\% メタの 10\% が決まる。

→ SUSY の検証における重要な情報

どの伝達機構を採用するかの criterion の

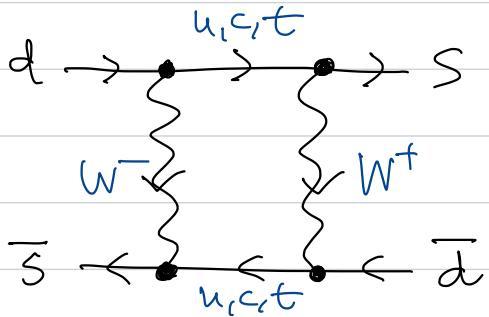
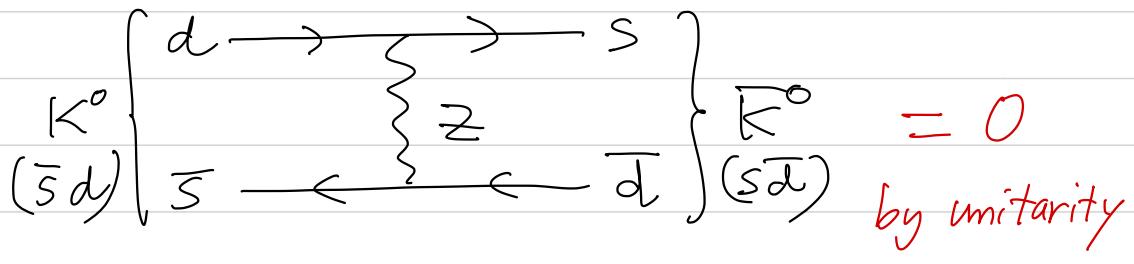
1つとして、SUSY flavor problem の回答がある

FCNC process がいかにまで抑制される?

ex. $K^0 - \bar{K}^0$ mixing

Flavor changing neutral current

SM \rightarrow GIM mechanism (= FCNC) suppressed



$$\approx \frac{g^4}{16\pi^2} \frac{(m_c^2 - m_u^2)^2}{M_W^4 m_c^2} \left(\sin\theta_c \cos\theta_c \right)^2$$

“Box diagram”

$$\approx 10^{-4} \left(\frac{m_c}{M_W} \right)^2 \times \frac{W}{m_c}$$

$m_c \gg m_u$

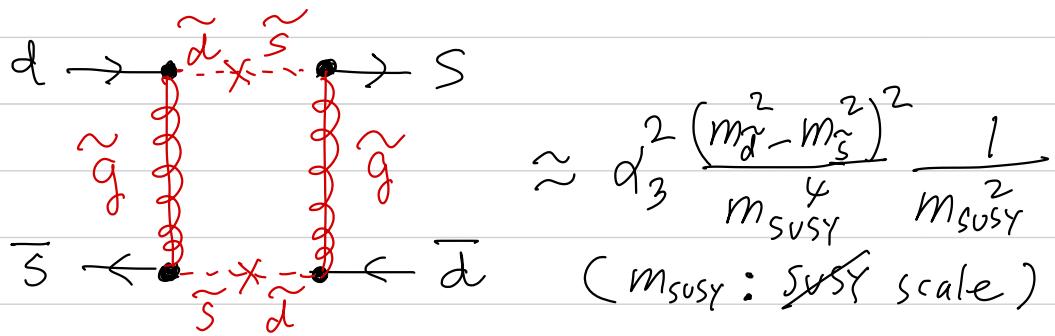
実験 \Rightarrow $A \approx 5\%$
 $m_c \approx 1.4 \text{ GeV}$

$\beta\text{-decay}$

MSSM (= おいた 5 squarks & sleptons の mass matrix & SM Yukawa matrix が一致するに 同時対角化 が可能)

→ New sources of flavor violation

$K^0 - \bar{K}^0$ mixing の例について。



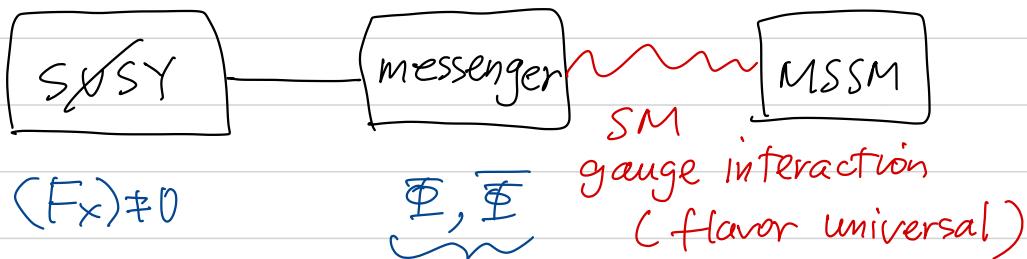
実験でアーティファクト。

$$\frac{m_d^2 - m_{\tilde{s}}^2}{m_{\text{SUSY}}^2} \lesssim 4 \times 10^{-3} \left(\frac{500 \text{ GeV}}{m_{\text{SUSY}}} \right)^3$$

S fermion masses are highly universal
in flavor space

* Gauge mediation of SUSY

flavor universality を自然に実現する

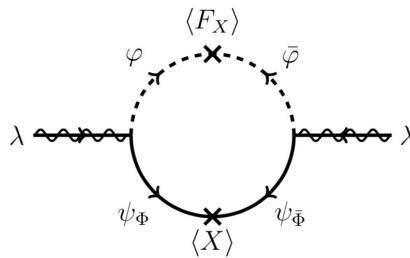


SM gauge group (= $U(1)$
vector-like たがうる多重重項

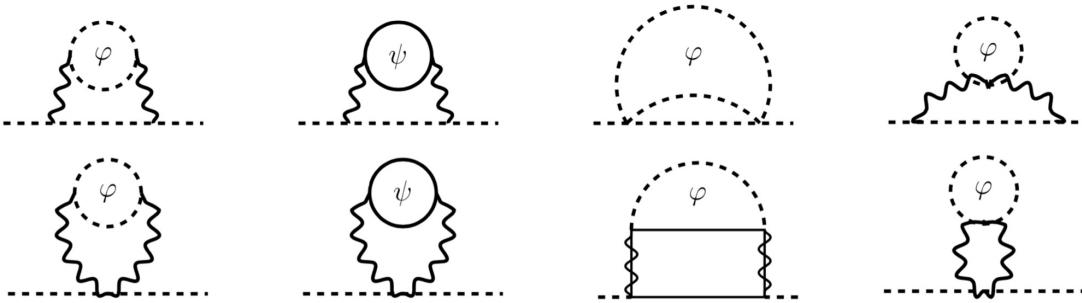
典型的な S₁ = (は SU(5) の 5, 5̄)

- ① 何らかの X₀ = Z₀ で SUSY が破れる
 - ② SUSY センターの場 X と messenger 重, 重の間に相互作用 $w = X \bar{\psi} \psi$ を仮定
 - ③ messenger multiplet の scalar, fermion の間に mass splitting
- $m_{\phi}^2 = \langle X \rangle \left(\frac{1}{2} \pm \langle F_X \rangle \right), \quad m_\psi = \langle X \rangle$

④ この mass splitting の loop diagram を用いて、
MSSM へ伝達



$$M_i = \frac{g_i^2}{16\pi} \frac{(F_X)}{\langle X \rangle}$$



$$\Rightarrow m^2 \sim \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 C_i \left(\frac{(F_X)}{\langle X \rangle} \right)^2$$

flavor universal

2次のカクシ中因子

$$\sum_{\alpha} (T_R^a T_R^a) = C_R \mathbb{1}$$

スペクトルの特徴

- gaugino mass \approx sfermion mass
- $M_3 : M_2 : M_1 = \alpha_3 : \alpha_2 : \alpha_1$
- $m_{\tilde{q}}^2 : m_{\tilde{\ell}}^2 : m_{\tilde{e}}^2 = \frac{4}{3} \alpha_3 : \frac{3}{4} \alpha_2 : \frac{3}{5} \alpha_1$
- $M_i \approx m \approx \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$
 $\Rightarrow \frac{\langle F_x \rangle}{\langle x \rangle} \sim \mathcal{O}(100 \text{ TeV})$

$$\langle F_x \rangle \sim \mathcal{O}(100 \text{ TeV}) \times \underbrace{\langle x \rangle}_{\text{(スケール) } < M_p}$$

$$< \mathcal{O}(100 \text{ TeV}) \times M_p \sim 10^{24} \text{ GeV}^2$$

$$\langle x \rangle \sim \sqrt{\langle F_x \rangle} \text{ とすると } \langle F_x \rangle \sim 10^{10} \text{ GeV}^2$$


 graviton (spin 2) or Superpartner
 spin 3/2
 gravitino mass

$$m_{3/2} \sim \frac{\langle F_x \rangle}{\sqrt{3} M_p} \sim \frac{10^{10}}{\sqrt{3} \times 10^{19}}$$

Supergravity \rightarrow

$$\langle F_x \rangle \sim 10^{10} \text{ GeV}^2$$

$\sim \mathcal{O}(0.1 \text{ eV}) \rightarrow \text{LSP}$

DM candidate

§ EW symmetry breaking in MSSM

MSSM では、Higgs 2重項が 2つ必要

(2 Higgs doublet model の 1つ)

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$$

$$H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$$

Higgs potential

SM では free parameter
“ λ ” と “ λ_3 ” の gauge coupling は λ_2 と λ_3 の比

$$V_H = \frac{g^2}{2} |H_u^+ H_d|^2 + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (|H_u|^2 - |H_d|^2)$$

gauge interaction 由来の 4次項

$$+ \mu^2 (|H_u|^2 + |H_d|^2)$$

SUSY 不変な 2次項

$$+ m_u^2 |H_u|^2 + m_d^2 |H_d|^2$$

$$+ (B H_u \cdot H_d + h.c.)$$

soft SUSY の 2次項 (B-term)

neutral component に着目する。

$$V_H^0 = \frac{1}{8} (g_u^2 + g_d^2) \left(|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 \right)^2$$

$$+ \sum_{i=u,d} \left(|\mu|^2 + m_{H_i^0}^2 \right) |H_i^0|^2 - 2B \operatorname{Re}(H_u^0 H_d^0)$$

EW symmetry breaking conditions

① neutral Higgs mass matrix の固有値
のうち 1つは negative

$$(H_u^{0*} \quad H_d^{0*}) \begin{pmatrix} |\mu|^2 + m_{H_u}^2 & -B \\ -B & |\mu|^2 + m_{H_d}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_d^0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) - B^2 < 0}$$

(det < 0)

② $(H_u^0 = |H_u^0| \text{ の } \frac{1}{\sqrt{2}})$ (D-flat direction) で
 $(\text{mass})^2$ が positive

$$\Rightarrow 2|\mu|^2 + m_{Hu}^2 + m_{Hd}^2 - 2B > 0$$

①, ② の 条件で、 $\underline{m_{Hu}^2 = m_{Hd}^2}$ とすと、

$$\begin{cases} (\mu^2 + m_{Hu}^2)^2 < B^2 \\ |\mu|^2 + m_{Hu}^2 > B \end{cases}$$

となり 予期
 $\underline{\underline{=}}$

これは、 SUSY breaking scale > EW scale
 で かつて ことは 可能

この際、 m_{SUSY} から m_{EW} の RGE running
 を考慮すると、 $m_{H_u, d}^2$ の β -function (=
 $(\text{yukawa coupling})^2$) が 含まると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_{H_u}^2}{d \ln \mu} \sim \frac{1}{8\pi^2} \left(3 \underbrace{Y_t^2}_{\text{red}} (m_{H_u}^2 + m_{Q_3}^2 + m_{D_R}^2) + \dots \right) \\ \frac{dM_{H_d}^2}{d \ln \mu} \sim \frac{1}{8\pi^2} \left(3 \underbrace{Y_b^2}_{\text{red}} (m_{H_d}^2 + m_{Q_3}^2 + m_{u_R}^2) + \dots \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow M_{H_u}^2 < M_{H_d}^2 @ \text{weak scale}$$

$$\langle H_u^0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \sin \beta, \quad \langle H_d^0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \cos \beta$$

ΣC_2 , SM Higgs mass \gtrsim ϵ .

$$m_h^2 = \frac{1}{2} \left[M_Z^2 + M_A^2 - \sqrt{(M_Z^2 + M_A^2)^2 - 4 M_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta} \right]$$

$$A: \text{CP odd Higgs} \quad M_A^2 = \frac{B}{\sin \beta \cos \beta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_u^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \beta (v + h) + \cos \beta H + i(\cos \beta A - \sin \beta G^0)) \\ H_d^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \beta (v + h) - \sin \beta H + i(\sin \beta A + \cos \beta G^0)) \end{array} \right.$$

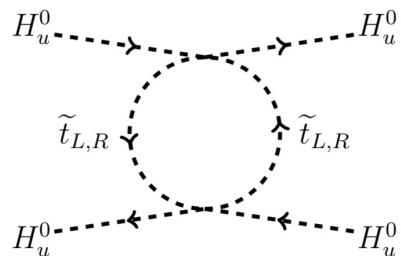
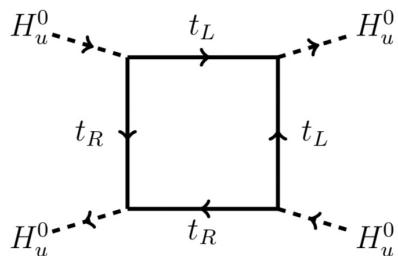
m_h^2 (= ありえ, $M_A^2 \rightarrow \infty$ limit で えええ。

$$m_h \lesssim M_Z [\cos 2\beta] \lesssim M_Z$$

free level では、unrealistic ($m_h = 125 \text{ GeV}$)

Higgs の 4 次 coupling の 1-loop correction

が 重要 \rightarrow top, stop loop



$$\Rightarrow \Delta m_h^2 = \frac{3}{4\pi^2} v^2 y_t^4 \sin^2 \beta \ln \left(\frac{M_{\tilde{t}_1} M_{\tilde{t}_2}}{m_t^2} \right)$$

$$\sim \frac{(90 \text{ GeV})^2}{\sin^2 \beta}$$

$$y_t = \frac{\sqrt{2} m_t}{v \sin \beta} \quad \boxed{m_h < 130 \text{ GeV}}$$

(y_t が GUT scale
で $\approx 10^{-2} \dots 10^{-3}$)

§ Gauge hierarchy problem solutions

① Large Extra Dimension (\supset Universal Extra Dimension (UED))

spacetime の dimension $\Sigma D = 4 + \delta$ とし、

δ が 空間には エネルギー密度をもつ。

Einstein-Hilbert action \leftarrow D-dim

$$S_{EH} = -\frac{1}{2} M_D^{2+\delta} \int d^4x dy \sqrt{-g} R$$

↑
D次元のランクスケール
reduced

Diagonal metric def.

$$\left(\dim(g) = 0 \rightarrow \dim(R) \sim \dim(\partial^2 R) = 2 \right)$$

↑
fluctuation $g_{MN} = \eta_{MN} + \frac{h_{MN}}{M_P^{2+\delta}}$

例えで、半径 R の 2+1 次元トポロジカル（ $S^1 \times \dots \times S^1$ ）

$$g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_\mu & \phi_R \end{array} \right)$$

graviton
 $(M, N = 0, 1, 2, \dots, 4+\delta)$
 $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$
 $m, n = 1, 2, \dots, \delta$

gauge field
 $(g_{\mu m})$

scalar field
 (g_{mn})

DOF

$$\underbrace{\frac{1}{2}(4+\delta)(5+\delta)}_{G_{MN}} = \underbrace{\frac{1}{2}4 \times 5}_{g_{\mu\nu}} + 2 \times \underbrace{\frac{1}{2}4 \times \delta}_{A_\mu} + \underbrace{\frac{1}{2}\delta(\delta+1)}_{\phi}$$

例えで、4d graviton の $g_{\mu\nu}(x, y)$ を

mode expansion で 3 と 対応する。

→ 平面波で 展開できる

$$g_{\mu\nu}(x,y) = \underbrace{g_{\mu\nu}^{(0)}(x)}_{\text{余次元空間に} \rightarrow} + \frac{1}{(2\pi R)^{\delta/2}} \sum_{\vec{n} \neq 0} e^{\frac{i}{R} \vec{n} \cdot \vec{y}} \underbrace{g_{\mu\nu}^{(\vec{n})}(x,y)}_{\text{Kaluza-Klein} \rightarrow}$$

余次元空間に \rightarrow
 4次元 graviton
 $\vec{n}=0 \Rightarrow \text{"t-d 空間"}$

$$m_{\vec{n} \neq 0}^2 = \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{\delta} \vec{m}_i^2 \rightarrow \frac{1}{R^2}$$

mass spectrum

この展開を S_{EH} に代入して、4d graviton の部分を抽出すると、

$$S_{EH} \supset -\frac{1}{2} M_p^{2+\delta} \int d^4x (2\pi R)^\delta \sqrt{-g^{(0)}} R^{(0)}$$

M_p^2 と同定

$$M_D^{2+\delta} (2\pi R)^\delta = M_P^2$$

↑ ↓

$(4+\delta) \dim \mathcal{D}_{\mathbb{R}^4}$ $4-\dim \mathcal{D}_{\mathbb{R}^4}$

R は適当に大きくすることはできないはず

$M_D \sim \Theta(\text{TeV})$ が可能

$$R \sim 10^{\frac{32}{n}} \text{ TeV}^{-1} = \begin{cases} \cancel{10^{15} \text{ cm}} & (n=1) \\ 10^1 \text{ cm} & (n=2) \\ \cancel{10^{-6} \text{ cm}} & (n=3) \end{cases}$$

excluded

Hierarchy problem は LRT のように 解決

$$\delta m_H^2 \sim \int d^{4+\delta} k \frac{1}{k^2 - m^2}$$

$\sim \int_0^{M_D} dk^2 \frac{(k^2)^{(2+\delta)/2}}{k^2 - m^2}$

Higgs mass loop補正 TeV cutoff がほしい

finite!

Large Extra Dimension (= F3 hierarchy problem

の解は、大きい余剰空間が自然に実現
これを示さないと单なる (1+1) 次元に
すぎない。

また、余剰空間をスカラーエ場の初期条件
とみなす考え方が string theory では自然

$$\rightarrow R = \langle g_{55} \rangle \quad (5D)$$

Radion (は もともと metric の $\sqrt{-g}$;

classical は λ potential が存在しない

quantum correction (perturbative or non-perturbative)

(= F3 potential 生成 \rightarrow 最小値で決める)

Radius stabilization の問題 \rightarrow むぎかい

② Warped Extra Dimension (Randall-Sundrum model)

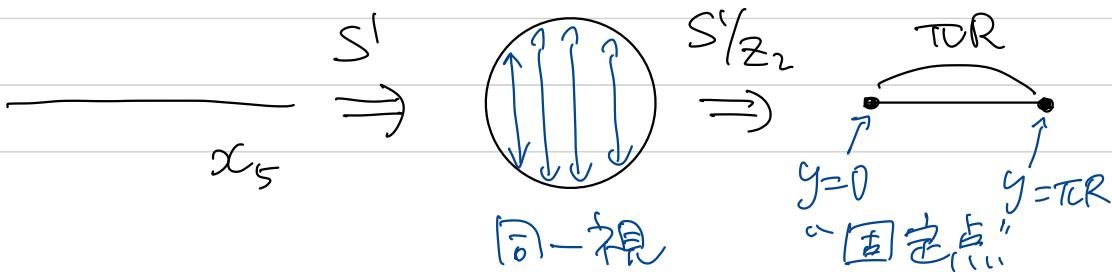
前述のシナリオは、余剰空間が flat

曲がった場合を考えるとどうなるか？

設定

* 5次元理論で、5番目の空間を S^1/z_2
でコンパクト化

$$\left\{ \begin{array}{l} S^1: x_5 \sim x_5 + 2\pi R \text{ (周期的B.C.)} \\ z_2: x_5 \sim -x_5 \text{ (余剰空間における空間反転)} \end{array} \right.$$



* action of RS model

E-H 項

$$S_5 = \int d^4x dy \sqrt{-g} \left[-\Lambda + 2M_5^3 R \right]$$

5 番目の空間 SD 宇宙項 SD 曲率
TUV
action

$$+ \delta(y) \int d^4x \sqrt{-g_{y=0}} (L - \Lambda_{y=0})$$

4D
宇宙項

$$+ \delta(y - \pi R) \int d^4x \sqrt{-g_{y=\pi R}} (L - \Lambda_{y=\pi R})$$

5D
曲率
TUV

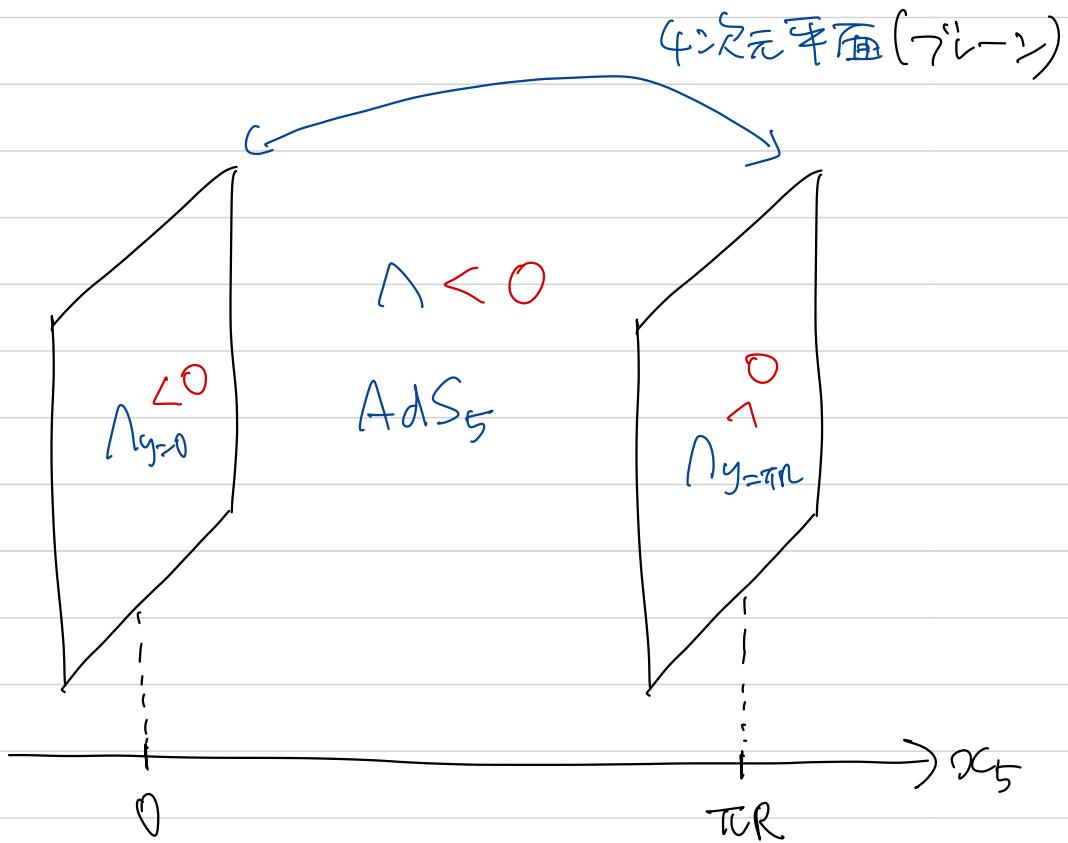
$$\Lambda = -\Lambda_{y=0} = \Lambda_{y=\pi R} = -24M_5^3 k^2 のとき$$

アインシニタイン方程式の古典解

$$ds^2 = e^{-2ky} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$$

Σ かつ $T_{\mu\nu}$

"warp factor"



* hierarchy problemへの応用

Standard model Higgs field が

$y = \pi R$ ブレーン (= 局在化する) と仮定

y_1 は固定しない

Higgs $\frac{g}{\sqrt{2}} \alpha$ action

$$S_{\text{Higgs}} = \int d^4x \sqrt{-g_{y=\text{IR}}} \times$$

$$g_{y=\text{IR}}^{y=\text{IR}} = e^{-2h\pi R} \eta_{\mu\nu} \left[g_{y=\text{IR}}^{\mu\nu} (D_\mu H)^T (D_\nu H) - \lambda (|H|^2 - v_0^2) \right]$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \int d^4x e^{-4h\pi R} \times$$

$$\left[e^{2h\pi R} \eta^{\mu\nu} (D_\mu H)^T (D_\nu H) - \lambda (|H|^2 - v_0^2) \right]$$

$$H \rightarrow e^{h\pi R} H$$

$$\rightarrow \int d^4x \left[\eta^{\mu\nu} (D_\mu H)^T (D_\nu H) - \lambda (|H|^2 - v_0^2 e^{-2h\pi R}) \right]$$

↑
canonical
normalization

RS model では。

y_{IR} 上の dimensionful 10^{-7}
及 warp factor 2^{-27-1}

$$V_0 e^{-k\pi R} \approx M_H = 125 \text{ GeV} \quad \text{とみなすべき}$$

V_0 は、 ζ に理由がない限り $5D$ フランクスケール
と考えるのが自然。又、RS model では、
 $5D$ フランク $\approx 4D$ フランク (後述) なので、

$$e^{-k\pi R} \approx \frac{\mathcal{O}(1 \text{ TeV})}{M_{\text{Planck}}} \sim 10^{-16 \sim -15}$$

$$\therefore kR \approx \mathcal{O}(10)$$

コンパクト化スケール R^{-1} と AdS_5 曲率スケール
は 1 テラ程度しか違わない

Einstein - Hilbert action は、

$$S_{EH} = 2M_5^3 \int d^4x dy \underbrace{-g}_{e^{-4ky}} \underbrace{R}_{\sqrt{n}} R_4 e^{2ky}$$

$$\Rightarrow M_4^2 = 2M_5^3 \int_0^{\pi R} dy e^{-2ky} \underbrace{\frac{1}{2k} (-e^{-2k\pi R})}_{\text{}} \quad \text{(略)}$$

$$M_4^2 = \frac{M_5^3}{k} \left(1 - \underbrace{e^{-2\pi k R}}_{\approx 1} \right) \approx \frac{M_5^3}{k}$$

∴ 2.

$M_4 \approx k \approx M_5 \leftarrow \text{natural choice}$

$$\hookrightarrow \frac{1}{R} \approx \Theta(1) k$$

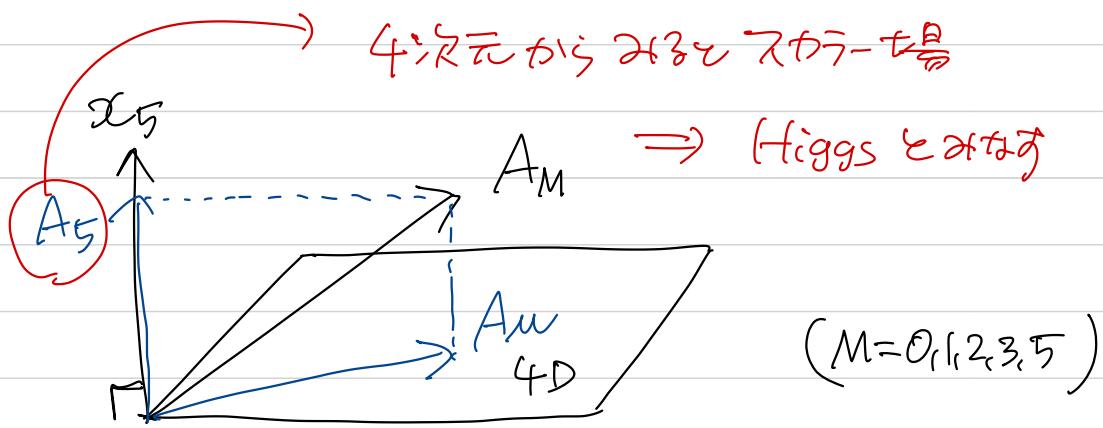
RS model では、コンパクト化スケール
は 4D フランクスケールと比較して
変わらない (Large Extra D とかがい)

ただし、 $kR \sim \Theta(10)$ を自然に実現する
Xカニズムを構成する必要がある。

(ex Goldberger-Wise mechanism)

③ Gauge-Higgs unification

高次元ゲージ理論において、ゲージ場の余剰空間成分を Higgs 場とみなす



Higgs 場 (は もともとゲージ場なので、

ゲージ対称性により mass が禁止される
(potential)

loop correction (つまり mass (potential))

を生成

\uparrow
Coleman-Weinberg
potential

Higgs mass calculation

簡単のため、 $(D+1)$ 次元 QED を考え、 $(D+1)$ 次元
の空間を S^1 (=コンパクト化した理論) で計算

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \overline{\psi} (iD - m) \psi$$

$$\begin{cases} F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M & (M = \underbrace{0, 1, \dots, D-1, D}_\mu) \\ D_M = \partial_M - i e A_M \\ D = \Gamma^M D_M \quad \Gamma^M = (\gamma^\mu, i \gamma^5) \end{cases}$$

S^1 の boundary condition

$$\begin{cases} A_M(x_u, y+2\pi R) = A_M(x_u, y) \\ \psi(x_u, y+2\pi R) = \underbrace{e^{2\pi i \omega}}_{\text{(D+1)th coordinate}} \psi(x_u, y) \end{cases}$$

— $\omega \in U(1)$ の phase $e^{i\omega}$
(twisted boundary condition)

KK expansion

$$\psi(x_\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}(x_\mu) e^{i \frac{n\pi d}{R} y}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_y = \int d^4x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(n)}(x_\mu)} \times \\ \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m - i \frac{n\pi d}{R} \gamma^5 \right) \psi^{(n)}(x_\mu) + \dots$$

∴ $m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \left(\frac{n\pi d}{R} \right)^2$

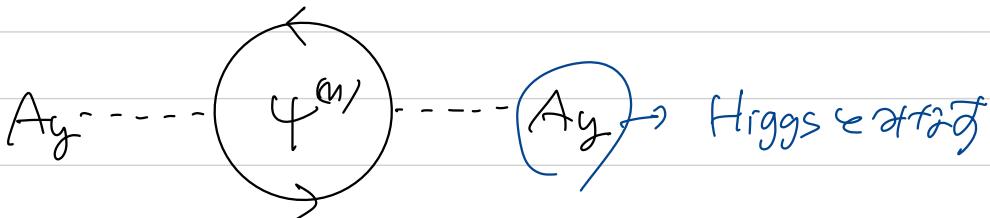
gauge interaction of $A_y^{(0)}$

$\epsilon_D \int d^4x \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(n)}(x_\mu)} A_y^{(0)}(x_\mu) i \gamma^5 \psi^{(n)}(x_\mu)$

$A_y^{(0)}$ normalization

ϵ_D : Dirac QED coupling constant

$Ay \circ (\text{mass})^2$ @ 1-loop Σ 計算



$$m_H^2 = i e_D^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tr} \left[\gamma^5 \frac{1}{k - m_{\text{phys}}} \gamma^5 \frac{1}{k + m_{\text{phys}}} \right]$$

$$\frac{\text{Tr} \left[\gamma^5 (k + m_{\text{phys}}^*) \gamma^5 (k + m_{\text{phys}}^*) \right]}{(k^2 - m_{\text{phys}}^2)^2}$$

$$\text{Tr} [(-k + m_{\text{phys}}^*)(k + m_{\text{phys}}^*)]$$

$$= (-k^2 + m^2 - \left(\frac{mt_d}{R}\right)^2) 2^{\frac{(D+1)}{2}}$$

$$= i e_D^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{(D+1)}{2} (-k^2 + m^2 - \left(\frac{mt_d}{R}\right)^2)}{(k^2 - m^2 - \left(\frac{mt_d}{R}\right)^2)^2}$$

$$\frac{2e^2}{(\cancel{p}^2 + (\frac{mt_d}{R})^2)^2} - \frac{1}{\cancel{p}^2 + (\frac{mt_d}{R})^2}$$

$$= i e_D^2 2^{\left[\frac{D+1}{2}\right]} \int \frac{d^D h}{(2\pi)^D} \left(\left(+ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\frac{2\pi R}{2\rho} \right) \right)$$

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m+\rho}{R}\right)^2 + \rho^2}$

$\frac{\sinh(2\pi R\rho)}{\cosh(2\pi R\rho) - \cos(2\pi d)}$

$\approx \frac{2\pi R}{2\rho} \left(\frac{\sinh(2\pi R\rho)}{\cosh(2\pi R\rho) - \cos(2\pi d)} \right)$

$$= \frac{e_D^2 (2\pi R)^2}{2^{D-\left[\frac{D+1}{2}\right]} \pi^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty dh \epsilon^{D-1} \frac{(-\cosh(\sqrt{k_E^2 + m^2} 2\pi R) \cos(2\pi d))}{[\cosh(\sqrt{k_E^2 + m^2} 2\pi R) - \cos(2\pi d)]^2}$$

有限!!

具体例 $D=5, M=0, d=\frac{1}{2}$

$$M_H^2 = \frac{9 e_4^2}{16\pi^4 R^2} \zeta(3) \quad \leftarrow \text{loop factor} \times \frac{1}{R^2}$$

$E > \frac{1}{R}$ 5D gauge sym.
 unbroken
 $E < \frac{1}{R}$ 5D \rightarrow 4D gauge sym
 $M_{Ax}^2 = 0, M_{Ay}^2$ がゼロである必要
 ある

"コンクトスケール" cutoff

EW symmetry breaking

① Large Extra Dimension (UED)

naive UED model では、Higgs potential
は、高次元 Lagrangian に書き込まれていて、
Standard model 同様、~~EW~~ は予言不可

② RS model

RS model では、Higgs field は $y = \pi R \theta$ で
に θ が $\pi/2$ の setup で、potential は通常
の Standard model Higgs potential を仮定

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = S(y - \pi R) \int d^4x \sqrt{-g} \times$$
$$\left[D_\mu H^\dagger D^\mu H - \lambda \left(|H|^2 - v_0^2 \right)^2 \right]$$

本質的に Standard
model と同じ

③ Gauge-Higgs unification (GHU)

以下、簡単のため 5D に限定

Higgs が "高次元ゲージ場由来" ので、

E_6 は 非常 (= non-trivial)

⑨ ます", $SU(2)_L$ doublet との Higgs を
 A_5 から 生成する必要がある。

adjoint 表現なので, $SU(2)_L \times U(1)_Y$
から スタートで"よい"

simplest group: $SU(3) \supset SU(2)_L \times U(1)_Y$

コンパクト化は、 S^1/\mathbb{Z}_2 を採用

Boundary conditions on S^1/\mathbb{Z}_2

$$S': A_\mu(x, y+2\pi R) = A_\mu(x, y)$$

$$A_5(x, y+2\pi R) = A_5(x, y)$$

$$\mathbb{Z}_2: \begin{aligned} PA_\mu(x, -y) P^\dagger &= A_\mu(x, y) \\ PA_5(x, -y) P^\dagger &= -A_5(x, y) \end{aligned} \quad \begin{matrix} y=0 \\ i=\gamma^{112} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} PA_\mu(x, \pi R - y) P^\dagger &= A_\mu(x, y) \\ PA_5(x, \pi R - y) P^\dagger &= -A_5(x, y) \end{aligned} \quad \begin{matrix} y=\pi R \\ i=\gamma^{112} \end{matrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{R}^{01}\bar{\tau}_1 \text{ matrix}$$

A_μ の $\text{R}^{01}\bar{\tau}_1$ は、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が残るようにな、
 A_5 の $\text{R}^{01}\bar{\tau}_1$ は、

$$F_{\mu 5} = \partial_\mu A_5 - \partial_5 A_\mu - ig [A_\mu, A_5]$$

から、 A_μ と反対の $\bar{\tau}_1$ に自動的に決まる

上記の boundary condition が $A_{\mu,5}$ の成分を具体的に表すと、

$$A_\mu = \begin{pmatrix} (+,+)(+,-) & (-,-) \\ (+,+)(+,-) & (-,-) \\ (-,-)(-,-) & (+,+)(+,-) \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} (-) & (-) & (+,+)(+,-) \\ (-) & (-) & (+,+)(+,-) \\ (+,+)(+,-) & (-,-) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} A_M^{(+)}(x,y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_M^{(+)}(x) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \\ A_M^{(-)}(x,y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_M^{(-)}(x) \sin\left(\frac{n}{R}y\right) \end{array} \right)$$

\mathbb{Z}_2 による even field の $n=0$ の「」、

つまり massless field となる

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu: SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1) \\ A_5: SU(2) \text{ doublet } 4D \text{ scalar となる} \\ \text{massless} \end{array} \right.$$

$$n=0 \text{ e79-}$$

$$A_{\mu}^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_{\mu}^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\mu} & \sqrt{2} W_{\mu}^+ & 0 \\ \sqrt{2} W_{\mu}^- & -W_{\mu}^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} B_{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} B_{\mu} \end{pmatrix}$$

$$A_5^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & H^+ \\ 0 & 0 & H^0 \\ H^- & H^0* & 0 \end{pmatrix}$$

KKZΛ⁰ηγL

$$M_{Wn} = \frac{n+a}{R} \quad M_{Zn} = \frac{n+2a}{R} \quad M_{Yn} = \frac{n}{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} n=0$$

$$\langle A_5^{(0)} \rangle = \frac{a}{g_5 R}$$

$$M_W = \frac{a}{R}, \quad M_Z = \frac{2a}{R}, \quad M_Y = 0$$

$\Leftrightarrow S U(2) \times U(1) \rightarrow U(4)_{em}$ by $a \neq 0$

$$M_Z = 2M_W \quad (\Leftrightarrow \sin^2 \theta_W = \frac{3}{4} \gg 0.23 \text{ (exp.)})$$

Wrong prediction

EW symmetry breaking

⑦ No Higgs potential @ free level

$$-\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \quad (M, N = 0, 1, 2, 3, 5)$$

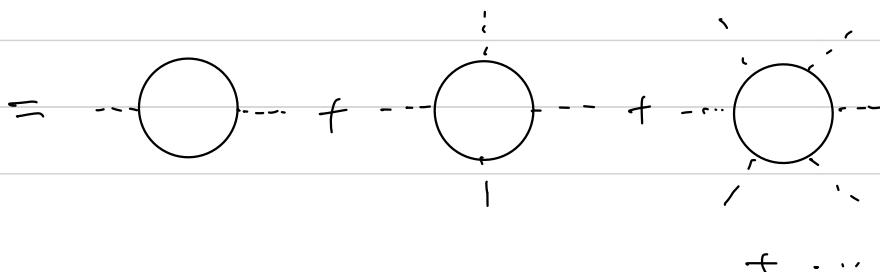
$$(F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M - i g [A_M, A_N])$$

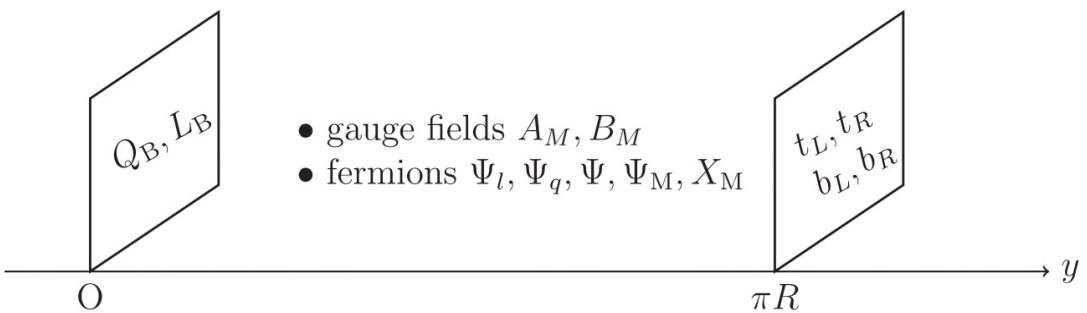
A_5 の potential が 0

$$(\because [A_5, A_5] = 0)$$

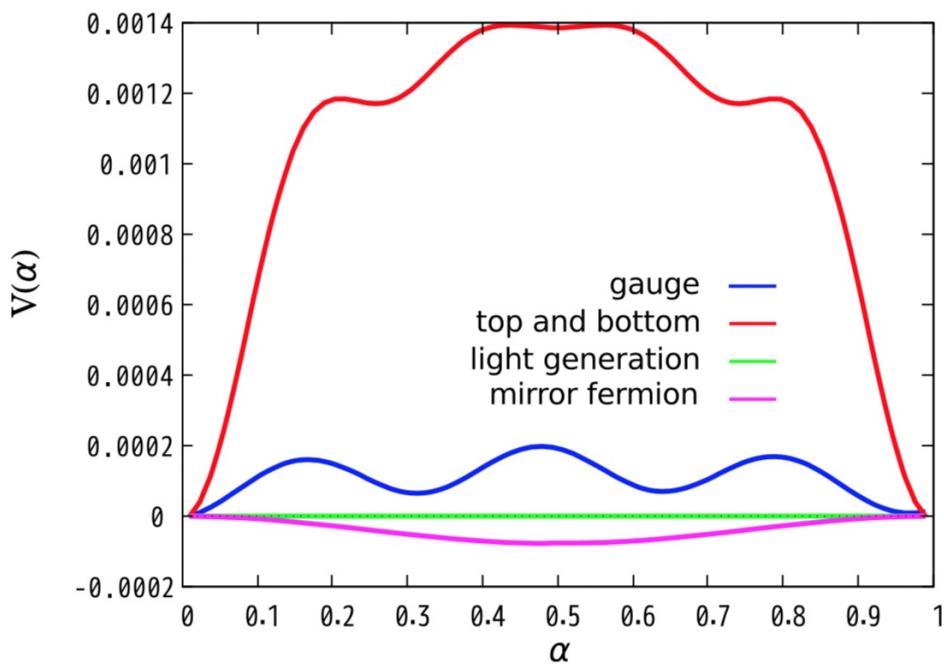
⑧ loop correction あり (z. potential 生成)
fermion number (Coleman-Weinberg potential)

$$V(A_5)_{\text{loop}} = (-1)^F \frac{1}{2} \underbrace{(\text{DOF})}_{\substack{\text{loop} \rightarrow \\ \text{fieldの自由度}}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi R} \sum_n \log(p^2 + \overbrace{m_h^2(A_5)}^{\text{KK mass}})$$

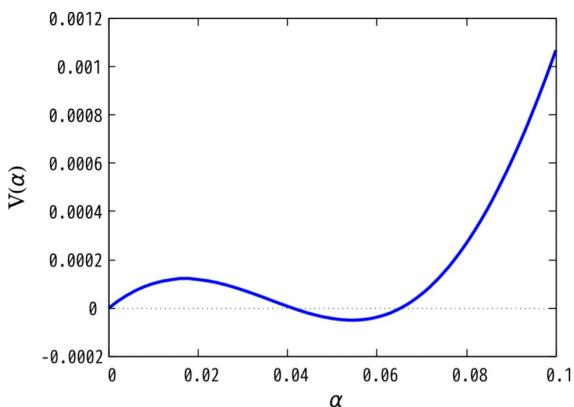
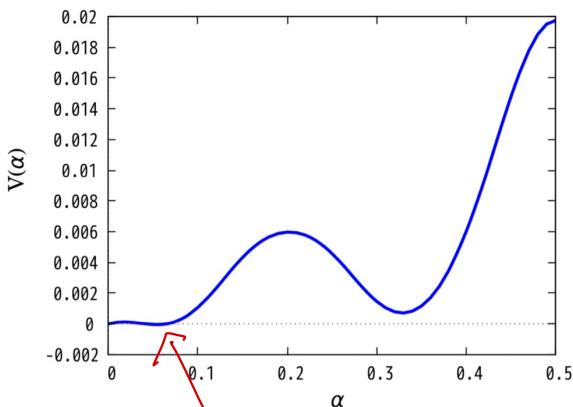




Higgs potential of the above setup



potential が周期的 τ_α のには、秩序 β_α や
が Wilson-line $\exp(i g \oint_S dy \langle A_y \rangle)$ から



Minimum

$$\text{SU}(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$$

$$m_H \sim 127 \text{ GeV}, \frac{f}{R} \sim 1.8 \text{ TeV}$$

Wilson-line

$$\langle W \rangle = P \exp \left(ig \oint_S dy \langle A_y \rangle \right)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi\alpha) & i \sin(\pi\alpha) \\ 0 & i \sin(\pi\alpha) & \cos(\pi\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\langle A_y \rangle = \frac{\omega}{g R} \frac{\lambda^6}{2} \quad \text{Gelf-Mann } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 < \alpha < 1$ では、

$$\left[\langle W \rangle, \sqrt{3} \lambda^3 + \lambda^8 \right] \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$$|| \quad \leftarrow \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[\langle W \rangle, \text{others} \right] \neq 0 \quad \left. \begin{array}{c} || \\ 0 \end{array} \right\} SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)_{em}$$

⑥ GHV では、matter content を fix すると、
Higgs potential は完全に決まる。

→ 高い予言能をもつ

Yukawa coupling

Yukawa Coupling のための準備

S' や T^2 などの コンパクト化では、
カイラルフェルミオンが実現でない。

$\Rightarrow S'/z_2$ や T^2/z_m などのようには
離散群で書けるオービフォルド
コンパクト化を考える

S'/z^2 を例にとる。
まず "S'" の場合

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \int d^4x dy \sqrt{-\bar{\psi}} i \Gamma^M \partial_M \psi(x,y)$$

$\psi(x_\mu, y + 2\pi R) = \psi(x_\mu, y)$ とすると。

$$\psi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \psi^{(n)}(x_\mu) e^{i \frac{n}{R} y}$$

と展開でよし。 $\rightarrow S_4$ (2代入)

$$S_\psi = \int dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi^{(n)}(x_u)} \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - i \gamma^5 \frac{n}{R} \right) \psi^{(n)}(x_u)$$

$$\Gamma^M = (\gamma^{\mu}, i \gamma^5), \quad D_M = \partial_M - i g A_M$$

$\rightarrow \psi_{L,R}^{(0)}$ etc are massless non-chiral

S' (\mathbb{Z}_2 の場合)

$$\begin{cases} S' : \psi(x_u, y+2\pi R) = \psi(x_u, y) \\ \mathbb{Z}_2 : \psi(x_u, -y) = \pm \gamma^5 \psi(x_u, y) \end{cases}$$

$\gamma_5 \gamma^2 + \gamma^5$ とおなじ

$$\begin{cases} \psi_R(x_u, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \psi_R^{(0)}(x_u) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_R^{(n)}(x_u) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \\ \psi_L(x_u, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_L^{(n)}(x_u) \sin\left(\frac{n}{R}y\right) \end{cases}$$

Right-handed $\tau_2 \nu \bar{\psi} + \tau_2 \psi$ massless
 $(-\gamma^5 \tau_2 \bar{\psi})$ left-handed $\bar{\psi} \gamma^5$ massless

Yukawa hierarchy を再現する際に、

5D fermion の mass parameter が 重要

$S'(z_2 z')$ は

$$m \overline{\psi} \psi = m \underbrace{\overline{\psi}_L \psi_R}_{\text{左}} + m \underbrace{\overline{\psi}_R \psi_L}_{\text{右}}$$

(= おのれ。 left と right の $z_2^{1/10} \bar{\tau}_1$ は
いとも反対) つまり, $z_2: \overline{\psi}_R \psi_L \rightarrow - \overline{\psi}_L \psi_R$

よし、 mass term が $z_2^{1/10} \bar{\tau}_1$ の z と z'
で許されるためには、 m の $z_2^{1/10} \bar{\tau}_1$ と z ,
odd が 必要。 $\rightarrow m = \underbrace{\epsilon(y) M}_{\sim \text{sign 量}} \sim$

5D Dirac equation

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^5 \partial_5 - \epsilon(x_5) M) \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} (\partial_5 - \epsilon(x_5) M) f_L^{(0)}(x_5) \rightarrow f_L^{(0)}(x_5) = \sqrt{\frac{2M}{e^{-2M} - 1}} e^{M x_5} \\ (\partial_5 + \epsilon(x_5) M) f_R^{(0)}(x_5) \rightarrow f_R^{(0)}(x_5) = \sqrt{\frac{2M}{1 - e^{-2M}}} e^{-M x_5} \end{cases}$$

VED \rightarrow Σ 想定
 * Yukawa coupling (1st up-type quark)

$$\int d^4y Y \bar{U}^i Q^j H_u \quad (i,j=1,2,3)$$

5D Yukawa coupling $\sim \Theta(r)$

$$= \left(Y \int dy f_{u_R}^{(0)i}(y) f_{Q_L}^{(0)j}(y) f_{H_u}^{(0)}(y) \right)$$

4D effective Yukawa coupling Y_{ij}

$$\times \int d^4x U_R^{(0)i}(x) Q_L^{(0)j}(x) h_u^{(0)}(x)$$

$$Y_{ij} = Y \frac{2 \sqrt{M_i M_j}}{\sqrt{(1 - e^{-2\pi M_i R})(e^{2\pi M_j R} - 1)}} \int_0^{\pi R} dy e^{-M_i M_j y}$$

Higgs field of zero mode

function (= constant) $\approx T_c$

$i \neq j$

$$\approx Y \times 2 \sqrt{M_i M_j} e^{-M_j \pi R} \frac{1}{M_i - M_j}$$

5D mass (Bulk mass) $1 = \delta_1, \delta_2$
 control

- ② exponential suppression たゞのて、
 $M \sim \Theta(1)$ でも 64T の階層性は easy
parameter の tuning の度合いは少くならぬ。
- ③ top Yukawa $\sim \Theta(1)$ たゞのて、 zero mode
(= top quark を含む 5D fermion は。
massless
- ④ neutrino mass については、 bulk mass Ξ
大きければ、非常に小さい neutrino
Yukawa を 実現
→ かならずしも シーケンス構造 によると
必要はない

- ⑤ ブーン上に存在する SM fermion がある場合
(= $y=0, \pi R$ に応じて 位置) の mode
function の値を決める
 $(e^{-Mx^0} @ y=0, e^{-M\pi R} @ y=\pi R)$

* RS model における Yukawa coupling

gauge hierarchy problem の解決から、

Higgs は y_{Yukawa} ブレーンに局在した 4D 種子
あるいは、 y_{Yukawa} ブレーンに 3 種の top をもつ 5D 種子
であることが必要

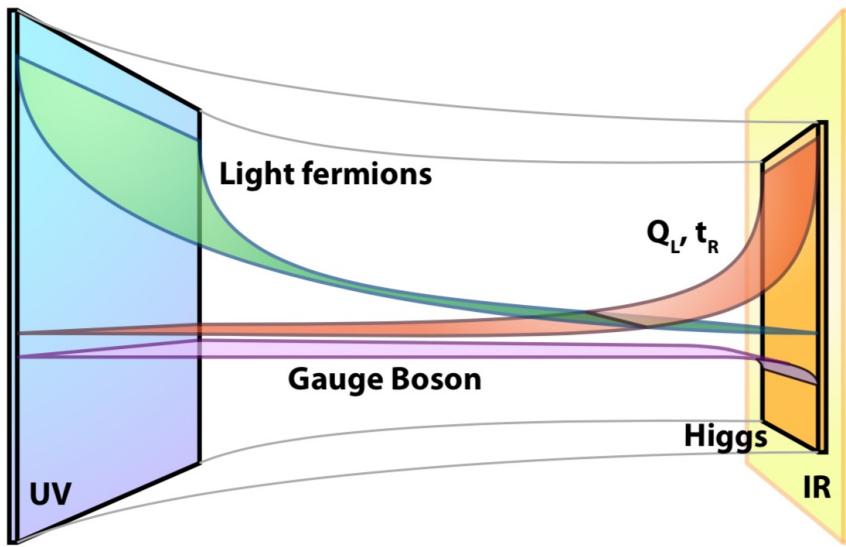
→ top Yukawa $\sim \mathcal{O}(1)$ とする
top quark は y_{Yukawa} ブレーンに局在

→ bottom Yukawa を両現するように
bottom quark の mode function を決定
↪ y_{Yukawa} ブレーンに局在の傾向

→ light fermions は Higgs と強く couple
 y_{Yukawa} ブレーンに局在

※ gauge boson zero mode は flat

Schematic picture of realistic setup
in RS model



* Gauge-Higgs unification (ニホン子)
Yukawa coupling

quark, lepton が 5D field の場合、
5D field

Yukawa coupling は gauge coupling より

決まる

後で下の down-type Yukawa について。

$$g_5 \int dx dy \bar{\psi}_i^{(0)} A_5^{(0)} \psi_i^{(0)}$$

flat
 $y_5 f_{\alpha i} = 12$
 $(i=1, 2, 3)$

↑
gauge coupling

Dirac fermion のゼロモード

$$= \left(g_5 \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \int dy f_d^{(0)}(y) f_q^{(0)}(y) \right) \int dx \bar{d}_R^i H Q_L^i$$

4D effective Yukawa coupling y_d

SU(3) on S/Z₂ model では。たぶん

$$\psi^{(0)}(3) = \begin{pmatrix} Q_L \\ d_R \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^3$$

α, d_R が "共通の multiplet に属するの?",
ゼロモードの bulk mass 依存性も共通

$$Y_d = \underbrace{g_5}_{g_4} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \int_0^{\pi R} dy \sqrt{\frac{2M}{1 - e^{-2\pi m y}}} \sqrt{\frac{2M}{e^{2\pi m y} - 1}} e^{-M|y| + M y}$$

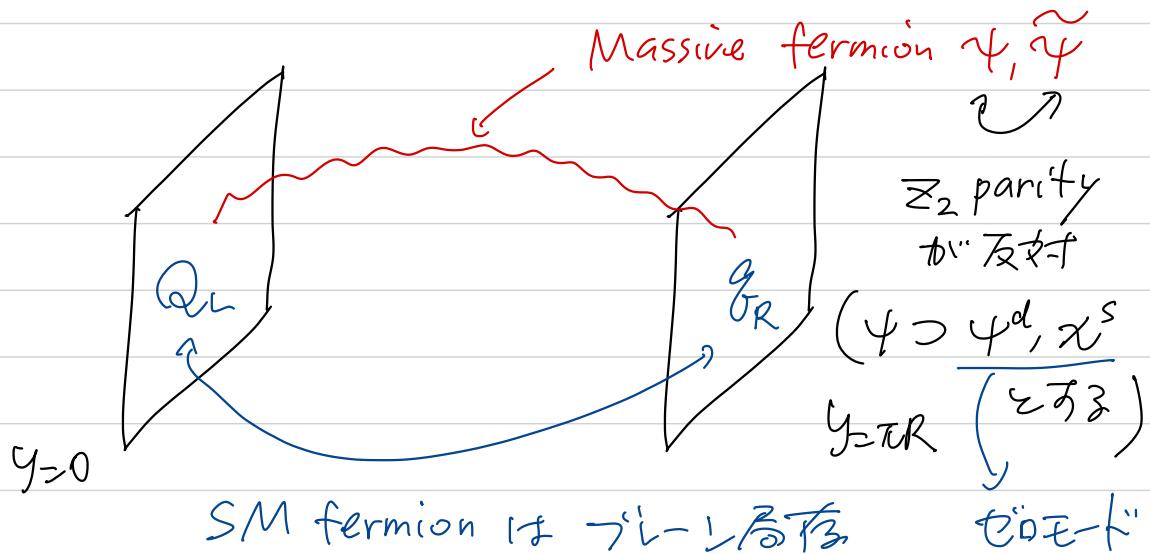
$$\approx g_4 2M \pi R e^{-\pi M R} \lesssim g_4$$

$$\Rightarrow \boxed{m_f \lesssim m_W}$$

⑨ top ハイタの yukawa coupling は、M2 tune すればで出せ。

top yukawa を実現させろ 1つの方法は、
top quark を SU(3) の高次表現 (4 重複対称 tensor) にうねこむと、 $\sqrt{4}$ 倍 enhance

⑩ quark, lepton が "ひいて" 高次元 バルク場由来では、
flavor mixing が "ひいて" \leftarrow gauge interaction
→ ブレーソン場在場、相互作用がひつよう



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\text{bulk}} = \bar{\psi}_i \not{D} \psi + \bar{\tilde{\psi}}_i \not{D} \tilde{\psi} - M(\bar{\psi} \tilde{\psi} + \bar{\tilde{\psi}} \psi) \\ \mathcal{L}_{\text{brane}} = \delta(y) \left[\bar{Q}_L i \not{D} Q_L + \frac{\epsilon_L}{\pi R} \bar{\psi}^d Q_L + \text{h.c.} \right] \\ \quad + \delta(y-\pi R) \left[\bar{q}_R i \not{D} q_R + \frac{\epsilon_R}{\pi R} \bar{\tilde{\psi}}_R \chi^s + \text{h.c.} \right] \end{array} \right.$$

\psi, \tilde{\psi} を integrating out

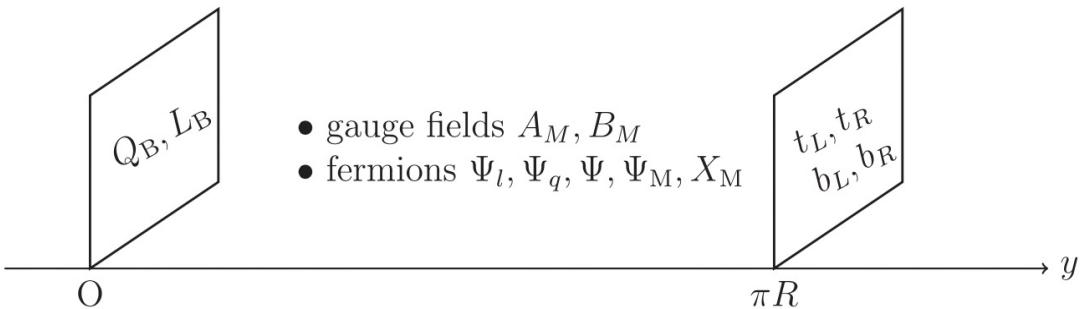
non-local

$$\epsilon_L \epsilon_R \pi M R e^{-M\pi R} \frac{1}{q_R} e^{ig \int_0^{\pi R} dy A_y} Q_L$$

$$\Rightarrow m_f \sim \underbrace{\epsilon_L \epsilon_R \pi M R M_W}_{} e^{-\pi M R}$$

ここで mixing の関係を用いて

An example of realistic GHV setup



- gauge fields A_M, B_M
- fermions $\Psi_l, \Psi_q, \Psi, \Psi_M, X_M$

Adachi & NM (2020)

- ⑨ 3rd generation quarks $(\begin{smallmatrix} t \\ b \end{smallmatrix})_{LR}, b_R$
 $(\pm y = \pi R)^2 l - \gamma_5 \gamma^2 \text{ in } 3 \text{ 4D field}$
- ⑨ 1st, 2nd generation quarks q, \bar{q}
 leptons $(\pm 5 \text{ D field } \psi_a, \psi_e) \underbrace{\text{couple}}$
- ⑨ 5D massive fermion ψ "top, bottom" $\bar{\psi}$
 $Q_B, L_B (\pm y = 0)^2 l - \gamma_5 \gamma^2 \text{ in } 3 \text{ 4D field}$
 Ξ' massless exotic fermion $\&$ mass Ξ CUS

Extra Dimensionの Experimental Signature

⑨ KK particle の signature を探す

モディフィードされた KK particle は、

KK graviton

① Deviation from Newton's law

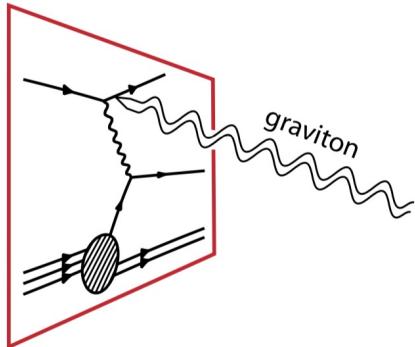
extra dimension のサイズ R が小さい距離
では、KK graviton (=F) Newton's law がはずれる

$$V(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right]$$

$$\left(T^2 \text{ で比例} \text{ で} \text{ は}, \alpha = \frac{16}{3}, \lambda = R \right)$$

$$R < 30\mu\text{m} \text{ for 2 extra dimensions}$$

② Collider Signals of KK graviton



モードシンプロセス Setup
では、SM fields は
ブレーン(=平面)
graviton が extra
space Σ propagate

KK graviton production → missing energy

(ブレーン上では、energy-momentum
保存が破れる)

$pp \rightarrow \text{jet} + \text{KK graviton}$ @ LHC
 $pp \rightarrow \gamma + \text{KK graviton}$

$\Rightarrow M_b > 7.7 \text{ TeV}$
 $M_{10} > 4.8 \text{ TeV}$ @ 95% CL

($M_{b(10)}$: b(10) 次元プラノン)

⑨ RS model case

RS model の場合は、注意が必要

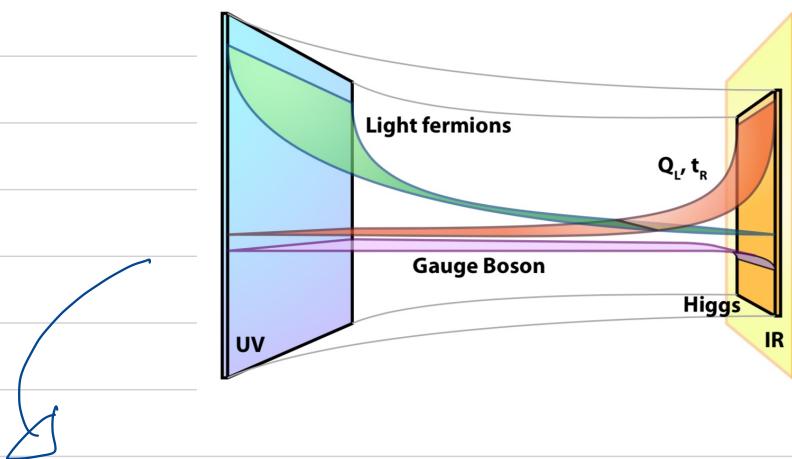
⇒ 1st KK graviton (は $y = \pi R$ ブレーンに
 $t^0 - \Sigma$ も)

{ Original model では、SM 粒子も
 $y = \pi R$ ブレーンに局在

⇒ 1st KK graviton → SM particles
decay が重要

この Setup では、flavor 物理について
SM とかからない

Yukawa hierarchy Σ が自然に実現
する (は、SM fields も extra dimension
(= propagate (\rightarrow 下図))



KK gauge bosons $\not\equiv y = \pi R \gamma^{\mu} - \gamma^{\nu}$
 peak $\not\equiv \omega$

KK gluon と \tilde{t}_R の相互作用が大きい
 (Q_L は bottom とも相互作用
 するため、 t_R ほど peak は 3 倍
 でない)

⑦ Dark matter

KK graviton は、 matter との相互作用が
非常に弱い ($\sim \frac{1}{M_p}$) ので、 Dark matter
の候補 (今はまだない)

Standard model particle も extra dimension
(= propagate するには、 特徴的な候補
が現れる。

Dark matter の 安定性を 保証する 手段
として、 KK パリティ が 課される

n 番目の KK 粒子に対して、
 $P_{KK} = (-1)^n$ の Z_2 パリティ を 課す

出どころ

S/Z_2 コンパクト化により extra D
方向の 並進不変性が 破れる。
→ KK 漫重量 保存の 破れ

LKP (lightest KK particle)

\Rightarrow 一番軽い KK particle が安定なので、
Dark matter の候補になりうる

(SUSY の R^0 と同様のロジック)

\Rightarrow UED では、1st KK photon が
典型的な

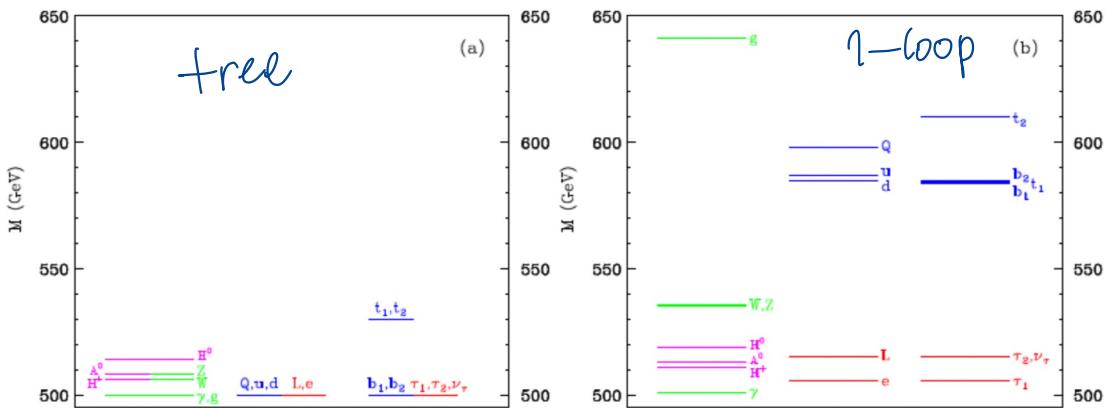


FIG. 6: The spectrum of the first KK level at (a) tree level and (b) one-loop, for $R^{-1} = 500$ GeV, $\Delta R = 20$, $m_h = 120$ GeV, $\overline{m}_H^2 = 0$, and assuming vanishing boundary terms at the cut-off scale Λ .