混雑ゲーム

九大院シス情 春学期水曜 1 限 ゲーム理論 I（横尾真 教授）

第 5 回 アドバンスドトピック

東藤 大樹（横尾研 准教授）

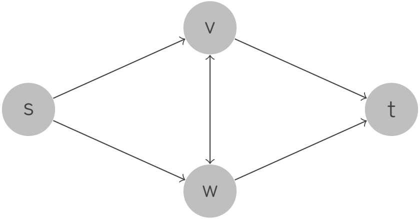
2022 年 5 月 18 日

混雑ゲーム (Congestion Games)

- 道路渋滞時の経路選択の状況（を始めとする様々な状況）を表現可能なゲーム理論モデル
  - 各プレイヤのコストが、自分と同じ行動を選択／同じリソースを使用するプレイヤの数に応じて増加するような状況
  - 例えば、スーパーのレジ待ちの行列で、どの列に並ぶか
- ナッシュ均衡の考え方を用いた社会／経済分析
  - ナッシュ均衡が必ずしも社会的に最適とならない例
  - 場当たり的な改善が社会全体の損失を生み出す可能性
  - ゲーム理論の視点からの定量的分析
- 計算機科学者による貢献が顕著な分野

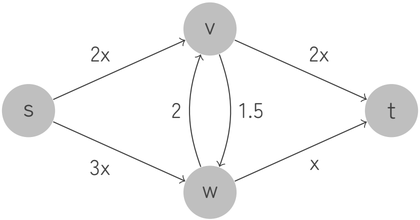
本日の内容

1 混雑ゲームの数理モデル



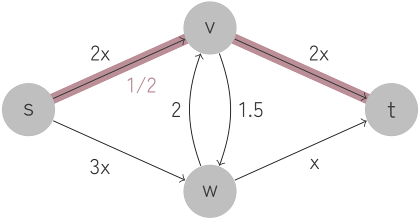
- $G(V, E)$：連結有向グラフ、多重辺があってもよい
- $s, t \in V$：出発点と到着点；いずれも所与。s **から** t **へ、流量 1 を流したい。**
- P：全ての s-t パス p の集合
- $p := \{(s, v_1), (v_1, v_2), \cdots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, t)\}$：s-t パスはエッジの集合
  - 上の図では、s-v-t, s-w-t, s-v-w-t, s-w-v-t の 4 つの s-t パスが存在

モデル・記法 (2/2)

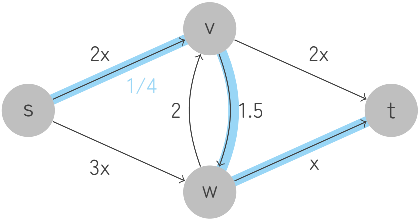


- $c_e : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$：エッジ $e \in E$ のコスト関数；非負、連続、非減少
  - エッジ e を流量 $x \in [0,1]$ が通るとき、e 上の各流量はコスト $c_e(x)$ を被る
- フロー $f := (f_p)_{p \in P}$：各パスを通る流量。
  - 実現可能性制約 $0 \leq f_p \leq 1 \land \sum_{p \in P} f_p = 1$ を満足するフローの集合 $\mathcal{F}$
- $c_p(f_p) := \sum_{e \in p} c_e(f_e)$：パス p のコスト関数
  - ただし、$f_e := \sum_{p \in P; e \in p} f_p$：
    エッジ e を通る流量の総和 f_e は、e を含むパスを通る流量の総和

モデル・記法 (2/2)

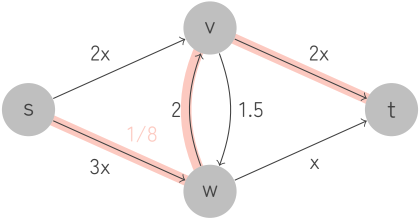


- $c_e : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$：エッジ $e \in E$ のコスト関数；非負、連続、非減少
  - エッジ e を流量 $x \in [0,1]$ が通るとき、e 上の各流量はコスト $c_e(x)$ を被る
- フロー $f := (f_p)_{p \in P}$：各パスを通る流量。
  - 実現可能性制約 $0 \leq f_p \leq 1 \wedge \sum_{p \in P} f_p = 1$ を満足するフローの集合 $\mathcal{F}$
- $c_p(f_p) := \sum_{e \in p} c_e(f_e)$：パス p のコスト関数
  - ただし、$f_e := \sum_{p \in P; e \in p} f_p$：
    エッジ e を通る流量の総和 f_e は、e を含むパスを通る流量の総和



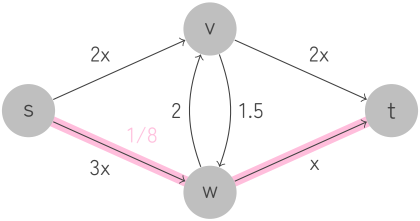
- $c_e : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$：エッジ $e \in E$ のコスト関数；非負、連続、非減少
  - エッジ e を流量 $x \in [0,1]$ が通るとき、e 上の各流量はコスト $c_e(x)$ を被る
- フロー $f := (f_p)_{p \in P}$：各パスを通る流量。
  - 実現可能性制約 $0 \leq f_p \leq 1 \wedge \sum_{p \in P} f_p = 1$ を満足するフローの集合 $\mathcal{F}$
- $c_p(f_p) := \sum_{e \in p} c_e(f_e)$：パス p のコスト関数
  - ただし、$f_e := \sum_{p \in P; e \in p} f_p$：
    エッジ e を通る流量の総和 f_e は、e を含むパスを通る流量の総和

モデル・記法 (2/2)



- $c_e : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$：エッジ $e \in E$ のコスト関数；非負、連続、非減少
  - エッジ e を流量 $x \in [0,1]$ が通るとき、e 上の各流量はコスト $c_e(x)$ を被る
- フロー $f := (f_p)_{p \in P}$：各パスを通る流量。
  - 実現可能性制約 $0 \leq f_p \leq 1 \wedge \sum_{p \in P} f_p = 1$ を満足するフローの集合 $\mathcal{F}$
- $c_p(f_p) := \sum_{e \in p} c_e(f_e)$：パス p のコスト関数
  - ただし、$f_e := \sum_{p \in P; e \in p} f_p$：
    エッジ e を通る流量の総和 f_e は、e を含むパスを通る流量の総和

モデル・記法 (2/2)



- $c_e : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$：エッジ $e \in E$ のコスト関数；非負、連続、非減少
  - エッジ e を流量 $x \in [0,1]$ が通るとき、e 上の各流量はコスト $c_e(x)$ を被る
- フロー $f := (f_p)_{p \in P}$：各パスを通る流量。
  - 実現可能性制約 $0 \leq f_p \leq 1 \wedge \sum_{p \in P} f_p = 1$ を満足するフローの集合 $\mathcal{F}$
- $c_p(f_p) := \sum_{e \in p} c_e(f_e)$：パス p のコスト関数
  - ただし、$f_e := \sum_{p \in P; e \in p} f_p$：
    エッジ e を通る流量の総和 f_e は、e を含むパスを通る流量の総和

解釈

プレイヤ・戦略を定義していないので、厳密な意味ではゲームではないが、
直感的にはゲームと捉えてよい

- 総流量 1 をプレイヤの集合と考える
- 一つのフロー f は、プレイヤの集合による戦略の組を表す
- プレイヤは、ある s-t パス上のごく微少の流量に相当
    - プレイヤ（微小流量）の戦略は、自分が通る s-t パス
- フロー f のもとでの、あるプレイヤが被るコストは、
  自分が通る s-t パスに含まれるエッジのコストの総和
    - より小さいコストのパスを選びたい

均衡フロー

Definition (均衡フロー)

あるフロー f が均衡フローであるとは、$f_p > 0$ なる任意の s-t パス $p \in P$、および別の任意の s-t パス $\tilde{p} \in P$ について、以下が成り立つことをいう

$$c_p(f_p) \leq c_{\tilde{p}}(f_{\tilde{p}})$$

- $f_p > 0$ なる任意の s-t パス ＝ プレイヤが存在する s-t パス
- もし別のパス $\tilde{p}$ について $c_p(f_p) > c_{\tilde{p}}(f_{\tilde{p}})$ であるならば、
  p 上の少なくともごく微少量のプレイヤにとって、
  $\tilde{p}$ に移動したほうが、コストが低くなるので嬉しい（＝均衡とならない）

最適フロー

- 本日の講義では、社会全体のコスト（総コスト）の最小化を目的とする
- あるフロー f における総コストの定義：

$$\sum_{p \in P} c_p(f_p) * f_p$$

Definition (最適フロー)

ある実現可能なフロー f が最適フローであるとは、
別の任意の実現可能なフロー $\tilde{f} \neq f$ について、以下が成り立つことをいう：

$$\sum_{p \in P} c_p(f_p) * f_p \leq \sum_{p \in P} c_p(\tilde{f}_p) * \tilde{f}_p$$

最適フロー

- 本日の講義では、社会全体のコスト（総コスト）の最小化を目的とする
- あるフロー f における総コストの定義：

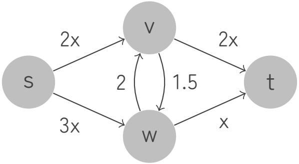
$$\sum_{p \in P} \underbrace{c_p(f_p) * f_p}_{\text{パス } p \text{ におけるコスト}}$$

Definition (最適フロー)

ある実現可能なフロー f が最適フローであるとは、
別の任意の実現可能なフロー $\tilde{f} \neq f$ について、以下が成り立つことをいう：

$$\sum_{p \in P} c_p(f_p) * f_p \leq \sum_{p \in P} c_p(\tilde{f}_p) * \tilde{f}_p$$

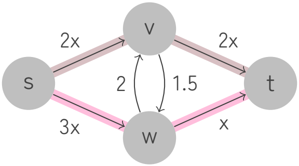
計算その１：均衡フロー



- パス svwt のコスト $3x + 1.5$ は、任意の $f \in \mathcal{F}$ において、svt のコスト 4x を上回る
  - フローの実現可能性より $f_p \leq 1$ であるため
- 同様に、swvt のコスト $5x + 2$ は、swt のコスト 4x を上回る
- したがって、均衡フロー f が正の流量を流すパスは svt と swt のみ
- コストが同一となるため、どちらも 1/2 ずつ流れる．このときの総コストは

$$\frac{1}{2} * 4 * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * 4 * \frac{1}{2} = 2$$

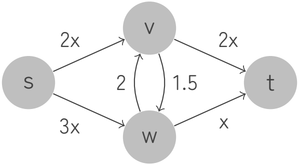
計算その１：均衡フロー



- パス svwt のコスト $3x + 1.5$ は、任意の $f \in \mathcal{F}$ において、svt のコスト $4x$ を上回る
  - フローの実現可能性より $f_p \leq 1$ であるため
- 同様に、swvt のコスト $5x + 2$ は、swt のコスト $4x$ を上回る
- したがって、均衡フロー f が正の流量を流すパスは svt と swt のみ
- コストが同一となるため、どちらも 1/2 ずつ流れる．このときの総コストは

$$\frac{1}{2} * 4 * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * 4 * \frac{1}{2} = 2$$

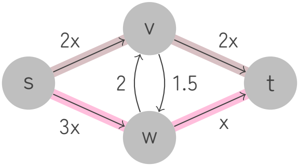
計算その２：最適フロー



- 均衡フローの場合と同様、
  パス svwt と swvt のコストはそれぞれ別のパスに支配されるため、
  最適フローでは使われない（流量ゼロ）
- 最適フロー f がパス svt に流す流量を x とすると、総コストは以下の式で与えられ、$x = 1/2$ で最小値 2 を取る

$$x * 4x + (1 - x) * 4(1 - x) = 8\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$$

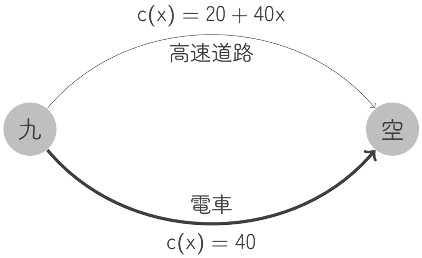
計算その２：最適フロー



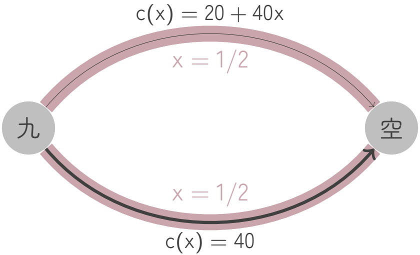
- 均衡フローの場合と同様、
  パス svwt と swvt のコストはそれぞれ別のパスに支配されるため、
  最適フローでは使われない（流量ゼロ）
- 最適フロー f がパス svt に流す流量を x とすると、総コストは以下の式で与えられ、$x = 1/2$ で最小値 2 を取る

$$x * 4x + (1 - x) * 4(1 - x) = 8\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$$

2 ピグーのパラドックス



- 九大学研都市駅から福岡空港まで行きたい
  - 自動車で高速道路を使う場合、所要時間は混雑状況による。高速が空いていれば 20 分、渋滞に巻き込まれると 60 分で、交通量 x に応じて線形
  - 電車なら一定時間で着くが、途中停車があり 40 分くらいかかる
- (所要時間のみ気にする場合) どちらを選ぶ?

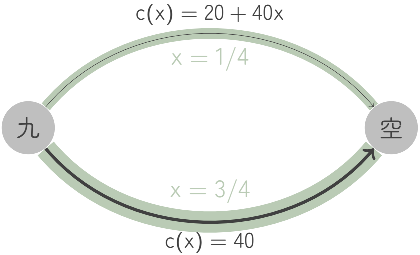


- **均衡フロー**では、高速道路と電車の所要時間が一致：それぞれ 1/2 ずつ
- **最適フロー**では、1/4 が高速道路を利用し、3/4 が公共交通機関
  - 高速道路利用者の割合を H とすると、総コストは以下となり、$H = 1/4$ で最小

$$H * (20 + 40H) + (1 - H) * 40 = 40\left((H - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}\right)$$

  - 高速道路の所要時間は $20 + 40 * \frac{1}{4} = 30$ 分
    → 公共交通機関から高速道路へ変更したい人がいる（均衡フローにならない）

ピグーのパラドックス (Pigou's Paradox)

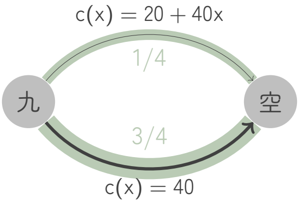


- **均衡フロー**では、高速道路と電車の所要時間が一致：それぞれ 1/2 ずつ
- **最適フロー**では、1/4 が高速道路を利用し、3/4 が公共交通機関
  - 高速道路利用者の割合を H とすると、総コストは以下となり、H = 1/4 で最小

$$H * (20 + 40H) + (1 - H) * 40 = 40\left((H - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}\right)$$

  - 高速道路の所要時間は $20 + 40 * \frac{1}{4} = 30$ 分
    → 公共交通機関から高速道路へ変更したい人がいる（均衡フローにならない）

最適フローはなぜ最適か？



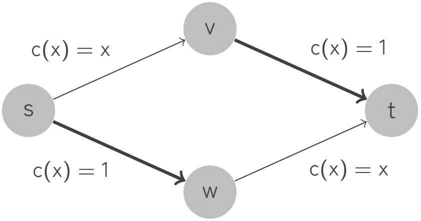
- 均衡フローでないこと（＝高速道路を使いたい人の存在）はわかる
- 微少量が高速道路へ変更したフローのほうが、総コストが小さいのでは？
- 変更される微少量 Δx のコストは当然減少：$40 \rightarrow (20 + 40(\frac{1}{4} + \Delta x))$
- 但し、元々高速道路にいたプレイヤのコストも増加するため、全体では増加

$$\underbrace{\frac{1}{4} * 40\Delta x}_{\text{既存プレイヤの増加コスト}} + \underbrace{\Delta x * (20 + 40(\frac{1}{4} + \Delta x))}_{\text{移動プレイヤの増加コスト}} = \underbrace{40\Delta x}_{\text{移動プレイヤの減少コスト}} + \underbrace{40(\Delta x)^2}_{\text{総コスト増加量}}$$

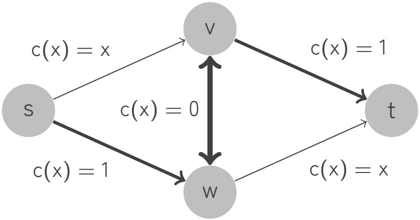
ピグーのパラドックスからの教訓

- 社会的に最適な結果が、個人の希望と一致するとは限らない
  - 囚人のジレンマと類似
  - 今回の最適フローの結果は一見パレート最適ではないが、
    嬉しさ・コストが譲渡可能であると思えばパレート最適
    - すなわち，コストの総和を最小化する結果がパレート最適
- 一般に、ナッシュ均衡は社会全体で見れば非効率的
  - 統率なく自由に、**無秩序に**、行動しているため、ある意味自然
  - 均衡状態が社会にとって効率的となるようなゲームを作れないか？
    ⇒ **メカニズムデザイン**（夏学期の講義内容）

3 ブレースのパラドックス

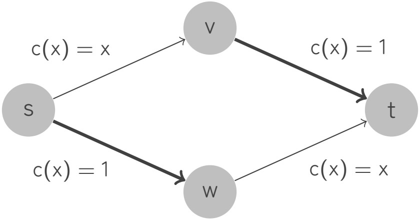


- 交通量によって渋滞が発生（$c(x) = x$）する細い道路があり、どちらのルートも混雑しがち。
- 混雑を緩和するために、迂回路を設置する。
  - 混雑が起きないほど広いレーンを持つ高速道路を建設：$c(x) = 0$
- 混雑はどれだけ緩和されるだろうか？



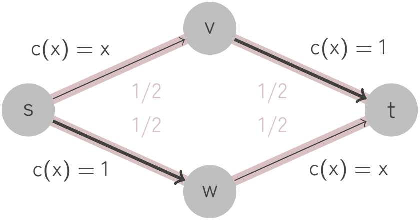
- 交通量によって渋滞が発生（$c(x) = x$）する細い道路があり、どちらのルートも混雑しがち。
- 混雑を緩和するために、迂回路を設置する。
  - 混雑が起きないほど広いレーンを持つ高速道路を建設：$c(x) = 0$
- 混雑はどれだけ緩和されるだろうか？

ブレースのパラドックス (Braess' Paradox) [1]



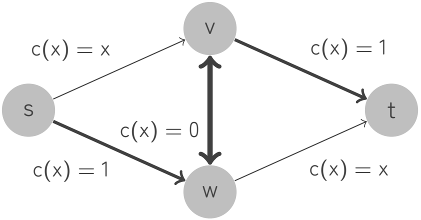
- **迂回路なし**の場合、均衡フロー＝最適フロー＝それぞれ 1/2。
  総コストは $1/2 * (1 + 1/2) * 2 = 3/2$
- **迂回路あり**の場合：
  - 均衡フローでは、全員 $s \to v \to w \to t$ と迂回。
    総コストは $1 * (1 + 0 + 1) = 2$。**迂回路なしの場合より悪い！**
  - 最適フローは迂回路なしの場合と同一。総コスト 3/2。

ブレースのパラドックス (Braess' Paradox) [1]



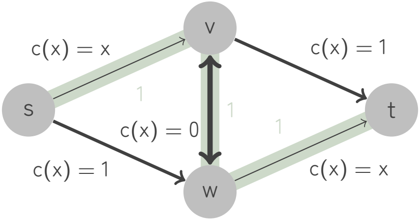
- **迂回路なし**の場合、均衡フロー＝最適フロー＝それぞれ 1/2。
  総コストは $1/2 * (1 + 1/2) * 2 = 3/2$
- **迂回路あり**の場合：
  - 均衡フローでは、全員 $s \to v \to w \to t$ と迂回。
    総コストは $1 * (1 + 0 + 1) = 2$。**迂回路なしの場合より悪い！**
  - 最適フローは迂回路なしの場合と同一。総コスト 3/2。

ブレースのパラドックス (Braess' Paradox) [1]



- **迂回路なし**の場合、均衡フロー＝最適フロー＝それぞれ 1/2。
  総コストは $1/2 * (1 + 1/2) * 2 = 3/2$
- **迂回路あり**の場合：
  - 均衡フローでは、全員 $s \to v \to w \to t$ と迂回。
    総コストは $1 * (1 + 0 + 1) = 2$。**迂回路なしの場合より悪い！**
  - 最適フローは迂回路なしの場合と同一。総コスト 3/2。

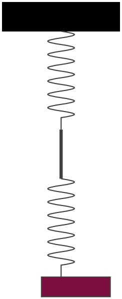
ブレースのパラドックス (Braess' Paradox) [1]



- **迂回路なし**の場合、均衡フロー＝最適フロー＝それぞれ 1/2。
  総コストは $1/2 * (1 + 1/2) * 2 = 3/2$
- **迂回路あり**の場合：
  - 均衡フローでは、全員 $s \to v \to w \to t$ と迂回。
    総コストは $1 * (1 + 0 + 1) = 2$。**迂回路なしの場合より悪い！**
  - 最適フローは迂回路なしの場合と同一。総コスト 3/2。

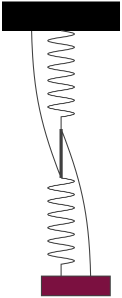
類似の物理現象

- ２つのバネを、間に短いジョイントを挟んで直列につなぎ、下に重りを吊るす
- ２本の糸を別に準備し、ごく少しだけ弛ませて以下の通りつなぐ
  - 下のバネからは上の支点へ
  - 上のバネからは下の重りへ
- ジョイントを外す（切る）と、重りが上がる！



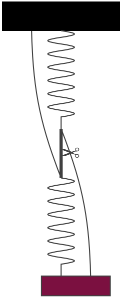
類似の物理現象

- ２つのバネを、間に短いジョイントを挟んで直列につなぎ、下に重りを吊るす
- ２本の糸を別に準備し、ごく少しだけ弛ませて以下の通りつなぐ
  - 下のバネからは上の支点へ
  - 上のバネからは下の重りへ
- ジョイントを外す（切る）と、重りが上がる！



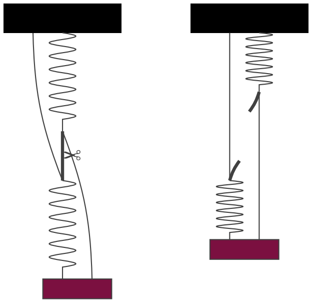
類似の物理現象

- ２つのバネを、間に短いジョイントを挟んで直列につなぎ、下に重りを吊るす
- ２本の糸を別に準備し、
  ごく少しだけ弛ませて以下の通りつなぐ
  - 下のバネからは上の支点へ
  - 上のバネからは下の重りへ
- ジョイントを外す（切る）と、重りが上がる！



類似の物理現象

- ２つのバネを、間に短いジョイントを挟んで直列につなぎ、下に重りを吊るす
- ２本の糸を別に準備し、
  ごく少しだけ弛ませて以下の通りつなぐ
  - 下のバネからは上の支点へ
  - 上のバネからは下の重りへ
- ジョイントを外す（切る）と、重りが上がる！



ブレースのパラドックスからの教訓

- 人々が利己的に行動する社会においては、場当たり的なシステムの変更が、社会全体の非効率を生み出しうる
  - 『良かれと思って』のような自分本位の考え方は危険
  - システムの変更による人々の行動の変化の精緻な分析が必要
- ゴムの例だと、一本支えを加えることで重りがさらに下がる、という直感に反する結果が生じる

4 ナッシュ均衡と無秩序の代償

非効率に対して・・・

- ゲームの構造が変更できないのであれば、
  非効率な解へ陥ることを抑制することは難しい
  - 人々に、『自由に行動するな！指示に従え！』と言っても無駄
  - Cf. ゲームの構造を変更できるケース
    → **メカニズムデザイン**：ゲーム理論 II（夏学期）の内容
- 非効率が生じることは前提に、
  どれだけの非効率が生じうるかを定量的に評価したい
  - 『最悪の場合、社会全体の嬉しさが最適値の 0.*** 倍
    （あるいは、社会全体のコストが最適値の *** 倍）になります』
    と示したい
  - 近似率解析（データ構造とアルゴリズム）
    → 計算機科学の得意とするところ

無秩序の代償 (Price of Anarchy)

- 近似率解析の知見をベースに、ゲームが帰着する結果（ナッシュ均衡）がもたらしうる非効率の上界を見積もる

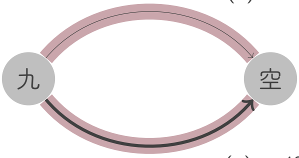
Definition (無秩序の代償 [2])

結果の集合が O、ナッシュ均衡の集合が $NE \subseteq O$ で与えられるゲームの、目的関数 C に関する無秩序の代償 PoA は、以下の式で定義される：

$$\mathrm{PoA} = \frac{\max_{o \in NE} C(o)}{\min_{o^* \in O} C(o^*)}$$

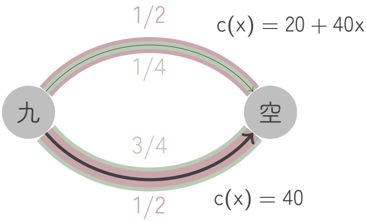
- 分子は、最悪の（＝最もコストが大きい）ナッシュ均衡 o における目的関数値
- 分母は、最良の（＝最もコストが小さい）**結果** o^* における目的関数値（ナッシュ均衡でなくてもよい）

再掲：ピグーのパラドクス



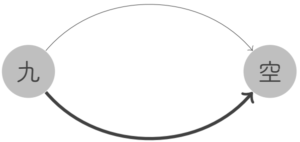
- 上の**均衡フロー**におけるコストは $\frac{1}{2} * 40 + \frac{1}{2} * 40 = 40$
  - Non-atomic な混雑ゲームでは、均衡フローが複数あっても、そのコストは常に同一
- **最適フロー**におけるコストは $\frac{1}{4} * 30 + \frac{3}{4} * 40 = \frac{150}{4}$
- このゲームにおける無秩序の代償は $\frac{16}{15}$
- 最適時に比べ、総コストが 16/15 倍程度になる可能性がある、と示唆できる

再掲：ピグーのパラドクス



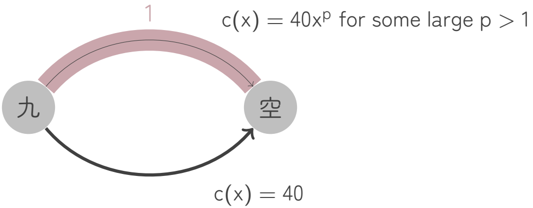
- 上の**均衡フロー**におけるコストは $\frac{1}{2} * 40 + \frac{1}{2} * 40 = 40$
  - Non-atomic な混雑ゲームでは、均衡フローが複数あっても、そのコストは常に同一
- **最適フロー**におけるコストは $\frac{1}{4} * 30 + \frac{3}{4} * 40 = \frac{150}{4}$
- このゲームにおける無秩序の代償は $\frac{16}{15}$
- 最適時に比べ、総コストが 16/15 倍程度になる可能性がある、と示唆できる

無秩序の代償の上界



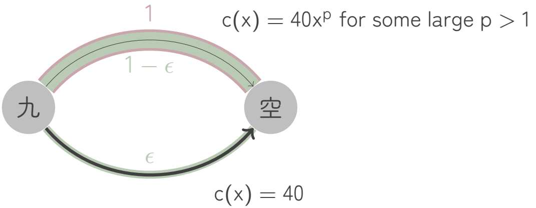
- 非効率（＝無秩序の代償）が 16/15 程度であれば、
  それほど大きな問題にはならないかも？
  - もちろん、工学的見地からは、より少ないコストを達成することは重要
- 上の図は、無秩序の代償が無限に大きくなる例（ピグーの例の非線形版）
  - **均衡フロー**：全員上の道。総コスト 40
  - **最適フロー**：微少量 $\epsilon = 1 - (p+1)^{-1/p}$ を下の道に移動。
    総コスト $40\epsilon + 40 * (1-\epsilon)^{p+1}$
  - 無秩序の代償 $\mathrm{PoA} = \lim_{p\to\infty} \frac{40}{40\epsilon + 40*(1-\epsilon)^{p+1}} = \infty$

無秩序の代償の上界



- 非効率（＝無秩序の代償）が 16/15 程度であれば、
  それほど大きな問題にはならないかも？
  - もちろん、工学的見地からは、より少ないコストを達成することは重要
- 上の図は、無秩序の代償が無限に大きくなる例（ピグーの例の非線形版）
  - **均衡フロー**：全員上の道。総コスト 40
  - **最適フロー**：微少量 $\epsilon = 1 - (p+1)^{-1/p}$ を下の道に移動。
    総コスト $40\epsilon + 40 * (1-\epsilon)^{p+1}$
  - 無秩序の代償 $\mathrm{PoA} = \lim_{p\to\infty} \frac{40}{40\epsilon + 40*(1-\epsilon)^{p+1}} = \infty$

無秩序の代償の上界



- 非効率（＝無秩序の代償）が 16/15 程度であれば、
  それほど大きな問題にはならないかも？
  - もちろん、工学的見地からは、より少ないコストを達成することは重要
- 上の図は、無秩序の代償が無限に大きくなる例（ピグーの例の非線形版）
  - **均衡フロー**：全員上の道。総コスト 40
  - **最適フロー**：微少量 $\epsilon = 1 - (p+1)^{-1/p}$ を下の道に移動。
    総コスト $40\epsilon + 40 * (1-\epsilon)^{p+1}$
  - 無秩序の代償 PoA $= \lim_{p\to\infty} \frac{40}{40\epsilon + 40 * (1-\epsilon)^{p+1}} = \infty$

無秩序の代償によるシステムの評価

- システムのパフォーマンスの定量的評価を行うツール
  - システム内の意思決定主体が自由に行動するとき、
    ナッシュ均衡に基づく**無秩序の代償**は最悪時のパフォーマンスを保証
  - 目的関数の選び方によって、無秩序の代償は変化しうる
  - 本資料では総コストの最小化を目的関数とした
- 無秩序の代償は常に上界を持つとは限らない
  - 最適解と比較して、パフォーマンスが極めて悪くなる可能性もある
    (非線形版ピグーのパラドックス)

5 まとめ

本日の内容のまとめ

- 混雑ゲーム／利己的ルーティングゲームの数理モデル
- ピグーのパラドクス (Pigou's Paradox)
  - 一般に、ナッシュ均衡／均衡フローは効率的でない
- ブレースのパラドクス (Braess' Paradox)
  - 場当たり的な制度の変更は、均衡における効率を悪化させうる
- 無秩序の代償 (Price of Anarchy)
  - ゲーム理論に基づく社会システムの定量的分析

質問などは東藤（todo@inf.kyushu-u.ac.jp）まで

参考文献

Dietrich Braess, Anna Nagurney, and Tina Wakolbinger, (2005). On a Paradox of Traffic Planning. Transportation Science 39(4):446–450. `https://doi.org/10.1287/trsc.1050.0127`

Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou, (1999). Worst-Case Equilibria. In: C. Meinel, S. Tison (eds), Proc. STACS 1999. Lecture Notes in Computer Science, vol 1563. Springer, Berlin, Heidelberg. `https://doi.org/10.1007/3-540-49116-3_38`

Tim Roughgarden, (2011). Routing Games. In: N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani (eds), Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press. `http://doi.org/10.1017/CBO9780511800481.020`