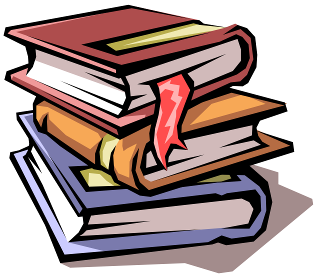
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



MỘT SỐ CHỦ ĐỀ
HÌNH HỌC LUYỆN ĐỘI TUYỂN

Tài liệu sưu tầm, ngày 21 tháng 8 năm 2021

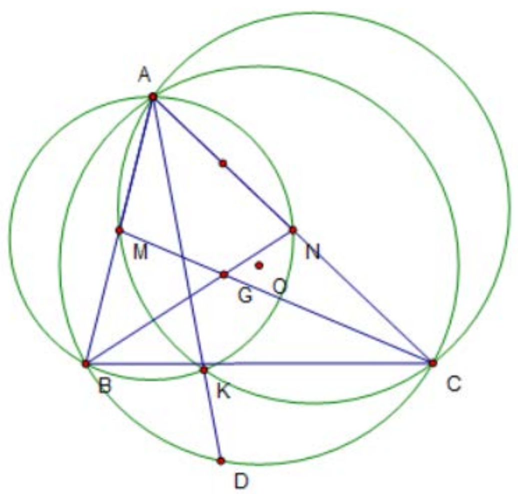
A. LỚP BÀI TOÁN CÓ CHUNG CẤU HÌNH ĐẸP

☆☆☆

Một dạng cấu hình có nhiều tính chất thú vị: " *Cho tam giác ABC và các điểm M, N trên AB, AC. Lấy* $\left(ABN\right)\cap\left(ACM\right)=\left\{A;P\right\}$ ". Các điểm M, N ở những vị trí đặc biệt cho ra nhiều kết quả thú vị.

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có M, N là trung điểm của AB, AC. Lấy $\left(ABN\right)\cap\left(ACM\right)=\left\{A;K\right\}$. Chứng minh rằng AK là đường đối trung của tam giác ABC.

Giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta thấy rằng K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần AMGN.BC, do đó K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác GBM và GNC. Do đó ta có

$$\left.\begin{matrix}\widehat{MBK}=\widehat{KGC}=\widehat{KNC}\\ \widehat{BMK}=\widehat{KCA}=\widehat{KCN}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta MBK\sim\Delta CNK\Rightarrow\frac{MB}{CN}=\frac{KN}{KB}$$

Gọi $AK\cap\left(O\right)=D$. Ta có

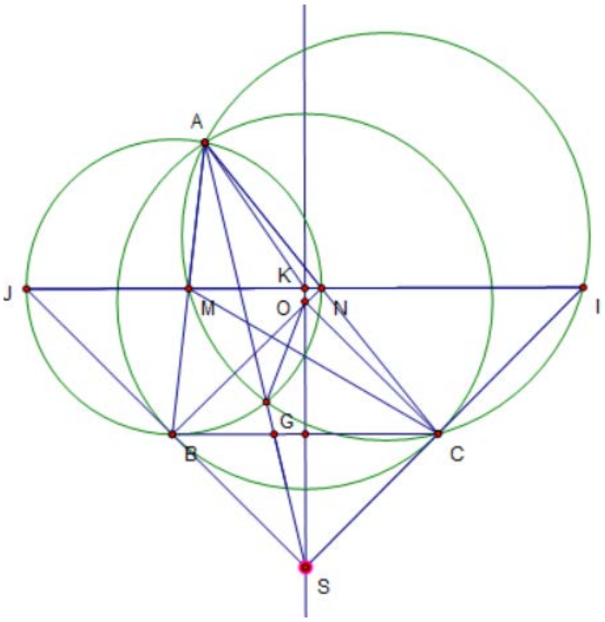
$$\left.\begin{matrix}\widehat{DCB}=\widehat{DAB}=\widehat{KNB}\\ \widehat{DBC}=\widehat{DAC}=\widehat{KBN}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta DBC\sim\Delta KBN\Rightarrow\frac{KB}{KN}=\frac{DB}{DC}$$

Vậy $\frac{DB}{DC}=\frac{BM}{NC}=\frac{BA}{CA}\Rightarrow$ tứ giác ABDC là tứ giác điều hòa nên AK là đường đối trung của tam giác ABC.

Bổ đề này rất hữu dụng trong các bài toán liên quan đến mô hình Miquel.

Bổ đề 2: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có trung điểm AB, AC là M, N. $\left(ABN\right)\cap\left(ACM\right)=\left\{A;G\right\}$ và trung trực BC cắt MN tại K. Chứng minh rằng A, G, O, K đồng viên.

Giải



Gọi S là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O). Gọi I, J lần lượt là hai giao điểm của MN với đường tròn (ABN) và (ACM).

Theo bổ đề 1 thì AG là đường đối trung của tam giác ABC nên AG đi qua điểm S.

Ta có $\widehat{BJK} = \widehat{BAN} = \widehat{BOS}$ suy ra tứ giác JKOB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{JBO} = \widehat{JKO} = 90^0$ .Mà $\widehat{OBS} = 90^0$ nên J, B, S thẳng hàng. Tương tự S, C, I thẳng hàng. Do đó

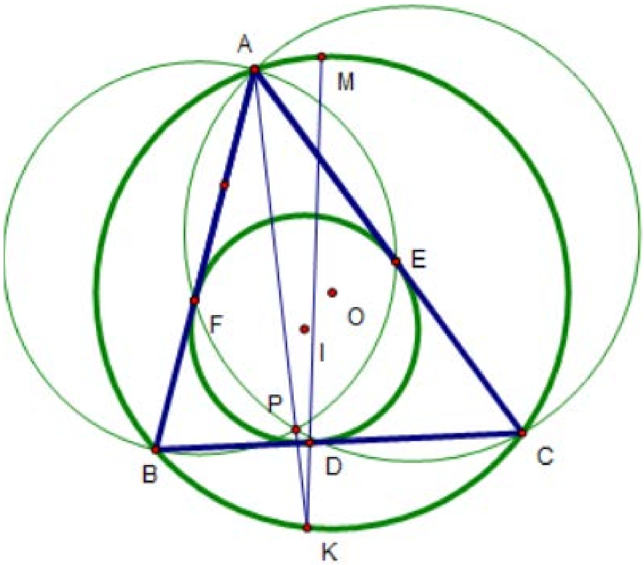
$\overline{SG}.\overline{SA} = \overline{SB}.\overline{SJ} = \overline{SO}.\overline{SK} \Rightarrow$ AGOK nội tiếp đường tròn.

Bổ đề vẫn đúng khi cho M, N trên các đoạn AB, AC sao cho MN// BC.

Bài tập áp dụng

Bài toán 1: Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I và nội tiếp đường tròn (O). (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. M là trung điểm cung BC chứa A. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABE) và (ACF) cắt MD trên (O).

Giải



Gọi A, P lần lượt là giao điểm của hai đường tròn (ABE) và (ACF). AP cắt đường tròn (O) tại K.

Dễ dàng chứng minh được

$$\Delta PBF \sim \Delta PEC \Rightarrow \frac{PF}{PC} = \frac{BF}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

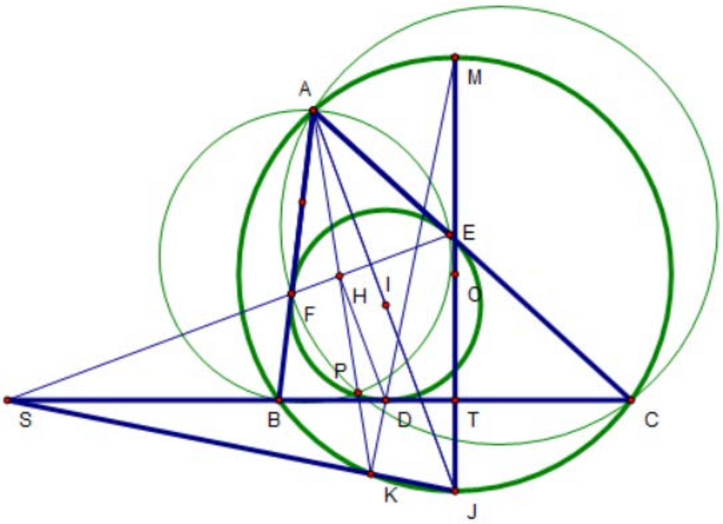
$$\Delta PFC \sim \Delta KBC \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{PF}{PC}$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{DB}{DC}$$

Vậy KD là đường phân giác trong của góc BKC, do đó KD đi qua M.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Lấy H là hình chiếu của D lên EF. Chứng minh rằng H thuộc trục đẳng phương của (ABE) và (ACF).

Giải



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là điểm chính giữa cung BC chứa A. Hai đường tròn (ABE) và (ACF) cắt nhau tại A và P. AP cắt (O) tại K. Theo bài toán 1 thì K, D, M thẳng hàng.

Gọi S là giao điểm của EF và BC. Lấy J là trung điểm cung BC không chứa A của (O), T là trung điểm BC. Theo hàng điểm điều hòa cơ bản thì $\left(SD,BC\right)=-1\Rightarrow DT.DS=DB.DC$ (hệ thức Maclaurin). Mà $DB.DC=DK.DM\Rightarrow DT.DS=DM.DK$, do đó tứ giác SKTM nội tiếp đường tròn . Lại có SHDK nội tiếp nên $\widehat{KHD}=\widehat{KSD}=\widehat{KMT}=\widehat{KAJ}$. Mà HD//AJ nên A, H, K thẳng hàng. (đpcm)

Bài tập tự giải

Bài toán 3 (Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy D bất kì trên đoạn BC, P, Q trên AB, AC sao cho $BD=BP,CQ=CD.\left(APQ\right)\cap\left(O\right)=\left\{A;J\right\},JD\cap\left(O\right)=\left\{T;J\right\}$. Lấy M đối xứng T qua O. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABQ) và (ACP) cắt MD trên (O).

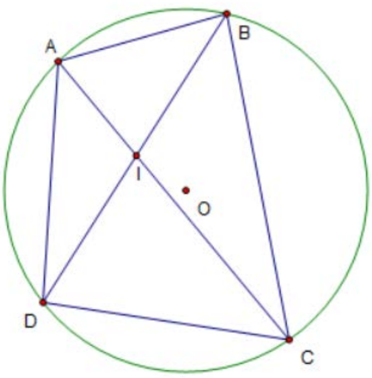
Bài toán 4 (Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy điểm D thay đổi trên cung BC không chứa A. Giả sử các điểm E, F trên AB, AC sao cho $BD=CF,CD=BE.\left(ABF\right)\cap\left(ACE\right)=A,P$. Chứng minh rằng: $\widehat{DAB}=\widehat{PAC}$.

B. BỔ ĐỀ CÁT TUYẾN VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN

Bổ đề cát tuyến:

"Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại I. Khi đó $\frac{IA}{IC}=\frac{BA}{BC}.\frac{DA}{DC}$ "

Chứng minh

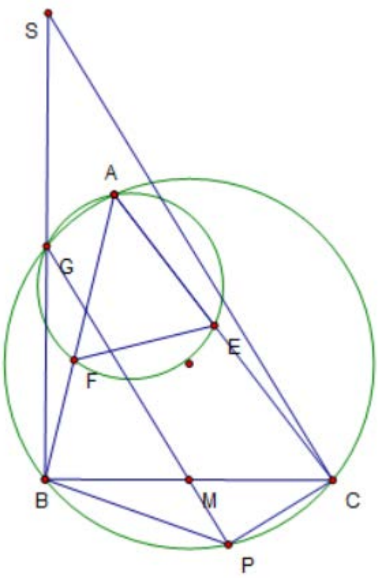


Ta có

$$\frac{IA}{IC}=\frac{S_{AID}}{S_{IDC}}=\frac{AD.\sin\widehat{ADI}}{CD.\sin\widehat{IDC}}=\frac{AD.\frac{AB}{2R}}{DC.\frac{BC}{2R}}=\frac{AD.AB}{CD.BC}$$

Bài toán 1: (Thi thử KHTN 2017): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là điểm bất kì trên cung BC không chứa A của (O). Lấy E, F lần lượt trên AC, AB sao cho $PB=CE;PC=BF$. Gọi $\left(AEF\right)\cap\left(O\right)=\left\{A;G\right\}$. Chứng minh rằng GP chia đôi BC.

Giải



Cách 1: Gọi S là điểm đối xứng với B qua G. Ta có $\Delta GFB\sim\Delta GEC\Rightarrow\frac{GB}{GC}=\frac{FB}{EC}=\frac{PC}{PB}\Rightarrow\frac{GS}{GC}=\frac{PC}{PB}$.

Mặt khác $\widehat{SGC}=\widehat{BPC}$ (tứ giác BGCP nội tiếp) nên $\Delta SGC\sim\Delta CPB\Rightarrow\widehat{BCP}=\widehat{BSC}$. Mà $\widehat{BCP}=\widehat{BGP}\Rightarrow\widehat{BGP}=\widehat{BSC}\Rightarrow GP\parallel SC$. Mà G là trung điểm của SB nên GP đi qua trung điểm BC.

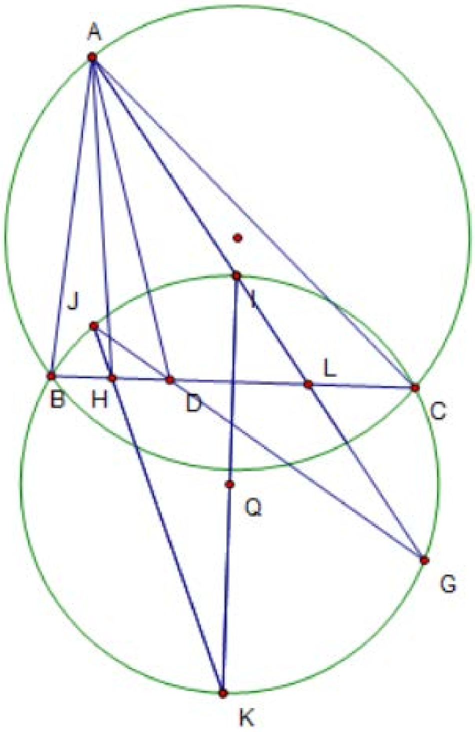
Cách 2: (dùng bổ đề cát tuyến)

Gọi M là giao điểm của GP và BC. Theo bổ đề cát tuyến ta có

$$\frac{MB}{MC}=\frac{GB.PB}{GC.PC}=\frac{GB.EC}{GC.FB}$$

Mà $\Delta GFB\sim\Delta GEC\Rightarrow\frac{GB}{GC}=\frac{FB}{EC}\Rightarrow\frac{GB.EC}{GC.FB}=1$. Vậy $\frac{MB}{MC}=1$ hay M là trung điểm BC.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC. Một đường tròn (Q) qua B, C. Trung trực BC cắt (Q) lần lượt tại I, K (theo thứ tự I, Q, K từ trên xuống, I nằm trong tam giác ABC). $AI \cap (Q) = G$ và lấy H thuộc BC sao cho AH đẳng giác AI. AD là đường đối trung của tam giác ABC (D thuộc BC). Chứng minh rằng KH cắt GD trên (Q).



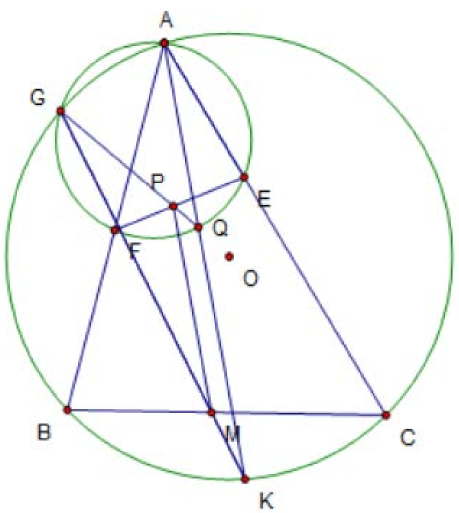
Giải

Gọi L là giao điểm của AI và BC. J là giao điểm của KH với (Q). Gọi D' là giao điểm của JG và BC. Dễ thấy được JK là đường phân giác trong của góc BJC, GL là phân giác của góc JGC. Áp dụng bổ đề cát tuyến ta có

$\frac{D'B}{D'C} = \frac{JB}{JC}.\frac{GB}{GC} = \frac{HB}{HC}.\frac{LB}{LC} = \frac{AB^2}{AC^2}$, do đó AD' cũng là đường đối trung của tam giác ABC, suy ra D trùng D'. Vậy J, D, G thẳng hàng (đpcm)

Bài toán 3: (Nguyễn Duy Khương) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). E, F bất kì thuộc lần lượt các đoạn thẳng AC, AB. Q là điểm bất kì thuộc cung EF không chứa A của đường tròn (AEF), $(AEF) \cap (O) = \{A, G\}, GQ \cap EF = P$. Qua P kẻ đường thẳng song song AQ cắt BC tại M. Chứng minh rằng GM, AQ cắt nhau trên một đường cố định.

Giải:



Gọi K là giao điểm của AQ và (O), M' là giao điểm của KG và BC. Ta sẽ chứng minh M trùng M', khi đó GM và AQ cắt nhau tại điểm K nằm trên đường tròn (O) cố định. Thật vậy, theo bổ đề cát tuyến ta có

$\frac{PF}{PE} = \frac{GF}{GE}.\frac{QF}{QE}; \frac{M'B}{M'C} = \frac{GB}{GC}.\frac{KB}{KC}$.

Ta có

$\Delta QFE \sim \Delta KBC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{QF}{QE} = \dfrac{KB}{KC}$

$\Delta GFB \sim \Delta GEC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{GF}{GE} = \dfrac{GB}{GC}$

$\rightarrow \dfrac{M'B}{M'C} = \dfrac{PF}{PE}$

$\Delta GFE \sim \Delta GBC \Rightarrow \Delta GFP \sim \Delta GBM'$

$\Rightarrow \Delta BM'K \sim \Delta FPQ \Rightarrow \dfrac{GP}{GM'} = \dfrac{GF}{GB} = \dfrac{FQ}{BK} = \dfrac{PQ}{M'K}$

$\Rightarrow M'P \parallel KQ \Rightarrow M' \equiv M$

Bài toán 4 (Iran MO 2013): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là một điểm nằm trên cung BC không chứa A của (O). Lấy các điểm E, F trên AB, AC sao cho $BE = BD, CF = CD$. Gọi $DF \cap \left(O\right) = \left\{K, D\right\}$. Chứng minh rằng BK chia đôi EF.

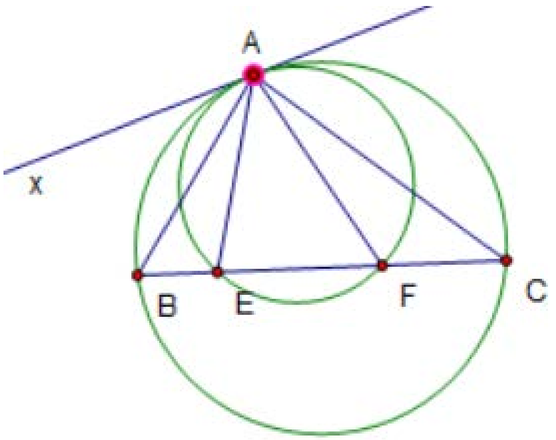
Bài toán 5 (Mở rộng bài toán con bướm): Cho bốn điểm A, B, C, D nằm trên (O). AC cắt BD tại P. Một đường thẳng d qua P bất kì sao cho P là hình chiếu vuông góc của O lên d. d cắt AB tại X, d cắt CD tại Z. Chứng minh rằng P là trung điểm ZX.

C. CÁC BỔ ĐỀ LIÊN QUAN HAI ĐIỂM ĐẲNG GIÁC

☆☆☆

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC có 2 đường đẳng giác AE, AF ($E, F \in BC$). Chứng minh rằng đường tròn (AEF) tiếp xúc (ABC).

Chứng minh



Qua A kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (ABC). Ta có

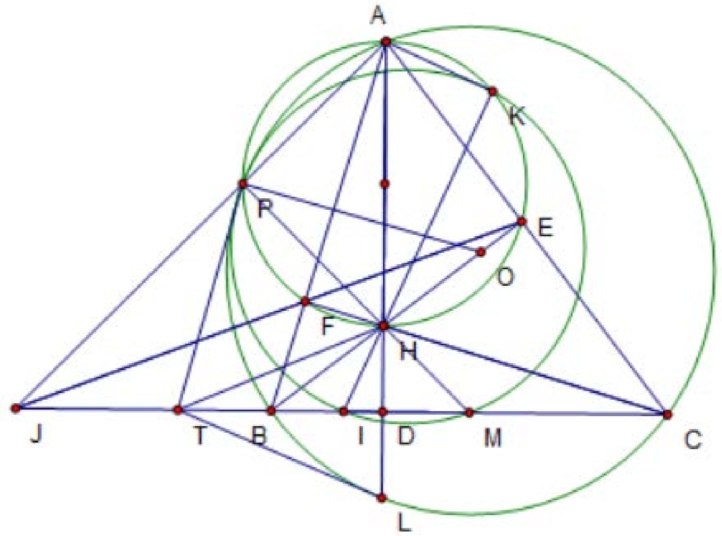
$\widehat{xAE} = \widehat{XAB} + \widehat{BAE} = \widehat{ACB} + \widehat{FAC} = \widehat{AFB}$

Suy ra Ax cũng là tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn (AEF). Vậy (ABC) và (AEF) tiếp xúc nhau.

Bài toán 1: (trích đề chọn đội tuyển Bắc Ninh)

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. HI là đường đối trung của tam giác HBC. Kẻ $AK \perp HI \left(K \in HI\right)$. Chứng minh rằng (MIK) tiếp xúc (O) và đường tròn Euler của (O).

Giải



Ta có $\widehat{ADI} = \widehat{AKI} = 90^0$ do đó tứ giác AKDI nội tiếp, suy ra $HK.HI = HD.HA$. Gọi A, P là giao điểm của hai đường tròn (AEF) và (O). Dễ dàng chứng minh được M, H, P thẳng hàng. Khi đó tứ giác APDM cũng nội tiếp nên $HM.HP = HD.HA \Rightarrow HM.HP = HI.HK$. Vậy tứ giác KPIM nội tiếp hay điểm P thuộc đường tròn (MIK).

Bây giờ ta chứng minh P là điểm chung duy nhất của (O) và (MIK). Thật vậy

Gọi L là giao điểm của AD với (O), J là giao điểm của EF với BC.

Theo hàng điểm điều hòa cơ bản ta có

$A\left(JD, BC\right) = -1 \Rightarrow \left(PL, BC\right) = -1$ suy ra PBLC là tứ giác điều hòa nên hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai tiếp điểm P và L cắt nhau tại giao điểm T nằm trên BC và $TP = TL = TH$.

Theo bổ đề trên, tam giác HBC có hai đường đẳng giác HI và HM nên đường tròn (HIM) và (HBC) tiếp xúc nhau tại H. Do đó $TH^2 = TI.TM \Rightarrow TP^2 = TI.TM$ suy ra TP là tiếp tuyến của (MIK). Vậy đường tròn (MIK) tiếp xúc (O) tại P.

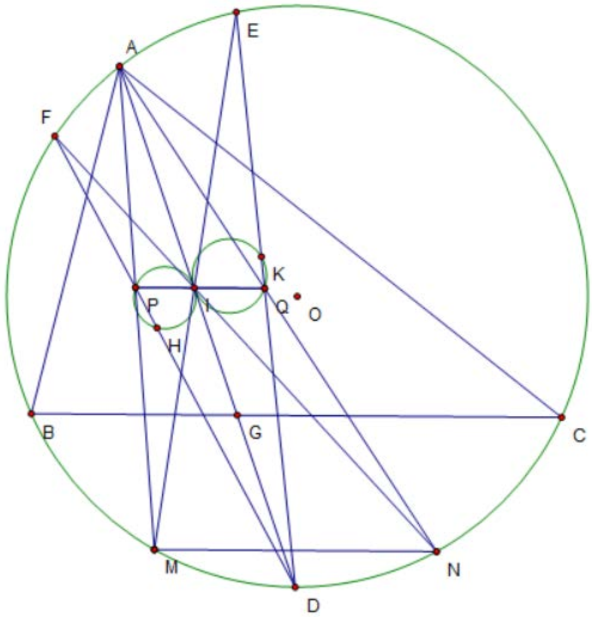
Bây giờ ta chứng minh (MIK) tiếp xúc với đường tròn Euler. Thật vậy

Xét phép nghịch đảo cực H, phương tích $HA.HD$ ta có $\left(O\right) \leftrightarrow \left(Euler\right), \left(MIK\right) \leftrightarrow \left(MIK\right)$. Mà (O) tiếp xúc (MIK) nên (Euler) tiếp xúc (MIK).

Bài toán 2: (Trích đề VMO 2016 ngày 2)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Lấy các điểm M, N trên cung nhỏ BC sao cho MN song song BC. Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Gọi $AI \cap BC = G.AI, MI, NI \cap \left(O\right) = D, E, F \left(\neq A, M, N\right),\ DF \cap AM = P, DE \cap AN = Q$. Đường tròn qua P tiếp xúc AD tại I cắt DF tại H $(H \neq D)$. Đường tròn qua Q tiếp xúc AD tại I cắt DE tại K $(K \neq D)$. Chứng minh rằng đường tròn (GHK) tiếp xúc BC.

Giải



Dễ thấy $\Delta DGC \sim \Delta DCA \Rightarrow DC^2 = DG.DA$

Mà $DC = DB = DI$ nên

$DG.DA = DI^2 = DH.DP = DQ.DK$. Do đó các tứ giác GAKQ, GAPH, PHQK là các tứ giác nội tiếp.

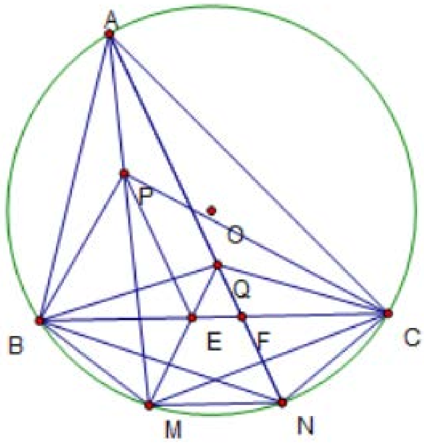
Áp dụng định lí Pascal cho bộ 6 điểm A, E, F, D, M, N ta có 3 điểm P, I, Q thẳng hàng.

Xét phép nghịch đảo cực D phương tích DI^2 ta có $B \leftrightarrow C; P \leftrightarrow H; Q \leftrightarrow K; A \leftrightarrow G$. Do đó đpcm tương đương với đường tròn (APQ) tiếp xúc với (O).

Theo bổ đề trên thì trong tam giác ABC, AM và AN là hai đường đẳng giác (vì $MN \parallel BC$), kết hợp với phép vị tự tâm A ta có đường tròn (APQ) tiếp xúc với (O)$\Rightarrow$ đpcm.

Bổ đề 2: ***Cho tam giác ABC và P, Q là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. AP cắt đường tròn (O) tại M và A. Gọi E là giao điểm của MQ và BC. Chứng minh rằng*** $PE \parallel AQ$ **.**

Chứng minh



Gọi F, N lần lượt là giao điểm của AQ với BC và đường tròn (O).

Ta có $\widehat{PMC} = \widehat{QNC}$

$\widehat{NQC} = \widehat{QAC} + \widehat{QCA} = \widehat{BCM} + \widehat{PCB} = \widehat{PCM}$

Do đó $\Delta PCM \sim \Delta CQN \Rightarrow \dfrac{PM}{CN} = \dfrac{CM}{QN}$.

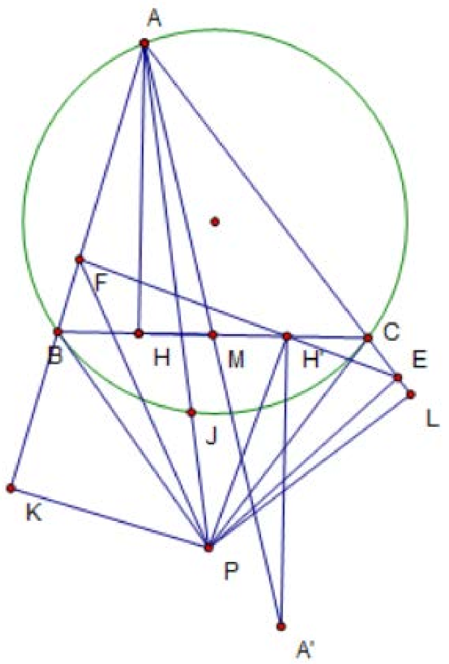
Tương tự ta có $\dfrac{MA}{NC} = \dfrac{MC}{NF}$.

Ta có

$$\frac{PM}{MA} = \frac{PM}{CN}.\frac{CN}{MA} = \frac{CM}{NQ}.\frac{NF}{MC} = \frac{NF}{NQ} = \frac{ME}{MQ}\left(do\ EF \parallel MN\right) \Rightarrow PE \parallel AQ$$.

Bài toán 1: (Nguyễn Văn Linh) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH. Gọi M là trung điểm BC, H' đối xứng H qua M. Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau ở P. Đường thẳng qua H' vuông góc H'P cắt AB, AC tại F, E. Chứng minh rằng $\widehat{FPB} = \widehat{CPE}$.

Giải



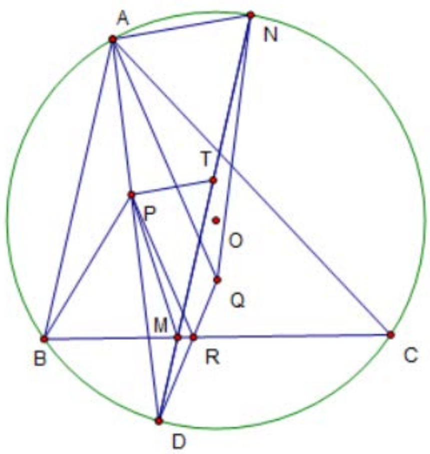
Gọi A' đối xứng A qua M. Dễ thấy A'H' vuông góc BC tại H'. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của P lên AB, AC. Vì PB đối song mà $A'B \parallel AC$ nên BP, BA' đẳng giác. Do đó P, A' liên hợp đẳng giác. Do đó theo tính chất về đường tròn Pedal thì K, M, H', L đồng viên. Ta có

$$\begin{aligned}(BP,FP) &= (KP,FP)-(KP,BP)\\ &= (FH',KH')-(MK,BM)\\ &= (FH',KH')-(H'L,KL)\\ &= (CP,PL)-(EP,EL)=(CP,EP)(mod\,\pi)\end{aligned}$$

Do đó ta có đpcm.

Bài toán 2: (Phan Anh Quân) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC. $AP \cap (O) = \{A, D\}$. M là một điểm thuộc cạnh BC. $MD \cap (O) = \{N, D\}$. Chứng minh rằng: $\widehat{PMB} = \widehat{ANQ}$.

Giải



Gọi R là giao điểm DQ và AC. Dựng $PT \parallel AN \left(T \in DN\right)$.

Ta có $PR \parallel AQ$. Theo định lí thales ta có $\dfrac{DR}{DQ} = \dfrac{DP}{DQ} = \dfrac{DT}{DN} \Rightarrow RT \parallel QN \Rightarrow \Delta AQN \sim \Delta PRT$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \widehat{BMD} &= \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = \widehat{BAD} + \widehat{CAN} = \widehat{QAC} + \widehat{CAN}\\ &= \widehat{QAN} = \widehat{RPT}\end{aligned}$$

Do đó PTMR nội tiếp suy ra $\widehat{PMB} = \widehat{PTR} = \widehat{ANQ}$.

Bổ đề 3: *Cho tam giác ABC, hai đường Ax,Ay đẳng giác trong góc BAC. Khi đó* $\widehat{xAB} = \widehat{yAC}$.

Bổ đề 4: *Cho góc* xOy *, hai đường OA, OB đẳng giác trong góc* xOy. *Kẻ* $BH \perp Ox\left(H \in Ox\right), BK \perp Oy\left(K \in Oy\right)$. *Khi đó:* $HK \perp OA$.

Bổ đề 5: *Cho góc* xOy, *hai đường OA, OB đẳng giác trong góc* xOy. *Kẻ* $BH \perp Ox\left(H \in Ox\right), BK \perp Oy\left(K \in Oy\right)$. *Qua A kẻ AE, AF lần lượt vuông góc với Ox, Oy tại các điểm E, F. Khi đó E, H, F, K đồng viên.*

Bổ đề 6: *Cho góc* xOy, *2 điểm A, B nằm trong miền góc* xOy. *Qua A kẻ* $AX \parallel Oy\left(X \in Ox\right), AY \parallel Ox\left(Y \in Oy\right), BZ \parallel Oy\left(Z \in Ox\right), BT \parallel Ox\left(T \in Oy\right)$. *Khi đó X, Y, Z, T đồng viên* $\Leftrightarrow OA, OB$ *đẳng giác trong góc* xOy

Bài tập tự giải

Bài toán 3 (Nguyễn Văn Linh): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kì trên phân giác góc A của tam giác ABC. CP, BP cắt (ABP), (ACP) lần lượt tại các điểm R, S khác P. E, F là điểm chính giữa cung AC, AB của (O) tương ứng không chứa B, C. AE, AF lần lượt cắt (APC), (APB) tại các điểm Z, Y khác A. ZR, SY cắt BC tại các điểm M, N. Chứng minh rằng (AMN) tiếp xúc (O).

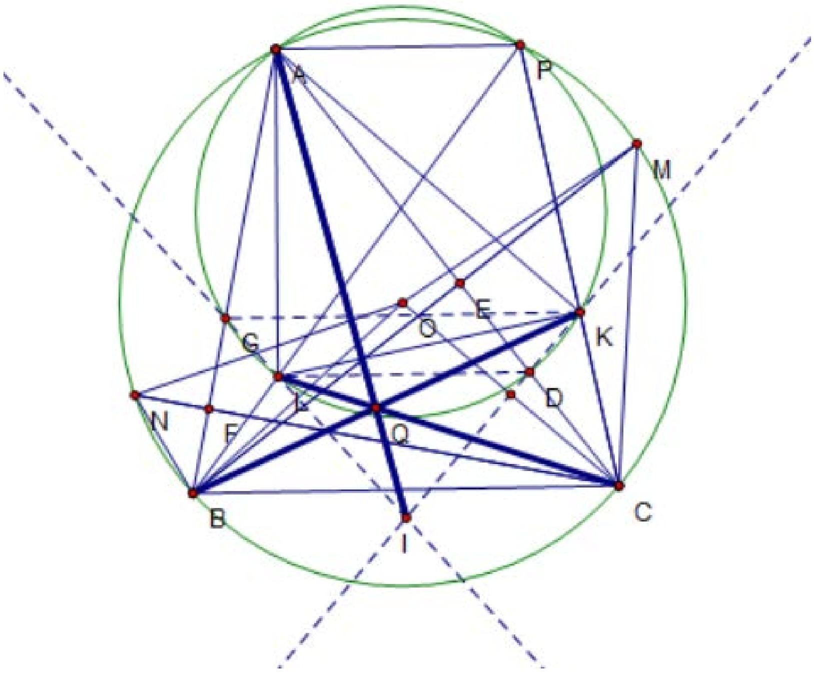
Bài toán 4 (CeuAzul Aops): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AP là phân giác (P nằm trong tam giác ABC). Gọi BP, CP cắt CA, AB và (O) lần lượt tại E, U, F, V. EF cắt (O) tại 2 điểm S, T. Chứng minh rằng (PST) tiếp xúc (PUV).

D. ĐỊNH LÍ CEVA – SIN

☆☆☆

Bài toán 1: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có A di động trên (O), B, C là hai điểm cố định trên (O). BE và CF là hai đường cao của tam giác ABC lần lượt cắt (O) tại M và N. Gọi K, L lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác OCM và OBN. Q là giao điểm của BK và CL. Chứng minh rằng AQ đi qua điểm cố định.

Giải



* Trước hết ta chứng minh hai tam giác ABL và ACK đồng dạng.

Ta có

$$\widehat{ABL}=\widehat{ABO}-\widehat{OBL}=\widehat{MBC}-\frac{\widehat{NOB}}{2}=\frac{\widehat{MOC}}{2}-\frac{\widehat{NOB}}{2}$$
$$\widehat{ACK}=\widehat{OCK}-\widehat{OCA}=\frac{\widehat{MOC}}{2}-\widehat{BCF}=\frac{\widehat{MOC}}{2}-\frac{\widehat{NOB}}{2}$$
$$\Rightarrow \widehat{ABL}=\widehat{ACK}$$

Mặt khác, ta có $\frac{OB}{sin\,\widehat{NOB}}=2LB\Rightarrow\frac{OB}{LB}=2\,sin\,\widehat{NOB}=2\,cos\frac{\widehat{NOB}}{2}=2\,cos\,\widehat{NAB}=2\frac{AF}{AN}$

Tương tự, $\frac{OC}{CK}=2\frac{AE}{AM}$. Vậy $\frac{LB}{CK}=\frac{LB}{OB}.\frac{OC}{CK}=\frac{AN}{2AF}.\frac{2AE}{AM}=\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$

Do đó $\Delta ABL\sim\Delta ACK$. Gọi P là giao điểm của BL và CK. Khi đó theo tính chất của phép vị tự quay thì hai đường tròn (ALK) và (O) cắt nhau tại A và P. Dễ dàng thấy được $\Delta ALK\sim\Delta ABC$.

* Gọi $\left(ALK\right)\cap AB=G;\left(ALK\right)\cap AC=D$.

Ta có

$$\widehat{PCB}=\widehat{PCO}+\widehat{OCB}=\frac{\widehat{MOC}}{2}+\widehat{ACF}=\widehat{MBC}+90^0-\widehat{BAC}=90^0-\widehat{ACB}+90^0-\widehat{BAC}=\widehat{ABC}\quad.$$

do đó tứ giác APCB là hình thang cân nên $AP\parallel BC$. Suy ra $GK\parallel BC$.

Ta cũng có

$\widehat{GAL} = \widehat{GKL}$ (cùng chắn cung GL); $\widehat{KAD} = \widehat{KLD}$ (cùng chắn cung DK). Mà $\widehat{GAL} = \widehat{KAD} \Rightarrow \widehat{GKL} = \widehat{KLD} \Rightarrow GK \parallel LD \parallel BC$.

Vậy tứ giác GKDL là hình thang cân, do đó GL và DK cắt nhau tại I thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

* Ta cần chứng minh BK, CL và AI đồng quy thì khi đó AQ đi qua điểm cố định I.

Theo định lí sin ta có

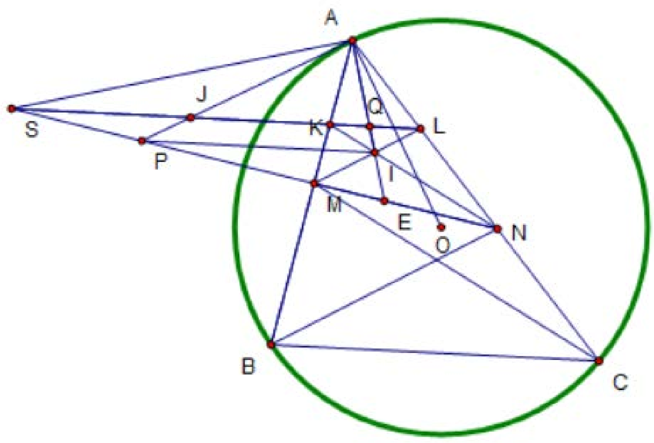
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sin\widehat{KBC}}{KC} = \dfrac{\sin\widehat{KCB}}{KB} \\ \dfrac{\sin\widehat{KBA}}{KA} = \dfrac{\sin\widehat{KAB}}{KB}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\widehat{KBA}}{\sin\widehat{KBC}}.\frac{KC}{KA} = \frac{\sin\widehat{KAB}}{\sin\widehat{KCB}} = \frac{\sin\left(180^0 - \widehat{KCB}\right)}{\sin\widehat{KCB}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin\widehat{KBA}}{\sin\widehat{KBC}} = \frac{KA}{KC} .$$

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{\sin\widehat{LCB}}{\sin\widehat{LCA}} = \dfrac{LB}{LA}; \dfrac{\sin\widehat{IAC}}{\sin\widehat{IAB}} = \dfrac{IC}{IB} = 1$.

Do đó $\dfrac{\sin\widehat{IAC}}{\sin\widehat{IAB}}.\dfrac{\sin\widehat{LCB}}{\sin\widehat{LCA}}.\dfrac{\sin\widehat{KBA}}{\sin\widehat{KBC}} = \dfrac{LB}{LA}.\dfrac{KA}{KC} = 1$ (vì $\Delta ABL \sim \Delta ACK$). Vậy theo định lí Ceva – sin thì BK, CL, AI đồng quy nên AQ đi qua điểm cố định I.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O). Trên AB, AC lấy các điểm M, N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M, song song BN cắt đường thẳng qua N song song CM tại điểm I. Tiếp tuyến (O) tại A cắt MN tại P. Chứng minh rằng AI là phân giác góc BAC đồng thời $PA = PI$.

Giải:



Gọi $K = NI \cap AB, L = MI \cap AC$.

Theo định lí Ceva – Sin , IA, LM, KN đồng quy nên

$$\frac{\sin\widehat{IAM}}{\sin\widehat{IAN}}.\frac{\sin\widehat{LMN}}{\sin\widehat{LMA}}.\frac{\sin\widehat{KNA}}{\sin\widehat{KNM}} = 1$$

Mà

$$\frac{\sin\widehat{LMN}}{\sin\widehat{LMA}} = \frac{\sin\widehat{MNB}}{\sin\widehat{MBN}} = \frac{MB}{MN}$$

$$\frac{\sin\widehat{KNA}}{\sin\widehat{KNM}} = \frac{\sin\widehat{MCN}}{\sin\widehat{NMC}} = \frac{MN}{NC}$$

Mà $BM = CN$

Suy ra $\sin\widehat{IAM} = \sin\widehat{IAN}$, vậy AI là đường phân giác của góc BAC.

Gọi $S = KL \cap MN; J = AP \cap KL; Q = AI \cap KL; E = MN \cap AI$.

Theo hàng điểm điều hòa cơ bản thì $(SE,MN)=-1$ mà AI là phân giác của góc MAN nên $\widehat{SAE}=90^0 \Rightarrow \widehat{SAP}=\widehat{EAO}$

Dễ dàng chứng minh được KL song song với BC. Do đó

$\widehat{JAQ}=\widehat{JAK}+\widehat{KAQ}=\widehat{ACB}+\widehat{QAL}=\widehat{ALQ}+\widehat{QAL}=\widehat{AQJ}$.

Vậy $JA=JQ$ mà tam giác SAQ vuông tại A nên J là trung điểm của SQ.

Theo định lí Menelaus trong tam giác SQE với cát tuyến AIP ta có

$\frac{PS}{PE}.\frac{AE}{AQ}.\frac{JQ}{JS}=1 \Rightarrow \frac{PS}{PE}=\frac{AQ}{AE}=\frac{IQ}{IE} \Rightarrow SQ \parallel PI \Rightarrow PA=PI$ (tính chất của hàng điểm điều hòa nên 2 tỉ số cuối bằng nhau) .

E. ĐIỂM LEMOINE

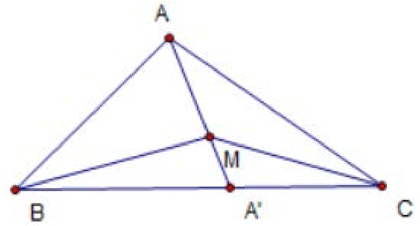
☆☆☆

Cho tam giác ABC, có AX, BY, CZ là các đường đối trung và AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm L. Điểm L đó được gọi là điểm **Lemoine** và L thỏa mãn $a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$ (trong đó $a=BC, b=CA, c=AB$).

Bổ đề 1: (định lí con nhím) Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ và các vectơ đơn vị $\vec{e_i}$ $(1\le i\le n)$ theo thứ tự vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{n+1}\equiv A_1$), hướng ra ngoài đa giác. Khi đó $A_1A_2\vec{e_1}+A_2A_3\vec{e_2}+...+A_nA_1\vec{e_n}=\vec{0}$.

Bổ đề 2: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Gọi S_a, S_b, S_c theo thứ tự là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Chứng minh



Gọi A’ là giao điểm của AM và BC. Trong tam giác MBC ta có

$\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$ (1)

Mà

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c} \Rightarrow \frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c}; \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}$$

Mặt khác $\frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MBA'}}{S_{MBA}} = \frac{S_{MCA'}}{S_{MCA}} = \frac{S_{MBA'} + S_{MCA'}}{S_{MBA} + S_{MCA}} = \frac{S_a}{S_c + S_b}$

Vậy $(1) \Leftrightarrow \frac{-S_a}{S_b + S_c}\overrightarrow{MA} = \frac{S_b}{S_b + S_c}\overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Bài toán 1: Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trong tam giác . H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác HIK khi và chỉ khi M là điểm Lemoine của tam giác ABC.

Giải

Theo hai bổ đề trên ta có $\frac{a}{MH}\overrightarrow{MH} + \frac{b}{MI}\overrightarrow{MI} + \frac{c}{MK}\overrightarrow{MK} = \vec{0}$; $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

M là trọng tâm tam giác HIK $\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a}{MH} = \frac{b}{MI} = \frac{c}{MK} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a.MH} = \frac{b^2}{b.MI} = \frac{c^2}{c.MK}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{S_a} = \frac{b^2}{S_b} = \frac{c^2}{S_c} \Leftrightarrow a^2\overrightarrow{MA} + b^2\overrightarrow{MB} + c^2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ M là điểm Lemoine của tam giác ABC.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC và điểm M. Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của M sao cho $MH^2 + MI^2 + MK^2$ nhỏ nhất?

Giải

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(MH^2 + MI^2 + MK^2\right) \ge \left(aMH + bMI + cMK\right)^2 = \left(2S_{MBC} + 2S_{MAC} + 2S_{MAB}\right)^2 = 4S_{ABC}^2$$
$$\Rightarrow MH^2 + MI^2 + MK^2 \ge \frac{4S_{ABC}^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{MH}=\frac{b}{MI}=\frac{c}{MK}$ và M là điểm nằm trong tam giác ABC. Theo bài toán 1 thì khi đó M là điểm Lemoine của tam giác ABC.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. X', Y', Z' theo thứ tự là trung điểm các đường phân giác AA', BB', CC'. Chứng minh rằng XX', YY', ZZ' đồng quy tại một điểm và điểm đó nằm trên đường thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp và điểm Lemoine của tam giác ABC.

Giải

Gọi I, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và điểm Lemoine của tam giác ABC.

Gọi K là tâm tỉ cự của hệ điểm $\left\{A,B,C\right\}$ với hệ số $\left\{a\left(b+c\right);b\left(a+c\right);c\left(a+b\right)\right\}$. Ta chứng minh XX', YY', ZZ' đồng quy tại K và K thuộc đường thẳng IL. Thật vậy

Ta có $a\left(b+c\right)\overrightarrow{KA}+b\left(a+c\right)\overrightarrow{KB}+c\left(a+b\right)\overrightarrow{KC}=\vec{0}\Leftrightarrow a\left(b+c\right)\overrightarrow{KA}+a\left(b\overrightarrow{KB}+c\overrightarrow{KC}\right)+bc\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right)=\vec{0}$

(1)

Mà $\frac{BA'}{CA'}=\frac{c}{b}\Rightarrow b\overrightarrow{A'B}+c\overrightarrow{A'C}=\vec{0}\Rightarrow b\overrightarrow{KB}+c\overrightarrow{KC}=b\overrightarrow{KA'}+c\overrightarrow{KA'}$

Vậy (1) $\Leftrightarrow a\left(b+c\right)\overrightarrow{KA}+a\left(b+c\right)\overrightarrow{KA'}+bc\left(2\overrightarrow{KX}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(ab+ac\right)\overrightarrow{KX'}+2bc\overrightarrow{KX}=\vec{0}\Rightarrow K\in XX'$

Tương tự $K\in YY';K\in ZZ'$. Vậy $XX';YY';ZZ'$ đồng quy tại K.

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
&a\left(b+c\right)\overrightarrow{KA}+b\left(a+c\right)\overrightarrow{KB}+c\left(a+b\right)\overrightarrow{KC}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow a\left(a+b+c\right)\overrightarrow{KA}+b\left(a+b+c\right)\overrightarrow{KB}+c\left(a+b+c\right)\overrightarrow{KC}-\left(a^2\overrightarrow{KA}+b^2\overrightarrow{KB}+c^2\overrightarrow{KC}\right)=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(a\overrightarrow{KA}+b\overrightarrow{KB}+c\overrightarrow{KC}\right)-\left(a^2\overrightarrow{KA}+b^2\overrightarrow{KB}+c^2\overrightarrow{KC}\right)=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(\left(a+b+c\right)\overrightarrow{KI}+\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)\overrightarrow{KL}-\left(a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}\right)=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)^2\overrightarrow{KI}-\left(a^2+b^2+c^2\right)\overrightarrow{KL}=\vec{0}
\end{aligned}$$

Suy ra K thuộc IL.

Bài toán 4: Cho tam giác ABC có điểm Lemoine L. X, Y, Z lần lượt nằm trên các đường thẳng LA, LB, LC sao cho $YZ\parallel BC, ZX\parallel CA, XY\parallel AB$. Gọi BZ cắt CY tại D, CX cắt AZ tại E, AY cắt BX tại F. U, V, W lần lượt là đẳng giác của D, E, F theo thứ tự trong tam giác LBC, LCA, LAB.

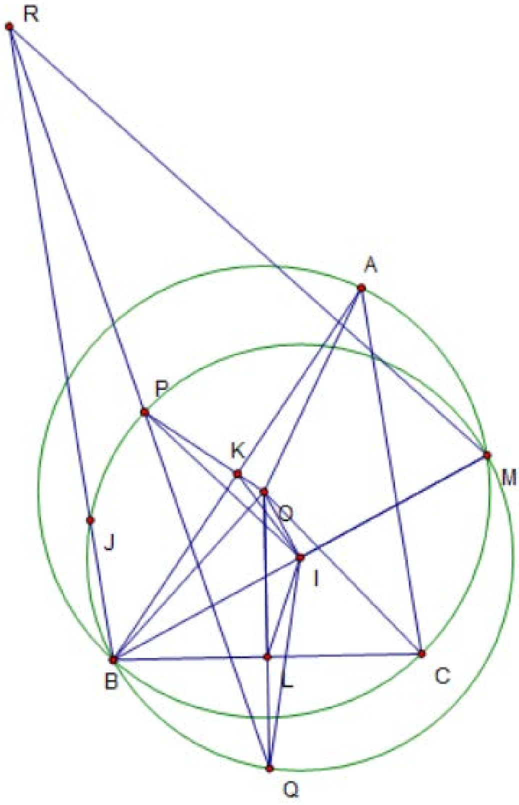
Bài toán 5: Cho tam giác ABC có trực tâm H. L là điểm Lemoine, G là đẳng giác của L trong tam giác ABC. Hình chiếu G lên HA, HB, HC là X, Y, Z. Chứng minh rằng L là điểm Lemoine của tam giác XYZ.

F. MỘT SỐ BÀI TOÁN SỬ DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO

☆☆☆

Bài toán 1 (IMO Shortlist): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có AB > BC. Phân giác góc ABC cắt (O) tại M, B. Phân giác các góc AOB, BOC cắt đường tròn đường kính BM tại P, Q. Lấy R trên PQ sao cho $BR = MR$. Chứng minh rằng $BR \parallel AC$.

Giải



Cách 1: Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm BM, AB, AC.

Gọi J là giao điểm của BR với đường tròn đường kính BM.

Dễ thấy được 5 điểm B, K, O, I, L cùng thuộc đường tròn đường kính BM và 3 điểm R, O, I thẳng hàng. Bây giờ ta cần chứng minh tứ giác POIQ và BJOI nội tiếp, thật vậy

Xét phép quay tâm I góc quay $\left(\overrightarrow{IK};\overrightarrow{IL}\right)$: $K \to L; P \to Q'$. Ta có

$$\left(\overrightarrow{LQ'};\overrightarrow{LI}\right)=\left(\overrightarrow{KP};\overrightarrow{KI}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{LQ'};\overrightarrow{LC}\right)+\left(\overrightarrow{LC};\overrightarrow{LI}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{KP};\overrightarrow{KB}\right)+\left(\overrightarrow{KB};\overrightarrow{KI}\right)=\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{LI};\overrightarrow{LC}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{LQ'};\overrightarrow{LC}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow Q \equiv Q'$. Vậy tứ giác POIQ nội tiếp.

Ta có $\overline{RJ}.\overline{RB}=\overline{RP}.\overline{RQ}=\overline{RO}.\overline{RI}$ (vì POIQ nội tiếp), suy ra BJOI nội tiếp. Mà $\widehat{OIB}=90^0$ nên $\widehat{BJO}=90^0$. Do đó J, O, M thẳng hàng. Vậy $OM \perp BR$ mà $OM \perp AC$ (vì BM là đường phân giác góc ABC nên M là điểm chính giữa cung AC), do đó $BR \parallel AC$.

Cách 2: OPQI nội tiếp hay I thuộc đường tròn (OPQ)

Xét phép nghịch đảo tâm I: $(OPQ) \leftrightarrow PQ \Rightarrow O \leftrightarrow R$. Gọi K là điểm đối xứng của O qua I$\Rightarrow$ BOMK là hình thoi$\Rightarrow BK \perp AC$. Mà $\overline{IK}.\overline{IR}=\overline{IO}.\overline{IR}=IB^2 \Rightarrow BR \perp BK$. Vậy $BR \parallel AC$.

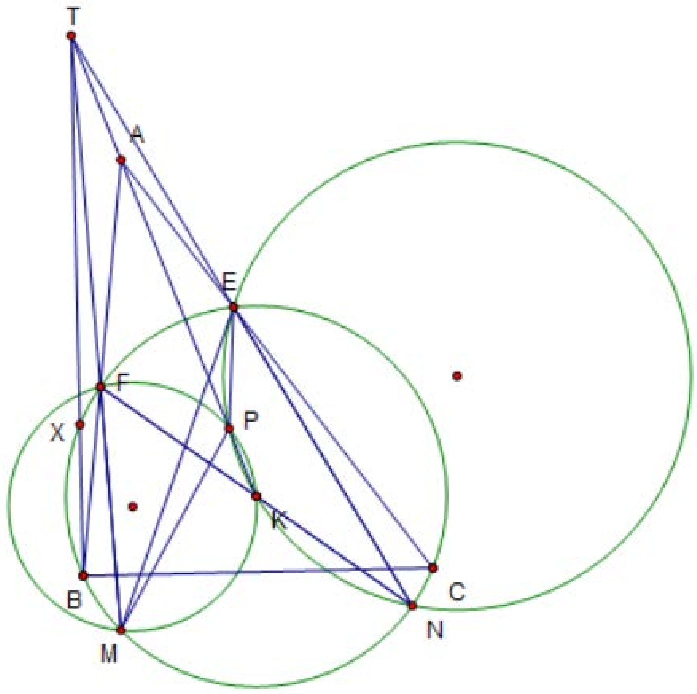
Bài toán 2: Cho tam giác ABC, một đường tròn (K) qua B, C cắt AC, AB tại E, F. Đường thẳng qua B vuông BC cắt AK tại T. TE cắt đường tròn (K) tại N. Chứng minh rằng F, K, N thẳng hàng.

Giải

Gọi M là giao điểm của TF và đường tròn (K). Gọi P là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (EKN) và (FKM). Theo tính chất trục đẳng phương thì T, A, P, K thẳng hàng.

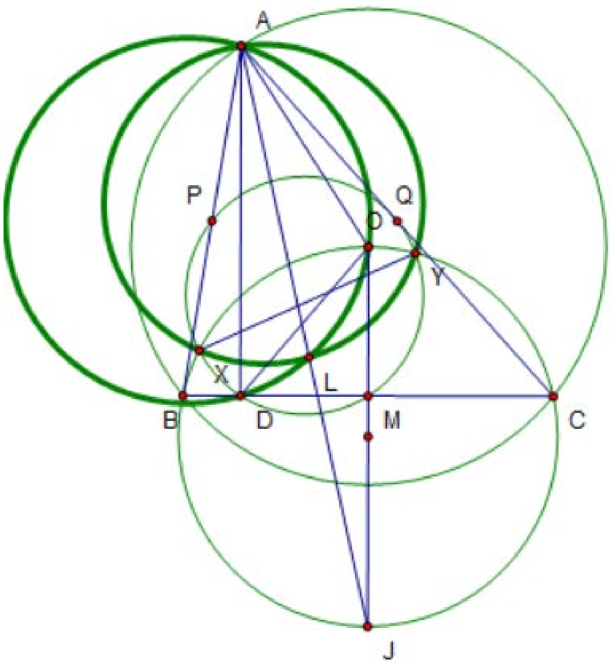
Xét phép nghịch đảo tâm T phương tích $TF.TM$: $F \leftrightarrow M; P \leftrightarrow K; E \leftrightarrow N$. Do đó để chứng minh F, K, N thẳng hàng thì ta chỉ cần chứng minh T,M, P, E đồng viên. Thật vậy

$\widehat{TEM}=180^0-\widehat{MEN}=180^0-\widehat{MFN}=180^0-\widehat{MPK}=\widehat{TPM}$, suy ra TEPM nội tiếp. Do đó theo tính chất của phép nghịch đảo ta có F, K, N thẳng hàng.



Bài toán 3: Cho tam giác ABC có đường cao AD và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn Euler của tam giác ABC cắt đường tròn (BOC) tại X và Y. Đường tròn (AYX) cắt đường tròn (ADO) tại A và L. Chứng minh rằng AL là đường đối trung của tam giác ABC.

Giải



Ta kí hiệu l_A là phân giác góc BAC. Lấy P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC. Dễ thấy AD, AO là hai đường đẳng giác và $AD.AO=\dfrac{AB.AC}{2}=AP.AC=AQ.AB$. Do đó xét phép nghịch đảo đối xứng

$f=I_A^{\frac{AB.AC}{2}}.D_{l_A}:(Euler)\leftrightarrow(BOC)$. Do đó $X\leftrightarrow Y$.

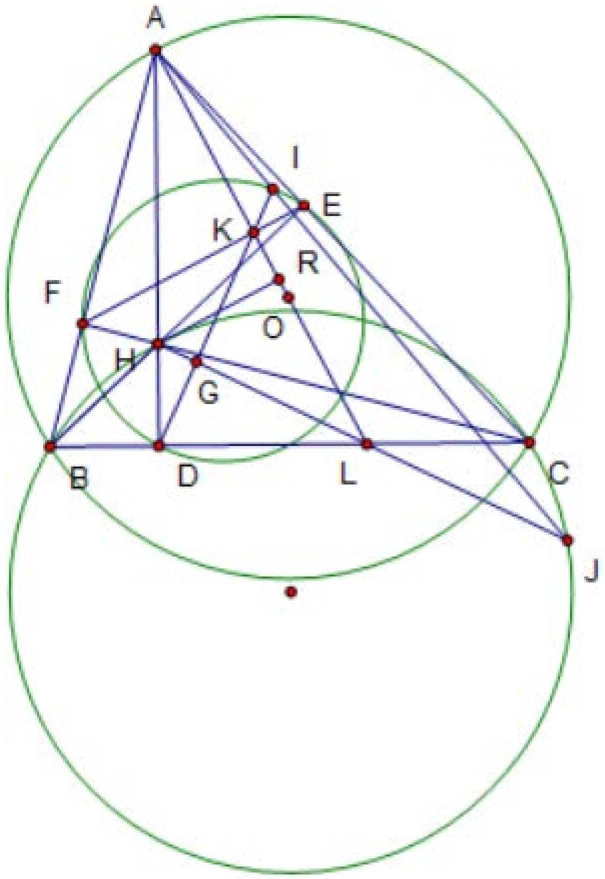
Gọi M là trung điểm BC, J là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và C của (O). Hiển nhiên,

$f:AM\leftrightarrow AJ;(AXY)\leftrightarrow XY;(ADO)\leftrightarrow DO$.

Do đó XY cắt DO tại K thì L chính là ảnh của K qua f. Vậy bài toán quy về chứng minh XY, DO, AM đồng quy tại K. Hay là ta cần chứng minh K nằm trên trục đẳng phương của (Euler) và (BOC).

Bài toán 4: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có trực tâm H và các đường cao AD, BE, CF. Đường thẳng AO cắt EF, BC lần lượt tại K và L. Gọi KD cắt HL tại G. Chứng minh rằng G thuộc trục đẳng phương của (BHC) và (Euler).

Giải



Gọi I là giao điểm của DG với đường tròn Euler. Gọi R là hình chiếu của H lên AL

Xét phép nghịch đảo

$$I_{AH.AD}^{A}: H \leftrightarrow D; R \leftrightarrow L; I \leftrightarrow J; (Euler) \leftrightarrow (BHC)$$

Mà $I \in (Euler) \Rightarrow J \in (BHC)$. Bây giờ ta cần chứng minh H, L, J thẳng hàng tức là cần chứng minh A, D, R, I đồng viên. Thật vậy,

5 điểm A, E, R, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH nên $KR.KA = KE.KF$.

Mà DEIF nội tiếp đường tròn Euler nên $KI.KD = KE.KF$

Vậy $KR.KA = KI.KD$ suy ra tứ giác AIRD nội tiếp, suy ra H,G, L, J thẳng hàng.

Do đó, $GH.GJ = GD.GI \Rightarrow \wp_{G/(Euler)} = \wp_{G/(BHC)}$, ta có đpcm.

Bài toán 5: (Aops) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có phân giác góc BAC cắt (O) và BC tại các điểm M, D (M khác A). A' là điểm đối xứng của A qua M. Lấy Y đối xứng M qua BC và lấy Z là giao điểm của hai đường tròn (YDM) và (A'BC) (Z nằm trong tam giác ABC), MZ cắt OA tại R. Chứng minh rằng $RD \perp BC$.

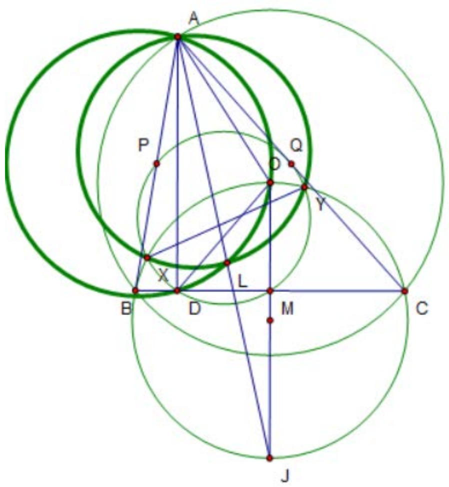
Bài toán 6 (Aops): Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. AI cắt BC tại T và AD cắt đường tròn đường kính AI tại G và A, đường tròn (ABG) cắt AI tại A và Q. Chứng minh B, F, Q, T đồng viên.

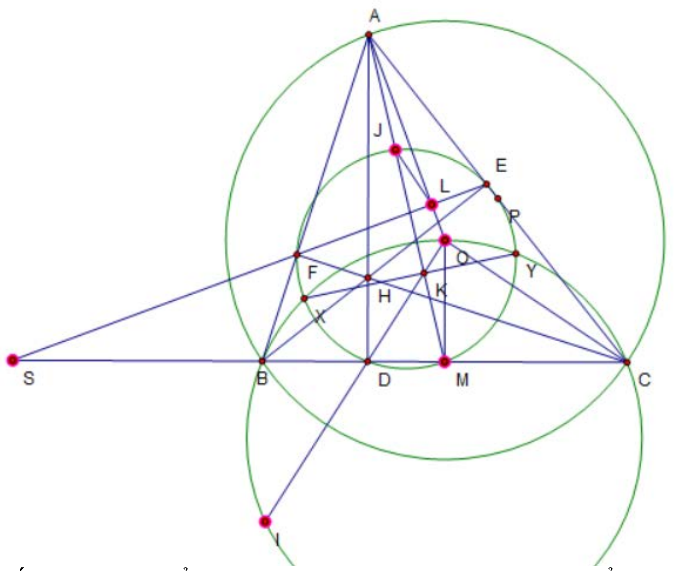
Phụ lục 2: Đề kiểm tra và đáp án

Bài kiểm tra lần 1:

Đề: Cho tam giác ABC có đường cao AD và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn Euler của tam giác ABC cắt đường tròn (BOC) tại X và Y. Đường tròn (AYX) cắt đường tròn (ADO) tại A và L. Chứng minh rằng AL là đường đối trung của tam giác ABC.

Đáp án

	Nội dung	Điểm
	 Ta kí hiệu l_A là phân giác góc BAC. Lấy P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC. Dễ thấy AD, AO là hai đường đẳng giác và $AD.AO = \frac{AB.AC}{2} = AP.AC = AQ.AB$. Do đó xét phép nghịch đảo đối xứng $f = I_A^{\frac{AB.AC}{2}}.D_{l_A} : (Euler) \leftrightarrow (BOC)$. Do đó $X \leftrightarrow Y$. Gọi M là trung điểm BC. Hiển nhiên, $f : (AXY) \leftrightarrow XY; (ADO) \leftrightarrow DO$. (AXY) cắt (ADO) tại L, giả sử XY cắt DO tại K thì K chính là ảnh của L qua f. Như vậy AK và AL đối xứng qua l_A . Do đó để AL là đường đối trung thì K phải thuộc AM	5 đ
	Ta chứng minh XY, DO, AM đồng quy tại K. Thật vậy ta giả sử K là giao điểm của AM và DO, ta chứng minh K thuộc trục đẳng phương của (Euler) và (BOC), suy ra K thuộc XY.	

	 Lấy J là giao điểm của AM và (Euler), P là trung điểm AC, I là giao điểm OD và (BOC), S là giao điểm của EF và BC, L là giao điểm của OA và EF. Theo tính chất của hàng điểm điều hòa cơ bản ta có $(S,D,B,C)=-1$, mà M là trung điểm BC nên ta có $SD.SM = DB.DC = DO.DI$, suy ra SIMO nội tiếp (1). Dễ dàng chứng minh được OA vuông góc EF, suy ra tứ giác OLEP nội tiếp. Do đó $AL.AO = AE.AP = AJ.AM \Rightarrow$ JLOM nội tiếp (2) Ta cũng có tứ giác SLOM nội tiếp (3) (1), (2), (3) suy ra S, I, M,O,L,J đồng viên. Do đó $KJ.KM = KO.KI \Rightarrow \wp_{K/(Euler)} = \wp_{K/(BOC)}$. Vậy K thuộc trục đẳng phương của (Euler) và (BOC) hay K thuộc XY. Vậy AM, XY, OD đồng quy tại K. Quay trở lại bài toán ta có AI là đường đối trung của tam giác ABC.	1đ 2đ 1đ 1đ 1đ

Bài kiểm tra lần 2:

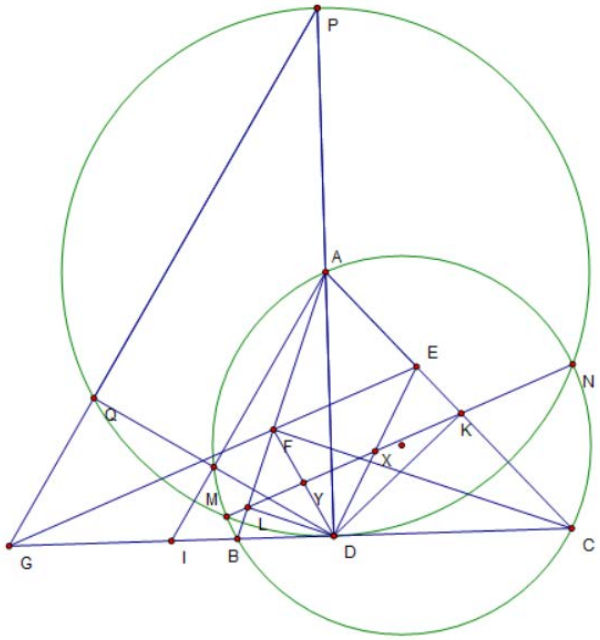
Đề: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF. Đường tròn tâm A, bán kính AD cắt (O) tại hai điểm M, N.

a) Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm DE, DF.

b) Gọi EF cắt BC tại điểm G. DP là đường kính của (A; AD). PG cắt (A;AD) tại điểm Q khác P. Chứng minh rằng trung điểm DQ nằm trên (O).

Đáp án

Câu	Nội dung	Điểm
a		

	 Ta thấy MN là trục đẳng phương của (O) và (A; AD), do đó $MN \perp OA$. Mà dễ thấy $EF \perp OA$ nên MN // EF. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên AC và AB. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của DE và DF. Trong tam giác vuông DLF có LY là đường trung tuyến, suy ra tam giác LYF cân tại Y. Vậy $\widehat{YLF} = \widehat{LFY}$, mà $\widehat{LFY} = \widehat{EFA}$ suy ra LY // EF mà XY// EF nên L, Y, X thẳng hàng. Chứng minh tương tự K, X, Y thẳng hàng. Vậy L, X, Y, K thẳng hàng.	1đ 1đ 1đ 1đ
	Ta có $AK.AC = AL.AB\left(= AD^2\right)$ nên tứ giác BLKC nội tiếp.	1đ
	Vì AD = AN nên $AN^2 = AK.AC$, lại có $\widehat{CAN}$ chung nên $\Delta AKN \sim \Delta ANC$. Do đó $\widehat{AKN} = \widehat{ANC}$. Mà $\widehat{ANC} + \widehat{LBC} = 180^0; \widehat{LBC} + \widehat{LKC} = 180^0$ nên $\widehat{AKN} = \widehat{LKC} \Rightarrow$ L,K,N thẳng hàng. Tương tự M, L, K thẳng hàng . Vậy ta có MN đi qua trung điểm X, Y.	
b	Xét phép vị tự tâm D tỉ số $\frac{1}{2}$: $Q \to S$ (S là trung điểm DQ); $P \to A; G \to I$ (I là trung điểm GD). Vì P, Q, G thẳng hàng nên A, S, I thẳng hàng. Đồng thời Q nằm trên đường tròn (A;AD) nên S thuộc đường tròn đường kính AD. Ta cần chứng minh S cũng thuộc (O).	2đ
	Ta có $IS.IA = ID^2$. Mà theo hàng điểm điều hòa cơ bản $(G, D, B, C) = -1$, I là trung điểm GD nên theo hệ thức Newton ta có $ID^2 = IG^2 = IB.IC$. Vậy $IS.IA = IB.IC \Rightarrow$ tứ giác SACB nội tiếp. Vậy S thuộc (O) (đpcm).	3đ