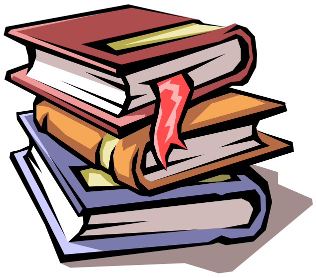
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



BỘ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN

LỚP 9 NĂM HỌC 2020-2021

Tài liệu sưu tầm, ngày 8 tháng 12 năm 2020

ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN LỚP 9
CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 4
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài 120 phút

Câu 1. (4 điểm)

a) Chứng minh $A=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là số nguyên.

b) Giả sử p và p^2+2 đều là các số nguyên tố. Chứng minh p^3+2 cũng là một số nguyên tố.

Câu 2. (6 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$

b) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}=5x^2-20x+22$

c) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2-2x+2$.

Câu 3. (4 điểm)

a. Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}$

b. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $Q=a.b.c$

Câu 4. (6 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Gọi I,K lần lượt là hình chiếu của điểm D trên các đường thẳng BE,CF. Chứng minh rằng

a) $BH.BE+CH.CF=BC^2$.

b) $IK//EF$.

c) Trong các tam giác AEF,BDF,CDE có ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

Câu 5. (1 điểm)

Chứng minh rằng: Nếu tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ CHỌN HSG TOÁN 9 CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 4
Năm học: 2020-2021

Câu 6. (4 điểm)

a) Chứng minh $A=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là số nguyên.

b) Giả sử p và p^2+2 đều là các số nguyên tố. Chứng minh p^3+2 cũng là một số nguyên tố.

Lời giải

a) Chứng minh $A=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là số nguyên.

$A^3=2+3\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$

$A^3=2+3A\left(\sqrt[3]{1-\frac{84}{81}}\right)$

$A^3=2-A$

$A^3+A-2=0$

$(A-1)(A^2+A+2)=0$

$A-1=0$ (vì $A^2+A+2\neq 0$)

$A=1$.

Vậy A nguyên.

b) Giả sử p và p^2+2 đều là các số nguyên tố. Chứng minh p^3+2 cũng là một số nguyên tố.

Với $p=2$: $p^2+2=6$ (ktm)

Với $p=3$: $p^2+2=11$, $p^3+2=29$ (TM)

Với $p>3 \Rightarrow p^2=3k+1$: $p^2+2=(3t+3)\vdots 3$ (KTM)

Vậy p = 3.

Câu 7. (6 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$

b) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}=5x^2-20x+22$

c) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2-2x+2$.

Lời giải

a) $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$.

$\Leftrightarrow 11-x-4\sqrt{x+3}-2\sqrt{3-2x}=0$.

$\Leftrightarrow x+3-4\sqrt{x+3}+4+3-2x-2\sqrt{3-2x}+1=0$.

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2+\left(\sqrt{3-2x}-1\right)^2=0$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}-2=\sqrt{3-2x}-1=0$.

$\Leftrightarrow x=1$.

b) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}=5x^2-20\text{x}+22$

Ta có: $5x^2-20\text{x}+22=5\left(x^2-4\text{x}+4\right)+2=5\left(x-2\right)^2+2\geq 2$.

$\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}\right)^2\leq\left(1^2+1^2\right)\left(3x-5+7-3x\right)=4$.

$\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}\leq 2$.

Vậy $\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}=5x^2-20\text{x}+22=2$

$5x^2-20\text{x}+20=0\Leftrightarrow x=2$

c) $\left(4x-1\right)\sqrt{x^2+1}=2x^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+1\right)-\left(4x-1\right)\sqrt{x^2+1}-2x=0$.

Đặt $a=x^2+1\left(a\geq 1\right)$, phương trình trở thành:

$2a^2-\left(4x-1\right)a-2x=0$.

$\Delta=\left(4x+1\right)^2>0$

$a=\pm 2x$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}=2x$

$\Leftrightarrow x^2+1=4x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ x=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\left(l\right) \end{array}\right.$$

Vậy pt có tập nghiệm $S=\left\{\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right\}$.

Câu 8. (4 điểm)

a. Cho $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{b^{2021}}+\dfrac{1}{c^{2021}}=\dfrac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}$

b. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $Q=a.b.c$

Lời giải

a) Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}$$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c).(ab+bc+ca)-abc=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b).(ab+bc+ca)+abc+bc^2+ac^2-abc=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b).(ab+bc+ca)+c^2.(a+b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b).(ab+bc+ca+c^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b).\left[b.(a+c)+c.(a+c)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b).(b+c).(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Với $a=-b$:

$$\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-b^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{-b^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{c^{2021}} \text{ (luôn đúng)}$$

Tương tự:

Với $b=-c \Leftrightarrow \frac{1}{a^{2021}}=\frac{1}{a^{2021}}$ (luôn đúng)

Với $c=-a \Leftrightarrow \frac{1}{b^{2021}}=\frac{1}{b^{2021}}$ (luôn đúng)

b) $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a}=1-\frac{1}{1+b}+1-\frac{1}{1+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b).(1+c)}} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{1}{1+b}\ge 2\sqrt{\frac{ca}{(1+c).(1+a)}} \quad (2)$

$$\frac{1}{1+c}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a).(1+b)}} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{1}{1+a}.\frac{1}{1+b}.\frac{1}{1+c}\ge 8.\frac{abc}{(1+a).(1+b).(1+c)}$

$$\Leftrightarrow abc\le \frac{1}{8}\Leftrightarrow Q\le \frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Vậy $Q_{max}=\frac{1}{8}$ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

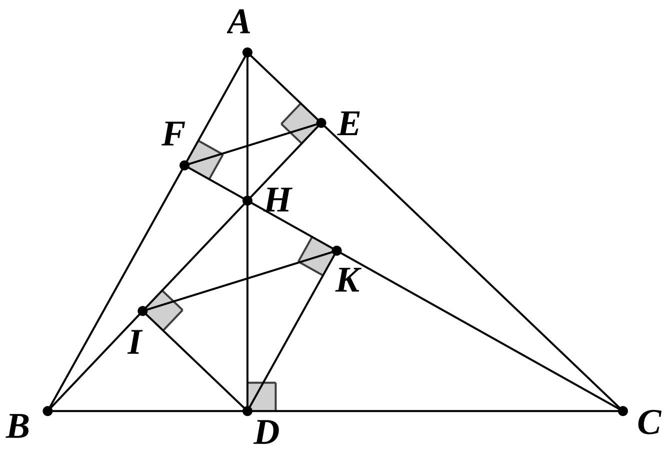
Câu 9. (6 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của điểm D trên các đường thẳng BE, CF. Chứng minh rằng

a) $BH.BE+CH.CF=BC^2$.

b) $IK\,//\,EF$.

c) Trong các tam giác AEF, BDF, CDE có ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

Lời giải



a) Tam giác vuông AEB và tam giác vuông HFB có góc B chung nên đồng dạng với nhau.

$$\Rightarrow \frac{AB}{BH}=\frac{BE}{BF}\Rightarrow BH.BE=AB.BF \quad (1)$$

Tam giác vuông AFC và tam giác vuông HEC có góc C chung nên đồng dạng với nhau.

$\Rightarrow \dfrac{AC}{CH}=\dfrac{CF}{CE}\Rightarrow CH.CF.=AC.CE$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra: $BH.BE+CH.CF=AB.BF+AC.CE$ (3)

Mặt khác dễ thấy tam giác vuông ADB và tam giác vuông BFC đồng dạng (góc B chung)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{BF}\Rightarrow AB.BF=BC.BD$ (4)

Chứng minh tương tự ta có tam giác ADC đồng dạng với tam giác BEC

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{DC}{CE}\Rightarrow AC.CE=BC.CD$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $AB.BF+AC.CE=BC\left(BD+CD\right)=BC^2$ (6)

Từ (3) và (6) suy ra $BH.BE+CH.CF=BC^2$ (đpcm).

b) Ta có $\begin{cases} AB\perp FC \\ DK\perp FC \end{cases}\Rightarrow AB//DK\Rightarrow \angle FAH=\angle HDK$ (hai góc so le trong) (1)

Tứ giác $AFHE$ có $\angle AFH+\angle AEH=90^0+90^0=180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AFHE$ là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow \angle FAH=\angle FEH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung FH) (2)

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $IDKH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle HIK=\angle HDK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HK) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\angle FEH=\angle HIK$ mà 2 góc này ở vị trí so le trong

Suy ra $IK//EF$ (đpcm).

c) Đặt $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AE=x$, $AF=y$, $BD=z$, $0<x,y,z<a$; $0<x,y,z<b$; $0<x,y,z<c$

Khi đó: $BF=c-y$, $EC=b-x$, $CD=a-z$

Giả sử không có tam giác nào có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\dfrac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC

Nghĩa là $S_{AEF}>\dfrac{1}{4}S_{ABC};S_{BFD}>\dfrac{1}{4}S_{ABC};S_{CED}>\dfrac{1}{4}S_{ABC}$. Suy ra $\dfrac{S_{AEF}.S_{BFD}.S_{CED}}{S_{ABC}^3}>\dfrac{1}{64}$

Ta có $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{AE.AF}{AB.AC}=\dfrac{x.y}{cb}$;

$\dfrac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=\dfrac{BF.BD}{BA.BC}=\dfrac{\left(c-y\right)z}{ca}$

$\dfrac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\dfrac{CE.CD}{CA.CB}=\dfrac{\left(b-x\right)\left(a-z\right)}{ba}$

Do đó $\dfrac{S_{AEF}.S_{BFD}.S_{CED}}{S_{ABC}^3}=\dfrac{xyz\left(a-z\right)\left(b-x\right)\left(c-y\right)}{a^2b^2c^2}$

Theo bđt Cauchy ta có: $x\left(b-x\right)\le \frac{\left(x+b-x\right)^2}{4}=\frac{b^2}{4}$

$y\left(c-y\right)\le \frac{\left(y+c-y\right)^2}{4}=\frac{c^2}{4}$ và $z\left(a-z\right)\le \frac{\left(z+a-z\right)^2}{4}=\frac{a^2}{4}$

Do đó $\frac{xyz\left(a-z\right)\left(b-x\right)\left(c-y\right)}{a^2b^2c^2}\le \frac{1}{64}$ hay $\frac{S_{AEF}.S_{BFD}.S_{CED}}{S_{ABC}^3}\le \frac{1}{64}$ (mâu thuẫn gt)

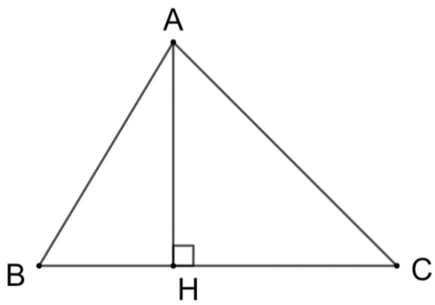
Suy ra đpcm.

Câu 10. (1 điểm)

Chứng minh rằng: Nếu tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Kẻ $AH\perp BC$



Ta có $AB<1,\ AC<1,\ BC<1$

$\Rightarrow \begin{cases} AH<1 \\ BH\le \frac{BC}{2}\le \frac{1}{2} \end{cases}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABH .

Ta có:

$AH^2+BH^2=AB^2$

Mà $AB^2<1\Rightarrow AH^2+BH^2<1$

$\Rightarrow AH^2<1-BH^2$

$\Rightarrow AH^2<1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow AH<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC<\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$

HẾT

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẬN ĐỐNG ĐA
ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút
Ngày thi: 14/11/2020

Câu 1. (5 *điểm*)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $p=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}+1$ là số nguyên tố.

2. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x-1)(6-x)}=1$

Câu 2. (5 *điểm*)

1. Cho ba số thực khác không a,b,c thỏa mãn điều kiện:

$a+b+c\neq 0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$. Tính giá trị của biểu thức:

$A=(a^{2021}+b^{2021}+c^{2021})(\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{b^{2021}}+\dfrac{1}{c^{2021}})$

2. Tìm tất cả các bộ số nguyên $(x;y;z)$ thỏa mãn $(x+y)(x-y)=8^z+10$

Câu 3. (2 *điểm*)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A=\dfrac{a}{2a^2+b^2+3}+\dfrac{b}{2b^2+c^2+3}+\dfrac{c}{2c^2+a^2+3}$

Câu 4. (7 *điểm*)

Cho đoạn thẳng $AB = 8cm$ và một điểm M nằm bất kỳ trên đoạn thẳng AB, một nửa mặt phẳng bờ AB, dựng hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$. Gọi giao điểm của đường thẳng AE và BC là điểm N, giao điểm của đường thẳng AC và BE là P.

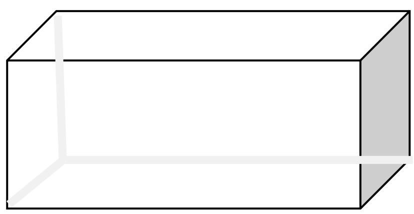
a) Chứng minh bốn điểm A,N,P,B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $DN.FN=MN^2$ và 3 điểm N,P,F thẳng hàng.

c) Tìm vị trí các điểm M trên đoạn thẳng AB để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. (1 *điểm*)

Một hình hộp chữ nhật có các kích thước là các số nguyên dương tính theo đơn vị cm, có thể tích $a\,(cm^3)$.
Biết khi đạt hình hộp chữ nhật đó đặt lên mặt bàn thì tổng diện tích của 5 mặt nhìn thấy được là $a\,(cm^2)$ (minh họa bằng hình vẽ bên). Tìm giá trị nhỏ nhất của a.



ꕥHẾTꕥ

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9 QUẬN ĐỐNG ĐA
Năm học: 2020-2021

Câu 1. (5 *điểm*)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $p=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1$ là số nguyên tố.

2. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x-1)(6-x)}=1$

Lời giải

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $p=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1$ là số nguyên tố.

Ta có

$$p=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1$$
$$\Rightarrow P=\frac{(n+3)(n^2+2)}{6}$$

Với $n = 0 \Rightarrow P=1$ không phải số nguyên tố

Với $n = 1 \Rightarrow P=2$ là số nguyên tố

Với $n = 2 \Rightarrow P=5$ là số nguyên tố.

Với $n = 3 \Rightarrow P=11$ là số nguyên tố.

Với $n \geq 4$ thì $(n+3)>6$ và $(n^2+2)>17$

$(n+3)$ và (n^2+2) thì luôn tồn tại một số số chẵn nên khi đó P là hợp số.

Vậy P là số nguyên tố thì $n\in\{1;2;3\}$

2. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x-1)(6-x)}=1$ ***(*)***

Điều kiện xác định: $1\leq x\leq 6$

Đặt

$$t=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$$
$$\Rightarrow t^2=x-1+2\sqrt{(x-1)(6-x)}+6-x$$
$$\Rightarrow t^2=5+2\sqrt{(x-1)(6-x)}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(6-x)}=\frac{t^2-5}{2}$$

Thay vào (*) ta được

$$t-\frac{t^2-5}{2}=1\Rightarrow 2t-t^2+5=2$$

$$\Rightarrow t^2-2t-3=0\Rightarrow\begin{cases}t=-1\\t=3\end{cases}$$

Với t=3

$$\Rightarrow\sqrt{(x-1)(6-x)}=\frac{3^2-5}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x-1)(6-x)}=2$$

$$\Rightarrow(x-1)(6-x)=4$$

$\Rightarrow x=2$ hoặc $x=5$

Câu 2. (5 *điểm*)

1. Cho ba số thực khác không a,b,c thỏa mãn điều kiện:

$a+b+c\neq 0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=(a^{2021}+b^{2021}+c^{2021})(\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}})$$

2. Tìm tất cả các bộ số nguyên $(x;y;z)$ thỏa mãn $(x+y)(x-y)=8^z+10$

Lời giải

1. Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b).\frac{c(a+b+c)+ab}{abc(a+b+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(\mathrm{b+c})(\mathrm{c+a})=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=0\\\mathrm{b+c}=0\\\mathrm{c+a}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\b=-c\\c=-a\end{array}\right.$$

Khi đó ta có $A=(a^{2021}+b^{2021}+c^{2021})\left(\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}\right)$

$$A=(a^{2021}+(-a)^{2021}+(-a)^{2021})(\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{(-a)^{2021}}+\frac{1}{(-a)^{2021}})$$

$$=(-a)^{2021}.\frac{1}{(-a)^{2021}}$$

$$=1$$

2.

-Nếu $z<0\Rightarrow 8^z+10$ không là số nguyên, $(x+y)(x-y)\in z$ $\Rightarrow$ (*) không thể xảy ra.

- Nếu $z=0 \Rightarrow (x+y)(x-y)=11$.

Trường hợp 1. $\begin{cases} x+y=11 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$

Trường hợp 2. $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-5 \end{cases}$

Trường hợp 3. $\begin{cases} x+y=-11 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=-1 \end{cases}$

Trường hợp 4. $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=11 \end{cases}$

- Nếu $z \geq 1 \Rightarrow 8^z+10$ là số chẵn và chia 4 dư 2 $\Rightarrow (x+y)(x-y)$ là số chẵn.

Mà $(x+y)(x-y)=2x$ là số chẵn $\Rightarrow (x+y)$ và $(x-y)$ là số chẵn.

$\Rightarrow (x+y)(x-y)$ chia hết cho 4, mà 8^z+10 không chia hết cho 4. Nên $z \geq 1$ không thể xảy ra.

Vậy bộ số nguyên (x,y,z) là $(6,5,0);(6,-5,0);(-12,-1,0);\ (-12,11,0)$

Câu 3. (2 *điểm*)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=\frac{a}{2a^2+b^2+3}+\frac{b}{2b^2+c^2+3}+\frac{c}{2c^2+a^2+3}$$

Lời giải

$$A=\frac{a}{2a^2+b^2+3}+\frac{b}{2b^2+c^2+3}+\frac{c}{2c^2+a^2+3}$$

Ta có: $2a^2+b^2+3=a^2+b^2+a^2+1+2 \geq 2ab+2a+2abc$

$$\Rightarrow \frac{a}{2a^2+b^2+3} \leq \frac{a}{2ab+2a+2abc}=\frac{1}{2(b+1+bc)}$$

Tương tự

$$\frac{b}{2b^2+c^2+3} \leq \frac{1}{2(c+1+ac)}$$

$$\frac{c}{2c^2+a^2+3} \leq \frac{1}{2(a+1+ab)}$$

$$A \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ac}+\frac{1}{1+a+ab}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+b+bc}+\frac{b}{b+bc+abc}+\frac{bc}{bc+abc+ab.bc}\right]$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+b+bc}+\frac{b}{b+bc+1}+\frac{bc}{bc+1+b}\right]=\frac{1}{2}$$

Dấu " =" xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Câu 4. (7 *điểm*)

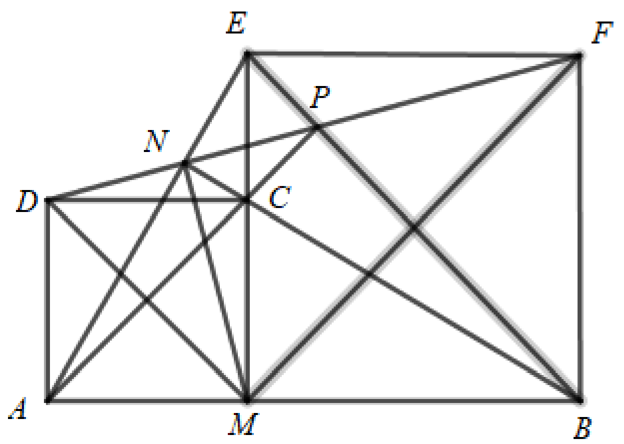
Cho đoạn thẳng $AB = 8cm$ và một điểm M nằm bất kỳ trên đoạn thẳng AB, một nửa mặt phẳng bờ AB, dựng hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$. Gọi giao điểm của đường thẳng AE và BC là điểm N, giao điểm của đường thẳng AC và BE là P.

a) Chứng minh bốn điểm A, N, P, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $DN.FN = MN^2$ và 3 điểm N, P, F thẳng hàng.

c) Tìm vị trí các điểm M trên đoạn thẳng AB để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, N, P, B cùng thuộc một đường tròn.

Hình vuông $AMCD$ có đường chéo AC, suy ra $\widehat{CAM} = 45^o$ hay $\widehat{PAB} = 45^o$.

Hình vuông $BMEF$ có đường chéo BE, suy ra $\widehat{EBM} = 45^o$ hay $\widehat{PBA} = 45^o$.

Suy ra tam giác PAB vuông cân ở P, suy ra $AP \perp BE$.

Xét tam giác EAB có AP, EM là các đường cao và cắt nhau tại C,

suy ra C là trực tâm tam giác EAB, suy ra $BC \perp AE$ hay $BN \perp AE$.

Tứ giác $ANPB$ có $\widehat{ANB} = \widehat{APB} = 90^o$ nên là tứ giác nội tiếp

Suy ra minh bốn điểm A, N, P, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $DN.FN = MN^2$ và 3 điểm N, P, F thẳng hàng.

Xét tứ giác $ADNC$, có $\widehat{ADC} = \widehat{ANC} = 90^o$ nên nội tiếp, suy ra $\widehat{DNA} = \widehat{DCA} = 45^o$ (1)

Tương tự $\widehat{ENF} = \widehat{EBF} = 45^o$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{DNA} = \widehat{ENF} = 45^o$. Vì E, N, A thẳng hàng nên D, N, F.

Suy ra $\widehat{MNF} = \widehat{MEF} = 90^o$ hay $MN \perp DF$.

Xét tam giác DMF có $\widehat{DMF} = \widehat{DMC} + \widehat{EMF} = 90^o$, từ đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $DN.FN = MN^2$.

Ta có tứ giác $ENCP$ nội tiếp vì $\widehat{ENC}+\widehat{EPC}=180^{o}$, suy ra $\widehat{CEN}=\widehat{NPC}$ hay $\widehat{APD}=\widehat{NEM}$.

Mặt khác tứ giác $MNEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MFN}=\widehat{NEM}$, suy ra $\widehat{APD}=\widehat{MFN}$ hay $\widehat{APD}=\widehat{DFM}$ mà $AP//MF$, suy ra D,P,F thẳng hàng, lại có D,P,N.

Do đó bốn điểm D,N,P,F thẳng hàng. (đpcm).

Cách 2

Xét tứ giác $ADNC$, có $\widehat{ADC}=\widehat{ANC}=90^{o}$ nên nội tiếp, suy ra $\widehat{DNA}=\widehat{DCA}=45^{o}$ (1)

Tương tự $\widehat{ENF}=\widehat{EBF}=45^{o}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{DNA}=\widehat{ENF}=45^{o}$. Vì E,N,A thẳng hàng nên D,N,F.

Suy ra $\widehat{MNF}=\widehat{MEF}=90^{o}$ hay $MN\perp DF$.

Xét tam giác DMF có $\widehat{DMF}=\widehat{DMC}+\widehat{EMF}=90^{o}$, từ đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $DN.FN=MN^{2}$.

Ta có tứ giác $ENCP$ nội tiếp vì $\widehat{ENC}+\widehat{EPC}=180^{o}$, suy ra $\widehat{CEN}=\widehat{NPC}$ hay $\widehat{APD}=\widehat{NEM}$

.

Mặt khác tứ giác $MNEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MFN}=\widehat{NEM}$, suy ra $\widehat{APD}=\widehat{MFN}$ hay $\widehat{APD}=\widehat{DFM}$ mà $AP//MF$, suy ra D,P,F thẳng hàng, lại có D,P,N.

Do đó bốn điểm D,N,P,F thẳng hàng. (đpcm).

c) Tìm vị trí các điểm M trên đoạn thẳng AB để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị lớn nhất.

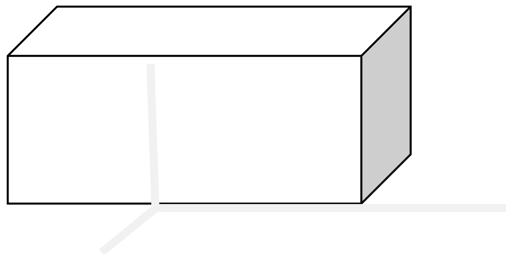
Ta có $\dfrac{1}{MN^{2}}=\dfrac{1}{MD^{2}}+\dfrac{1}{MF^{2}}=\dfrac{1}{2MA^{2}}+\dfrac{1}{2MB^{2}}\ge\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{MA}+\dfrac{1}{MB}\right)^{2}\ge\dfrac{4}{(MA+MB)^{2}}=\dfrac{4}{AB^{2}}=\dfrac{1}{16}$.

Suy ra $MN^{2}\le 16\Leftrightarrow MN\le 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là trung điểm AB.

Câu 5. (1 *điểm*)

Một hình hộp chữ nhật có các kích thước là các số nguyên dương tính theo đơn vị cm, có thể tích $a\,(cm^{3})$.

Biết khi đặt hình hộp chữ nhật đó lên mặt bàn thì tổng diện tích của 5 mặt nhìn thấy được là $a\,(cm^{2})$ (minh họa bằng hình vẽ bên). Tìm giá trị nhỏ nhất của a.



Lời giải

Gọi các kích thước của hình hộp chữ nhật đó là x,y,z

Từ giả thiết, ta có $a=xyz=2z(x+y)+xy\Leftrightarrow xy(z-1)=2z(x+y)\Rightarrow z\ge 2$.

Ta có $xy(z-1)=2z(x+y)\ge 4z\sqrt{xy}.\Rightarrow\sqrt{xy}\ge\dfrac{4z}{z-1}\Leftrightarrow xyz\ge\dfrac{16z^{3}}{(z-1)^{2}}$.

Xét hiệu $xyz \ge \frac{16z^3}{(z-1)^2} - 108 = \frac{4(z-3)^2(4z-3)}{(z-1)^2} \ge 0, z \ge 2.$

Suy ra $xyz \ge \frac{16z^3}{(z-1)^2} \ge 108.$ Dấu "=" xảy ra tại $x = 3; y = z = 6.$

Vậy $\min a = 108$

ꕥHẾTꕥ

UBND HUYỆN GIA LÂM

ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2020-2021.

MÔN: TOÁN

Câu 1. (**2.0 điểm**). Cho đa thức $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng khi chia đa thức $f\left(x\right)$ cho đa thức $x-2$ thì được dư là 5, còn chia đa thức $f\left(x\right)$ cho đa thức $x+1$ thì được dư là – 4. Tính giá trị biểu thức $\left(a^{2019}+b^{2019}\right)\left(b^{2020}+c^{2020}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right)$.

Câu 2. (**2.0 điểm**). Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$.

b) $x^3+\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^3}+\dfrac{3x^3}{x-1}=2$.

Câu 3. (**2.0 điểm**). Cho $f\left(n\right)=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Tính $f\left(n+1\right)-f\left(n-1\right)$.

Câu 4. (**2.0 điểm**). Tìm số tự nhiên x, biết

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}}\right).\left(1+2+\cdots+x\right)=1612.$$

Câu 5. (**2.0 điểm**). Cho các số p và p^2+2 là các số nguyên tố. Chứng minh rằng p^3+2 cũng là số nguyên tố.

Câu 6. (**2.0 điểm**) Cho P là một điểm nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ sao cho $PA=3$cm, $PD=4cm,PC=5cm$. Tính độ dài đoạn thẳng PB.

Câu 7. (**2.0 điểm**) Tại khu điều trị bệnh nhân mắc COVID – 19 của một bệnh viện chỉ có bác sĩ và bệnh nhân. Biết rằng nhiệt độ trung bình của các bác sĩ khác với nhiệt độ trung bình của các bệnh nhân, nhưng trung bình của hai số này bằng nhiệt độ trung bình của tất cả các bệnh nhân và các bác sĩ trong khu điều trị. Hỏi bác sĩ nhiều hơn hay số bệnh nhân nhiều hơn.

Câu 8. ((**2.0 điểm**) Cho $\tan x=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$, trong đó $a>b>0$ và $0^\circ<x<90^\circ$.

Hãy biểu diễn $\sin x$ theo $a;b$.

Câu 9. (**2.0 điểm**) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}$

Câu 10. (**2.0 điểm**) Cho S là tập hợp gồm 3 số tự nhiên có tính chất: Tổng của hai phần tử tùy ý của S là một số chính phương. (Ví dụ $S=\{5;20;44\}$ hoặc $S=\{10;5;90\}$ là các tập hợp thỏa mãn điều kiện trên). Chứng minh rằng tập hợp S có không quá một phần tử là số lẻ.

☙HẾT❧

ĐÁP ÁN ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

UBND HUYỆN GIA LÂM

NĂM HỌC 2020-2021.

MÔN: TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (**2.0 điểm**). Cho đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x-2$ thì được dư là 5, còn chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x+1$ thì được dư là – 4. Tính giá trị biểu thức $\left(a^{2019}+b^{2019}\right)\left(b^{2020}+c^{2020}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right)$.

Lời giải

Gọi thương trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x-2$ và $x+1$ lần lượt là $P(x)$ và $Q(x)$

Theo đề ra ta có $f(x)=(x-2)P(x)+5$ $\quad(1)$

$f(x)=(x+1)Q(x)-4$ $\quad(2)$

do với mọi x nên:

- Thay $x=2$ vào (1) ta có: $8+4a-2b+c=5$ $\quad(3)$

- Thay $x=-1$ vào (2) ta có: $-1+a-b+c=-4$ $\quad(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $4a+2b+c=a-b+c(=-3)\Leftrightarrow 3a=-3b\Leftrightarrow a=-b$

$\Rightarrow a^{2019}=-b^{2019}\Leftrightarrow a^{2019}+b^{2019}=0\Rightarrow\left(a^{2019}+b^{2019}\right)\left(b^{2020}+c^{2020}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right)=0$.

Câu 2. (**2.0 điểm**). Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$.

b) $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^3}{x-1}=2$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\ge 1$

Ta có: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{x-1}-1$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\sqrt{x-1}-1$

$\Leftrightarrow\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\sqrt{x-1}-1$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}-1\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 2$ (TMĐK)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{x\in\mathbb{R} / x\ge 2\}$.

b) ĐK: $x\ne 1$

Ta có: $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}=2$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{x}{x-1}\right)^3-3x.\frac{x}{x-1}.\left(x+\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x^2}{x-1}=2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3-3.\frac{x^2}{x-1}.\frac{x^2}{x-1}+\frac{3x^2}{x-1}=2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3-3.\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{3x^2}{x-1}-1=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}-1\right)^3=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}-1=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}=2 \Leftrightarrow x^2=2x-2$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+1=0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\varnothing$.

Câu 3. **(2.0 điểm)**. Cho $f(n)=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Tính $f(n+1)-f(n-1)$.

Lời giải

$f(n+1)-f(n-1)$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-1\right]+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-1\right]$$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}=f(n)$$

Vậy $f(n+1)-f(n-1)=f(n)$.

Câu 4. (**2.0 điểm**). Tìm số tự nhiên x, biết

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}}\right).(1+2+\cdots+x)=1612.$$

Lời giải

Ta thấy $1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n}{n^2(n+1)^2}$

$$=\frac{\left(n^2+n+1\right)^2}{n^2(n+1)^2}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Áp dụng với $n=2,3,4...,14$ ta có:

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+1+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}=13+\frac{1}{2}-\frac{1}{15}=13\frac{13}{30}$$

Khi đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow 13\frac{13}{30}.\frac{x(x+1)}{2}=1612\Leftrightarrow\frac{403x(x+1)}{60}=1612$

$\Leftrightarrow x(x+1)=240\Leftrightarrow x^2+2-240=0\Leftrightarrow(x-15)(x+16)=0$

$\Leftrightarrow x-15=0\ (\text{do } x+16\geq 16>0)\Leftrightarrow x=15$

Vậy $x=15$.

Câu 5. (**2.0 điểm**). Cho các số p và p^2+2 là các số nguyên tố. Chứng minh rằng p^3+2 cũng là số nguyên tố.

Lời giải

- Xét $p=2$ thì $p^2+2=4+2=6$ (loại). Vì 6 không là số nguyên tố.

- Xét $p=3$ thì $p^2+2=9+2=11$ (nhận). Vì 11 là số nguyên tố.

Suy ra, $p^3+2=3^3+2=29$ (nhận). Vì 29 là số nguyên tố.

- Xét $p>3$.

Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3 (1).

Mà $p\in\mathbb{Z}$ suy ra p^2 là số chính phương (2).

Từ (1), (2) suy ra p^2 chia cho 3 dư 1.

$\Rightarrow p^2+2$ chia hết cho 3. (3)

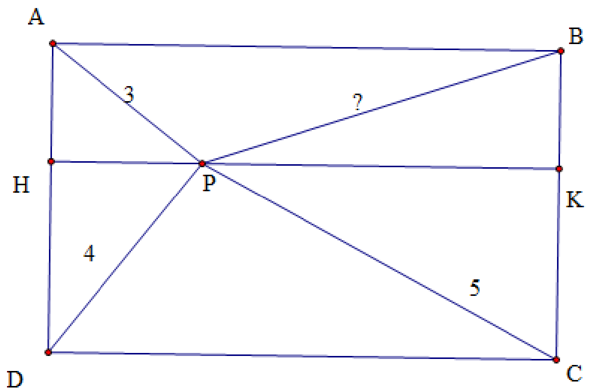
Mặt khác, $p>3\Rightarrow p^2>9\Rightarrow p^2+2>11$ (4)

Từ (3), (4) suy ra p^2+2 là hợp số (trái với đề bài).

Vậy $p=3$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6. (**2.0 điểm**) Cho P là một điểm nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ sao cho $PA=3\text{cm}, PD=4\text{cm}, PC=5\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng PB.

Lời giải



Qua P kẻ đường thẳng $HK//CD, H\in AD, K\in BC \Rightarrow HK\perp AD, HK\perp BC$

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông ta có:

$$PA^2-PD^2=\left(PH^2+HA^2\right)-\left(PH^2+HD^2\right)=HA^2-HD^2$$

$$PB^2-PC^2=\left(PK^2+KB^2\right)-\left(PK^2+KC^2\right)=KB^2-KC^2$$

Ta chứng minh được $HA=KB, HD=KC$

$\Rightarrow PA^2-PD^2=PB^2-PC^2 \Rightarrow PB^2=PA^2-PD^2+PC^2 \Rightarrow PB^2=3^2-4^2+5^2=18$

$\Rightarrow PB=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ cm.

Câu 7. (**2.0 điểm**) Tại khu điều trị bệnh nhân mắc COVID – 19 của một bệnh viện chỉ có bác sĩ và bệnh nhân. Biết rằng nhiệt độ trung bình của các bác sĩ khác với nhiệt độ trung bình của các bệnh nhân, nhưng trung bình của hai số này bằng nhiệt độ trung bình của tất cả các bệnh nhân và các bác sĩ trong khu điều trị. Hỏi bác sĩ nhiều hơn hay số bệnh nhân nhiều hơn.

Lời giải

Gọi số bác sỹ là a (người) $\left(a\in N^*\right)$

Nhiệt độ trung bình của các bác sỹ là x (độ)

Số bệnh nhân là y (người) $\left(y\in N^*\right)$

Nhiệt độ trung bình của bệnh nhân là y (độ) $\left(y\neq x\right)$

Theo đề bài ta có:

$$\frac{x+y}{2}=\frac{ax+by}{a+b}\Leftrightarrow (x+y)(a+b)=2(ax+by)\Leftrightarrow ax+ay+bx+by=2ax+2by$$

$$\Leftrightarrow ax+by-bx-ay=0\Leftrightarrow (a-b)(x-y)=0$$

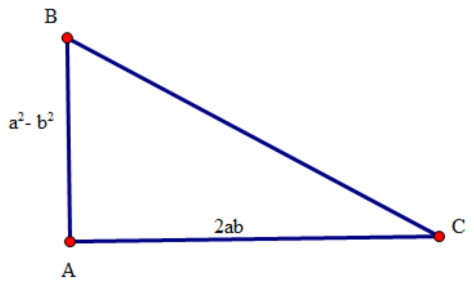
Mà x khác y nên $a-b=0\Leftrightarrow a=b$

Vậy số bác sỹ và số bệnh nhân bằng nhau.

Câu 8. (**2.0 điểm**) Cho $\tan x=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$, trong đó $a>b>0$ và $0^0<x<90^0$.

Hãy biểu diễn $\sin x$ theo $a;b$.

Lời giải



Vẽ tam giác ABC vuông tại A có $AC=2ab, AB=a^2-b^2$

Khi đó số đo góc B chính là số đo x

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác ABC ta có: $BC^2=AB^2+AC^2$

$$\Leftrightarrow BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}\Leftrightarrow BC=a^2+b^2$$

Khi đó ta có $\sin x=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

Câu 9. (**2.0 điểm**) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}$

Lời giải

Ta có $4\left(2a^2+ab+2b^2\right)=5\left(a^2+2ab+b^2\right)+3\left(a^2-2ab+b^2\right)$

$$=5(a+b)^2+3(a-b)^2\ge 5(a+b)^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2a^2+ab+b^2}\ge\sqrt{5}(a+b)\Leftrightarrow\sqrt{2a^2+ab+b^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)(1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

Tương tự ta có: $\Rightarrow 2\sqrt{2b^2+bc+c^2}\ge\sqrt{5}(b+c)\Leftrightarrow\sqrt{2b^2+bc+c^2}\ge\dfrac{\sqrt{5}}{2}(b+c)(2)$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2c^2+ac+a^2}\ge\sqrt{5}(c+a)\Leftrightarrow\sqrt{2c^2+ac+a^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(c+a)(3)$$

Cộng vế với vế của (1); (2) và (3) ta có:

$$P=\sqrt{2a^2+ab+b^2}+\sqrt{2b^2+bc+c^2}+\sqrt{2c^2+ca+a^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}.2\left(a+b+c\right)=2020\sqrt{5}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{2020}{3}$.

Vậy $\min P=2020\sqrt{5}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2020}{3}$.

Câu 10. (**2.0 điểm**) Cho S là tập hợp gồm 3 số tự nhiên có tính chất: Tổng của hai phần tử tùy ý của S là một số chính phương. (Ví dụ $S=\{5;20;44\}$ hoặc $S=\{10;5;90\}$ là các tập hợp thỏa mãn điều kiện trên). Chứng minh rằng tập hợp S có không quá một phần tử là số lẻ.

Lời giải

Ta đã biết số chính phương hoặc chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1.

Xét tập $S=\{a,b,c\}$ thỏa yêu cầu.

- Nếu a,b,c là các số lẻ thì $(a+b)\vdots 4$, $(b+c)\vdots 4$ và $(a+c)\vdots 4$.

  Khi đó $a+b+b+c-(a+c)=2b\vdots 4$.

  Suy ra b là số chẵn (mâu thuẫn với b lẻ).

- Nếu a,b là các số lẻ và c chẵn thì $(a+b)\vdots 4$, $(b+c)-(a+c)\vdots 4$.

  Khi đó $a+b+(b+c)-(a+c)=2b\vdots 4$.

  Suy ra b là số chẵn (mâu thuẫn với b lẻ).

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN CHƯ SÊ
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút
Ngày thi: 12/11/2020

Câu 1. (*5.0 điểm*)

a) Tính giá trị biểu thức $\left(a^3+15a-25\right)^{2020}$ với $a=\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}}$.

b) Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2-2x(2y+1)+5y^2+2y=0$.

Câu 2. (*5.0 điểm*)

a) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn dưới dạng $p+q\sqrt{r}$ với p,q,r là các số hữu tỉ và r dương.

b) Xét các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\leqslant 3(a+b+c)$$

Câu 3. (*3.0 điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC đường cao $CK;H$ là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ;S,S_1,S_2$ theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB,ABC và ABH

a) Chứng minh: $HK.CK=AK.BK$

b) Chứng minh: $S=\sqrt{S_1S_2}$.

Câu 4. (*4.0 điểm*)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trên cạnh BC lấy một điểm M bất kỳ (M không trùng với B và C). Từ M kẻ ME vuông góc AB tại E,MF vuông góc AC tại F.

a) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng qua M và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định D.

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để diện tích tam giác EDF có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (*3.0 điểm*)

Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN CHƯ SÊ
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút
Ngày thi: 12/11/2020

Câu 1. (*5.0 điểm*)

a) Tính giá trị biểu thức $\left(a^3+15a-25\right)^{2020}$ với $a=\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}}$.

b) Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2-2x(2y+1)+5y^2+2y=0$.

Lời giải

a) Ta có: $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$.

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có:

$$a^3=(\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}})^3$$
$$=13-7\sqrt{6}+13+7\sqrt{6}+3\sqrt[3]{(13-7\sqrt{6})(13+7\sqrt{6})}\cdot(\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}})$$
$$=26+3\cdot\sqrt[3]{13^2-(7\sqrt{6})^2}a$$
$$=26+3.(-5)a$$
$$=26-15a$$
$$\Leftrightarrow a^3=26-15a$$
$$\Leftrightarrow a^3+15a-25=1$$

Khi đó ta có: $\left(a^3+15a-25\right)^{2020}=1^{2020}=1$.

b) Ta có:

$$x^2-2x(2y+1)+5y^2+2y=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4xy-2x+5y^2+2y=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4xy+4y^2-2x+4y+1+y^2-2y+1=2$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)^2-2(x-2y)+1+(y-1)^2=2$$

Do x,y là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}x-2y-1=1\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}x-2y-1=1\\y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$

TH3: $\begin{cases}x-2y-1=-1\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$.

TH4: $\begin{cases}x-2y-1=-1\\y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là $(6;2),(2;0),(4;2),(0;0)$

Câu 2. (*5.0 điểm*)

a) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn dưới dạng $p+q\sqrt{r}$ với p,q,r là các số hữu tỉ và r dương.

b) Xét các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\leqslant 3(a+b+c)$$

Lời giải

Giả sử $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$.

$\Rightarrow 2=(p+q\sqrt{r})^3$

$\Leftrightarrow 2=p^3+3p^2q\sqrt{r}+3pq^2r+q^3\sqrt{r^3}$

$\Leftrightarrow 2=p^3+3pq^2r+\sqrt{r}\left(3p^2q+q^3r\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{r}=\dfrac{2-p^3-3pq^2r}{3p^2q+q^3r}$

+ Nếu r là số chính phương hoặc là số hữu tỉ có dạng $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$

$\Rightarrow p+q\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$ với mọi số $p,q\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt[3]{2}$ là số hữu tỉ.

Điều này vô lý vì $\sqrt[3]{2}$ là số vô tỉ.

+ Nếu r không là số chính phương hoặc không là số hữu tỉ có dạng $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$.

$\Rightarrow\sqrt{r}$ là số vô tỉ $\Rightarrow$ vô lý vì $\dfrac{2-p^3-3pq^2r}{3p^2q+q^3r}$ là số hữu tỉ với mọi số $p,q,r\in\mathbb{Q}$.

Vậy $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn dưới dạng $p+q\sqrt{r}$ với p,q,r là các số hữu tỉ và r dương.

b) Với ba số dương a,b,c xét biểu thức:

$$(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1})^2=\left(\sqrt{a}\sqrt{8b+\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\sqrt{8c+\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\sqrt{8a+\frac{1}{c}}\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho hai bộ ba số $(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c})$ và $\left(\sqrt{8b+\frac{1}{a}};\sqrt{8c+\frac{1}{b}};\sqrt{8a+\frac{1}{c}}\right)$ ta có:

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{8b+\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\sqrt{8c+\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\sqrt{8a+\frac{1}{c}}\right)^2\le(a+b+c)\left(8b+\frac{1}{a}+8c+\frac{1}{b}+8a+\frac{1}{c}\right)$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1})^2 \le (a+b+c)\left(8b+\frac{1}{a}+8c+\frac{1}{b}+8a+\frac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\right)^2 \le (a+b+c)\left(8a+8b+8c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1})^2 \le (a+b+c)\cdot 9(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\right)^2 \le 9(a+b+c)^2$.

$\Rightarrow \sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1} \le 3(a+b+c)$. (đpcm)

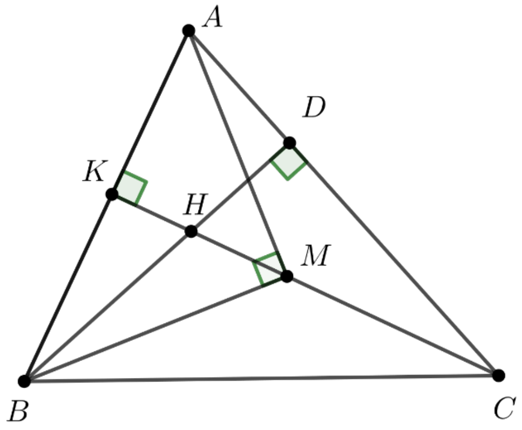
Câu 3. (*3.0 điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC đường cao $CK; H$ là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ; S, S_1, S_2$ theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH

a) Chứng minh: $HK.CK = AK.BK$

b) Chứng minh: $S=\sqrt{S_1S_2}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle HKB$ và $\triangle AKC$ co:

$\widehat{KBH}=\widehat{KCA}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

$\widehat{BKH}=\widehat{CKA}\left(=90^\circ\right)$

$\Rightarrow \triangle HKB \backsim \triangle AKC (g\cdot g)$

$\Rightarrow \frac{HK}{AK}=\frac{BK}{CK} \Rightarrow HK\cdot CK = AK\cdot BK$ (1)

$\Rightarrow S_1\cdot S_2=\frac{AB^2\cdot(KH\cdot CK)}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{S_1S_2}=\frac{AB\cdot\sqrt{KH.CK}}{2}$.

b) Lại có: $\triangle AMB$ vuông ở M có đường cao MK

$\Rightarrow AK\cdot BK = MK^2$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CH.CK = MK^2$.

Suy ra $\sqrt{KH.CK} = MK$ (3)

Thay (3) vào (*) ta được:

$\sqrt{S_1S_2}=\frac{AB\cdot MK}{2}=S_{\Delta ANM}=S.$

Câu 4. (*4.0 điểm*)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trên cạnh BC lấy một điểm M bất kỳ (M không trùng với B và C). Từ M kẻ ME vuông góc AB tại E, MF vuông góc AC tại F.

a) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng qua M và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm có định D.

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để diện tích tam giác EDF có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

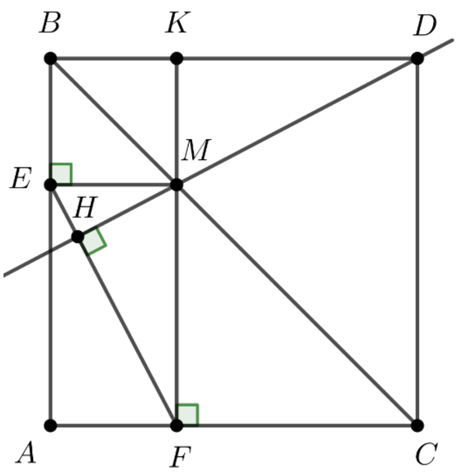
Kẻ $MH \perp EF$.

Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

MD cắt EF tại H. MF cắt AD tại K.

Xét ΔBME vuông tại E có $\widehat{EBM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EMB} = 45^\circ$.

$\Rightarrow \Delta BME$ vuông cân tại $E \Rightarrow BE = ME$



Tứ giác $BEMK$ có $\widehat{B} = \widehat{E} = \widehat{K}$ và $BE = ME \Rightarrow BEMK$ là hình vuông.

$\Rightarrow BE = ME = MK = BK$.

$\Rightarrow AE = KD$.

Xét ΔAME và ΔDMK có:

$\widehat{AEM} = \widehat{MKD}\left(= 90^\circ\right)$

$AE = KD\,(\text{cmt})$

$ME = MK\,(\text{cmt})$

$\Rightarrow \Delta AME = \Delta DMK$ (c-g-c)

$\widehat{EAM} = \widehat{KDM}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{EAM} = \widehat{MFE} \Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{KDM}$.

Lại có $\widehat{FDC} = \widehat{MFD}$ (hai góc so le trong) nên ta có:

$$\widehat{KDM} + \widehat{MDF} + \widehat{FDC} = \widehat{MFE} + \widehat{MDF} + \widehat{MFD} = \widehat{EFD} + \widehat{MDF}$$

$\Rightarrow \widehat{EFD} + \widehat{MDF} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta FDH$ vuông tại H hay $DH \perp EF$.

Mà $MH \perp EF \Rightarrow M, D, H$ thẳng hàng.

Vậy MH luôn đi qua một điểm D cố định.

Đặt $AB = a, AE = x \Rightarrow BE = a - x$ (Với $a > 0, 0 < x < a$)

Ta có: $S_{\Delta DFE} = S_{\Delta ABCD} - S_{\Delta BDE} - S_{\Delta DFC} - S_{\Delta AFE}$.

$= a^2 - \frac{1}{2}a(a-x) - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x(a-x)$

$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow S_{\Delta DFE}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2\right)$ nhỏ nhất.

Ta có: $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right] \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}a^2$

Vậy $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}a^2$.

Khi đó M là trung điểm canh BC.

Câu 5. (*3.0 điểm*)

Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

Lời giải

Ta xếp các đoạn thẳng có độ dài tăng dần $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_7$. Nếu tồn tại ba đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ thỏa mãn $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$ thì ba đoạn thẳng này có thể lập thành một tam giác.

Giả sử ngược lại:

$$a_1 + a_2 \leq a_3; a_2 + a_3 \leq a_4; a_3 + a_4 \leq a_5; a_4 + a_5 \leq a_6; a_5 + a_6 \leq a_7$$

Khi đó theo giả thiết:

$$a_1 > 10; a_2 > 10 \Rightarrow a_3 > 20 \Rightarrow a_4 > 30 \Rightarrow a_5 > 50 \Rightarrow a_6 > 80 \Rightarrow a_7 > 130.$$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với giả thiết cho dộ dài mỗi đoạn thẳng nhỏ hơn 100.

Vậy tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ mà $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$. Do đó tồn tại 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành tam giác.

HẾT

PHÒNG GD VÀ ĐT HUYỆN QUỲ HỢP
KỲ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN VÒNG 1
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN 9

Câu 1. ***(4,0 điểm)*** **Rút gọn biểu thức:**

1. $A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

2. Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{3\sqrt{x}-4}-\dfrac{4+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{x+13\sqrt{x}-20}{3x-10\sqrt{x}+8}$

   a. Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P

   b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. **Giải các phương trình sau :**

a. $\sqrt{x-5}+\sqrt{y-2019}+\sqrt{z+2021}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$

b. $\sqrt{3x^2-12x+21}+\sqrt{5x^2-20x+24}=-2x^2+8x-3$

Câu 3. (6,0 điểm)

a. Xác định đa thức bậc bốn $f(x)$ biết: $f(0)=1$ và $f(x)-f(x-1)=x(x+1)(2x+1)$ với $x\in\mathbb{R}$.

b. Tìm x,y nguyên dương $(x\neq y)$ thỏa mãn $x^3+7y=y^3+7x$

c. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$\dfrac{1}{a^2(b+c)}+\dfrac{1}{b^2(c+a)}+\dfrac{1}{c^2(a+b)}\geq\dfrac{3}{2}$

Câu 4.

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH vuông góc với BC, AD là đường phân giác. Gọi HM, HN là đường phân giác của tam giác HAB, HAC.

a. Chứng minh $DM//AC$ và $AD=MB$.

b. Gọi AP,AQ là đường phân giác của tam giác AHB, AHC. Chứng minh rằng: $PQ^2=2PB.CQ$.

2. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Lấy điểm M nằm giữa B và C, vẽ MD vuông góc với AB tại D, ME vuông góc với AC tại E. Tìm vị trí của điểm M trên BC để diện tích MDE lớn nhất.

Câu 5. (1,0 điểm)

Bảy người câu được 100 con cá. Biết rằng không có hai người nào câu được số cá như nhau. Chứng minh rằng có ba người câu được tổng cộng không ít hơn 50 con cá.

ꟹHẾTꟹ

ĐÁP ÁN
KỲ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN QUỲ HỢP VÒNG 1
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN 9

Câu 1. Rút gọn biểu thức

1. $A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

2. Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{3\sqrt{x}-4}-\dfrac{4+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{x+33\sqrt{x}-20}{3x-30\sqrt{x}+8}$

a. Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P

b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1. Ta có: $A>0 \Rightarrow A^2=8+2\sqrt{\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow A^2=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=8+2.\left|\sqrt{5}-1\right|=6+2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{5}+1 \text{ (vì } A>0\text{)}$$

2. Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{3\sqrt{x}-4}-\dfrac{4+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{x+13\sqrt{x}-20}{3x-10\sqrt{x}+8}$

a. Để biểu thức P có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 3\sqrt{x}-4\ne 0 \\ \sqrt{x}-2\ne 0 \\ 3x-10\sqrt{x}+8\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne \dfrac{16}{9} \\ x\ne 4 \end{cases}$

Vậy $x\ge 0; x\ne \dfrac{16}{9}; x\ne 4$ thì P có nghĩa

Rút gọn:

$$P=\frac{\left(2\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)}-\frac{\left(4+2\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)}+\frac{x+13\sqrt{x}-20}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)}$$

$$P=\frac{2x-8\sqrt{x}+8-6x-4\sqrt{x}+16+x+13\sqrt{x}-20}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)}$$

$$P=\frac{-3x+\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(-3\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}-4\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{2-\sqrt{x}}$$

b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Ta có: $P=\frac{\sqrt{x}+1}{2-\sqrt{x}}=-1+\frac{3}{2-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0; x\ne\frac{16}{9}; x\ne 4$

Để P nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{2-\sqrt{x}}$ nguyên $\Leftrightarrow 3\,\vdots\,2-\sqrt{x}$, vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $2-\sqrt{x}\in U(3)$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{x}\in\{\pm 1;\pm 3\}\Leftrightarrow 2-\sqrt{x}\in\{1;-1;-3\}$ vì $2-\sqrt{x}\le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\in\{1;3;5\}\Leftrightarrow x\in\{1;9;25\}$ thoả mãn

Vậy $x\in\{1;9;25\}$ thì P nguyên.

Câu 2. Giải các phương trình sau :

a. $\sqrt{x-5}+\sqrt{y-2019}+\sqrt{z+2021}=\frac{1}{2}(x+y+z)$

b. $\sqrt{3x^2-12x+21}+\sqrt{5x^2-20x+24}=-2x^2+8x-3$

Lời giải

a. ĐKXĐ: $x\ge 5; y\ge 2019; z\ge -2021$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5}+2\sqrt{y-2019}+2\sqrt{z+2021}=x+y+z$

$\Leftrightarrow x-5-2\sqrt{x-5}+1+y-2019-2\sqrt{y-2019}+1+z+2021-2\sqrt{z+2021}+1=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-2019}-1\right)^2+\left(\sqrt{z+2021}-1\right)^2=0$

Vì $\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2\ge 0;\left(\sqrt{y-2019}-1\right)^2\ge 0;\left(\sqrt{z+2021}-1\right)^2\ge 0$

$\forall x\ge 5; y\ge 2019; z\ge -2021$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-2019}-1\right)^2+\left(\sqrt{z+2021}-1\right)^2\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{x-5}-1=0\\ \sqrt{y-2019}-1=0\\ \sqrt{x+2021}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=2020\\ z=-2020\end{cases}$

Vậy $x=6; y=2020; z=-2020$.

a. $\sqrt{3x^2-12x+21}+\sqrt{5x^2-20x+24}=-2x^2+8x-3$ (2)

Lời giải:

Ta có: $3x^2-12x+21=3(x-2)^2+9>0$ và $5x^2-20x+24=5(x-2)^2+4>0$

Đặt $a=\sqrt{3x^2-12x+21};b=\sqrt{5x^2-20x+24}$ ĐK: $a>0;b>0$

$a^2-b^2=-2x^2+8x-3$

Phương trình (2) có dạng $a+b=a^2-b^2$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b-1)=0$

$\Leftrightarrow a-b-1=0$ vì $a+b>0$

Với $a-b-1=0 \Rightarrow a-b=1$ mà $a^2-b^2=-2x^2+8x-3 \Rightarrow a+b=-2x^2+8x-3$

$\Rightarrow a=-x^2+4x-1$

Ta có phương trình: $\sqrt{3x^2-12x+21}=-x^2+4x-1$

Xét vế trái: $\sqrt{3x^2-12x+21}=\sqrt{3(x-2)^2+9}\ge\sqrt{9}=3$

Và vế phải: $-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3\le 3$

Dấu "=" xảy ra khi $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn)

Vậy phương trình (2) có nghiệm $x=2$

Câu 3. (6,0 điểm)

a. Xác định đa thức bậc bốn $f(x)$ biết: $f(0)=1$ và $f(x)-f(x-1)=x(x+1)(2x+1)$ với $x\in\mathbb{R}$.

b. Tìm x,y nguyên dương $(x\ne y)$ thỏa mãn $x^3+7y=y^3+7x$

c. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2(b+c)}+\dfrac{1}{b^2(c+a)}+\dfrac{1}{c^2(a+b)}\ge\dfrac{3}{2}$

Lời giải

a) Gọi đa thức bậc bốn $f(x)$ có dạng:

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a,\ b,\ c,\ d,\ e\in\mathbb{R};\ a\neq 0)$

Ta có: $f(0)=1\Rightarrow e=1$

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$f(x-1)=a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e$

$f(x)-f(x-1)=ax^4-a(x-1)^4+bx^3-b(x-1)^3+cx^2-c(x-1)^2+dx-d(x-1)$

$f(x)-f(x-1)=4ax^3-3x^2(2a-b)+x(4a-3b+2c)-a+b-c+d$

Mà $f(x)-f(x-1)=x(x+1)(2x+1)=2x^3+3x^2+x$

$$\Rightarrow\begin{cases}4a=2\\2a-b=-1\\4a-3b+2c=1\\-a+b-c+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=2\\c=\dfrac{5}{2}\\d=1\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=\dfrac{1}{2}x^4+2x^3+\dfrac{5}{2}x^2+x+1.$

b) $x^3+7y=y^3+7x$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y)$

$(x-y)(x^2+xy+y^2-7)=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\x^2+xy+y^2-7=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y(L)\\x^2+xy+y^2-7=0\end{array}\right.$$

Do $x,y\in\mathbb{Z}^+$

$x^2+xy+y^2=7\Rightarrow x,y\leq 2$

Nếu $x=2\Rightarrow 2^2+2y+y^2=7\Rightarrow y^2+2y=3\Rightarrow y^2+2y-3=0$

$\Rightarrow y^2-1+2(y-1)=0\Rightarrow(y-1)(y+1)+2(y-1)=0$

$\Rightarrow(y-1)(y+1+2)=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y-1=0\\y+3=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-3(L)\end{array}\right.$$

Tương tự nếu $x=1$ thì $y=2$

Vậy có các cặp nghiệm thỏa mãn $(x,y)=\{(2;1),(1;2)\}$.

c) Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$ $abc=\frac{1}{x.y.z}=1$

Ta có: $\frac{1}{a^2(b+c)}=\frac{x}{y+z}$, $\frac{1}{b^2(c+a)}=\frac{y}{z+x}$, $\frac{1}{c^2(a+b)}=\frac{z}{x+y}$

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$$

$$\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1+\frac{z}{x+y}+1=\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}$$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}-3$$

$$\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}-3=(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3$$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3=\frac{1}{2}\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho cặp số $(x+y),(y+z),(z+x)$:

$$\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}.3.\sqrt[3]{\frac{1}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\frac{1}{2}\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3\geq\frac{1}{2}.9-3=\frac{3}{2}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4.

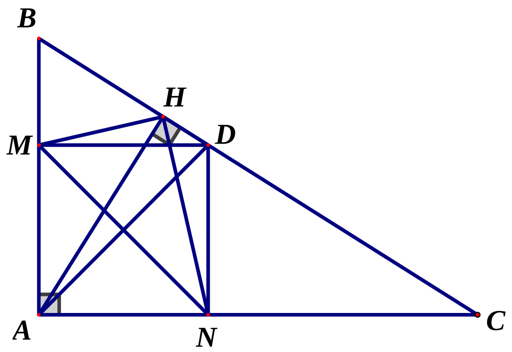
1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH vuông góc với BC, AD là đường phân giác. Gọi HM, HN là đường phân giác của tam giác HAB, HAC.

a. Chứng minh $DM//AC$ và $AD=MB$.

b. Gọi AP,AQ là đường phân giác của tam giác AHB, AHC. Chứng minh rằng: $PQ^2=2PB.CQ$.

2. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Lấy điểm M nằm giữa B và C, vẽ MD vuông góc với AB tại D, ME vuông góc với AC tại E. Tìm vị trí của điểm M trên BC để diện tích MDE lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh $MD \parallel AC$

Áp dụng tính chất tia phân giác AD, HM tương ứng của tam giác $\Delta ABC, \Delta AHB$ ta có

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC},\frac{MB}{MC}=\frac{HB}{HA} \qquad (1)$$

Xét $\Delta ABC, \Delta HBA$ có

$$\begin{cases} \widehat{BAC}=\widehat{BHA}\left(=90^0\right) \\ \widehat{ABH}=\widehat{ABC} \end{cases}$$

Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta HBA(g.g) \Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{MB}{MC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DB}{DC}=\frac{MB}{MC}$. Theo định lí Ta-lét đảo ta có $MD \parallel AC$.

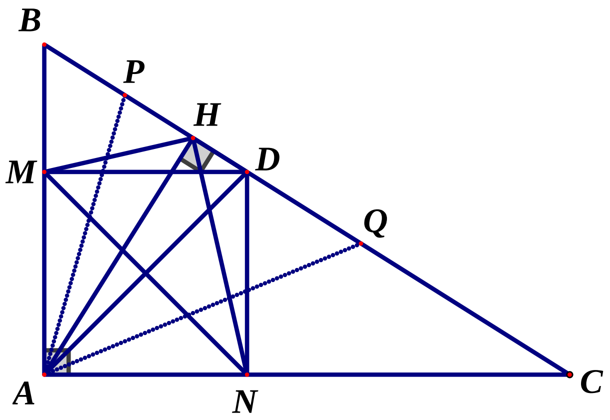
***Chứng minh** $AD = MN$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $DN \parallel AB$

Tứ giác $AMDN$ có $\begin{cases} MD \parallel AC \\ DN \parallel AB \end{cases}$ nên $AMDN$ là hình bình hành.

Lại có AD là phân giác $\widehat{MAN}$ nên $AMDN$ là hình thoi. Hơn nữa, $\widehat{MAN}=90^0$ khi đó $AMDN$ là hình vuông. Vậy $AD = MN$ **(ĐPCM).**

b) Chứng minh $PQ^2 = 2PB.CQ$



Ta có $\widehat{CAP}=\widehat{PAH}+\widehat{HAC}$ và $\widehat{CPA}=\widehat{PAB}+\widehat{PBA}$(góc ngoài)

Mà $\widehat{PAH}=\widehat{PAB},\widehat{HAC}=\widehat{PBA}$ do đó $\widehat{CAP}=\widehat{CPA}\Rightarrow\Delta CAP$ cân ở $C\Rightarrow CA=CP$. Tương tự $BA=BQ$.

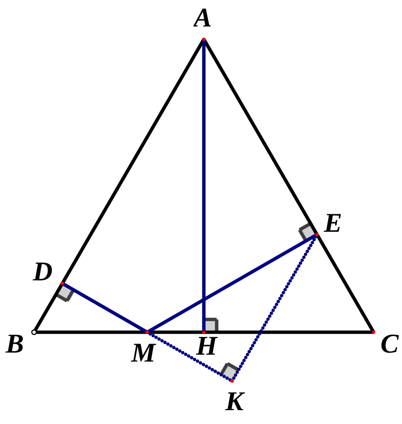
Khi đó $PQ=AB+AC-BC;BP=BC-AC;CQ=BC-AB$

Suy ra

$$\begin{aligned}2BP.CQ&=2\left(BC-AC\right)\left(BC-AB\right)\\&=2BC^2-2BC\left(AB+AC\right)+2AB.AC\\&=BC^2+AB^2+AC^2-2BC\left(AB+AC\right)+2AB.AC\\&=BC^2-2BC\left(AB+AC\right)+\left(AB+AC\right)^2\\&=\left(AB+AC-BC\right)^2\\&=PQ^2.\end{aligned}$$

Vậy $PQ^2=2PB.CQ$.

2)



Đặt $AB=AC=BC=a,AH=h$. Nhận xét a,h là các đại lượng không đổi.

Ta có $S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}=\dfrac{MD.AB}{2}+\dfrac{ME.AC}{2}=\dfrac{a}{2}\left(MD+ME\right)\Rightarrow MD+ME=\dfrac{2S_{ABC}}{a}$

(1)

Hơn nữa $S_{ABC}=\dfrac{AH.BC}{2}=\dfrac{ah}{2}\Rightarrow h=\dfrac{2S_{ABC}}{a}$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $MD+ME=h$

Hạ $EK\perp DM$, ta có $S_{MDE}=\dfrac{1}{2}DM.EK$

Mà $EK=ME.\sin\widehat{EMK}$ và $\widehat{EMK}=\widehat{CMK}+\widehat{CME}=\widehat{DMB}+\widehat{CME}=(90^0-\widehat{B})+(90^0-\widehat{C})=60^0$

Do đó $S_{MDE}=\dfrac{1}{2}DM.ME.\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.DM.ME$

Áp dụng bất đẳng thức $ab\le\dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}\Rightarrow DM.ME\le\dfrac{\left(DM+ME\right)^2}{4}=\dfrac{h^2}{4}$

Khi đó $S_{MDE}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.DM.ME\le\dfrac{\sqrt{3}}{8}.h^2$(không đổi)

Dấu ‘’=’’ xảy ra $\Leftrightarrow MD=ME\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC.

Vậy giá trị lớn nhất của S_{MDE} là $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{8}$(đvdt) khi M là trung điểm của BC.

Câu 5. Bảy người câu được 100 con cá. Biết rằng không có hai người nào câu được số cá như nhau. Chứng minh rằng có ba người câu được tổng cộng không ít hơn 50 con cá.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $a_i\in\mathbb{N}^*, i=1,\ldots,7,$ là số con cá mỗi người câu được.

Giả sử $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_7$.

- Trường hợp 1: $a_4\le 14$.

Khi đó, $a_1+a_2+a_3+a_4\le 14+13+12+11=50$. Suy ra $a_5+a_6+a_7\ge 50$.

- Trường hợp 2: $a_4>14$.

Khi đó, $a_5+a_6+a_7\ge 16+17+18=51$.

Vậy, $a_5+a_6+a_7\ge 50$.

Cách 2:

Ta sắp xếp các người câu cá theo thứ tự để số cá câu được của họ giảm dần. Như thế người thứ nhất câu được nhiều cá nhất và người thứ bảy câu được ít

cá nhất.
Nếu người thứ tư câu được không ít hơn 15 con cá, thì ba người đầu câu được không ít hơn $16+17+18=51$ con cá.
Nếu người thứ tư câu được 14 con cá hoặc ít hơn thì cả bốn người sau câu được không quá $14+13+12+11=50$ con. Như vậy ba người đầu câu được không ít hơn 50 con.
Vậy ba người đầu luôn câu được tổng cộng không dưới 50 con cá.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN LONG BIÊN
KÌ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN VÒNG 1
Năm học: 2020-2021.
Môn: TOÁN

Câu 1. *(6,0 điểm)*. Cho biểu thức $A=\left(\frac{2x^2+4}{x^3-8}-\frac{x}{x^2+2x+4}\right)\cdot\left(2-\frac{8}{x^2}\right)$ với $x\neq 0$ và $x\neq 2$.

1) Chứng minh rằng $A=\frac{2x+4}{x^2}\cdot$
2) Tính giá trị của biểu thức A biết: $|2x-3|-x=-1$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*. Giải các phương trình sau:

1) $\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{-5}{4}\cdot$
2) $\left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-4\right)^2=2\left(x^2-4\right)\left(x^2-x\right)$.

Câu 3. *(3,0 điểm)*.

1) Cho a là tích của 2020 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $(a+1)$ không là số chính phương.

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện: $4x^2+8x=38-6y^2$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$. Kẻ đường cao AH ($H\in BC$), phân giác AM ($M\in BC$). Kẻ ME vuông góc với AB tại E; MF vuông góc với AC tại F.

1) Cho AB =9cm, AC =12cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC và AH.
2) Chứng minh rằng $BE\,.\,BA=BH\,.\,BM$ và HE là tia phân giác của góc AHB.
3) Chứng minh rằng $\frac{BE}{CF}=\frac{HB}{HC}\cdot$

Câu 5. *(1,0 điểm)*.

1) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.
2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2020$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\cdot$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN LONG BIÊN
KÌ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN VÒNG 1
Năm học: 2020-2021.
Môn: TOÁN

Câu 1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2x^2+4}{x^3-8}-\dfrac{x}{x^2+2x+4}\right)\cdot\left(2-\dfrac{8}{x^2}\right)$ với $x\neq 0$ và $x\neq 2$.

1) Chứng minh rằng $A=\dfrac{2x+4}{x^2}\cdot$

2) Tính giá trị của biểu thức A biết: $|2x-3|-x=-1$.

Lời giải

1) Chứng minh rằng $A=\dfrac{2x+4}{x^2}\cdot$

Ta có:

$$A=\left(\frac{2x^2+4}{x^3-8}-\frac{x}{x^2+2x+4}\right)\cdot\left(2-\frac{8}{x^2}\right)$$

$$A=\left[\frac{2x^2+4}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}-\frac{x(x-2)}{\left(x^2+2x+4\right)(x-2)}\right]\cdot\left(\frac{2x^2-8}{x^2}\right)$$

$$A=\left[\frac{2x^2+4-x^2+2x}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}\right]\cdot\left(\frac{2x^2-8}{x^2}\right)$$

$$A=\left[\frac{x^2+2x+4}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}\right]\cdot\left[\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}\right]$$

$$A=\frac{1}{(x-2)}\cdot\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$$

$A=\dfrac{2x+4}{x^2}$ (đpcm)

2) Tính giá trị của biểu thức A biết: $|2x-3|-x=-1$.

Xét phương trình: $|2x-3|-x=-1$. (1)

$+/\,\text{TH1}: 2x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{3}{2}$

Ta có phương trình: $2x-3-x=-1\Leftrightarrow x=2\,(\text{t/m})$

+/ TH2: $2x-3<0\Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}\cdot$

Ta có phương trình: $-(2x-3)-x=-1 \Leftrightarrow -3x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}(\text{t/m})$.

Vậy $S=\left\{2;\frac{4}{3}\right\}$.

Kết hợp với ĐKXĐ ta thấy: $x=\frac{4}{3}$

Thay $x=\frac{4}{3}$ vào biểu thức $A=\frac{2\cdot\frac{4}{3}+4}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{15}{4}\cdot$

Vậy $x=\frac{4}{3}$ thì giá tri của biểu thức $A=\frac{15}{4}\cdot$

Câu 2. *(4,0 điểm)*. Giải các phương trình sau:

1) $\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{-5}{4}\cdot$

2) $\left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-4\right)^2=2\left(x^2-4\right)\left(x^2-x\right)$.

Lời giải

1) $\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{-5}{4}\cdot$

$\frac{4}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{-5}{4}$ ĐKXD: $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -2 \\ x\neq -3 \end{cases}$

$\frac{4}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{-5}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{-5}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}=\frac{-5}{4}$

$\Rightarrow 4(x+3)-4(x-2)=-5(x-2)(x+3)$

$\Leftrightarrow 20=-5x^2-5x+30$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (t/m) \\ x=-2\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy $S=\{1\}$.

2) $\left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-4\right)^2=2\left(x^2-4\right)\left(x^2-x\right)$.

$\left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-4\right)^2=2\left(x^2-4\right)\left(x^2-x\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-4\right)^2-2\left(x^2-4\right)\left(x^2-x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(x^2-x\right)-\left(x^2-4\right)\right]^2=0$

$\Leftrightarrow (-x+4)^2=0$

$\Leftrightarrow -x+4=0$

$\Leftrightarrow x=4$

Vậy $S=\{4\}$.

Câu 3. (3,0 điểm).

1) Cho a là tích của 2020 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $(a+1)$ không là số chính phương.

2) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn điều kiện: $4x^2+8x=38-6y^2$.

Lời giải

1) Cho a là tích của 2020 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $(a+1)$ không là số chính phương.

Vì trong 2020 số nguyên tố đầu tiên chỉ có 2 là số nguyèn tố chẵn duy nhất nên a chẵn và a không chia hết cho 4 (1). Suy ra $a+1$ là số lẻ.

Giả sử $a+1$ là một số chính phương thì tồn tại số nguyên dương k sao cho $a+1=(2k+1)^2$.

Suy ra $a+1=4k^2+4k+1 \Rightarrow a=4k(k+1) \Rightarrow a \vdots 4$. Điều này trái với (1)

Vậy $a+1$ không là một số chính phương.

2) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn điều kiện: $4x^2+8x=38-6y^2$.

$4x^2+8x=38-6y^2 \Leftrightarrow 2x^2+4x=19-3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3\left(7-y^2\right)(*)$

Ta thấy: $2(x+1)^2:2 \Rightarrow 7-y^2:2 \Rightarrow y^2$ là số lẻ.

Ta lại có: $7-y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq 7$. Do đó $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

Lúc đó: $2(x+1)^2=18 \Rightarrow x+1=\pm 3$ nên $x_1=2; x_2=-4$.

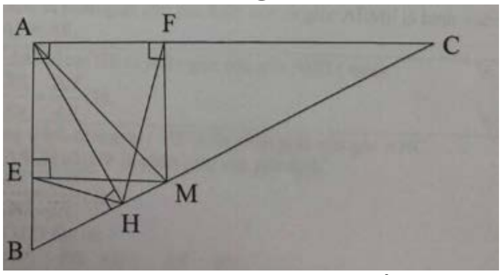
Ta thấy các cặp số $(2;1),(2;-1),(-4;1),(-4;-1)$ thỏa mãn (*)

nên là nghiệm của phương trình.

Câu 4. *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$. Kẻ đường cao AH ($H\in BC$), phân giác AM ($M\in BC$). Kẻ ME vuông góc với AB tại E; MF vuông góc với AC tại F.

1) Cho AB =9cm, AC =12cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC và AH .
2) Chứng minh rằng $BE\,.\,BA = BH\,.\,BM$ và HE là tia phân giác của góc AHB.
3) Chứng minh rằng $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.

Lời giải



1) Cho AB =9cm, AC =12cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC và AH .
Ta có: $\text{AH.BC} = \text{AB.AC} = 2.S_{ABC}\left(^{*}\right)$
Xét tam giác ABC vuông tại A có : $AB^2 + AC^2 = BC^2$
Suy ra: $BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow BC = \sqrt{225} = 15(\text{cm})$.
Thay vào (*) ta có $AH.15 = 9.12 \Rightarrow AH = 7,2(\text{cm})$.
2) Chứng minh rằng $BE\,.\,BA = BH\,.\,BM$ và HE là tia phân giác của góc AHB.
Xét ΔBHA và $\triangle BEM$ có:
EBM chung $\widehat{BEM} = \widehat{BHA} = 90^\circ$
Suy ra: ΔBHA đồng dạng với ΔBEM ($g \cdot g$) $\Rightarrow \frac{BE}{BH} = \frac{BM}{BA} \Leftrightarrow BE \cdot BA = BH \cdot BM$.
Xét ΔBEH và ΔBMA có:
$\widehat{EBH}$ chung
$\frac{BE}{BH} = \frac{BM}{BA}$
Suy ra: ΔBEH đồng dang với $\triangle BMA(\text{c}\cdot\text{g}\cdot\text{c})$
Suy ra: $\widehat{BHE} = \widehat{BAM}$, có $\widehat{BAM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BHE} = 45^\circ$
Mà $\widehat{BHA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{EHA} = 45^\circ$
Suy ra: HE là tia phân giác của góc AHB (đpcm)
3) Chứng minh rằng $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.
Chứng minh:
$\widehat{AEM} = \widehat{AFM} = \widehat{EAF} = 90^\circ$
Suy ra tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật.
Mà AM là phân giác của góc EAF nên tứ giác $AEMF$ là hình vuông
Do đó, $AE = AF$.
Xét ΔABH có: HE là phân giác của góc AHB (cmt) $\Rightarrow \frac{BE}{EA} = \frac{BH}{AH}$ (1)
Chứng minh tương tự: HF là tia phân giác của góc AHC.
Xét ΔACH có: HF là phân giác của góc AHC.
Suy ra $\frac{AF}{CF} = \frac{AH}{HC}$(2)
Từ (1), (2) suy ra:

$$\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AF}{CF}=\frac{BH}{AH}\cdot\frac{AH}{HC}\Leftrightarrow\frac{BE}{CF}=\frac{BH}{HC}$$ (vì $AE=AF$) (đpcm).

Câu 5. *(1,0 điểm).*

1) Cho *a, b* là các số thực dương. Chứng minh rằng $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.

2) Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\dfrac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\dfrac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}$.

Lời giải

1) Cho *a, b* là các số thực dương. Chứng minh rằng $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.

Ta có: $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.

$\Leftrightarrow a^3+b^3-ab(a+b)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2-ab\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\geq 0$ (Luôn đúng với mọi a, b dương)

Vậy $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.

2) Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\dfrac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\dfrac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}$.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\leq 2b-a$.

Ta có: $\dfrac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\leq 2b-a$

$\Leftrightarrow 5b^3-a^3\leq(2b-a)\left(ab+3b^2\right)$

$\Leftrightarrow 5b^3-a^3\leq 2ab^2-a^2b+6b^3-3ab^2$

$\Leftrightarrow ab^2+a^2b\leq a^3+b^3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$ (Đã chứng minh ở ý 1) Dấu “=” xảy ra khi $a=b$.

Vậy $\dfrac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\leq 2b-a$

Chứng minh tương tự:

$+/\ \dfrac{5c^3-b^3}{cb+3c^2}\leq 2c-b$

(2). Dấu “=” xảy ra khi $c=b$.

$+/\ \dfrac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\leq 2a-c$.

(3). Dấu "=" xảy ra khi $a=c$.

$A\leq(2b-a)+(2c-b)+(2a-c)=a+b+c=2020$

Dấu "=" xày ra khi $a=b=c$

Vậy Max $(A)=2020\Leftrightarrow a=b=c=673\dfrac{1}{3}$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN LONG BIÊN
KÌ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN VÒNG 2
Năm học: 2020-2021.
Môn: TOÁN

Câu 1. *(6,0 điểm).*

1) Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-20x+28}=3x^2-15x+20$.
2) Cho ba số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

3) Cho các số nguyên $a;b;c$ thoả mãn điều kiện: $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=378$.

Tính giá trị của biểu thức $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$.

Câu 2. *(3,0 điểm).*

1) Cho a,b,c là các số nguyên thỏa mãn điều kiện: $a+b+c$ chia hết cho 12. Chứng minh: $P=(a+b)(b+c)(c+a)$ - $5abc$ chia hết cho 12.
2) Có tồn tại hay không 3 số nguyên x,y,z thỏa mãn điều kiện:

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z+2020.$$

Câu 3. *(3,0 điểm).*

1) Cho x,y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{3x}{y}-\dfrac{3y}{x}+4\geq 0$.
2) Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{4}{2-x}+\frac{100}{x}+2021.$$

Câu 4. *(7,0 điểm).*Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

1) Chứng minh: $BH.BD=BC.BK$ và $BH.BD+CHCE=BC^2$.
2) Chứng minh $BH=AC.\cot\widehat{ABC}$.
3) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.

Câu 5. *(1,0 điểm).*Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100 sau đó thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần xóa hai số *a, b* bất kỳ trên bảng và viết một số mới bằng $a+b-2$ lên bảng. Việc làm này thực hiện liên tục, hỏi sau 99 bước số cuối cùng còn lại trên bảng là bao nhiêu? Tại sao?

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN LONG BIÊN
KÌ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN VÒNG 2
Năm học: 2020-2021.
Môn: TOÁN

Câu 1. *(6,0 điểm).*

1) Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-20x+28}=3x^2-15x+20$.

2) Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

3) Cho các số nguyên a,b,c thoả mãn điều kiện: $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=378$.

Tính giá trị của biểu thức $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$.

Lời giải

1) Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-20x+28}=3x^2-15x+20$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-5x+7},(t\ge 0)\Rightarrow x^2-5x+7=t^2$.

ĐKXD: $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình trở thành: $2t=3t^2-1$.

$$\Leftrightarrow 3t^2-2t-1=0\Leftrightarrow (t-1)(3t+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{-1}{3}\end{array}\right.$$

- Ta có : $t=\dfrac{-1}{3}<0$ (loại) hoặc $t=1$ (thỏa mãn).
- Với $t=1,$ ta có :

$$\sqrt{x^2-5x+7}=1\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=3$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{2;3\}$.

2) Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Ta có : $x+y+z=0\Rightarrow z=-(x+y)$

$$VT=x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=x^3+y^3-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3$$

$VT=-3xy(x+y)=3xyz=VP$

3) Cho các số nguyên abc thoả mãn điều kiện: $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=378$.

Tính giá trị của biểu thức $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$.

Đặt $a-b=x;b-c=y;c-a=z\Rightarrow x+y+z=0$

Ta có: $x^3+y^3+z^3=378\Leftrightarrow 3xyz=378\Leftrightarrow xyz=126$

Do x,y,z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=126 \Rightarrow x\cdot y\cdot z=(-2)\cdot(-7).9$ nên

$$\begin{cases}x=-2\\y=-7\\z=9\end{cases}\begin{cases}x=-2\\y=9\\z=-7\end{cases};\begin{cases}x=-7\\y=-2\\z=9\end{cases};\begin{cases}x=-7\\y=9\\z=-2\end{cases};\begin{cases}x=9\\y=-7\\z=-2\end{cases}\begin{cases}x=9\\y=-2.\\z=-7\end{cases}$$

Suy ra: $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|=18$.

Câu 2. *(3,0 điểm).*

1) Cho a,b,c là các số nguyên thỏa mãn điều kiện: $a+b+c$ chia hết cho 12. Chứng minh: $P=(a+b)(b+c)(c+a)$ - $5abc$ chia hết cho 12.

2) Có tồn tại hay không 3 số nguyên x,y,z thỏa mãn điều kiện:

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z+2020.$$

Lời giải

1) Cho a,b,c là các số nguyên thỏa mãn điều kiện: $a+b+c$ chia hết cho 12. Chứng minh: $P=(a+b)(b+c)(c+a)$ - $5abc$ chia hết cho 12.

Ta có:

$P=(a+b)(b+c)(c+a)-5abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-6abc \quad (*)$

do $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

Giả sử a,b,c đều chia 2 dư 1 $\Rightarrow a+b+c$ chia 2 dư 1 (2)

Mà $a+b+c \vdots 12 \Rightarrow a+b+c \vdots 2$ (theo giả thiết) (2)

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai.

$\Rightarrow$ Trong ba số a,b,c ít nhất có một số chia hết cho 2 $\Rightarrow 6abc \vdots 12$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $P \vdots 12$.

2) Có tồn tại hay không 3 số nguyên x,y,z thỏa mãn điều kiện:

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z+2020.$$

Ta có: $x^3-x=x\left(x^2-1\right)=(x-1)x(x+1) \vdots 3$

Tương tự ta có: $y^3-y \vdots 3 \quad ; z^3-z \vdots 3$

$\Rightarrow \left(x^3-x\right)+\left(y^3-y\right)+\left(z^3-z\right) \vdots 3$

Biến đổi phương trình thành: $\left(x^3-x\right)+\left(y^3-y\right)+\left(z^3-z\right)=2020$. Mà $2020 \not\vdots 3$.

Vậy không tồn tại ba số nguyên x,y,z thỏa mãn điều kiện:

$x^3+y^3+z^3=x+y+z+2020$.

Câu 3. *(3,0 điểm).*

1) Cho x,y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{3x}{y}-\dfrac{3y}{x}+4\ge 0$.

2) Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Tìm GTNN của biểu thức: $A=\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{100}{x}+2021$.

Lời giải

1) Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{3x}{y}-\frac{3y}{x}+4\geq 0$.

Ta có: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$ với mọi $x, y>0$.

$\Rightarrow\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\geq 0;\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)>0$.

$\Rightarrow\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\geq 0$.

$\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{3x}{y}-\frac{3y}{x}+4\geq 0$.

2) Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Tìm GTNN của biểu thức: $A=\frac{4}{2-x}+\frac{100}{x}+2021$.

Ta có : $A=\frac{4}{2-x}+\frac{100}{x}+2021=\left[\frac{4}{2-x}+36(2-x)\right]+\left(\frac{100}{x}+36x\right)+1949$.

Mà $0<x<2$ suy ra : $2-x>0$.

Áp dụng BĐT : $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ với $a,b\geq 0,$ dấu bằng xảy ra khi $a=b$ ta có:

$\left(\frac{100}{x}+36x\right)\geq 120$ dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{5}{3}$.

$\left[\frac{4}{2-x}+36(2-x)\right]\geq 24$ dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{5}{3}$.

Suy ra $A=\frac{4}{2-x}+\frac{100}{x}+2021=\left[\frac{4}{2-x}+36(2-x)\right]+\left(\frac{100}{x}+36x\right)+1949\geq 2093$.

Vậy MinA =2093 khi và chi khi $x=\frac{5}{3}$.

Câu 4. *(7,0 điểm)*.Cho tam giác ABC cóba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

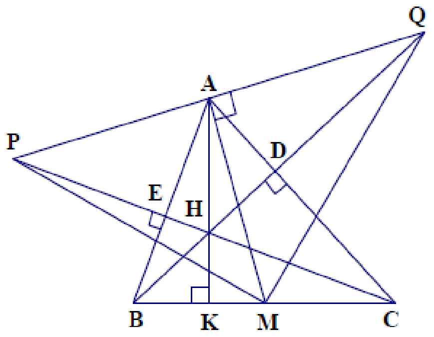
1) Chứng minh: $BH.BD=BC.BK$ và $BH.BD+CH.CE=BC^2$.

2) Chứng minh $BH=AC.\cot\widehat{ABC}$.

3) Gọi .M. là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.

Lời giải

1) Chứng minh: $BH.BD=BC.BK$ và $BH.BD+CH.CE=BC^2$.



Xét tam giác: ΔBHK đồng dạng ΔBCD có:

KBH chung

$\widehat{BKH}=\widehat{BDC}=90^{\circ}$.

$\Rightarrow \Delta BHK$ đồng dạng ΔBCD(g.g)

nên $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{BK}{BD}$

$\Rightarrow BH\cdot BD=BCBK$

Tương tự: ΔCHK đồng dạng ΔCBE

nên $\dfrac{CH}{BC}=\dfrac{KC}{CE}\Rightarrow CH\cdot CE=BC\cdot KC$

Cộng vế với vế hai đẳng thức ta được:

$$BH\cdot BD+CH.CE=BCBK+BC\cdot KC$$

$$\text{hay } BH\cdot BD+CH\cdot CE=BC(BK+KC)=BC^2$$

2) Chứng minh $BH=AC.\cot\widehat{ABC}$.

Chứng minh : ΔBEH đồng dạng $\Delta CEA(g\cdot g)\Rightarrow \dfrac{BH}{CA}=\dfrac{BE}{CE}$

Xét ΔBEC vuông tại $E\Rightarrow \cot ABC=\dfrac{BE}{CE}$

$$\Rightarrow \frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}=\cot ABC\Rightarrow BH=AC\cdot\cot ABC$$

3) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.

Chứng minh ΔPAH đồng dạng ΔAMB $(g.g)\Rightarrow \dfrac{PA}{AM}=\dfrac{AH}{MB}$

Chứng minh: ΔQAH đồng dạng ΔMAC $(g.g)\Rightarrow \dfrac{QA}{AM}=\dfrac{AH}{MC}$

Do $MB=MC$ (gt) $\Rightarrow \dfrac{QA}{AM}=\dfrac{PA}{AM}$

$\Rightarrow PA=QA\Rightarrow \Delta QMP$ cân tại $M\Rightarrow MP=MQ$

Câu 5. *(1,0 điểm)*.Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100 sau đó thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần xóa hai số *a, b* bất kỳ trên bảng và viết một số mới bằng $a+b-2$ lên bảng. Việc làm này thực hiện liên tục, hỏi sau 99 bước số cuối cùng còn lại trên bảng là bao nhiêu? Tại sao?

Lời giải

Tổng tất cả các số ban đầu trên bảng: $S=1+2+3+\ldots+99+100=5050$.

Qua mỗi bước ta thấy tổng giảm đi 2.

Lúc đầu tổng $S=5050$ sau 99 bước số còn lai sẽ là $5050-2.99=4852$.

ꕥ HẾT ꕥ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN
QUẬN NAM TỪ LIÊM
MÔN TOÁN 9 - NĂM HỌC: 2020 - 2021

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}}$ với $x>0, y>0$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Cho $x+y=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

2. Cho biểu thức $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh rằng B là một số nguyên.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Cho $m+5; n-2; p+2020$ là các số nguyên cùng chia hết cho 6. Chứng minh rằng: $m+n+p+4^q+3$ cũng chia hết cho 6 (q là số tự nhiên).

2. Cho a,b,c,d là các số nguyên thỏa mãn $a^2=b^2+c^2+d^2$

Chứng minh rằng: $abcd+2021$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

2. Giải phương trình : $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}=\frac{4x-3}{5}$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh bằng a và có tâm là O. Điểm M là một điểm di chuyển trên BC (M khác B và C). Gọi N là giao điểm của tia AM và đường thẳng CD. G là giao điểm của DM và BN.

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}$ không đổi.

2) Chứng minh: $CG\perp AN$.

3) Gọi H là giao điểm của OM và BN. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác HAD đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. (1,0 điểm)

Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

HẾT

ĐÁP ÁN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN
QUẬN NAM TỪ LIÊM
MÔN TOÁN 9 - NĂM HỌC: 2020 - 2021

Bài 1. **(5,0 điểm)**

1. Cho biểu thức $A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}}$ với $x>0, y>0$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Cho $x+y=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

2. Cho biểu thức $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh rằng B là một số nguyên.

Lời giải

1. a) Rút gọn biểu thức A

$$A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}} \text{ với } x>0, y>0$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{\left(\sqrt{x^3}+x\sqrt{y}\right)+\left(y\sqrt{x}+\sqrt{y^3}\right)}{\sqrt{xy}\,(y+x)}$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+y\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}\,(x+y)}$$

$$=\frac{2\sqrt{xy}+x+y}{xy}:\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)}{\sqrt{xy}\,(x+y)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}.\frac{\sqrt{xy}\,(x+y)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

Vậy $A=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$ với $x>0, y>0$

b) Cho $x+y=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Với $x>0,y>0$ ta có: $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô- Si ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{y}}}=2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}}$$

Mặt khác: $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{4}{2}=2\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2.\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{xy}}}\ge 2.\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$

Hay $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\dfrac{1}{\sqrt{y}}}=2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{xy}}}\ge\sqrt{2}$

Do đó: $A\ge\sqrt{2}$ .Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x+y=4\end{cases}\Rightarrow x=y=2$.

Vậy $MinA=\sqrt{2}$ tại $x=y=2$.

2. Ta có:

$$B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$$

$$\Rightarrow B^3=1+\frac{\sqrt{84}}{9}+1-\frac{\sqrt{84}}{9}+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right).\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)}.\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$$

$$B^3=2+3.\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}.B$$

$$B^3=2-B\Leftrightarrow B^3+B-2=0\Leftrightarrow B^3-B^2+B^2-B+2B-2=0$$

$$\Leftrightarrow(B-1)\left(B^2+B+2\right)=0$$

$+)B-1=0\Leftrightarrow B=1$

$+)B^2+B+2=0\Leftrightarrow\left(B+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}=0$ (Vô lí)

Vậy $B=1$ là một số nguyên.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Cho $m+5;n-2;p+2020$ là các số nguyên cùng chia hết cho 6. Chứng minh rằng: $m+n+p+4^q+3$ cũng chia hết cho 6 (q là số tự nhiên).

2. Cho a,b,c,d là các số nguyên thỏa mãn $a^2=b^2+c^2+d^2$

Chứng minh rằng: $abcd+2021$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Lời giải

1. Ta có: $(m+5)\vdots 6\Rightarrow m:6$ dư 1

$(n-2)\vdots 6 \Rightarrow n:6$ dư 2

$(p+2020)\vdots 6 \Rightarrow p:6$ dư 2

Do đó: $(m+n+p):6$ dư 5 hay $(m+n+p+1)\vdots 6$

Ta có: $4^q+2=(2^q)^2+2=2(2^{2q-1}+1)$

Mà $2^{2q-1}:3$ dư 2 nên $(2^{2q-1}+1)\vdots 3 \Rightarrow 2.(2^{2q-1}+1)\vdots 6 \Rightarrow (4^q+2)\vdots 6$

Do đó: $m+n+p+4^q+3=\left[(m+n+p+1)+(4^q+2)\right]\vdots 6$

Vậy $m+n+p+4^q+3$ cũng chia hết cho 6 (q là số tự nhiên).

2. Ta có: $(2m+1)^2=4m(m+1)+1$

Do đó: với mọi $m\in Z$ thì $(2m+1)^2$ chia 8 dư 1. Nên với a,b,c,d lẻ thì a^2,b^2,c^2,d^2 chia 8 dư 1

Suy ra: không xảy ra $a^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3)

Vậy trong các số a,b,c,d có ít nhất 1 số chẵn. Ta có: $abcd+2021$ là số lẻ.

Đặt $a.b.c.d+2021=2n+1(n\in Z)\Rightarrow 2n+1=(n+1-n)(n+1+n)=(n+1)^2-n^2$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

Bài 3. **(4,0 điểm)**

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

2. Giải phương trình : $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}=\dfrac{4x-3}{5}$

Lời giải

1. Tìm số nguyên x,y thỏa mãn:

$$x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+5x^2y^2+60-37xy=0$$
$$\Leftrightarrow 20x^2+20y^2+100x^2y^2-740xy+1200=0$$
$$\Leftrightarrow 20x^2+20y^2+(10xy-37)^2=169$$

Vì $20x^2\ge 0\forall 2x;20y^2\ge 0\forall y;(10\,\mathrm{xy}-37)^2\ge 0\forall x,y$ và vai trò của x,y như nhau; ta giả sử $x\le y;20x^2\le 169\Rightarrow x^2\le 8\Rightarrow x^2\in\{0;1;4\}$; suy ra:

$\left(20x^2;20y^2;(10\,\mathrm{xy}-37)^2\right)\in\{(0;0;169);(0;20;149);(0;80;89);(20;20;129);(20;80;69);(80;80;9)\}$

Mà $(10xy-37)^2$ là số chính phương

$\Rightarrow\left(20x^2;20y^2;(10\,\mathrm{xy}-37)^2\right)\in\{(0;0;169);(80;80;9)\}$

+ TH1: $\begin{cases} 20x^2 = 0 \\ 20y^2 = 0 \\ (10xy - 37)^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 37^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow$ không có giá trị

+ TH2: $\begin{cases} 20x^2 = 80 \\ 20y^2 = 80 \\ (10xy - 37)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \\ \left[\begin{array}{l} xy = 4 \\ xy = \dfrac{17}{5}(l) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $(x;y) \in \{(2;2);(-2;-2)\}$

2. Giải phương trình : $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \dfrac{4x-3}{5}$ (ĐK: $x \geq \dfrac{1}{5}$)

Vì $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} > 0 \forall x; y$

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-3}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}} - \frac{4x-3}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}} - \frac{1}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}} - \dfrac{1}{5} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4} \\ \sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2} = 5 \end{array}\right.$$

Giải phương trình $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2} = 5$ bình phương 2 vế ta có :

$$\Leftrightarrow 5x - 1 + 2\sqrt{(5x-1)(x+2)} + x + 2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(5x-1)(x+2)} = 24 - 6x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+9x-2} = 24 - 6x (DK: x \leq 4)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 9x - 2 = 9x^2 - 72x + 144$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 81x + 146 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \frac{81}{4})^2 = \frac{2783}{64}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2(c) \\ x = \dfrac{73}{4}(l) \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{3}{4}; 2\right\}$

Bài 4. **(6,0 điểm)**

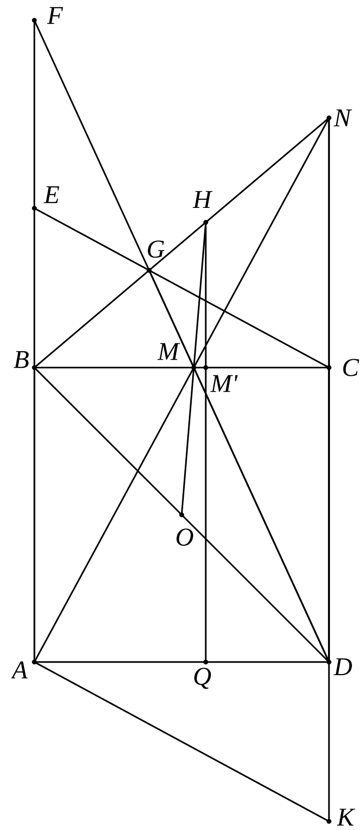
Cho hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh bằng a và có tâm là O. Điểm M là một điểm di chuyển trên BC (M khác B và C). Gọi N là giao điểm của tia AM và đường thẳng CD. G là giao điểm của DM và BN.

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}$ không đổi.

2) Chứng minh: $CG \perp AN$.

3) Gọi H là giao điểm của OM và BN. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác HAD đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



1) Kẻ $AK \perp AN$ $(K \in CD)$

Ta có: $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2\left(=90^\circ-\widehat{MAD}\right)$

$\Rightarrow \Delta ABM=\Delta ADK$

$\Rightarrow AM=AK$

Trong ΔKAN vuông tại A có: $\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{AD^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}$ không đổi

Vậy $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}$ không đổi.

2) CG cắt AB tại E; DM cắt AB tại F

Ta có: $AD^2 = DK.DN \Rightarrow DK.DN = a^2$ (1)

Do $DC // AB \Rightarrow \dfrac{BE}{CN} = \dfrac{BG}{GN} = \dfrac{BF}{DN}$

$\Rightarrow BE.DN = CN.BF$ (2)

Mặt khác $\dfrac{BF}{CD} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{AB}{CN}$ (do $AB // CD$)

$\Rightarrow BF.CN = CD.AB = a^2$ (3)

Từ $(1), (2), (3)$ $\Rightarrow DK.DN = BE.DN$

$\Rightarrow DK = BE \Rightarrow AE = CK$

$\Rightarrow EAKC$ là hình bình hành

$\Rightarrow AK // CE$

Mà $AK \perp AN \Rightarrow CE \perp AN$

3) CF cắt BN tại H'

Áp dụng định lí Papuyt $\Rightarrow O, M, H'$ thẳng hàng

$\Rightarrow H' \equiv H$

Lấy $I \in AB$ sao cho $BI = CN$

$\Rightarrow IBNC$ là hình bình hành

$\Rightarrow IC // BN$

Mà $BF.CN = a^2$

$\Rightarrow BI.BF = CB^2$

$\Rightarrow \Delta ICF$ vuông tại C

$\Rightarrow IC \perp CF$

$\Rightarrow CF \perp BN \Rightarrow BHC = 90°$

Kẻ $HQ \perp AD$ $(Q \in AD)$

Gọi M' là giao điểm của HQ và BC

Ta có: $HQ = M'Q + HM' = a + HM'$

Mà $HM' \leq \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow HQ \leq \dfrac{3}{2}a$

Do đó: $S_{AHD} = \dfrac{1}{2}AD.HQ \leq \dfrac{1}{2}a.\dfrac{3}{2}a = \dfrac{3}{4}a^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M'$ là trung điểm AB

Bài 5. **(1,0 điểm)**

Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

Lời giải

Xét ngũ giác đều ABCDE, ta nhận thấy ba đỉnh bất kì của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 2 khả năng:

- Nếu tô 5 đỉnh bởi đủ ba loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.
- Nếu tô 5 đỉnh bởi nhiều nhất 2 màu thì có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Vậy, luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác nhau.

PHÒNG GD VÀ ĐT QUẬN BA ĐÌNH

ĐỀ HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2019-2020. MÔN: TOÁN 9

Câu 1.

a) Cho $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1$. Tìm giá trị của a^3-6a+6

b) Cho $A=\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}.\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}$. Hỏi A có bao nhiêu chữ số ?

Câu 2.

a) Giải phương trình $2x^2-x+1=\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}$

b) Tìm cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x\left(x^2-6x+12\right)=y^3+27$

Câu 3.

a) Cho a; b; c là ba số tự nhiên liên tiếp. CMR: $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

b) Cho biểu thức $A=1^3+2^3+3^3+.......+2019^3+2020^3$. Tìm số dư khi chia A cho 3.

Câu 4.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, trên cạnh AB, BC lấy M, N tương ứng sao cho $BM=CN$.

a) Chứng minh ΔMON vuông cân.

b) AN cắt DC tại E, ON bắt BE tại F. Tìm vị trí M, N để các tứ giác $ABEC, MBFN$ là hình bình hành.

c) Chứng minh $CF\perp BE$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $OMBN$.

Câu 5.

Cho a; b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a^3+b^3+\frac{6}{a^2+b^2}+3ab$

PHÒNG GD VÀ ĐT QUẬN BA ĐÌNH

ĐỀ HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2019-2020. MÔN: TOÁN 9

Câu 1.

a) Cho $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1$. Tìm giá trị của a^3-6a+6

b) Cho $A=\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}.\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}$. Hỏi A có bao nhiêu chữ số ?

Lời giải

a) $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}-1=1+\sqrt{3}$

a^3-6a+6
$=\left(1+\sqrt{3}\right)^3-6\left(1+\sqrt{3}\right)+6$
$=6\sqrt{3}+10-6-6\sqrt{3}+6$
$=10$

b) Cho $A=\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}.\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}$. Hỏi A có bao nhiêu chữ số ?

$$A=\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}.\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}=\left(\underbrace{10...00}_{10^{2020}}-1\right)\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}=\underbrace{10...00}_{10^{2020}}.\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}-\underbrace{99...99}_{2020\ cs\ 9}$$

$$=\underbrace{99...99}_{2020cs}\underbrace{00...00}_{2020cs}-\underbrace{99...99}_{2020cs}=\underbrace{99...99}_{2019cs}8\underbrace{00..00}_{2019cs}1$$

Vậy A có $2019+2019+1+1=4020$ chữ số

Câu 2.

a) Giải phương trình $2x^2-x+1=\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}$

b) Tìm cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x\left(x^2-6x+12\right)=y^3+27$

Lời giải

a) Giải phương trình $2x^2-x+1=\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}$

$2x^2-x+1=\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}$ (đk: $x\geq\frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow x(2x-1)+1=\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow x(2x-1)+1=\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2x-1}\left[\sqrt{2x-1}-1\right]-\left[\left(\sqrt{2x-1}\right)-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{2x-1}-1\right)\left[\sqrt{2x-1}-1\right]=0$

Th1: $x\sqrt{2x-1}-1=0$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}\,(t\geq 0)$

Phương trình đã cho có dạng

$t\dfrac{.\left(t^2+1\right)}{2}=1$

$\Leftrightarrow t\left(t^2+1\right)=2$

$\Leftrightarrow t^3+t-2=0$

$\Leftrightarrow \left(t^3-1\right)+(t-1)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+1\right)+(t-1)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2+t+2=0(vn) \end{array}\right.$

Vậy $t=1\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$

TH2: $\sqrt{2x-1}=1\Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

b) Tìm cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x\left(x^2-6x+12\right)=y^3+27$

$x\left(x^2-6x+12\right)=y^3+27\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x=y^3+27\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=y^3+19$

$\Leftrightarrow (x-2)^3-y^3=19\Leftrightarrow (x-2-y)\left[(x-2)^2+(x-2)y+y^2\right]=19$

Ta có $(x-2)^2+(x-2)y+y^2=(x-2)^2+2.(x-2).\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=\left(x-2+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0$

Do x, y là số nguyên nên $x-2-y$ và $(x-2)^2+(x-2)y+y^2$ là ước của 19

TH1:

$$\begin{cases} x-2-y=1 \\ (x-2)^2+(x-2)y+y^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ (y+3-2)^2+(y+3-2)y+y^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ y^2+y-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow (x;y) \in \{(5;2);(0;-3)\}$$

TH2:

$$\begin{cases} x-2-y=19 \\ (x-2)^2+(x-2)y+y^2=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y+19 \\ (y+19)^2+(y+19)y+y^2=1 \end{cases}$$ (không có giá trị y nguyên)

Câu 3.

a) Cho a; b; c là ba số tự nhiên liên tiếp. CMR: $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

b) Cho biểu thức $A=1^3+2^3+3^3+.......+2019^3+2020^3$. Tìm số dư khi chia A cho 3.

Lời giải

a) Cho a; b; c là ba số tự nhiên liên tiếp. CMR: $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

Vì a; b; c là ba số tự nhiên liên tiếp nên ta có:

$b=a+1$

$c=a+2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 &= a^3+(a+1)^3+(a+2)^3 \\ &= a^3+a^3+3a^2+3a+1+a^3+6a^2+12a+8 \\ &= 3a^3+9a^2+15a+9 \\ &= 3.(a^3+3a^2+5a+1) \end{aligned}$$

Vậy $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

b) Cho biểu thức $A=1^3+2^3+3^3+.......+2019^3+2020^3$. Tìm số dư khi chia A cho 3.

$A=1^3+\left(2^3+3^3+4^3\right)+\left(5^3+6^3+7^3\right)+.......+\left(2018^3+2019^3+2020^3\right)$

Theo phần a: $\left(2^3+3^3+4^3\right)\vdots 3$; $\left(5^3+6^3+7^3\right)\vdots 3$;......;$\left(2018^3+2019^3+2020^3\right)\vdots 3$

Nên A chia cho 3 dư 1

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 1^3+2^3+3^3+.......+2019^3+2020^3 = 1^3+(2^3+2020^3)+(3^3+2019^3)+.........+(1010^3+1012^3) \\ &= 1+2022(2^2-2.2020+2020^2)+2022(2^2-3.2019+2019^2)+.....+2022(1010^2-1010.1012+1012^2) \\ &= 1+2022(2^2-2.2020+2020^2+2^2-3.2019+2019^2+.....+1010^2-1010.1012+1012^2) \end{aligned}$$

Do 2022 chia hết cho 3 nên A chia cho 3 dư 1.

Câu 4.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, trên cạnh AB, BC lấy M, N tương ứng sao cho $BM = CN$.

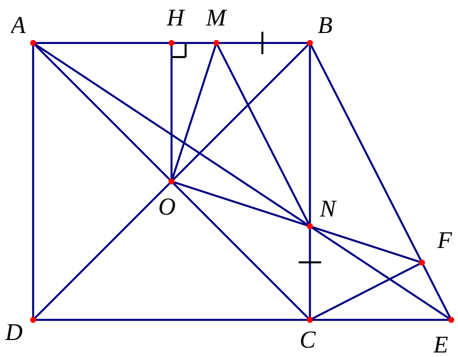
a) Chứng minh ΔMON vuông cân.

b) AN cắt DC tại E, ON bắt BE tại F. Tìm vị trí M, N để các tứ giác $ABEC, MBFN$ là hình bình hành.

c) Chứng minh $CF \perp BE$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $OMBN$.

Lời giải



a) Chứng minh ΔMON vuông cân.

Ta có: $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow OB = OC; \widehat{OBM} = \widehat{OCN} = 45°; \widehat{BOC} = 90°$.

$\Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN\ (c-g-c) \Rightarrow OM = ON; \widehat{MOB} = \widehat{NOC}$

Ta có: $\widehat{MON} = \widehat{MOB} + \widehat{BON} = \widehat{NOC} + \widehat{BON} = \widehat{BOC} = 90°$

Suy ra ΔMON vuông cân tại O.

b) AN cắt DC tại E, ON bắt BE tại F. Tìm vị trí M, N để các tứ giác $ABEC, MBFN$ là hình bình hành.

* Tứ giác $ABEC$ là hình bình hành $\Leftrightarrow NB = NC; NA = NE$.

+) Khi $NB = NC$ thì $\Delta ABN = \Delta CNE\ (g-c-g) \Rightarrow NA = NE$

+) Khi $NB = NC$ thì ON là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow ON // CD // AB$

mà $OM \perp ON$ (ΔMON vuông tại O) $\Rightarrow OM \perp AB$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AB.

Vậy khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC thì tứ giác $ABEC$ là hình bình hành.

* Tứ giác $MBFN$ là hình bình hành $\Leftrightarrow NF \,//\, MB;\, NF = MB$.

+) Khi $NF \,//\, MB \,//\, CD$ mà $OB = OD$ $\Rightarrow N$ là trung điểm của BC

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AB (chứng minh trên)

+) Khi N là trung điểm của BC, mà $ON \,//\, DE$ hay $OF \,//\, DE$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của BE $\Rightarrow ON = NF\left(=\frac{1}{2}CE\right)$

Mặt khác, khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC thì $OMBN$ là hình vuông

$\Rightarrow NF = MB\left(= ON\right)$.

Vậy khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC thì tứ giác $MBFN$ là hình bình hành.

c) Chứng minh $CF \perp BE$.

+) Xét ΔANB có $CE \,//\, AB$ $\Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{NE}{NA}$ (định lí Ta – lét)

mà $NC = BM;\, NB = AM$ $\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{NE}{NA}$ $\Rightarrow MN \,//\, BF$ (định lí Ta – lét đảo)

$\Rightarrow \widehat{BFN} = \widehat{MNO}$ (hai góc đồng vị) $\Rightarrow \widehat{BFN} = \widehat{MNO} = 45^\circ$ (ΔMON vuông cân tại O)

+) Xét ΔNCO và ΔNFB có: $\widehat{NCO} = \widehat{NFB}\left(=45^\circ\right)$; $\widehat{ONC} = \widehat{BNF}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta NCO \# \Delta NFB\left(g-g\right) \Rightarrow \frac{NC}{NF} = \frac{NO}{NB} \Rightarrow \Delta NFC \# \Delta NBO\left(c-g-c\right)$

$\Rightarrow \widehat{NFC} = \widehat{NBO}$, mà $\widehat{NBO} = 45^\circ$ $\Rightarrow \widehat{NFC} = 45^\circ$.

+) Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BFN} + \widehat{NFC} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow CF \perp BE$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $OMBN$.

Ta có: chu vi tứ giác $OMBN$ bằng: $C_{OMBN} = OM + ON + BM + BN$

mà $ON = OM;\, BN = MA$ $\Rightarrow C_{OMBN} = 2OM + AB \geq 2OH + AB = AB + AB = 2AB$ (không đổi).

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.

Vậy chu vi tứ giác $OMBN$ nhỏ nhất bằng $2AB$ khi M là trung điểm của AB.

Câu 5.

Ta có

$$A = a^3 + b^3 + \frac{6}{a^2 + b^2} + 3ab$$

$$A = (a+b)^3 - 3ab(\text{a}+\text{b}) + \frac{6}{(a+b)^2 - 2ab} + 3ab$$

Thay $a + b = 2$ $\Rightarrow A = 8 + \frac{6}{4 - 2ab} - 3ab$

$$\Rightarrow A = 8 + \frac{3}{2 - ab} - 3ab$$

$$\Rightarrow A = 8 + \frac{3(ab-1)^2}{2 - ab} (*)$$

Do a, b dương áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

Ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1$

Nên $A \geq 8$ khi $\begin{cases} ab = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$

Vậy GTNN của A là 8 khi $a = b = 1$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẬN HAI BÀ TRƯNG
ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút

Câu 1. (5 *điểm*)

1) Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc.$

Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}.$

2) Giải phương trình $x^2-4x+\sqrt{x-2}+4=0.$

Câu 2. (5 *điểm*)

1) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1)=2$ và $P(-1)=4.$ Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2-1.$

2) Tìm các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+1=0.$

3) Cho a,b,c là các số nguyên dương phân biệt và p là số nguyên tố lẻ sao cho $ab+1,\ bc+1,\ ca+1$ đều chia hết cho $p.$ Chứng minh rằng $p+2\le\dfrac{a+b+c}{3}$.

Câu 3. (2 *điểm*)

1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ với $2\le x\le 4.$

2) Với các số thực a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=3$ và $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng $-1\le a\le 3.$

Câu 4. (6 *điểm*)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ và đường cao AH. Gọi E,F là chân các đường vuông góc hạ từ H lên AC,AB. Gọi I là giao điểm của AH và EF, BI cắt AC tại điểm $P.$ Đường thẳng qua A song song với BI cắt BC tại Q.

1) Chứng minh B là trung điểm QH.

2) CI cắt AB tại L. Chứng minh: $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{BA^2}{BC^2}$ và $\dfrac{AP}{PC}+\dfrac{AL}{LB}=1.$

3) Gọi M là giao điểm của FE và CB. Kẻ HT vuông góc với AM. Chứng minh rằng $\angle BTC=90^0.$

Câu 5. (1 *điểm*) Cho lục giác đều $ABCDEF$ có diện tích $2022\,cm^2$ và 7 điểm nằm trong lục giác đều $ABCDEF$. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 7 điểm đã cho có diện tích không lớn hơn $337\,cm^2.$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9 QUẬN ĐỐNG ĐA
Năm học: 2020-2021

Lời giải

Câu 1. (5 *điểm*)

1) Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc.$

Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}.$

2) Giải phương trình $x^2-4x+\sqrt{x-2}+4=0.$

Lời giải

1) Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Suy ra $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0.$

Do đó, $\left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$.

TH1: $a+b+c=0$ suy ra: $a=-b-c;\ b=-c-a;\ c=-b-a.$ Suy ra $P=-3.$

TH2: $a=b=c$ suy ra $P=6.$

2) Giải phương trình $x^2-4x+\sqrt{x-2}+4=0.$

Điều kiện xác định: $x\ge 2.$

Biến đổi phương trình về dạng $(x-2)^2+\sqrt{x-2}=0.$

Vì $(x-2)^2\ge 0$ và $\sqrt{x-2}\ge 0$ với mọi $x\ge 2$ nên $(x-2)^2+\sqrt{x-2}\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}(x-2)^2=0. \\ \sqrt{x-2}=0.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2.$

Câu 2. (5 *điểm*)

1) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1)=2$ và $P(-1)=4.$ Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2-1.$

2) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+1=0.$

3) Cho a,b,c là các số nguyên dương phân biệt và p là số nguyên tố lẻ sao cho $ab+1,\ bc+1,\ ca+1$ đều chia hết cho $p.$ Chứng minh rằng $p+2\le\dfrac{a+b+c}{3}$.

Lời giải

1) Đặt $P(x)=(x+1)(x-1).q(x)+ax+b.$

Ta có $P(1)=a+b=2$ và $P(-1)=-a+b=4$.

Suy ra $a=-1; b=3$. Vậy đa thức dư là $-x+3$.

2) Biến đổi phương trình về dạng $(x-y+1)^2+(y-2)^2=4=0^2+2^2$.

TH1: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ y-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

TH3: $\begin{cases} x-y+1=2 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

TH4: $\begin{cases} x-y+1=-2 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$.

Từ đó giải ra được $(x;y) \in \{(-1;0),(-1;2),(3;2),(3;4)\}$.

3) Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng: $a<b<c$.

Thấy rằng $ab+1, bc+1, ca+1$ đều chia hết cho p suy ra a,b,c đều không chia hết cho p .

Từ giả thiết $bc+1, ac+1$ đều chia hết cho p ta suy ra $(bc+1)-(ac+1) \vdots p \Rightarrow c(b-a) \vdots p$ mà $c \not\vdots\, p$ suy ra $b-a \vdots p$,

Tương tự ta cũng có: $c-b \vdots p$ suy ra $b-a \geq p$ và $c-b \geq p$.

Ta có $b=(b-a)+a \geq p+a$ và $c=b+(c-b) \geq p+a+p=a+2p$.

Nếu $a=1$ thì $b+1=ab+1 \vdots p, b-1=b-a \vdots p$ dẫn đến $2 \vdots p$ mà p là số nguyên tố lẻ nên trái với giả thiết vậy $a \geq 2$.

Sử dụng các dữ kiện:

$$a \geq 2, b \geq a+p, c \geq a+2p \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{a+a+p+a+2p}{3}=p+a \geq p+2$$

Câu 3. (*2 điểm*)

1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ với $2 \leq x \leq 4$.

2) Với các số thực a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=3$ và $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng $-1 \leq a \leq 3$.

Lời giải

1) Vì $P>0$, ta xét $P^2=2+2\sqrt{(x-2)(4-x)}\ge 2$, do đó $P\ge\sqrt{2}$ vì $P>0$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{(x-2)(4-x)}=0$ suy ra $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{2}$ khi $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Vì $P>0$, ta xét $P^2=2+2\sqrt{(x-2)(4-x)}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $2\sqrt{(x-2)(4-x)}\le x-2+4-x=2$

Do đó, $P^2\le 4$, dấu "=" xảy ra khi $x-2=4-x$ suy ra $x=3$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 2 khi $x=3$.

2) Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} b+c=3-a \\ b^2+c^2=9-a^2 \end{cases}$.

Sử dụng bất đẳng thức $2\left(b^2+c^2\right)\ge(b+c)^2$ ta suy ra

$2\left(9-a^2\right)\ge(3-a)^2\Rightarrow a^2-2a-3\le 0\Rightarrow(a+1)(a-3)\le 0$

Vì $a+1>a-3\Rightarrow\begin{cases} a+1\ge 0 \\ a-3\le 0 \end{cases}\Rightarrow -1\le a\le 3$.

Chú ý: Nếu học sinh chứng minh được $a\le 3$ cho nửa số điểm.

Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2=9$ suy ra $a^2=9-b^2-c^2\le 9$.

Do đó, $-3\le a\le 3$.

Câu 4. (6 *điểm*)

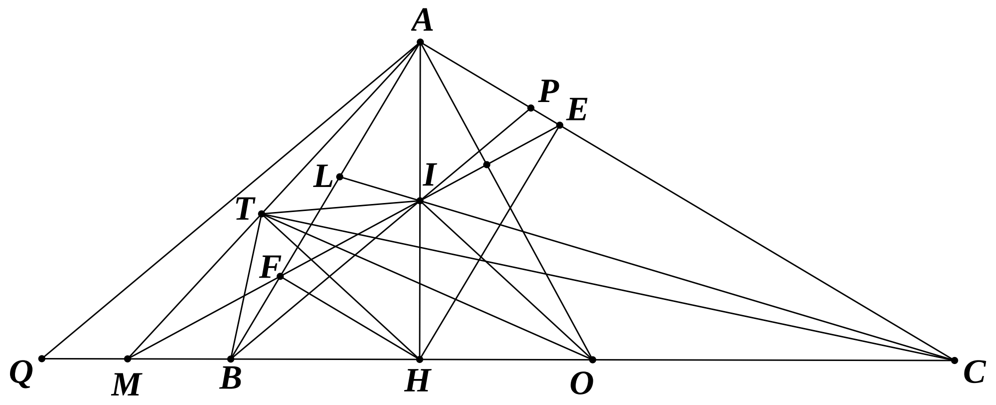
Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ và đường cao AH. Gọi E,F là chân các đường vuông góc hạ từ H lên AC,AB. Gọi I là giao điểm của AH và EF, BI cắt AC tại điểm P. Đường thẳng qua A song song với BI cắt BC tại Q.

1) Chứng minh B là trung điểm QH.

2) CI cắt AB tại L. Chứng minh: $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{BA^2}{BC^2}$ và $\dfrac{AP}{PC}+\dfrac{AL}{LB}=1$.

3) Gọi M là giao điểm của FE và CB. Kẻ HT vuông góc với AM. Chứng minh rằng $\widehat{BTC}=90^0$.

Lời giải



1) Do $AQ // BP$ theo định lý Thales ta có: $\frac{BH}{BQ}=\frac{IA}{IH}$ mà I là trung điểm AH nên $IA=IH$

dẫn đến $\frac{BH}{BQ}=1$ hay B là trung điểm QH .

Cách khác: Có thể nói B là trung điểm QH dựa trên định lý đường trung bình của tam giác AHQ.

2) Ta có $\frac{AP}{PC}=\frac{QB}{BC}=\frac{BH}{BC}=\frac{BH.BC}{BC^2}$. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có: $BH.BC=BA^2$.

Từ đó suy ra $\frac{AP}{PC}=\frac{QB}{BC}=\frac{BH}{BC}=\frac{BA^2}{BC^2}$.

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{AL}{LB}=\frac{AC^2}{BC^2}$.

Suy ra $\frac{AP}{PC}+\frac{AL}{LB}=\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1.$

Cách khác: Theo định lý Thales ta có: $\frac{PA}{PC}=\frac{QB}{BC}=\frac{BH}{BC}$, tương tự ta cũng có:

$\frac{QA}{QB}=\frac{CH}{CB}$ dẫn đến $\frac{PA}{PC}+\frac{QA}{QB}=\frac{BH+CH}{BC}=1.$

3) Sử dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AHB, AHC với $HE\perp AC, HF\perp AB$ ta có $AF.AB=AH^2=AE.AC$ từ đó suy ra $\Delta AEF\sim\Delta ABC$ dẫn đến $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$. Gọi O là trung điểm của BC thì $OA=OB=OC$ nên tam giác AOC cân tại O, suy ra $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}$.
Từ đó suy ra $\widehat{AEF}+\widehat{OAC}=\widehat{B}+\widehat{C}=90^0$ nên $OA\perp EF$ nên I là trực tâm của tam giác AOM dẫn đến $OI\perp AM$ hay $OI\perp AT$ (*).

Tam giác ATH vuông tại T, có $AI = TI = IH$ hay $IA = IT$ (**). Từ (*),(**) suy ra OI là trung trực của AT dẫn đến $OT = OA = OB = OC$ nên tam giác BTC vuông tại T.

Câu 5. (1 *điểm*)

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có diện tích $2022\,cm^2$ và 7 điểm nằm trong lục giác đều $ABCDEF$. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 7 điểm đã cho có diện tích không lớn hơn $337\,cm^2$.

Lời giải

Bổ đề: Lấy 3 điểm trong một hình bình hành, khi đó tam giác tạo bởi 3 điểm đó có diện tích bé hơn hoặc bằng nửa diện tích hình bình hành.

Áp dụng: Gọi O là tâm của lục giác đều, khi đó lục giác chia thành 3 hình bình hành là $ABCO, CDEO, EFAO$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một hình bình hành chứa ít nhất 3 điểm và theo bổ đề 3 điểm này tạo tam giác có diện tích nhỏ hơn nửa diện tích hình bình hành, hay diện tích không lớn hơn $337\,cm^2$.

HẾT

PHÒNG GD VÀ ĐT QUẬN TÂY HỒ

ĐỀ THI CHỌN LỌC HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2020-2021.

(*Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao bài*)

ĐỀ BÀI

Câu 1. *(4 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x-2}}{3+\sqrt{x-2}}+\dfrac{x+7}{11-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-2}+1}{x-3\sqrt{x-2}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$ với $x\ge 2; x\ne 11$

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm các số thực x để biểu thức P đạt giá trị nguyên.

Câu 2. *(4 điểm)*

1) Tính giá trị của biểu thức $A=\left(x^3+12x+9\right)^{2020}$, biết $x=\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}-\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}$

2) Giải phương trình: $x+24=\left(x-3\right)\sqrt{-x^2+8x+48}$

Câu 3. *(4 điểm)*

1) Cho ba số thực a, b, c khác 0 thoả mãn $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=a+b+c$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x,y\right)$ thỏa mãn $x^3+y^3=x^2-x+1$.

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho điểm M là trung điểm của đoạn thẳng (BC). Điểm A thay đổi sao cho $\widehat{BAC}=60°$. Đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D.

1) Chứng minh $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$, trong đó S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.

2) Chứng minh $AM^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}$

3) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}\ge\dfrac{3}{2AD^2}$

Câu 5. *(2 điểm)*

1) Cho các só dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{3}{2}$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc\ge 1$.

2) Trên bảng có ghi 2020 số: $\dfrac{1}{2020}$; $\dfrac{2}{2020}$; $\dfrac{3}{2020}$; … ; $\dfrac{2020}{2020}$. Mỗi lần thực hiện, cho phép xóa đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng sô $a+b-2ab$. Hỏi sau 2019 lần thực hiện phép xóa, số còn lại trên bảng là số nào?

HẾT

PHÒNG GD VÀ ĐT QUẬN TÂY HỒ

ĐỀ THI CHỌN LỌC HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2020-2021.

☞ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ☜

Câu 1. *(4 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x-2}}{3+\sqrt{x-2}}+\dfrac{x+7}{11-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-2}+1}{x-3\sqrt{x-2}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$ với $x\ge 2; x\ne 11$

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm các số thực x để biểu thức P đạt giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P.

Điều kiện xác định: $x\ge 2; x\ne 11$

Đặt $\sqrt{x-2}=a$, $a>0$; $a\ne 3$

$$P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\frac{3a+1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$P=\left[\frac{a(3-a)}{(3+a)(3-a)}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right]:\left[\frac{3a+1}{a(a-3)}-\frac{(a-3)}{a(a-3)}\right]$$

$$P=\frac{3(a+3)}{(3+a)(3-a)}:\frac{2(a+2)}{a(a-3)}$$

$$P=-\frac{3a}{2(a+2)}$$

Thay $\sqrt{x-2}=a$ vào P ta được: $P=-\dfrac{3\sqrt{x-2}}{2\left(\sqrt{x-2}+2\right)}$

b) Tìm các số thực x để biểu thức P đạt giá trị nguyên.

$$P=\frac{-3\sqrt{x-2}}{2\left(\sqrt{x-2}+2\right)}\Rightarrow \sqrt{x-2}\,(2P+3)=-4P$$

P nguyên nên $2P+3\ne 0$. Từ đó $\sqrt{x-2}=\dfrac{-4P}{2P+3}$

Do $\sqrt{x-2}\ge 0$ nên $\dfrac{-4P}{2P+3}\ge 0$

Từ đó $\dfrac{-3}{2}<P\le 0$

Do P nguyên nên $P\in\{-1;0\}$

Với $P=-1$ thì $\sqrt{x-2}=4\Leftrightarrow x=18$

Với $P=0$ thì $\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow x=2$

Câu 2. *(4 điểm)*

1) Tính giá trị của biểu thức $A=\left(x^3+12x+9\right)^{2020}$, biết $x=\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}-\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}$

2) Giải phương trình: $x+24=\left(x-3\right)\sqrt{-x^2+8x+48}$

Lời giải

1) Ta có $x=\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}-\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}$

Xét $x^3=\left(\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}-\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}\right)^3=4\left(\sqrt{5}-1\right)-4\left(\sqrt{5}+1\right)-3\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right).4\left(\sqrt{5}+1\right)}.x$

Hay $x^3=-8-12x\Leftrightarrow x^3+12x+8=0\Leftrightarrow x^3+12x+9=1$

Vậy $A=1^{2020}=1$

2) Giải phương trình: $x+24=\left(x-3\right)\sqrt{-x^2+8x+48}$

Điều kiện: $-x^2+8x+48\geq 0$

Với điều kiện trên, phương trình tương đương:

$$2x+48-2\left(x-3\right)\sqrt{-x^2+8x+48}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9-2\left(x-3\right)\sqrt{-x^2+8x+48}+\left(-x^2+8x+48\right)=9$$

$$\Leftrightarrow\left(x-3-\sqrt{-x^2+8x+48}\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3-\sqrt{-x^2+8x+48}=3\\x-3-\sqrt{-x^2+8x+48}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{-x^2+8x+48}=x-6 & (1)\\\sqrt{-x^2+8x+48}=x & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1)

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+8x+48=x^2-12x+36\\x\geq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2+20x+12=0\\x\geq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2+20x+12=0\\x\geq 6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5+\sqrt{31}\\x=5-\sqrt{31}\end{array}\right.\\x\geq 6\end{cases}\Leftrightarrow x=5+\sqrt{31}$$

Giải (2)

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+8x+48=x^2\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2+8x+48=0\\x\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2+2\sqrt{7}\\x=2-2\sqrt{7}\end{array}\right.\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=2+2\sqrt{7}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{5+\sqrt{31};2+2\sqrt{7}\right\}$

Câu 3. *(4 điểm)*

1) Cho ba số thực a, b, c khác 0 thoả mãn $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=a+b+c$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^3+y^3=x^2-x+1$.

Lời giải

1) Ta có: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=2\ (*)$.

Nhân hai vế của $(*)$ với số a khác 0 ta được: $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{ab}{c+a}+\dfrac{ac}{a+b}=2a$

Nhân hai vế của $(*)$ với số b khác 0 ta được: $\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{bc}{a+b}=2b$

Nhân hai vế của $(*)$ với số c khác 0 ta được: $\dfrac{ac}{b+c}+\dfrac{bc}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=2c$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{ac}{a+b}+\frac{ab}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{bc}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=2a+2b+2c$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{c+a}\right)+\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{bc}{a+b}\right)+\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}\right)=2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+b\left(\frac{a+c}{c+a}\right)+c\left(\frac{a+b}{a+b}\right)+a\left(\frac{b+c}{b+c}\right)=2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+(a+b+c)=2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=a+b+c$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^3+y^3=x^2-x+1$.

$x^3+y^3=x^2-x+1\Leftrightarrow y^3=-x^3+x^2-x+1$

Trong khoảng $(0;1)$ không có số nguyên nào nên $x^2-x=x(x-1)>0,\forall x\in\mathbb{Z}\setminus\{0;1\}$

$$\Rightarrow x^2-x\ge 0,\forall x\in\mathbb{Z}$$

Do đó, $(-x)^3 < -x^3 + x^2 - x + 1$

Và $-x^3 + x^2 - x + 1 \le -x^3 + x^2 - x + 1 + 2(x^2 - x)$

$\Leftrightarrow -x^3 + x^2 - x + 1 \le (-x+1)^3$

Vậy $(-x)^3 < -x^3 + x^2 - x + 1 \le (-x+1)^3$

Từ đó $(-x)^3 < y^3 \le (-x+1)^3$

Nếu (x, y) là nghiệm nguyên của phương trình đã cho thì:

$$\begin{cases} y^3 = (-x+1)^3 \\ x \in \{0;1\} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) \in \{(x=1; y=0), (x=0; y=1)\}$$

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn đề bài là: $(x=1; y=0), (x=0; y=1)$

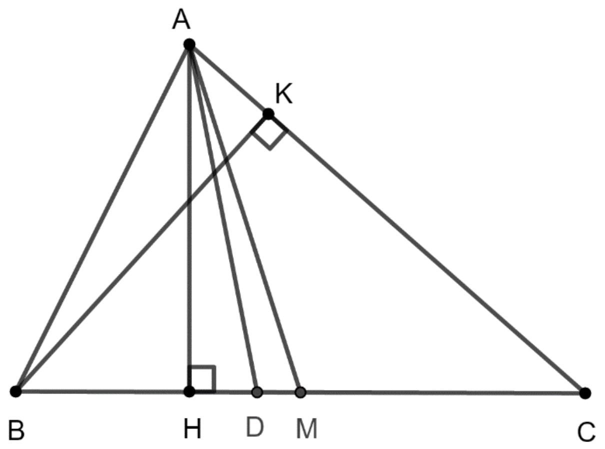
Câu 4. *(6 điểm)* Cho điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm A thay đổi sao cho $\widehat{BAC} = 60°$. Đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D.

1) Chứng minh $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$, trong đó S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.

2) Chứng minh $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \ge \frac{3}{2AD^2}$

Lời giải



1) Chứng minh $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$,

trong đó S_{ABC} là diện tích tam giác ABC

Kẻ đường cao BK của ABC

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BK.AC$

Trong tam giác vuông BKA,

$\sin A = \frac{BK}{AB} \Rightarrow BK = AB.\sin A$

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

2) Chứng minh $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC

$$\begin{aligned} AM^2 = AH^2 + HM^2 &= AB^2 - BH^2 + HM^2 \\ &= AB^2 + (HM + HB)(HM - HB) \\ &= AB^2 + MB.(HM - HB) \\ &= AB^2 + \frac{BC}{2}.(HM - HB) \ (1) \end{aligned}$$

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 = AC^2 - CH^2 + HM^2$$
$$= AC^2 - (HM + CH)(CH - HM)$$
$$= AC^2 - MC.(CH - HM)$$
$$= AC^2 - \frac{BC}{2}.(CH - HM) \quad (2)$$

Lấy $(1)+(2)$ ta được: $2AM^2 = AB^2 + \frac{BC}{2}.(HM - HB) + AC^2 - \frac{BC}{2}.(CH - HM)$

$$2AM^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{BC}{2}.(HM - HB - CH + HM)$$
$$2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$$

Suy ra $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \geq \frac{3}{2AD^2}$

Sử dụng kết quả của câu 1) ta có:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin 30° = \frac{1}{4}.AB.AD$$
$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AC.AD.\sin 30° = \frac{1}{4}.AC.AD$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}.AB.AD$$

Mà $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC}$

Nên $\frac{1}{4}.AB.AD + \frac{1}{4}.AC.AD = \frac{\sqrt{3}}{4}.AB.AC$

$$\Leftrightarrow AD(AB + AC) = \sqrt{3}.AB.AC$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \leq \sqrt{2.\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right)}$$

Từ đó $\frac{\sqrt{3}}{AD} \leq \sqrt{2.\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right)}$

Suy ra $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \geq \frac{3}{2AD^2}$

Dấu bằng xảy ra khi $AB = AC$

Câu 5. *(2 điểm)*

1) Cho các só dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geq 1$.

2) Trên bảng có ghi 2020 số: $\frac{1}{2020}$; $\frac{2}{2020}$; $\frac{3}{2020}$; … ; $\frac{2020}{2020}$. Mỗi lần thực hiện, cho phép xóa đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng số $a+b-2ab$. Hỏi sau 2019 lần thực hiện phép xóa, số còn lại trên bảng là số nào?

Lời giải

1) Cho các só dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc\ge 1$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2+2abc\ge 1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc-1\ge 0$ $(*)$

Do đó: $a+b+c=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a+b=\frac{3}{2}-c$

Nên $a^2+b^2+c^2+2abc-1=(a+b)^2-2ab+c^2+2abc-1$

$$=\left(\frac{3}{2}-c\right)^2-2ab+c^2+2abc-1=2ab(c-1)+2c^2-3c+\frac{5}{4}$$

Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $c\le b\le a$.

Mà $a+b+c=\frac{3}{2}\Rightarrow c\le\frac{1}{2}$

Xét hàm số bậc nhất biến t là:

$f(t)=2t(c-1)+2c^2-3c+\frac{5}{4}$, với $t=ab$ và $0<t=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{\left(\frac{3}{2}-c\right)^2}{4}$

Ta có $f(0)=2c^2-3c+\frac{5}{4}=2\left(c^2-\frac{3}{2}c+\frac{9}{16}\right)+\frac{1}{8}=2\left(c-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}>0,\forall c$

$$f\left(\frac{\left(\frac{3}{2}-c\right)^2}{4}\right)=2.\frac{\left(\frac{3}{2}-c\right)^2}{4}.(c-1)+2c^2-3c+\frac{5}{4}=\frac{\left(\frac{1}{2}-c\right)^2(c+1)}{2}\ge 0,\forall c$$

Từ đó ta có $f(t)\ge 0$ với mọi $0<t\le\frac{\left(\frac{3}{2}-c\right)^2}{4}$, tức là bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ ab=\frac{\left(\frac{3}{2}-c\right)^2}{4} \\ \frac{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2.(c+1)}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

2) Trên bảng có ghi 2020 số: $\frac{1}{2020}$; $\frac{2}{2020}$; $\frac{3}{2020}$; … ; $\frac{2020}{2020}$. Mỗi lần thực hiện, cho phép xóa đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng số $a+b-2ab$. Hỏi sau 2019 lần thực hiện phép xóa, số còn lại trên bảng là số nào?

Giả sử các số trên bảng đang là a_1, a_2, … , a_k. Ta cho tương ứng bảng này với tích $\left(2a_1-1\right)\left(2a_2-1\right)...\left(2a_k-1\right)$

Sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số $\left(2a-1\right)\left(2b-1\right)$ nhưng lại được thêm vào thừa số $2\left(a+b-2ab\right)-1=-\left(2a-1\right)\left(2b-1\right)$

Do đó, tích trên có giá trị tuyệt đối không thay đổi, chỉ đổi dấu.

Vì tích ban đầu bằng 0 (do có chứa thừa số $\left(2.\frac{1010}{2020}-1\right)$ nên số cuối cùng s cũng phải có tích bằng 0 nghĩa là tích cuối cùng bằng $2s-1=0 \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}$

☙ HẾT ❧

PHÒNG GD&ĐT THANH OAI
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN 9

Thời gian: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi: 25/11/2020

Câu 1. *(5 điểm)*

1) Cho biểu thức $A=\frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

2) Chứng minh rằng: $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}<2$ (2020 chữ số 2).

Câu 2. *(5 điểm)*

1) Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$.

2) Tìm các số nguyên x để biểu thức $x^4+2x^3+2x^2+x+3$ là một số chính phương.

Câu 3. *(4 điểm)*

1) Cho $P(x)=x^4+ax^3-bx^2+cx+d$, trong đó $a,\ b,\ c,\ d$ là hằng số.

Biết $P(-2)=6$, $P(-4)=12$, $P(-6)=18$. Tính $A=\frac{P(0)+P(-8)+437.P(-2)}{2020}$.

2) Với các số dương a, b thỏa mãn $a^3+b^3+6ab\le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab$$

Câu 4. *(5 điểm)*

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) có D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh tam giác HAB và tam giác ODE đồng dạng.

b) Kẻ các đường thẳng $DM\,//\,OA$, $EN\,//\,OB$, $FG\,//\,OC$ ($M\in AH$, $N\in BH$, $G\in CH$). Chứng minh các đường thẳng DM, EN, FG đồng quy.

2) Từ điểm M nằm trong tam giác ABC cho trước lần lượt vẽ các đường vuông góc MA', MB' MC' đến BC, CA, AB. Tìm vị trí của M để tích $MA'.MB'.MC'$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. *(1 điểm)* Cho dãy gồm 1000 số: $7;\ 77;\ 777;\ 7777;\ \ldots;\ 777\ldots7$. Chứng minh trong dãy trên tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2013.

HẾT

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN - LỚP 9
PHÒNG GD & ĐT THANH OAI
Năm học 2020 – 2021

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. *(5 điểm)*

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

2) Chứng minh rằng: $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}<2$ (2020 chữ số 2).

Lời giải

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

ĐKXĐ: $x\ge 0$; $x\ne 9$.

$$A=\frac{x\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(x+8\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

$$A=\frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2\overset{Cosi}{\ge}2.3-2=4.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A=4\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)^2=9$

$\Rightarrow\sqrt{x}+1=3\Rightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

2) Chứng minh rằng: $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}<2$ (2020 chữ số 2).

$A_1=\sqrt{2}<2$

$A_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+A_1}<\sqrt{2+2}=2$

$A_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+A_2}<\sqrt{2+2}=2$

…

$A_{2020}=A=\sqrt{2+A_{2019}}<\sqrt{2+2}=2$

$\Rightarrow\ A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}<2$ (đpcm).

Câu 2. *(5 điểm)*

1) Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$.

2) Tìm các số nguyên x để biểu thức $x^4+2x^3+2x^2+x+3$ là một số chính phương.

Lời giải

1) Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$.

Điều kiện: $2\le x\le 4$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x-2}-1+1-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}=(x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}-(2x+1)\right]=0$$

$$\left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}-(2x+1)=0\end{array}\right.$$

Với $2\le x\le 4$ thì $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\le 1$; $\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}\le 1$; $2x+1\ge 5$

nên $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}-(2x+1)<0$

Từ đó suy ra: $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2) Tìm các số nguyên x để biểu thức $x^4+2x^3+2x^2+x+3$ là một số chính phương.

Đặt $x^4+2x^3+2x^2+x+3=y^2$ (với y là số tự nhiên)

Ta có: $y^2=(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+x+3)=(x^2+x)^2+(x^2+x+3)$

Ta sẽ chứng minh: $a^2<y^2<(a+2)^2$ với $a=x^2+x$

Thật vậy: $y^2-a^2=x^2+x+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0\Rightarrow y^2>a^2$

$(a+2)^2-y^2=3x^2+3x+1=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0\Rightarrow y^2<(a+2)^2$

Do $a^2<y^2<(a+2)^2$ nên $y^2=(a+1)^2$

Hay $(x^2+x)+(x^2+x+3)=(x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$

Thử lại: với $x=1$ hoặc $x=-2$ biểu thức đã cho đều bằng $9=3^2$, thỏa mãn.

Vậy $x\in\{1;-2\}$.

Câu 3. *(4 điểm)*

1) Cho $P(x)=x^4+ax^3-bx^2+cx+d$, trong đó a, b, c, d là hằng số.

Biết $P(-2)=6$; $P(-4)=12$; $P(-6)=18$. Tính $A=\dfrac{P(0)+P(-8)+437.P(-2)}{2020}$.

2) Với các số dương a, b thỏa mãn $a^3+b^3+6ab\le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab$$

Lời giải

1) Cho $P(x)=x^4+ax^3-bx^2+cx+d$, trong đó a, b, c, d là hằng số.

Biết $P(-2)=6$; $P(-4)=12$; $P(-6)=18$. Tính $A=\dfrac{P(0)+P(-8)+437.P(-2)}{2020}$.

Đặt $Q(x)=P(x)+3x\Rightarrow Q(-2)=Q(-4)=Q(-6)=0$

$\Rightarrow -2;-4;-6$ là nghiệm của $Q(x)$, mà $Q(x)$ là đa thức bậc 4 nên $Q(x)$ có dạng:

$Q(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x-m)$

$\Rightarrow P(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x-m)-3x$

Tính được $P(0)=-48m$; $P(-8)=408+48m$

$A=\dfrac{-48m+408+48m+437.6}{202}=\dfrac{3030}{2020}=\dfrac{3}{2}$.

2) Với các số dương a, b thỏa mãn $a^3+b^3+6ab\le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab$$

Ta có: $a^3+b^3+6ab\le 8\Leftrightarrow (a+b-2)(a^2-ab+b^2+2a+2b+4)\le 0\Rightarrow a+b\le 2$

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{ab}+ab+\frac{3}{2ab}$$

$$P\ge\frac{4}{a^2+b^2+2ab}+2+\frac{6}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{9}{2}$ khi $a=b=1$.

Câu 4. *(5 điểm)*

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) có D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

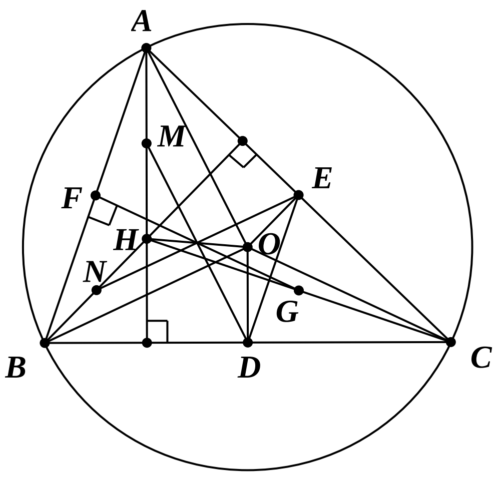
a) Chứng minh tam giác HAB và tam giác ODE đồng dạng.

b) Kẻ các đường thẳng $DM // OA$, $EN // OB$, $FG // OC$ ($M\in AH$, $N\in BH$, $G\in CH$). Chứng minh các đường thẳng DM, EN, FG đồng quy.

2) Từ điểm M nằm trong tam giác ABC cho trước lần lượt vẽ các đường vuông góc MA', MB' MC' đến BC, CA, AB. Tìm vị trí của M để tích $MA'.MB'.MC'$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) có D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.



a) Chứng minh tam giác HAB và tam giác ODE đồng dạng.

Chứng minh được $ED // = AB, OD // AH$ (cùng vuông góc BC)

$BH // OE$ (cùng vuông góc AC)

$\Rightarrow \widehat{ABH}=\widehat{DEO}$; $\widehat{BAH}=\widehat{EDO}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$\Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta DEO\,(g-g)$ (đpcm)

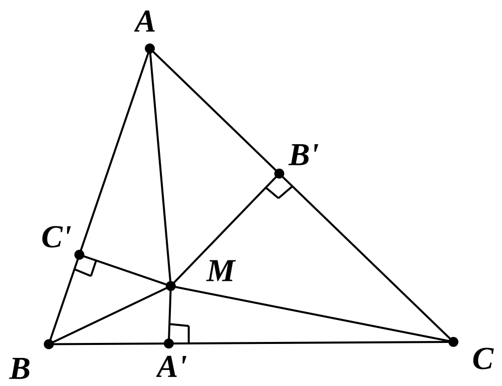
b) Kẻ các đường thẳng $DM // OA,\ EN // OB,\ FG // OC\ \left(M \in AH, N \in BH, G \in CH\right)$. Chứng minh các đường thẳng $DM,\ EN,\ FG$ đồng quy.

Từ câu a) suy ra: $OD // = \frac{1}{2}AH$

Chứng minh được tứ giác $AMDO$ là hình bình hành suy ra $OD = AM = MH$, dẫn đến tứ giác $MODH$ là hình bình hành. Nên DM đi qua trung điểm I của OH.

Chứng minh tương tự có $EN,\ FG$ đi qua I, nên các đường thẳng $DM,\ EN,\ FG$ đồng quy (đpcm)

2) Từ điểm M nằm trong tam giác ABC cho trước lần lượt vẽ các đường vuông góc $MA',\ MB',\ MC'$ đến $BC,\ CA,\ AB$. Tìm vị trí của M để tích $MA'.MB'.MC'$ đạt giá trị lớn nhất.



Đặt $MA' = x$, $MB' = y$, $MC' = z$; $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

$$S_{ABC} = S_{BMC} + S_{AMC} + S_{BMA} = \frac{1}{2}\left(ax + by + cz\right)$$

$$\Rightarrow ax + by + cz = 2S_{ABC}$$

$$MA'.MB'.MC' = xyz = \frac{1}{abc}\left(ax\right).\left(by\right).\left(cz\right) \le \frac{1}{abc}\left(\frac{ax + by + cz}{3}\right)^3 = \frac{8S^3{}_{ABC}}{27abc}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ax = by = cz$, suy ra diện tích các tam giác BMC, tam giác AMC, tam giác AMB bằng nhau, khi đó M là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy $MA'.MB'.MC'$ lớn nhất khi M là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu 5. *(1 điểm)*

Cho dãy gồm 1000 số: $7;\ 77;\ 777;\ 7777;\ \ldots;\ 777\ldots7$. Chứng minh trong dãy trên tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2013.

Lời giải

Tách 2013 = 3.11.61 trong đó 3; 11; 61 đôi một nguyên tố cùng nhau.

Sử dụng điều kiện chia hết cho đồng thời 3 và 11, đó là những số có số chữ số là bội của 6.

Đó là những số: 777777 (6 chữ số), 777777777777 (12 chữ số), 777…77 (996 chữ số)

Số số hạng của dãy trên là $(996-6):6+1=166$

Khi chia 166 số trên cho 61 thì có 166 số dư, mà số dư của các phép chia này chỉ nhận 61 giá trị từ 0 đến 60, nên theo nguyên lý Dirichle sẽ tồn tại 2 số trong dãy trên có cùng số dư khi chia cho 61 $\Rightarrow$ hiệu của hai số đó chia hết cho 61.

Hiệu của hai số có dạng: $77...7.10^n$ (có k số 7, $6 \le k \le 990$)

Mà $(10^n,\ 61)=1$ suy ra 77...7 chia hết cho 61.

Vậy trong 1000 số đã cho tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2013.

HẾT

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẬN TÂN PHÚ
ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài 120 phút

Câu 1. (*3 điểm*) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn:
$a^{2019}+b^{2019}=a^{2020}+b^{2020}=a^{2021}+b^{2021}$

Tính giá trị của biểu thức $P=2022-(a+b-ab)^{2022}$

Câu 2. (*2 điểm*) Giải các phương trình:

a) $x^2-7x+12=\sqrt{(x-3)(x^2-x-6)}$

b) $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

Câu 3. (*3 điểm*)

a) Cho x là số thực dương, chứng minh rằng: $\dfrac{1}{3x^2+1}\ge\dfrac{-3}{8}x+\dfrac{5}{8}$

b) Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{674}{3a^2+1}+\dfrac{674}{3b^2+1}+\dfrac{674}{3c^2+1}\ge\dfrac{1011}{2}$

Câu 4. (*4 điểm*)
Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn nội tiếp (tâm I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA tại D, E. Gọi K là điểm đối xứng của D qua trong điểm M của BC. Dựng đường kính DF của đường tròn (I).

a) Chứng minh $2BD=BA+BC-AC$ và $A;F;K$ thẳng hàng.

b) Đường thẳng vuông góc với BC tại K cắt tia DE tại Q. Gọi N là trung điểm của QK. Chứng minh BN vuông góc với AK

Câu 5. (*2 điểm*)
Cho tam giác ABC, $AB>AC$. Trên cạnh AB lấy hai điểm D, E sao cho $AD=BE$ và D nằm giữa A và E. Đường thẳng qua E, song song với AC cắt các đường thẳng BC, CD thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng: $\dfrac{ME}{MN}=\left(\dfrac{CD}{CN}\right)^2$

Câu 6. (*3 điểm*) Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn: $x^4+x^2-y^2+y+10=0$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9 QUẬN TÂN PHÚ
Năm học: 2020-2021

Câu 1. (*3 điểm*) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn:
$a^{2019}+b^{2019}=a^{2020}+b^{2020}=a^{2021}+b^{2021}$

Tính giá trị của biểu thức $P=2022-(a+b-ab)^{2022}$

Lời giải

$a^{2019}+b^{2019}=a^{2020}+b^{2020}=a^{2021}+b^{2021}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{2019}+b^{2019}=a^{2020}+b^{2020} \\ a^{2020}+b^{2020}=a^{2021}+b^{2021} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{2019}-a^{2020}=b^{2020}-b^{2019} \\ a^{2020}-a^{2021}=b^{2021}-b^{2020} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{2019}(1-a)=b^{2019}(b-1) \\ a^{2020}(1-a)=b^{2020}(b-1) \end{cases} (*)$$

TH1: Nếu $a=1$ tính được $b=1$

TH2: Nếu $a\neq 1$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2019}(1-a)=b^{2019}(b-1) \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 1-a=b-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$$

Vậy $a=b=1$.

$\Rightarrow P=2022-(a+b-ab)^{2022}=2021$

Câu 2. (*2 điểm*) Giải các phương trình:

a) $x^2-7x+12=\sqrt{(x-3)(x^2-x-6)}$

b) $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

Lời giải

a) $x^2-7x+12=\sqrt{(x-3)(x^2-x-6)}$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-4)=\sqrt{(x-3)^2(x+2)}$ (Điều kiện: $x\geq -2$)

$\Leftrightarrow (x-3)(x-4)-|x-3|\sqrt{(x+2)}=0$ (1)

+ Nếu $x \ge 3$

$$(1) \Leftrightarrow (x-3)\left(x-4-\sqrt{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+2}=x-4 \;\; (2) \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \ge 0 \\ x+2 = x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \ge 0 \\ x^2-9x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=7$$

+ Nếu $-2 \le x < 3$

$$(1) \Leftrightarrow (x-3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+2}=4-x \;\; (3) \end{array}\right.$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \ge 0 \\ x+2 = x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ x^2-9x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy $S=\{2;3;7\}$

b) $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4$

Ta có: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1+1-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}=(x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}=2x+1(1) \end{array}\right.$$

Từ điều kiện $2 \le x \le 4$. Ta thấy $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} \le 1$;

$\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}} \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}} \le 2$; $2x+1 \ge 5$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy $S=\{3\}$

Câu 3. *(3 điểm)*

a) Cho x là số thực dương, chứng minh rằng: $\dfrac{1}{3x^2+1} \ge \dfrac{-3}{8}x+\dfrac{5}{8}$

b) Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{674}{3a^2+1}+\dfrac{674}{3b^2+1}+\dfrac{674}{3c^2+1} \ge \dfrac{1011}{2}$

Lời giải

a) Xét hiệu: $\frac{1}{3x^2+1}-\left(\frac{-3}{8}x-\frac{5}{8}\right)=\frac{9x^3-15x^2+3x+3}{8\left(3x^2+1\right)}=\frac{3\left(x-1\right)^2\left(3x+1\right)}{8\left(3x^2+1\right)}\geq 0\forall x>0$

$\Rightarrow \frac{1}{3x^2+1}\geq \frac{-3}{8}x+\frac{5}{8}$. Dấu "=" xảy ra khi x = 1

b) Áp dụng kết quả câu a ta được:

$\frac{1}{3a^2+1}\geq \frac{-3}{8}a+\frac{5}{8}\Rightarrow \frac{674}{3a^2+1}\geq \frac{-1011}{4}a+\frac{1685}{4}$

Tương tự thì: $\frac{674}{3b^2+1}\geq \frac{-1011}{4}b+\frac{1685}{4}$; $\frac{674}{3c^2+1}\geq \frac{-1011}{4}c+\frac{1685}{4}$

Cộng tương ứng:

$\frac{674}{3a^2+1}+\frac{674}{3b^2+1}+\frac{674}{3c^2+1}\geq \frac{-1011}{4}\left(a+b+c\right)+\frac{5055}{4}\geq \frac{-1011}{4}.3+\frac{5055}{4}=\frac{1011}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

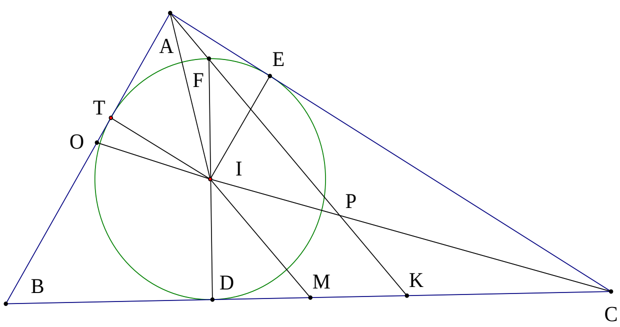
Câu 4. (*4 điểm*)

Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn nội tiếp (tâm I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA tại D, E. Gọi K là điểm đối xứng của D qua trong điểm M của BC. Dựng đường kính DF của đường tròn $\left(I\right)$.

a) Chứng minh $2BD=BA+BC-AC$ và $A;F;K$ thẳng hàng.

b) Đường thẳng vuông góc với BC tại K cắt tia DE tại Q. Gọi N là trung điểm của QK. Chứng minh BN vuông góc với AK

Lời giải



a) Chứng minh $2BD=BA+BC-AC$ và $A;F;K$ thẳng hàng.

Gọi T là tiếp điểm của AB với $\left(I\right)$.

Ta có: $BT=BD$; $AT=AE$; $CD=CE$

Mà $BA+BC-AC=BT+TA+BD+DC-\left(AE+EC\right)$

$=BD+AE+BD+CE-AE-EC$

$=2BD$ (đpcm)

Gọi P,O lần lượt là giao điểm của CI với $FK;AB$

Gọi độ dài các cạnh BC, AC và AB tương ứng là a,b,c.

$$\Rightarrow \frac{CK}{BC}=\frac{BD}{BC}=\frac{a+c-b}{2a}\Rightarrow \frac{CK}{CM}=\frac{a+c-b}{a}\Rightarrow \frac{BC-CK}{CK}=\frac{BK}{CK}=\frac{a+b-c}{a+c-b}$$

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AO}{BO}=\frac{b}{a}\Rightarrow \frac{AO}{AB}=\frac{b}{b+a}\Rightarrow AO=\frac{bc}{b+a}$$

$$\frac{CI}{IO}=\frac{AC}{AO}=\frac{b+a}{c}\Rightarrow \frac{CI}{CO}=\frac{a+b}{a+b+c}$$

Áp dụng định lý Thalet

$$\Rightarrow \frac{CP}{CI}=\frac{CK}{CM}=\frac{a+c-b}{a}\Rightarrow \frac{CP}{CO}=\frac{CP}{CI}.\frac{CI}{CO}=\frac{a+b}{a+b+c}.\frac{a+c-b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PO}=\frac{(a+b)(a+c-b)}{a(a+b+c)-(a+b)(a+c-b)}=\frac{(a+b)(a+c-b)}{b(a+b-c)}$$

Xét tam giác ΔCBO có

$$\frac{BK}{CK}.\frac{PC}{PO}.\frac{AO}{AB}=\frac{a+b-c}{a+c-b}.\frac{(a+b)(a+c-b)}{b(a+b-c)}\frac{b}{b+a}=1$$

Theo định lý Menelaus $\Rightarrow A,P,K$ hay A,F,K thẳng hàng.

b) Đường thẳng vuông góc với BC tại K cắt tia DE tại Q. Gọi N là trung điểm của QK. Chứng minh BN vuông góc với AK.

CI là trung trực của DE.

$$\Rightarrow \widehat{CID}=\widehat{QDK}\left(=90^\circ-\widehat{ICD}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta CID \sim \Delta QDK\,(g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{QK}=\frac{ID}{GK}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{2NK}=\frac{ID}{DK}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{NK}=\frac{2ID}{DK}=\frac{FD}{DK} \text{ mà } CD=BK\Rightarrow \frac{BK}{NK}=\frac{FD}{DK}$$

$$\Rightarrow \Delta BKN \sim \Delta FDK\,(c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{NBK}=\widehat{KFD}$$

Suy ra BN vuông góc với AK.

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho tam giác ABC, $AB>AC$. Trên cạnh AB lấy hai điểm D, E sao cho $AD=BE$ và D nằm giữa A và E. Đường thẳng qua E, song song với AC cắt các đường thẳng BC, CD thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng: $\frac{ME}{MN}=\left(\frac{CD}{CN}\right)^2$

Lời giải

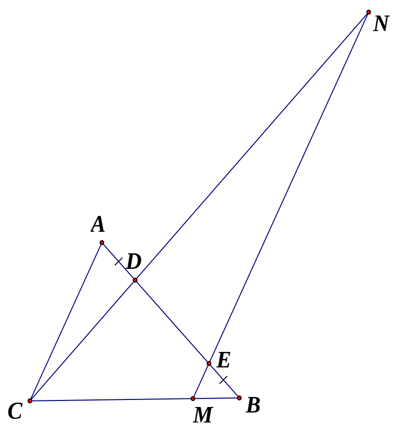
Ta có $ME//AC\Rightarrow \frac{ME}{AC}=\frac{BE}{BA}$

ΔDEN có $AC//EN \Rightarrow \dfrac{AC}{EN} = \dfrac{AD}{DE}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{EN} = \dfrac{ME}{AC}.\dfrac{AC}{EN} = \dfrac{BE}{BA}.\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AD^2}{AB.DE}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{ME+EN} = \dfrac{AD^2}{AD^2+AB.DE} = \dfrac{AD^2}{AD^2+DE.(DE+2AD)}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MN} = \dfrac{AD^2}{(AD+DE)^2} = \dfrac{AD^2}{AE^2} = \left(\dfrac{AD}{AE}\right)^2 = \left(\dfrac{CD}{CN}\right)^2$



Câu 6. (*3 điểm*) Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn: $x^4+x^2-y^2+y+10=0$

Lời giải

Với x,y là các số nguyên:

$x^4+x^2-y^2+y+10=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=-10 \Leftrightarrow \left(x^2+y\right)\left(x^2-y+1\right)=-10$

Vì $(x^2+y)+\left(x^2-y+1\right)=2x^2+1\ge 1$ nên $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y=5\\x^2-y+1=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y=-2\\x^2-y+1=5\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y=10\\x^2-y+1=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y=-1\\x^2-y+1=10\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\\y=4\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\\y=-3\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2\\y=6\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2\\y=-5\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy tập các cặp số nguyên (x,y) là:

$\{(1;4),(-1;4),(1;-3),(-1;-3),(2;6),(-2;6);(2;-5);(-2;-5)\}$

☙HẾT❧

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN THỌ XUÂN
ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức:

$$A=\left(1-\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$ Với $\left(x\ge 0;x\ne 1;x\ne 4;x\ne 9\right)$

2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức A có giá trị nguyên.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $\sqrt{x^4+2x^2+9}=2x^2+x-6$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3-(1+3x)y^2+3xy-3x+y=0 \\ x^2+9x+20=2\sqrt{y+10} \end{cases}$.

Câu 3. (4,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn: $3(x-2y+1)(6x-y+2)+11y=8$.

2) Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không phải là số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M cố định ở bên ngoài đường tròn. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD đến đường tròn $(O;R)$, với A, B là các tiếp điểm. C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $MC<MD$, $CD<2R$. Gọi E là trung điểm của CD.

1) Chứng minh bốn điểm A, E, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi F là giao điểm của AB và OE. Chứng minh FC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

3) Gọi T là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn (O). Tiếp tuyến qua T của đường tròn (O) lần lượt cắt MA, MB tại các điển I, K. Chứng minh chu vi tam giác MIK không đổi. Xác định vị trí của điểm T trên cung nhỏ AB sao cho tam giác MIK có diện tích lớn nhất.

Câu 5. (2 điểm) Cho các số a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+8}+\sqrt{b^2+8}+\sqrt{c^2+8}\le a+b+c+6$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9 HUYỆN THỌ XUÂN
Năm học: 2020-2021

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức:

$$A=\left(1-\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) \text{ Với } \left(x\ge 0;x\ne 1;x\ne 4;x\ne 9\right)$$

2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức A có giá trị nguyên.

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức:

$$A=\left(1-\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

$$=\left[1-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]:\frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức A có giá trị nguyên.

Với $x\ge 0;x\ne 1;x\ne 4;x\ne 9$

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=1+\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}$

Ta có: $\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}<0\Rightarrow 1+\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}<1$ (1)

Lại có: $\sqrt{x}+1\ge 1\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\le 1\Rightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}\ge -3\Rightarrow 1+\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}\ge -2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $-2\le A<1$

Mà A nguyên nên $A\in\left\{-2;-1;0\right\}$

- $A=-2\Rightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}=-3\Rightarrow \sqrt{x}+1=1\Rightarrow x=0\,(\text{tm})$

· $A=-1\Rightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}=-2\Rightarrow \sqrt{x}+1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}(\text{tm})$

· $A=0\Rightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}=-1\Rightarrow \sqrt{x}+1=3\Rightarrow \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4(ktm)$

Vậy $x\in\left\{0;\dfrac{1}{4}\right\}$ thì A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $\sqrt{x^4+2x^2+9}=2x^2+x-6$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3-(1+3x)y^2+3xy-3x+y=0 \\ x^2+9x+20=2\sqrt{y+10} \end{cases}$.

Lời giải

1) Giải phương trình: $\sqrt{x^4+2x^2+9}=2x^2+x-6$.

ĐKXĐ: $2x^2+x-6\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{3}{2} \\ x\le -2 \end{array}\right.$

$\sqrt{x^4+2x^2+9}=2x^2+x-6\Leftrightarrow x^4+2x^2+9=\left(2x^2+x-6\right)^2$

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của PT, chia cả 2 vế của PT cho x^2 ta có

$\dfrac{x^4+2x^2+9}{x^2}=\dfrac{(2x^2+x-6)^2}{x^2}\Leftrightarrow x^2+\dfrac{9}{x^2}+2=\left[2\left(x-\dfrac{3}{x}\right)+1\right]^2 \ (*)$

Đặt $x-\dfrac{3}{x}=y\Rightarrow x^2+\dfrac{9}{x^2}=y^2+6$ thay vào PT (*) ta có:

$y^2+8=(2y+1)^2\Leftrightarrow 3y^2+4y-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{-7}{3} \end{array}\right.$

Với $y=1\Rightarrow x-\dfrac{3}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Với $y=\dfrac{-7}{3}\Rightarrow x-\dfrac{3}{x}=\dfrac{-7}{3}\Leftrightarrow 3x^2+7x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-7-\sqrt{157}}{6} \\ x_2=\dfrac{-7+\sqrt{157}}{6} \end{array}\right.$

Kết hợp ĐKXĐ suy ra tập nghiệm của PT là $S=\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{-7-\sqrt{157}}{6}\right\}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3-(1+3x)y^2+3xy-3x+y=0(1) \\ x^2+9x+20=2\sqrt{y+10}\,(2) \end{cases}$

ĐK: $y+10\ge 0$

Xét PT (1) ta có

$y^3-(1+3x)y^2+3xy-3x+y=0 \Leftrightarrow y^3+1-(1+3x)(y^2-y+1)=0$

$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y+1)-(1+3x)(y^2-y+1)=0$

$\Leftrightarrow (y-3x)(y^2-y+1)=0$ mà $y^2-y+1>0 \Rightarrow y=3x$

Thay $y=3x$ vào PT (2) ta có

$(2)\Leftrightarrow x^2+9x+20-2\sqrt{3x+10}=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+3x+11-2\sqrt{3x+10}=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+\frac{9x^2+66x+121-12x-40}{3x+11+2\sqrt{3x+10}}=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+\frac{9x^2+54x+81}{3x+11+2\sqrt{3x+10}}=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2\left(1+\frac{9}{3x+11+2\sqrt{3x+10}}\right)=0$

Mặt khác $3x+11+2\sqrt{3x+10}=3x+10+2\sqrt{3x+10}+1=\left(\sqrt{3x+10}+1\right)^2>0$

$\Rightarrow 1+\frac{9}{3x+11+2\sqrt{3x+10}}>0$

Suy ra $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \Rightarrow y=-9$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x=-3 \\ y=-9 \end{cases}$.

Câu 3. (4,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn: $3(x-2y+1)(6x-y+2)+11y=8$.

2) Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $3(x-2y+1)(6x-y+2)+11y=8$

$\Leftrightarrow 3\left[(x-2y)(6x-y)+2x-4y+6x-y+2\right]+11y=8$

$\Leftrightarrow 3(x-2y)(6x-y)+24x-4y+6=8$

$\Leftrightarrow (3x-6y)(6x-y)+4(6x-y)=2$

$\Leftrightarrow (3x-6y+4)(6x-y)=2$

$3x-6y+4$	-2	-1	1	2
$6x-y$	-1	-2	2	1
x	0	$\frac{-7}{33}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{8}{33}$
y	1	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{5}{11}$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(x, y)=(0;1)$.

2) Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không phải là số chính phương.

Giả sử b^2-4ac là số chính phương, đặt $b^2-4ac=n^2 \Rightarrow 4ac=b^2-n^2$

Ta có: $4a.\overline{abc}=400a^2+40ab+4ac=(20a)^2+2.(20a).b+b^2-n^2$

$=(20a+b)^2-n^2=(20a+b-n)(20a+b+n)$

Trong hai số $20a+b-n$ và $20a+b+n$ có một số chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$

Mặt khác, $b^2-n^2=4ac>0 \Rightarrow n<b$

Do đó, $20a+b-n<20a+b+n<100a+10b+c=\overline{abc}$

Cả hai số $20a+b-n$ và $20a+b+n$ đều nhỏ hơn $\overline{abc}$.

Vậy b^2-4ac không phải là số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

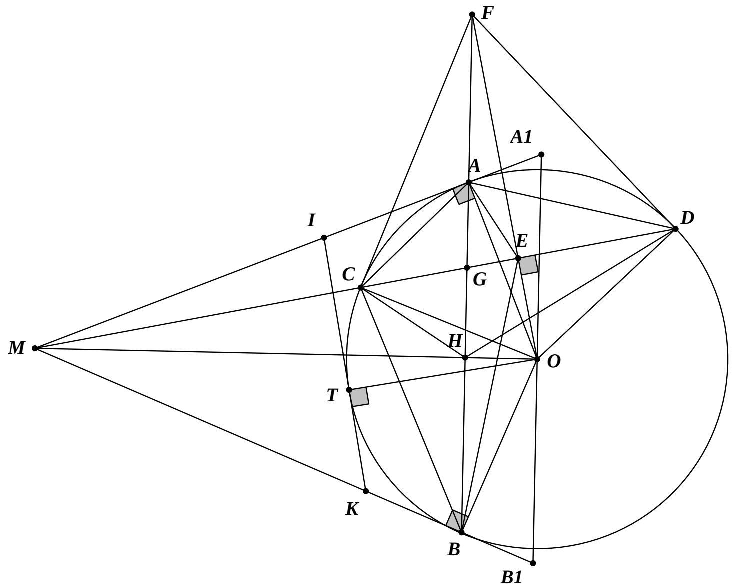
Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M cố định ở bên ngoài đường tròn. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD đến đường tròn $(O;R)$, với A, B là các tiếp điểm. C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $MC<MD$, $CD<2R$. Gọi E là trung điểm của CD.

1) Chứng minh bốn điểm A, E, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi F là giao điểm của AB và OE. Chứng minh FC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

3) Gọi T là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn (O). Tiếp tuyến qua T của đường tròn (O) lần lượt cắt MA, MB tại các điển I, K. Chứng minh chu vi tam giác MIK không đổi. Xác định vị trí của điểm T trên cung nhỏ AB sao cho tam giác MIK có diện tích lớn nhất.

Lời giải



1) Chứng minh bốn điểm A, E, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

Xét tứ giác $AOBM$ có:

$\widehat{MAO} = 90°$ (vì MA là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)

$\widehat{MBO} = 90°$ (vì MB là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)

$\Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AOMB$ nội tiếp đường tròn đường kính MO (1)

Vì E là trung điểm của đoạn thẳng CD nên $OE \perp CD$

Xét ΔMOE vuông tại E nên ΔMOE nội tiếp đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, E, O, B, M cùng nằm trên đường tròn đường kính MO

Vậy bốn điểm A, E, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi F là giao điểm của AB và OE. Chứng minh FC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

Gọi $\{H\} = AB \cap MO$; $\{G\} = AB \cap CD$.

Ta có: $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OA = OB$ $(= R)$

Suy ra: OM là đường trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow OM$ vuông góc AB tại H.

Xét tam giác OAM vuông tại A có đường cao AH, ta có: $MA^2 = MH.MO$

Ta chứng minh được $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow MA^2 = MC.MD$

Suy ra: $MH.MO = MC.MD$

Khi đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CHOD$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow$ $\widehat{DHO} = \widehat{OCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OD)

mà $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$

$\Rightarrow \widehat{OHD} = \widehat{ODC}$ hay $\widehat{OHD} = \widehat{ODM}$ $\Rightarrow \Delta OHD \backsim \Delta ODM$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OMD}$ hay $\widehat{ODH} = \widehat{OMG}$ (3)

Xét ΔMHG và ΔFEG, có:

$\widehat{MGH} = \widehat{FGE}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{MHG} = \widehat{FEG} = 90°$

suy ra: $\widehat{HMG} = \widehat{EFG}$ hay $\widehat{OME} = \widehat{OFH}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{ODH} = \widehat{OFH}$

$\Rightarrow$ tứ giác $OHDF$ nội tiếp đường tròn đường kính OF

mà tứ giác $OHCD$ nội tiếp đường tròn (cmt)

Suy ra 5 điểm O, H, C, F, D cùng nằm trên đường tròn đướng kính OF

$\Rightarrow \widehat{OCF} = 90°$ hay $FC \perp CO$

$\Rightarrow FC$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ (đpcm).

Cách 2:

Có $\Delta OEM \backsim \Delta OHF\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{OE}{OH} = \dfrac{OM}{OF} \Rightarrow OE.OF = OM.OH = OA^2 = OC^2$.

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OC}{OF}$, có $\widehat{EOC} = \widehat{COF}$.

$\Rightarrow \Delta OEC \backsim \Delta OCF\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OEC} = \widehat{OCF} = 90°$, có $D \in (O)$.

$\Rightarrow FC$ tiếp xúc với đường tròn (O) tại C.

3) Gọi T là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn (O). Tiếp tuyến qua T của đường tròn (O) lần lượt cắt MA, MB tại các điển I, K. Chứng minh chu vi tam giác MIK không đổi. Xác định vị trí của điểm T trên cung nhỏ AB sao cho tam giác MIK có diện tích lớn nhất.

Do IK là tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại T nên $IT = IA$ và $KT = KB$

$\Rightarrow IK = IT + KT = IA + KB$

Ta có: $C_{MIK} = MI + MK + IK = MI + MK + IA + KB = MA + MB = 2MA$

mà điểm O và M cố định nên MA không đổi. Do đó C_{MIK} không đổi (đpcm)

Qua O kẻ đường thẳng song song AB cắt MA tại A_1, cắt MB tại B_1.

Ta có: $\widehat{KOI} = \widehat{KOT} + \widehat{TOI} = \frac{1}{2}\widehat{BOT} + \frac{1}{2}\widehat{TOA} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{AOM} = \widehat{MA_1B_1} = \widehat{MB_1A_1}$

Từ đó suy ra $\Delta IOA_1 \backsim \Delta IOK \backsim \Delta OB_1K$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{IA_1}{OA_1} = \frac{OB_1}{B_1K}$ hay $IA_1.B_1K = OA_1.OB_1 = \frac{A_1B_1^{\,2}}{4}$ (không đổi)

Ta có: $S_{MIK} = S_{MA_1B_1} - S_{KOI} - S_{IOA_1} - S_{KOB_1} = \frac{1}{2}\left[MO.A_1B_1 - R\left(IK + IA_1 + KB_1\right)\right]$

mà $MI + IK + KM = 2MA$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow IK = 2MA - MI - MK = 2MA - \left(MA_1 - IA_1\right) - \left(MB_1 - KB_1\right) = 2MA - 2MA_1 + IA_1 + KB_1$

$\Rightarrow S_{IMK} = \frac{1}{2}\left[MO.A_1B_1 - R\left(2MA - 2MA_1 + 2IA_1 + 2KB_1\right)\right]$

$= \frac{1}{2}MO.A_1B_1 + R.AA_1 - R\left(IA_1 + KB_1\right)$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có: $IA_1 + KB_1 \ge 2\sqrt{IA_1.KB_1} = 2\sqrt{\frac{A_1B_1^{\,2}}{4}} = A_1B_1$

$\Rightarrow S_{IMK} \le \frac{1}{2}MO.A_1B_1 + R.AA_1 - RA_1B_1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow IA_1 = KB_1 \Rightarrow IK // AB$.

Câu 5. (2 điểm) Cho các số a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + 8} + \sqrt{b^2 + 8} + \sqrt{c^2 + 8} \le a + b + c + 6$.

Lời giải

Cộng thêm hai vế của $ab + bc + ca + abc = 4$ cho $ab + bc + ca + 4\left(a + b + c\right) + 8$ ta được:

$abc + 2\left(ab + bc + ca\right) + 4\left(a + b + c\right) + 8 = 12 + 4\left(a + b + c\right) + ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow \left(a + 2\right)\left(b + 2\right)\left(c + 2\right) = \left(a + 2\right)\left(b + 2\right) + \left(b + 2\right)\left(c + 2\right) + \left(c + 2\right)\left(a + 2\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$$

Do vậy ta có: $\frac{6}{a+2}+\frac{6}{b+2}+\frac{6}{c+2}=6$

Ta sẽ đi chứng minh mệnh đề sau: $\sqrt{a^2+8}\le a+\frac{6}{a+2}\Leftrightarrow (a+2)\sqrt{a^2+8}\le a^2+2a+6$

Thật vậy theo bđt Cô si ta có: $(a+2)\sqrt{a^2+8}\le \frac{(a+2)^2+a^2+8}{2}=a^2+2a+6$

Như vậy mệnh đề được chứng minh

Tương tự ta thu được: $\sqrt{b^2+8}\le b+\frac{6}{b+2}$ và $\sqrt{c^2+8}\le c+\frac{6}{c+2}$

Cộng lại ta có:

$$\sqrt{a^2+8}+\sqrt{b^2+8}+\sqrt{c^2+8}\le a+b+c+6\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)=a+b+c+6 \text{ (đpcm)}$$

HẾT

ĐỀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN THI HSG TỈNH THANH HOÁ

NĂM HỌC: 2020 - 2021

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Bài 1 ***(4,0 điểm)***

1) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1$.

2) Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}$ với x thỏa mãn: $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$.

Bài 2 ***(4,0 điểm)***

1) Giải phương trình: $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{8}$.

2) Giải phương trình: $2x^2-x+3=3\sqrt{x^3+1}$.

Bài 3 ***(4,0 điểm)***

1) Cho x, y là các số nguyên $(x\ne 1; y\ne 1)$ sao cho $\dfrac{x^4-1}{y+1}=\dfrac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên. Chứng minh x^4y^4-1 chia hết cho $y+1$.

2) Tìm số nguyên tố x, y, z thỏa mãn: $x^y+1=z^2$.

Bài 4 ***(6,0 điểm).*** Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên HB, HC lấy M, N sao cho $AM\perp CM$; $AN\perp BN$.

a) Chứng minh rằng: $AM=AN$.

b) Gọi G là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC. Chứng minh: $BG.CD=CG.BD$.

c) Chứng minh đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với EF, đường thẳng đi qua điểm B vuông góc với DF và đường thẳng đi qua điểm C vuông góc với DE đồng quy tại một điểm.

Bài 5 ***(2,0 điểm).*** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

HẾT

ĐÁP ÁN ĐỀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN THI HSG TỈNH
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Môn Toán: Lớp 9

Bài 1 *(4,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1$.

2) Tính giá trị biểu thức: $P=\dfrac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}$ với x thỏa mãn: $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$.

LỜI GIẢI

1) Ta có:

$$A=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(1+x-\sqrt{(1+x)(1-x)}+1-x\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2\sqrt{(1+x)(1-x)}\right)}=\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}|x|$$

2) Ta có:

$$\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=3x-1$$

Khi đó:

$$x^3=x^2.x=(3x-1).x=3x^2-x=3(3x-1)-x=8x-3$$

$$x^4=x^3.x=(8x-3).x=8x^2-3x=8(3x-1)-3x=21x-8$$

$$x^5=x^4.x=(21x-8).x=21x^2-8x=21(3x-1)-8x=55x-21$$

Suy ra:

$$P=\frac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}=\frac{55x-21-4(8x-3)-17x+9}{21x-8+3(3x-1)+2x+11}=\frac{6x}{32x}=\frac{3}{16}.$$

Vậy với $x\ne 0\Rightarrow P=\dfrac{3}{16}$.

Bài 2 *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{8}$.

2) Giải phương trình: $2x^2-x+3=3\sqrt{x^3+1}$.

LỜI GIẢI

1) Điều kiện xác đinh: $x \neq -4$; $x \neq -5$; $x \neq -6$; $x \neq -7$

$$\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7-x-4)=(x+4)(x+7)$$

$$\Leftrightarrow 54=x^2+11x+28$$

$$\Leftrightarrow x^2+11x-26=0 \Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+13=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=-13 \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-13;2\}$

2) Điều kiện xác định: $x \geq -1$

$$2x^2-x+3=3\sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow (x+1)+2(x^2-x+1)=3\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-x+1} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b=\sqrt{x+1} \geq 0 \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$b^2+2a^2-3ab=0 \Leftrightarrow (a-b)(2a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 2a=b \end{array}\right.$$

+) TH1: Nếu $a=b$, ta có:

$$\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1} \Rightarrow x^2-x+1=x+1 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=2 \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

+) TH2: Nếu $2a=b$, ta có:

$$2\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1} \Rightarrow 4x^2-4x+4=x+1 \Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow 4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{23}{16}=0$$

(vô nghiệm, vì $4\left(x-\dfrac{5}{8}\right)^2+\dfrac{23}{16}>0,\ \forall x$)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{0;2\}$

Bài 3 ***(4,0 điểm)***

1) Cho x, y là các số nguyên $(x \neq 1; y \neq 1)$ sao cho $\dfrac{x^4-1}{y+1}+\dfrac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên.

Chứng minh x^4y^4-1 chia hết cho $y+1$.

2) Tìm số nguyên tố x, y, z thỏa mãn: $x^y+1=z^2$.

LỜI GIẢI

1) Đặt $\frac{x^4-1}{y+1}=\frac{a}{b}$; $\frac{y^4-1}{x+1}=\frac{m}{n}$; $(a,b)=(m,n)=1$ và $b,n>0$.

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=\frac{an+bm}{bn}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}an+bm\vdots b\\an+bm\vdots n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}an\vdots b\\bm\vdots n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\vdots b\\b\vdots n\end{cases}\Rightarrow b=n$$

Mặt khác: $x^4-1\vdots y+1$; $y^4-1\vdots x+1$ (với x, y là số nguyên)

$\Rightarrow\frac{a}{b}.\frac{m}{n}\in\mathbb{Z}$ nên $\Rightarrow am\vdots n\Rightarrow a\vdots n$ hay $a\vdots b$.

$\Rightarrow x^4-1\vdots y+1$

$\Rightarrow y^4\left(x^4-1\right)+y^4-1\vdots y+1\Rightarrow x^4y^4-1\vdots y+1$

Vậy $x^4y^4-1\vdots y+1$

2) Ta có:

$x^y+1=z^2\Rightarrow z^2$ và x^y khác tính chẵn, lẻ $\Rightarrow x$; z khác tính chẵn, lẻ.

Mà x; z là các số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:

+) TH1: $x=2$, $z\neq 2$ ta có:

$2^y+1=z^2\Rightarrow 2^y=z^2-1=(z-1)(z+1)\Rightarrow z-1$ và $z+1$ là lũy thừa của 2

Đặt $\begin{cases}z-1=2^u\\z+1=2^v\end{cases}$ $\left(u,\ v\in\mathbb{N}^*,\ v>u,\ u+v=y\right)$.

Khi đó: $2^v-2^u=2\Leftrightarrow 2^u\left(2^{v-u}-1\right)=2\Leftrightarrow\begin{cases}2^u=2\\2^{v-u}-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=1\end{cases}$ (vì $2^{v-u}-1$ là số lẻ)

Suy ra $z=3$ và $y=3$ (thỏa mãn)

+) TH 2: $z=2$, $x\neq 2$, ta có:

$x^y+1=4\Leftrightarrow x^y=3$

Do x là số lẻ nên suy ra $x=3$, $y=1$ (loại)

Vậy $(x,y,z)=(2;3;3)$

Bài 4 ***(6,0 điểm).*** Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên HB, HC lấy M, N sao cho $AM\perp CM$; $AN\perp BN$.

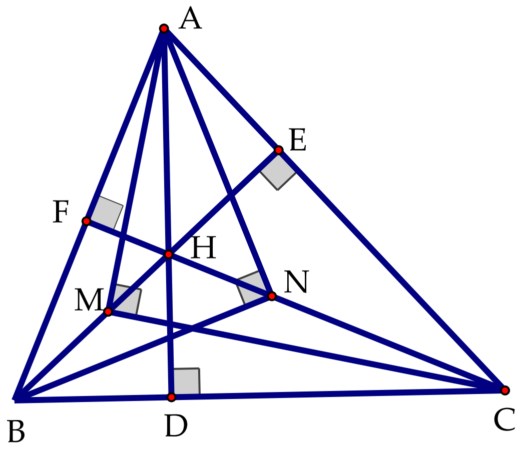
a) Chứng minh rằng: $AM=AN$.

b) Gọi G là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC. Chứng minh: $BG.CD=CG.BD$.

c) Chứng minh đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với EF, đường thẳng đi qua điểm B vuông góc với DF và đường thẳng đi qua điểm C vuông góc với DE đồng quy tại một điểm.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh rằng: $AM = AN$.



Xét ΔAMC vuông tại M, đường cao ME.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, có: $AM^2 = AE.AC$ (1)

Xét ΔANB vuông tại N, đường cao NF.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, có: $AN^2 = AF.AB$ (2)

Xét ΔAEB và ΔAFC, có:

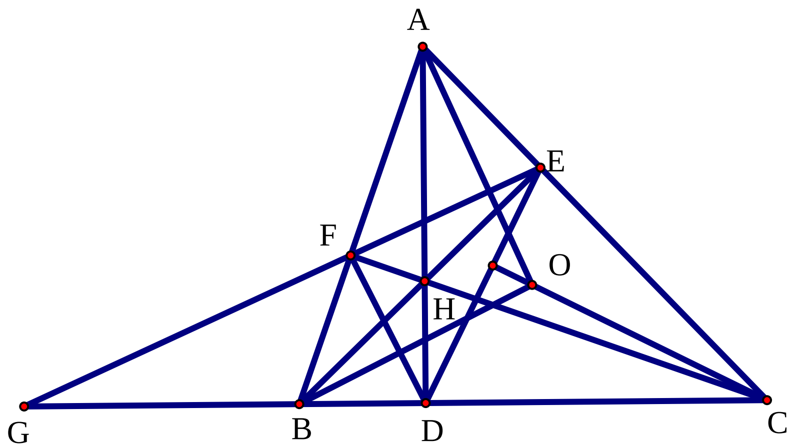
$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90°$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} \Rightarrow AE.AC = AF.AC$ (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $AN = AM$

b) Chứng minh: $BG.CD = CG.BD$.



Xét ΔAEF và ΔABC, có:

$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}$ (chứng minh trên)

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ACB\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ACB}$

Chứng minh tương tự, ta có: $\widehat{AFD}=\widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{GFB}=\widehat{BFD} \Rightarrow FB$, FC lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh F của ΔFGD

$\Rightarrow \frac{BG}{BD}=\frac{CG}{CD}\left(=\frac{FG}{FD}\right) \Rightarrow BG.CD=CG.BD$

c) Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực của $\Delta ABC \Rightarrow OA=OB=OC$

$\Rightarrow \widehat{BAO}=\widehat{ABO}$ (vì ΔABO cân tại O); $\widehat{BCO}=\widehat{CBO}$ (vì ΔCBO cân tại O); $\widehat{CAO}=\widehat{ACO}$ (vì ΔABO cân tại O)

$\Rightarrow 2\left(\widehat{ACB}+\widehat{BAO}\right)=\widehat{ACB}+\widehat{ABC}+\widehat{CAB}=180° \Rightarrow \widehat{ACB}+\widehat{BAO}=90°$

Lại có: $\widehat{AEF}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AEF}+\widehat{BAO}=90° \Rightarrow AO \perp EF$

Chứng minh tương tự, ta có: $AO \perp FD$; $OC \perp DE$.

Vậy đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với EF, đường thẳng đi qua điểm B vuông góc với DF và đường thẳng đi qua điểm C vuông góc với DE đồng quy tại điểm O.

Bài 5 ***(2,0 điểm)***. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

LỜI GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức $Bunhiacopxki$, ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \sqrt{3}$$

Mặt khác, ta có: $5a^2+2ab+2b^2=\left(2a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2 \ge \left(2a+b\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} \le \frac{1}{2a+b} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+a+b)\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.3\sqrt[3]{abc}=9$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)\geq 9\Rightarrow\frac{1}{2a+b}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\ (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right);\ \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ac+2a^2}}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

Do đó:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dấu $"="$ xảy ra khi: $a=b=c=\sqrt{3}$.

HẾT

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BA THƯỚC - NĂM 2019

Câu 1: (*4,0 điểm*)

Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{2x+1}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(x-\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$, với $x\geq 4; x\neq 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{x-1}<0$

Câu 2: (*4,0 điểm*)

a. Cho 3 số $x,y,z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}-3\right)^{2019}$$

b. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1}=3x^2+6$.

Câu 3: (*4,0 điểm*)

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2+2xy+x=32y$.

b) Tìm số tự nhiên n để số p là số nguyên tố biết: $p=n^3-n^2+n-1$.

Câu 4: (*2,0 điểm*)

Cho tam giác ABC vuông ở A, $AH\perp BC$, $HE\perp AB$, $HF\perp AC$ $\left(H\in BC, E\in AB, F\in AC\right)$.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB=AF.AC$, $BH=BC.cos^2B$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BE}{CF}$.

c) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{BC^2}=\sqrt[3]{CF^2}-\sqrt[3]{BE^2}$.

d) Cho $BC=2a$ .Tìm GTLN của diện tích tứ giác $AEHF$.

Câu 5: (*2,0 điểm*)

Cho x,y,z là các số thức dương thay đổi và thỏa minh điều kiện $xyz=1$. Tìm GTNN của biểu thức: $\dfrac{x^2\left(y+z\right)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\dfrac{y^2\left(z+x\right)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\dfrac{z^2\left(x+y\right)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BA THƯỚC - NĂM 2019

Câu 1: (*4,0 điểm*)

Cho biểu thức: $P=\left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(x-\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$, với $x\ge 4; x\ne 0$.

b) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{x-1}<0$

Lời giải

a. $P=\left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(x-\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$

$$P=\left(\frac{2x+1}{\left(\sqrt{x}\right)^3+1}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right).\left(\frac{x\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-2}-\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\frac{2x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{x\sqrt{x}-2x-x+4}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\frac{2x+1-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)\left(\frac{x\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(x-4\right)}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\frac{x-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)\left(\frac{x\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(x-4\right)}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{x}+1}.\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x-\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$P=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{1}$$

$$P=\sqrt{x}-2$$

b) $P.\sqrt{x-1}<0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt{x-1}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-2<0\\ \sqrt{x-1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<4\\ x>1\end{cases}$

Vậy với $1<x<4$ thì $P.\sqrt{x-1}<0$.

Câu 2 (*4,0 điểm*)

a. Cho 3 số $x,y,z\ne 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}-3\right)^{2019}$$

b. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1}=3x^2+6$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow yz+xz+xy=0$.

Lại có $P=\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}-3\right)^{2019}$

$$P=\left(\frac{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3}{x^2y^2z^2}-3\right)^{2019}$$

$$P=\left(\frac{(xy+yz+xz)^3-3(xy+yz)(yz+xz)(xy+xz)}{x^2y^2z^2}-3\right)^{2019}$$

$$P=\left(\frac{3x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}-3\right)^{2019}=0.$$

b) ĐK $x\ge -1$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$3\left(x^2-x+1\right)+3(x+1)=10\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$$

Đặt $\sqrt{x^2-x+1}=u$, $\sqrt{x+1}=v$ thì ta có phương trình:

$$3u^2+3v^2-10uv=0\Leftrightarrow(3u-v)(u-3v)=0$$

TH1: $3u=v$ thì $9\left(x^2-x+1\right)=x+1\Leftrightarrow 9x^2-10x+8=0$ (Phương trình này vô nghiệm).

TH2: $u=3v$ thì $x^2-x+1=9(x+1)\Leftrightarrow x^2-10x-8=0\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{33}$.

Vậy phương trình đa cho có 2 nghiệm là $x=5\pm\sqrt{33}$

Câu 3 (*4,0 điểm*)

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2+2xy+x=32y$.

b) Tìm số tự nhiên n để số p là số nguyên tố biết: $p=n^3-n^2+n-1$.

Lời giải

a) Ta có: $xy^2+2xy+x=32y\Leftrightarrow x(y+1)^2=32y\Leftrightarrow x=\frac{32y}{(y+1)^2}=\frac{32}{y+1}-\frac{32}{(y+1)^2}$

Để x nguyên dương thì $\left(y+1^2\right)\in U(32)$ và $(y+1)^2$ là 1 số chính phương.

$\Rightarrow(y+1)^2=\{1,4,16\}\Leftrightarrow y+1=\{1,2,4\}\Leftrightarrow y=\{0,1,2\}$ vì y nguyên dương nên $y=1\Rightarrow x=8$, $y=3\Rightarrow x=6$.

b) Ta có $p=n^3-n^2+n-1=(n-1)\left(n^2+1\right)$

Lại có: $n-1<n^2+1\Rightarrow n-1=1\Rightarrow n=2$

Với $n=2\Rightarrow p=5$ là số nguyên tố.

Câu 4 (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở A, $AH\perp BC$, $HE\perp AB$, $HF\perp AC$ $(H\in BC,E\in AB,F\in AC)$.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB=AF.AC$, $BH=BC.cos^2B$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BE}{CF}$.

c) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{BC^2}=\sqrt[3]{CF^2}-\sqrt[3]{BE^2}$.

d) Cho $BC=2a$ .Tìm GTLN của diện tích tứ giác $AEHF$.

Lời giải

a) Xét ΔAHB và ΔAEH có:

- $\widehat{A}$ chung;
- $\widehat{E}=\widehat{H}=90^\circ$.

Vậy $\Delta AHB \backsim \Delta AEH$ (g.g)

Suy ra: $AE.AB = AH^2$ (1)

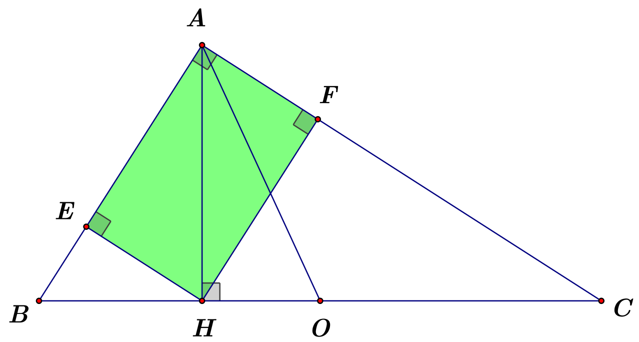
Tương tự ta có: $AF.AC = AH^2$ (2)

Từ (1) và (2): $\Rightarrow AE.AB = AF.AC$

Ta có:

$\cos B = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \cos B.AB$ (3)

Lại có: $\cos B = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \cos B.BC$ (4)



Từ (3) và (4) : suy ra $BH = BC.cos^2B$

b) Ta có ΔABC vuông ở A có AH là đường cao $\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = BH.BC \\ AC^2 = CH.BC \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BH}{CH}$

Lại có ΔHCA vuông tại H có HF là đường cao $\Rightarrow CH^2 = CF.AC \Rightarrow CF = \dfrac{CH^2}{AC}$.

Suy ra $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BH^2}{AB}.\dfrac{AC}{CH^2} = \left(\dfrac{AB^2}{AC^2}\right)^2.\dfrac{AC}{AB} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$

c) Ta có $BH^2 = BE.BA \Rightarrow BE^2 = \dfrac{BH^4}{BA^2} = \dfrac{BH^4}{BH.BC} = \dfrac{BH^3}{BC} \Rightarrow \sqrt[3]{BE^2} = \dfrac{BH}{\sqrt[3]{BC}}$;

Tương tự, $\sqrt[3]{CF^2} = \dfrac{CH}{\sqrt[3]{BC}}$. Do đó

$$\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \dfrac{BH}{\sqrt[3]{BC}} + \dfrac{CH}{\sqrt[3]{BC}} = \dfrac{BC}{\sqrt[3]{BC}} = \sqrt[3]{BC^2}.$$

Vậy $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

d) Gọi O là trung điểm của BC. Ta có $S_{AEHF} = AE.AF$.

Mà $AH^2 = AE.AB \Rightarrow AE = \dfrac{AH^2}{AB}$. Tương tự, $AF = \dfrac{AH^2}{AC}$. Do đó

$S_{AEHF} = \dfrac{AH^2}{AB}.\dfrac{AH^2}{AC} = \dfrac{AH^4}{AB.AC} = \dfrac{AH^4}{AH.BC} = \dfrac{AH^3}{BC} \le \dfrac{AO^3}{BC} = \dfrac{a^3}{2a} = \dfrac{a^2}{2}$.

Vậy S_{AEHF} lớn nhất khi $H \equiv O$ hay ΔABC vuông cân tại A.

Câu 5 (*2,0 điểm*)

Cho x, y, z là các số thức dương thay đổi và thỏa minh điều kiện $xyz = 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $\dfrac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \dfrac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \dfrac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$.

Lời giải

Ta có: $x^2(y+z) \ge 2x\sqrt{x}$. Tương tự, $y^2(x+z) \ge 2y\sqrt{y}$, $z^2(x+y) \ge 2z\sqrt{z}$.

$\Rightarrow P \ge \dfrac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \dfrac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \dfrac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$.

Đặt $a = x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}$, $b = y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}$, $c = z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}$.

Suy ra: $x\sqrt{x}=\dfrac{4c+a-2b}{9}$, $y\sqrt{y}=\dfrac{4a+b-2c}{9}$, $z\sqrt{z}=\dfrac{4b+c-2a}{9}$.

Do đó: $P\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{4c+a-2b}{b}+\dfrac{4a+b-2c}{c}+\dfrac{4b+c-2a}{a}\right)$

$$=\frac{2}{9}\left[4\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-6\right]\ge\frac{2}{9}\left(4.3+3-6\right)=2.$$

Do $\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}=\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)+\left(\dfrac{b}{a}+1\right)-1\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}-1\ge 4-1=3\right)$

Hoặc $\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{c}{b}.\dfrac{a}{c}.\dfrac{b}{a}}=3$. Tương tự, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=2$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 HUYỆN BA VÌ
NĂM HỌC: 2019 - 2020

Câu 1: 1) Cho biểu thức $P=1+\frac{x+3}{x^2+5x+6}:\left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\frac{3x}{3x^2-12}-\frac{1}{x+2}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P=0;\ P=1$

c) Tìm các giá trị của x để $P>0$

2) Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $A=n^3-6n^2+9n-2$ là một số nguyên tố.

Câu 2: 1) Giải các phương trình: $\sqrt{2-x^2+2x}+\sqrt{-x^2-6x-8}=1+\sqrt{3}$

2) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

Tính giá trị của biểu thức $Q=\left(a^{27}+b^{27}\right)\left(b^{41}+c^{41}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)$

Câu 3: 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

2) Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng: $A=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\le\frac{1}{2}$

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH , lấy điểm E bất kì trên AB , kẻ HF vuông góc với HE (F thuộc AC).

a) Chứng minh $HE.BC=EF.AB$

b) Cho $AB=6cm, AC=8cm$, diện tích tam giác HEF bằng $6cm^2$. Tính các cạnh của tam giác HEF .

c) Khi điểm E chạy trên AB thì trung điểm I của EF chạy trên đường nào?

Câu 5: Cho ΔABC nhọn. Phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau ở O . Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AO^2=AE.AC$. Trên tia BC lấy F sao cho $CO^2=CF.AC$. Chứng minh E,O,F thẳng hàng.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BÌNH GIANG - NĂM 2019

Câu 1: 1) Cho biểu thức $P=1+\frac{x+3}{x^2+5x+6}:\left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\frac{3x}{3x^2-12}-\frac{1}{x+2}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P=0;\ P=1$

c) Tìm các giá trị của x để $P>0$

2) Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $A=n^3-6n^2+9n-2$ là một số nguyên tố.

Lời giải

1) Cho biểu thức $P=1+\frac{x+3}{x^2+5x+6}:\left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\frac{3x}{3x^2-12}-\frac{1}{x+2}\right)$

a) Sau khi biến đổi thu gọn ta được $P=\dfrac{x+4}{6}$

b) Với $P=0\Leftrightarrow x=-4(t/m)$ với $P=1\Leftrightarrow x=-2$(không thỏa mãn đkxđ)

c) $P>0\Leftrightarrow x+4>0\Rightarrow x>-4$ và $x\neq 0;2;-2;-3$

2) Ta có : $A=n^3-6n^2+9n-2=(n-2)(n^2-4n+1)$ để A là số nguyên tố thì

-Nếu $n-2=1\Rightarrow A=-2$ (loại)

-Nếu $n^2-4n+1=1\Rightarrow n=0,n=4$ với n=0 thì A=-2 (loại) với n=4 thì A=2 (nhận)

-Thử tương tự cho các trường hợp n-2=-1 và $n^2-4n+1=-1$ cho ra n=1 là thỏa

Vậy với n=4 hoặc n=1 là giá trị cần tìm

Câu 2: 1) Giải các phương trình: $\sqrt{2-x^2+2x}+\sqrt{-x^2-6x-8}=1+\sqrt{3}$

2) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$

Tính giá trị của biểu thức $Q=\left(a^{27}+b^{27}\right)\left(b^{41}+c^{41}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)$

Lời giải

1) Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2+2x}+\sqrt{-x^2-6x-8}=1+\sqrt{3}$ (1)

ĐKXĐ: $\begin{cases}2-x^2+2x\geq 0\\-x^2-6x-8\geq 0\end{cases}$

Ta có: $2-x^2+2x=-\left(x^2-2x-2\right)=3-(x-1)^2\leq 3$

$-x^2-6x-8=-\left(x^2+6x+8\right)=1-(x+3)^2\leq 1$

Do đó: Vế trái (1) $\leq\sqrt{3}+1$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}(x-1)^2=0\\(x+3)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=-3\end{cases}$ (vô lí)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Điều kiện: $a,b,c\neq 0$. Khi đó, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{c(a+b+c)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)\left(ca+cb+c^2+ab\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^{27}=-b^{27} \\ b^{41}=-c^{41} \\ c^{2019}=-a^{2019} \end{array}\right.$$

Do đó: $Q=\left(a^{27}+b^{27}\right)\left(b^{41}+c^{41}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)=0$

Câu 3: 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

2) Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng: $A=\dfrac{1}{a^2+2b^2+3}+\dfrac{1}{b^2+2c^2+3}+\dfrac{1}{c^2+2a^2+3}\le\dfrac{1}{2}$

Lời giải

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

Ta có: $x(x+1)=n(n+2)\Leftrightarrow x^2+x+1=(n+1)^2$ (1)

Với $x\in N^*$ thì: $x^2<x^2+x+1<(x+1)^2$ nên x^2+x+1 không phải là số chính phương mà $(n+1)^2$ là số chính phương với $\forall n\in Z$, do đó (1) không xảy ra.

Vậy với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

2) Với $a,b,c>0$, ta có:

$$A=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}$$

$$=\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+1\right)+2}+\frac{1}{\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+1\right)+2}+\frac{1}{\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+1\right)+2}$$

$$\le\frac{1}{2ab+2b+2}+\frac{1}{2bc+2c+2}+\frac{1}{2ca+2a+2}$$

$$\Rightarrow 2A\le\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}$$

$$=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{abc}{bc+c+abc}+\frac{b}{abc+ab+b}\quad (\text{do } abc=1)$$

$$=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{b+1+ab}+\frac{b}{1+ab+b}=1$$

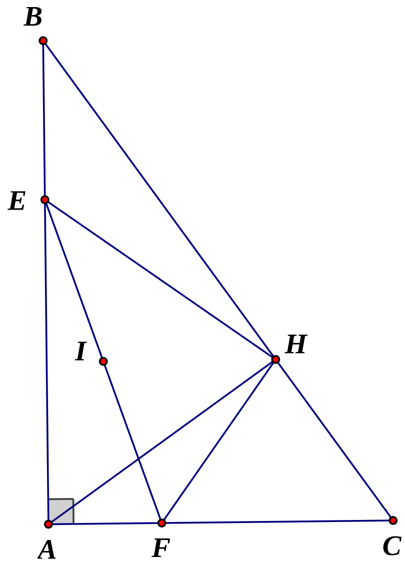
$$\Rightarrow A\le\frac{1}{2}\quad (\text{đpcm})$$

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, lấy điểm E bất kì trên AB, kẻ HF vuông góc với HE (F thuộc AC).

a) Chứng minh $HE.BC=EF.AB$

b) Cho $AB=6cm, AC=8cm$, diện tích tam giác HEF bằng $6cm^2$. Tính các cạnh của tam giác HEF.

c) Khi điểm E chạy trên AB thì trung điểm I của EF chạy trên đường nào?



Lời giải

a) $\Delta AHE\sim\Delta HCF(g-g)\Rightarrow\frac{HE}{HF}=\frac{HA}{HC}(1)$

$$\Delta HAB\sim\Delta HCA(g-g)\Rightarrow\frac{HA}{HC}=\frac{AB}{CA}(2)$$

Từ (1) và (2) : $\frac{HE}{HF}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\Delta HEF\sim\Delta \mathbf{ABC}(c-g-c)$

$$\Rightarrow\frac{HE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow EF.AB=HE.BC$$

b) ΔHEF" $\Delta ABC\Rightarrow\frac{S_{HEF}}{S_{ABC}}=\frac{EF^2}{BC^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow EF=5; HE=3; HF=4$

c) Ta có : $IH=\frac{1}{2}EF$ (đường trung tuyến trong tam giác vuông)

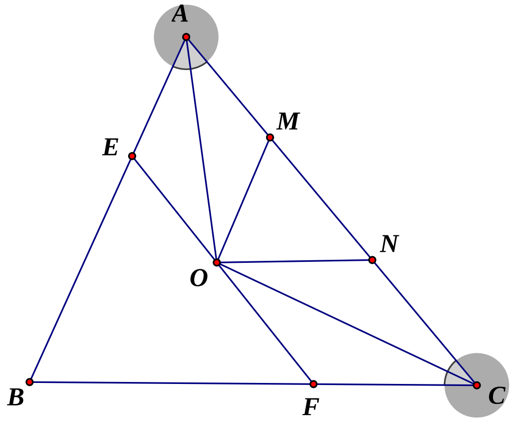
$IA=\frac{1}{2}EF$ (đường trung tuyến trong tam giác vuông)

$\Rightarrow IH=IA$ vậy I di chuyển trên đường trung trực của AH khi E chạy trên AB

Câu 5: Cho ΔABC nhọn. Phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau ở O. Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AO^2=AE.AC$. Trên tia BC lấy F sao cho $CO^2=CF.AC$. Chứng minh E,O,F thẳng hàng.

Lời giải

Lấy M thuộc AC sao cho $AE=AM$; lấy N thuộc AC sao cho $CF=CN$



Ta có : $AO^2 = AM.AC \Rightarrow \Delta AOM$” $\Delta ACO(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ACO}(1)$

$CO^2 = CN.CA \Rightarrow \Delta CON$” $\Delta CAO(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{CON}(2)$

Mặt khác : $\Delta AOE = \Delta AOM\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{AOE}$

$\Delta CON = \Delta COF\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{CON} = \widehat{COF}$

Mà $\widehat{AOC} + \widehat{CAO} + \widehat{OCA} = 180°$ (Tam giác AOC)

$\Rightarrow \widehat{AOC} + \widehat{COF} + \widehat{AOE} = 180°$ vậy $O,\ E,\ F$ thẳng hàng

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN CẨM THỦY (THANH HÓA) – V2
NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

a) Rút gọn *P*. b) Tìm giá trị nhỏ nhất của *P*.

2) Với *a, b, c* là 3 số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$3+\frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)}=\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2b+c}{b-c}+\frac{2c+a}{c-a}.$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4+2x^2=y^3$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố *p* thì $p^2+\dfrac{p-1}{2}$ không là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

b) Cho hàm số bậc nhất $y=ax+b$ có đồ thị là đường thẳng đi qua $M(1;4)$. Biết đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm *A* có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm *B* có tung độ dương. Tìm *a, b* sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất. (Với *O* là gốc tọa độ)

Câu 4. *(6,0 điểm)* Cho đường tròn (*O, r*) nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với cạnh *BC* tại *D*. Vẽ đường kính *DN* của (*O, r*). Tiếp tuyến của (*O*) tại *N* cắt *AB, AC* theo thứ tự tại *P* và *K*.

a) Chứng minh rằng $NK.CD=r^2$.

b) Gọi *E* là giao điểm của *AN* và *BC*. Chứng minh rằng $BD=CE$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{OA+OB+OC}{r}$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{a^4b}{a^2+1}+\dfrac{b^4c}{b^2+1}+\dfrac{c^4a}{c^2+1}\geq\dfrac{3}{2}$.

---------------------**Hết**---------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN 9 – NĂM HỌC 2019 - 2020
(HUYỆN CẨM THỦY)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

a) Rút gọn *P*. b) Tìm giá trị nhỏ nhất của *P*.

2) Với *a, b, c* là 3 số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$3+\frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)}=\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2b+c}{b-c}+\frac{2c+a}{c-a}\cdot$$

Hướng dẫn giải:

1) ĐKXĐ: $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$

a) Có: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\dfrac{2\left(\sqrt{x}+1\right)-2+x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{x+2\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

b) Có: $P=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{x-1+1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+2\overset{Co-Si}{\geq}2\sqrt{\sqrt{x}-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}}+2=4.$

Dấu "=" xảy ra $\sqrt{x}-1=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-1=1\\ \sqrt{x}-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\ (TM)\\ x=0\ (KTM)\end{array}\right.$

Vậy $P_{Min}=4\Leftrightarrow x=4.$

2) Đặt: $\begin{cases}\dfrac{2a+b}{a-b}=x\\ \dfrac{2b+c}{b-c}=y\\ \dfrac{2c+a}{c-a}=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3a}{a-b}=x+1\\ \dfrac{3b}{b-c}=y+1\\ \dfrac{3c}{c-a}=z+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3b}{a-b}=x-2\\ \dfrac{3c}{b-c}=y-2\\ \dfrac{3a}{c-a}=z-2\end{cases}$

$\Rightarrow(x+1)(y+1)(z+1)=(x-2)(y-2)(z-2)\Leftrightarrow 9+3(xy+yz+zx)=3(x+y+z)$

$\Leftrightarrow 3+xy+yz+zx=x+y+z$ (đpcm)

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0\cdot$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4+2x^2=y^3$.

Hướng dẫn giải:

a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0\ (1)$

ĐK: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+\left(3x^2-14x-9\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1-(6-x)}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow\frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-5)=0$ Vì: $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0\ \forall\ -\frac{1}{3}\le x\le 6$

$\Leftrightarrow x=5(TM)$. Vậy phương trình có nghiệm là: $x=5$.

b) Có: $x^4+2x^2=y^3\ (1)\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2\right)=y^3$

Với $y=0\Rightarrow x=0\ \left(Do: x^2+2\ge 2\right)$

Với $y\ne 0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\frac{x^4+2x^2}{y^3}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{x^2+2}{y}\right)=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{x^2+2}{y}=1$ (vô nghiệm)

Vậy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^2+\frac{p-1}{2}$ không là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

b) Cho hàm số bậc nhất $y=ax+b$ có đồ thị là đường thẳng đi qua $M(1;4)$. Biết đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm B có tung độ dương. Tìm a, b sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất. (Với O là gốc tọa độ)

Hướng dẫn giải:

a) Với $p=2\Rightarrow p^2+\frac{p-1}{2}=2^2+\frac{2-1}{2}=\frac{9}{2}$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

Với $p=3\Rightarrow p^2+\frac{p-1}{2}=3^2+\frac{3-1}{2}=10=2.5$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

Với $p>3\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p=3k+1\\p=3k+2\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$

- Nếu $p=3k+1\Rightarrow p^2+\frac{p-1}{2}=(3k+1)^2+\frac{3k+1-1}{2}=9k^2+6k+1+\frac{3k}{2}=\frac{18k^2+12k+2+3k}{2}$

$=\frac{18k^2+15k+2}{2}=\frac{(6k+1)(3k+2)}{2}$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

- Nếu $p=3k+2 \Rightarrow p^2+\frac{p-1}{2}=(3k+2)^2+\frac{3k+2-1}{2}=9k^2+12k+4+\frac{3k+1}{2}$

$=\frac{18k^2+24k+8+3k+1}{2}=\frac{18k^2+27k+9}{2}=\frac{9}{2}\cdot\left(2k^2+3k+1\right)=\frac{9}{2}\cdot(2k+1)(k+1)$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

Vậy với mọi số nguyên tố $p \Rightarrow p^2+\frac{p-1}{2}$ không phải là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

b) Vì đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm B có tung độ dương $\Rightarrow a<0$ (1)

Do đồ thị là đường thẳng đi qua $M(1;4) \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow b>0$ (2) $(Do: a<0)$

Có: $OA+OB \overset{Co-si}{\geq} 2\sqrt{OA.OB}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OA=OB$ hay ΔOAB cân tại O.

Vì: $OA=OB \Leftrightarrow b=\frac{-b}{a} \Leftrightarrow b(a+1)=0 \Leftrightarrow a=-1$ $(Do: b>0)$

Với $a=-1 \Rightarrow b=5 \Rightarrow y=-x+5$

Vậy $a=-1 \Rightarrow b=5$ thì $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất là: 5 + 5 = 10.

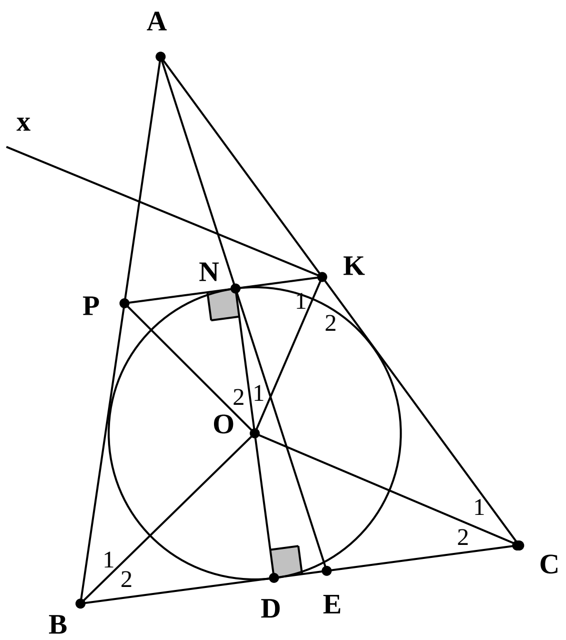
Câu 4. *(3,0 điểm)* Cho đường tròn (O, r) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với cạnh BC tại D. Vẽ đường kính DN của (O, r). Tiếp tuyến của (O) tại N cắt AB, AC theo thứ tự tại P và K.

a) Chứng minh rằng $NK.CD=r^2$.

b) Gọi E là giao điểm của AN và BC. Chứng minh rằng $BD=CE$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\frac{OA+OB+OC}{r}$.

Hướng dẫn giải:



a) Có: $PK // BC$ (cùng $\perp DN$) $\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)

Gọi Kx là tia phân giác của $\widehat{AKN} \Rightarrow Kx // CO$ (Vì CO là tia phân giác của $\widehat{ACB}$)

Mà: $Kx \perp KO$ (tia phân giác trong và phân giác ngoài)

$\Rightarrow CO \perp KO \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{O_1}$ (cùng phụ với $\widehat{K_1}$)

$\Rightarrow \Delta NKO \backsim \Delta DOC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{NK}{DO} = \dfrac{NO}{DC} \Rightarrow NK.DC = NO.DO \Rightarrow NK.CD = r^2$ (đpcm)

b) *Cách 1:*

Ta có: $BD = \dfrac{r}{\tan\dfrac{B}{2}}$; $CD = \dfrac{r}{\tan\dfrac{C}{2}} \Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{C}{2}}$ (1)

Mà: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{O_1}\ (cmt) \Rightarrow NK = r.\tan\dfrac{C}{2}$

Tương tự: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{O_2} \Rightarrow NP = r.\tan\dfrac{B}{2} \Rightarrow \dfrac{NP}{NK} = \dfrac{\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{C}{2}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{NK}{NP} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow \dfrac{NK}{BD} = \dfrac{NP}{CD} = \dfrac{NK+NP}{BD+CD} = \dfrac{KP}{BC}$ (3)

Mặt khác: $KP // BC \Rightarrow \dfrac{NK}{EC} = \dfrac{KP}{BC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{NK}{EC} = \dfrac{NK}{BD} \Rightarrow EC = BD$ (đpcm).

Cách 2:

Ta có: $NK.CD = NP.BD = r^2\ (cmt)$

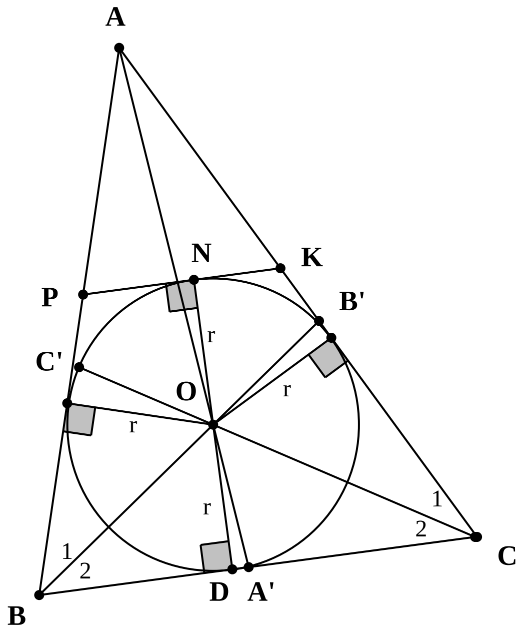
Mà: $\Rightarrow \dfrac{NK}{EC} = \dfrac{NP}{BE}$ (Vì: $KP // BC$)

$\Rightarrow EC.CD = BE.BD \Rightarrow EC.(EC+ED) = (BD+ED).BD \Rightarrow EC^2 + EC.ED = BD^2 + ED.BD$

$\Rightarrow EC^2 - BD^2 + EC.ED - ED.BD = 0 \Rightarrow (EC-BD).(EC+BD+ED) = 0$

$\Rightarrow EC - BD = 0 \Rightarrow EC = BD$ (đpcm)

c)



Gọi $S_{OAC}=S_1;S_{OBC}=S_2;S_{OAB}=S_3$

Ta có: $\dfrac{OA}{r}+\dfrac{OB}{r}+\dfrac{OC}{r}\ge\dfrac{OA}{OA'}+\dfrac{OB}{OB'}+\dfrac{OC}{OC'}$

Mà: $\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{S_1}{S_{OA'C}}=\dfrac{S_3}{S_{OA'B}}=\dfrac{S_1+S_3}{S_2}$

Tương tự: $\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{S_2+S_3}{S_1}$; $\dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{S_1+S_2}{S_3}$.

$\Rightarrow\dfrac{OA}{OA'}+\dfrac{OB}{OB'}+\dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{S_1+S_3}{S_2}+\dfrac{S_2+S_3}{S_1}+\dfrac{S_1+S_2}{S_3}=\left(\dfrac{S_1}{S_2}+\dfrac{S_2}{S_1}\right)+\left(\dfrac{S_2}{S_3}+\dfrac{S_3}{S_2}\right)+\left(\dfrac{S_3}{S_1}+\dfrac{S_1}{S_3}\right)\ge 6.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3$ hay ΔABC đều.

Vậy $\dfrac{OA}{r}+\dfrac{OB}{r}+\dfrac{OC}{r}\ge 6\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{a^4b}{a^2+1}+\dfrac{b^4c}{b^2+1}+\dfrac{c^4a}{c^2+1}\ge\dfrac{3}{2}\cdot$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $S=\dfrac{a^4b}{a^2+1}+\dfrac{b^4c}{b^2+1}+\dfrac{c^4a}{c^2+1}=a^2b-\dfrac{1}{a^2+1}+b^2c-\dfrac{1}{b^2+1}+c^2a-\dfrac{1}{c^2+1}$

$=\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)-\left(\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\right)\overset{Co-si}{\ge}3\sqrt[3]{a^2b.b^2c.c^2a}-\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}\right)$

$\overset{Co-si}{\ge}3abc-\left(3\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{1}{2b}\cdot\dfrac{1}{2c}}\right)=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ (đpcm)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN CẨM XUYÊN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
NĂM HỌC 2019 – 2020
MÔN TOÁN 9
Thời gian: **120 phút** *(Không kể thời gian giao đề)*

Mã đề 01

I. PHẦN ĐIỀN KẾT QUẢ ***(thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)***

Câu 1: Với giá trị nào của x thì $\sqrt{x^2-9}$ có nghĩa?

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Câu 3: Cho các số dương a,b thỏa mãn $2a-3\sqrt{ab}-2b=0$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=\sqrt{-x^2+x+\frac{1}{2}}$

Câu 5: Cho ΔABC vuông tại A có $AB=3cm, AC=4cm$. Tính khoảng cách từ A đến cạnh BC.

Câu 6: Cho ΔABC nhọn có $AB=8cm, AC=10cm$ và $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính độ dài cạnh BC.

Câu 7: Cho ΔABC có $AB=4cm, AC=6cm$ và $\widehat{BAC}=30^0$. Tính diện tích ΔABC

Câu 8: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ và $BC=10cm$. Tính độ dài cạnh HC.

Câu 9: Cho góc nhọn α. Tính $\tan\alpha$ biết $\cos\alpha=\frac{3}{4}$

Câu 10: Tứ giác $ABCD$ có $AB//CD, AC\perp BD, BH\perp CD$ tại H. Biết $BD=6cm, BH=4,8cm$. Tính độ dài đường chéo AC.

II. PHẦN TỰ LUẬN ***(thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)***

Câu 11: Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\sqrt{x^2-4}}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-\sqrt{x^2-4}}$ với $x\ge 2\sqrt{2}$

Câu 12: Giải phương trình $\sqrt{3x^2-12x+13}+\sqrt{2x^2-8x+12}=3$

Câu 13: Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}\le 3(a+b)$ với a,b là các số không âm. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Câu 14: Tìm các số nguyên dương x,y để A,B đồng thời là các số chính phương biết $A=x^2+y+1$ và $B=y^2+x+4$

CHỨNG MINH

Câu 1: Với giá trị nào của x thì $\sqrt{x^2-9}$ có nghĩa?

Lời giải

Để biểu thức $\sqrt{x^2-9}$ có nghĩa thì $x^2-9\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le -3\end{array}\right.$

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Lời giải

Ta có $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$A=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$

$A = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1$

$A = 3$

Câu 3: Cho các số dương a, b thỏa mãn $2a - 3\sqrt{ab} - 2b = 0$. Tính tỉ số $\dfrac{a}{b}$

Lời giải

$2a - 3\sqrt{ab} - 2b = 0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - 2\sqrt{b}) = 0$ (Vì $2\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$)

$\Rightarrow \sqrt{a} - 2\sqrt{b} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 4$

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \sqrt{-x^2 + x + \dfrac{1}{2}}$

Lời giải

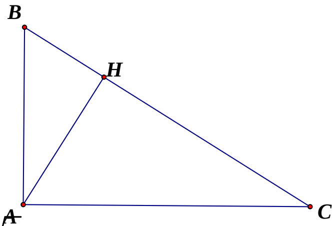
Ta có $B = \sqrt{-x^2 + x + \dfrac{1}{2}}$

$B = \sqrt{-\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$

$\Rightarrow MaxB = \dfrac{3}{4}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Câu 5: Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$. Tính khoảng cách từ A đến cạnh BC.

Lời giải



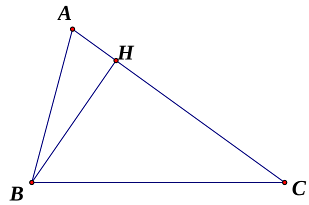
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16}$

$\Leftrightarrow AH^2 = \dfrac{144}{25} \Leftrightarrow AH = 2,4(cm)$

Vậy khoảng cách từ A đến cạnh BC là 2,4cm

Câu 6: Cho ΔABC nhọn có $AB = 8cm, AC = 10cm$ và $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính độ dài cạnh BC.

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC$

Ta có $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \dfrac{8.\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}cm$

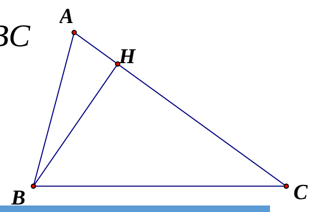
Có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{64 - 48} = \sqrt{16} = 4cm$

$\Rightarrow HC = AC - AH = 10 - 4 = 6cm$

$\Rightarrow BC = \sqrt{HC^2 + BH^2} = \sqrt{48 + 36} = 2\sqrt{21}cm$

Câu 7: Cho ΔABC có $AB = 4cm, AC = 6cm$ và $\widehat{BAC} = 30^0$. Tính diện tích ΔABC

Lời giải



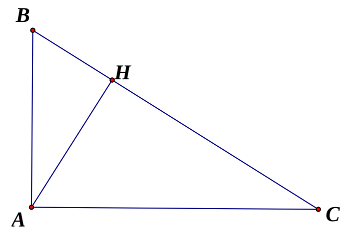
Kẻ $BH \perp AC$

$\sin A = \dfrac{BH}{BA} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{BH}{4} \Rightarrow BH = 2cm$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BH.AC = \dfrac{1}{2}.2.6 = 6cm^2$

Câu 8: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$ và $BC = 10cm$. Tính độ dài cạnh HC.

Lời giải



Ta có $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AB = \dfrac{3AC}{4}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \Leftrightarrow 10 = \sqrt{\dfrac{9AC^2}{16} + AC^2}$

$\Leftrightarrow 100 = \dfrac{25AC^2}{16} \Leftrightarrow AC^2 = 64$

Lại có $AC^2 = HC.BC \Rightarrow 64 = HC.10 \Rightarrow HC = 6,4cm$

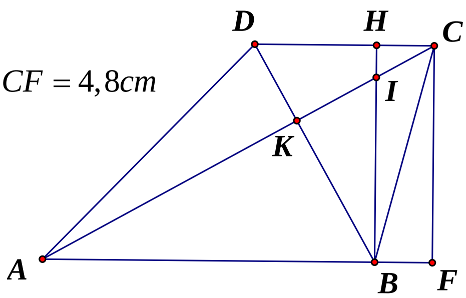
Câu 9: Cho góc nhọn α. Tính $\tan\alpha$ biết $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$

Lời giải

$\cos\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 41,41^o \Rightarrow \tan\alpha \approx 0,882$

Câu 10: Tứ giác $ABCD$ có $AB//CD, AC \perp BD, BH \perp CD$ tại H. Biết $BD = 6cm, BH = 4,8cm$. Tính độ dài đường chéo AC.

Lời giải



Gọi giao điểm của BH và AC là I.
Kẻ CH vuông với AB tại F$\Rightarrow$ $HCFB$ là hình chữ nhật $HB = CF = 4,8cm$

$DH = \sqrt{BD^2 - HB^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = \sqrt{12,96} = 3,6cm$

$\Delta IKB \backsim \Delta IHC$ (g-g)

$\Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{ICH}$ hay $\widehat{DBH} = \widehat{ICH}$

Mà $DC//AB \Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{CAB}$

$\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{CAF}$

$\Rightarrow \sin\widehat{DBH} = \sin\widehat{CAF} \Rightarrow \dfrac{DH}{BD} = \dfrac{CF}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{3,6}{6} = \dfrac{4,8}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{6.4,8}{3,6} = 8cm$

II. PHẦN TỰ LUẬN ***(thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)***

Câu 11: Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} - \sqrt{\dfrac{x^2}{4} - \sqrt{x^2 - 4}}$ với $x \geq 2\sqrt{2}$

Lời giải

$$P = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} - \sqrt{\dfrac{x^2}{4} - \sqrt{x^2 - 4}}$$

$P=\sqrt{\frac{x^2-4}{4}+\sqrt{x^2-4}+1}-\sqrt{\frac{x^2-4}{4}-\sqrt{x^2-4}+1}$

$P=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}-1\right)^2}$

$P=\left|\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+1\right|-\left|\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}-1\right|$

$P=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+1-\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+1$ (Vì $x\ge 2\sqrt{2}$)

$P=2$

Câu 12: Giải phương trình $\sqrt{3x^2-12x+13}+\sqrt{2x^2-8x+12}=3$

Lời giải

Ta có

$\sqrt{3x^2-12x+13}=\sqrt{3(x^2-4x+4)+1}=\sqrt{3(x-2)^2+1}\ge 1$

$\sqrt{2x^2-8x+12}=\sqrt{2(x^2-4x+4)+4}=\sqrt{2(x-2)^2+4}\ge\sqrt{4}=2$

$\Rightarrow VT\ge 1+2=3$

Dấu "=" xảy ra $(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Câu 13: Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}\le 3(a+b)$ với a,b là các số không âm. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải

Ta có $\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}$

$=\sqrt{a}.\sqrt{(4a+5b)}+\sqrt{b}.\sqrt{(4b+5a)}$

$\le\sqrt{(a+b)(4a+5b+4b+5a)}$ (Bất đẳng thức Bunhia)

$=\sqrt{9(a+b)^2}$

$=3(a+b)$

Dấu "=" xảy ra $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{4a+5b}}{\sqrt{4b+5a}}$

$\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{4a+5b}{4b+5a}$

$\Leftrightarrow 4ab+5a^2=4ab+5b^2$

$\Leftrightarrow a=b$ (Vì $a,b>0$)

Câu 14: Tìm các số nguyên dương x,y để A,B đồng thời là các số chính phương biết $A=x^2+y+1$ và $B=y^2+x+4$

Lời giải

Ta có $A=x^2+y+1$

$B=y^2+x+4$

- Với $x\ge y$ thì $x^2\le x^2+y+1\le x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$

$\Rightarrow x^2<B<(x+1)^2$

Không tồn tại x,y

- Với $x<y\Rightarrow y^2<y^2+x+4<y^2+y+4<y^2+4y+4=(y+2)^2$

$\Rightarrow y^2<B<(y+2)^2$

$\Rightarrow B=(y+1)^2=y^2+x+4$

$\Rightarrow x=2y-3$

$A=x^2+y+1=(2y-3)^2+y+1=4y^2-11y+10$

Vì A là số chính phương nên $A=k^2$

$\Rightarrow k^2=4y^2-11y+10$

$\Rightarrow 4y^2-11y+10-k^2=0$

$\Rightarrow \Delta=16k^2-39$

Để A là số chính phương $\Rightarrow \Delta$ là số chính phương

$\Rightarrow 16k^2-39=a^2$

$\Rightarrow (4k-a)(ak+a)=39=1.39=3.13$

$\Rightarrow \begin{cases}4k-a=1\\4k+a=39\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=19\\k=5\end{cases}$ và $\Rightarrow \begin{cases}4k-a=3\\4k+a=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5\\k=2\end{cases}$

Với $k=5 \Rightarrow y=-1$ (loại)

Với $k=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$

Vậy cặp số $(1;2)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẬN CẦU GIẤY NĂM 2019 - 2020

Câu 1: (5 điểm)

1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

2. Cho 3 số dương x,y,z thỏa mãn: $x^3+y^3+z^3=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$.

a) Tính $x+y+z$ biết $xy+yz+zx=9$.

b) Chứng minh rằng nếu $z\ge x;\ z\ge y$ thì $z>x+y$.

Câu 2: (5 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2+33x+28}+5\sqrt{4x-3}=5\sqrt{3x+4}+\sqrt{12x^2+19x-21}$

2. Tìm các số nguyên $(x;y)$ với $x\ge 0;\ y\ge 0$ thỏa mãn:

$$x^3+3y^2+4xy+4x+10y-12=0.$$

Câu 3: (3 điểm)

1. Cho 3 số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=a+b^{2011}+c^{1954}-ab-bc-ac$$

2. Tìm số nguyên dương x để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương.

Câu 4: (6 điểm)

Cho tam giác đều ABC cạnh a, hai điểm M,N lần lượt di động trên hai đoạn AB,AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM=x;\ AN=y$.

a. Biết $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{5}$, tính diện tích tam giác AMN theo a.

b. Chứng minh rằng $MN=a-x-y$.

c. Gọi D là trọng tâm tam giác ABC, K là trung điểm AB. Vẽ $DI\perp MN$, chứng minh rằng: $DI=DK$.

Câu 5: (1 điểm)

Cho một bảng ô vuông 2019×2020, mỗi ô vuông con có thể tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng ban đầu tất cả các ô đều được tô màu xanh. Cho phéo mỗi lần ta chọn một hang hoặc một cột và thay đổi màu của tất cả các ô thuộc hàng hoặc cột đó. Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu ta có thể thu được một bảng gồm đúng 2000 ô vuông màu đỏ hay không?

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẬN CẦU GIẤY NĂM 2019 – 2020

Câu 1: (5 điểm)

1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

2. Cho 3 số dương x,y,z thỏa mãn: $x^3+y^3+z^3=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$.

a) Tính $x+y+z$ biết $xy+yz+zx=9$.

b) Chứng minh rằng nếu $z\ge x;\ z\ge y$ thì $z\ge x+y$.

Lời giải:

1.

a) Để P có nghĩa thì:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x\sqrt{x}-1\ne 0 \\ x-1\ne 0 \\ 2x+\sqrt{x}-1\ne 0 \\ 2\sqrt{x}-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\sqrt{x}\ne 1 \\ x\ne 1 \\ 2(\sqrt{x}-\frac{1}{2})(\sqrt{x}+1)\ne 0 \\ \sqrt{x}\ne \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^3\ne 1 \\ x\ne 1 \\ x\ne \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 1 \\ x\ne \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy với $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne \dfrac{1}{4}$ thì P có nghĩa.

Ta có: $P=\left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow P=\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right).\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-\frac{1}{2})(\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$=\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}-\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$=\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-\sqrt{x}.(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$=\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$=\left(\frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x}.(x + \sqrt{x} + 1)}{(2\sqrt{x} - 1)((x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + x + \sqrt{x})}{(2\sqrt{x} - 1)((x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x}{(2\sqrt{x} - 1)((x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x} - x + 2x - \sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - 1)((x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{x.(2\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x}.(2\sqrt{x} - 1)}{(2\sqrt{x} - 1)((x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x})}{(2\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}.$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$ thì $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$.

b) Ta có: $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{x + \sqrt{x} + 1 - 1}{x + \sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$ đạt giá trị lớn nhất

$\Rightarrow x + \sqrt{x} + 1$ phải đạt giá trị nhỏ nhất.

Lại có $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$ nên $x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$.

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $x + \sqrt{x} + 1 = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $P = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy với $x = 0$ thì P có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

2. Với $x > 0, y > 0, z > 0$

a) Xét $VT = x^3 + y^3 + z^3$

$= (x + y + z).\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

$VP = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$

$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2$

$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$

$= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Do $VT = VP$ nên suy ra $x + y + z = 2$.

Vậy $x + y + z = 2$.

b) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (x + y)^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2yz - 2zx = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (x + y)^2 = 2y(z - y) + 2x(z - x)$

Do x, y, z > 0 và $z \geq y;\ z \geq x$ nên $2y(z - y) + 2x(z - x) \geq 0$

$\Rightarrow z^2 - (x+y)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (z-x-y)(z+x+y) \geq 0$ mà x, y, z > 0 nên $z+x+y>0$

$\Rightarrow z \geq x+y$ (đpcm).

Câu 2: (5 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2+33x+28}+5\sqrt{4x-3}=5\sqrt{3x+4}+\sqrt{12x^2+19x-21}$

2. Tìm các số nguyên $(x;y)$ với $x \geq 0;\ y \geq 0$ thỏa mãn:

$$x^3+3y^2+4xy+4x+10y-12=0.$$

Lời giải:

1. ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{(3x+4)(3x+7)}+5\sqrt{4x-3}=5\sqrt{3x+4}+\sqrt{(4x-3)(3x+7)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+4)(3x+7)}-\sqrt{(4x-3)(3x+7)}=5(\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-3})$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+7}.(\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-3})=5(\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-3})$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+7}=5$

$\Leftrightarrow x=6$ (tm).

Vậy $x=6$ là nghiệm của phương trình.

2. Với $x \geq 0;\ y \geq 0$ ta có:

$x^3+3y^2+4xy+4x+10y-12=0$

$\Leftrightarrow (x^2+4xy+4y^2+4+4x+8y)-(y^2-2y+1)-17=0$

$\Leftrightarrow \left[(x+2y)^2+2.(x+2y).2+2\right]-(y-1)^2=17$

$\Leftrightarrow (x+2y+2)^2-(y-1)^2=17$

$\Leftrightarrow (x+2y+2-y+1).(x+2y+2+y-1)=17$

$\Leftrightarrow (x+y+3).(x+3y+1)=17$

Do 17 là số nguyên tố mà $x \geq 0;\ y \geq 0$ suy ra $x+y+3>0$ và $x+3y+1>0$ nên ta có:

TH1:

$\begin{cases} x+y+3=1 \\ x+3y+1=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ x+3y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow$ loại do $x \geq 0$.

TH2:

$\begin{cases} x+y+3=17 \\ x+3y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=14 \\ x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=-7 \end{cases} \Rightarrow$ loại do $y \geq 0$.

Vậy không có giá trị nào của $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 3: (3 điểm)

1. Cho 3 số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=a+b^{2011}+c^{1954}-ab-bc-ac$$

2. Tìm số nguyên dương x để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương.

Lời giải:

1. Ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a,b,c\ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a,b,c\in[0;1]$

$\Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)\le 0$

$\Leftrightarrow abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\le 0$

$\Leftrightarrow a-ab-bc-ca\le 1-abc-b-c$

$\Rightarrow T\le 1+b^{2011}+c^{1954}-abc-b-c=1+b.(b^{2010}-1)+c.(c^{1953}-1)-abc\le 1$

GTLN của T bằng 1 khi và chỉ khi $a=1;\ b=c=0$.

2. Đặt $A=4x^3+14x^2+9x-6$ ta được:

$A=4x^3+8x^2+6x^2+12x-3x-6$

$=4x^2.(x+2)+6x.(x+2)-3(x+2)$

$=(x+2).(4x^2+6x-3)$

Lại có $x+2,\ 4x^2+6x-3$ là 2 số nguyên tố cùng nhau.

Thật vậy, giả sử $UCLN\ (x+2,4x^2+6x-3)=d\ \ (d\in N^*)$ ta có:

$x+2$ chia hết cho d suy ra $4x(x+2)=4x^2+8x$ chia hết cho d

$4x^2+6x-3$ chia hết cho d

Suy ra $4x^2+8x-4x^2-6x+3$ chia hết cho d

$\Rightarrow 2x+3$ chia hết cho d

$\Rightarrow 2(x+2)-2x-3$ chia hết cho $d\Rightarrow 1\,\vdots\, d$

Mà $d\in N^*$ nên $d=1$. Từ đó suy ra $UCLN\ (x+2,4x^2+6x-3)=1$ hay $x+2$, $4x^2+6x-3$ là 2 số nguyên tố cùng nhau.

Để A là số chính phương thì $x+2$ và $4x^2+6x-3$ đều là số chính phương.

Đặt $x+2=a^2$, $4x^2+6x-3=b^2$. Thay $x=a^2-2$ vào $4x^2+6x-3=b^2$ ta được:

$4.(a^2-2)^2+6.(a^2-2)-3=b^2$

$\Leftrightarrow 4a^4-16a^2+16+6a^2-12-3=b^2$

$\Leftrightarrow 4a^4-10a^2+1=b^2$

$\Leftrightarrow 16a^4-40a^2+4=4b^2$

$\Leftrightarrow (4a^2-2b-5)(4a^2+2b-5)=21$

Vì $4a^2-2b-5\le 4a^2+2b-5$ ta có bảng sau:

$4a^2-2b-5$	1	3	-21	-7
$4a^2+2b-5$	21	7	-1	-3

Suy ra

$4a^2-2b$	6	8	-16	-2
$4a^2+2b$	26	12	4	2

Lại có: $4a^2-2b+4a^2+2b=8a^2$ hay:

$8a^2$	32	20	-12	0

a^2	4 (tm)	2,5	-1,5	0

Ta được $a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 25$. Trả lại ẩn:

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ 4x^2+6x-3=25 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ (tm).}$$

Vậy với x = 2 thì $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương.

Câu 4: (6 điểm)

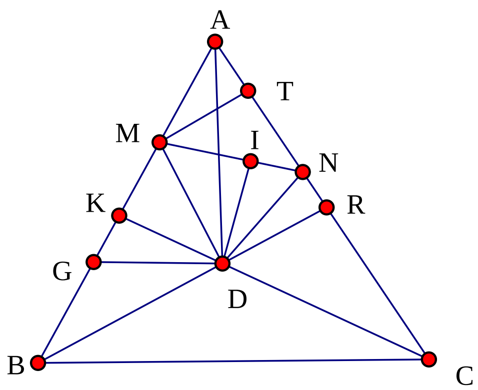
Cho tam giác đều ABC cạnh a, hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn AB, AC sao cho $\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM = x;\ AN = y$.

a. Biết $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{5}$, tính diện tích tam giác AMN theo a.

b. Chứng minh rằng $MN = a-x-y$.

c. Gọi D là trọng tâm tam giác ABC, K là trung điểm AB. Vẽ $DI \perp MN$, chứng minh rằng: $DI = DK$.

Lời giải:



a) Ta có: $\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=1 \Rightarrow \frac{x}{a-x}+\frac{y}{a-y}=1$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{a-x}-\frac{y}{a-y}=-1 \Leftrightarrow \frac{a-x-a}{a-x}-\frac{a-y-a}{a-y}=-1 \Leftrightarrow 1-\frac{a}{a-x}+1-\frac{a}{a-y}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a-x}+\frac{a}{a-y}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{a-x}+\frac{1}{a-y}=\frac{3}{a} \quad (1)$$

Lại có: $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{a}{5}$. Thay vào (1) ta được:

$$\frac{1}{a-\frac{a}{5}}+\frac{1}{a-y}=\frac{3}{a} \Leftrightarrow \frac{5}{4a}+\frac{1}{a-y}=\frac{3}{a} \Rightarrow y=\frac{3a}{7}$$

Diện tích tam giác là: $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AM.AN.\sin\widehat{MAN}=x.y.\sin 60°$

$$=\frac{a}{5}.\frac{3a}{7}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{70} \text{ (đvdt).}$$

b) Do $\dfrac{x}{a-x}+\dfrac{y}{a-y}=1$

$\Rightarrow ax+ay-2xy=a^2-ax-ay+xy$

$\Rightarrow a^2-2ax-2ay+2xy+xy=0$

$\Rightarrow (a-x-y)^2=x^2+y^2-xy$ (2)

Giả sử $MN^2=AM^2+AN^2-AM.AN$

Lấy điểm $T\in AC$ sao cho $MT\perp AC$ và $2AT=AM$ ta có:

$MN^2-AM^2=TN^2-AT^2=AN(TN-AT)=AN(AN-2AT)=AN(AN-AM)$

$=AN^2-AN.AM$

$MN^2=AM^2+AN^2-AN.AM$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $MN=a-x-y$ (đpcm).

c) Trên tia BA lấy điểm G sao cho $BG=AN\Rightarrow MN=MG$.

Do $\Delta GBD=\Delta NAD$ (c.g.c) $\Rightarrow DN=DG\Rightarrow \Delta DMN=\Delta DMG$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{KGD}=\widehat{IND}$

$\Rightarrow \Delta KGD=\Delta IND$ (ch – gn) $\Rightarrow DK=DI$ (đpcm).

Câu 5: (1 điểm)

Cho một bảng ô vuông 2019×2020, mỗi ô vuông con có thể tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng ban đầu tất cả các ô đều được tô màu xanh. Cho phéo mỗi lần ta chọn một hang hoặc một cột và thay đổi màu của tất cả các ô thuộc hàng hoặc cột đó. Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu ta có thể thu được một bảng gồm đúng 2000 ô vuông màu đỏ hay không?

Lời giải:

Trước hết ta chứng minh với mọi cách chọn 2000 ô trên bảng đã cho luôn tồn tại một bảng con 2×2 chứa đúng 1 trong 2000 ô này.

Thật vậy, vì số hàng lớn hơn số ô được chọn nên tồn tại 2 hàng liền nhau R_1, R_2 mà R_1 không chứ ô nào và R_2 có chứa ít nhất một ô đã chọn.

Vì số cột cũng lớn hơn số ô được chọn nên tồn tại 2 ô A, B cạnh nhau trên R_2 mà chỉ có đúng một ô đã chọn.

Gọi C, D là 2 ô nằm trên R_1 và cùng cột với A, B. Bảng con 2×2 gồm 4 ô A, B, C, D chỉ có đúng một ô được chọn.

Giả sử ta có thể thu được bảng gồm đúng 1000 ô màu đỏ sau hữu hạn lần đổi màu. Khi đó theo chứng minh trên tồn tại một bảng vuông con 2×2 chứa đúng một ô màu đỏ, ba ô còn lại màu xanh.

Vì ở trạng thái ban đầu tất cả các bảng vuông con 2×2 đều gồm 4 ô màu xanh nên mỗi lần đổi màu hàng hoặc cột thì số ô màu đỏ và số ô màu xanh trong bảng vuông con 2×2 luôn là số chẵn.

Do đó không thể thu được một bảng vuông con 2×2 có 1 ô màu đỏ, 3 ô màu xanh. Suy ra ta có mâu thuẫn.

Vậy không thể thu được bảng chứa đúng 2000 ô màu đỏ sau hữu hạn lần đổi màu.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 HUYỆN CHƯƠNG MỸ - NĂM HỌC 2019 – 2020

Câu 1: (1,25 *điểm*). Tìm số a,b trong sơ đồ sau:

b				
a	9			
6	8	14		
9	7	13	19	
12	10	8	22	20

Câu 2: (5,0 *điểm*) Cho biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x}{4-x}$

1) Tìm x để $A<1$.

2) Biết $A=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}\right)-1$, hãy tính giá trị của $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-x}:(2A)$.

3) Tìm giá trị của x nguyên để biểu thức $P=A:\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên?

4) Tìm x để $A.\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$

Câu 3: (3,25 *điểm*).

1) Tìm m để phương trình: $\dfrac{x+2}{x-m}=\dfrac{x+1}{x-1}$ vô nghiệm.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $y=x+\sqrt{2(1-x)}$ với $0\le x\le 1$.

3) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{6xy}=\dfrac{1}{6}$

Câu 4: (3,5 *điểm*)

1) Cho $x-\sqrt{2}=1$, hãy tính giá trị của $D=x^5-x^4-3x^3-4x^2+6x+2022$.

2) Tìm a,b để $P(x)=3x^3+ax^2+bx+9$ chia hết cho $Q(x)=x^2-9$.

3) Cho a,b,c là ba số thực bất kỳ. Chứng minh đẳng thức: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

Câu 5: (2,0 *điểm*) Cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD,BE,CF của ΔABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng ΔABC đồng dạng với ΔAEF.

2) Gỉa sử $\widehat{BAC}=45^o$, hãy tính diện tích tứ giác $BCEF$, biết diện tích ΔABC là $60cm^2$

3) Chứng minh rằng: $\dfrac{DC}{BD}=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{BC^2+AB^2-AC^2}$.

4) Chứng minh rằng: H cách đều ba cạnh của ΔDEF.

5) Chứng minh rằng: $\dfrac{AH}{BC}+\dfrac{BH}{AC}+\dfrac{CH}{AB}\ge\sqrt{3}$

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BÌNH GIANG - NĂM 2019

Câu 1: (1,25 *điểm*). Tìm số a, b trong sơ đồ sau:

		b		
		a	9	
	6	8	14	
	9	7	13	19
12	10	8	22	20

Lời giải

Quy luật: Tổng hai số hàng dưới chia 2 rồi trừ 2 được số ở hàng trên giữa hai số đó. Theo quy luật đó thì $a = b = 5$

Câu 2: (5,0 *điểm*) Cho biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{x}{4-x}$

1) Tìm x để $A < 1$.

2) Biết $A = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}\right) - 1$, hãy tính giá trị của $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{2-x} : (2A)$.

3) Tìm giá trị của x nguyên để biểu thức $P = A : \dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên?

4) Tìm x để $A.\left(\sqrt{x}-2\right) + 5\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$

Lời giải

1) Rút gọn: $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{x}{4-x}$ điều kiện: $x \neq 4; x \geq 0$

$$A = \frac{\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2+x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$A = \frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

Do $A < 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp điều kiện $x \neq 4; x \geq 0$ ta có: $0 \leq x < 4$

2) Ta có: $A = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}\right) - 1 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\left(4+\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}\right) - 1$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left(4+\sqrt{3}+4-\sqrt{3}\right) - 1 = 3$$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)}=3 \Rightarrow \sqrt{x}=3\sqrt{x}-6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$

Thay $x=9, A=3$ vào biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-x}:\left(2A\right)$ ta được

$B=\dfrac{\sqrt{9}+3}{2-9}:\left(2.3\right)=\dfrac{6}{-7}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{-1}{7}$

3) Ta có: $P=A:\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}:\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=-1+\dfrac{3}{3-\sqrt{x}}$

Để P nguyên thì $\dfrac{3}{3-\sqrt{x}}\in Z \Rightarrow 3-\sqrt{x}\in\left\{-3;-1;1;3\right\}$

Ta có bảng sau:

$3-\sqrt{x}$	-3	-1	1	3
$\sqrt{x}$	6	4	2	0
x	36	16	4	0

Do $x\neq 4$ nên $x\in\left\{0;16;36\right\}$

4) Thay $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)}$ vào biểu thức $A.\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$ ta được:

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+5\sqrt{x}-x-4=\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$

$\Leftrightarrow -x+6\sqrt{x}-4=\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$

$\Leftrightarrow 5-\left(\sqrt{x}-3\right)^2=\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$

Với $x\neq 4; x\geq 0$, ta có:

$VT=5-\left(\sqrt{x}-3\right)^2\leq 5$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow x=9$

$VP=\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}\geq\sqrt{x+16+9-x}=5$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=9$

Do $VT\leq 5; VP\geq 5 \Rightarrow VT=VP \Leftrightarrow x=9$

Câu 3: (*3,25 điểm*).

1) Tìm m để phương trình: $\dfrac{x+2}{x-m}=\dfrac{x+1}{x-1}$ vô nghiệm.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $y=x+\sqrt{2\left(1-x\right)}$ với $0\leq x\leq 1$.

3) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{6xy}=\dfrac{1}{6}$

Lời giải

1) Điều kiện: $x\neq m; x\neq 1$

Ta có: $\dfrac{x+2}{x-m}=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\Rightarrow \left(x+2\right)\left(x-1\right)=\left(x-m\right)\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=x^2-mx+x-m$

$\Leftrightarrow mx=2-m$

+ Nếu $m=0$, ta có phương trình: $0x=2$, phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{2-m}{m}$

Để phương trình vô nghiệm thì $x = m$ hoặc $x = 1$

+ Khi $x = m \Rightarrow \dfrac{2-m}{m} = m \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$

+ Khi $x = 1 \Rightarrow \dfrac{2-m}{m} = 1 \Rightarrow m = 1$

Vậy $m-1; m=-2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Đặt $\sqrt{1-x} = t$ với $0 \le t < 1$ suy ra $x = 1 - t^2$, thay vào $y = x + \sqrt{2(1-x)}$ ta được:

$y = 1 - t^2 + \sqrt{2}t = -\left(t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{3}{2} \le \dfrac{3}{2}$

GTLL của y là $y = \dfrac{3}{2}$ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

3) Ta có: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{6xy} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow 6y + 6x + 1 = xy \Leftrightarrow xy - 6x - 6y + 36 = 37$

$\Leftrightarrow (x-6)(y-6) = 37$

Ta có bảng sau:

$x-6$	-37	-1	1	37
$y-6$	-1	-37	37	1
x	-31	5	7	43
y	5	-31	43	7

Câu 4: (3,5 *điểm*)

1) Cho $x - \sqrt{2} = 1$, hãy tính giá trị của $D = x^5 - x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x + 2022$.

2) Tìm a, b để $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 9$ chia hết cho $Q(x) = x^2 - 9$.

3) Cho a, b, c là ba số thực bất kỳ. Chứng minh đẳng thức: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

Lời giải

1) Từ $x - \sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$D = x^5 - 2x^4 - x^3 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x^2 + 6x + 3 + 2019$

$D = x^3\left(x^2 - 2x - 1\right) + x^2\left(x^2 - 2x - 1\right) - 3\left(x^2 - 2x - 1\right) + 2019$

$D = 2019$

Ta có: $Q(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

Để $P(x) \vdots Q(x)$ thì $P(3) = 0; P(-3) = 0$

Ta có:

$P(3) = 3.3^3 + a.3^2 + b.3 + 9 = 9a + 3b + 90 = 0 \Rightarrow 3a + b + 30 = 0$

$P(-3) = 3.(-3)^3 + a.(-3)^2 + b.(-3) + 9 = 9a - 3b - 72 = 0 \Rightarrow 3a - b - 24 - 0$

Xét $\begin{cases} 3a + b + 30 = 0 \\ 3a - b - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = -6 \\ 3a - b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -27 \end{cases}$

Vậy $a=-1;b=-27$ thì $P(x)\vdots Q(x)$

2) Ta có:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2(ab+bc+ac)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, kéo theo bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Câu 5: (*2,0 điểm*) Cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng ΔABC đồng dạng với ΔAEF.

2) Giả sử $\widehat{BAC}=45^o$, hãy tính diện tích tứ giác $BCEF$, biết diện tích ΔABC là $60cm^2$

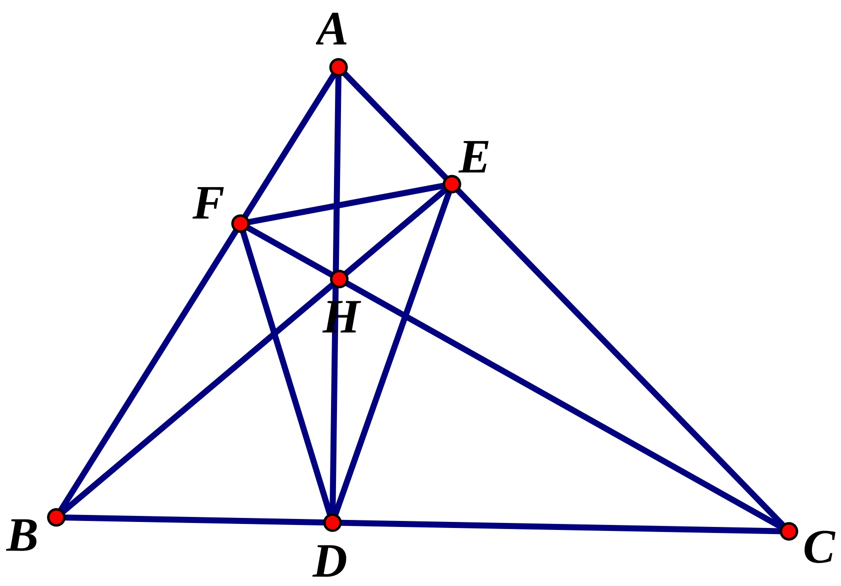
3) Chứng minh rằng: $\dfrac{DC}{BD}=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{BC^2+AB^2-AC^2}$.

4) Chứng minh rằng: H cách đều ba cạnh của ΔDEF.

5) Chứng minh rằng: $\dfrac{AH}{BC}+\dfrac{BH}{AC}+\dfrac{CH}{AB}\ge\sqrt{3}$

Lời giải

1) Vẽ hình:



Do $BE\perp AC;CF\perp AB$ nên ta có $\cos A=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC};\angle A$ chung

$\Rightarrow\Delta AEF$ đồng dạng ΔABC (c.g.c)

2) ΔEAB vuông tại A có $\angle EAB=45^o$

$\Rightarrow\dfrac{AE}{AB}=\cos A=\cos 45^o=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ΔAEF đồng dạng ΔABC theo tỷ số đồng dạng $k=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 30cm^2$$

$$S_{BCEF} = S_{ABC} - S_{AEF} = 60 - 30 = 30\left(cm^2\right)$$

3) Ta có:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2; \quad BC^2 = \left(DB + DC\right)^2; \quad AB^2 = AD^2 + DB^2$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{BC^2 + AB^2 - AC^2} = \frac{AD^2 + DC^2 + \left(DB + DC\right)^2 - AB^2}{\left(DB + DC\right)^2 + AB^2 - \left(AD^2 + DC^2\right)}$$

$$= \frac{AD^2 + DC^2 + DB^2 + DC^2 + 2BD.DC - AB^2}{DB^2 + DC^2 + 2BD.DC + AB^2 - AD^2 - DC^2}$$

$$= \frac{2DC^2 + 2BD.DC + AD^2 + DB^2 - AB^2}{DB^2 + 2BD.DC + AB^2 - AD^2}$$

$$= \frac{2DC^2 + 2BD.DC}{2DB^2 + 2BD.DC} = \frac{2DC\left(DC + BD\right)}{2BD\left(BD + DC\right)} = \frac{DC}{DB}$$

4) Do ΔAEF đồng dạng ΔABC (câu a) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Chứng minh tương tự câu a) ta cũng có ΔBDF đồng dạng ΔBAC (câu a) $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{AFE}\left(= \widehat{ACB}\right)$

$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{EFC}$

$\Rightarrow FC$ là tia phân giác của $\widehat{EFD}$

Chứng minh tương tự ta cũng có EB là tia phân giác của $\widehat{FED}$

$\Rightarrow H$ là giao điểm của ba đường phân giác của ΔDEF

$\Rightarrow H$ cách đều ba cạnh của ΔDEF .

5) Ta có: $S_{ABC} = S_{AHC} + S_{HBC} + S_{ABH}$

ΔHEC đồng dạng ΔAFC (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HC}{AC} = \frac{CE}{CF} \Rightarrow \frac{HC.HB}{AC.AB} = \frac{CE.HB}{CF.AB} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$$

Tương tự: $\dfrac{HA.HB}{AC.BC} = \dfrac{S_{ABH}}{S_{ABC}}; \dfrac{HA.HC}{AB.BC} = \dfrac{S_{ACH}}{S_{ABC}}$

Do đó: $\dfrac{HC.HB}{AC.AB} + \dfrac{HA.HB}{AC.BC} + \dfrac{HA.HC}{AB.BC} = \dfrac{S_{BCH} + S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

Với ba số không âm x, y, z ta có:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy; x^2 + z^2 \geq 2xz; z^2 + y^2 \geq 2zy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

$$\left(x + y + z\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(xy + xz + yz\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + y + z\right)^2 \geq 3\left(xy + xz + yz\right)$$

Áp dụng bài toán trên ta có:

$$\left(\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{AC} + \frac{HC}{AB}\right)^2 \geq 3\cdot\left(\frac{HA}{BC}\cdot\frac{HB}{AC} + \frac{HB}{AC}\cdot\frac{HC}{AB} + \frac{HA}{BC}\cdot\frac{HC}{AB}\right) = 3.1 = 3 \Rightarrow \frac{HA}{BC} + \frac{HB}{AC} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN CHƯƠNG MỸ VÒNG 2 - NĂM 2020

Câu 1: (*3,0 điểm*)

1. Chứng minh rằng: $\left(2019^{2019}+2021^{2020}\right)\vdots 2020$.

2. Tìm các số tự nhiên n để $n+24$ và $n-65$ là số chính phương.

Câu 2: (*4,0 điểm*) Cho $H=\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{xy}-y}-\dfrac{y}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{xy}{\sqrt{x}+1-\sqrt{xy}-\sqrt{y}}$.

Tìm x,y nguyên để $H=20$.

Câu 3: (*3,0 điểm*)

1. Cho các số a,b,c,x,y,z dương thỏa mãn: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}=1$ và $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}+2019$.

2. Giải phương trình: $2x^2+16x-6=4\sqrt{x(x+8)}$.

Câu 4: (*4,0 điểm*)

1. Tìm a,b để $f(x)=x^4+2x^3-x^2+x(a-4)+b+2$ viết thành bình phương của một đa thức.

2. Cho a,b là các số dương thỏa mãn $(1+a)(1+b)=4,5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{a^4+1}+\sqrt{b^4+1}$.

3. Cho a,b,c dương sao cho $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=1$. Chứng minh: $\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{c}{b}}+\sqrt{\dfrac{a}{c}}\le 1$.

Câu 5: (*7,0 điểm*)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AH (H thuộc BC). Kẻ HD,HE lần lượt vuông góc với AB,AC (D thuộc AB, E thuộc AC). Đường thẳng qua A vuông góc với DE cắt BC tại I.

a) Chứng minh: I là trung điểm của BC.

b) Kẻ đường thẳng vuông góc với AI tại A cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh AB là tia phân giác của góc KAH.

c) Chứng minh: $AD.BD+AE.EC\le AI^2$.

2. Cho tam giác ABC, kẻ các đường phân giác trong AD,BE,CF của tam giác ABC.

a) Chứng minh $AB.BD-BD.DC=AD^2$.

b) Chứng minh: $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BC}<\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{CF}$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN CHƯƠNG MỸ VÒNG 2 NĂM 2020

Câu 1: (*3,0 điểm*)

1. Chứng minh rằng: $\left(2019^{2019}+2021^{2020}\right)\vdots 2020$.

2. Tìm các số tự nhiên n để $n+24$ và $n-65$ là số chính phương.

Lời giải

1. Ta có: $\left(2019^{2019}+1\right)+\left(2021^{2020}-1\right)=2019^{2019}+2021^{2020}$

Mà $2019^{2019}+1=\left(2019+1\right)\left(2019^{2018}-2019^{2017}+2019^{2016}-\ldots-1\right)$ (1)

$2021^{2020}-1=\left(2021-1\right)\left(2021^{2019}+2021^{2018}+2021^{2017}+\ldots+1\right)$ (2)

Cộng vế (1) và (2) ta được:

$2020.\left[\left(2019^{2018}-2019^{2017}+2019^{2016}-\ldots-1\right)+\left(2021^{2019}+2021^{2018}+2021^{2017}+\ldots+1\right)\right]\vdots 2020$

.

2. Đặt $\begin{cases} n+24=k^2 \\ n-65=h^2 \end{cases}$

$\Rightarrow k^2-24=h^2+65$.

Với $k,h>0$ ta có: $\left(k-h\right)\left(k+h\right)=89=1.89=89.1$

+) TH1: $\begin{cases} k-h=1 \\ k+h=89 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=45 \\ h=44 \end{cases}$

Khi $k=45\Rightarrow n+24=45^2\Rightarrow n=2001$

+) TH2: $\begin{cases} k-h=89 \\ k+h=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=45 \\ h=-44(KTM) \end{cases}$

Vậy với $n=2001$ thì $n+24$ và $n-65$ là số chính phương.

Câu 2: (*4,0 điểm*) Cho $H=\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{xy}-y}-\dfrac{y}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{xy}{\sqrt{x}+1-\sqrt{xy}-\sqrt{y}}$.

Tìm x,y nguyên để $H=20$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x,y\neq 1; x,y>0$.

Ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{xy}-y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)$

$x+\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\sqrt{x}+1-\sqrt{xy}-\sqrt{y}=\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{y}\right)$

Khi đó $H=\dfrac{x\left(\sqrt{x}+1\right)-y\left(1-\sqrt{y}\right)-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$H=\dfrac{x\sqrt{x}+x-y+y\sqrt{y}-xy\sqrt{x}-xy\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$H=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left[\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right]}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy}{\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{y}+\sqrt{xy}\right)+y\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right)+y\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y\left(1-\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y-y\sqrt{x}}{1-\sqrt{y}}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{1-\sqrt{y}}$$

$$H=\sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}$$

Ta có $H=20\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}=20\Rightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+1\right)-\left(\sqrt{y}+1\right)=19$

$\Rightarrow\left(\sqrt{y}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=19=19.1=1.19=(-1).(-19)=(-19).(-1)$

TH1: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=1\\ \sqrt{x}-1=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=400\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=19\\ \sqrt{x}-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=324\\ x=4\end{cases}$

TH3: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=-1\\ \sqrt{x}-1=-19\end{cases}\Rightarrow$ loại

TH4: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=-19\\ \sqrt{x}-1=-1\end{cases}\Rightarrow$ loại

Vậy với $x=400; y=0$ hoặc $x=4, y=324$ thì $H=20$.

Câu 3: (*3,0 điểm*)

1. Cho các số a,b,c,x,y,z dương thỏa mãn: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}=1$ và $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+2019$.

2. Giải phương trình: $2x^2+16x-6=4\sqrt{x\left(x+8\right)}$.

Lời giải

1. Từ $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}=1\Rightarrow \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}+\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{ab}}+\dfrac{2\sqrt{yz}}{\sqrt{bc}}+\dfrac{2\sqrt{xz}}{\sqrt{ac}}=1$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+2.\frac{\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}}{\sqrt{abc}}=1 \qquad (1)$$

Mà $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}}=0\Rightarrow \dfrac{\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}}{\sqrt{xyz}}=0$

$\Rightarrow \sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}=0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do đó $M=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}+2019=1+2019=2020$.

2. Đk: $x\ge 0$ hoặc $x\le -8$

$2x^2+16x-6=4\sqrt{x(x+8)}$

$\Leftrightarrow x^2+8x-3=2\sqrt{x(x+8)} \qquad (1)$

Đặt $t=\sqrt{x(x+8)}\ (t\ge 0)\ \Rightarrow t^2=x^2+8x$

(1) $\Leftrightarrow t^2-3=2t\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=3\end{array}\right.$

Ta thấy $t=-1$ không thỏa mãn đk.

Với $t=3\Rightarrow x^2+8x=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-9\end{array}\right.$ (tmđk)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;-9\}$.

Câu 4: (*4,0 điểm*)

1. Tìm a,b để $f(x)=x^4+2x^3-x^2+x(a-4)+b+2$ viết thành bình phương của một đa thức.

2. Cho a,b là các số dương thỏa mãn $(1+a)(1+b)=4,5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{a^4+1}+\sqrt{b^4+1}$.

3. Cho a,b,c dương sao cho $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=1$. Chứng minh: $\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{c}{b}}+\sqrt{\dfrac{a}{c}}\le 1$.

Lời giải

1. Biến đổi

$f(x)=x^4+x^2+1+2x^3-2x-2x^2-ax-2x+b+1$

$=(x^2+x-1)^2+(a-2)x+(b+1)$

Để $f(x)$ trở thành bình phương của một đa thức thì $\begin{cases} a-2=0\\ b+1=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=2\\ b=-1\end{cases}$

Vậy với $a=2, b=-1$ thì $f(x)$ trở thành bình phương của một đa thức.

2. Ta có: $(1+a)(1+b)=4,5 \Leftrightarrow a+b+ab=\frac{7}{2}$.

Ta xét 4 số thực a,b,x,y ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=a^2+b^2+x^2+y^2+2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\geq a^2+b^2+x^2+y^2+2|ax+by|\geq a^2+b^2+x^2+y^2+2ax+2by=(a+x)^2+(b+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$Q=\sqrt{\left(a^2\right)^2+1^2}+\sqrt{\left(b^2\right)^2+1^2}\geq\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2+(1+1)^2}$$

Mà $a^2+\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2\geq 2a.\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\left(3\sqrt{2}-2\right)a$ (1)

$$b^2+\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2\geq\left(3\sqrt{2}-2\right)b \quad (2)$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\left(a^2+b^2\right)\geq\left(3\sqrt{2}-2\right)ab \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) lại ta được:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(a^2+b^2\right)+2\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2\geq\left(3\sqrt{2}-2\right)(ab+a+b)$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(a^2+b^2\right)+11-6\sqrt{2}\geq\left(3\sqrt{2}-2\right).\frac{7}{2}$$

Hay $a^2+b^2\geq 11-6\sqrt{2}$

(Cách khác: $\frac{9}{2}=(1+a)(1+b)\leq\left(\frac{1+a+1+b}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{2+a+b}{2}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow a+b\geq 3\sqrt{2}-2$

Mặt khác: $(a+b)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{\left(3\sqrt{2}-2\right)^2}{2}=11-6\sqrt{2}$)

Do đó $Q\geq\sqrt{\left(11-6\sqrt{2}\right)^2+4}=\sqrt{87-12\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$

Vậy $\text{Min}\,Q=\sqrt{87-12\sqrt{2}}$ khi $a=b=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$

Câu 5: (*7,0 điểm*)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AH (H thuộc BC). Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC (D thuộc AB, E thuộc AC). Đường thẳng qua A vuông góc với DE cắt BC tại I.

a) Chứng minh: I là trung điểm của BC.

b) Kẻ đường thẳng vuông góc với AI tại A cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh AB là tia phân giác của góc KAH.

c) Chứng minh: $AD.BD+AE.EC\le AI^2$.

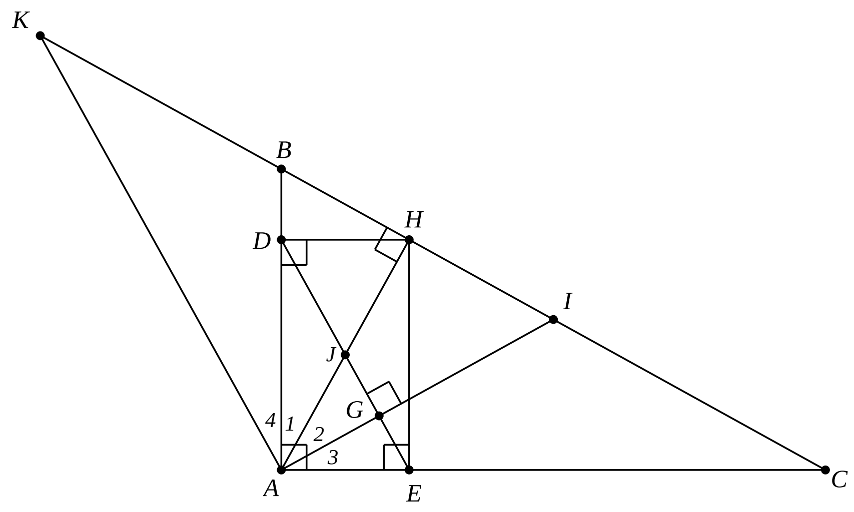
2. Cho tam giác ABC, kẻ các đường phân giác trong AD, BE, CF của tam giác ABC.

a) Chứng minh $AB.BD-BD.DC=AD^2$.

b) Chứng minh: $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BC}<\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{CF}$.

Lời giải

1.



a) Gọi giao điểm của DE với AH, AI lần lượt tại $J;G$

Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật $\widehat{HAE}=\widehat{JAE}$?

Mà $\widehat{A_1}+\widehat{HAE}=90^\circ$ (hai góc phụ nhau)

$\widehat{A_3}+\widehat{JEA}=90^\circ$ (ΔAGE vuông)

Do đó $\widehat{A_1}=\widehat{A_3}$

Vì $\widehat{A_1}=\widehat{C}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$) $\Rightarrow \widehat{A_3}=\widehat{C}\Rightarrow \Delta AIC$ cân tại I $\Rightarrow AI=IC$

Tương tự: $AI=BI$

Vậy $IB=IC\,(=IA)$.

b) Ta có ΔAIB cân tại I $\Rightarrow \widehat{IBA}=\widehat{IAB}$

mà $\begin{cases}\widehat{A_4}+\widehat{IAB}=90^\circ \\ \widehat{A_1}+\widehat{HAC}=90^\circ\end{cases}$ và $\widehat{HAC}=\widehat{IBA}$ (cùng phụ $\widehat{A_1}$)

Do đó: $\widehat{A_1}=\widehat{A_4}$

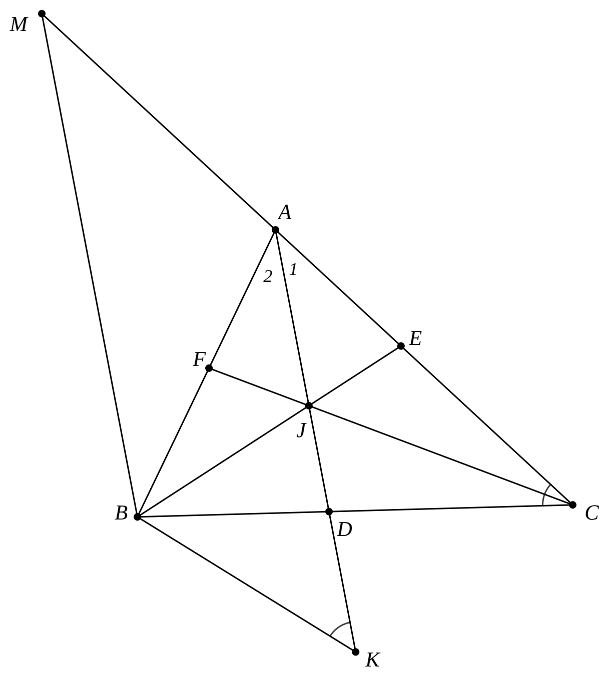
$\Rightarrow AB$ là phân giác của $\widehat{HAK}$

c) Ta có: $\left.\begin{matrix}AD.DB=HD^2 \\ AE.EC=HE^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow AD.DB+AE.EC=HD^2+HE^2=DE^2=AH^2$

Xét ΔAHI vuông tại H, ta có $AH^2\le AI^2$

Do đó $AD.DB+AE.EC\le AI^2$.

2.



a) Lấy K thuộc tia đối của tia DA sao cho $\widehat{AKB}=\widehat{ACB}$

Vì $\Delta ACD\backsim\Delta AKB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AK}\Rightarrow AB.AC=AD.AK$ (1)

Vì $\Delta DAC\backsim\Delta DBK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DC}{DK}=\dfrac{AC}{BK}=\dfrac{AD}{BD}\Rightarrow DC.BD=DK.AD$ (2)

Trừ (1), (2) suy ra $AB.AC-DC.BD=AD.\left(AK-KD\right)=AD.AD=AD^2$

b) Kẻ $BM//AD$, cắt đường thẳng AC tại M

$\Rightarrow \Delta ABM$ cân tại A $\Rightarrow AM=AB$

Theo BĐT tam giác: $MB < AM + AB \Rightarrow MB < 2AB$

Do $AD//BM$ $\Rightarrow \dfrac{AD}{BM} = \dfrac{CA}{CM} = \dfrac{AC}{AC + AM} = \dfrac{AC}{AC + AB}$ (do $CM = AC + AM ; AM = AB$)

$$\Rightarrow \frac{AD}{BM} = \frac{AC}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AC}{AC + AB}.BM < \frac{AC.2AB}{AC + AB} = \frac{2AB.AC}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} > \frac{AC + AB}{2AB.AC} = \frac{1}{2AC} + \frac{1}{2AB} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{BE} > \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC}\right)$

$$\frac{1}{CF} > \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}\right)$$

Cộng vế với vế, ta được: $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF} > \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AC}$.

PHÒNG GD&ĐT
QUẬN THANH XUÂN

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN
NĂM HỌC: 2019 - 2020
MÔN: TOÁN
Ngày thi: *05/10/2019*
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I *(5,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(1-\frac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của A khi $x=\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

Bài II *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng, nếu p và $8p^2+1$ là hai số nguyên tố lẻ thì $8p^2+2p+1$ là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các số nguyên $(x;y)$ sao cho: $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7(x+2y)$

Bài III *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

2) Cho x,y,z là các số thực dương và các số thực a,b,c .

Chứng minh $\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\geq(a+b+c)^2$

3) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}$

Bài IV *(4,0 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là a . Trên CB,CD lần lượt lấy các điểm M,N sao cho chu vi tam giác CMN có chu vi là $2a$. Gọi giao điểm của đường thẳng BD với các đường thẳng AM,AN lần lượt là E,F . Giao điểm của MF và NE là H

1) Tính số đo $\widehat{MAN}$

2) Chứng minh $AH\perp EF$

3) Gọi diện tích tam giác AEF,AMN lần lượt là S_1,S_2 . Tính $\frac{S_1}{S_2}$

Bài V *(1,0 điểm)*

Trong mặt phẳng cho 2020 điểm, khoảng cách giữa hai điểm bất kì đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong số 2020 điểm này với điểm ở gần nhất tương ứng. Chứng minh rằng với cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

---*Hết*---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên học sinh:……………………………………..Trường THCS:………………

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I *(5,0 điểm)*

a) $A=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(1-\frac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right)$

$A=\frac{x-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

b)Ta có $x=\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}}=2$

Vậy $A=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

Bài II *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng, nếu p và $8p^2+1$ là hai số nguyên tố lẻ thì $8p^2+2p+1$ là số nguyên tố.

Do p là số nguyên tố lẻ nên $p=3k\pm 1$ hoặc $p=3k$

+Nếu $p=3k\pm 1$ thì $8p^2+1=8(3k\pm 1)^2+1=3\left(24k^2\pm 16k+3\right)\vdots 3$ nên vô lý.

+Nếu $p=3k$. Do p là số nguyên tố lẻ nên $p=3$, rõ ràng $8.9+1=73$ là số nguyên tố mà $8p^2+2p+1=72+6+1=79$ là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các số nguyên $(x;y)$ sao cho: $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7(x+2y)$

Ta có $5\left(4x^2+4xy+4y^2\right)=28(x+2y)\Rightarrow 15x^2=28(x+2y)-5(x+2y)^2$

Do $15x^2\ge 0\Rightarrow 28(x+2y)-5(x+2y)^2=-5\left[(x+2y)^2-2(x+2y).\frac{14}{5}+\frac{169}{25}\right]+\frac{169}{5}\le\frac{169}{5}$

Vậy $0\le 15x^2\le\frac{169}{5}\Rightarrow 0\le x^2\le\frac{169}{75}, x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;0;1\}$

$+x=0\Rightarrow y=0$

$+x=-1\Rightarrow y=3$ thỏa mãn bài toán

$+x=1\Rightarrow y=2$

Bài III *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

Ta có

$x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0$

Suy ra $x=-1$ là nghiệm của phương trình.

2) Cho x,y,z là các số thực dương và các số thực a,b,c .

Chứng minh $\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\ge(a+b+c)^2$

Ta biến đổi vế trái: $VT = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a^2y}{x} + \frac{a^2x}{x} + \frac{b^2x}{y} + \frac{b^2z}{y} + \frac{c^2x}{z} + \frac{c^2y}{z}$

Ta có $\frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} \ge 2ab; \frac{a^2x}{x} + \frac{c^2x}{z} \ge 2ac; \frac{b^2z}{y} + \frac{c^2y}{z} \ge 2bc,$

Nên $VT \ge a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2$.

3) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z}$

Đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}; a,b,c > 0$ *nên*

$$P = \frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2b} + \frac{a}{a+2c} = \frac{b^2}{b^2+2ab} + \frac{c^2}{c^2+2bc} + \frac{a^2}{a^2+2ac} \ge 1$$

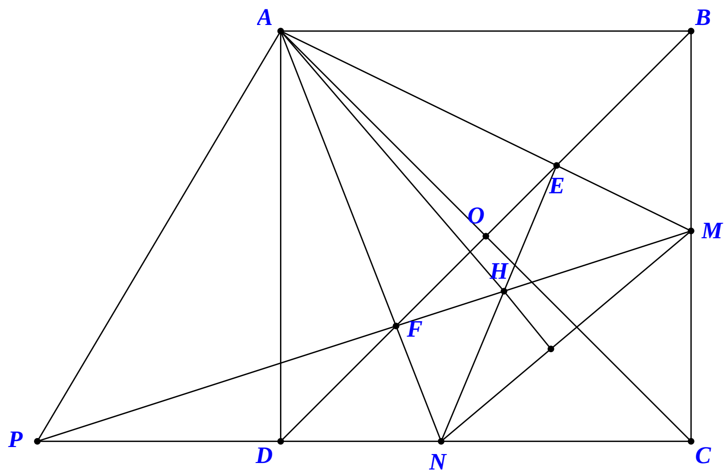
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$

Bài IV *(4,0 điểm)* Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là a. Trên CB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi tam giác CMN có chu vi là $2a$. Gọi giao điểm của đường thẳng BD với các đường thẳng AM, AN lần lượt là E, F. Giao điểm của MF và NE là H

1) Tính số đo $\widehat{MAN}$

2) Chứng minh $AH \perp \text{EF}$

3) Gọi diện tích tam giác AEF, AMN lần lượt là S_1, S_2. Tính $\frac{S_1}{S_2}$



a)Gọi P là điểm trên tia đối của DC sao cho $DP = BM$

Ta chứng minh được: $\Delta ABM = \Delta ADP(c.g.c) \Rightarrow BM = DP; AM = AP; \widehat{BAM} = \widehat{DAP}$

Từ đó suy ra $\widehat{MAP} = \widehat{PAD} + \widehat{DAM} = \widehat{BAM} + \widehat{DAM} = 90^0$

Hay ΔPAM là tam giác vuông cân. Ta có chu vi tam giác CMN là: $MN + MC + NC = 2a$

Hay $MN + BC - BM + CD - DN = 2a \Leftrightarrow MN + 2a - (DP + DN) = 2a \Leftrightarrow MN = PN$ dẫn đến $\Delta PAN = \Delta MAN$ suy ra $\widehat{PAN} = \widehat{MAN} = 45^0$

b)Ta định nghĩa lại F là giao điểm của AN và PM, từ chứng minh PAM vuông cân và $\widehat{PAN} = \widehat{MAN} = 45^0$

suy ra F là trung điểm của PM và $AF \perp PM$

suy ra $AF = CF = \frac{1}{2}PM$

hay F nằm trên trung trực của AC

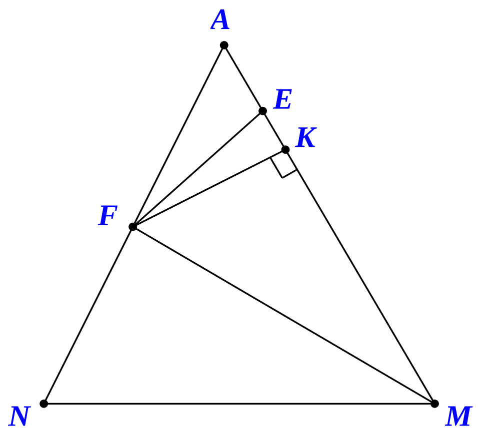
mà BD cũng là trung trực của AC

suy ra $F \in BD$ hay F cũng chính là giao điểm của AN với BD.

Tương tự ta cũng có $AM \perp NE$ mà H là giao điểm của NE, MF nên H là trực tâm của tam giác AMN suy ra $AH \perp EF$

c)Ta có kết quả quen thuộc sau:

« Cho tam giác AMN và hai điểm E,F nằm trên hai cạnh AM, AN của tam giác thì $\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \frac{AE}{AM} \cdot \frac{AF}{AN}$ »



Thật vậy hạ $FK \perp AM$ thì $\frac{S_{AEF}}{S_{AFM}} = \frac{\frac{1}{2}AE.FK}{\frac{1}{2}AM.FK} = \frac{AE}{AM}$. Từ đó ta có

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \frac{S_{AEF}}{S_{AFM}} \cdot \frac{S_{AFM}}{S_{AMN}} = \frac{AE}{AM} \cdot \frac{AF}{AN}$$

Trở lại bài toán ta có $\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \frac{AE}{AM} \cdot \frac{AF}{AN}$

Mặt khác các tam giác AEN, AFM là tam giác vuông cân nên $AN = \sqrt{2}AE, AM = \sqrt{2}AF$

suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \frac{AE}{AM} \cdot \frac{AF}{AN} = \frac{AE}{\sqrt{2}AF} \cdot \frac{AF}{\sqrt{2}AE} = \frac{1}{2}$

<u>Bài V</u> *(1,0 điểm)* Giả sử tồn tại một đường gấp khúc khép kín.

Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất trong đường gấp khúc khép kín trên. Khi đó, giả sử AC, BD là hai đoạn kề với đoạn AB

TH1: Nếu $AC < AB$ nên điểm B không là điểm gần A nhất

TH2: Nếu $DB < AB$ nên điểm A không là điểm gần B nhất

Điều đó chứng tỏ không thể nối điểm B và điểm A

Do đó, không tồn tại đường gấp khúc thỏa mãn

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN THẠCH HÀ - NĂM 2019 -2020

Bài 1:

a) Tính giá trị biểu thức $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

b) Chứng minh rằng: $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}$.

c) Tính giá trị biểu thức $N=x^{2019}+3x^{2020}-2x^{2021}$ với $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

d) Cho $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Tính $M=x^5+y^5$.

e) Cho $M=\left(a^2+2bc-1\right)\left(b^2+2ac-1\right)\left(1-c^2-2ab\right)$. Trong đó a,b,c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Bài 2:

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xyz=2\left(x+y+z\right)$.

b) Tìm các số a,b,c sao cho đa thức $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ chia cho $x+2$; $x+1$; $x-1$ đều dư 8.

c) Tìm các số tự nhiên x,y biết: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^2+\dfrac{9x^2}{\left(x-3\right)^2}=16$

b) $\sqrt{x\left(x-1\right)}+\sqrt{x\left(x-5\right)}=2\sqrt{x^2}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Tính AH,BH biết $BC=50\,cm$ và $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng: $AH^3=BC.BD.CE$.

c) Giả sử $BC=2a$ là độ dài cố định. Tính giá trị nhỏ nhất của: BD^2+CE^2.

Bài 5: Cho $0\le a,b,c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P=a+b^{2019}+c^{2020}-ab-bc-ac$

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN THẠCH HÀ - NĂM 2019 -2020

Bài 1:

a) Tính giá trị biểu thức $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

b) Chứng minh rằng: $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}$.

c) Tính giá trị biểu thức $N=x^{2019}+3x^{2020}-2x^{2021}$ với

$x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

d) Cho $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Tính $M=x^5+y^5$.

e) Cho $M=\left(a^2+2bc-1\right)\left(b^2+2ac-1\right)\left(1-c^2-2ab\right)$. Trong đó

a,b,c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Lời giải

a) $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\left(2\sqrt{5}-3\right)}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=\sqrt{\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)}=1$.

b) $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\Rightarrow A^2=\dfrac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}\Rightarrow A=\sqrt{2}\left(dpcm\right)$.

c) $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)=-1$

Với $x=-1$, ta có: $N=-1+3+2=4$.

d) Ta có: $xy=\dfrac{1}{2}$ và $x+y=\sqrt{3}$.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{3})^2-2.\frac{1}{2}=2$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt{3})^3-3.\frac{1}{2}.\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=2.\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}.\sqrt{3}=\frac{11\sqrt{3}}{4}$.

e) $M=(a^2+2bc-1)(b^2+2ac-1)(1-c^2-2ab)$

$=(a^2+bc-ac-ab)(b^2+ac-ab-bc)(ac+bc-c^2-ab)$

$=(a-b)(a-c)(b-a)(b-c)(c-a)(b-c)=(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$

$\Rightarrow \sqrt{M}=|(a-b)(a-c)(b-c)|$

Vì a,b,c là các số hữu tỉ nên $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Bài 2:

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xyz=2(x+y+z)$.

b) Tìm các số a,b,c sao cho đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia cho $x+2$; $x+1$; $x-1$ đều dư 8.

c) Tìm các số tự nhiên x,y biết: $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y=11879$.

Lời giải

a) Vì x,y,z là các số nguyên dương và vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát gải sử: $1\le x\le y\le z$, ta có: $xyz=2(x+y+z)\le 6z$

$\Rightarrow xy\le 6\Rightarrow x=1$ hoặc $x=2$.

Xét $x=1$ cho $y=1,2,3,4,5,6$ ta được: $(x,y,z)=(1,3,8),(1,4,5)$

Xét $x=2$ cho $y=2,3$ ta được $(x,y,z)=(2;2;4)$.

Vậy $(x,y,z)=(1;3;8),(1;4;5),(2;2;4)$ và các hoán vị.

b) Từ giả thiết ta có: $f(x)-8$ luôn chia hết cho $x+2$; $x+1$; $x-1$.

$\Rightarrow f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)+8$.

Với $x=-2$, ta có: $-8+4a-2b+c=8\Rightarrow 4a-2b+c=16(1)$

Với $x=-1$, ta có: $-1+a-b+c=8\Rightarrow a-b+c=9(2)$

Với $x=1$, ta có: $1+a+b+c=8\Rightarrow a+b+c=7\ (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $b=-1\Rightarrow a=2;b=6$.

c) Ta có: $2^x\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)$ là tích 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5 mà 2^x không chia hết cho 5 nên

$\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)$ chia hết cho 5

Mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y=0$.

$\Rightarrow\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)=11880=9.10.11.12\Rightarrow x=3$

Vậy $x=3, y=0$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=16$

b) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\neq 3$

Ta có: $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=16\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{3x}{x-3}\right)^2-\dfrac{6x^2}{x-3}=16\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)^2-2.\dfrac{x^2}{x-3}.3+9=25$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-3}-3\right)^2=25$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x-3}-3=5\\ \dfrac{x^2}{x-3}-3=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-4)^2+8=0\,(VN)\\ (x+1)^2=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{7}-1\\ x=-\sqrt{7}-1\end{array}\right.(thoa\ dk)$$

Vậy $S=\left\{-\sqrt{7}-1;\sqrt{7}-1\right\}$.

b) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$

Điều kiện: $x\geq 5$ hoặc $x\leq 0$.

Nếu $x\geq 5$ thì $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}=2\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{(x-5)(x-1)}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ -12x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ x=-\dfrac{1}{3}(loai)\end{cases}.$$

Nếu $x<0$ thì $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{5-x}=2\sqrt{-x} \Leftrightarrow \sqrt{(5-x)(1-x)}=-x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ -12x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ x=-\frac{1}{3}(loai) \end{cases}$$

Nếu $x=0$ thì $\sqrt{0(0-1)}+\sqrt{0(0-5)}=2\sqrt{0^2} \Leftrightarrow 0=0(dung)$

Do đó $x=0$ thỏa mãn phương trình trên.

Vậy $x=0$ là nghiệm của phương trình trên.

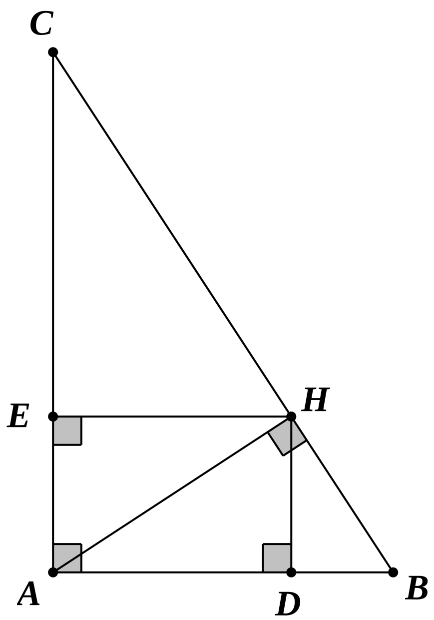
Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Tính AH, BH biết $BC=50\,cm$ và $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$.

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng: $AH^3=BC.BD.CE$.

c) Giả sử $BC=2a$ là độ dài cố định. Tính giá trị nhỏ nhất của: BD^2+CE^2.

Lời giải



a) Ta có: $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{AB}{3}=\frac{AC}{4}=k\Rightarrow \begin{cases} AB=3k \\ AC=4k \end{cases}$

$\Rightarrow (3k)^2+(4k)^2=50^2 \Rightarrow k^2=100 \Rightarrow k=10$

$\Rightarrow AB=30cm, AC=40\,cm$.

Trong ΔABC vuông tại A, đường cao AH , ta có:
$AB.AC = AH.BC \Rightarrow 30.40 = AH.50 \Rightarrow AH = 24cm$

$AB^2 = BH.BC \Rightarrow 30^2 = BH.50 \Rightarrow BH = 18cm$.

b) Trong ΔABC vuông tại A, đường cao AH , ta có: $AH^2 = BH.CH$

$\Rightarrow AH^4 = BH^2.CH^2 = BD.AB.CE.AC = (BD.CE)(AB.AC) = (BD.CE)(AH.BC)$.

$\Rightarrow AH^3 = BC.BD.CE$.

c) Áp dụng định lí Py ta go, ta có:

$BD^2 + CE^2 = BH^2 - HD^2 + HC^2 - HE^2 = BH^2 + HC^2 - (HD^2 + HE^2)$
$= (AB^2 - AH^2) + (AC^2 - AH^2) - AH^2 = (AB^2 + AC^2) - 3AH^2 = BC^2 - 3AH^2 = 4a^2 - 3AH^2$
.

Gọi O là trung điểm của BC, ta có: $AH \le AO = a$ nên $BD^2 + CE^2 \ge 4a^2 - 3a^2 = a^2$.

Dấu "=" xảy ra khi H trùng $O \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Vậy GTNN của $BD^2 + CE^2$ bằng a^2 khi ΔABC vuông cân tại A.

Bài 5: Cho $0 \le a,b,c \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = a + b^{2019} + c^{2020} - ab - bc - ac.$$

Lời giải

Vì $0 \le a,b,c \le 1$ nên $b^{2019} \le b, c^{2020} \le c, (1-a)(1-b)(1-c) \ge 0, abc \ge 0.$
$\Rightarrow a + b^{2019} + c^{2020} - ab - bc - ac \le a + b + c - ab - bc - ac$

Và $1 - abc - a - b - c + ab + ac + bc \ge 0$

$\Rightarrow a + b + c - ab - ac - bc \le 1 - abc \le 1$

do đó $P = a + b^{2019} + c^{2020} - ab - bc - ac \le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} abc = 0 \\ b^{2019} = b \\ c^{2020} = c \\ (1-a)(1-b)(1-c) = 0 \\ 0 \le a,b,c \le 1 \end{cases}$ chẳng hạn $a = 1; b = c = 0$.

Vậy GTLN của P bằng 1 chẳng hạn khi $a = 1; b = c = 0$.

HẾT

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN THƯỜNG TÍN
NĂM HỌC 2019-2020

Bài 1. Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh: $P>1$.

Bài 2. Giải phương trình:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3}+\sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8}=1.$$

Bài 3.

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $6x^2y^3+3x^2-10y^3=-2$.

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

Bài 4:

1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';\ R/2)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Trên đường tròn (O) lấy điểm B sao cho $AB = R$ và điểm M trên cung lớn AB. Tia MA cắt đường tròn (O') tại điểm thứ 2 là N. Qua N kẻ đường thẳng song song với AB .cắt đường thẳng MB tại Q và cắt đường tròn (O') ở P.

a) Chứng minh tam giác OAM đồng dạng tam giác $O'AN$.

b) Tính NQ theo R.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $ABQN$ đạt giá trị lớn nhất tính giá trị lớn nhất theo R.

2. Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác đó. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng:

$\dfrac{OA}{AM}+\dfrac{OB}{BN}+\dfrac{OC}{CP}=2$.

Bài 5: Cho hai số dương x,y thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3=x-y$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2\le 1$.

======== Đề thi gồm có 01 trang =========

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LỚP 9 CẤP HUYỆN THƯỜNG TÍN

Bài 1. Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh: $P>1$.

Lời giải

a) Điều kiện: P có nghĩa: $x>0; x\neq 1$

$$P=\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}+x\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}+x}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}:\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}+x\right)}$$

$$=\frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}.$$

b) $P=\dfrac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}-1\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}}-1=1$ (BĐT Cauchy)

Vì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn điều kiện xác định nên $P>1$.

Bài 2. Giải phương trình:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3}+\sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8}=1.$$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\geq 1$

Phương trình được viết lại là:

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1. \qquad (1)$$

* Nếu $1\leq x<5$ ta có $(1)\Leftrightarrow 2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$ không thuộc khoảng đang xét.

* Nếu $5\leq x\leq 10$ ta có $0x=0$ phương trình có vô số nghiệm.

* Nếu $x > 10$ thì $(1) \Leftrightarrow -5 = 1$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có vô số nghiệm: $5 \le x \le 10$.

Bài 3.

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $6x^2y^3 + 3x^2 - 10y^3 = -2$.

2) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y}$.

Lời giải

1)

$$6x^2y^3 + 3x^2 - 10y^3 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2(2y^3+1) - 5(2y^3+1) = -7$$
$$\Leftrightarrow (3x^2-5)(2y^3+1) = -7.$$

Nên suy ra $3x^2 - 5;\ 2y^3 + 1$ là ước của -7

* $\begin{cases} 3x^2 - 5 = 7 \\ 2y^3 + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

* $\begin{cases} 3x^2 - 5 = -7 \\ 2y^3 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{-2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$ (loại).

* $\begin{cases} 3x^2 - 5 = -1 \\ 2y^3 + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ y^3 = 3 \end{cases}$ (loại).

* $\begin{cases} 3x^2 - 5 = 1 \\ 2y^3 + 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y^3 = -4 \end{cases}$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y) \in \{(2;-1);(-2;-1)\}$.

2) Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y+z}{4} \ge x;\ \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z+x}{4} \ge y;\ \dfrac{z^2}{x+y} + \dfrac{x+y}{4} \ge z$.

Cộng từng vế ta được

$P + \dfrac{x+y+z}{2} \ge x + y + z \Rightarrow P \ge \dfrac{x+y+z}{2} = 1.$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{2}{3}$.

Bài 4:

1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';\ R/2)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Trên đường tròn (O) lấy điểm B sao cho $AB = R$ và điểm M trên cung lớn AB. Tia MA cắt đường tròn (O') tại điểm thứ 2 là N. Qua N kẻ đường thẳng song song với AB, cắt đường thẳng MB tại Q và cắt đường tròn (O') ở P.

a) Chứng minh tam giác OAM đồng dạng tam giác $O'AN$.

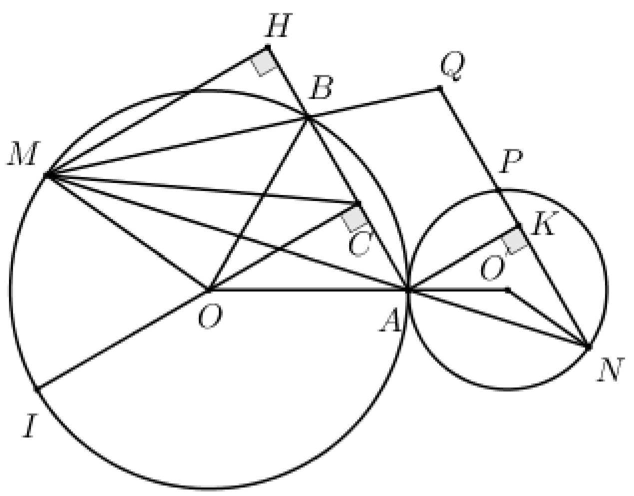
b) Tính NQ theo R.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $ABQN$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị lớn nhất theo R.

2. Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác đó. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng:

$$\frac{OA}{AM}+\frac{OB}{BN}+\frac{OC}{CP}=2\ .$$

Lời giải



a) Ta thấy $\Delta OAM \backsim \Delta O'AN$ (g.g) vì $\widehat{OAM}=\widehat{O'AN};\ \widehat{AOM}=\widehat{AO'N}$.

b) Vì $AB//NQ$, áp dụng hệ quả định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AB}{NQ}=\frac{MA}{MN}=\frac{OA}{OO'}=\frac{R}{\frac{3R}{2}}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow NQ=\frac{3}{2}R.$$

c) Kẻ $AK\perp NQ,\ MH\perp AB,\ OC\perp AB$, gọi $OC\cap(O)=\{I\}$.

$$S_{ABNQ}=\frac{1}{2}(AB+NQ).AK=\frac{1}{2}.\left(R+\frac{3}{2}R\right).AK=\frac{5R}{4}.AK\Rightarrow S_{max}\Leftrightarrow AK$$ có giá trị lớn nhất.

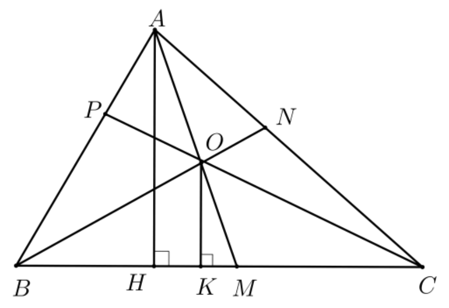
Ta có $\Delta \mathrm{MAH}\backsim\Delta \mathrm{ANK}(\mathrm{g.g})\Rightarrow\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{AK}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AN}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AO'}}=2\Rightarrow MH=2AK$.

Để AK có giá trị lớn nhất thì MH lớn nhất.

Ta có $MH \le MC \le OM + OC = R + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. Nên suy ra $AK \le \frac{R\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}$.

Khi đó, tứ giác $ABQN$ có diện tích lớn nhất là

$S_{max} = \frac{5R^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{16}$ khi $M \equiv I$ là giao điểm của đường trung trực của AB với $\left(O\right)$.



2)

Gọi $S_1; S_2; S_3; S$ lần lượt là diện tích các tam giác $OBC,\ OCA,\ OAB,\ ABC$.

Dựng $AH \perp BC\ (H \in BC), AK \perp BC\ (K \in BC) \Rightarrow AH // OK$

Áp dụng đính lý Talets và tỉ số diện tích tam giác, ta có

$\frac{OM}{AM} = \frac{OK}{AH} = \frac{S_1}{S}$, tương tự $\frac{ON}{BN} = \frac{S_2}{S}; \frac{OP}{CP} = \frac{S_2}{S}$.

Cộng các đẳng thức trên theo vế

$$\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM - OA}{AM} + \frac{BN - OB}{BN} + \frac{CP - OC}{CP} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - \left(\frac{OA}{AM} + \frac{OB}{BN} + \frac{OC}{CP}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA}{AM} + \frac{OB}{BN} + \frac{OC}{CP} = 2.$$

Bài 5: Cho hai số dương x,y thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 = x - y$.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \le 1$.

Lời giải

Từ giải thiết $x > y > 0$. Giả sử $x^2 + y^2 \ge 1$

Ta có

$$x^3 + y^3 = x - y \le (x-y)(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^3 + y^3 \le x^2 + xy^2 - x^2y - y^3$$

$$\Leftrightarrow xy^2 - x^2y - 2y^3 \ge 0 \Leftrightarrow xy(y-x) + \left(-2y^3\right) \ge 0$$

Vô lý vì $y - x < 0;\ -2y^2 < 0$.

Điều vô lý này chứng tỏ giải sử ban đầu là sai.

Vậy $x^2 + y^2 \le 1$.

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN TAM DƯƠNG NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1: *(2,0 điểm)* Tính giá trị của biểu thức sau: $A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

Câu 2: *(2,0 điểm)* Tìm các số thực $a,\ b$ để đa thức $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx-1$ chia hết cho đa thức x^2-3x+2.

Câu 3: *(2,0 điểm)* Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x-2y=\sqrt{xy}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x-y}{x+y}$.

Câu 4: *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

Câu 5: *(2,0 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\dfrac{2m-1}{x-2}=m-3$ vô nghiệm.

Câu 6: *(2,0 điểm)* Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca+\dfrac{1}{abc}\ge abc+3$.

Câu 7: *(2,0 điểm)* Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì n^5-5n^3+4n luôn chia hết cho 120.

Câu 8: *(2,0 điểm)* Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3+8=7\sqrt{8x+1}$

Câu 9: *(2,0 điểm)* Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D.

a) Chứng minh $AB^2=4AC.BD$

b) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên CD. Chứng minh rằng M thuộc đường tròn đường kính AB.

c) Kẻ đường cao MH của tam giác MAB. Chứng minh rằng MH, AD, BC đồng quy.

Câu 10: *(2,0 điểm)* Cho sáu đường tròn có bán kính bằng nhau và cùng có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong những đường tròn này chứa tâm của một đường tròn khác.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN TAM DƯƠNG NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1: *(2,0 điểm)* Tính giá trị của biểu thức sau: $A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

Lời giải

$A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}>0$

$A^2=4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}$

$A^2=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$A^2=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$

$A^2=6+2\sqrt{5}$

$A^2=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$

$A=\sqrt{5}+1$ (Do A > 0)

Câu 2: *(2,0 điểm)* Tìm các số thực $a,\ b$ để đa thức $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx-1$ chia hết cho đa thức x^2-3x+2.

Lời giải

Ta có: $x^2-3x+2=\left(x-1\right)\left(x-2\right)$. Theo bài ra: $f\left(x\right)\vdots\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.

$f\left(x\right)$ chia hết cho $x-1\Rightarrow f\left(1\right)=0$

$\Rightarrow a+b=0\Rightarrow b=-a$ (1)

$f\left(x\right)$ chia hết cho $x-2\Rightarrow f\left(2\right)=0$

$\Rightarrow 8a+2b=-15$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 8a+2\left(-a\right)=-15$

$\Rightarrow a=-\dfrac{5}{2}$; $b=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $a=-\dfrac{5}{2}$; $b=\dfrac{5}{2}$.

Câu 3: *(2,0 điểm)* Cho hai số thực dương *x, y* thỏa mãn $x-2y=\sqrt{xy}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x-y}{x+y}$.

Lời giải

$x-2y=\sqrt{xy}\Leftrightarrow x-\sqrt{xy}-2y=0\Leftrightarrow x-2\sqrt{xy}+\sqrt{xy}-2y=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=0$

Vì $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$ nên $\sqrt{x}-2\sqrt{y}=0\Leftrightarrow x=4y$.

Khi đó P=$\dfrac{4y-y}{4y+y}=\dfrac{3}{5}$

Câu 4: *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq -1$

$4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ (TM)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Câu 5: *(2,0 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\dfrac{2m-1}{x-2} = m - 3$ vô nghiệm.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq 2$.

$\dfrac{2m-1}{x-2} = m - 3 \Rightarrow 2m - 1 = (x-2)(m-3)$

$\Leftrightarrow (m-3)x = 4m - 7$ (*)

\+ Xét $m = 3$ Phương trình (*) trở thành 0x = 5 (Vô lý)

$\Rightarrow m = 3$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

\+ $m \neq 3$, phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{4m-7}{m-3}$

Để phương trình đã cho vô nghiệm thì $\dfrac{4m-7}{m-3} = 2 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Vậy với $m = 3$, $m = \dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 6: *(2,0 điểm)* Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca + \dfrac{1}{abc} \geq abc + 3$.

Lời giải

Áp dụng BĐT cauchy ta có $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc$

$\Rightarrow abc \leq \dfrac{ab+bc+ca}{3}$.

Ta chứng minh $ab + bc + ca + \dfrac{1}{abc} \geq \dfrac{ab+bc+ca}{3} + 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{ab+bc+ca}{3} + \dfrac{ab+bc+ca}{3} + \dfrac{1}{abc} \geq 3$. Thật vậy:

$$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{9abc}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{9abc}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Câu 7: *(2,0 điểm)* Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* thì n^5-5n^3+4n luôn chia hết cho 120.

Lời giải

Ta có: $n^5-5n^3+4n=n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$

$=\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

Và $120=2^3.3.5$

Trong 5 số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số chia hết cho 5, một số chia hết cho 3 và ít nhất hai số chẵn liên tiếp nên tích của 2 số này chia hết cho 8

Mà 3, 5, 8 đôi một nguyên tố cùng nhau nên tích 5 số đó chia hết cho 120.

Câu 8: *(2,0 điểm)* Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+8=7\sqrt{8x+1}$.

Lời giải

$x^3+8=7\sqrt{8x+1}$

ĐK xác định: $8x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x\geq 0$ (vì $x\in\mathbb{Z}$)

PT tương đương với:

$$5x^3+40=7\sqrt{25(8x+1)}\leq 7.\frac{25+(8x+1)}{2}=7.(4x+13)=28x+91$$

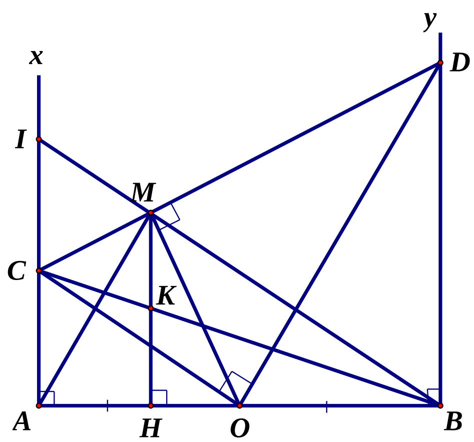
$$\Leftrightarrow 5x^3-28x-51\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(5x^2+15x+17\right)\leq 0$$

Vì với $x\geq 0$ thì $5x^2+15x+17>0$ nên suy ra $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=3$

Lưu ý: HS có thể giải theo cách thử trực tiếp x = 1,2,..,5. Với x > 5 chứng minh vế trái lớn hơn vế phải.

Câu 9: *(2,0 điểm)* Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .



a) Chứng minh $AB^2=4AC.BD$

b) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên CD. Chứng minh rằng M thuộc đường tròn đường kính AB.

c) Kẻ đường cao MH của tam giác MAB. Chứng minh rằng MH, AD, BC đồng quy.

Lời giải

a) Chứng minh $\Delta OAC \sim \Delta DBO$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA.OB = AC.BD$

$\Rightarrow \frac{AB}{2}.\frac{AB}{2} = AC.BD$ $\Rightarrow AB^2 = 4AC.BD$ (đpcm)

b) Theo câu a ta có: $\Delta OAC \sim \Delta DBO$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$ mà $OA = OB$ $\Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA}$

+) Chứng minh: $\Delta OAC \backsim \Delta DOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{OCM}$

+) Chứng minh: $\Delta OAC = \Delta OMC$ (ch.gn) $\Rightarrow AO = MO$

$\Rightarrow$ M nằm trên đường tròn (O, OA) hay đường tròn đường kính AB.

c) Gọi K là giao của MH với BC , I là giao của BM với Ax

Ta có $\Delta OAC = \Delta OMC$ $\Rightarrow OA = OM$; $CA = CM$ $\Rightarrow OC$ là trung trực của AM

$\Rightarrow OC \perp AM$.

Mặc khác $OA = OM = OB$ $\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

OC // BM (vì cùng vuông góc AM) hay OC // BI

+) Xét ΔABI có OM đi qua trung điểm AB , song song BI suy ra OM đi qua trung điểm AI $\Rightarrow IC = AC$

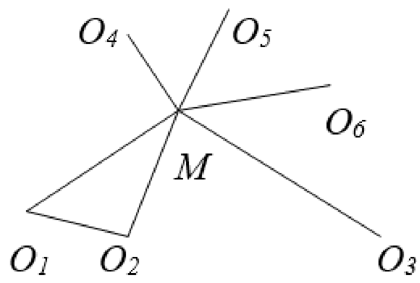
+) MH // AI theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$

Mà $IC = AC$ $\Rightarrow MK = HK$ $\Rightarrow BC$ đi qua trung điểm MH

Tương tự AD cũng đi qua trung điểm MH . Suy ra AD, BC, MH đồng quy.

Câu 10: *(2,0 điểm)* Cho sáu đường tròn có bán kính bằng nhau và cùng có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong những đường tròn này chứa tâm của một đường tròn khác.

Lời giải



Giả sử có sáu đường tròn tâm O_i (i = 1, 2, .., 6) có bán kính r và M là điểm chung của các đường tròn này. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh ít nhất có hai tâm có khoảng cách không lớn hơn r.

Nối M với các tâm. Nếu hai trong những đoạn thẳng vừa nối nằm trên cùng một tia có điểm đầu mút là M thì bài toán được chứng minh.

Trong trường hợp ngược lại, xét góc nhỏ nhất trong các góc nhận được đỉnh M, giả sử đó là góc O_1MO_2.

Do tổng các góc này là 360^0 nên góc $O_1MO_2 \leq 60^0$. Khi đó trong tam giác O_1MO_2 có một góc không nhỏ hơn góc O_1MO_2 (nếu ngược lại thì tổng các góc trong tam giác nhỏ hơn 180^0).

Từ đó suy ra trong những cạnh MO_1 và MO_2 trong tam giác O_1MO_2 tồn tại cạnh không nhỏ hơn O_1O_2 tức ta có $O_1O_2 \leq r$ vì $MO_1 \leq r$, $MO_2 \leq r$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN ĐAN PHƯỢNG - NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*) Tính:

a. $A=\sqrt{3}.\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\right)-\sqrt{75}$

b. $B=2\sqrt{45}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}$.

Câu 2: (*2,0 điểm*) Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}+\sqrt{9x-18}=0$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$

Câu 3: (*2,0 điểm*)

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x>0, x\neq 4, x\neq 9$.

a. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=100$;

b. Rút gọn biểu thức B;

c. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M=A:B$ có giá trị nguyên.

Câu 4: (*4,0 điểm*)

Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB<AC\right)$, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB, AC.

a. Cho $BH=4cm, CH=9\,cm$. Tính AH, DE;

b. Chứng minh $AD.AB=AE.AC$;

c. Đường phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt BC tại K. Gọi I là trung điểm của AK . Chứng minh tam giác AKC cân và CI vuông góc với AK;

d. Dựng IM vuông góc với BC tại M. Chứng minh $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AK^2}+\dfrac{1}{4CI^2}$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN ĐAN PHƯỢNG - NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*) Tính:

a. $A=\sqrt{3}.\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\right)-\sqrt{75}$

b. $B=2\sqrt{45}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}$.

Lời giải

a. $A=\sqrt{3}.\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\right)-\sqrt{75}$

$A=\sqrt{36}-\sqrt{81}+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}$

$A=6-9=-3$

b. $B = 2\sqrt{45} + \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} - \dfrac{8}{\sqrt{5}+1}$.

$B = 6\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 - 2\left(\sqrt{5}-1\right)$

$B = 7\sqrt{5} - 1 - 2\sqrt{5} + 2$

$B = 5\sqrt{5} + 1$

Câu 2: (*2,0 điểm*) Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x-2} - \sqrt{4x-8} + \sqrt{9x-18} = 0$

b. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x - 1$

Lời giải

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x-2} - \sqrt{4x-8} + \sqrt{9x-18} = 0$ Điều kiện: $x \ge 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2} - 2 + 3\right)\sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

b. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x - 1$ Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 2x - 1$

$\Leftrightarrow |x-2| = 2x - 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 - 2x \\ x - 2 = 2x - 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 3 \\ x = -1 (loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 (t/m)$

Câu 3: (*2,0 điểm*)

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x > 0, x \ne 4, x \ne 9$.

a. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 100$;

b. Rút gọn biểu thức B;

c. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = A : B$ có giá trị nguyên.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0, x \ne 4, x \ne 9$.

a. Khi $x = 100$ (thỏa mãn) thì $A = \dfrac{10}{10-2} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

b. $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$

$B = \dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right) - x - 9\sqrt{x}}{x-9}$

$B = \dfrac{2x+6\sqrt{x}-x-9\sqrt{x}}{x-9}$

$B = \dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9}$

$B = \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

c. Ta có:

$M = A:B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \dfrac{5}{\sqrt{x}-2}$

Để M nguyên thì $\sqrt{x}-2 \in U(5)$ và $\sqrt{x}-2 > -2$ nên

$\Rightarrow \sqrt{x}-2 \in \{-1;1;5\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{1;3;7\} \Leftrightarrow x \in \{1;9;49\}$ Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \{1;49\}$

Câu 4: (*4,0 điểm*) Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB, AC.

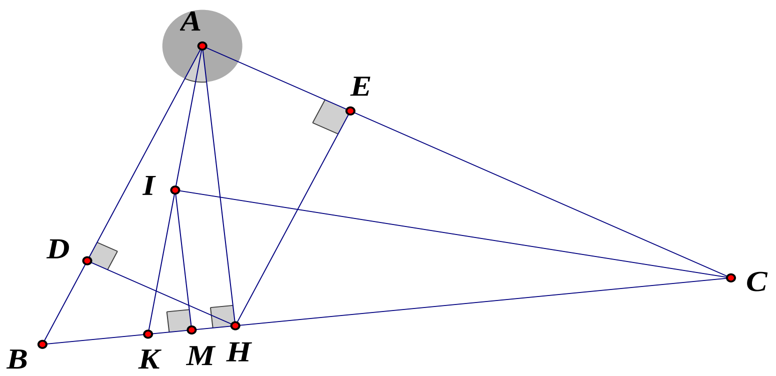
a. Cho $BH = 4cm, CH = 9\,cm$. Tính AH, DE;

b. Chứng minh $AD.AB = AE.AC$;

c. Đường phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt BC tại K. Gọi I là trung điểm của AK . Chứng minh tam giác AKC cân và CI vuông góc với AK;

d. Dựng IM vuông góc với BC tại M. Chứng minh $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{4CI^2}$.

Lời giải



a. Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A}=\widehat{D}=\widehat{E}=90°\Rightarrow$ Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AH = DE$

Ta lại có: ΔABC vuông tại A có AH là đường cao nên

$AH^2 = DE^2 = BH.CH = 4.9 = 36$

$\Rightarrow AH = DE = 6$

b. ΔAHB có $\widehat{AHB}=90°;\ HD\perp AB$ suy ra $AD.AB = AH^2$ (1)

ΔAHC có $\widehat{AHC}=90°, HE\perp AC$ suy ra $AE.AC = AH^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD.AB = AE.AC$

c. ΔABC vuông tại A nên $\widehat{KAC}=90°-\widehat{BAK}$ (3)

ΔAHK vuông tại H nên $\widehat{AKH}=90°-\widehat{KAH}$ (4)

Mặt khác, $\widehat{BAK}=\widehat{KAH}$ (AK là phân giác của góc BAH) (5)

Từ $(3),(4)$ và $(5)\Rightarrow \widehat{KAC}=\widehat{AKH}\Rightarrow \Delta AKC$ cân tại C nên đường trung tuyến CI đồng thời là đường cao $\Rightarrow CI\perp AK$.

d. Ta có $IM\perp BC;\ AH\perp BC\Rightarrow IM // AH$ mà I là trung điểm của $AK\Rightarrow M$ là trung điểm của AK $\Rightarrow IM$ là đường trung bình của tam giác ΔAKH

$\Rightarrow IM = \frac{1}{2}AH$

Xét ΔKIC có $\widehat{KIC}=90°, IM\perp AH$

$\Rightarrow \frac{1}{IM^2}=\frac{1}{KI^2}+\frac{1}{IC^2}$ (6)

Mà $IM=\frac{1}{2}AH\Rightarrow AH = 2IM$ (7)

$IK=\frac{1}{2}AK\Rightarrow AK = 2IK$ (8)

Từ $(6),(7)$ và (8) $\Rightarrow \frac{4}{AH^2}=\frac{4}{AK^2}+\frac{1}{CI^2}\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{4CI^2}$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 HUYỆN ĐỨC CƠ - NĂM 2019

Câu 1: (*4,0 điểm*)

1. Rút gọn biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}-\frac{x+y}{y-x}$ với $x,\ y>0,\ x\neq y$

2. Cho $A=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$; $B=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+2x+2}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $A=B$.

Câu 2: (*4,0 điểm*)

1. Tìm $x,\ y\in Z$ biết $x-y+2xy=6$

2. Tìm n để n^5+1 chia hết cho n^3+1 với $n\in N^*$

Câu 3: (*4,0 điểm*) Giải phương trình

1. $\sqrt{x^2-9}-2\sqrt{x-3}=0$

2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

Câu 4: (*2,0 điểm*)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5: (*6,0 điểm*)

Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên cạnh Ox lấy điểm A sao cho $OA=4cm$, trên tia đối của tia Ox lấy điểm B sao cho $OB=2cm$. Đường trung trực của AB cắt AB ở H, M là một điểm nằm trên đường trung trực đó. Các tia AM, MB cắt Oy lần lượt ở C và D. Gọi E là trung điểm của AC, F là trung điểm của BD.

1. Chứng minh $OE.OF=AE.BF$.
2. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh 3 điểm O, I, M thẳng hàng.
3. Xác định vị trí của điểm M để cho $OM=EF$. Khi đó S_1 là diện tích tứ giác $OBME$, S_2 là diện tích tứ giác $ABFE$. Tính tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_1.S_2}$

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN ĐỨC CƠ - NĂM 2019

Câu 1: 1. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}-\dfrac{x+y}{y-x}$ với $x,\ y>0,\ x\neq y$

2. Cho $A=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$; $B=\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+2x+2}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $A=B$.

Lời giải

1. $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}-\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\dfrac{x+y}{x-y}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\dfrac{x+y}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+2(x+y)}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$

$=\dfrac{4\sqrt{xy}+2x+2y}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

2. + Ta có: $A=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ xác định khi $x\geq 0;\ x\neq 4$.

$A=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2}=2\sqrt{x}+1$

+ Ta có: $B=\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+2x+2}{\sqrt{x}+2}$ xác định khi $x\geq 0$.

$B=\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+2x+2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)(x+1)}{\sqrt{x}+2}=x+1$

Ta có $A=B$ nên $2\sqrt{x}+1=x+1 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}=0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ 2-\sqrt{x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x=0$

Vậy $x=0$ khi $A=B$.

Câu 2: 1. Tìm $x,\ y\in Z$ biết $x-y+2xy=6$

2. Tìm n để n^5+1 chia hết cho n^3+1 với $n\in\mathbb{N}^*$

Lời giải

1. Ta có $x-y+2xy=6\Leftrightarrow 2x-2y+4xy=12\Leftrightarrow 2x+4xy-1-2y=11$

$\Leftrightarrow(2x-1)(1+2y)=11=1.11=(-1).(-11)$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	1	11	-1	-11
$1+2y$	11	1	-11	-1
x	1	6	0	-5
y	5	0	-6	-1

Vậy cặp nghiệm (x,y) nguyên là: $(1,5)$; $(6,0)$; $(0,-6)$; $(-5,-1)$

2. Ta có $n^5+1=n^5+n^2-n^2+1=\left(n^5+n^2\right)-\left(n^2-1\right)=n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right)$

Vì n^5+1 chia hết cho n^3+1 nên cần chứng minh n^2-1 chia hết cho n^3+1

Ta có: $n^2-1=(n-1)(n+1)$ và $n^3+1=(n+1)\left(n^2-n+1\right)$

Khi đó $n-1$ chia hết cho n^2-n+1

Vì $n\in\mathbb{N}^*$ nên ta xét các trường hợp sau:

Nếu $n=1$ thì $n-1$ chia hết cho n^2-n+1 suy ra n^5+1 chia hết cho n^3+1

Nếu $n>1$ thì $n-1<n(n-1)+1$ nên $n-1$ không chia hết cho n^2-n+1

Vậy $n=1$ thì $n^5+1 \vdots n^3+1$.

Câu 3: Giải phương trình:

1. $\sqrt{x^2-9}-2\sqrt{x-3}=0$

2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

Lời giải

1. Điều kiện $x\geq 3$

Ta có: $\sqrt{x^2-9}-2\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-3}\right)-2\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=0\\ \sqrt{x+3}-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\ (TMDK)\\ x=1\ (KTMDK)\end{array}\right.$$

Vậy $x=3$ là nghiệm của phương trình.

2. ĐKXĐ: $x\geq 1$.

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}-\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}-\sqrt{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}\left(1-\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(1-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-1=0\\ 1-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=1\\ \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x-1}=1 & (1)\\ \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}=1 & (2)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2\ \left(TMDK\right)$

$(2)\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)=1\Leftrightarrow x^3+x^2+x=0$ (vô nghiệm vì $x\geq 1$.)

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Câu 4: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Vì $a,b,c>0$ nên $\frac{bc}{a}>0;\ \frac{ac}{b}>0;\ \frac{ab}{c}>0$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số không âm, ta có:

$+\ \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ac}{b}}=2c\ \ (1)$

$+\ \frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2\sqrt{\frac{ac}{b}.\frac{ab}{c}}=2a\ \ (2)$

$+\ \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b\ \ (3)$

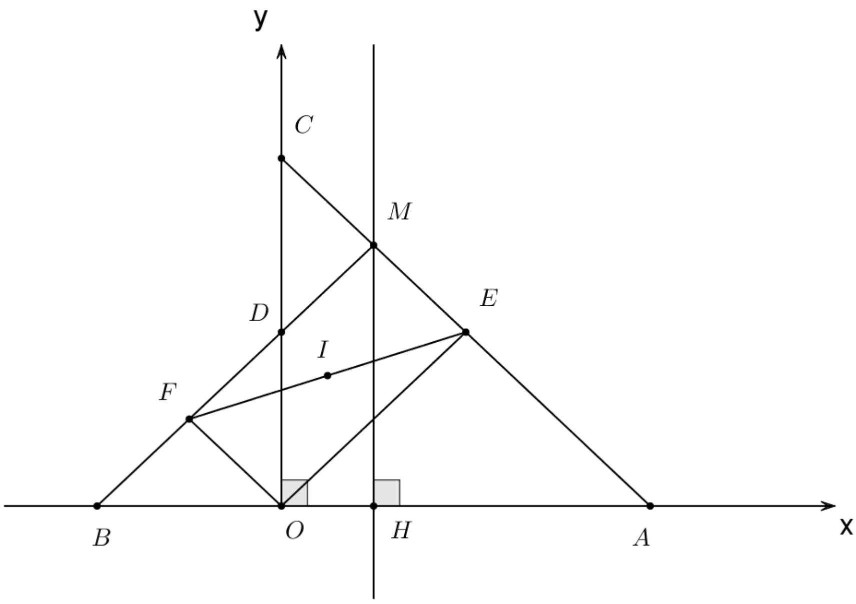
Lấy (1) cộng (2) cộng (3) vế theo vế ta được $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$ (ĐPCM)

Câu 5: Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên cạnh Ox lấy điểm A sao cho $OA=4cm$, trên tia đối của tia Ox lấy điểm B sao cho $OB=2cm$. Đường trung trực của AB cắt AB ở H, M là một điểm nằm trên đường trung trực đó. Các tia AM, MB cắt Oy lần lượt ở C và D. Gọi E là trung điểm của AC, F là trung điểm của BD.

1. Chứng minh $OE.\mathrm{OF}=\mathrm{AE}.\mathrm{BF}$.
2. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh 3 điểm O,I,M thẳng hàng.

3. Xác định vị trí của điểm M để cho $OM = EF$. Khi đó S_1 là diện tích tứ giác $OBME$, S_2 là diện tích tứ giác $ABFE$. Tính tỉ số $\dfrac{S_1+S_2}{S_1.S_2}$

Lời giải



1. + ΔBOD có OF là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BD nên $FO = FB$

$\Rightarrow \Delta BFO$ cân tại F $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{FOB}$. (1)

+ ΔEAO vuông tại ? có OE là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền MA nên $\text{OE} = EA \Rightarrow \Delta EAO$ cân tại E $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{AOE}$. (2)

+ ΔMAB có $MA = MB$ $\Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\text{B}}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\Delta BFO \backsim \Delta OEA$ (góc – góc)

$\Rightarrow \dfrac{FO}{EA} = \dfrac{BF}{OE} \Rightarrow OE.\text{FO} = EA.BF$.

2. Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{FOB}$ nên $OF // MA$

$\widehat{MBA} = \widehat{EOA}$ nên $OE // MB$

Suy ra tứ giác $MEOF$ là hình bình hành. Suy ra đường chéo OM đi qua trung điểm I của EF.

Vậy 3 điểm O, I, M thẳng hàng.

3. $OEMF$ là hình bình hành có hai đường chéo $OM = \text{EF}$ nên $OEMF$ là hình chữ nhật

$\Delta BFO \backsim \Delta BMA$ mà $MA = MB \Rightarrow \Delta AMB$ vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAB} = 45^0$.

Khi đó ΔAHM vuông cân tại H. Mặt khác H là trung điểm của AB

$\Rightarrow HM = HA = 3cm$.

Vậy M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB và cách AB một đoạn $MH = 3cm$.

ΔMAH vuông ở H, ta có: $MA^2 = MH^2 + HA^2 = 3^3 + 3^2 = 18 \Rightarrow MA = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm)

+ ΔBFO và ΔBMA có $\widehat{M} = \widehat{F}; \widehat{A} = \widehat{B};$ suy ra $\Delta BFO \backsim \Delta BMA$ (g - g) nên

$\dfrac{FO}{MA} = \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow FO = \dfrac{MA}{3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ (cm)

$\dfrac{OE}{FO} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{4}{2} = 2 \Rightarrow OE = 2.\mathrm{FO} = 2\sqrt{2}$ (cm)

$\Rightarrow S_{OEMF} = OE.FO = 2\sqrt{2}.\sqrt{2} = 4(cm^2) \Rightarrow \mathrm{S}_{\Delta FEO} = 4:2 = 2\left(cm^2\right)$

Ta có: $S_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{2}.MH.AB = \dfrac{1}{2}.3.6 = 9(cm^2)$

Ta cũng có $\Delta BFO \backsim \Delta OEA$ theo tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{S_{\Delta BFO}}{S_{\Delta OEA}} = k^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{\Delta BFO} = 1\left(cm^2\right); S_{\Delta OEA} = 4\left(cm^2\right)$

$S_1 = S_{OBME} = S_{BFO} + S_{OEMF} = 1 + 4 = 5\left(cm^2\right)$

$S_2 = S_{ABFE} = S_{BFO} + S_{FEO} + S_{OEA} = 1 + 2 + 4 = 7\left(cm^2\right)$.

Vậy $\dfrac{S_1 + S_2}{S_1.S_2} = \dfrac{5+7}{5.7} = \dfrac{12}{35}$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN KIM ĐỘNG - NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*)

a) $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{18}$

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)x}+\sqrt{x}-1=0$

Câu 2: (*2,0 điểm*)

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

b) So sánh $B=\sqrt{2020^2-1}-\sqrt{2019^2-1}$ và $C=\dfrac{2.2019}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}$

Câu 3: (*2,0 điểm*)

a) Chứng minh hàm số $y=\left(m^2-2m+2\right)x$ luôn đồng biến với mọi tham số m.

b) Cho các số a, b thỏa mãn: $a-b=3$ và $a\neq -1$; $b\neq 5$; $b\neq -4$.

Tính giá trị của biểu thức: $E=\dfrac{a-8}{b-5}-\dfrac{4a-b}{3a+3}$

Câu 4: (*3,0 điểm*): Cho tam giác ABC nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D xuống AB và AC.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB=AF.AC$

b) Giả sử $HD=\dfrac{1}{3}AD$ và $\widehat{ABC}=\alpha$; $\widehat{ACB}=\beta$. Chứng minh $\tan\alpha.\tan\beta=3$.

c) Gọi M; N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Câu 5: (*1,0 điểm*): Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $a^5+b^5+c^5+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 6$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN KIM ĐỘNG- NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*)

a) $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{18}$.

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)x}+\sqrt{x}-1=0$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\neq -4 \\ x\neq -5 \\ x\neq -6 \\ x\neq -7 \end{cases}$.

$$\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7-x-4}{(x+4)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x+4)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow x^2+11x+28=54$$

$$\Leftrightarrow x^2+11x-26=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+13x-2x-26=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+13)-2(x+13)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+13)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \quad \text{(tm)} \\ x=-13 \text{ (tm)} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-13;\, 2\}$.

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)x}+\sqrt{x}-1=0$

Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)x}+\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-1=0\\ 1-\sqrt{x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{tm})\\ x=1\ (\text{tm})\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1\}$.

Câu 2: (*2,0 điểm*)

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$.

b) So sánh $B=\sqrt{2020^2-1}-\sqrt{2019^2-1}$ và $C=\dfrac{2.2019}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}$.

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

$A=\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt[3]{2}$.

b) Ta có

$B=\sqrt{2020^2-1}-\sqrt{2019^2-1}=\dfrac{\left(2020^2-1\right)-\left(2019^2-1\right)}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}=\dfrac{2020^2-2019^2}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}$

$=\dfrac{(2020-2019)(2020+2019)}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}=\dfrac{2020+2019}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}>\dfrac{2.2019}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}$

$=C$

Vậy ta có $B>C$.

Câu 3: (*2,0 điểm*)

a) Chứng minh hàm số $y=\left(m^2-2m+2\right)x$ luôn đồng biến với mọi tham số m.

b) Cho các số a, b thỏa mãn: $a-b=3$ và $a\neq -1$; $b\neq 5$; $b\neq -4$.

Tính giá trị của biểu thức: $E=\dfrac{a-8}{b-5}-\dfrac{4a-b}{3a+3}$.

Lời giải

a) Ta có: $m^2-2m+2=(m-1)^2+1>0\ \ \forall m\in\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y=\left(m^2-2m+2\right)x$ luôn đồng biến với mọi tham số m.

b) $E=\dfrac{a-8}{b-5}-\dfrac{4a-b}{3a+3}$

Có $a-b=3\Rightarrow a=b+3$

$E=\dfrac{a-8}{b-5}-\dfrac{4a-b}{3a+3}=\dfrac{b+3-8}{b-5}-\dfrac{4(b+3)-b}{3(b+3)+3}=\dfrac{b-5}{b-5}-\dfrac{3b+12}{3b+12}=1-1=0$

Vậy $E=0$.

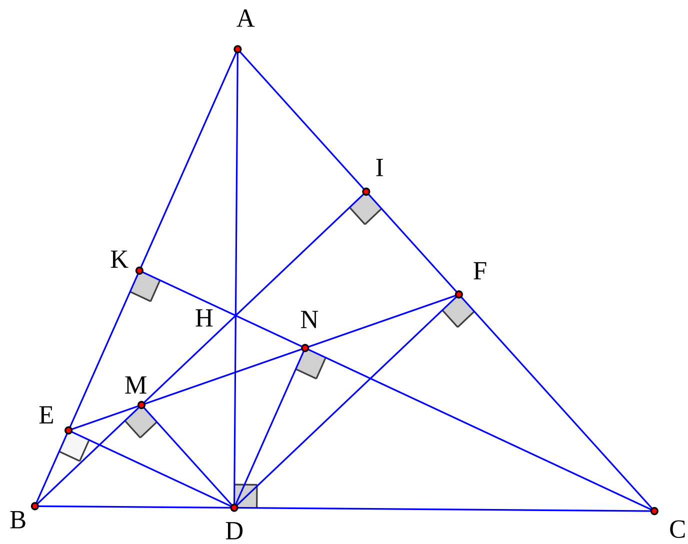
Câu 4: (*3,0 điểm*) Cho tam giác ABC nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D xuống AB và AC.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB=AF.AC$

b) Giả sử $HD=\dfrac{1}{3}AD$ và $\widehat{ABC}=\alpha$; $\widehat{ACB}=\beta$. Chứng minh $\tan\alpha.\tan\beta=3$.

c) Gọi M ; N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét ΔADB vuông tại D ta có $DE \perp AB$

$\Rightarrow AE.AB = AD^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)

Xét ΔADC vuông tại D ta có $DF \perp AC$

$\Rightarrow AF.AC = AD^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE.AB = AF.AC$ (đpcm).

b) Ta có $HD = \frac{1}{3}AD \Rightarrow \frac{AD}{HD} = 3$

Xét ΔADB vuông tại D ta có:

$\tan\ \alpha = \tan\ \widehat{ABD} = \frac{AD}{BD}$

Xét ΔADC vuông tại D ta có:

$\tan\ \beta = \tan\ \widehat{ACD} = \frac{AD}{DC}$

$\Rightarrow \tan\ \alpha . \tan\ \beta = \frac{AD^2}{BD.DC}$ (3)

Xét ΔADB và ΔCDH ta có :

$\widehat{ADB} = \widehat{CDH}$ $(= 90°)$

$\widehat{DAB} = \widehat{DCH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABD}$)

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta CDH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{HD}$ (cặp cặp tương ứng)

$\Rightarrow AD.HD = BD.DC$

$\Rightarrow \frac{AD}{BD.DC} = \frac{1}{HD}$

$\Rightarrow \dfrac{AD^2}{BD.DC} = \dfrac{AD}{HD}$

Mà $\dfrac{AD}{HD} = 3 \Rightarrow \dfrac{AD^2}{BD.DC} = 3$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \tan\alpha.\tan\beta = 3$ (đpcm).

c) Xét tứ giác $DEKN$ ta có :

$\widehat{DEK} = 90°$ (do $DE \perp AB$)

$\widehat{EKN} = 90°$ (do $CK \perp AB$)

$\widehat{DNK} = 90°$ (do $DN \perp KC$)

$\Rightarrow$ tứ giác $DEKN$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow \widehat{EDN} = 90°$

Ta có: $\widehat{HDN} = \widehat{BDE}$ (cùng phụ với $\widehat{EDH}$) (5)

Xét tứ giác $BEMD$ ta có:

$\widehat{BED} = \widehat{BMD} \left(= 90°\right)$

Mà $\widehat{BED}$ và $\widehat{BMD}$ là 2 góc kề nhau cùng nhìn cạnh BD dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ tứ giác $BEMD$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết) (6)

$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BDE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{MD}$)

Chứng minh được tứ giác $MDNH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HMN} = \widehat{HDN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{HN}$) (7)

Từ (5); (6); (7) $\Rightarrow \widehat{HMN} = \widehat{BME}$

$\Rightarrow E$, M, H thẳng hàng

Chứng minh tương tự ta có M, N, F thẳng hàng

$\Rightarrow$ bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Câu 5: (*1,0 điểm*) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $a^5 + b^5 + c^5 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \ge 6$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si đối với hai số dương a^5 và $\dfrac{1}{a}$ ta có:

$a^5 + \dfrac{1}{a} \ge 2\sqrt{a^5.\dfrac{1}{a}} = 2a^2$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si đối với hai số dương b^5 và $\dfrac{1}{b}$ ta có:

$b^5 + \dfrac{1}{b} \ge 2\sqrt{b^5.\dfrac{1}{b}} = 2b^2$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si đối với hai số dương c^5 và $\dfrac{1}{c}$ ta có:

$c^5 + \dfrac{1}{c} \ge 2\sqrt{c^5.\dfrac{1}{c}} = 2c^2$ (3)

Cộng từng vế của (1); (2); và (3) ta có:

$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2(a^2+b^2+c^2)$ (4)

Ta lại có:

$a^2+1\geq 2a$

$b^2+1\geq 2b$

$c^2+1\geq 2c$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$

Mà $a+b+c=3$ nên suy ra $a^2+b^2+c^2+3\geq 6\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 3$ (5)

$\Rightarrow a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$

Vậy: $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HƯƠNG KHÊ - NĂM 2019

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ *(Thí sinh chỉ ghi kết quả vào tờ giấy thi)*

Câu 1: Tính giá trị biểu thức: $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Câu 2: Tìm số thực a, b sao cho:

Đa thức $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức x^2-x^2-2.

Câu 3: Viết hai số tiếp theo của dãy $1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 10;\ 13;\ 17;\ 21;\ldots$

Câu 4: Tính giá trị của biểu thức: $M=\sqrt{1+2019^2+\left(\frac{2019}{2020}\right)^2}+\frac{2019}{2020}$

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=5x^2+2y^2+4xy-2x+4y+2020$

Câu 6: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $(x^2+1)(x^2+y^2)=4x^2y$

Câu 7: Giả sử x và y là hai số thỏa mãn $x>y$ và $xy=1$. Tìm GTNN của biểu thức $A=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Câu 8: Tìm A là số nguyên dương, biết trong ba mệnh đề P, Q, R dưới đây chỉ có duy nhất một mệnh đề sai:

$P=$ “$A+45$ là bình phương của một số tự nhiên”

$Q=$ “A có chữ số tận cùng là số 7”

$R=$ “$A-44$ là bình phương của một số tự nhiên”

Câu 9: Cho tam giác ABC có góc A bằng 120^0, AD là phân giác của góc A $(D\in BC)$. Tính độ dài AD biết $AB=4cm$, $AC=6cm$.

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, có các đường trung tuyến AE và BD vuông góc với nhau, biết $AB=1cm$. Tính cạnh BC.

II. PHẦN TỰ LUẬN *(Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)*

Câu 11: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{5}{3}$; b) $x^2-5x+8=2\sqrt{x-2}$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE=CM$.

a) Chứng minh ΔOEM vuông cân.

b) Chứng minh $ME//BN$.

c) Từ C kẻ $CH\perp BN\ (H\in BN)$. Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 13: Cho hình vuông có cạnh bằng 1, có chứa 29 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\frac{1}{7}$. Chứng minh rằng tồn tại 1 đường thẳng giao với ít nhất 5 đường tròn.

---HẾT---

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HƯƠNG KHÊ - NĂM 2019

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ

Câu 1: Tính giá trị biểu thức: $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Hướng dẫn

$$A^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}-2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+2-\sqrt{3}$$

$$A^2=4-2\sqrt{4-3}=4-2=2$$

Vậy $A=1$.

Câu 2: Tìm số thực a, b sao cho:

Đa thức $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức x^2-x^2-2.

Hướng dẫn

Ta thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{l|l}
x^4-9x^3+21x^2+ax+b & x^2-x-2 \\
\hline
\underline{x^4-\ \ x^3-2x^2} & x^2-8x+15 \\
-8x^3+23x^2+ax+b & \\
\underline{-8x^3+8x^2+16x} & \\
-15x^2+\left(a-16\right)x+b & \\
\underline{15x^2-\quad 15x-30} & \\
\left(a-1\right)x+b-30 &
\end{array}$$

Vì đa thức $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức x^2-x^2-2,

Nên $\left(a-1\right)x+b-30=0 \Rightarrow \begin{cases}a-1=0\\ b-30=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=30\end{cases}$.

Vậy $a=1$ và $b=30$.

Câu 3: Viết hai số tiếp theo của dãy $1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 10;\ 13;\ 17;\ 21;\ldots$

Hướng dẫn

Ta thấy:

$1+1=2$ $\qquad$ $7+3=10$

$2+1=3$ $\qquad$ $10+3=13$

$3+2=5$ $\qquad$ $13+4=17$

$5+2=7$ $\qquad$ $17+4=21$

Do đó số tiếp theo là $21+5=26$ và $26+5=31$.

Vậy số cần tìm là 26, 31.

Câu 4: Tính giá trị của biểu thức: $M=\sqrt{1+2019^2+\left(\dfrac{2019}{2020}\right)^2}+\dfrac{2019}{2020}$

Hướng dẫn

Ta có: $2020^2 = (2019+1)^2 = 2019^2 + 2.2019.1 + 1$

$\Rightarrow 1 + 2019^2 = 2020^2 - 2.2019$

$$M = \sqrt{1 + 2019^2 + \left(\frac{2019}{2020}\right)^2} + \frac{2019}{2020} = \sqrt{2020^2 - 2.2019 + \frac{2019^2}{2020^2}} + \frac{2019}{2020}$$

$$= \sqrt{\left(2020 - \frac{2019}{2020}\right)^2} + \frac{2019}{2020} = 2020 - \frac{2019}{2020} + \frac{2019}{2020} = 2020$$

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2020$

Hướng dẫn

$F = \left[(2x)^2 + 2.2x.y + y^2\right] + \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 + 2.y.2 + 4\right) + 2015$

$= (2x+y)^2 + (x-1)^2 + (y+2)^2 + 2015$

Vì $(2x+y)^2 \ge 0$, $(x-1)^2 \ge 0$, $(y+2)^2 \ge 0$, với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Do đó $F \ge 2015$

Vậy F đạt GTNN bằng 2015 khi $\begin{cases}(2x+y)^2 = 0\\(x-1)^2 = 0\\(y+2)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\y = 2\end{cases}$.

Câu 6: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $\left(x^2+1\right)\left(x^2+y^2\right) = 4x^2y$

Hướng dẫn

PT $\Leftrightarrow x^4 + x^2y^2 + x^2 + y^2 = 4x^2y$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - y\right) + x^2y(y-1) + x^2(1-y) + y\left(y - x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - y\right)\left(x^2 - y^2\right) + (y-1)\left(x^2y - x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - y\right)^2 + (y-1)(y-1).x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - y\right)^2 + (y-1)^2.x^2 = 0 \quad (*)$

Vì $x,\ y \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases}x^2 - y \in \mathbb{Z}\\ y - 1 \in \mathbb{Z}\end{cases}$ hay $\begin{cases}\left(x^2 - y\right)^2 \ge 0\\ (y-1)^2.x^2 \ge 0\end{cases}$

Kết hợp với $(*)$ suy ra $\begin{cases}x^2 - y = 0\\ y - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = y\\ \left(x^2 - 1\right).x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = y\\ \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = \pm 1\end{array}\right.\end{cases}$

- Nếu $x = 0$ thì $y = 0^2 = 0$ (Thỏa mãn $x,\ y \in \mathbb{Z}$)

- Nếu $x = 1$ thì $y = 1^2 = 1$ (Thỏa mãn $x,\ y \in \mathbb{Z}$)

- Nếu $x = -1$ thì $y = (-1)^2 = 1$ (Thỏa mãn $x,\ y \in \mathbb{Z}$)

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$.

Câu 7: Giả sử x và y là hai số thỏa mãn $x>y$ và $xy=1$. Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Hướng dẫn

Ta có: $A=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{x-y}$

Mà $xy=1$ thay vào A, ta có: $A=\dfrac{(x-y)^2+2}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2}{x-y}+\dfrac{2}{x-y}=x-y+\dfrac{2}{x-y}$

Vì $x>y$ nên $x-y>0$. Áp dụng BĐT Cô-si: $A=x-y+\dfrac{2}{x-y}\ge 2\sqrt{(x-y).\dfrac{2}{x-y}}$

hay $A\ge 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow A_{\min}=2\sqrt{2}$ khi $x-y=\dfrac{2}{x-y}\Leftrightarrow (x-y)^2=2$, kết hợp $x-y>0$

$\Rightarrow x-y=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}+y$

Mà $xy=1$, khi đó $\left(\sqrt{2}+y\right)y=1\Leftrightarrow y^2+\sqrt{2}y-1=0$

Ta có $\Delta_y=\left(\sqrt{2}\right)^2-4.1.(-1)=6>0$

$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}(\text{TM}) \\ y=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}(\text{L}) \end{array}\right.$. khi đó $x=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

Vậy A đạt GTNN bằng $2\sqrt{2}$ khi $x=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, $y=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Câu 8: Tìm A là số nguyên dương, biết trong ba mệnh đề P, Q, R dưới đây chỉ có duy nhất một mệnh đề sai:

$P=$ "$A+45$ là bình phương của một số tự nhiên"

$Q=$ "A có chữ số tận cùng là số 7"

$R=$ "$A-44$ là bình phương của một số tự nhiên"

Hướng dẫn

- Nếu P, Q đúng thì $A+45$ có tận cùng bằng 2. Không là số chính phương, trái với P. Suy ra P hoặc Q sai. (1)

- Nếu Q và R đúng thì $A-44$ có tận cùng bằng 3. Không là số chính phương, trái với R. Suy ra Q hoặc R sai. (2)

Từ (1) và (2) suy ra Q sai.

Mà $A+45$ là bình phương của một số tự nhiên nên $A+45$ có dạng a^2

$A-44$ là bình phương của một số tự nhiên nên $A-44$ có dạng b^2.

$\Rightarrow A+45-(A-44)=a^2-b^2$

$\Rightarrow 89=(a-b)(a+b)$

Mà 89 là số nguyên tố $\Rightarrow a-b=1;\quad a+b=89$.

$\Rightarrow a=45,\ b=44.$

$\Rightarrow A+45=45^2=2025$

Vậy $A=1980$.

Câu 9: Cho tam giác ABC có góc A bằng 120^0, AD là phân giác của góc A $(D\in BC)$. Tính độ dài AD biết $AB=4cm$, $AC=6cm$.

Hướng dẫn

Qua D kẻ $DE//AB(E\in AB)$

Vì AD là phân giác góc A của ΔABC

$\Rightarrow \dfrac{DC}{DB}=\dfrac{AC}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{DC}{DB+DC}=\dfrac{AC}{AB+AC}$ hay $\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{6}{3+6}\Leftrightarrow \dfrac{DC}{BC}=\dfrac{2}{3}(1)$

Ta có: AB là phân giác góc $A\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=\dfrac{120^0}{2}=60^0$

Mà $\widehat{A_1}=\widehat{D_1}=60^0$ ($DE//AB$)

$\Rightarrow \widehat{A_2}=\widehat{D_1}=60^0\ \Rightarrow \Delta ADE$ đều

$\Rightarrow AD=DE$

Vì $DE//AB$ (cách dựng)

Xét ΔABC theo hệ quả định lý Ta-lét: $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{DC}{BC}(2)$

Thế (1) vào (2) ta được: $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{2}{3}$ hay $\dfrac{DE}{3}=\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow DE=\dfrac{2.3}{3}=2(cm)$

$\Rightarrow AD=DE=2cm$.

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, có các đường trung tuyến AE và BD vuông góc với nhau, biết $AB=1cm$. Tính cạnh BC.

Hướng dẫn

Ta có: $\widehat{BAE}=\widehat{DAB}=\widehat{DBA}$

$\Rightarrow \Delta BAE\backsim\Delta CAB$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB}{AE}$

$\Rightarrow AC.AE=6\Leftrightarrow AC^2=12\ \ AE=\dfrac{1}{2}AC$

Áp dụng định lý pytago: $BC=\sqrt{AC^2+BC^2}=3\sqrt{2}$

II. PHẦN TỰ LUẬN *(Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)*

Câu 11: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2x}{x^2-x+1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{5}{3}$; b) $x^2-5x+8=2\sqrt{x-2}$.

Lời giải

a) $PT \Leftrightarrow \dfrac{2x\left(x^2+x+1\right)-x\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^3+2x^2+2x-x^3+x^2-x}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 3x^3+9x^2+3x=5x^4+5x^2+5$

$\Leftrightarrow -5x^4+3x^3+4x^2+3x-5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(-5x^3-2x^2+2x+5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(1) \\ -5x^2-7x-5=0(2) \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow -5x^2-7x-5=0$

$\Leftrightarrow 5x^2+7x+5=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{5}x\right)^2+2\sqrt{5}x\dfrac{7}{2\sqrt{5}}+\left(\dfrac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2\right]+\dfrac{51}{20}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5}x+\dfrac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{51}{20}=0$

Vì $\left(\sqrt{5}x+\dfrac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{5}x+\dfrac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{51}{20}>0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Vậy $x=1$ là nghiệm của PT.

b) $x^2-5x+8=2\sqrt{x-2}$. ĐK: $x \geq 2$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6+2-2\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)+2-2\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)-2\left(\sqrt{x-2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)-\dfrac{2(x-2-1)}{\sqrt{x-2}+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(x-2-\dfrac{2}{\sqrt{x-2}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x-2-\dfrac{2}{\sqrt{x-2}+1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3(TM)$

Vậy $x=3$ là nghiệm của PT.

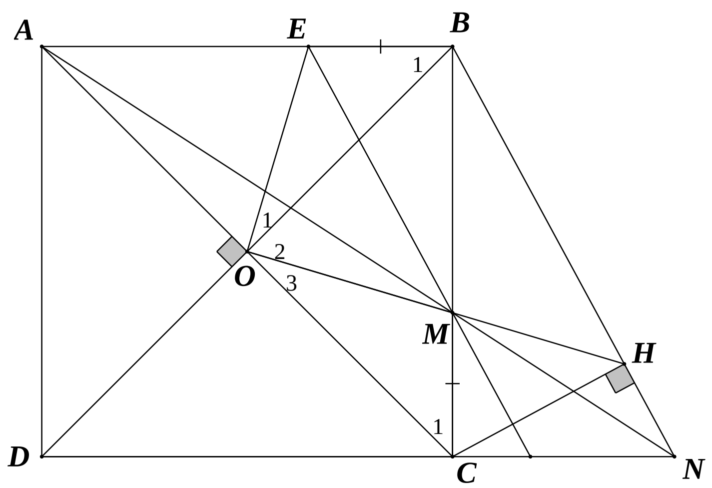
Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE=CM$.

a) Chứng minh ΔOEM vuông cân.

b) Chứng minh $ME//BN$.

c) Từ C kẻ $CH\perp BN\,(H\in BN)$. Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp BD$, $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}=45^0$ và $OB=OC$.

Xét ΔOEB và ΔOMC có:

$EB=MC$ (GT)

$\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$ (CMT)

$OB=OC$ (CMT)

$\Rightarrow \Delta OEB=\Delta OMC\,(c-c-c)$

$\Rightarrow OE=OM$ (2 cặp cạnh t.ư)(1)

$\Rightarrow \widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (2 cặp góc t.ư)

Ta có $\widehat{O_2}+\widehat{O_3}=90^0 \Rightarrow \widehat{O_2}+\widehat{O_1}=90^0$ hay $\widehat{OEM}=90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra OEM vuông cân.

b) Xét ΔABM và ΔNCM có:

$\widehat{ABM}=\widehat{NCM}=90^0$

$\widehat{AMB}=\widehat{NMC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta NCM\left(g-g\right)$

$\Rightarrow \frac{CM}{BM}=\frac{MN}{AM}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow \frac{CM}{BM+CM}=\frac{MN}{AM+MN} \Rightarrow \frac{CM}{BC}=\frac{MN}{AN}$

$\Rightarrow \frac{BE}{AB}=\frac{MN}{AN} \Rightarrow \frac{BE}{AB}=\frac{MN}{AN}$

$\Rightarrow ME//BN$ (ĐL đảo của ĐL Ta-let)

c) Gọi giao điểm của OM và BN là H'.

Ta có $\widehat{MHB}=\widehat{EMD}=45^0$

Xét $\Delta BMH'$ và ΔOCM có:

$\widehat{H}=\widehat{C}=45^0$

$\widehat{BMH'}=\widehat{CMO}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BMH' \backsim \Delta OMC\left(g-g\right)$

Ta có tỉ số: $\frac{BM}{MH'}=\frac{OM}{MC}$

$\widehat{BMO}=\widehat{H'MC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BMO \backsim \Delta H'MC\left(c-g-c\right)$

$\Rightarrow \widehat{OBM}=\widehat{CH'M}=45^0$

$\Rightarrow \widehat{BH'C}=90^0$

$\Rightarrow H'$ trùng với H

Vậy O, M, H thẳng hàng.

Câu 13: Cho hình vuông có cạnh bằng 1, có chứa 29 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\frac{1}{7}$. Chứng minh rằng tồn tại 1 đường thẳng giao với ít nhất 5 đường tròn.

Lời giải

Kẻ 9 đường thẳng song song cách đều chia hình vuông thành 10 hình chữ nhật có chiều rộng là $0,1$.

Vì đường kính của mỗi hình tròn lớn hơn $0,1$ nên mỗi đường tròn bị ít nhất một trong 9 đường thẳng vừa kẻ cắt.

Nếu mỗi đường thẳng chỉ cắt không quá 6 đường tròn thì số đường tròn không quá $9.6=54$

Mà có 55 đường tròn nên ít nhất phải có một đường thẳng cắt 7 đường tròn.

---HẾT---

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HOẰNG HÓA NĂM 2019

Câu 1 (4,0 điểm):

1/ Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

2/ Cho $b>a>0$ và $3a^2+b^2=4ab$. Tính $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Câu 2 (4,0 điểm):

1/ Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

2/ Giải phương trình $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

Câu 3 (4,0 điểm):

1/ Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

2/ Cho x, y, z là các số nguyên thoả mãn : $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$

Chứng minh: $x+y+z$ chia hết cho 27.

Câu 4 (6,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

1/ Chứng minh rằng: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

2/ Chứng minh rằng: $AE.BF.CD = AB.BC.CA.cosA.cosB.cosC$.

3/ Chứng minh rằng: $S_{DEF}=\left(1-cos^2A-cos^2B-cos^2C\right).S_{ABC}$.

4/ Cho biết $AH=k.HD$. Chứng minh rằng: $tanB.tanC=k+1$

5/ Chứng minh rằng: $\dfrac{HA}{BC}+\dfrac{BH}{AC}+\dfrac{HC}{AB}\ge\sqrt{3}$.

Câu 5 (2,0 điểm): Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$

....................HẾT................

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HOẰNG HÓA NĂM 2019

Câu 1 (4,0 điểm):

1/ Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

2/ Cho $b>a>0$ và $3a^2+b^2=4ab$. Tính $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Lời giải

1/ a/ ĐKXĐ: $x\geq 0$, $x\neq 1$

Ta có $P=\dfrac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

$$=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

b) Rút gọn P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Ta có $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow x^3=40+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3=40+6x\Leftrightarrow x^3-6x-40=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-4\right)\left(x^2+4x+10\right)=0\Leftrightarrow x=4\ \text{(vì } x^2+4x+10=\left(x+2\right)^2+6>0\text{)}$$

Thay $x=4$ vào biểu thức thu gọn ta được $P=3$

2/ Cho $b>a>0$ và $3a^2+b^2=4ab$. Tính $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Ta có $3a^2+b^2=4ab\Leftrightarrow 3a^2-3ab+b^2-ab=0\Leftrightarrow(a-b)(3a-b)=0$

Vì $b>a>0\Leftrightarrow a-b<0$. Suy ra $b-3a=0\Rightarrow b=3a$.

Vì vậy $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a-3a}{a+3a}=\dfrac{-2a}{4a}=-\dfrac{1}{2}$ (vì $a>0$)

Câu 2 (4,0 điểm):

1/ Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

2/ Giải phương trình $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Lời giải

1/ HD: Đặt $\sqrt{x^2+1}=y$, với $y\geq 1$.

Khi đó ta được $y^2+3x=(x+3)y \Leftrightarrow (y-3)(y-x)=0$.

Dẫn đến $y=3$ hoặc $y=x$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\pm 2\sqrt{2}$.

2) Giải phương trình $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Vì: $4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $4x^2-10x+7=\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$,

nên ĐKXĐ của phương trình là $\forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của (1).

Chia cả tử và mẫu của (1) cho $x\neq 0$, ta được:

$$\frac{4}{4x+\frac{7}{x}-8}+\frac{3}{4x+\frac{7}{x}-10}=1$$

Đặt $y=4x+\frac{7}{x}$, phương trình trở thành: $\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1$

$\Leftrightarrow 4(y-10)+3(y-8)=(y-8)(y-10) \Leftrightarrow y^2-25y+144=0$

$\Leftrightarrow y=9$ hoặc $y=16$

+) Với $y=9$, ta được $4x+\frac{7}{x}=9 \Leftrightarrow 4x^2-9x+7=0 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{31}{16}=0$:

vô nghiệm

+) Với $y=16$, ta được $4x+\frac{7}{x}=16 \Leftrightarrow 4x^2-16x+7=0 \Leftrightarrow (2x-4)^2-9=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=\frac{7}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=\frac{1}{2}; x=\frac{7}{2}$

Câu 3 (4,0 điểm):

1/ Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

2/ Cho $x,\ y,\ z$ là các số nguyên thoả mãn : $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$
Chứng minh: $x+y+z$ chia hết cho 27.

Lời giải

1/ Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$\Leftrightarrow n+18=p^2$ và $n-41=q^2\,(p,q\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow p^2-q^2=(n+18)-(n-41)=59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q)=59$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$

Từ $n+18=p^2=30^2=900$ suy ra $n=882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41=841=29^2=q^2$.

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

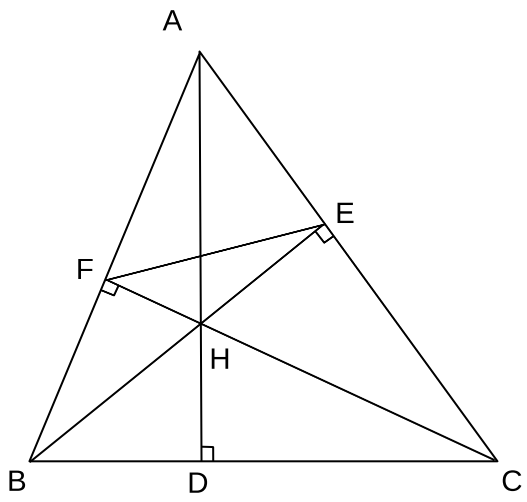
2/ Khi chia $x,\ y,\ z$ cho 3 ta được một trong các số dư là 0, 1, 2.
* Nếu 3 số dư khác nhau thì $x-y,\ y-z,\ z-x$ đều không chia hết cho 3 nên

$(x-y)(y-z)(z-x)$ không chia hết cho 3, còn $x+y+z$ chia hết cho 3 (loại).

* Nếu chỉ có 2 số dư giống nhau. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $(x-y)\vdots 3$ khi đó $x+y+z$ không chia hết cho 3 (loại)

* Nếu 3 số khi chia cho 3 có cùng số dư thì $(x-y),\ (y-z),\ (z-x)$ đều chia hết cho 3 nên $x+y+z=(x-y)(y-z)(z-x)\vdots 27$.

Câu 4 (6,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao $AD,\ BE,\ CF$ cắt nhau tại H.
1) Chứng minh rằng: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$
2) Chứng minh rằng: $AE.BF.CD = AB.BC.CA.cosA.cosB.cosC$.
3) Chứng minh rằng: $S_{DEF}=\left(1-cos^2A-cos^2B-cos^2C\right).S_{ABC}$.
4) Cho biết $AH=k.HD$. Chứng minh rằng: $tanB.tanC=k+1$
5) Chứng minh rằng: $\dfrac{HA}{BC}+\dfrac{BH}{AC}+\dfrac{HC}{AB}\ge\sqrt{3}$.



Lời giải

1) ΔABE vuông tại E nên $cosA=\dfrac{AE}{AB}$

ΔACF vuông tại F nên $cosA=\dfrac{AF}{AC}$. Suy ra

$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC\,(c.g.c)$

2) Ta có: $AE = AB.cosA;\ \ BF = BC.cosB$;

$CD = AC.cosC$. Từ đó suy ra

$AE.BF.CD = AB.BC.CA.cosA.cosB.cosC$.

3) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC\left(c.g.c\right) \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = cos^2 A$ (*)

Tương tự (*) có $\dfrac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = cos^2 B$; $\dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = cos^2 C$. Từ đó suy ra:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - cos^2 A - cos^2 B - cos^2 C$$

Suy ra $S_{DEF} = \left(1 - cos^2 A - cos^2 B - cos^2 C\right).S_{ABC}$.

4) Ta có $tanB = \dfrac{AD}{BD}$; $tanC = \dfrac{AD}{CD}$. Suy ra $tanB.tanC = \dfrac{AD^2}{BD.CD}$

Vì $AH = k.HD \Rightarrow AD = AH + HD = k.HD + HD = \left(k+1\right).HD$

$\Rightarrow AD = \left(k+1\right).HD$ (1) nên $AD^2 = HD^2.\left(k+1\right)^2$.

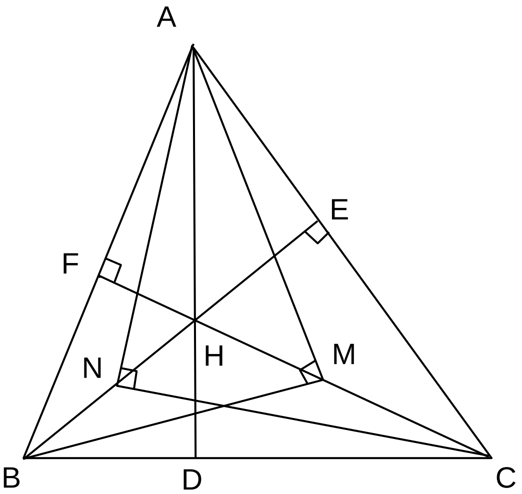
Do đó $tanB.tanC = \dfrac{HD^2(k+1)^2}{BD.CD}$ (2)

Lại có: $\Delta DHB \backsim \Delta DCA\ \left(g.g\right)$ nên $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{HD}{DC} \Rightarrow DB.DC = AD.HD$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có:

$$tanB.tanC = \frac{HD^2(k+1)^2}{AD.HD} = \frac{HD(k+1)^2}{AD} = \frac{HD(k+1)^2}{HD.(k+1)} = k+1.$$

Vậy $tanB.tanC = k+1$ (đpcm)



5) Đặt

$BC = a,\ CA = b,\ AB = c,$
$AH = x,\ BH = y,\ CH = z$.

Từ $\Delta AFC \backsim \Delta HEC \Rightarrow \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{CE}{CF}$

$\Rightarrow \dfrac{HC.HB}{AC.AB} = \dfrac{CE.HB}{CF.AB} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\dfrac{HB.HA}{AC.BC} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$; $\dfrac{HA.HC}{AB.BC} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$. Do đó:

$$\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}=\frac{HA.HB}{AC.BC}+\frac{HB.HC}{AC.AB}+\frac{HC.HA}{AB.BC}=\frac{S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HAB}}{S_{ABC}}=1$$

Lại có: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2\geq 3.\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ac}\right)$ = 3.1 = 3

nên $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\geq\sqrt{3}$ suy ra đpcm.

Câu 5 (2,0 điểm): Cho các số thực $a,\ b,\ c$ dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$.

Lời giải

$$\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{abc}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a(a+b+c)+bc}+\sqrt{bc}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}\right)$$

Theo BĐT cosi ta có: $\sqrt{a}=\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{3}.a}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)$

$$\left(\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}\right)\leq\frac{a+b+a+c}{2}+\frac{b+c}{2}=1$$

Từ đó suy ra $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{abc}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{abc}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+b\right);\quad \sqrt{c^2+abc}+\sqrt{abc}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+c\right)$$

Mà $\sqrt{abc}\leq\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Từ đó $P\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+b\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+c\right)+\frac{6}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA

PHÒNG GD&ĐT ĐÔNG SƠN

KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI CẤP TỈNH CÁC MÔN VĂN HÓA LỚP 9

NĂM HỌC 2018 – 2019

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

Bài 1. ***(4 điểm)***

1. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A=\frac{6x-(x+6)\sqrt{x}-3}{2\left(x-4\sqrt{x}+3\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}-\frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12}-\frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}.$$

Điều kiện $x\ge 0$, $x\ne 4$; $x\ne 9$; $x\ne 1$.

2. Rút gọn biểu thức: $B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Bài 2. ***(6,0 điểm)***

1. Cho phương trình: $\dfrac{3a+1}{a+x}-\dfrac{a-1}{a-x}=\dfrac{2a\left(a^2-1\right)}{x^2-a^2}$ (a là tham số).

a) Giải phương trình trên.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của a để phương trình có nghiệm x là số nguyên tố.

2. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^3-y^3-z^3=3xyz\\ x^2=2(y+z)\end{cases}$.

Câu 3. ***(4 điểm)***

1) Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho:

$\begin{cases}\overline{abc}=n^2-1\\ \overline{cba}=(n-2)^2\end{cases}$ Với $n\in\mathbb{Z}$; $n>2$.

2) Cho tam giác ABC có ba cạnh $a;b;c$ thỏa : $a+b+c=6$

Chứng minh : $52\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc<54$

Bài 4. ***(4,0 điểm)***

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh là a và N là một điểm trên cạnh AB. Tia CN cắt tia DA tại E. Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho $BF=DE$. Gọi M là trung điểm của EF.

1) *Chứng* minh tam giác ACE đồng dạng với tam giác BCM.

2) Xác định vị trí điểm N trên AB sao cho diện tích tứ giác $ACFE$ gấp ba lần diện tích hình vuông $ABCD$.

Bài 5 ***(2,0 điểm)***

Cho ΔABC: $\widehat{B}+\widehat{C}=105^0; AB+AC\sqrt{2}=2BC$. Tính $\widehat{B},\widehat{C}=?$

------------- HẾT -------------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. *(4 điểm)*

1. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A=\frac{6x-(x+6)\sqrt{x}-3}{2\left(x-4\sqrt{x}+3\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}-\frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12}-\frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}.$$

Điều kiện $x\ge 0$, $x\ne 4$; $x\ne 9$; $x\ne 1$.

2. Rút gọn biểu thức: $B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Lời giải

1. Với điều kiện $x\ge 0$, $x\ne 4$; $x\ne 9$; $x\ne 1$

Ta có $A=\dfrac{6x-x\sqrt{x}-6\sqrt{x}-3}{-2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}+\dfrac{3}{2\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$$=\frac{-6x+x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+3+3\left(\sqrt{x}-1\right)+2\left(\sqrt{x}-3\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-6x+11\sqrt{x}-6}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-5\sqrt{x}+6\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

Vậy A không phụ thuộc vào giá trị của x.

2. $B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\dfrac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\left(\sqrt{3}+1\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(4+2\sqrt{3}\right)}{2\left(3+\sqrt{3}\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{6}}+\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{6}}=\frac{1+2\sqrt{3}-3}{\sqrt{6}}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$.

Bài 2. ***(6,0 điểm)***

1. Cho phương trình: $\dfrac{3a+1}{a+x}-\dfrac{a-1}{a-x}=\dfrac{2a\left(a^2-1\right)}{x^2-a^2}$ (a là tham số).

a) Giải phương trình trên.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của a để phương trình có nghiệm x là số nguyên tố.

2. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz \\ x^2=2\left(y+z\right) \end{cases}$.

Lời giải

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) Điều kiện: $x\neq \pm a$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(3a+1\right)\left(x-a\right)+\left(a+x\right)\left(a-1\right)=2a\left(a^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4ax=2a^3+2a^2.$$

Nếu $a=0$ thì phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\neq 0$.

Nếu $a\neq 0$ thì $\Leftrightarrow 2x=a^2+a \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}a\left(a+1\right)$.

Vậy : Nếu $a=0$ thì phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}^*$.

Nếu $a\neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}a\left(a+1\right)$.

b) Với $a\in\mathbb{Z}_+^*$ thì ta có $x=\dfrac{1}{2}a\left(a+1\right)$.

* Nếu $a=2k\left(k\in\mathbb{Z}_+^*\right)$ thì $x=k\left(2k+1\right)$.

Để x là số nguyên tố thì $k=1$ (vì $2k+1>k$). Suy ra: $\begin{cases} a=2 \\ x=3 \end{cases}$.

* Nếu $a=2k+1\left(k\in\mathbb{Z}_+^*\right)$ thì $x=\left(k+1\right)\left(2k+1\right)$.

Để x là số nguyên tố thì $k+1=1\Leftrightarrow k=0$ (vì $2k+1>k+1$) không thỏa mãn vì $k\in\mathbb{Z}_+^*$.

Vậy $a=2$ là giastrij cần tìm.

2. Từ phương trình (1) của hệ ta có: $x^3-y^3-z^3=3xyz$

$\Leftrightarrow x^3-\left(y+z\right)^3+3yz(y+z)-3xyz=0$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-z\right)\left[x^2+x\left(y+z\right)+\left(y+z\right)^2-3yz\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-z\right)\left(x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-z\right)\left[\left(x+y\right)^2+\left(x+z\right)^2+\left(y-z\right)^2\right]=0$$

Vì theo giả thiết $x, y, z > 0$ nên : $(x+y)^2+(x+z)^2+(y-z)^2>0$ suy ra : $x-y-z=0$

$\Leftrightarrow x=y+z$. Thay vào phương trình (2) ta có : $x^2=2x \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (loại)} \\ x=2 \end{array}\right.$

Với $x=2 \Rightarrow y+z=2$. Vì y, z là các số nguyên dương suy ra: $y=z=1$.

Thử lại ta thấy với : $x=2, y=z=1$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Vậy nghiệm nguyên dương của hệ phương trình là : $(x, y, z)=(2,1,1)$.

Câu 3. ***(4 điểm)***

1) Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho:

$$\begin{cases} \overline{abc}=n^2-1 \\ \overline{cba}=(n-2)^2 \end{cases} \text{Với } n\in\mathbb{Z};\ n>2.$$

2) Cho tam giác ABC có ba cạnh $a;b;c$ thỏa : $a+b+c=6$

Chứng minh : $52\le 3(a^2+b^2+c^2)+2abc<54$

Lời giải

1. $\overline{abc}=n^2-1 \Leftrightarrow 100a+10b+c=n^2-1$ (1)

$\overline{cba}=(n-2)^2 \Leftrightarrow 100c+10b+a=n^2-4n+4$ (2)

Trừ từng vế (1) và (2) ta có:

$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=(n^2-1)-(n^2-4n+4)$

$\Leftrightarrow 99a-99c=4n-5$.

$\Leftrightarrow 99(a-c)=4n-5$.

$\Rightarrow (4n-5)\,\vdots\, 99$. (3)

Mặt khác $\overline{abc}=n^2-1$ mà $100\le\overline{abc}\le 999$.

$\Rightarrow 100\le n^2-1\le 999$.

$\Rightarrow 101\le n^2\le 1000$.

$\Rightarrow 11\le n\le 31$.

$\Rightarrow 39\le 4n-5\le 119$. (4)

Từ (3) và $(4) \Rightarrow 4n-5=99 \Rightarrow n=26$.

$\Rightarrow \overline{abc}=26^2-1=675$.

Vậy $\overline{abc}=675$.

2. Ta có $3(a^2+b^2+c^2)+2abc=3\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]+2abc$

$=3\left[6^2-2(ab+bc+ca)\right]+2abc=108-2(3ab+3bc+3ca-abc)$

Ta sẽ chứng minh $27<3(ab+bc+ca)-abc\le 28$

Thật vậy theo bdt tam giác ta có

$$\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6>2a \\ 6>2b \\ 6>2c \end{cases} \Rightarrow 0<a;b,c<3 \Rightarrow \begin{cases} 3-a>0 \\ 3-b>0 \\ 3-c>0 \end{cases}$$

Xét $(3-a)(3-b)(3-c)=27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc>0$

$\Rightarrow 27-9.6+3(ab+bc+ca)-abc>0 \Rightarrow 3(ab+bc+ca)-abc>27$

Mặt khác theo bđt Cô si ta có

$(3-a)+(3-b)+(3-c)\ge 3\sqrt[3]{(3-a)(3-b)(3-c)} \Rightarrow 3\ge 3\sqrt[3]{(3-a)(3-b)(3-c)}$

$\Rightarrow (3-a)(3-b)(3-c)\le 1 \Rightarrow 3(ab+bc+ca)-abc-9(a+b+c)+27\le 1$

$\Rightarrow 3(ab+bc+ca)-abc-54+27\le 1 \Rightarrow 3(ab+bc+ca)-abc\le 28$

Vậy ta có $52\le 108-2(3ab+3bc+3ca-abc)<54$

$\Rightarrow 52\le 3(a^2+b^2+c^2)+2abc<54$ ***(đpcm).***

Bài 4. ***(4,0 điểm)***

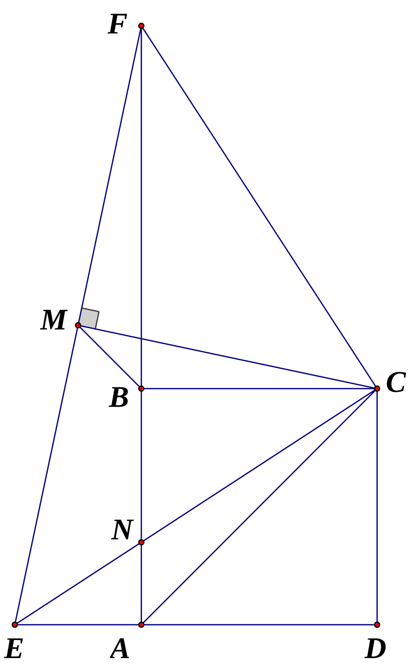
Cho hình vuông $ABCD$ cạnh là a và N là một điểm trên cạnh AB. Tia CN cắt tia DA tại E. Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho $BF=DE$. Gọi M là trung điểm của EF.

1) Chứng minh tam giác ACE đồng dạng với tam giác BCM.

2) Xác định vị trí điểm N trên AB sao cho diện tích tứ giác $ACFE$ gấp ba lần diện tích hình vuông $ABCD$.

Lời giải

1).



Có $\Delta BFC=\Delta DEC$ $(c.g.c)$ vì

$CB=CD$

$\widehat{CBF}=\widehat{CDE}=90^\circ$

$BF = DE$

Suy ra $CE = CF$ và $\widehat{FCB} = \widehat{ECD}$.

Mà $\widehat{ECD} + \widehat{ECB} = 90° \Rightarrow \widehat{BCF} + \widehat{ECB} = 90° \Rightarrow \widehat{ECF} = 90°$.

Suy ra tam giác ECF vuông cân tại C suy ra CM vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác ECF và tam giác CME vuông cân tại M.

Dễ thấy tam giác ABC vuông cân tại B.

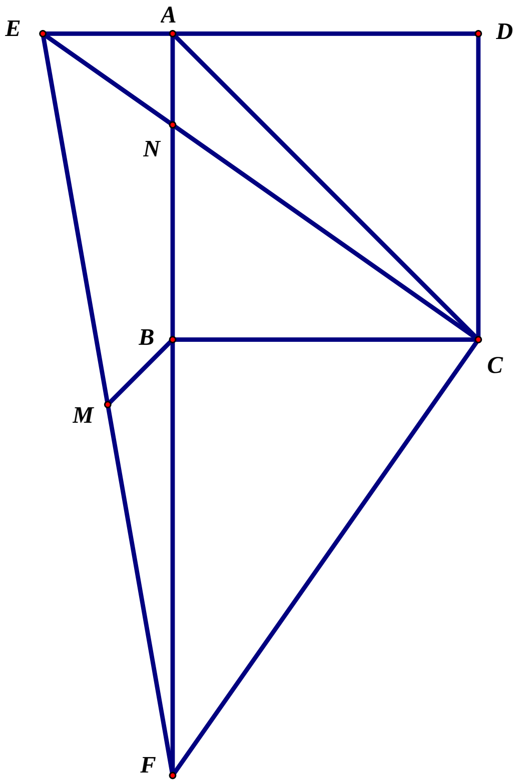
Có $\Delta MCE \sim \Delta BCA$ (Hai tam giác vuông cân đồng dạng với nhau) suy ra $\dfrac{CM}{CE} = \dfrac{CB}{CA}$.

Lại có $\widehat{MCE} = \widehat{BCA} = 45° \Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{ECA}$.

Vậy $\Delta ACE \sim \Delta BCM$ (c.g.c) vì

$\dfrac{CM}{CE} = \dfrac{CB}{CA}$ và $\widehat{MCB} = \widehat{ECA}$. (đpcm).

2).



Đặt $AN = x \Rightarrow AE = \dfrac{ax}{a-x}$, $AF = 2a + \dfrac{ax}{a-x}$, điều kiện $0 \le x \le a$

$$S_{ACFE} = S_{AEF} + S_{ACF} = \frac{1}{2}\left(AE.AF + CB.AF\right) = \frac{1}{2}AF\left(AE + CB\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a + \frac{ax}{a-x}\right)\left[\frac{ax}{a-x} + a\right] = \frac{1}{2}a^2\left(2 + \frac{x}{a-x}\right)\left(\frac{x}{a-x} + 1\right) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{2a-x}{a-x}\right)\left(\frac{a}{a-x}\right)$$

$$= \frac{a^3}{2}\frac{2a-x}{\left(a-x\right)^2}$$

Có $S_{ACFE}=3S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{a^3}{2}\frac{2a-x}{(a-x)^2}=3a^2\Leftrightarrow(2a-x)a=6(a-x)^2\Leftrightarrow6x^2-11ax+4a^2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4a}{3}(L)\\x=\frac{a}{2}(N)\end{array}\right..$$

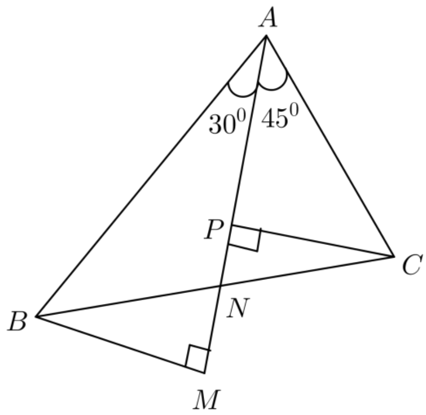
Bài 5 ***(2,0 điểm)***

Cho ΔABC: $\widehat{B}+\widehat{C}=105^0; AB+AC\sqrt{2}=2BC$. Tính $\widehat{B},\widehat{C}=?$

Lời giải

Trên BC chọn điểm N sao cho $\widehat{NAB}=30^0$

Kẻ $BM\perp AN; CP\perp AN\quad(P,M\in AN)$



* Xét ΔABM có $\widehat{M}=90^0;\widehat{A}=30^0$

Áp dụng định lý góc đối diện cạnh

30^0 bằng nửa cạnh huyền

$\Rightarrow AB=2BM$ (1)

* Xét ΔAPC có $\widehat{PAC}=45^0$

Nên ΔAPC vuông cân tại P

$\Rightarrow AC=\sqrt{2}PC$

$\Rightarrow\sqrt{2}AC=2PC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB+\sqrt{2}AC=2(BM+PC)\le2(BN+CN)=2BC$

để thoả mãn bài toán thì $M\equiv N\equiv P$ hay $\widehat{B}=60^0;\widehat{C}=45^0$.

------------- HẾT -------------

UBND HUYỆN KIM THÀNH
TRƯỜNG THCS TUẤN HƯNG

ĐỀ THI THỬ
CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN (Lần 2)
NĂM HỌC 2019 – 2020
MÔN: TOÁN 9
Thời gian làm bài 120 phút
(Đề gồm 01 trang)

Câu1. (2 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ $\quad (x>0; x\neq 1)$

2) Cho x và y là hai số thỏa mãn: $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M=x^{2017}+y^{2017}$

Câu2. (2 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$

2) Giải bất phương trình: $(2x-3)\sqrt{x+4}\geq 0$

Câu3. (2 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $xy+2x+2y=1$

2) Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n thì số $A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Câu4. (3 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng:

1) $\dfrac{DB}{EC}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$

2) $BC.BD.CE=AH^3$

Câu5. (1 điểm)

Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $x^2+3^y=3026$.

……………..Hết……………..

GIẢI

Câu1. (2 điểm)

1)

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\left(\sqrt{x}+1\right)$$
$$=x-\sqrt{x}-2\sqrt{x}-1+2\sqrt{x}+2$$
$$=x-\sqrt{x}+1$$

2)

Nhân 2 vế của $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5 \quad (1)$ với $\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ ta được:

$$\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left[x^2-\left(x^2+5\right)\right]\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$$
$$\Leftrightarrow -5\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$$
$$\Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5} \qquad (2)$$

Tương tự nhân 2 vế của (1) với $\left(y+\sqrt{y^2+5}\right)$ ta được: $x-\sqrt{x^2+5}=-y-\sqrt{y^2+5} \qquad (3)$

Cộng vế với vế của (2) và (3) ta được:

$$y-\sqrt{y^2+5}+x-\sqrt{x^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5}-y-\sqrt{y^2+5}$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y=0\Leftrightarrow 2\left(x+y\right)=0\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow x=-y$$

Vậy $M=x^{2017}+y^{2017}=0$

Câu2. (2 điểm)

1)

Điều kiện để phương trình xác định là: $x\ge 1$

Phương trình đó cho tương đương với:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\frac{x+3}{2}$$
$$\Leftrightarrow\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\frac{x+3}{2} \qquad (*)$$

Nếu $\sqrt{x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$ thì phương trình (*) trở thành

$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\dfrac{x+3}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=\dfrac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=x+3$

$\Leftrightarrow 16(x-1)=x^2+6x+9$

$\Leftrightarrow x^2-10x+25=0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2=0$

$\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện $x \ge 2$)

Vậy $S=\{5\}$

2) $(2x-3)\sqrt{x+4} \ge 0\ (dk: x \ge -4)$

Xét trường hợp: $(2x-3)\sqrt{x+4}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ \sqrt{x+4}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}(tm) \\ x=-4(tm) \end{array}\right.$$

Xét trường hợp: $(2x-3)\sqrt{x+4}>0$

$$\Leftrightarrow 2x-3>0(vi\ \sqrt{x+4}>0)$$

$$\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$$

Vậy: bất phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{3}{2} \\ x=-4 \end{array}\right.$

Câu3 (2 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $xy+2x+2y=1$

$xy+2x+2y=1$

$\Leftrightarrow y(x+2)=1-2x$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1-2x}{x+2}=-2+\dfrac{5}{x+2}$

Để $x,y \in Z \Leftrightarrow x+2 \in U(5)=\{\pm1;\pm5\} \Rightarrow x \in \{-3;-1;-7;3\}$

Thay vào ta tìm được $y \in \{-7;3;-3;-1\}$

Vậy; nghiệm nguyên của pt là: $(-3;-7);(-1;3);(-7;-3);(3;-1)$

2) $A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n(n+3)(n+2)(n+1)+1$

$$A=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$

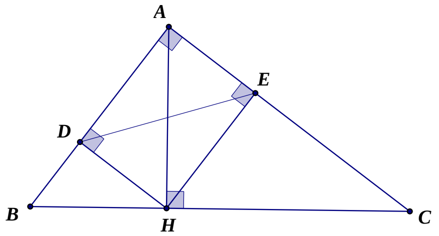
Đặt $n^2+3n=t\,(t \in N)=A=t(t+2)+1=(t+1)^2$

Vậy tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là số chính phương.

Câu4 (2 điểm)

a) Ta có: Δ ABC vuông tại A , đường cao AH :

$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BH.BC}{CH.BC}=\frac{BH}{CH}$



$\Rightarrow\left(\frac{AB^2}{AC^2}\right)^2=\left(\frac{BH}{CH}\right)^2\Rightarrow\frac{AB^4}{AC^4}=\frac{BH^2}{CH^2}=\frac{BD.AB}{CE.AC}$

$\Rightarrow\frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BD}{CE}\Rightarrow\frac{BD}{CE}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^3$

b) Ta có:

$AH^2=BH.CH$

$\Leftrightarrow AH^4=BH^2.CH^2=(BD.AB)(CE.AC)=(BD.CE)(AB.AC)=BD.CE.AH.BC$

$\Leftrightarrow AH^3=BD.CE.BC$

Câu 5 (1 điểm)

Ta có x^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 .

- Nếu $y\neq 0\Rightarrow 3^y\vdots 3\Rightarrow x^2+3^y$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1

  Mà 3026 chia 3 dư 2

  ⇨ Trường hợp này không xảy ra.
- Vậy $y=0$

  $\Rightarrow x^2+1=3026$

  $\Leftrightarrow x^2=3025$

  $\Leftrightarrow x^2=55^2$

  $\Leftrightarrow x=55$

  Vậy cặp số tự nhiên $(x;y)=(55;0)$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 2019-2020
HUYỆN KỲ ANH

Bài 1: a) Tính giá trị của biểu thức : $A=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

b) Cho $xy+\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=1$ Tính giá trị của : $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

Bài 2: Giải các phương trình sau :

a) $x^2+12\sqrt{1-x}=x+36$

b) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

Bài 3: a) Tìm các số thực x,y thỏa : $2x+3y=1$ và $3x^2+2y^2=\dfrac{6}{35}$

b)Cho : $x^2+y^2+z^2+x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}=6$ Tính $P=x^{2018}+y^{2019}+z^{2009}$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH :

a) Biết $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{7};CH-BH=10$ .Tính BC

b) Lấy điểm D đối xứng với C qua A .Gọi I là trung điểm của AH chứng minh $BI\perp DH$

c) Gọi K là điểm đối xứng với I qua A , biết $\dfrac{HC}{HB}=\dfrac{1}{4}$.Chứng minh $\Delta IAC \backsim \Delta ICK$ từ đó tính $\widehat{CKA}+\widehat{CAI}$?

Bài 5: cho các số thực dương a,b,c .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c+2a}+\frac{\sqrt{ac}}{a+c+2b}$$

LỜI GIẢI

Bài 1:

a) $A=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}\Rightarrow\dfrac{A}{\sqrt{2}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{56}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+1}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1}=\dfrac{6}{11}\Rightarrow A=\dfrac{6\sqrt{2}}{11}$

b) Từ giả thiết $xy+\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=1\Rightarrow x^2y^2+\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)+2xy\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=1$ (bình phương 2 vế)

$\Rightarrow 2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=0$

Mặt khác : $\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$

Vậy : $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$

Bài 2:

a) $x^2+12\sqrt{1-x}=x+36\Leftrightarrow x^2-2x+1=36-12\sqrt{1-x}+1-x$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \left(6-\sqrt{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=6-\sqrt{1-x}\,(1) \\ x-1=\sqrt{1-x}-6\,(2) \end{array}\right.$

Giải (1) Vô nghiệm

Giải (2) $x=-3$ hoặc $x=-8$

b) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1+3x-x\sqrt{x^2+1}-3\sqrt{x^2+1}=0$

Đặt $a=x; b=\sqrt{x^2+1}$ ta có $b^2+3a-ab+3b=0$

$\Leftrightarrow (b-a)(b-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=a\,(1) \\ b=3\,(2) \end{array}\right.$

Giải (1) vô nghiệm

Giải (2) $x=\pm 2\sqrt{2}$

Bài 3:

a)Ta có: $3x^2+2y^2=\dfrac{6}{35} \Rightarrow \left(3x^2+2y^2\right).\dfrac{35}{6}=1 \Rightarrow \left(3x^2+2y^2\right)\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{2}\right)=1$

$\Rightarrow 4x^2+9y^2+\dfrac{27}{2}x^2+\dfrac{8}{3}y^2=1=(2x+3y)^2 \Rightarrow 4x^2+9y^2+\dfrac{27}{2}x^2+\dfrac{8}{3}y^2=4x^2+9y^2+12xy$

$\Rightarrow \dfrac{27}{2}x^2+\dfrac{8}{3}y^2-12xy=0 \Rightarrow 6\left(\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{4}{9}y^2-2xy\right)=0 \Rightarrow 6\left(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{3}y\right)^2=0 \Rightarrow 9x=4y$

Hay $x=\dfrac{4y}{9} \Rightarrow 2.\dfrac{4y}{9}+3y=1 \Rightarrow \dfrac{35}{9}y=1 \Rightarrow y=\dfrac{9}{35} \Rightarrow x=\dfrac{4}{35}$

b)Áp dụng : $x^2+\dfrac{1}{x^2}\ge 2; y^2+\dfrac{1}{y^2}\ge 2; z^2+\dfrac{1}{z^2}\ge 2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}\ge 6$

đẳng thức xảy ra khi $x^2=1; y^2=1; z^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1; y=\pm 1; z=\pm 1$

Khi đó $x^{2018}=\left(x^2\right)^{1009}=1^{1009}=1$ và

$y^{2019}+z^{2009}=y.\left(y^2\right)^{1009}+z.\left(z^2\right)^{1004}=y.1+z.1=y+z$

+)Nếu $y=z=1 \Rightarrow P=1+1+1=3$

+)Nếu $y=1; z=-1$ hay $y=-1; z=1 \Rightarrow P=1+1-1=1$

+) Nếu $y=z=-1 \Rightarrow P=1-1-1=-1$

Bài 4: a)

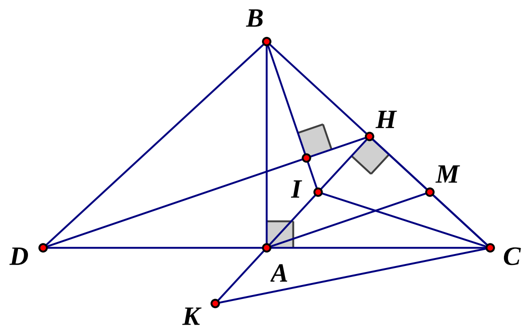
Đặt $CH=x \Rightarrow BH=x-10$

mà : $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BH}{CH}=\dfrac{9}{49} \Rightarrow \dfrac{x-10}{x}=\dfrac{9}{49} \Rightarrow x=12,25 \Rightarrow BC=14,5$

b)

Gọi M là trung điểm của HC suy ra $IM//AC \Rightarrow IM \perp AB$ vậy I là trực tâm tam giác MBA suy ra BI vuông góc với AM mà $MA//DH$ suy ra $BI \perp DH$

c)Đặt $BH = a \Rightarrow CH = \dfrac{a}{4}$



$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow \dfrac{IH^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow IH = \dfrac{a}{4} \Rightarrow IC^2 = \dfrac{a^2}{8}$

$\Rightarrow IA.IK = \dfrac{a}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{8}$

$\Rightarrow IC^2 = IK.IA \Rightarrow \Delta IKA \backsim \Delta ICA(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICK} \Rightarrow \widehat{CKA} + \widehat{CAI} = \widehat{HIC} = 45°$(do ΔHIC vuông cân)

<u>Bài 5</u>:

Ta có $a+b+2c = (a+c)+(b+c) \geq 2\sqrt{(a+c)(b+c)}$ (BĐT cô si)

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b+2c} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{(a+c)}.\dfrac{b}{(b+c)}} \leq \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+c}+\dfrac{b}{b+c}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{a+c}+\dfrac{b}{b+c}\right)$ (BĐT Cô si)

Tương tự ta cũng có : $\dfrac{\sqrt{bc}}{b+c+2a} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{a+c}\right)$ và $\dfrac{\sqrt{ac}}{a+c+2b} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}\right)$

Cộng vế theo vế tương ứng ta có :

$$P = \frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c} + \frac{\sqrt{bc}}{b+c+2a} + \frac{\sqrt{ac}}{a+c+2b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right) = \frac{3}{4}$$

Vậy $P_{max} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = b = c$

PHÒNG GD&ĐT
HUYỆN MỸ ĐỨC

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2019 - 2020
MÔN: TOÁN
Ngày thi: *03/10/2019*
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I *(5,0 điểm)*. Cho biểu thức $P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P=\frac{2}{7}$

c) So sánh $2P$ và P^2

Bài II *(4,0 điểm).*

1) Giải các phương trình: $\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2+6x+9}=7$

2) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $(x-2019)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

Bài III *(4,0 điểm).*

1) Cho các số x,y,z thỏa mãn $\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0$ với $x\ne y; y\ne z; z\ne x$

Tính giá trị biểu thức: $A=\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}$

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{x^2}{x+2y+3z}+\frac{y^2}{y+2z+3x}+\frac{z^2}{z+2x+3y}$

Bài IV *(6,0 điểm).*

Cho ΔABC có ba góc nhọn, $\hat{A}=60^o$. Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H . Gọi K là trung điểm của AH

a) Chứng minh: $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$ và $EF=\frac{1}{2}BC$.

b) Chứng minh: $\widehat{EKF}=120^o$ và tính AH , biết $BC=12$ cm.

c) Chứng minh: $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1$.

d) Chứng minh: $AD.DH+BE.EH+CF.FH\le\frac{AB^2+AC^2+BC^2}{4}$.

Bài V *(1,0 điểm)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn $\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

---*Hết*---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ và tên học sinh:……………………………..Trường THCS:………………………………

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I *(5,0 điểm)*. Cho biểu thức $P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P=\frac{2}{7}$

c) So sánh $2P$ và P^2

HD:

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}=\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Với x ≥ 0, x ≠ 1. Ta có:

$$P=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

Vì $\sqrt{x}+3>0$ nên $\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow x=4$(t/m)

Vậy P = $\frac{2}{7}$ khi x = 4

c) Vì $x\ge 0\Rightarrow x+\sqrt{x}+1\ge 1$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}\le 2$$

$$\Leftrightarrow 0<P\le 2$$

$$\Leftrightarrow P(P-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow P^2-2P\le 0$$

$$\Leftrightarrow P^2\le 2P$$

Dấu "=" xảy ra khi P = 2 ⇔ x = 0

Vậy $P^2 \le 2P$

Bài II *(4,0 điểm).*

1) Giải các phương trình:

$$\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2+6x+9}=7$$

$$\Leftrightarrow |2x+5|+|x+3|=7 \ (*)$$

2) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$(x-2019)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$$

$$(x-2019)^2=y^4-6y^3+9y^2+2y^2-6y$$

$$(x-2019)^2=y^2(y-3)^2-2y(y-3)+1-1$$

$$(x-2019)^2=\left[y(y-3)-1\right]^2-1$$

$$(x-2019)^2-\left[y(y-3)-1\right]^2=-1$$

$$(x-2019-a+1)(x-2019+a-1)=-1 \quad (Voi\ y(y-3)=a)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2019-a+1=-1\\x-2019+a-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-2019-a+1=1\\x-2019+a-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2019\\a=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2019\\a=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (x;y)=\{(2019;0),(2019;1),(2019;2),(2019;3)\}$$

Bài III *(4,0 điểm).*

1) Cho các số x,y,z thỏa mãn $\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0$ với $x\ne y; y\ne z; z\ne x$

Tính giá trị biểu thức: $A=\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}$

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{x^2}{x+2y+3z}+\frac{y^2}{y+2z+3x}+\frac{z^2}{z+2x+3y}$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*)

Ta có: $A=\frac{x^2}{x+2y+3z}+\frac{y^2}{y+2z+3x}+\frac{z^2}{z+2x+3y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{6(x+y+z)}=1$

Bài V *(1,0 điểm)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (*x*; *y*; *z*) thỏa mãn $\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

HD:

Ta có:

$$\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=\frac{m}{n}\in Q\ (m,n\in Z,n\neq 0)\Rightarrow nx+ny\sqrt{2019}=my+mz\sqrt{2019}$$

$$\Rightarrow nx-my=\sqrt{2019}\left(mz-ny\right)$$

Vì *x, y, z, m, n là các số nguyên nên* $nx-my\in Z$ và $mz-ny\in Z$

Khi đó: $nx-my=0$ và $mz-ny=0$. Suy ra: $\frac{m}{n}=\frac{y}{z}=\frac{x}{y}\Rightarrow y^2=xz$.

Theo đề bài $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố hay

$x^2+2y^2+z^2-y^2=x^2+2xz+z^2-y^2=\left(x+z\right)^2-y^2=\left(x-y+z\right)\left(x+y+z\right)$ là số nguyên tố.

Khi đó: $x-y+z=1$ hay $x+z=1+y$. Suy ra:

$\left(x+z\right)^2=\left(1+y\right)^2\Leftrightarrow x^2+z^2+2y^2=y^2+2y+1\Leftrightarrow (y-1)^2+x^2+z^2-2=0$

Vì *x*, *y*, *z* là số nguyên dương nên $x=y=z=1$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – HUYỆN QUAN SƠN

NĂM 2019 - 2020

Câu 1: *(4 điểm)* Cho $P=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

1. Rút gọn *P*. Với giá trị nào của *x* thì $P>1$.
2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Câu 2: *(4 điểm)* Giải phương trình:

1. $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-10x+18\right)+12x-39=0$
2. $x^2+5x=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

Câu 3: *(4 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x để biểu thức x^4-x^2+2x+2 là số chính phương.
2. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta luôn có: $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\geq\dfrac{3}{1+abc}$

Câu 4: *(6 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại *H*.

Chứng minh rằng:

1. $AF.AB=AH.AD=AE.AC$.
2. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
3. Gọi M,N,P,I,K,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC,AC,AB,EF,ED,DF. Chứng minh rằng các đường thẳng MI,NQ,PK đồng quy.
4. Gọi độ dài các đoạn thẳng AB,BC,CA lần lượt là a,b,c; độ dài các đoạn thẳng AD,BE,CF là a',b',c'. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{(a+b+c)^2}{a'^2+b'^2+c'^2}$

Câu 5: *(2 điểm)*

Cho hai số dương a,b thỏa mãn: $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{a^2+b^2}$

……………….HẾT…………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – HUYỆN QUAN SƠN

NĂM 2019 - 2020

Câu 1: *(4 điểm)* Cho $P=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

1. Rút gọn *P*. Với giá trị nào của *x* thì $P>1$.
2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

1. $P=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-1)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)(x-1)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

$=\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{2x+2}{x-1}$

2. Ta có $P=\dfrac{2x+2}{x-1}=\dfrac{(2x-2)+4}{x-1}=2+\dfrac{4}{x-1}$

P có giá trị lớn nhất khi $2+\dfrac{4}{x-1}$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x-1$ là số nguyên dương nhỏ nhất

$\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$

Câu 2: *(4 điểm)* Giải phương trình:

1. $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-10x+18\right)+12x-39=0$
2. $x^2+5x=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

Lời giải

1. $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-10x+18\right)+12x-39=0$

Đặt $x^2-6x+8=a$; $x^2-10x+18=b$

Ta có $a-b=\left(x^2-6x+8\right)-\left(x^2-10x+18\right)=4x-10$

$\Rightarrow 12x-39=(12x-30)-9=3(4x-10)-9=3(a-b)-9$

Khi đó ta có phương trình $ab+3(a-b)-9=0$

$\Leftrightarrow ab+3a-3b-9=0$

$\Leftrightarrow (ab+3a)-(3b+9)=0$

$\Leftrightarrow a(b+3)-3(b+3)=0$

$\Leftrightarrow (b+3)(a-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b+3=0 \\ a-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-3 \\ a=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+18=-3 \\ x^2-6x+8=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+21=0 \\ x^2-6x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \\ x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

2. $x^2+5x=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

$\Leftrightarrow x^2+5x+2-2\sqrt[3]{x^2+5x-2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+5x-2\right)-2\sqrt[3]{x^2+5x-2}+4=0$

Đặt $\sqrt[3]{x^2+5x-2}=a \quad \Rightarrow x^2+5x-2=a^3$

Khi đó ta có phương trình $a^3-2a+4=0$

$\Leftrightarrow (a+2)\left(a^2-2a+2\right)=0$

$\Rightarrow a+2=0$ (Vì $a^2-2a+2=(a-1)^2+1\ge 1>0$)

$\Leftrightarrow a=-2$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2+5x-2}=-2$

$\Leftrightarrow x^2+5x-2=-8$

$\Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Câu 3: *(4 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x để biểu thức x^4-x^2+2x+2 là số chính phương.
2. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta luôn có:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge\frac{3}{1+abc}$$

Lời giải

1. x^4-x^2+2x+2

$=\left(x^4+2x^3+x^2\right)-\left(2x^3+4x^2+2x\right)+\left(2x^2+4x+2\right)$

$=x^2\left(x^2+2x+1\right)-2x\left(x^2+2x+1\right)+2\left(x^2+2x+1\right)$

$=(x+1)^2\left(x^2-2x+2\right)$

Đặt $x^4-x^2+2x+2=A(a\in\mathbb{N})$

Vì $(x+1)^2$, A là số chính phương nên suy ra x^2-2x+2 phải là số chính phương

$x^2-2x+2=a^2\,(a\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow a^2-\left(x^2-2x+1\right)=1$

$\Leftrightarrow a^2-\left(x-1\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \left(a-x+1\right)\left(a+x-1\right)=1$

Vì $a,x\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x+1=1\\a+x-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}a-x+1=-1\\a+x-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x=0\\a+x=2\end{cases}\\ \begin{cases}a-x=-2\\a+x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\x=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\x=1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow x=1$

2. $\dfrac{1}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{1}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{1}{c\left(1+a\right)}\ge\dfrac{3}{1+abc}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+abc}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{1+abc}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{1+abc}{c\left(1+a\right)}\ge 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+abc+a+ab}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{1+abc+b+bc}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{1+abc+ca+c}{c\left(1+a\right)}\ge 6$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(1+a\right)+\left(ab+abc\right)}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{\left(1+c\right)+\left(bc+abc\right)}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{\left(1+a\right)+\left(ca+abc\right)}{c\left(1+a\right)}\ge 6$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(1+a\right)+ab\left(1+c\right)}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{\left(1+c\right)+bc\left(1+a\right)}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{\left(1+a\right)+ca\left(1+b\right)}{c\left(1+a\right)}\ge 6$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+a}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{a\left(1+b\right)}{1+a}+\dfrac{1+b}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{b\left(1+c\right)}{1+b}+\dfrac{1+c}{c\left(1+a\right)}+\dfrac{c\left(1+a\right)}{1+c}\ge 6$

Mà $\dfrac{1+a}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{a\left(1+b\right)}{1+a}+\dfrac{1+b}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{b\left(1+c\right)}{1+b}+\dfrac{1+c}{c\left(1+a\right)}+\dfrac{c\left(1+a\right)}{1+c}$

$\ge 2\sqrt{\dfrac{1+a}{a\left(1+b\right)}.\dfrac{a\left(1+b\right)}{1+a}}+2\sqrt{\dfrac{1+b}{b\left(1+c\right)}.\dfrac{b\left(1+c\right)}{1+b}}+2\sqrt{\dfrac{1+c}{c\left(1+a\right)}.\dfrac{c\left(1+a\right)}{1+c}}=6$ luôn đúng

Suy ra $\dfrac{1}{a\left(1+b\right)}+\dfrac{1}{b\left(1+c\right)}+\dfrac{1}{c\left(1+a\right)}\ge\dfrac{3}{1+abc}$

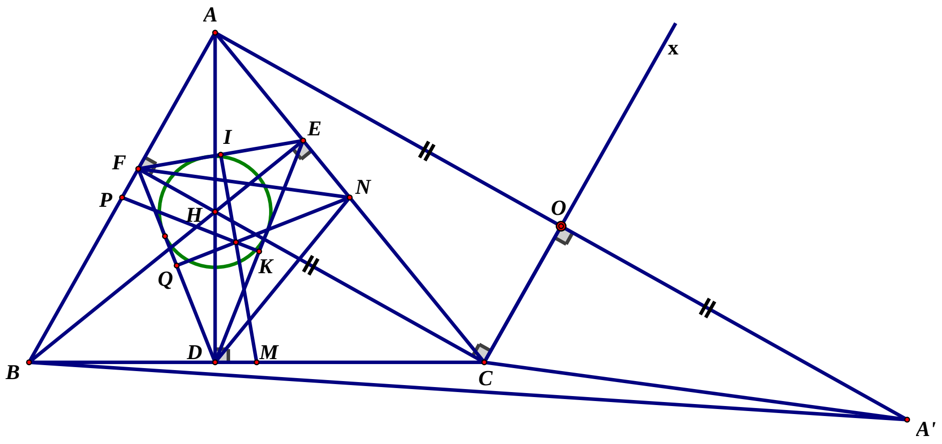
Câu 4: *(6 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng:

1. $AF.AB=AH.AD=AE.AC$.
2. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
3. Gọi M,N,P,I,K,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC,AC,AB,EF,ED,DF. Chứng minh rằng các đường thẳng MI,NQ,PK đồng quy.
4. Gọi độ dài các đoạn thẳng AB,BC,CA lần lượt là a,b,c; độ dài các đoạn thẳng AD,BE,CF là a',b',c'. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{a'^2+b'^2+c'^2}$

Lời giải



1. $\Delta AFH \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AF.AB = AH.AD$

$\Delta AEH \backsim \Delta ADC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD$

Do đó $AF.AB = AH.AD = AE.AC$

2. Ta có $\Delta CFB \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow \dfrac{BF}{CB} = \dfrac{BD}{AB}$

Xét ΔBFD và ΔBCA có : $\dfrac{BF}{CB} = \dfrac{BD}{AB}$; $\widehat{ABC}$ chung

$\Rightarrow \Delta BFD \backsim \Delta BCA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BCA}$ (1)

chứng minh tương tự $\Delta AFE \backsim \Delta ACB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{BCA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AFE} = \widehat{BFD}$

Mà $\widehat{AFE} + \widehat{EFC} = 90°; \widehat{CFD} + \widehat{DFB} = 90° \Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{CFD}$

Suy ra FC là phân giác của $\widehat{EFD}$ (3)

Chứng minh tương tự ta được EB là phân giác của $\widehat{DEF}$, DA là phân giác của $\widehat{EDF}$ (4)

Mà H là giao điểm của ba đoạn thẳng AD, BE, CF (5)

Từ (3),(4),(5) suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

3. Ta có $FN = DN\left(=\dfrac{1}{2}AC\right)$ mà $FQ = QD$ nên suy ra NQ là đường trung trực của FD

Chứng minh tương tự ta có : IM là đường trung trực của FE; PK là đường trung trực của ED

Suy ra MI, NQ, PK là ba đường trung trực của ΔDFE

mà trong một tam giác ba đường trung trực cùng đi qua một điểm nên các đường thẳng MI, NQ, PK đồng quy.

4. Vẽ $Cx \perp CF$, gọi A' là điểm đối xứng của A qua Cx

Tứ giác $AFCO$ là hình chữ nhật ($\widehat{F} = \widehat{C} = \widehat{O} = 90°$)

$\Rightarrow \widehat{BAA'} = 90°, AA' = 2CF$

AA' có Cx là đường trung trực nên $AC = CA'$

Với ba điểm B, C và A' ta có $BA' \le BC + CA'$

Dấu "=" xảy ra khi $BA' = BC + CA'$, khi đó $AC = CB$

$\Delta ABA'$ vuông tại A có $AB^2 + AA'^2 = BA'^2$ mà $BA' \le BC + CA'$, $AA' = 2CF$ nên suy ra $AB^2 + 4CF^2 \le (BC + CA')^2$

$$\Leftrightarrow AB^2 + 4CF^2 \le (BC + AC)^2$$

$$\Leftrightarrow 4CF^2 \le (BC + AC)^2 - AB^2$$

$$\Leftrightarrow 4c'^2 \le (a+b)^2 - c^2$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $4a'^2 \le (b+c)^2 - a^2$; $4b'^2 \le (a+c)^2 - b^2$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên ta có

$$4\left(a'^2 + b'^2 + c'^2\right) \le (b+c)^2 - a^2 + (a+c)^2 - b^2 + (a+b)^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a'^2 + b'^2 + c'^2\right) \le (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{\left(a'^2 + b'^2 + c'^2\right)} \ge 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $AC = CB = AB$ hay tam giác ABC đều.

Câu 5: *(2 điểm)*

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2}$

Lời giải

Ta có $a + b = 1 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \le 1 \Leftrightarrow ab \le \frac{1}{4}$

$$A = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \frac{1}{2ab} \ge \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{1}{2ab} = \frac{4}{1^2} + \frac{1}{2.\frac{1}{4}} = 4 + 2 = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NÔNG CỐNG

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2019-2020
MÔN: TOÁN 9
Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1(4 điểm) :

Cho biểu thức : $A=1-\left(\dfrac{2}{1+2\sqrt{x}}-\dfrac{5\sqrt{x}}{4x-1}-\dfrac{1}{1-2\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm x để $A>\dfrac{1-2\sqrt{x}}{2}$

Bài 2 (4điểm):

a) Giải phương trình $\dfrac{2x}{x^2-x+1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{5}{3}$
b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases}$

Bài 3(4 điểm):

a) Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
b) Cho $A=n^6-n^4-n^2+1$ với n lẻ . Chứng minh : $A \vdots 128$

Bài 4(6 điểm)

Cho đường thẳng d và điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng d. H là hình chiếu vuông góc của A xuống d. Hai điểm B,C thay đổi trên d sao cho $\widehat{BAC}=90°$. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H xuống AB,AC. Chứng minh rằng:

a) $AE.AB=AF.AC$
b) EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH
c) Cho đường tròn tâm O đi qua 4 điểm B,E,F,C và đường tròn tâm O cắt đường thẳng AH tại 2 điểm M,N. Chứng minh rằng đường tròn tâm O đi qua 2 điểm cố định.

Bài 5(2 điểm) Cho x,y,z thỏa mãn $x\geq 4; y\geq 5; 6\leq z\leq 7; x^2+y^2+z^2=90$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+y+z$

…………………………………………..Hết…………………………………………………….

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Bài 1(4 điểm) :

Cho biểu thức : $A=1-\left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}}-\frac{5\sqrt{x}}{4x-1}-\frac{1}{1-2\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A>\frac{1-2\sqrt{x}}{2}$

Giải:

a) $A=1-\left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}}-\frac{5\sqrt{x}}{4x-1}-\frac{1}{1-2\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

Với $x\neq 1; x\neq \frac{1}{4}; x\geq 0$ biểu thức A có nghĩa. Ta có:

$A=1-\left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}}-\frac{5\sqrt{x}}{4x-1}-\frac{1}{1-2\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

$=1-\frac{2(2\sqrt{x}-1)-5\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}:\frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2}$

$=1-\frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}:\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1}$

$=1-\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}$

$=\frac{-2}{2\sqrt{x}-1}$

b) Ta có : $A>\frac{1-2\sqrt{x}}{2}\Leftrightarrow\frac{-2}{2\sqrt{x}-1}>\frac{1-2\sqrt{x}}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{(2\sqrt{x}-1)^2-4}{2\sqrt{x}-1}>0\Leftrightarrow\frac{(2\sqrt{x}-1-2)(2\sqrt{x}-1+2)}{2\sqrt{x}-1}>0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-1}>0$

TH1: $\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x}-3>0\\2\sqrt{x}-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{9}{4}\\x>\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{9}{4}$

TH2: $\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x}-3<0\\2\sqrt{x}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq x<\frac{9}{4}\\0\leq x<\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x<\frac{1}{4}$

Vậy $0\leq x<\frac{1}{4}$ hoặc $x>\frac{1}{9}$

Bài 2 (4điểm):

c) Giải phương trình $\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{5}{3}$

d) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases}$

Giải:

a) Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình do đó phương trình tương đương với :

$\frac{2}{x-1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x+1+\frac{1}{x}}=\frac{5}{3}$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ phương trình trở thành:

$$\frac{2}{t-1}-\frac{1}{t+1}=\frac{5}{3}$$
$$=> 5t^2 - 3t - 14 = 0 (t \neq \pm 1)$$
$$<=> (t-2)(5t+7) = 0$$
$$<=> \left[\begin{array}{l} t=2(TM) \\ t=-\frac{7}{5} \end{array}\right.$$

Nếu $t = 2 => x = 1$

Nếu $t = -\frac{7}{5}$(vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x=1

b) $\begin{cases} x^3(2+3y)=1(1) \\ x(y^3-2)=3(2) \end{cases}$ Từ hệ phương trình $=> x \neq 0$. Chia phương trình (1) cho x^3 và phương trình (2) cho x ta được $\begin{cases} (2+3y)=\frac{1}{x^3}(1) \\ (y^3-2)=\frac{3}{x}(2) \end{cases}$ Đặt $\frac{1}{x} = z$. Hệ phương trình đượ viết lại :

$\left[\begin{array}{l} z^3=3y+2 \\ y^3=3z+2 \end{array}\right.$ trừ từng vế của hai phương trình ta được: $(z-y)(z^2+zy+y^2+3)=0$

$$=> z = y => y^3 - 3y - 2 = 0$$

Giải phương trình tìm được $y = -1$ $và$ $y = 2$

Với $y = -1 => x = -1$

Với $y = 2 => x = \frac{1}{2}$

Kết luận: Vậy nghiệm của hệ pương trình là$(x; y) \epsilon \{(-1; -1); \left(\frac{1}{2}; 2\right)\}$

Bài 3(4 điểm):

a) Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

b) Cho $A = n^6 - n^4 - n^2 + 1$ với n lẻ . Chứng minh : $A \vdots 128$

Giải :

a) Gọi độ dài các cạnh là $x; y; z$. Với $1 \le x \le y < z$ với x, y, z nguyên. Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 (1) \\ xy = 2(x+y+z)(2) \end{cases}$$

Từ (1)=> $z^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 4(x+y+z)$

$$=> z^2 + 4z + 4 = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4$$

$$=> (z+2)^2 = (x+y-2)^2. Do\ 1 \le x \le y < z$$

$=> z + 2 = x + y - 2 => z = x + y - 4$ thay vào (2) đưa về phương trình ước số:

$$(x-4)(y-4) = 8$$

$$=> x - 4 = 0\ và\ y - 4\ thuộc\ Ư(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Lại có $-3 \le x - 4 \le y - 4\ do\ 1 \le x \le y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-4=2 \\ y-4=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=8 \\ z=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4=1 \\ y-4=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=12 \\ z=13 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy độ dài 3 cạnh của tam giác là $(5; 12; 13)$ hoặc $(6; 8; 10)$

b) Ta có : $A = n^6 - n^4 - n^2 + 1 = (n^2-1)^2(n^2+1)$
Vì n lẻ => $(n^2-1)^2 = [4k(k+1)\}^2 = 16[k(k+1)]$^2
Do $k(k+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp => $k(k+1) \vdots 2 = [k(k+1)]^2 \vdots 4 =>$ $(n^2-1)^2 \vdots 64$
Lại do n lẻ => $n^2 + 1 \vdots 2$

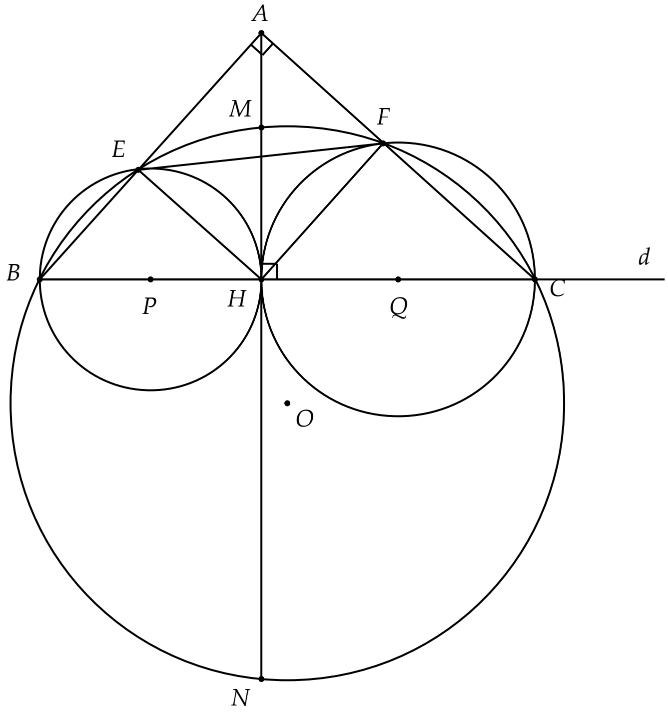
$$=> A \vdots 128$$

Bài 4(6 điểm)

Cho đường thẳng d và điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng d. H là hình chiếu vuông góc của A xuống d . Hai điểm B, C thay đổi trên d sao cho $\widehat{BAC} = 90°$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H xuống AB, AC. Chứng minh rằng:

a) $AE.AB = AF.AC$
b) EF là tuyến tuyến của đường tròn đường kính BH
c) Cho đường tròn tâm O đi qua 4 điểm B, E, F, C và đường tròn tâm O cắt đường thẳng AH tại 2 điểm M, N. Chứng minh rằng đường tròn tâm O đi qua hai điểm cố định.

Giải :



a) ΔABH *vuông tại* H *có đường cao* $HE: AH^2 = AE.AB$

ΔAHC *vuông tạ* H *có đường cao* $HF: AH^2 = AF.AC$

$=> AE.AB = AF.AC (= AH^2)$

b) Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của HB, HC.

Ta có ΔPEH *cân tại* $P => \widehat{HEP} = \widehat{PHE}$

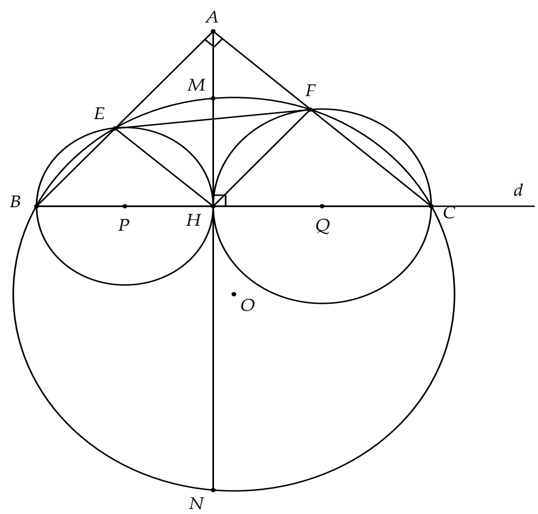
Mà $\widehat{HCF} = \widehat{PHE}$(đồng vị)$=> \widehat{HEP} = \widehat{HCF}$ (1)

Mặt khác AEHF là hình chữ nhật $=> \widehat{HEF} = \widehat{HAF}$ (2)

Cộng (1); (2) vế theo vế $=> \widehat{PEF} = 90°$

Lại có ΔBEH *vuông tại* E có EP là đường trung tuyến $=> EP = BP = PH = \frac{1}{2}BH =>$ $E \in (P)$

=>EF là tiếp tuyến của đường tròn tâm P



c) Ta có :$HM.HN = HB.HC = AH^2(1)$

Mà

$$AH^2 = AE.AB = AM.AN = (AH - HM)(AH + HN) = AH^2 - HM.HN + AH(HN - HM)$$

$=> HN - HM = AH(2)$

Từ (1) và (2)

$$=> \begin{cases} HN - HM = AH \\ HN.HM = AH^2 \end{cases} \Rightarrow HM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{AH}; HN = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AH$$

Vậy (O) luôn đi qua M, N cố định

Bài 5(2 điểm) Cho x, y, z thỏa mãn $x \geq 4; y \geq 5; 6 \leq z \leq 7; x^2 + y^2 + z^2 = 90$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + y + z$

Giải: Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 9 \\ 5 \leq y < 8 \\ 6 \leq z \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)(9-x) \geq 0 \\ (y-5)(8-y) \geq 0 \\ (z-6)(7-z) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{x^2+36}{13} \\ y \geq \dfrac{y^2+40}{13} \\ z \geq \dfrac{z^2+42}{13} \end{cases}$$

$$=> x + y + z \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 118}{13} = \frac{90 + 118}{13} = 16$$

Do $x^2 + y^2 + z^2 = 90$ dấu bằng xảy ra khi $x = 4; y = 5; z = 7$

Vậy GTNN của $A = 16\ khi\ x = 4; y = 5; z = 7$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẢNG TRỊ - NĂM 2019 – 2020

Câu 1: (5,0 *điểm*)

1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{a}{3+a}+\dfrac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\dfrac{3a-1}{a^2-3a}-\dfrac{1}{a}\right)$
2. Tính giá trị của P biết $a+1=\sqrt[4]{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Câu 2: (2,0 *điểm*)

Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a+b=5, ab=1$. Tính giá trị của a^5+b^5

Câu 3: (3,0 *điểm*)

Cho các số nguyên m,n. Chứng minh $mn(mn+1)^2-(m+n)^2mn$ chia hết cho 36.

Câu 4: (4,0 *điểm*)

1. Cho số thực x thỏa mãn $0\le x\le 1$. Chứng minh $x^2\le x$.
2. Cho a,b,c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}$.

Câu 5: (6,0 *điểm*)

1. Cho hình vuông $ABCD$ có E nằm trên đường chéo AC sao cho $AE=3EC$, F trung điểm AD. Chứng minh tam giác BEF vuông cân.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC.

   a) Chứng minh: $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{AB^5}{AC^5}$.

   b) Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABC và diện tích hình chữ nhật $AHEF$. Tìm đặc điểm của tam giác ABC để $\dfrac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUÃNG TRỊ - NĂM 2019 – 2020

Câu 1:

1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\frac{3a-1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$

Lời giải

$$P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\frac{3a-1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{a(3-a)+a^2+9}{9-a^2}:\frac{3a-1-a+3}{a^2-3a}$$

$$=\frac{3a+9}{9-a^2}.\frac{a^2-3a}{2a+2}$$

$$=\frac{3(a+3)}{(3-a)(3+a)}.\frac{a(a-3)}{2a+2}=\frac{-3a}{2a+2}$$

2. Tính giá trị của P biết $a+1=\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Lời giải

$$a+1=\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{9-\left(2\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{1}$$

$$=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|$$

$$=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$$

$$\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow P=\frac{-3.1}{2.1+2}=\frac{-3}{4}$$

Câu 2: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a+b=5, ab=1$. Tính giá trị của a^5+b^5

Lời giải

$$a^5+b^5=(a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)$$

$$=5\left(a^4-a^2+1-b^2+b^4\right)$$

$$=5\left[\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2+1-\left(a^2+b^2\right)\right]$$

$$=5\left[\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2-1\right)-1\right]$$

$$=5\left[(a+b)^2-2ab\right]\left[(a+b)^2-2ab-1\right]-5$$

$$=5(25-2)(25-2-1)-5=2525$$

Câu 3: Cho các số nguyên m,n. Chứng minh $mn(mn+1)^2-(m+n)^2mn$ chia hết cho 36.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}A&=mn(mn+1)^2-(m+n)^2mn\\&=mn\left[(mn+1)^2-(m+n)^2\right]\\&=mn(mn+1+m+n)(mn+1-m-n)\\&=mn\left[m(n+1)+n+1\right]\left[m(n-1)-(n-1)\right]\\&=mn(m+1)(n+1)(n-1)(m-1)\end{aligned}$$

Ta có: $m-1,m,m+1$ là 3 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow (m-1)m(m+1)\vdots 6$ (1)

Ta có: $n-1,n,n+1$ là 3 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow (n-1)n(n+1)\vdots 6$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow A\vdots 36$

Câu 4:

1. Cho số thực x thỏa mãn $0\le x\le 1$. Chứng minh $x^2\le x$.

Lời giải

$$0\le x\le 1\Rightarrow\begin{cases}1-x\ge 0\\x\ge 0\end{cases}\Rightarrow x(1-x)\ge 0\ (1)$$

Giả sử: $x^2>x$

$\Rightarrow x-x^2<0$

$\Rightarrow x(1-x)<0$ (mẫu thuẫn (1))

$\Rightarrow$ Giả sử sai

Vậy $x^2\le x$

2. Cho a,b,c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}$.

Lời giải

Ta có $a,b,c\ge 0$ mà $a+b+c=1\Rightarrow 0\le a,b,c\le 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{5a+4} \geq a+2$

Với $a \in [0;1]$ ta có:

$\sqrt{5a+4} \geq a+2$

$\Leftrightarrow 5a+4 \geq a^2+4a+4$

$\Leftrightarrow a^2-a \leq 0$

$\Leftrightarrow a(a-1) \leq 0$ (đúng)

Cmtt, ta có: $\sqrt{5b+4} \geq b+2, \sqrt{5c+4} \geq c+2$

Suy ra: $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \geq a+2+b+2+c+2=7$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=c=0$ và các hoán vị

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}$ bằng 7.

Câu 5:

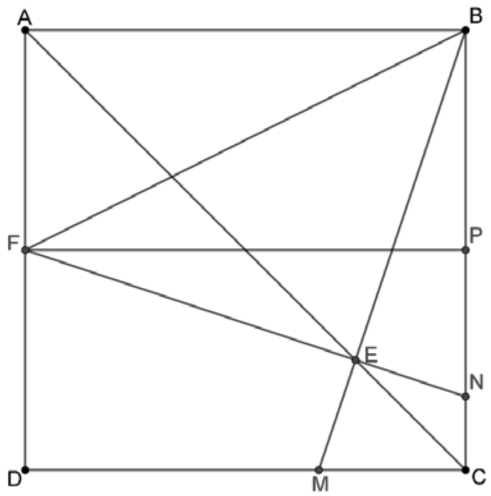
1. Cho hình vuông $ABCD$ có E nằm trên đường chéo AC sao cho $AE=3EC$, F trung điểm AD. Chứng minh tam giác BEF vuông cân.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC.

   a) Chứng minh: $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{AB^5}{AC^5}$.

   b) Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABC và diện tích hình chữ nhật $AHEF$. Tìm đặc điểm của tam giác ABC để $\dfrac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1. Chứng minh tam giác BEF vuông cân.



Vẽ $FP \perp BC \, (P \in BC), BE \cap DC = M, FE \cap BC = N$

Đặt độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là a

Ta có: F là trung điểm AD mà $FP \perp BC$ $\Rightarrow FP = AB = a$

$$AD // BC \Rightarrow \frac{AF}{NC} = \frac{AE}{EC} = 3 \Rightarrow NC = \frac{AF}{3} = \frac{a}{6} \text{ mà } PC = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow NP = \frac{1}{3}a \Rightarrow FN = \sqrt{FP^2 + PN^2} \Rightarrow FN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}a \Rightarrow EF = \frac{\sqrt{10}}{4}a \ (1)$$

$$AB // CD \Rightarrow \frac{AB}{MC} = \frac{AE}{EC} = 3 \Rightarrow MC = \frac{a}{3} \Rightarrow MB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}a \Rightarrow BE = \frac{\sqrt{10}}{4}a \ (2)$$

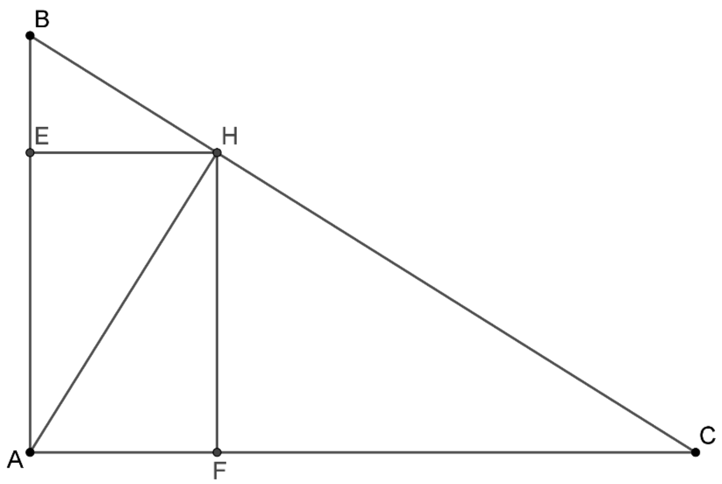
Từ (1), (2) $\Rightarrow BE = EF\left(= \frac{\sqrt{10}}{4}a\right) \Rightarrow \Delta BEF$ cân tại E (3)

Ta có: $\begin{cases} FB^2 = AB^2 + AF^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \\ BE^2 + EF^2 = 2.\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BEF$ vuông tại E (Py – ta – go đảo) (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \Delta BEF$ vuông cân.

2.



a) Chứng minh: $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AB^5}{AC^5}$.

Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{CF}{AC} = HC^2 \Rightarrow CF = AC.HC^2 \\ \dfrac{BE}{AB} = BH^2 \Rightarrow BE = AB.BH^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}.\frac{BH^2}{HC^2} = \frac{AB}{AC}.\frac{\dfrac{AB^4}{BC^2}}{\dfrac{AC^4}{BC^2}} = \frac{AB^5}{AC^5}$$

b) Tìm đặc điểm của tam giác ABC để $\dfrac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{AE.AF}{\frac{1}{2}AB.AC} = 2.\frac{\dfrac{AH^2}{AB}.\dfrac{AH^2}{AC}}{AB.AC} = 2.\frac{AH^4}{AB^2.AC^2} = 2.\frac{AH^2}{BC^2} = 2.\frac{BH}{BC}.\frac{CH}{BC} \le \frac{1}{2}\left(\frac{BH}{BC} + \frac{CH}{BC}\right) = \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BH = CH$ $\Rightarrow$ H là trung điểm BC mà $AH \perp BC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân

Vậy $\dfrac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất khi ΔABC vuông cân.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 HUYỆN NAM ĐÀN - NĂM 2020

Bài 1. *(4,0 điểm)*. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A=\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{2}$.

b) $B=\dfrac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\dfrac{\sqrt{4(x-y)^2x^2}}{x(x-y)}-\dfrac{\sqrt{(x-y)^2y^2}}{y(x-y)}$ (Điều kiện: $x<y<0$).

Bài 2. *(5,0 điểm)*.

a) Tìm số tự nhiên n sao cho các số $2n+2017$ và $n+2019$ đều là các số chính phương.

b) Giải phương trình: $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33$.

c) Chứng minh rằng: $A=n^3+3n^2-n-3$ chia hết cho 48 với n là số tự nhiên lẻ.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

a) Cho a, b là các số dương thoả mãn: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2019}$.

Chứng minh: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2019}+\sqrt{b-2019}$.

b) Cho a, b, c là các số dương thoả mãn: $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$.

Bài 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\Delta AEF\#\Delta DBF$.

b) Tính: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}$ theo k. Biết $k=\dfrac{AH}{HD}$.

c) Chứng minh: $\dfrac{S_{AEF}}{AH^2}=\dfrac{S_{DBF}}{BH^2}=\dfrac{S_{DEC}}{CH^2}$.

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Tính $tan36^\circ$ (không được sử dụng bảng số và máy tính).

---HẾT---

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 HUYỆN NAM ĐÀN - NĂM 2020

Bài 1. *(4,0 điểm)*. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A=\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{2}$.

b) $B=\dfrac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\dfrac{\sqrt{4(x-y)^2x^2}}{x(x-y)}-\dfrac{\sqrt{(x-y)^2y^2}}{y(x-y)}$ (Điều kiện: $x<y<0$).

Lời giải

a) $A=\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}A=\sqrt{14-2\sqrt{13}}-\sqrt{14+2\sqrt{13}}+2$

$$\Rightarrow\sqrt{2}A=\sqrt{\left(\sqrt{13}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{13}+1\right)^2}+2$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}A=\sqrt{13}-1-\sqrt{13}-1+2$$

$\Rightarrow A = 0$.

b) Vì $x < y < 0$ nên $xy > 0$ và $x - y < 0$. Khi đó:

$$B = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{4(x-y)^2x^2}}{x(x-y)} - \frac{\sqrt{(x-y)^2y^2}}{y(x-y)} = \frac{xy}{xy} + \frac{2(y-x)(-x)}{x(x-y)} - \frac{(y-x)(-y)}{y(x-y)}$$

$= 1 + 2 - 1 = 2$.

Bài 2. *(5,0 điểm).*

a) Tìm số tự nhiên n sao cho các số $2n + 2017$ và $n + 2019$ đều là các số chính phương.

b) Giải phương trình: $2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33$.

c) Chứng minh rằng: $A = n^3 + 3n^2 - n - 3$ chia hết cho 48 với n là số tự nhiên lẻ.

Lời giải

a) **Cách 1:** Với $2n + 2017$ và $n + 2019$ là các số chính phương.

Đặt $\begin{cases} 2n + 2017 = a^2 \\ n + 2019 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 2017 = a^2 \\ 2n + 4038 = 2b^2 \end{cases} \Rightarrow 2b^2 - a^2 = 2021 \Rightarrow \left(\sqrt{2}b - a\right)\left(\sqrt{2}b + a\right) = 2021$

.

Ta xét các trường hợp:

+ TH1: $\begin{cases} \sqrt{2}b - a = 43 \\ \sqrt{2}b + a = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{45}{\sqrt{2}} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow n = \dfrac{-2013}{2}$ (loại).

+ TH2: $\begin{cases} \sqrt{2}b - a = 47 \\ \sqrt{2}b + a = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{45}{\sqrt{2}} \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow n = \dfrac{-2013}{2}$ (loại).

+ TH3: $\begin{cases} \sqrt{2}b - a = 2021 \\ \sqrt{2}b + a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1011}{\sqrt{2}} \\ a = -1010 \end{cases} \Rightarrow n = \dfrac{1018083}{2}$ (loại).

+ TH4: $\begin{cases} \sqrt{2}b - a = 1 \\ \sqrt{2}b + a = 2021 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1011}{\sqrt{2}} \\ a = 1011 \end{cases} \Rightarrow n = \dfrac{1018083}{2}$ (loại).

Vậy không tồn tại số tự nhiên n nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} 2n + 2017 = a^2 \\ n + 2019 = b^2 \end{cases} \Rightarrow 2b^2 = a^2 + 2021$ (với $a, b \in \mathbb{N}$).

Ta có $a^2 = 2n + 2017 \Rightarrow a$ là số lẻ. Đặt $a = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Suy ra $2b^2 = (2k+1)^2 + 2021 \Rightarrow b^2 = 2k(k+1) + 1011$. (1)

Ta thấy vế trái của (1) là số chính phương nên chia cho 4 dư 0 hoặc dư 1, vế phải của (1) chia

cho 4 dư 3. Do đó không tồn tại số tự nhiên n nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta thấy: $2x^2 + 3x + 9 > 0, \forall x$.

Phương trình $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9+\sqrt{2x^2+3x+9}=42$

Đặt $t=2x^2+3x+9$ $(t\geq 0)$. Phương trình trở thành: $t^2+t-42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-7 \end{array}\right.$, chọn $t=6$.

Với $t=6 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{-9}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{3;\dfrac{-9}{2}\right\}$.

c) Ta có $A=n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n-1)(n+1)(n+3)$.

Với n là số tự nhiên lẻ $(n-1)(n+1)(n+3)$ là tích của 3 số chẵn liên tiếp nên $A\vdots 8$, $A\vdots 3$; $A\vdots 2$.

Suy ra $A\vdots 48$.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

a) Cho a, b là các số dương thoả mãn: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2019}$.

Chứng minh: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2019}+\sqrt{b-2019}$.

b) Cho a, b, c là các số dương thoả mãn: $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $a\geq 2019$, $b\geq 2019$.

Ta có: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2019} \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b}=2019$.

Khi đó: $\sqrt{a-2019}+\sqrt{b-2019}=\sqrt{a-\dfrac{ab}{a+b}}+\sqrt{b-\dfrac{ab}{a+b}}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a+b}}$

$=\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{a+b}$.

b) Ta có: $\sqrt{a^2+ab+b^2}\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$ (1)

$\sqrt{b^2+bc+c^2}\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$ (2)

$\sqrt{c^2+ca+a^2}\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c+a)$ (3)

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3) ta được: $M\geq \sqrt{3}(a+b+c)=3\sqrt{3}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy GTNN $M=3\sqrt{3}$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Bài 4. *(6,0 điểm)*

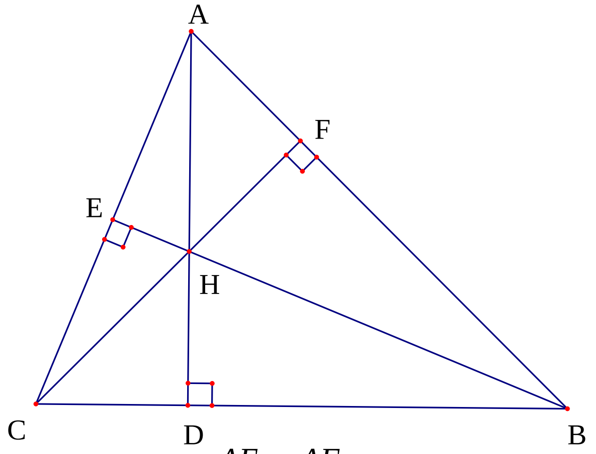
Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\Delta AEF \# \Delta DBF$.

b) Tính: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}$ theo k. Biết $k=\dfrac{AH}{HD}$.

c) Chứng minh: $\dfrac{S_{AEF}}{AH^2}=\dfrac{S_{DBF}}{BH^2}=\dfrac{S_{DEC}}{CH^2}$.

Lời giải



a) Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{A}$ chung; $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$ $(=cosA)$. Suy ra $\Delta AEF \# \Delta ABC$ (c.g.c).

Tương tự cũng có: $\Delta DBF \# \Delta ABC$ (c.g.c).

Do đó: $\Delta AEF \# \Delta DBF$ (đpcm).

b) Ta có: $\widehat{ACB}=\widehat{BHD}$ (cùng phụ với $\widehat{HBD}$).

Suy ra: $tan\widehat{ACB}=tan\widehat{BHD}=\dfrac{BD}{HD}$ (vì ΔBHD vuông tại D);

$tan\widehat{ABC}=\dfrac{AD}{BD}$ (vì ΔABD vuông tại D).

Khi đó: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}=\dfrac{AD}{BD}.\dfrac{BD}{HD}=\dfrac{AD}{HD}$ $\quad(1)$

Mặt khác: $k=\dfrac{AH}{HD}\Rightarrow\dfrac{AH+HD}{HD}=k+1$ hay $\dfrac{AD}{HD}=k+1$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}=k+1$.

c) Ta có: $\Delta AEH \# \Delta BDH$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{AE}{BD}\Rightarrow\dfrac{AH^2}{BH^2}=\dfrac{AE^2}{BD^2}$.

Tương tự: $\dfrac{BH^2}{CH^2}=\dfrac{FB^2}{CE^2}$.

Theo câu a) ta có: $\Delta AEF \# \Delta DBF\Rightarrow\dfrac{S_{AEF}}{S_{DBF}}=\dfrac{AE^2}{BD^2}=\dfrac{AH^2}{BH^2}$.

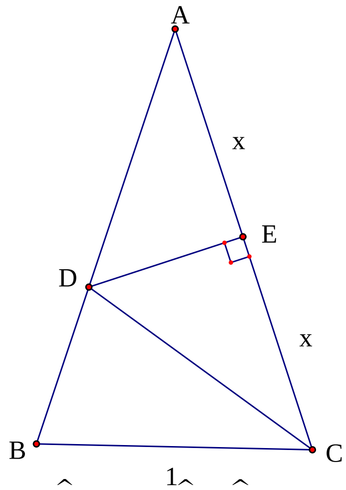
Chứng minh tương tự câu a) ta được: $\Delta DBF \# \Delta DCE\Rightarrow\dfrac{S_{DBF}}{S_{DCE}}=\dfrac{BF^2}{CE^2}=\dfrac{BH^2}{CH^2}$.

Do đó: $\dfrac{S_{AEF}}{S_{DBF}} = \dfrac{AH^2}{BH^2}$; $\dfrac{S_{DBF}}{S_{DCE}} = \dfrac{BH^2}{CH^2}$ $\Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{AH^2} = \dfrac{S_{DBF}}{BH^2} = \dfrac{S_{DEC}}{CH^2}$ (đpcm).

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Tính $tan36^\circ$ (không được sử dụng bảng số và máy tính).

Lời giải



Vẽ ΔABC cân tại A, có $BC = 1$; $\hat{A} = 36^\circ$; $\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$.

Vẽ phân giác CD của góc $C \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại D và ΔDCB cân tại C $\Rightarrow DA = DC = BC = 1$.

Kẻ $DE \perp AC$ tại E.

Đặt $AE = x \Rightarrow EC = x;\ AC = AB = 2x;\ BD = 2x - 1$.

Mặt khác CD là phân giác của góc $C \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{AC}{CB}$ hay $\dfrac{1}{2x-1} = 2x$

$$\Rightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \qquad (*)$$

Nghiệm dương của phương trình $(*)$ là: $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Ta có: $cos36^\circ = \dfrac{x}{AD} = x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Mà $sin^2 36^\circ + cos^2 36^\circ = 1 \Rightarrow sin^2 36^\circ = \dfrac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow sin36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Suy ra $tan36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} : \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$.

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC: 2019 - 2020

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (4,0 điểm)Cho biểu thức $A=\left[\dfrac{x-9}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}\right]:\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x>0; x\neq 1$

Tính giá trị biểu thức khi $x=4\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}\right)$

Bài 2 (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{5x^2+10x}+\sqrt{4x-4x^2}=6x+3$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+y=3xy-9$

Bài 3 (4,0 điểm)

a) Cho $x,y>0$. Tìm GTNN của $P=\dfrac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{xy}(x+y)}$

b) Tìm 2019 số tự nhiên liên tiếp mà trong đó không có số nguyên tố nào?

Bài 4 (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A, B trên CD.

a) Khi OAC là tam giác đều, hãy giải tam giác ABC

b) Chứng minh HC = KD

c) Chứng minh $S_{AHKB}=S_{ABC}+S_{ABD}$

Bài 5 (2,0 điểm) Viết 150 số tự nhiên 1, 2, 3,…, 150 lên bảng. Mỗi lần ta xóa đi hai số nào đó và thay bằng tổng hoặc hiệu của chúng. Sau một số lần như vậy thì trên bảng chỉ còn lại một số. Hỏi có khi nào số đó là 100 không?

---Hết---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên học sinh:………………………………..Trường THCS:………………………………

ĐÁP ÁN

Bài 1 (4,0 điểm)

Ta có:

$$A=\left[\frac{x-9}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}\right]:\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\right]:\left(\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right].\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}=\frac{-3}{\sqrt{x}-1}.\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}=-\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Có:

$$x=4\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9+\frac{125}{27}}}\right)\Leftrightarrow\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9+\frac{125}{27}}}=\frac{x}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^3}{64}=6-\frac{5}{4}x\Leftrightarrow x^3+80x-384=0\Leftrightarrow(x-4)(x^2+4x+96)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=0\\x^2+4x+96=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\(x+2)^2+92=0\,(vn)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4(tm)$$

Thay $x=4$ (tmđk) vào A, ta được: $A=-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}}=-\frac{9}{4}$

Bài 2 (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{5x^2+10x}+\sqrt{4x-4x^2}=6x+3$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+y=3xy-9$

Giải

a) ĐK: $0\le x\le 1$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{5x^2+10x}\ge 0\\b=\sqrt{4x-4x^2}\ge 0\end{cases}\Rightarrow 4a^2+5b^2=60x$. Khi đó Phương trình trở thành:

$$20a+10b=4a^2+5b^2+30\Leftrightarrow(4a^2-20a+25)+(5b^2-10b+5)=0$$

$$\Leftrightarrow(2a-5)^2+5(b-1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\b=1\end{cases}$$

Với $\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\b=1\end{cases}$, ta có:

$$\begin{cases}\frac{5}{2}=\sqrt{5x^2+10x}\\ 1=\sqrt{4x-4x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x^2+10x=\frac{25}{4}\\ 4x-4x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1=\frac{9}{4}\\ (2x-1)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2=\frac{9}{4}\\ 2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\frac{3}{2}(do\,0\le x\le 1)\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(tm)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{2}$

b) Ta có:

$$x+y=3xy-9\Leftrightarrow 3x+3y=9xy+27\Leftrightarrow 3y(1-3x)-(1-3x)=26\Leftrightarrow(1-3x)(3y-1)=26$$

+) TH 1:

$$\begin{cases}3y-1=1\\ 1-3x=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}\\ 1-3x=26\end{cases}\text{ (loại)}$$

+) TH 2:

$$\begin{cases}3y-1=26\\ 1-3x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=9\\ x=0\end{cases}\text{ (tm)}$$

+) TH 3:

$$\begin{cases}3y-1=-1\\ 1-3x=-26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=9\end{cases}\text{ (tm)}$$

+) TH 4:

$$\begin{cases}3y-1=-26\\ 1-3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y-1=-26\\ x=\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}\end{cases}\text{ (loại)}$$

+) TH 5:

$$\begin{cases}3y-1=2\\ 1-3x=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=-4\end{cases}\text{ (tm)}$$

+) TH 6:

$$\begin{cases}3y-1=13\\ 1-3x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y-1=13\\ x=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}\end{cases}\text{ (loại)}$$

+) TH 7:

$$\begin{cases}3y-1=-13\\ 1-3x=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-4\\ x=1\end{cases}\text{ (tm)}$$

+) TH 8:

$\begin{cases} 3y-1=-2 \\ 1-3x=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \\ 1-3x=-13 \end{cases}$ (loại)

Vậy $(x;y) \in \{(0;9);(9;0);(-4;1);(1;-4)\}$

<u>Bài 3</u> (4,0 điểm)

a) Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của $P=\dfrac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{xy}(x+y)}$

b) Tìm 2019 số tự nhiên liên tiếp mà trong đó không có số nguyên tố nào?

Giải

a) Ta có:

$$P=\frac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{xy}(x+y)}=\frac{(x+y)^2-3xy}{\sqrt{xy}(x+y)}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}-\frac{3\sqrt{xy}}{x+y}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương x, y, ta được:

$x+y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$. Khi đó:

$P \ge \dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}-3\dfrac{\frac{x+y}{2}}{x+y} \ge 2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $x=y$.

b) Xét số tự nhiên $A=2.3.4.5...2019.2020$. Khi đó:

A chia hết cho các số: 2; 3; 4; 5; …; 2019; 2020

Xét dãy 2019 số tự nhiên liên tiếp: $A+2; A+3; A+4; A+5;...; A+2019; A+2020$.

Do $A \vdots 2$ nên $A+2 \vdots 2$ mà $A+2>2 \Rightarrow A+2$ là hợp số

Tương tự: Do $A \vdots 3$ nên $A+3 \vdots 3$ mà $A+3>3 \Rightarrow A+3$ là hợp số

Do $A \vdots 4$ nên $A+4 \vdots 4$ mà $A+4>4 \Rightarrow A+4$ là hợp số

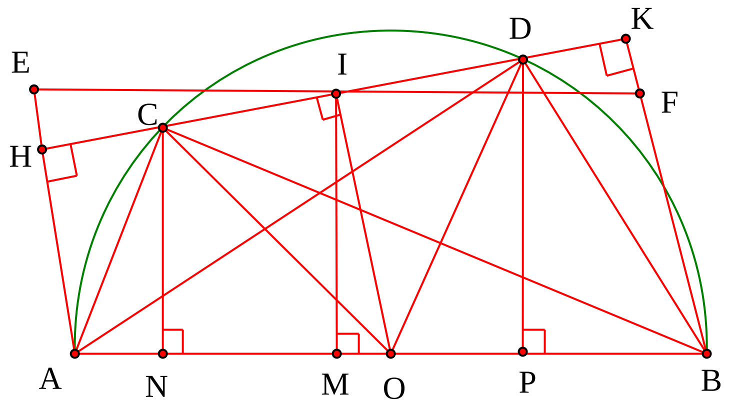
…..

Do $A \vdots 2019$ nên $A+2019 \vdots 2019$ mà $A+2019>2019 \Rightarrow A+2019$ là hợp số

Do $A \vdots 2020$ nên $A+2020 \vdots 2020$ mà $A+2020>2020 \Rightarrow A+2020$ là hợp số

Vậy dãy 2019 số tự nhiên liên tiếp: $A+2; A+3; A+4; A+5;...; A+2019; A+2020$, trong đó không có số nguyên tố nào.

<u>Bài 4</u>



a) Khi ΔAOC đều thì $AC = OA = OC = R = \frac{1}{2}AB$. $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^0 \Rightarrow \widehat{C} = 60^0$

b) Kẻ $OI \perp CD \Rightarrow I$ là trung điểm của CD và $OI//AH//BK$.

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow I$ là trung điểm của $HK \Rightarrow IH = IK; CI = ID \Rightarrow CH = DK$.

c) Kẻ EF đi qua I và song song với $AB(E \in AH, F \in BK)$

$\Rightarrow \Delta EHI = \Delta FKI(\text{ch}-\text{gn}) \Rightarrow S_{AHKB} = S_{AEFB} = IM.AB$

Lại có: $S_{ACB} + S_{ADB} = \frac{1}{2}AB.(CN + DP) = AB.IM$

$\Rightarrow S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$

Bài 5:

Gọi tổng của 150 số ban đầu là $S = 1 + 2 + 3 + ... + 150 = \frac{(1+150).150}{2} = 11325 = S_1 + a + b$

Giả sử xóa đi hai số bất kì a, b và thay bằng $a+b$ hoặc $a-b$ thì ta có tổng mới là: $S_1 + a + b$ hoặc $S_1 + a - b$

Ta có: $(S_1 + a + b) + (S + a + b) = 2S + 2a + 2b$ và $(S_1 + a + b) + (S + a - b) = 2S + 2a$ đều chẵn nên tổng lúc đầu và tổng lúc sau luôn cùng tính chẵn lẻ mà tổng ban đầu là số lẻ nên tổng lúc sau không thể bằng 100.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN NHƯ THANH - NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*) Cho biểu thức: $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$

1. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa và rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 2.
3. Tính giá trị của biểu thức A tại $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Câu 2: (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình ẩn x sau: $\frac{4x}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2-1}=0$.
2. Giải hệ phương trình 2 ẩn x, y:

$$\begin{cases} x^3+xy^2+x^2+2x=y^3+yx^2+y^2+2y \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{y}+\sqrt{4y-x+1}=y^2+x+2y+1 \end{cases}.$$

Câu 3: (*2,0 điểm*)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+4y^2+xy\left(xy+2x-12\right)=8\left(x-2\right)$.
2. Tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho n^2 biểu diễn được thành tổng của một số lẻ các số chính phương liên tiếp.

Câu 4: (*2,0 điểm*)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB bằng $2R$ ($R>0$, R là hằng số). Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, tiếp tuyến này cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD.

1. Tính số đo góc COD; Chứng minh $CD=2OI$ và OI vuông góc với AB.
2. Chứng minh $AC.BD=R^2$.
3. Tìm vị trí điểm M để hình thang $ABDC$ có chu vi nhỏ nhất, khi đó hãy chứng minh diện tích của hình thang này cũng nhỏ nhất.

Câu 5: (*2,0 điểm*)

Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=2018\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\frac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

---HẾT---

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN NHƯ THANH - NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*) Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$

1. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa và rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 2.
3. Tính giá trị của biểu thức A tại $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x\ge 0$; $x\ne 1$.

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\left[\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2.\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2.\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2.\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2.\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}\ .$$

Vậy $A=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$; $x\ne 1$.

2. Ta có $A=2\Rightarrow \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}=2$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0\left(t/m\right)$(vì $\sqrt{x}+1>0$ với $\forall x$)

Vậy $x=0$ thì $A=2$.

3. Ta có : $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$

$\Leftrightarrow x-3=\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3.\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \left[3+3\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\right].\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \left[1+\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\right].\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \left(\sqrt[3]{2}-1\right)+\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2^2}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = 1 \Leftrightarrow x-3=1$

$\Leftrightarrow x = 4\left(t/m\right)$

Thay $x=4$ thỏa mãn ĐKXĐ vào A ta được $A=\dfrac{2}{4+\sqrt{4}+1}=\dfrac{2}{7}$.

Vậy $A=\dfrac{2}{4+\sqrt{4}+1}=\dfrac{2}{7}$ với $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Câu 2: (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình ẩn x sau: $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2-1}=0$.

2. Giải hệ phương trình 2 ẩn x, y:

$$\begin{cases} x^3+xy^2+x^2+2x=y^3+yx^2+y^2+2y \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{y}+\sqrt{4y-x+1}=y^2+x+2y+1 \end{cases}.$$

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x\neq 0$; $x\neq \pm 1$.

$\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\dfrac{3x}{x(x-1)(x+1)}=0$

$\Rightarrow 4x^3+4x^2+2x^2-2+3x=0$

$\Leftrightarrow 4x^3+6x^2+3x-2=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{8}$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{2}$.

2. ĐKXĐ: $\begin{cases} x \le 5 \\ y \ge 0 \\ 4y - x + 1 \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2 + 2x = y^3 + yx^2 + y^2 + 2y & (1) \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{y} + \sqrt{4y-x+1} = y^2 + x + 2y + 1 & (2) \end{cases}$$

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3 - y^3 + xy^2 - yx^2 + x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) - xy(x-y) + (x-y)(x+y) + 2(x-y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+x+y+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right] = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0$ vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > 0 \ \ \forall x, y$

$\Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được

$\sqrt{5-y} + \sqrt{y} + \sqrt{3y+1} = y^2 + 3y + 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5-y} - 2\right) + \left(\sqrt{y} - 1\right) + \left(\sqrt{3y+1} - 2\right) = y^2 + 3y - 4$

$\Leftrightarrow \frac{-(y-1)}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3(y-1)}{\sqrt{3y+1}+2} = (y-1)(y+4)$

$\Leftrightarrow \frac{-(y-1)}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3(y-1)}{\sqrt{3y+1}+2} - (y-1)(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)\left(\frac{-1}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3}{\sqrt{3y+1}+2} - y - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow y - 1 = 0$ (vì $\frac{-1}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3}{\sqrt{3y+1}+2} - y - 4 < 0 \ \ \forall y \ge 0$)

$\Leftrightarrow y = 1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$\Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1;1)$.

Câu 3: (*2,0 điểm*)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4y^2 + xy(xy + 2x - 12) = 8(x-2)$.

2. Tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho n^2 biểu diễn được thành tổng của một số lẻ các số chính phương liên tiếp.

Lời giải

1. Phương trình $2x^2 + 4y^2 + xy(xy + 2x - 12) = 8(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4y^2 + x^2y^2 + 2x^2y - 12xy - 8x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2y^2 + 16 + 2x^2y - 8xy - 8x + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+xy-4)^2+(x-2y)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ x+xy-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y^2+2y-4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=1 \\ x=-4; y=-2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy các cặp số $(2;1)$ và $(-4;2)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2.

+) Xét $n^2=(a-1)^2+a^2+(a+1)^2$, $(a>1)$ (Tổng của 3 số chính phương)

$=3a^2+2$ (Loại vì số dư của số chính phương khi chia cho 3 không thể là 2).

+) Xét $n^2=(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2(a+2)^2$ (Tổng của 5 số chính phương)

$=5a^2+2\left(1^2+2^2\right)$

$=5\left(a^2+2\right)$.

$\Rightarrow n^2 \vdots 5^2 \Rightarrow \left(a^2+2\right)\vdots 5$

Mà a^2 có số dư là 0 hoặc 1 khi chia cho 5 nên $a^2+2 \not\vdots 5$.

+) Xét $n^2=(a-3)^2+(a-2)^2+(a-1)^2+\ldots+(a+3)^2$ (Tổng của 7 số chính phương)

$=7\left(a^2+4\right)$

$\Rightarrow n^2 \vdots 7^2 \Rightarrow a^2+4 \vdots 7$ (Không xảy ra)

+) Xét $n^2=(a-4)^2+(a-3)^2+(a-2)^2+\ldots+(a+4)^2$ (Tổng của 9 số chính phương)

$=9a^2+2.30=3\left(3a^2+20\right)$

$\Rightarrow n^2 \vdots 3^2$ (Vô lí)

+) Xét $n^2=(a-5)^2+(a-4)^2+(a-3)^2+\ldots+(a+5)^2$ (Tổng của 11 số chính phương)

$=11\left(a^2+10\right) \qquad (a>5)$

$\Rightarrow n^2 \vdots 11^2 \Rightarrow a^2+10 \vdots 11$

$\Rightarrow a \equiv 1(\text{mod} 11)$

$\Rightarrow a=11k \pm 1$, $a>5$

Thử với $a \in \{9,12,20,23\}$ chỉ có $a=23$ thỏa mãn

$\Rightarrow n=77$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: (*2,0 điểm*)

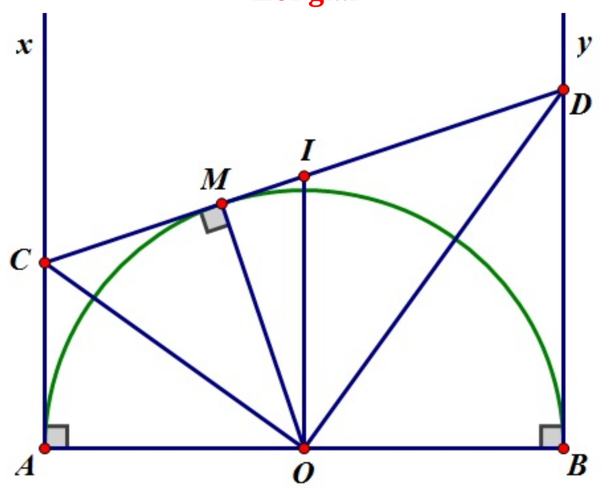
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB bằng $2R$ ($R>0$, R là hằng số). Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, tiếp tuyến này cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD.

1. Tính số đo góc COD; Chứng minh $CD=2OI$ và OI vuông góc với AB.

2. Chứng minh $AC.BD=R^2$.

3. Tìm vị trí điểm M để hình thang $ABDC$ có chu vi nhỏ nhất, khi đó hãy chứng minh diện tích của hình thang này cũng nhỏ nhất.

Lời giải



1. Hai tiếp tuyến CM, CA của (O) cắt nhau tại C $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\widehat{MOA}$.

Tương tự ta cũng có OD là tia phân giác của $\widehat{MOB}$

Mà $\widehat{MOA}+\widehat{MOB}=2\left(\widehat{COM}+\widehat{DOM}\right)=180^\circ \Rightarrow \widehat{COD}=\widehat{COM}+\widehat{DOM}=90^\circ$.

+) Xét ΔCOD có $\widehat{COD}=90^\circ \Rightarrow \Delta COD$ vuông tại O có I là trung điểm của CD

$\Rightarrow OI$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền CD $\Rightarrow CD=2OI$.

+) Xét tứ giác $ABDC$ có $CA//DB$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow ABDC$ là hình thang.

Ta lại có O và I lần lượt là trung điểm của AB, CD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $ABDC$

$\Rightarrow OI//CA \Rightarrow OI\perp AB$. (vì $CA\perp AB(gt)$)

2. Hai tiếp tuyến CM, CA của (O) cắt nhau tại $C \Rightarrow AC=MC$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $BD=MD$ (2)

Xét ΔCOD vuông tại O có $OM\perp CD$

$\Rightarrow OM^2=MC.MD$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

$\Rightarrow MC.MD=R^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AC.BD=R^2$.

3. Chu vi hình thang $ABDC$ là: $C_{ABDC}=AB+BD+CD+AC=AB+2CD$

Vì $AB=2R$ không đổi nên $C_{ABDC}=AB+2CD$ nhỏ nhất khi nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất

Ta có $CD\ge AB=2R \Rightarrow C_{ABDC}=AB+2CD\ge 2R+4R=6R$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $CD=AB$. Khi đó $CD//AB$

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa nửa đường tròn (O) thì chu vi hình thang $ABDC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

+) Khi M là điểm chính giữa nửa đường tròn (O) ta có $CD=AB$ suy ra

$$S_{ABDC}=\frac{(AC+BD).AB}{2}=\frac{CD.AB}{2}=\frac{2R.2R}{2}=4R$$

Vì $S_{ABDC}=\dfrac{CD.AB}{2}$ nên CD nhỏ nhất thì S_{ABDC} nhỏ nhất

Vì M di chuyển trên nửa đường tròn (O) nên $CD\ge AB=2R$

$\Rightarrow S_{ABDC}\ge 4R \Rightarrow MinS_{ABDC}=4R$

$\Rightarrow$ đpcm.

Câu 5: (*2,0 điểm*)

Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=2018\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\frac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Lời giải

Chứng minh $\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)^2\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$VT=\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}+2\left(\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}\right)$$

Ta có $\dfrac{a^4}{b^2}+\dfrac{a^2b}{c}+bc\ge 3a^2$

Tương tự $\dfrac{b^4}{c^2}+\dfrac{b^2c}{a}+ac\ge 3b^2$

$\dfrac{c^4}{a^2}+\dfrac{c^2a}{b}+ab\ge 3c^2$

$\Rightarrow VT+ab+bc+ca\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{a^2b}{c}+\dfrac{b^2c}{a}+\dfrac{c^2a}{b}$ (1)

Mà $\left(\dfrac{a^2b}{c}+\dfrac{b^2c}{a}+\dfrac{c^2a}{b}\right)(bc+ac+ab)\ge (ab+bc+ca)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2b}{c}+\dfrac{b^2c}{a}+\dfrac{c^2a}{b}\ge ab+bc+ca$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow VT \ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Khi đó

$$P \ge 2016\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\Leftrightarrow \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$\ge 2016(a+b+c)+3\sqrt[3]{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.\frac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}$$

$$=2016+3=2019$$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy $Min\,P=2019$ xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN TRIỆU PHONG NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Cho $A = n^4 - 10n^2 + 9$

Với mọi số nguyên n lẻ , chứng minh A chia hết cho 384

2) Tìm các số nguyên a,b thỏa mãn: $\dfrac{5}{a+b\sqrt{2}} - \dfrac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $B = \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} \cdot \left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}\right)$

a) Rút gọn B.

b) So sánh B và $\sqrt{B}$.

Câu 3: *(6,0 điểm)*

1) Biết $x^2 + y^2 = x + y$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $C = x - y$

2) Cho biểu thức $D = \sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}} - \sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}} + \sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{14-5\sqrt{3}}\right)$

Chứng minh D là nghiệm của phương trình $D^2 - 14D + 44 = 0$

3) Cho x,y,z là ba số dương . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a .Gọi I là trung điểm của cạnh AB . Điểm H thuộc cạnh DI sao cho AH vuông góc với DI

1) Chứng minh rằng ΔCHD cân

2) Tính diện tích ΔCHD.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Xác định M nằm trong tam giác ABC sao cho tích các khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác đạt giá trị lớn nhất.

……………….HẾT…………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN TRIỆU PHONG - NĂM HỌC 2019 - 2020

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Cho $A = n^4 - 10n^2 + 9$

Với mọi số nguyên n lẻ , chứng minh A chia hết cho 384

2) Tìm các số nguyên a,b thỏa mãn: $\dfrac{5}{a+b\sqrt{2}} - \dfrac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

Lời giải

1) Ta có $A = n^4 - 10n^2 + 9 = n^4 - n^2 - 9n^2 + 9 = n^2(n^2-1) - 9(n^2-9)$

$$= \left(n^2-1\right)\left(n^2-9\right) = \left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n-3\right)\left(n+3\right)$$

Theo giả thiết n số nguyên lẻ , nên đặt: $n = 2k+1 (k \in N)$, ta viết lại:

$A = \left(2k+2\right).2k.\left(2k+4\right).\left(2k-2\right) = 16(k+1).k(k+2).(k-1)$

Ta nhận thấy rằng: $(k+1), k, (k+2), (k-1)$ là 4 số nguyên liên tiếp nên sẽ chia hết cho $2.3.4 = 24$

$\Rightarrow A \vdots (16.24) = 384$ Với mọi số nguyên n lẻ.

2) ĐK: $a \in Z$, $b \in Z$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $a \neq b\sqrt{2}$

Ta có: $\dfrac{5}{a+b\sqrt{2}} - \dfrac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$, với

$$\Leftrightarrow \frac{5\left(a-b\sqrt{2}\right) - 4\left(a+b\sqrt{2}\right)}{a^2-2b^2} + 18\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow a - 9b\sqrt{2} = \left(3 - 18\sqrt{2}\right)\left(a^2 - 2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a - 9b\sqrt{2} = \left(3a^2 - 6b^2\right) - 18\sqrt{2}\left(a^2 - 2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(18a^2 - 36b^2 - 9b\right)\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

Nếu $18a^2 - 36b^2 - 9b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b}$

Vì a,b nguyên nên $\dfrac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$

$\Rightarrow$ Vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ

Vì thế ta có:

$$18a^2-36b^2-9b=0\Rightarrow\begin{cases}18a^2-36b^2-9b=0\\3a^2-6b^2-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2-6b^2=\dfrac{3}{2}b\\3a^2-6b^2=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}b\\3a^2-6b^2=a\end{cases}$$

thay $a=\dfrac{3b}{2}$ vào $3a^2-6b^2-a=0$, ta có:

$$3.\frac{9}{4}b^2-6b^2-\frac{3}{2}b=0\Leftrightarrow 27b^2-24b^2-6b=0\Leftrightarrow 3b\left(b-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\ \ (loai)\\b=2\ \ (thoa\ man)\end{cases}.$$

Khi $b=2\Rightarrow a=3\ (thoa\ man)$

Vậy $a=3$, $b=2$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $B=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}.\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}\right)$

a) Rút gọn B.

b) So sánh B và $\sqrt{B}$.

Lời giải

a) $x,y>0,x\neq y$.

Ta có : $B=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}.\left(\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)$

$$B=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$$

$$B=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\frac{x+2\sqrt{xy}+y-x-\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$B=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$B=\frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$$

b) Vì $x,y>0 \Rightarrow \sqrt{xy}>0$ và $x-\sqrt{xy}+y=\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2+\frac{3y}{4}>0\ ,\forall x,y>0$

Nên $B>0$ với mọi x,y thỏa mãn điều kiện đã cho

Lại có: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow x+y-\sqrt{xy}\geq\sqrt{xy}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y-\sqrt{xy}}\leq\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x+y-\sqrt{xy}}\leq\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=1$$

Dấu " = " không xảy ra vì $x\neq y$

Vậy $0<B<1$, nên $\sqrt{B}>B$

Câu 3: *(6,0 điểm)*

1) Biết $x^2+y^2=x+y$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $C=x-y$

2) Cho biểu thức $D=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{14-5\sqrt{3}}\right)$

Chứng minh D là nghiệm của phương trình $D^2-14D+44=0$

3) Cho x,y,z là ba số dương . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Lời giải

1) Ta có:

$$C = x - y = x + y - 2y$$
$$= x^2 + y^2 - 2y$$
$$= x^2 + (y-1)^2 - 1 \ge -1$$

Dấu " = " xảy ra $x = 0$, $y = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $C = -1 \Leftrightarrow x = 0; y = -1$

Lại có:

$$C = x - y = 2x - (x + y)$$
$$= 2x - \left(x^2 + y^2\right)$$
$$= -\left(x^2 - 2x + 1\right) - y^2 + 1$$
$$= -(x-1)^2 - y^2 + 1 \le 1$$

Dấu " = " xảy ra $x = 1$, $y = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của $C = 1 \Leftrightarrow x = 1; y = 0$

2) Ta có: $D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}}\right)$

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$$

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{3} + 1 + 5 - \sqrt{3}$$

$D - 6 = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$, với $(D - 6 < 0)$

$$\Leftrightarrow (D-6)^2 = 8 - 2\sqrt{16 - 10 + 2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow (D-6)^2 = 8 - 2\left(\sqrt{5} + 1\right) = 6 - 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (D-6)^2 = \left(\sqrt{5} - 1\right)^2$$

$$\Rightarrow D - 6 = 1 - \sqrt{5} \text{ } hay \text{ } D = 7 - \sqrt{5}$$

Ta có: $D^2 - 14D + 44 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(7 - \sqrt{5}\right)^2 - 14\left(7 - \sqrt{5}\right) + 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow 54 - 14\sqrt{5} - 98 + 14\sqrt{5} + 44 = 0$$

Vậy bài toán được chứng minh

3) Ta có: $x^2+yz\ge 2x\sqrt{yz}\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+yz}\le \dfrac{1}{2x\sqrt{yz}}=\dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}$

Tương tự, ta cũng có: $\dfrac{1}{y^2+zx}\le \dfrac{1}{2y\sqrt{zx}}=\dfrac{\sqrt{zx}}{2xyz}$; $\dfrac{1}{z^2+xy}\le \dfrac{1}{2z\sqrt{xy}}=\dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz}$

Mà: $\sqrt{yz}\le \dfrac{y+z}{2}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}\le \dfrac{\frac{y+z}{2}}{2xyz}=\dfrac{y+z}{4xyz}$

Tương tự, ta có: $\dfrac{\sqrt{zx}}{2xyz}\le \dfrac{z+x}{4xyz}$; $\dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz}\le \dfrac{x+y}{4xyz}$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le \frac{y+z}{4xyz}+\frac{z+x}{4xyz}+\frac{x+y}{4xyz}=\frac{1}{4xyz}(2x+2y+2z)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\ (dpcm)$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Câu 4 :*(4,0 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a .Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Điểm H thuộc cạnh DI sao cho AH vuông góc với DI

1) Chứng minh rằng ΔCHD cân

2) Tính diện tích ΔCHD.

Lời giải

1) Gọi K trung điểm của AD ; E là giao điểm của CK và DI .

Xét ΔADI và ΔDCK có:

$\widehat{CDK}=\widehat{DAI}=90^0\,(gt)$; $CD=AD\,(gt)$; $AI=DK\left(=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{CD}{2}\right)$

Suy ra: $\Delta ADI=\Delta DCK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{DCK}$; mà $\widehat{DCK} + \widehat{DKC} = 90^0$

Suy ra: $\widehat{ADI} + \widehat{DKC} = 90^0$

$\Rightarrow KC \perp DI$ (1)

- Lại có: HK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AD

$\Rightarrow HK = KD$ (2)

Từ (1) va (2) suy ra : KC là đường trung trực của DH

$\Rightarrow CH = CD \Rightarrow \Delta CHD$ cân tại C

2) Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ADI , ta tính được : $DI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADI, đường cao AH ta có:

$$DH.DI = AD^2 \Rightarrow DH = \frac{AD^2}{DI} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$AH.DI = AI.AD \Rightarrow AH = \frac{AI.AD}{DI} = \frac{a^2}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Mà EK là đường trung bình của ΔAHD $\Rightarrow EK = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DKC, đường cao DE ta có:

$$KE.CK = KD^2 \Rightarrow CK = \frac{KD^2}{KE} = \frac{a^2}{4} : \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra: $CE = CK - KE = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Diện tích ΔCHD là: $S_{CHD} = \dfrac{1}{2}CE.DH = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}.\dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{2a^2}{5}$ (đvdt)

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Xác định M nằm trong tam giác ABC sao cho tích các khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Đặt $AB = c, BC = a$, $AC = b$.

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB và đặt MD, ME, MF lần lượt là x, y, z .

Ta có: $S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC} = \dfrac{xa + yb + zc}{2} \geq \dfrac{3\sqrt[3]{xa.yb.zc}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} \geq \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \dfrac{2S_{ABC}}{3\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow xyz \leq \dfrac{8S^3{}_{ABC}}{27abc}$ (luôn là hằng số không đổi)

Vậy tích các khoảng cách từ M đến 3 cạnh của ΔABC đạt GTLN bằng $\dfrac{8S^3{}_{ABC}}{27abc}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow xa = by = cz \Leftrightarrow S_{MAB} = S_{MBC} = S_{MAC}$

Hay : M là trọng tâm của ΔABC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN CHƯ SÊ - NĂM HỌC 2019 – 2020

Câu 1: (*6,0 điểm*)

a) Rút gọn biểu thức: $M=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$.

b) Giải phương trình: $6\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}-(x+1)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x^3+1}}=5$.

Câu 2: (*3,0 điểm*) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x+(m-3)y=1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Câu 3: (*3,0 điểm*) Cho hình vuông $ABCD$ và điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BPC}=135^\circ$. Chứng minh rằng: $2PB^2+PC^2=PA^2$

Câu 4: (*5,0 điểm*) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. M là điểm di động trên đoạn thẳng AB, kẻ $CM\perp AB$ tại M (C thuộc nửa đường tròn tâm O). Gọi D và E là hình chiếu vuông góc của M trên CA và CB. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AM và MB. Xác định vị trí của điểm M để diện tích của tứ giác $DEQP$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: (*3,0 điểm*)

a) Giả sử x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x+y+z+xy+yz+zx=6$. Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2\geq 3$.

b) Chứng minh trong 8 số tự nhiên có 3 chữ số bao giờ cũng chọn hai số mà khi viết liền nhau ta được một số có 6 chữ số chia hết cho 7.

--- HẾT ---

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN CHƯ SÊ - NĂM HỌC 2019 – 2020

Câu 1: (*6,0 điểm*)

a) Rút gọn biểu thức: $M=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$.

b) Giải phương trình: $6\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}-(x+1)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x^3+1}}=5$.

Lời giải

a) $M=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\left(2+\sqrt{3}\right)}}}$

$=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\left(5-\sqrt{3}\right)}}$

$=\sqrt{4+\sqrt{25}}=\sqrt{9}=3$.

b) Điều kiện: $x>-1$.

$6\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}-(x+1)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x^3+1}}=5\Leftrightarrow 6\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=5$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}\left(t>0\right)$. Phương trình trở thành: $6t-\dfrac{1}{t}=5$.

$\Rightarrow 6t^2-5t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=1 & (n)\\ t=\dfrac{-1}{6} & (l)\end{array}\right.$.

Với $t=1\Rightarrow\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2-x+1}{x+1}=1\Rightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\ (n)\\ x=2\ (n)\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0; x=2$.

Câu 2: (*3,0 điểm*) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x+(m-3)y=1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Lời giải

- Với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) không đi qua gốc tọa độ.
- Với $m=4$, ta có đường thẳng $(d): y=1$. Do đó khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1. (1)
- Với $m=3$, ta có đường thẳng $x=-1$. Do đó khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1. (2)

- Với $m \neq 4; m \neq 3$ thì đường thẳng (d) cắt trục $Oy; Ox$ lần lượt tại $A\left(0;\frac{1}{m-3}\right)$ và $\left(\frac{1}{m-4};0\right)$, suy ra $OA=\frac{1}{|m-4|}; OB=\frac{1}{|m-3|}$. Kẻ đường cao $OH \perp AB\left(H \in AB\right)$.

  Ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\left(m-3\right)^2+\left(m-4\right)^2=2m^2-14m+25$

  $$=2\left(m^2-2.m.\frac{7}{2}+\frac{49}{4}\right)+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}.$$

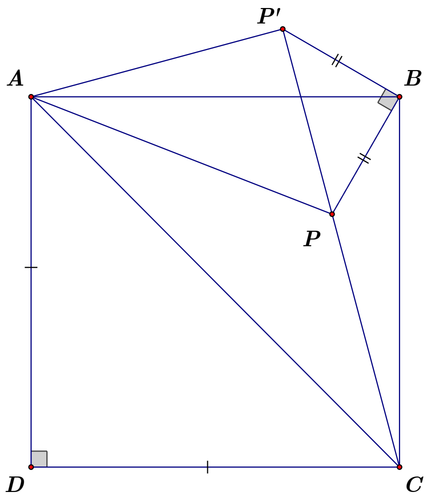
  $\Rightarrow OH^2 \leq 2 \Leftrightarrow OH \leq \sqrt{2}$. (3)

  Từ (1), (2) và (3) suy ra khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $m=\frac{7}{2}$.

Câu 3: (*3,0 điểm*) Cho hình vuông $ABCD$ và điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BPC}=135°$. Chứng minh rằng: $2PB^2+PC^2=PA^2$.

Lời giải

Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB không chứa điểm P, vẽ điểm P' sao cho $\Delta PBP'$ vuông cân tại B. Khi đó



Xét $\Delta AP'B$ và ΔCPB có

- $AB=BC$ (giả thiết);
- $\widehat{ABP'}=\widehat{CBP}$ (cùng phụ với $\widehat{ABP}$;
- $BP'=BP$ (theo cách vẽ).

Suy ra $\Delta AP'B=\Delta CPB$ (cạnh – góc – cạnh).

$\Rightarrow \widehat{AP'B}=\widehat{CPB}$.

Mà $\widehat{CPB}+\widehat{BPP'}=180° \Rightarrow \widehat{AP'B}+\widehat{BPP'}=180°$

$\Leftrightarrow \widehat{AP'P}+\widehat{BP'P}+\widehat{BPP'}=180° \Leftrightarrow \widehat{AP'P}=90°$.

Do đó $\Delta AP'P$ vuông tại P'. Theo định lý Py-ta-go, ta có

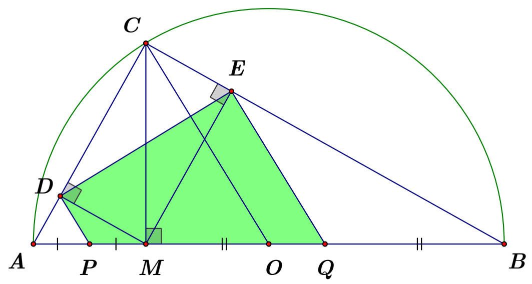
$AP^2=AP'^2+P'P^2=PC^2+\left(BP'^2+BP^2\right)=PC^2+2BP^2$ (do $\triangle AP'B=\triangle CPB$)

Vậy $AP^2=PC^2+2BP^2$.

Câu 4: (*5,0 điểm*) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. M là điểm di động trên đoạn thẳng AB, kẻ $CM \perp AB$ tại M (C thuộc nửa đường tròn tâm O). Gọi D và E là hình chiếu vuông góc của M trên CA và CB. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của

AM và MB. Xác định vị trí của điểm M để diện tích của tứ giác $DEQP$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính AB nên vuông tại C. Từ đó tứ giác $MDCE$ là hình chữ nhật $DE = CM$. Do đó

$S_{\Delta DME} = \frac{1}{2}S_{MDCE}$. (1)

Tam giác ADM có DP là trung tuyến nên

$S_{\Delta DPM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ADM}$. (2)

Tương tự, EQ là trung tuyến của ΔMEB nên $S_{\Delta MEQ} = \frac{1}{2}S_{\Delta MEB}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$S_{PDEQ} = S_{\Delta DPM} + S_{\Delta DME} + S_{\Delta MEQ} = \frac{1}{2}\left(S_{MDCE} + S_{\Delta ADM} + S_{\Delta MEB}\right) = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}.$$

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CM \cdot AB \le \frac{1}{2}CO \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R = R^2$ (khổng đổi).

Suy ra $S_{PDEQ} \le \frac{1}{2}R^2$.

Dấu " = " xảy ra khi $M \equiv O$.

Vậy S_{PDEQ} lớn nhất bằng $\frac{1}{2}R^2$ khi $M \equiv O$.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

a) Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x + y + z + xy + yz + zx = 6$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$.

b) Chứng minh trong 8 số tự nhiên có 3 chữ số bao giờ cũng chọn hai số mà khi viết liền nhau ta được một số có 6 chữ số chia hết cho 7.

Lời giải

a) Ta có $x^2 + 1 \ge 2x$; $y^2 + 1 \ge 2y$; $z^2 + 1 \ge 2z$ và $2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge 2\left(xy + yz + zx\right)$.

Cộng vế theo vế 4 bất đẳng thức trên, ta được

$$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3 \ge 2\left(x + y + z + xy + yz + zx\right).$$

Theo đề bài, ta có $x + y + z + xy + yz + zx = 6$ nên

$$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3 \ge 2.6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 3.$$ (điều phải chứng minh)

b) Lấy 8 số chia cho 7, ta nhận được 8 số dư nhận được 7 trong 7 số sau: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Theo nguyên lý Di-rich-le thì có ít nhất 2 số có cùng số dư.

Giả sử hai số $\overline{abc}$ và $\overline{def}$ là hai số khi chia cho 7 có cùng số dư là r. Suy ra

$$\overline{abc} = 7k + r \text{ và } \overline{def} = 7m + r.$$

Khi đó

$\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1000\left(7k + r\right) + 7m + r = 7\left(1000k + m\right) + 1001r \vdots 7$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN YÊN THÀNH - NĂM 2019-2020

Câu 1: (3.0đ)

1. Tồn tại hay không các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$
2. Tìm giá trị nguyên của x,y thỏa mãn $x^2-4xy+5y^2=2(x-y)$.

Câu 2: (6.0đ)

1. Giải phương trình: $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$
2. Cho a,b,c thỏa mãn $2a+b+c=0$. Chứng minh $2a^3+b^3+c^3=3a(a+b)(c-b)$.

Câu 3: (3.0đ)

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\geq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

Câu 4: (6.0đ)

Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$, Ba đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm EF và AH. Đường thẳng qua I và song song với BC cắt AB, BE lần lượt tại B và Q.

1. Chứng minh: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$.
2. Chứng minh: $IP=IQ$.
3. Gọi M là trung điểm của AH chứng minh I là trực tâm của tam giác BMC.

Câu 5: (2.0đ)

Trong mặt phẳng cho 6 điểm $A_1;A_2;A_3;A_4;A_5;A_6$ trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Với ba điểm bất kỳ trong số 6 điểm này luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng trong sáu điểm đã cho luôn tìm được ba điểm là ba đỉnh một tam giác có chu vi nhỏ hơn 2019.

(Hết)

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN YÊN THÀNH - NĂM 2019-2020

Câu 1: (3.0đ)

1. Tồn tại hay không các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$
2. Tìm giá trị nguyên của x,y thỏa mãn $x^2-4xy+5y^2=2(x-y)$.

Lời giải

1. Giả sử tồn tại 3 số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điêu kiện: $a^b+2011=c$

Khi đó ta có: $c>2011 \Rightarrow c$ là số nguyên tố lẽ.

$$\Rightarrow a^b \text{ chẵn}$$

$$\Rightarrow a=2$$

Nếu $b=2$ thì $c=2^2+2011=2015\vdots 5 \Rightarrow c$ là hợp số (trái với giả thiết)

Nếu $b\ge 3$ thì là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow b=2k+3$ (với $k\in N$)

$$\Rightarrow a^b=2^{2k+3}=2^{2k}.2^3$$

Vì $2^{2k}\equiv 1(\bmod 3)$ và $2^3\equiv -1(\bmod 3)$

$$\Rightarrow a^b=2^{2k}.2^3\equiv -1(\bmod 3)$$

Lại có: $2011\equiv 1(\bmod 3)$

$\Rightarrow c=a^b+2011\equiv 0(\bmod 3)\Rightarrow c$ là hợp số (trái với giả thiết)

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$

2. Ta có : $x^2-4xy+5y^2=2(x-y)$

$$\Leftrightarrow (4y^2+x^2+1-4xy-2x+4y)+(y^2-2y+1)=2$$

$$\Leftrightarrow (2y-x+1)^2+(y-1)^2=1^2+1^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2y-x+1)^2=1^2\\(y-1)^2=1^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y-x+1=\pm 1\\y-1=\pm 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2y-x+1=1\\y-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}2y-x+1=-1\\y-1=-1\end{cases}\\ \begin{cases}2y-x+1=-1\\y-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}2y-x+1=1\\y-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $(x;y)\in\{(4;2);(2;0);(6;2);(0;0);\}$

Câu 2: (6.0đ)

1. Giải phương trình: $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$
2. Cho a,b,c thỏa mãn $2a+b+c=0$. Chứng minh $2a^3+b^3+c^3=3a(a+b)(c-b)$.

Lời giải

1. ĐKXĐ của phương trình là: $x\in\mathbb{R}$

Ta có: $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$

$$\Leftrightarrow 40x^2+12x+4=4(6x+1)\sqrt{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow (36x^2+12x+1)-4(6x+1)\sqrt{x^2+3}+4(x^2+3)-9=0$$

$$\Leftrightarrow (6x+1)^2-2.(6x+1).2\sqrt{x^2+3}+\left(2\sqrt{x^2+3}\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow \left(6x+1-2\sqrt{x^2+3}\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x+1-2\sqrt{x^2+3}=3\\ 6x+1-2\sqrt{x^2+3}=-3\end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $6x+1-2\sqrt{x^2+3}=3\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}=6x-2\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=3x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3\ge 0\\ x^2+3=9x^2-6x+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{3}\\ 4x^2-3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ 4x+1=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

* Trường hợp 2: $6x+1-2\sqrt{x^2+3}=-3\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}=6x+4\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=3x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2\ge 0\\ x^2+3=9x^2+12x+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{-2}{3}\\ 8x^2+12x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{-2}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}\\ x=\dfrac{-3-\sqrt{7}}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x=1$ và $x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}$.

2. Ta có: $2a+b+c=0\Rightarrow a+b=-(a+c)$

$\Rightarrow (a+b)^3=-(a+c)^3$

+

$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a(ac+c^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a\left[c(a+c)+b(a+b)\right]$

$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a\left[-c(a+b)+b(a+b)\right]$ (Vì $a+b=-(a+c)$)

$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=-3a(a+b)(b-c)$

$\Rightarrow 2a^3+b^3+c^3=3a(a+b)(c-b)$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-Sy cho hai số dương ta có:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a^2(b+c)}.\frac{b+c}{4bc}}=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{a^2(b+c)}\geq \frac{1}{a}-\frac{1}{4b}-\frac{1}{4c} \qquad (1)$$

Tương tự: $\frac{ca}{b^2(c+a)}\geq \frac{1}{b}-\frac{1}{4c}-\frac{1}{4a}$ (2)

$$\frac{ab}{c^2(a+b)}\geq \frac{1}{c}-\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b} \qquad (3)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\Rightarrow \frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\geq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}.$$

Câu 4: (6.0đ)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$, Ba đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm EF và AH. Đường thẳng qua I và song song với BC cắt AB, BE lần lượt tại **B** và Q.

1/ Chứng minh: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$.

2/ Chứng minh: $IP=IQ$.

3/ Gọi M là trung điểm của AH, chứng minh I là trực tâm của tam giác BMC.

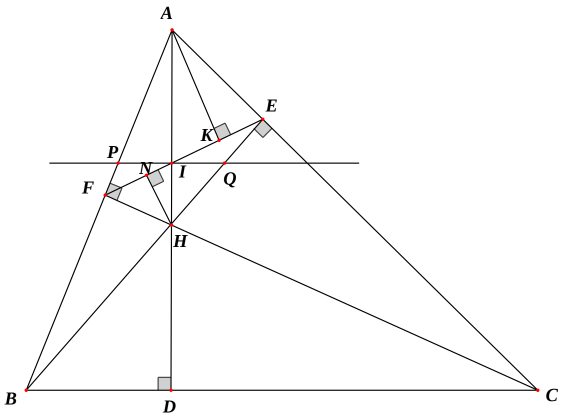
Lời giải

1. Chứng minh: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

Ta có: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC\ (g-g) \Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$ (1)

Xét ΔAEF và ΔABC có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{EAF}=\widehat{BAC}\,(\text{góc chung})\\ \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}\ (1)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC\ (c-g-c)$$



2. Kẻ AK và HN vuông góc với EF ($K; N\in$ EF)

Ta có: $AK//HN$ (cùng vuông góc với EF)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IH}=\frac{AK}{HN}=\frac{\frac{1}{2}AK.\text{EF}}{\frac{1}{2}HN.\text{EF}}=\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta HEF}} \qquad (1)$$

Lại có: $\frac{AD}{HD}=\frac{\frac{1}{2}AD.BC}{\frac{1}{2}HD.\text{BC}}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}}$ (2)

Mặt khác: $\Delta EHC \backsim \Delta FHB\,(g-g) \Rightarrow \frac{HE}{HC}=\frac{HF}{HB} \Rightarrow \frac{HE}{HF}=\frac{HC}{HB}$

$\Rightarrow \Delta\text{HEF} \backsim \Delta\text{HCB}\,(\text{c}-\text{g}-\text{c}) \Rightarrow \frac{\text{S}_{\Delta\text{HEF}}}{\text{S}_{\Delta\text{HCB}}}=\left(\frac{\text{EF}}{\text{BC}}\right)^2$

Và $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (câu a) $\Rightarrow \frac{S_{\Delta\text{AEF}}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{\text{EF}}{BC}\right)^2$

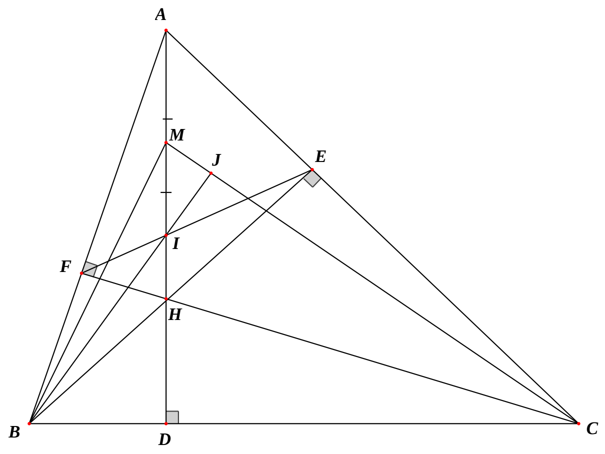
$\Rightarrow \frac{S_{\Delta HEF}}{S_{\Delta HCB}}=\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{\text{EF}}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta HEF}}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{IA}{IH}=\frac{AD}{HD} \Rightarrow \frac{AI}{AD}=\frac{HI}{HD}$ (*)

Vì $PQ//BC$ nên áp dụng quan hệ định lý Ta-Lét ta có: $\frac{\text{IP}}{\text{DB}}=\frac{\text{AI}}{\text{AD}}$ và $\frac{\text{IQ}}{\text{DB}}=\frac{\text{HI}}{\text{HD}}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \frac{\text{IP}}{\text{DB}}=\frac{\text{IQ}}{\text{DB}} \Rightarrow \text{IP}=\text{IQ}$

3. Ta có: $\frac{AI}{AD}=\frac{HI}{HD}$ (câu b) $\Rightarrow \frac{HI}{HD}=\frac{HI+AI}{HD+AD}$



Vì M là trung điểm của $AH \Rightarrow HI+AI=AH=2MA$

Và $HD+AD=AH+2HD=2MH+2HD=2MD$

$\Rightarrow \frac{HI}{HD}=\frac{2MA}{2MD}=\frac{MA}{MD} \Rightarrow \frac{HI}{HD}+1=\frac{MA}{MD}+1$

$\Rightarrow \frac{ID}{HD}=\frac{AD}{MD} \Rightarrow ID.MD=AD.HD$ (1)

Lại có:

$\Delta\text{DHB} \backsim \Delta\text{DCA}\,(\text{g}-\text{g}) \Rightarrow \frac{\text{DH}}{\text{DC}}=\frac{\text{DB}}{\text{DA}} \Rightarrow \text{DB.CD}=\text{AD.HD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \text{ID.MD}=\text{BD.CD} \Rightarrow \frac{\text{ID}}{\text{BD}}=\frac{\text{CD}}{\text{MD}}$

$\Rightarrow \Delta DIB \backsim \Delta DCM\,(c-g-c) \Rightarrow \widehat{DIB}=\widehat{DCM}=\widehat{BCJ}$

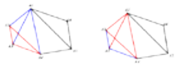
$\Rightarrow \widehat{BCJ}+\widehat{CBJ}=\widehat{DIB}+\widehat{DBI}=90^0 \Rightarrow BJ \perp MC$

Mặt khác: $MD \perp BC$

Mà BJ cắt MD tại I suy ra I là trực tâm của ΔBMC.

Câu 5: (2.0đ)

Trong mặt phẳng cho 6 điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6$ trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Với ba điểm bất kỳ trong số 6 điểm này luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng trong sáu điểm đã cho luôn tìm được ba điểm là ba đỉnh một tam giác có chu vi nhỏ hơn 2019.



Xanh

Xanh

Xanh

Đỏ

Đỏ

Đỏ

Đỏ

Đỏ

Xanh

Đỏ

Đỏ

Xanh

Lời giải

-Tổng số đoạn thẳng được sinh ra từ 6 điểm đã cho là: $5+4+3+2+1=15$ (đoạn thẳng)

- Trong 15 đoạn thẳng trên các đoạn thẳng A_mA_n (với $m;n \in \{1;2;3;4;5;6\}$; 6}) có độ dài nhỏ hơn 673 được tô bởi mà đỏ. Các đoạn thẳng còn lại được tô bởi màu xanh.

- Khi đó, trong một tam giác bất kì luôn tồn tại một cạnh màu đỏ và các tam giác có 3 cạnh được tô cùng màu đỏ có chu vi nhỏ hơn 2019.

- Vì thế, ta chỉ cần chứng minh luôn tồn tại một tam giác có 3 cạnh đều là màu đỏ.

- Thật vậy: Nối điểm A_1 với 5 điểm còn lại ta được 5 đoạn thẳng gồm

A_1A_2 ; A_1A_3 ; A_1A_4 ; A_1A_5 ; A_1A_6

- Theo nguyên lí Dirichlet trong 5 đoạn thẳng này luôn tồn tại 3 đoạn thẳng được tô cùng màu.

- Không mất tính tổng quát, Giả sử A_1A_2; A_1A_3; A_1A_4 có cùng màu xanh, khi đó tam giác $A_2A_3A_4$ có 3 cạnh được tô cùng màu đỏ (vì trong một tam giác bất kì luôn tồn tại một cạnh màu đỏ)

- Nếu 3 đoạn thẳng A_1A_2; A_1A_3; A_1A_4 có cùng màu đỏ, khi đó tam giác $A_2A_3A_4$ có một cạnh được tô bởi màu đỏ (trong một tam giác bất kì luôn tồn tại một cạnh màu đỏ). Giả sử cạnh A_2A_4 được tô bởi màu đỏ, Ta có tam giác $A_1A_2A_3$ có 3 cạnh được tô cùng màu đỏ.

- Bài toán được chứng minh.

(Hết)

PHÒNG GD&ĐT ĐAN PHƯỢNG

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2018 -2019
MÔN: TOÁN
Ngày thi: *23/10/2018*
Thời gian làm bài: *150 phút*

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 1 *(5,0 điểm).*

1. Cho biểu thức: $P=\dfrac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

2. Cho $a=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{64}{\left(a^2-3\right)^3}-3a$ là số nguyên

Bài 2 *(4,0 điểm).*

1. Giải phương trình : $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}\left(1-x\right)$.

2. Nhà toán học De Morgan (1806 – 1871) khi được hỏi tuổi đã trả lời: Tôi x tuổi vào năm x^2. Hỏi năm x^2 đó ông bao nhiêu tuổi.

3. Tìm số tự nhiên A biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai:

a) $A+51$ là số chính phương.

b) Chữ số tận cùng bên phải của A là số 1.

c) $A-38$ là số chính phương.

Bài 3 *(4,0 điểm).*

a) Tìm x và y biết $2x^2+4x-3y^3+5=0$ và $x^2y^2+2xy+y^2=0$.

b) Tìm các cặp số nguyên *(x;y)* thỏa mãn $x^2y+xy-2x^2-3x+4=0$.

Bài 4 *(6,0 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AH, BI, CK
   a) Chứng minh rằng tam giác AKI đồng dạng với tam giác ACB;
   b) Biết $S_{AKI}=S_{BKH}=S_{CHI}$. Chứng minh rằng: ABC là tam giác đều.
2. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) và đường cao AH bằng $R\sqrt{2}$. Gọi M và N thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh rằng ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Bài 5 *(1,0 điểm).* Với ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$, chứng minh:

$$\frac{1-x^2}{x+yz}+\frac{1-y^2}{y+zx}+\frac{1-z^2}{z+xy}\ge 6.$$

LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG HUYỆN ĐAN PHƯỢNG NĂM HỌC 2018 – 2019

Bài 1 *(5,0 điểm).*

1. Cho biểu thức: $p=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn *P*;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức *P*.

2. Cho $a=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng: $\frac{64}{\left(a^2-3\right)^3}-3a$ là số nguyên.

Lời giải

1a) ĐK: $x\ge 0; x\ne 1$. Ta có:

$$P=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2x-6\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-x+16\sqrt{x}-16}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+16\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$$

b) Ta có $P=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3+\frac{25}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+3+\frac{25}{\sqrt{x}+3}-6$

$$\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+3\right).\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}+3}}-6=10-6=4$$

Vậy MinP = 4 khi x = 4.

2. Từ $a=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\Rightarrow a^3=4+3a\Rightarrow a^3-3a=4$

$$\Rightarrow\frac{4}{a^2-3}=a\Rightarrow\frac{64}{\left(a^2-3\right)^3}=a^3$$

$$\Rightarrow\frac{64}{\left(a^2-3\right)^3}-3a=a^3-3a=4.$$

Vậy $\frac{64}{\left(a^2-3\right)^3}-3a$ là số nguyên.

Bài 2 *(4,0 điểm).*

1. Giải phương trình : $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}\left(1-x\right)$.

2. Nhà toán học De Morgan (1806 – 1871) khi được hỏi tuổi đã trả lời: Tôi x tuổi vào năm x^2. Hỏi năm x^2 đó ông bao nhiêu tuổi.

3. Tìm số tự nhiên A biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai:

a) $A+51$ là số chính phương.

b) Chữ số tận cùng bên phải của A là số 1.

c) $A-38$ là số chính phương.

Lời giải

1. ĐKXĐ : $x \geq 1 (*)$

Ta có : $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2\left(x+\sqrt{x-1}\right) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x-1}\right)^2 - 2\left(x+\sqrt{x-1}\right) - 3 = 0$$

Đặt $x+\sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1(KTM) \\ y=3(TM) \end{array}\right.$$

Với y = 3 ta có pt

$$x+\sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

2. Nhà toán học De Morgan sinh năm 1806, ông x tuổi vào năm x^2 nên ta có:
$x^2 - x = 1806\left(x \in N*\right)$

$x(x-1) = 42.43$ mà x và x – 1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên x = 43 $\Rightarrow x^2 = 1849$

Vậy năm 1849 ông De Morgan 43 tuổi.

3. Nếu mệnh đề b) đúng thì A + 51 có chữ số tận cùng là 2 và A – 38 có chữ số tận cùng là 3 nên cả hai số này đều không là số chính phương. Vậy mệnh đề b) sai và các mệnh đề a) và c) đúng.

Giả sử $A+51 = m^2; A-38 = n^2 (m, n \in N; m > n)$

$\Rightarrow m^2 - n^2 = 89$ hay (m – n)(m + n) = 89

Vì 89 là số nguyên tố nên m + n = 89 và m – n = 1 => m = 45 và n = 44 nên A = 1974.

Bài 3 *(4,0 điểm).*

a) Tìm x và y biết $2x^2 + 4x - 3y^3 + 5 = 0$ và $x^2y^2 + 2xy + y^2 = 0$.

b) Tìm các cặp số nguyên *(x;y)* thỏa mãn $x^2y + xy - 2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $2x^2+4x-3y^2+5=0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3y^2-3\geq 0 \Rightarrow y^2\geq 1 \Rightarrow y\geq 1$ (1)

Mặt khác: $x^2y^2+2x+y^2=0 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{-2x}{x^2+1}\leq \dfrac{2|x|}{x^2+1}\leq \dfrac{2|x|}{2|x|.1}=1 \Rightarrow -1\leq y\leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $y = 1 \Rightarrow x = -1$. Vậy x = -1 và y = 1.

b) Phương trình $x^2y+xy-2x^2-3x+4=0 \Leftrightarrow xy(x+1)=2x^2+3x-4$

Vì $x = -1$ không là nghiệm nên ta có $xy=\dfrac{2x^2+3x-4}{x+1}=2x+1-\dfrac{5}{x+1}$

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ suy ra $(x+1)\in\{\pm1;\pm5\} \Rightarrow x\in\{0;-2;4;-6\}$

x = 0 (loại); $x=-2 \Rightarrow y=-1; x=4 \Rightarrow y=2; x=-6 \Rightarrow y=\dfrac{10}{6}$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm là $(-2;-1);(4;2)$

Bài 4 *(6,0 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AH, BI, CK.

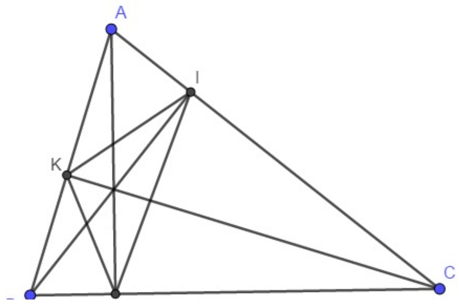
a) Chứng minh rằng tam giác AKI đồng dạng với tam giác ACB;

b) Biết $S_{AKI}=S_{BKH}=S_{CHI}$. Chứng minh rằng: ABC là tam giác đều.

2. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) và đường cao AH bằng $R\sqrt{2}$. Gọi M và N thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh rằng ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Lời giải

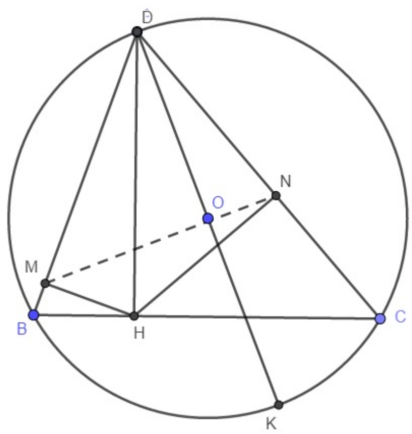
1a) Vẽ hình đúng đến câu a)



C/m tam giác AKC đồng dạng với tam giác AIB suy ra $\dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AI}{AB}$

C/m tam giác AKI đồng dạng với tam giác ACB (cgc)

b) $\dfrac{S_{AIK}}{S_{ABC}}=\dfrac{AI.AK}{AB.AC}=\cos^2 A$



Tương tự $\dfrac{S_{BHK}}{S_{ABC}}=\cos^2 B$

$\dfrac{S_{CHI}}{S_{ABC}}=\cos^2 C$

Mà $S_{AKI}=S_{BKH}=S_{CHI}$ nên

$\cos^2 A=\cos^2 B=\cos^2 C \Rightarrow \widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

2. Vẽ hình đúng

Vẽ đường kính AK của đường tròn $(O;R)$

C/m $AN.AC = AH^2 = 2R^2$

$\Rightarrow AN.AC = R.2R = AO.AK$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AO} = \dfrac{AK}{AC}$

C/m $\Delta NAO \backsim \Delta KAC$ (c.g.c)$\Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{ACK}$

C/m $\widehat{ACK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{ACK} = 90^\circ$

C/m tương tự

$\widehat{AOM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AON} + \widehat{AOM} = 180^\circ$

nên ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Bài 5 *(1,0 điểm)*. Với ba số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$, chứng minh: $\dfrac{1-x^2}{x+yz} + \dfrac{1-y^2}{y+zx} + \dfrac{1-z^2}{z+xy} \ge 6$.

Lời giải

Vì $x+y+z=1$ nên $1-x^2 = (1-x)(1+x) = (y+z)(2x+y+z)$

$x+yz = x(x+y+z)+yz = (x+y)(x+z)$

Đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x$, với $a,b,c>0$ và $a+b+c=2$.

Khi đó: $\dfrac{1-x^2}{x+yz} = \dfrac{(y+z)(2x+y+z)}{(x+y)(x+z)} = \dfrac{b(a+c)}{ac} = \dfrac{b}{c} + \dfrac{b}{a}$

Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{1-y^2}{y+xz} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$ và $\dfrac{1-z^2}{z+xy} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$

$$\frac{1-x^2}{x+yz} + \frac{1-y^2}{y+xz} + \frac{1-z^2}{z+xy} = \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \ge 6$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$(Trái với giả thiết)

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐIỆN BIÊN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. *(5,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $P=\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1.$

a) Rút gọn biểu thức *P*.

b) Tìm *x* để $Q=\sqrt{x}-P$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=1.$ Tính giá trị biểu thức $x^3+8y^3+2019.$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}.$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-\dfrac{6}{y}=2 \\ 3x-\dfrac{8}{y^3}=-2 \end{cases}$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82.$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn *(O)*. Kẻ các đường cao *BE, CF* của $\triangle ABC$ $(E\in AC, F\in AB)$. Các đường cao *BE, CF* cắt *(O)* lần lượt tại *M* và *N*.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel EF$, $OA\perp EF$.

b) Gọi *H* là trực tâm của $\triangle ABC$ Chứng minh rằng: $CH.CF+BH.BE=BC^2$.

2. Cho điểm *O* thuộc miền trong của tam giác $\triangle ABC$. Các tia *AO, BO, CO* cắt các cạnh *BC, AC* và *AB* lần lượt tại *G, E* và *F*. Chứng minh rằng $\dfrac{OA}{AG}+\dfrac{OB}{BE}+\dfrac{OC}{CF}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm *O*.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng: $P=x^3-3x^2-3x+3$ là một số chính phương khi $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}.$

2. Tìm số nguyên *x*, *y* thỏa mãn: $x^2-2y^2=5.$

----------------------------Hết----------------------------

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐIỆN BIÊN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. *(5,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $P=\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1.$

a) Rút gọn biểu thức *P*.

b) Tìm *x* để $Q=\sqrt{x}-P$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=1.$ Tính giá trị biểu thức $x^3+8y^3+2019.$

Lời giải:

1. ĐKXĐ: $x\ge 0,\ x\ne 1.$

a) Ta có: $P=\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1.$

$$=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{\sqrt{x}(x+1)-(x+1)}\right)-1$$

$$=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{x+1-2}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{x-1}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\right)-1=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right).\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\right)-1$$

$$=\frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-1=\frac{x+1+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có: $Q=\sqrt{x}-P=\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot$

Để $Q\in\mathbb{Z}$ thì $1\vdots\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=1\quad(TM)\\ \sqrt{x+1}=-1(KTM)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0.$

Vậy $x=0\Rightarrow Q\in\mathbb{Z}.$

2. Xét biểu thức: $\sqrt{x^2+1}\geq 1\;\forall\, x.$

Dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi x = 0.

Với x = 0 $\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=1$ (1)

Tương tự: $2y+\sqrt{4y^2+1}=1$ khi $y=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=1\Leftrightarrow x=y=0.$

Với $x=y=0\Rightarrow x^3+8y^3+2019=2019.$

Vậy $x^3+8y^3+2019=2019.$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}.$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-\dfrac{6}{y}=2\\ 3x-\dfrac{8}{y^3}=-2\end{cases}$

Lời giải:

1. ĐKXĐ: $x\geq -3.$

Đặt: $t=\sqrt{x+3}$ $(t\geq 0).$

$\Rightarrow 2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}\Leftrightarrow 2x^2+t^2-3xt=0\Leftrightarrow t^2-3xt+2x^2=0.$

$\Delta = (-3x)^2 - 4.1.2x^2 = 9x^2 - 8x^2 = x^2.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{3x+x}{2} = 2x. \\ t_2 = \dfrac{3x-x}{2} = x. \end{array}\right.$$

Với $t_1 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x \Leftrightarrow x+3 = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & (TM) \\ x = -\dfrac{3}{4} & (KTM) \end{array}\right.$

Với $t_2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = x \Leftrightarrow x+3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} & (TM) \\ x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} & (KTM) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{1; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

2. ĐKXĐ: $y \neq 0.$

Đặt: $\left\{\begin{array}{l} x = u \\ \dfrac{1}{y} = v \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 - \dfrac{6}{y} = 2 \\ 3x - \dfrac{8}{y^3} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} u^3 - 6v = 2 & (1) \\ 3u - 8v^3 = -2 & (2) \end{array}\right.$

Lấy (1) + (2) ta được: $u^3 - 6v + 3u - 8v^3 = 0 \Leftrightarrow (u-2v)(u^2 + 2uv + 4v^2) + 3(u-2v) = 0.$

$$\Leftrightarrow (u-2v)(u^2 + 2uv + 4v^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - 2v = 0 \\ u^2 + 2uv + 4v^2 + 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow u - 2v = 0 \ (Do: u^2 + 2uv + 4v^2 + 3 > 0 \, \forall u, v)$$

Với $u = 2v \Leftrightarrow (2v)^3 - 6v = 2 \Leftrightarrow 8v^3 - 6v - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 1 \ ; u = 2 \\ v = \dfrac{-1}{2}; u = -1 \end{array}\right.$

Với $v = 1 \, ; u = 2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right. (TM)$

Với $v = \dfrac{-1}{2}; u = -1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \end{array}\right. (TM)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = (2;1); (-1;-2).$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*).$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82.$

Lời giải:

1. Ta có: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge(a+b)(2ab-ab)=ab(a+b)\ (\forall a,b>0)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Áp dụng ta được: $2\sqrt{2}+1\sqrt{1}=\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{1}\right)^3>\sqrt{2}.\sqrt{1}.\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)=2\sqrt{1}+1\sqrt{2}.$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}.\sqrt{1}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tương tự: $\dfrac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}<\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

....

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

=> đpcm.

2. Ta có: $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$

$=\left(4x^2+9y^2-12xy\right)+x^2+24x-48y+82$

$=[(2x+3y)^2+2.(2x+3y).8+64]+\left(x^2-8x+16\right)+2$

$=(2x+3y+8)^2+(x-4)^2+2\ge2\ (\forall x,y).$

$\Rightarrow A\ge2\ \forall x,y.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=4\\ y=\dfrac{16}{3}\end{cases}$

Vậy $MinA = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{16}{3} \end{cases}$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn *(O)*. Kẻ các đường cao *BE, CF* của $\triangle ABC$ $(E \in AC, F \in AB)$. Các đường cao *BE, CF* cắt *(O)* lần lượt tại *M* và *N*.

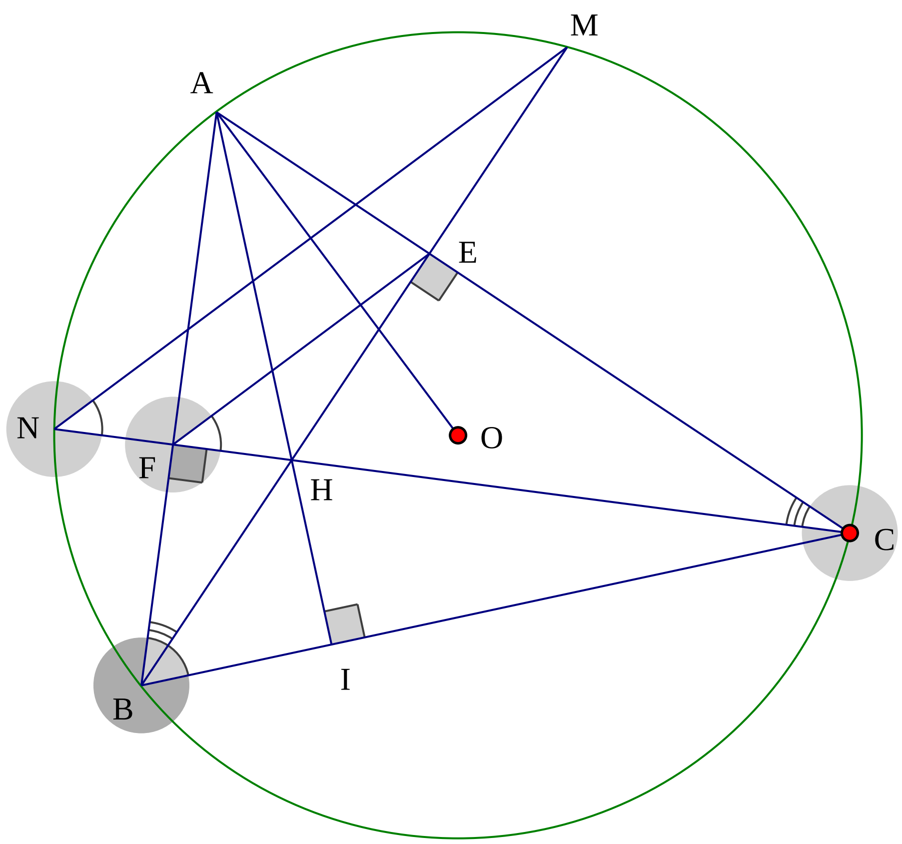
a) Chứng minh rằng $MN \parallel EF, OA \perp EF$.

b) Gọi *H* là trực tâm của $\triangle ABC$ chứng minh rằng: $CH.CF + BH.BE = BC^2$.

2. Cho điểm *O* thuộc miền trong của tam giác $\triangle ABC$. các tia *AO, BO, CO* cắt các cạnh *BC, AC* và *AB* lần lượt tại *G, E* và *F*. Chứng minh rằng $\dfrac{OA}{AG} + \dfrac{OB}{BE} + \dfrac{OC}{CF}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Lời giải:

1.



a) Xét $\square BFEC$ có: $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^\circ$

Mà: $\widehat{BFC}$ và $\widehat{BEC}$ cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông.

$\Rightarrow \square BFEC$ nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{EFC}=\widehat{EBC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$ (Góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Mặt khác: $\widehat{EBC}=\widehat{MNC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MC}$ (Góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MC}$)

$\Rightarrow \widehat{EFC}=\widehat{MNC} \Rightarrow EF\,//\,MN$ (Vì: $\widehat{EFC}$ và $\widehat{MNC}$ đồng vị)

Thấy: $\widehat{EBA}=\widehat{FCA}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{AM} \Rightarrow AN=AM$.

Do: $ON=OM=R\,(gt) \Rightarrow A,O$ cách đều $MN \Rightarrow AO$ là trung trực của MN.

$\Rightarrow AO \perp MN \Rightarrow AO \perp EF$ (Vì: $MN\,//\,EF$)

b) Ta có: $\triangle AFC \backsim \triangle HEC$ $(\widehat{C}\ chung) \Rightarrow \frac{AC}{FC}=\frac{HC}{EC} \Rightarrow CF.CH=AC.EC$ (1)

Tương tự: $\Delta AEB \backsim \Delta HFB$ $(\widehat{B}\ chung) \Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{HB}{BF} \Rightarrow BE.BH=AB.BF$ (2)

$\Delta EBC \backsim \Delta IAC$ $(\widehat{C}\ chung) \Rightarrow \frac{EC}{BC}=\frac{IC}{AC} \Rightarrow BC.IC=AC.EC$ (3)

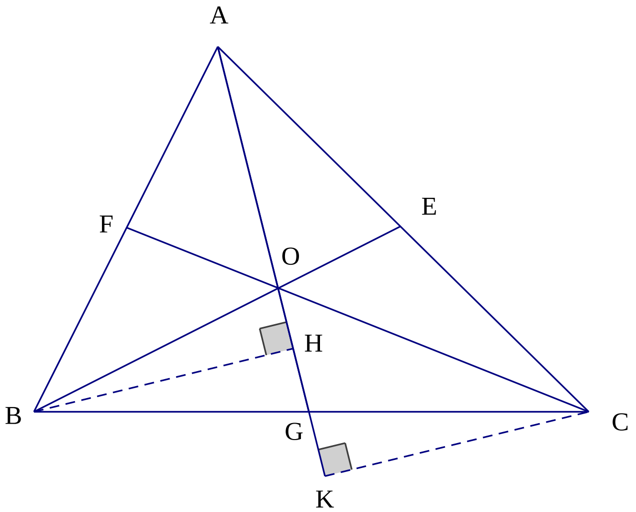
$\Delta FBC \backsim \Delta IBA$ $(\widehat{B}\ chung) \Rightarrow \frac{FB}{BC}=\frac{IB}{BA} \Rightarrow BC.IB=AB.BF$ (4)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow CH.CF=BC.IB$ (5)

Từ (2) và (4) $\Rightarrow BE.BH=BC.IC$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow CF.CH+BE.BH=BC.(IB+IC)=BC^2$ (đpcm)

2.



Ta có: $\dfrac{S_{ABO}}{S_{ABG}}=\dfrac{\frac{1}{2}BH.AO}{\frac{1}{2}BH.AG}=\dfrac{AO}{AG}$ (Chung đường cao BH)

Tương tự: $\dfrac{S_{ACO}}{S_{ACG}}=\dfrac{\frac{1}{2}CK.AO}{\frac{1}{2}CK.AG}=\dfrac{AO}{AG}$ (Chung đường cao CK)

$\Rightarrow \dfrac{AO}{AG}=\dfrac{S_{ABO}}{S_{ABG}}=\dfrac{S_{ACO}}{S_{ACG}}=\dfrac{S_{ABO}+S_{ACO}}{S_{ABG}+S_{ACG}}=\dfrac{S_{ABO}+S_{ACO}}{S_{ABC}}$ (1)

Chứng minh tương tự ta được: $\begin{cases}\dfrac{BO}{BE}=\dfrac{S_{BCO}+S_{BAO}}{S_{ABC}} \ (2)\\ \dfrac{CO}{CF}=\dfrac{S_{CAO}+S_{CBO}}{S_{ABC}} \ (3)\end{cases}$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\dfrac{AO}{AG}+\dfrac{BO}{BE}+\dfrac{CO}{CF}=\dfrac{S_{ABO}+S_{ACO}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{BCO}+S_{BAO}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{CAO}+S_{CBO}}{S_{ABC}}$

$$\dfrac{AO}{AG}+\dfrac{BO}{BE}+\dfrac{CO}{CF}=\dfrac{S_{ABO}+S_{ACO}+S_{BCO}+S_{BAO}+S_{CAO}+S_{CBO}}{S_{ABC}}=\dfrac{2\left(S_{ABO}+S_{ACO}+S_{BCO}\right)}{S_{ABC}}=\dfrac{2S_{ABC}}{S_{ABC}}=2$$

Vậy $\dfrac{AO}{AG}+\dfrac{BO}{BE}+\dfrac{CO}{CF}=2$ nên không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng: $P=x^3-3x^2-3x+3$ là một số chính phương khi $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

2. Tìm số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2-2y^2=5$.

Lời giải:

1. Với $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} \Rightarrow P=\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-3\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2-3\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+3$

$P=1^3+3.1^2.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+3.1.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-3\left(1^2+2.1.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2\right)$

$-3-3.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+3.$

$P=1+3.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)+3.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-3-6.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)-3.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2-3.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$

$P=1+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-3-6.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-6.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)-2$

$P=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-6.\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)-2=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+3.\left(\sqrt[3]{2}\right)^2.\sqrt[3]{4}+3.\sqrt[3]{2}.\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-6.\sqrt[3]{2}-6.\sqrt[3]{4}-2$

$P=2+3.\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+3.2.\sqrt[3]{4}.+4-6.\sqrt[3]{2}-6.\sqrt[3]{4}-2=3.\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+4-6.\sqrt[3]{2}$

$P=3.2.\sqrt[3]{2}+4-6.\sqrt[3]{2}=4=2^2.$

Vậy $P=4=2^2$ là số chính phương khi $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}.$

2. Ta thấy: $2y^2 \vdots 2 \Rightarrow x$ là số lẻ (Vì: $x^2-2y^2=5$)

Đặt: $x=2k+1\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow x^2-2y^2=5 \Leftrightarrow (2k+1)^2-2y^2=5 \Leftrightarrow 4k^2+4k+1=2y^2+5$

$\Leftrightarrow y^2=2k^2+2k-2=2.\left(k^2+k-1\right)$

$\Rightarrow y \vdots 2.$

Đặt: $y=2m\ (m\in\mathbb{Z}) \Rightarrow y^2=2.\left(k^2+k-1\right) \Leftrightarrow (2m)^2=2.\left(k^2+k-1\right)$

$\Leftrightarrow 4m^2=2.\left(k^2+k-1\right) \Leftrightarrow 2m^2=k^2+k-1 \Leftrightarrow 2m^2+1=k.(k+1).$

Do: $2m^2+1$ là số lẻ, còn $k.(k+1)$ là số chẵn (tích 2 số nguyên liên tiếp)

$\Rightarrow 2m^2+1=k.(k+1)$ (KTM). Vậy phương trình vô nghiệm.

----------------------------Hết----------------------------

ĐỀ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

b) Cho $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 9^n+11 là tích của k $(k\in\mathbb{N},k\geq 2)$ số tự nhiên liên tiếp.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

a) Cho $x;y;z$ là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-abc$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh rằng tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

b) Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K,O,S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng $AM=AN$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

---HẾT---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

b) Cho $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Lời giải

a) Phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ (*)

ĐKXĐ: $x\ge 1$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{2-x} \\ b=\sqrt{x-1} \end{cases}$ với $a\le 1,\ b\ge 0$.

$\Rightarrow \begin{cases} a^3=2-x \\ b^2=x-1 \end{cases} \Rightarrow a^3+b^2=1$.

Từ $(*)$ ta có: $a=1-b\ \Rightarrow b=1-a$.

Thay $b=1-a$ vào thệ thức $a^3+b^2=1\Rightarrow\ a^3+(1-a)^2=1\ \Leftrightarrow a^3+a^2-2a+1=1$

$\Leftrightarrow a^3+a^2-2a=0\ \Leftrightarrow a\left(a^2+a-2\right)=0\ \Leftrightarrow a(a+2)(a-1)=0$.

* Nếu $a=0$ (Thỏa mãn) $\Rightarrow b=1$. Ta được $\begin{cases} 2-x=0 \\ x-1=1 \end{cases}\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

* Nếu $a+2=0\Leftrightarrow a=-2\ \Rightarrow b=3$. Ta được $\begin{cases} 2-x=-8 \\ x-1=9 \end{cases}\Leftrightarrow x=10$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

* Nếu $a-1=0\ \Leftrightarrow a=1\ \Rightarrow b=0$. Ta được $\begin{cases} 2-x=1 \\ x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1;2;10\}$.

b) $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$.

Với $n\in\mathbb{N}$ ta có: $1-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$S=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}...\frac{2019.2022}{2020.2021}=\frac{(1.2.3...2019).(4.5.6...2022)}{(2.3.4...2020).(3.4.5...2021)}=\frac{1.2022}{2020.3}=\frac{337}{1010}.$$

Vậy $S=\dfrac{337}{1010}$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 9^n+11 là tích của k $\left(k\in\mathbb{N},k\geq 2\right)$ số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải

a) Ta có: $\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 9\ \Rightarrow 4\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 9$

$\Rightarrow\left[\left(2a-b\right)^2+3b^2\right]\vdots 9$ $\qquad(1)$

Mà $3b^2\vdots 3$nên $\left(2a-b\right)^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $\left(2a-b\right)\vdots 3$.

$\left(2a-b\right)\vdots 3$ nên $\left(2a-b\right)^2\vdots 9$. $\qquad(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2\vdots 9\Rightarrow b^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b\vdots 3$.

$\left(2a-b\right)\vdots 3$ và $b\vdots 3$ $\Rightarrow$ $2a\vdots 3$ mà $\left(2;3\right)=1$ nên $a\vdots 3$.

Vậy cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Ta có tích của từ ba số tự nhiên liên tiếp trở lên thì chia hết cho 3.

Theo đề bài 9^n+11 là tích k số tự nhiên liên tiếp mà 9^n+11không chia hết cho 3 nên $k=2$.

Đặt $9^n+11=a\left(a+1\right)$ với $a$là số nguyên dương.

$9^n+11=a\left(a+1\right)\ \Leftrightarrow 4.9^n+45=4a^2+4a+1$

$\Leftrightarrow\left(2a+1\right)^2-\left(2.3^n\right)^2=45\ \Leftrightarrow\left(2a+1-2.3^n\right)\left(2a+1+2.3^n\right)=45$.

Vì a,n nguyên dương và $2a+1+2.3^n\geq 9$ nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\begin{cases}2a+1-2.3^n=9 & (1)\\ 2a+1+2.3^n=5 & (2)\end{cases}$

Từ(1) và (2) ta có $4a+2=14\ \Leftrightarrow a=3\ \Rightarrow 9^n+11=12\ \Leftrightarrow 9^n=1\ \Leftrightarrow n=0$ (Loại).

Trường hợp 2. $\begin{cases}2a+1-2.3^n=15 & (3)\\ 2a+1+2.3^n=3 & (4)\end{cases}$

Từ (3) và (4) ta có $4a+2=18\ \Leftrightarrow a=4\ \Rightarrow 9^n+11=20\ \Leftrightarrow 9^n=9\ \Leftrightarrow n=1$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 3. $\begin{cases} 2a+1-2.3^n=45 & (5) \\ 2a+1+2.3^n=1 & (6) \end{cases}$

Từ (5) và (6) ta có $4a+2=46 \Leftrightarrow a=11 \Rightarrow 9^n+11=132 \Leftrightarrow 9^n=121 \Leftrightarrow n\in\varnothing$.

Vậy $n=1$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

a) Cho x,y,z là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}, \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-abc$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}>0;\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}>0;\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}>0.$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$36=\left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{4-y}.\frac{1}{\sqrt{4-y}}+\sqrt{y}.\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{4-z}.\frac{1}{\sqrt{4-z}}+\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{4-x}.\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)^2$$

$$\le(x+4-y+y+4-z+z+4-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 36\le 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)\ge 3. \qquad (*)$$

Giả sử ba số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}, \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}, \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ đều nhỏ hơn 1

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)<1+1+1=3$ (Trái với $(*)$)

Do đó trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}, \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}, \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Ta có $2P=2(ab+bc+ca)-2abc$

$=2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2-1$ (Vì $-2abc=a^2+b^2+c^2-1$)

$=(a+b+c)^2-1$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$\Leftrightarrow\ a^2b+2abc+c^2=1-a^2-b^2+a^2b^2$

$\Leftrightarrow (ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2).$

Từ $a^2+b^2+c^2+2abc=1 \Rightarrow a^2<1$, $b^2<1 \ \Rightarrow\ 1-a^2>0$, $1-b^2>0$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $1-a^2, 1-b^2$ ta có:

$$(ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2)\le\left(\frac{2-a^2-b^2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow ab+c\le\frac{2-a^2-b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow c\le\frac{2-(a+b)^2}{2}. \qquad (1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $(a+1)^2$ và 1 ta có:

$$(a+b)^2+1\ge 2.\sqrt{(a+b)^2.1}=2(a+b)$$

$$\Rightarrow a+b\le\frac{(a+b)^2+1}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $a+b+c\le\dfrac{(a+b)^2+1}{2}+\dfrac{2-(a+b)^2}{2}=\dfrac{3}{2}.$

Do đó $2P\le\dfrac{9}{4}-1=\dfrac{5}{4} \Rightarrow P\le\dfrac{5}{8}.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}1-a^2=1-b^2\\(a+b)^2=1\\a^2+b^2+c^2+2abc=1\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{2}.$

Vậy $MaxP=\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{2}.$

Câu 4: *(6,0 điểm)*

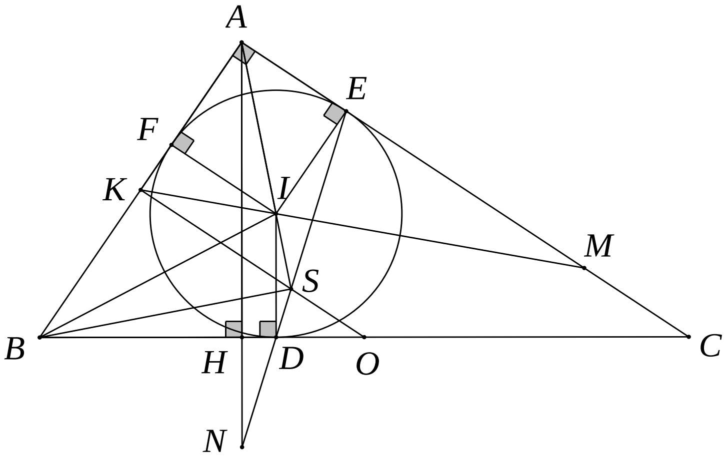
Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh rằng tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

b) Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K, O, S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng $AM = AN$.

Lời giải



a) Ta có AI là tia phân giác của góc BAC nên $\widehat{IAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$,

BI là tia phân giác của góc ABC nên $\widehat{IBA} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.

Theo tính chất tổng ba góc trong ΔAIB ta có:

$\widehat{AIB} = 180° - \left(\widehat{IAB} + \widehat{IBA}\right) = 180° - \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$

$= 180° - \frac{180 - \widehat{C}}{2}$ (Do $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 180° - \widehat{C}$ theo tính chất tổng ba góc của tam giác)

$= 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CE = CD \Rightarrow \Delta CED$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \frac{180° - \widehat{C}}{2}$.

Lại có: $\widehat{AES} = 180° - \widehat{DEC}$ (Hai góc kề bù)

$= 180° - \frac{180° - \widehat{C}}{2} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AES} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{EAS} = \widehat{IAB}$ (Tính chất tia phân giác).

Do đó: $\Delta IAB \# \Delta EAS$ (g - g).

b) Ta có: $\Delta IAB \# \Delta EAS$ $\Rightarrow$ $\widehat{ASE} = \widehat{ABI} = \widehat{IBD}$.

Tứ giác $IBDS$ có $\widehat{IBD} + \widehat{ISD} = \widehat{ASE} + \widehat{ISD} = 180°$ $\Rightarrow$ Tứ giác $IBDS$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ISB} = \widehat{IDB} = 90°$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BI}$ nhỏ) mà $\widehat{IAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45°$ (Tính chất tia phân giác) $\Rightarrow \Delta ASB$ vuông cân tại S.

ΔASB vuông cân tại S có SA là đường trung tuyến nên SA là đường trung trực của AB. $(*)$

Mặt khác ΔABC vuông có AO là trung tuyến nên $OA = OB = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB. $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow$ Ba điểm K, O, S thẳng hàng.

c) Vì AI là tia phân giác của ΔAMK nên $\frac{AK}{AM} = \frac{IK}{IM}$. (1)

IF //AM (Cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{FK}{FA}$ (Định lý Ta lét). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{FK}{FA} \Rightarrow \frac{AK}{FK} = \frac{AM}{AF}$. (3)

Mặt khác ID//AN (Cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \frac{AN}{ID} = \frac{SA}{SI}$ (Hệ quả định lý Ta lét)

mà IF //KS (Cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{SA}{SI} = \frac{AK}{FK}$ nên $\frac{AN}{ID} = \frac{AK}{FK}$. (4)

Từ (3) và (4) ta có $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{ID}$.

Tứ giác $AEIF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AFI} = \widehat{AEI} = 90°$ nên tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AF = EI = ID$.

Ta có $AF = ID$ và $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{ID}$ nên $AM = AN$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

Lời giải

Ta thấy hai ô vuông ở hai góc đối của hình vuông 10×10 là xa nhau nhất.

Gọi các số được điền vào mỗi ô vuông đó lần lượt là $a_1, a_2, a_3, ..., a_{19}$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
									a_{11}
									a_{12}
									a_{13}
									a_{14}
									a_{15}
									a_{16}
									a_{17}
									a_{18}
									a_{19}

Ta có

$\Leftrightarrow -1 < a_1 - a_2 < 1$.

Tương tự ta có:

$-1 < a_2 - a_3 < 1$; $|a_1 - a_2| < 1$

......................;

$-1 < a_{18} - a_{19} < 1$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$-18 < a_1 - a_{19} < 18 \Leftrightarrow |a_1 - a_{19}| < 18$.

Vì $a_1, a_2, a_3, ..., a_{19}$ là các số nguyên nên chỉ có tối đa 19 số nguyên khác nhau được điền vào trong bảng.

Có 100 ô vuông trên bảng nên theo nguyên lý Dirichle thì sẽ có một số xuất hiện trên bảng ít nhất là $\left[\frac{100}{19}\right] + 1 = 6$ (lần).

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN THẠCH HÀ NĂM 2018-2019

Câu 1. *(4,5 điểm)*

1. Tính giá trị biểu thức $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$

2. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M=\frac{2018}{\sqrt{x^2-2x-3}} \qquad N=\frac{-2019}{\sqrt{x-\sqrt{2x+3}}}$$

Câu 2. *(3,0 điểm)*

1. Cho 3 số $a,\ b,c$ khác 0, thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$$

2. Tính giá trị của biểu thức: $B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}$

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1. Cho đa thức $f\left(x\right)$, tìm dư của phép chia $f\left(x\right)$ cho $\left(x-1\right)\left(x+2\right)$. Biết rằng $f\left(x\right)$ chia cho $x-1$ dư 7 và $f\left(x\right)$ chia cho $x+\ 2$ dư 1.

2. Giải phương trình: $x^3-3x^2+2x+6=0$

3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2+y^2=17-2xy$

Câu 4. *(3,0 điểm)* Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

b) $\frac{1}{a+b};\ \frac{1}{b+c};\ \frac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Câu 5. *(5,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AI. Tính $HI,\ IM$; biết rằng $AC=\frac{4}{3}AB$ và diện tích tam giác ABC là $24\ cm^2$.

2. Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh $AC,\ BC$ lần lượt tại E và D; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H. Biết diện tích các tam giác $ODH,\ ONE,\ OMF$ lần lượt là $a^2,\ b^2,c^2$.

a) Tính diện tích S của tam giác ABC theo a,b,c.

b) Chứng minh $S\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

-----------------*Hết*----------------

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN THẠCH HÀ NĂM 2018-2019

Câu 1. *(4,5 điểm)*

1. Tính giá trị biểu thức $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$

2. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M=\frac{2018}{\sqrt{x^2-2x-3}} \qquad N=\frac{-2019}{\sqrt{x-\sqrt{2x+3}}}$$

Lời giải

1. Ta có $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4+\sqrt{15}}\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$

$A=\sqrt{4+\sqrt{15}}.1.\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{8+2\sqrt{15}}.\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=5-3=2$

Điều kiện xác định của M là $x^2-2x-3>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+1<0 \\ x-3<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$$

2. Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ x-\sqrt{2x+3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\sqrt{2x+3}\ge 0 \quad (*)$

$$\Leftrightarrow x^2>2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right. \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $x>3$ là điều kiện xác định của M

Câu 2. *(3,0 điểm)*

1. Cho 3 số $a,\ b,c$ khác 0, thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$$

2. Tính giá trị của biểu thức: $B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}$

Lời giải

1. Ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bc}\right)$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

Vậy $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$

2. Theo câu 1) Ta có $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|$ (*)

Áp dụng (*) ta có:

$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(-2)^2}}=\left|\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{(-2)}\right|=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$ (Vì $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}>0$)

Tượng tự $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$;….

$\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}$

Suy ra: $B=2019-\frac{1}{2019}=\frac{4076360}{2019}$

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1. Cho đa thức $f(x)$, tìm dư của phép chia $f(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. Biết rằng $f(x)$ chia cho $x-1$ dư 7 và $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 1.

2. Giải phương trình: $x^3-3x^2+2x+6=0$

3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2+y^2=17-2xy$

Lời giải

1. Vì $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$ là đa thức bậc 2 nên $f(x):(x-1)(x+2)$ có đa thức dư dạng $ax+b$.

Đặt $f(x)=(x-1)(x+2).q(x)+ax+b$

Theo đề ra: $f(x):(x-1)$ dư 7 $\Rightarrow$ $f(1)=7\Leftrightarrow a+b=7$ (1)

$f(x):(x+2)$ dư 1 $\Rightarrow$ $f(-2)=1\Leftrightarrow -2a+b=1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a=2$ và $b=5$.

Vậy $f(x):[(x-1)(x+2)]$ được dư là $2x+5$.

2. $x^3-3x^2+2x+6=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+6)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ (1) hoặc $x^2-4x+6=0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow x=-1$

(2) $\Leftrightarrow (x-2)^2+2=0$. Do $(x-2)^2+2\neq 0\ \ \forall x$ nên pt này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1\}$.

3. $5x^2+y^2=17-2xy \Leftrightarrow 4x^2+(x+y)^2=17$

$\Rightarrow 4x^2\le 17 \Rightarrow x^2\le \dfrac{17}{4}$ vì x^2 là số chính phương nên $x^2=0;\ 1;\ 4$.

Nếu $x^2=0 \Rightarrow (x+y)^2=17$ (loại)

Nếu $x^2=1 \Rightarrow (x+y)^2=13$ (loại)

Nếu $x^2=4 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-2$

$x=2 \Rightarrow (2+y)^2=1 \Rightarrow y=-3$ hoặc $y=-1$.

$x=-2 \Rightarrow (-2+y)^2=1 \Rightarrow y=3$ hoặc $y=1$.

Vậy phương trình có nghiệm: $(x;y)=(2;\ -3),\ (2;\ -1),\ (-2;\ 3),\ (-2;\ 1)$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$

b) $\dfrac{1}{a+b};\ \dfrac{1}{b+c};\ \dfrac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Lời giải

a) Vì $a,\ b,\ c$ là ba cạnh của một tam giác nên $b+c>a$

$\Leftrightarrow a(b+c)>a^2 \Leftrightarrow a(b+c)+ab+ac>a^2+ab+ac$

$\Leftrightarrow 2a(b+c)>a(a+b+c) \Leftrightarrow \dfrac{a}{b+c}<\dfrac{2a}{a+b+c}$

Tượng tự ta cũng có: $\dfrac{b}{c+a}<\dfrac{2b}{a+b+c}$; $\dfrac{c}{b+a}<\dfrac{2c}{a+b+c}$

Suy ra: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<\dfrac{2a}{a+b+c}+\dfrac{2b}{b+c+a}+\dfrac{2c}{a+b+c}=2$ (đpcm).

b) Ta có $a+b>c$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{1}{b+c+a}+\frac{1}{c+a+b}=\frac{2}{a+b+c}>\frac{2}{(a+b)+(a+b)}=\frac{1}{a+b}$$

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}>\dfrac{1}{b+c}$; $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}>\dfrac{1}{c+a}$

Vậy $\dfrac{1}{a+b};\ \dfrac{1}{b+c};\ \dfrac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác (đpcm)

Câu 5. *(5,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AI. Tính HI, IM; biết rằng $AC=\dfrac{4}{3}AB$ và diện tích tam giác ABC là $24\ cm^2$.

2. Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC, BC lần lượt tại E và D; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H. Biết diện tích các tam giác ODH, ONE, OMF lần lượt là a^2, b^2, c^2.

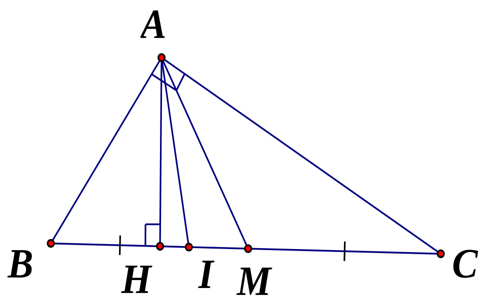
a) Tính diện tích S của tam giác ABC theo a,b,c.

b) Chứng minh $S\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Lời giải

1. Do $AC=\dfrac{3}{4}AB$ (gt) và $AB.AC=2S=48$, suy ra $AC=6(cm)$; $AB=8(cm)$.

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông ABC ta tính được $BC=10\ cm$ suy ra $AM=5(cm)$ (1)



Áp dụng tính chất giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ABC ta tính được

$BH=\dfrac{AB^2}{BC}=3,6(cm)$ (2)

Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ta có

$\dfrac{\text{IB}}{\text{IC}}=\dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}\Rightarrow\dfrac{\text{IB}}{\text{IB}+\text{IC}}=\dfrac{\text{AB}}{\text{AB}+\text{AC}}\Leftrightarrow\dfrac{\text{IB}}{10}=\dfrac{6}{6+8}\Rightarrow\text{IB}=\dfrac{30}{7}\text{cm}$ (3)

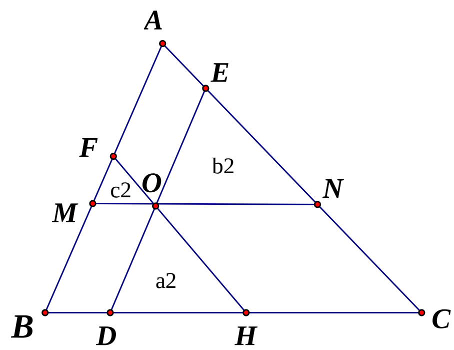
Từ (1), (2) và (3), ta có I nằm giữa B và M; H nằm giữa B và I.

Vậy: $HI=BI-BH=\dfrac{4,8}{7}cm$

$\text{MI}=\text{BM}-\text{BI}=\dfrac{5}{7}\text{cm.}$

2. Ta có các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng với tam giác ABC

Đặt $S_{ABC}=d^2$.



Ta có: $\dfrac{S_{ODH}}{S_{ABC}}=\dfrac{a^2}{d^2}=\left(\dfrac{DH}{BC}\right)^2\Rightarrow\dfrac{a}{d}=\dfrac{DH}{BC}$;

$\dfrac{S_{EON}}{S_{ABC}}=\dfrac{b^2}{d^2}=\left(\dfrac{ON}{BC}\right)^2=\left(\dfrac{HC}{BC}\right)^2\Rightarrow\dfrac{b}{d}=\dfrac{HC}{BC}$;

Tương tự $\dfrac{c}{d}=\dfrac{BD}{BC}$

Suy ra:

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{DH+HC+DB}{BC}=1\Rightarrow d=a+b+c$$

Vậy $S=d^2=(a+b+c)^2$

Áp dụng BĐT Cosy, ta có: $a^2+b^2\ge 2ab;\ b^2+c^2\ge 2bc;\quad a^2+c^2\ge 2ac$

$S=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$S\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=3(a^2+b^2+c^2)$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$, hay O là trọng tâm của tam giác ABC.

=====**HẾT**=====

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN HOÀI NHƠN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Thu gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

b) Cho $x=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$B=\left(1-2x+x^2+x^3-x^4\right)^{2018}$.

c) Cho $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức: $C=x^3+y^3-3(x+y)+2018$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên dương có hai chữ số, biết số đó là bội của tích hai chữ số của chính số đó.

b) Chứng minh rằng số tự nhiên $A=1.2.3....2017.2018.\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2017}+\dfrac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Câu 3: *(5,0 điểm)*

3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $c\ge a$, $c\ge b$ thì $c\ge a+b$.

3.2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $E=x^2+y^2+z^2$.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM=x$ và $AN=y$. Chứng minh rằng:

a) $MN^2=x^2+y^2-xy$.

b) $MN=a-x-y$.

c) MN luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là trực tâm của tam giác ABC và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Tính diện tích của tam giác ABC, biết $OM=OK=\dfrac{KM}{4}$ và $AM=30$ cm.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN HOÀI NHƠN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Thu gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

b) Cho $x=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $B=\left(1-2x+x^2+x^3-x^4\right)^{2018}$.

c) Cho $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức:
$C=x^3+y^3-3(x+y)+2018$.

Lời giải

a) Ta có $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=1+\sqrt{2}.$$

b) Ta có: $x=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-11}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}=\dfrac{2}{\dfrac{2}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-1\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+1\right)}}=\sqrt{2}$. Thay $x=\sqrt{2}$ vào biểu thức, ta được:

$$B=\left[1-2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3-\left(\sqrt{2}\right)^4\right]^{2018}=\left(1-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}-4\right)^{2018}=(-1)^{2018}=1.$$

c) Ta có :

$$x^3=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3=3+2\sqrt{2}+3x+3-2\sqrt{2}=6+3x.$$

$$y^3=\left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}\right)^3=17+12\sqrt{2}+3y+17-12\sqrt{2}=34+3y.$$

Cộng vế theo vế ta được: $x^3+y^3=40+3x+3y \Leftrightarrow x^3+y^3-3(x+y)+2018=2058$.

Vậy $C=2058$ khi $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên dương có hai chữ số, biết số đó là bội của tích hai chữ số của chính số đó.

b) Chứng minh rằng số tự nhiên $A=1.2.3....2017.2018.\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2017}+\dfrac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Lời giải

a) Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, theo đề, ta có $10a+b=kab$. (Trong đó: $1\le a$, $b\le 9$ và a, b, $k\in\mathbb{Z}^+$).

Suy ra $b=\dfrac{10}{\dfrac{ka-1}{a}}=\dfrac{10}{k-\dfrac{1}{a}}$. Vì $1\le b\le 9\Rightarrow 1\le\dfrac{10}{k-\dfrac{1}{a}}\le 9\Leftrightarrow\dfrac{10}{9}\le k-\dfrac{1}{a}\le 10$.

Từ $\begin{cases}\dfrac{10}{9}\le k-\dfrac{1}{a}\le 10\\ 10:k-\dfrac{1}{a}\in\mathbb{Z}^{+}\end{cases}\Rightarrow k-\dfrac{1}{a}\in\left\{\dfrac{5}{3};2;\dfrac{5}{2};5;10\right\}$.

Nếu $k-\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\begin{cases}a(3k-5)=3\\ b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ k=\dfrac{8}{3}\\ b=6\end{cases}$ (không thỏa) hoặc $\begin{cases}a=3\\ k=2\\ b=6\end{cases}$ (thỏa) $\Rightarrow\overline{ab}=36$.

Nếu $k-\dfrac{1}{a}=2\Rightarrow\begin{cases}a(k-2)=1\\ b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ k=3\\ b=5\end{cases}$ (thỏa) $\Rightarrow\overline{ab}=15$.

Nếu $k-\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow 2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ k=\dfrac{7}{2}\\ b=4\end{cases}$ (không thỏa) hoặc $\begin{cases}a=2\\ k=3\\ b=4\end{cases}$ (thỏa) $\Rightarrow\overline{ab}=24$.

Nếu $k-\dfrac{1}{a}=5\Rightarrow\begin{cases}a(k-5)=1\\ b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ k=6\\ b=2\end{cases}$ (thỏa) $\Rightarrow\overline{ab}=12$.

Nếu $k-\dfrac{1}{a}=10\Rightarrow\begin{cases}a(k-10)=1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ k=11\\ b=1\end{cases}$ (thỏa) $\Rightarrow\overline{ab}=11$.

Vậy $\overline{ab}\in\{11;12;15;24;36\}$.

b) Ta có

$B=1.2.3.....n.\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}\right)$ $(*)$ là số tự nhiên. Thật vậy:

Với $n=1$ thì $B=1\in\mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Với $n=2$ thì $B=3\in\mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k$, nghĩa là $B=1.2.3.....k.\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{k}\right)\in\mathbb{N}$.

Cần chứng minh $(*)$ đúng khi $n=k+1$, nghĩa là

$$B=1.2.3.....(k+1).\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{(k+1)}\right)\in\mathbb{N}.$$

Ta có:

$$B=1.2.3.....(k+1).\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{(k+1)}\right)=1.2.3.....\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{k}\right)(k+1)+1.2.3.....k$$

Có $\begin{cases} 1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{N} \\ k+1\in\mathbb{N} \\ 1.2.3.....k\in\mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow B\in\mathbb{N}$.

Vậy $1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ là số tự nhiên.

Suy ra, với $n=2k$ thì $1.2.3.....2k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k}\right)$ và $1.2.3.....k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)$ là các số tự nhiên.

Suy ra $\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)(k+1)(k+2).....2k$ cũng là các số tự nhiên.

Áp dụng các chứng minh ta có: $1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right)$ và

$\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018$ cũng là các số tự nhiên.

Ta có $\begin{cases} 1011 \vdots 3 \\ 1342 \vdots 673 \end{cases} \Rightarrow 1010.1011.....1342.....2018 \vdots 2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right).1010.1011....1342.....2018 \vdots 2019$.

Và $\begin{cases} 3 \vdots 3 \\ 673 \vdots 673 \end{cases} \Rightarrow 1.2.3....673.....1009 \vdots 2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018 : 2019$.

Vậy số tự nhiên $A=1.2.3....2017.2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Câu 3: *(5,0 điểm)*

3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $c\ge a$, $c\ge b$ thì $c\ge a+b$.

3.2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $E=x^2+y^2+z^2$.

Lời giải

a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$

Từ

$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=4(ab+bc+ca)$

.

Mà $ab+bc+ca=9$ nên $(a+b+c)^2=36 \xrightarrow{a,b,c>0} a+b+c=6$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $c\ge a$, $c\ge b$ thì $c\ge a+b$.

Lời giải

Ta có $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \Leftrightarrow (c-a-b)^2=4ab$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $c \ge a \ge b$. Khi đó, ta có:

$$(c-a-b)^2=4ab \ge 4b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-a-b \ge 2b(1) \\ c-a-b \le -2b(2) \end{array}\right..$$

$(1) \Rightarrow c-a-b>0 \Rightarrow c>a+b$

$(2) \Rightarrow c-a-b \le -2b \Leftrightarrow c-a+b \le 0(*)$, mà $c-a \ge 0$ suy ra $(*)$ vô lí.

Vậy nếu $c \ge a$, $c \ge b$ thì $c \ge a+b$.

3.2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $E=x^2+y^2+z^2$.

Lời giải

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có các đánh giá sau:

$x^{2019}+x^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017\text{ so }1} \ge 2019x^2$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x=1$.

$y^{2019}+y^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017\text{ so }1} \ge 2019y^2$. Dấu "$=$" xảy ra khi $y=1$.

$z^{2019}+z^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017\text{ so }1} \ge 2019z^2$. Dấu "$=$" xảy ra khi $z=1$.

Khi đó:

$$6\left(x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}\right)+6051 \ge 2019\left(x^2+y^2+z^2\right) \xrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3} x^2+y^2+z^2 \le 3.$$

Dấu "$=$" xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x=y=z=1$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có các đánh giá sau:

$x^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{672\text{ so }1} \ge 673x^3$; $y^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{672\text{ so }1} \ge 673y^3$ và

$z^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{672\text{ so }1} \ge 673z^3$

$x^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2018\text{ so }1} \ge 2019x$; $y^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2018\text{ so }1} \ge 2019y$ và

$z^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2018\text{ so }1} \ge 2019z$

Khi đó:

$+\ x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}+2016 \ge 673\left(x^3+y^3+z^3\right) \xrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3} x^3+y^3+z^3 \le 3$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $x=y=z=1$.

$+\ x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}+6054 \ge 2019(x+y+z) \xrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3} x+y+z \le 3$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $x=y=z=1$.

Suy ra $6 \ge x^3+x+y^3+y+z^3+z \overset{Cosi}{\ge} 2\left(x^2+y^2+z^2\right) \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 3$.

Dấu “ = ” xảy ra khi $\begin{cases} x^3 = x \\ y^3 = y \\ z^3 = z \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1$.

Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x = y = z = 1$.

Cách 3. (Sử dụng BĐT HOLDER)

Áp dụng bất đẳng thức HOLDER, ta có

$$\left(x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}\right)\left(x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}\right)3^{2017} \geq \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2019}$$

$$\xleftrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3} 3^{2019} \geq \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2019} \to 3 \geq x^2+y^2+z^2.$$

Dấu “ = ” xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x = y = z = 1$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM = x$ và $AN = y$. Chứng minh rằng:

a) $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$.

b) $MN = a - x - y$.

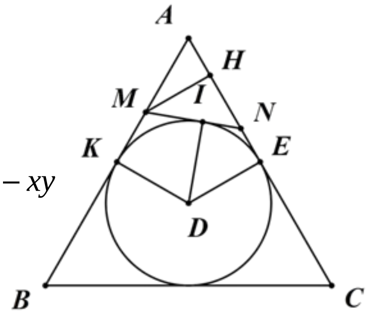
c) MN luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Vì $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AM}{MB}=1-\dfrac{AN}{NC} \\ \dfrac{AN}{NC}=1-\dfrac{AM}{MB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AN}{NC}<1 \\ \dfrac{AM}{MB}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<a-x \\ y<a-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{a}{2} \\ y<\dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y<a$.

Không mất tính tổng quát ta giả giử $AM \leq AN$. Kẻ $MH \perp AC$ như hình vẽ bên.

Khi đó, ta có $AH = AM.\cos 60 = \dfrac{AM}{2}$



a). Áp dụng định lyd PYTAGO, ta có:

$MN^2 = MH^2 + HN^2 = AM^2 - AH^2 + \left(AN - AH\right)^2$

$= AM^2 + AN^2 - 2AN.AH = AM^2 + AN^2 - AM.AN = x^2 + y^2 - xy$

Vậy $MN^2 = x^2 + y^2 - xy = \left(x+y\right)^2 - 3xy\left(1\right)$

b). Theo đề ta có:

$\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1 \Rightarrow \dfrac{AB}{MB}-1+\dfrac{AC}{NC}-1=1$

$\Rightarrow \dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a-y}=3 \Leftrightarrow a^2 - a\left(x+y\right)+a^2 = 3a^2 - 3a\left(x+y\right)+3xy \Rightarrow a^2 - 2a\left(x+y\right) = -3xy\left(2\right)$

Thay $\left(2\right)$ vào $\left(1\right)$ ta được:

$MN^2 = \left(x+y\right)^2 - 2a\left(x+y\right)+a^2 \Leftrightarrow \left(x+y\right)^2 - 2a\left(x+y\right)+a^2 = \left(a-x-y\right)^2$

Vậy $MN = \left|a-x-y\right| = a-x-y$ (vì $x+y<a$).

c). Gọi K, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

D là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Kẻ $DI \perp MN$ $\left(I \in MN\right)$. Khi đó ta dễ dàng tính được: $DK = DE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $MK = \frac{a}{2} - x$;

$NE = \frac{a}{2} - y$.

Ta có $KM + NE = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} - y = MN$ và $\left(2\right) ax + ay - 3xy = a\left(a - x - y\right)$.

$S_{\Delta DMN} = 2S_{\Delta AKD} - S_{\Delta MKD} - S_{\Delta NED} - S_{\Delta AMN} = DK.AK - \frac{KD.MK}{2} - \frac{KE.NE}{2} - \frac{AH.AN}{2}$

$= DK.AK - \frac{DK.MN}{2} - \frac{AH.AN}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} - \frac{a\sqrt{3}}{12}\left(a - x - y\right) - \frac{x\sqrt{3}y}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{12}\left[a^2 - a\left(a - x - y\right) - 3xy\right] = \frac{\sqrt{3}}{12}\left[ay + ay - 3xy\right] = \frac{a\sqrt{3}}{12}\left(a - x - y\right) = \frac{DK.MN}{2}$.

Do đó $\frac{DI.MN}{2} = \frac{DK.MN}{2} \Rightarrow DI = DK$. Suy ra DI là bán kính đường tròn nội tiếp, mà $MN \perp DI \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn.

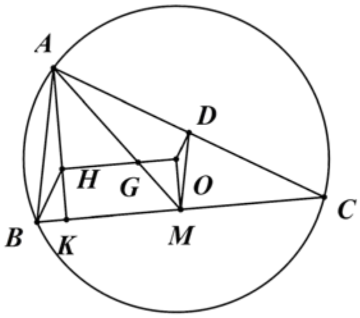
Câu 5: *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$, gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là trực tâm của tam giác ABC và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Tính diện tích của tam giác ABC, biết $OM = OK = \frac{KM}{4}$ và $AM = 30$ cm.

Lời giải

Gọi D là trung điểm của AC.

Ta chứng minh được $\Delta AHB \# \Delta MOD$ (ba cặp cạnh song song)

$\Rightarrow \frac{AH}{OM} = \frac{AB}{MD} = 2 \Rightarrow HG = 2OG$.



Gọi G là giao điểm của AM và OH. Ta chứng minh được

$\Rightarrow \frac{AG}{GM} = \frac{HG}{GO} = \frac{AH}{OM} = 2 \Rightarrow AH = 2OM$.

Dễ dàng chứng minh được tứ giác $OMKH$ là hình chữ nhật (hình bình hành có một góc vuông).

$\Rightarrow HO = KM \Rightarrow HO = 4OM$, suy ra $3OG = 4OM$.

Ap dụng định lý PYTAGO trong tam giác vuông OGM, ta có:

$OM^2 + OG^2 = GM^2 \Leftrightarrow OM^2 + \frac{16}{9}OM^2 = \frac{AM^2}{9} \Leftrightarrow 5OM = AM \Rightarrow OM = 6$ cm.

Khi đó $OH = 24$ cm; $AH = 12$ cm; $AK = 18$ cm.

Ta có $OC = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = 12\sqrt{5}$, từ đó tính được
$BC = 2MC = 2\sqrt{OC^2 - OM^2} = 12\sqrt{9}$

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{AK.BC}{2} = \frac{18.112\sqrt{19}}{2} = 108\sqrt{19}$ (cm^2).

ĐỀ THI CHỌN HSG PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN KIM THÀNH

Câu 1: *(2,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a, Rút gọn biểu thức A.

b, Chứng minh rằng: $0<A\le 2$.

2. Cho biểu thức: $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}$ với $-2<x<2$ và $x\ne 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $\frac{x+2}{x-2}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $x^2-7x=6\sqrt{x+5}-30$.

2. Cho hai đường thẳng $(d_1): y=(m-1)x-m^2-2m$; $(d_2): y=(m-2)x-m^2-m+1$ cắt nhau tại G. (Với m là tham số)

a, Xác định tọa độ điểm G.

b, Chứng tỏ rằng điểm G luôn thuộc một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a, Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2-1 \vdots 24$.

b, Tìm số tự nhiên n sao cho $A=n^2+n+6$ là số chính phương.

c, Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O, đường thẳng (d) cố định nằm ngoài đường tròn. M di động trên đường thẳng (d), kẻ 2 tiếp tuyến MA và MB với đường tròn $(O;R)$, OM cắt AB tại I.

a, Chứng minh tích $OI.OM$ không đổi.

b, Tìm vị trí của M để ΔMAB đều.

c, Chứng minh rằng khi M di động trên (d) thì AB luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\le\frac{9}{4}$$

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN KIM THÀNH

Câu 1: *(2,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a, Rút gọn biểu thức A.

b, Chứng minh rằng: $0<A\le 2$.

2. Cho biểu thức: $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}$ với $-2<x<2$ và $x\ne 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{x+2}{x-2}$.

Lời giải

1. a, Ta có: $x\ge 0, x\ne 1$. Khi đó:

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}=\frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b, Vì $x\ge 0, x\ne 1$ ta luôn có $A>0$

Lại có: $x+\sqrt{x}+1\ge 1\Rightarrow \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}\le 2$ hay $A\le 2$.

Vậy: $0<A\le 2$.

2. Áp dụng tính chất: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow \dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$. Ta có:

$$\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}\Rightarrow \frac{2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2+x}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Từ giả thiết $-2<x<2$ suy ra:

$$\frac{2-x}{2+x}>0\Rightarrow \frac{2-x}{2+x}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\Rightarrow \frac{2-x}{2+x}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow \frac{x+2}{x-2}=-17-12\sqrt{2}$$

Câu 2: *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $x^2-7x=6\sqrt{x+5}-30$.

2. Cho hai đường thẳng $\left(d_1\right): y=\left(m-1\right)x-m^2-2m$; $\left(d_2\right): y=\left(m-2\right)x-m^2-m+1$ cắt nhau tại G. (Với m là tham số)

a, Xác định tọa độ điểm G.

b, Chứng tỏ rằng điểm G luôn thuộc một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\ge -5$. Khi đó ta có:

$$x^2-7x=6\sqrt{x+5}-30\Leftrightarrow\left(x^2-8x+16\right)+\left(x+5-6\sqrt{x+5}+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-4\right)^2+\left(\sqrt{x+5}-3\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=0\\ \sqrt{x+5}-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Vậy $x=4$.

2. a, Hoành độ điểm G là nghiệm của phương trình:

$$\left(m-1\right)x-m^2-2m=\left(m-2\right)x-m^2-m+1\Leftrightarrow x=m+1$$

Tung độ điểm $x=4$ là:

$$y=\left(m-1\right).\left(m+1\right)-m^2-2m\Leftrightarrow y=-2m-1$$

Suy ra $G\left(m+1;-2m-1\right)$.

b, Ta có $y=-2m-1=-2\left(m+1\right)+1$. Mà $x=m+1$ nên $y=-2x+1$.

Tọa độ điểm G thỏa mãn phương trình đường thẳng $y=-2x+1$ cố định. Chứng tỏ G luôn thuộc đường thẳng $y=-2x+1$ cố định khi m thay đổi.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a, Ta có $p^2-1=\left(p-1\right)\left(p+1\right)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó suy ra $\left(p-1\right)\left(p+1\right)\vdots 8$ (1) .

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p-1$; p; $p+1$. Ta có $\left(p-1\right)p\left(p+1\right)\vdots 3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên suy ra $\left(p-1\right)\left(p+1\right)\vdots 3$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $\left(3;8\right)=1$ và $3.8=24$ ta suy ra $p^2-1\vdots 24$ (đpcm).

b, Ta có $A=n^2+n+6$ là số chính phương nên A có dạng:

$$A=n^2+n+6=k^2,\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$$

Ta có:

$$n^2+n+6=k^2\Leftrightarrow 4n^2+4n+24=4k^2\Leftrightarrow\left(2k\right)^2-\left(2n+1\right)^2=23$$

$$\Leftrightarrow\left(2k+2n+1\right)\left(2k-2n-1\right)=23\Leftrightarrow\begin{cases}2k+2n+1=23\\ 2k-2n-1=1\end{cases}$$

Vì 23 là số nguyên tố và $2k+2n+1>2k-2n-1$.

Ta có:

$$\begin{cases}2k+2n+1=23\\ 2k-2n-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=6\\ n=5\end{cases}$$

Vậy với $n=5$ thì A là số chính phương.

c, Ta có:

$$y^2+2xy-3x-2=0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\ \left(*\right).$$

Vế trái của (*) là số chính phương; Vế phải của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0. Suy ra ta có: $\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ x+2=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,y=1\\ x=-2,y=2\end{array}\right.$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(-2;2\right)$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

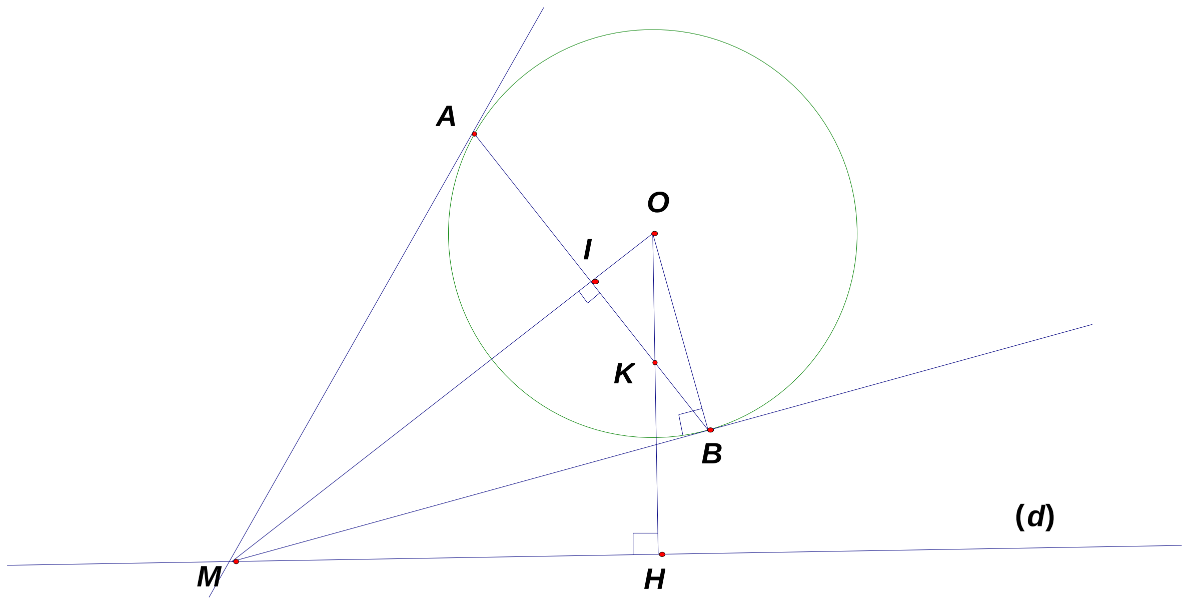
Cho đường tròn tâm O, đường thẳng (d) cố định nằm ngoài đường tròn. M di động trên đường thẳng (d), kẻ 2 tiếp tuyến MA và MB với đường tròn $(O;R)$, OM cắt AB tại I.

a, Chứng minh tích $OI.OM$ không đổi.

b, Tìm vị trí của M để ΔMAB đều.

c, Chứng minh rằng khi M di động trên (d) thì AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Yêu cầu học sinh vẽ hình đúng đến câu a.

a, Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ nên $OB \perp MB$; $OA \perp MA$.

Dễ dàng chứng minh $\Delta OAM = \Delta OBM$ nên suy ra $MA = MB$.

Lại có $OA = OB$ nên OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

$OM \perp AB \Rightarrow \Delta OMB$ vuông tại B có BI là đường cao. Do đó:

$OB^2 = OI.OM \Rightarrow OI.OM = R^2$ không đổi. (đpcm)

b, ΔAMB cân tại M (theo chứng minh trên)

Để ΔAMB đều thì góc $\widehat{AMB} = 60^o \Leftrightarrow$ góc $\widehat{BMO} = 30^o$.

$\Rightarrow \Delta OBM$ vuông tại B có $OB = 0,5OM$.

$\Rightarrow OM = 2OB = 2R$.

Kết luận: Vậy M là điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho $OM = 2R$.

c, Kẻ $OH \perp d$, $H \in d \Rightarrow H$ cố định, OH cắt AB tại K.

Ta có $\Delta OIK \sim \Delta OHM$ (g-g) nên $\Rightarrow OH.OK = OI.OM = R^2$ không đổi.

Mà O, H cố định nên OH không đổi $\Rightarrow OK$ không đổi $K \in OH$ cố định.

Vậy K cố định. (đpcm)

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \le \frac{9}{4}$$

Lời giải

Ta có $x+yz=x(x+y+z)+yz=(x+y)(z+x)$.

Tương tự ta có $y+zx=(x+y)(y+z)$, $z+xy=(y+z)(z+x)$.

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương ta có:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}=8xyz$$

Suy ra:

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2\left[(x+y)(y+z)(z+x)+xyz\right]}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=2+\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq 2+\frac{2xyz}{8xyz}=\frac{9}{4}$$

(đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN LỤC NAM

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức: $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$, với $x>0; y>0; xy\neq 1$.

2. Cho $x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị biểu thức $P=\left(x^2+4x-2\right)^{2017}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

1. Cho $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ là một nghiệm của phương trình: $ax^2+bx+1=0$. Với a,b là các số hữu tỉ. Tìm a và b.

2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100.

3. Cho a,b,c là độ dài của 3 cạnh một tam giác, chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4<2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x sao cho x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5}$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho hình thoi $ABCD$ có $AB=BD=a$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N, trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $AN+DK=2a$. Gọi giao điểm của CN với BD và AD thứ tự là I và M. Tia BM cắt ND tại P.

1. Chứng minh $IC.CN=IN.CM$.

2. Chứng minh $DM.BN=a^2$. Từ đó tính số đo góc $\widehat{BPD}$.

3. Tìm vị trí điểm N và K để diện tích tứ giác $ADKN$ lớn nhất.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$$

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN LỤC NAM

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức: $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$, với $x>0; y>0; xy\neq 1$.

2. Cho $x=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị biểu thức $P=\left(x^2+4x-2\right)^{2017}$.

Lời giải

a) Với $x;y>0$ và $xy\neq 1$. Ta có:

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}:$$

$$\frac{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}$$

$$\frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}}=\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

b) Ta có:

$$x=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}}{\sqrt{\left(\sqrt{20}+1\right)^2}+3}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{20}+4}=\frac{2}{2\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt{5}-2$$

Suy ra: $x^2-4x-1=\left(\sqrt{5}-2\right)^2+4\left(\sqrt{5}-2\right)-1=0\Rightarrow P=(-1)^{2017}=-1$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

1. Cho $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ là một nghiệm của phương trình: $ax^2+bx+1=0$. Với a,b là các số hữu tỉ. Tìm a và b.

2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100.

3. Cho a,b,c là độ dài của 3 cạnh một tam giác, chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4<2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$

Lời giải

1. Ta có: $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$.

Vì $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ là một nghiệm của phương trình $ax^2+bx+1=0$ nên:

$$17a+12a\sqrt{2}+3b+2b\sqrt{2}+1=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(12a+2b\right)=-17a-3b-1.$$

Do a,b là các số hữu tỉ nên $-17a-3b-1$ và $12a+2b$ là các số hữu tỉ.

Suy ra $\sqrt{2}\left(12a+2b\right)$ là 1 số hữu tỉ.

Do đó $\begin{cases}12a+2b=0\\17a+3b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-6\end{cases}$.

2. Ta có $p^{20}-1=\left(p^4-1\right)\left(p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1\right)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2+1$ và p^2-1 là các số chẵn

$\Rightarrow p^4-1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20}-1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được p^4-1 chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20}-1$ chia hết cho 25.

Mà $\left(4;25\right)=1$ nên $p^{20}-1$. (đpcm)

3. Ta có:

$$a^4+b^4+c^4<2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2<0$$
$$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2-c^2\right)^2-\left(2bc\right)^2<0$$
$$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right).\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)<0$$
$$\Leftrightarrow\left(a-b-c\right)\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)<0\ (1)$$

Vì $a;b;c$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác nên:

$$\left(a-b-c\right)<0;\ \left(a+b+c\right)>0;\ \left(a-b+c\right)>0;\ \left(a+b-c\right)>0\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x sao cho x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5}$.

Lời giải

1. Ta có: $x^3-3x^2+x+2=\left(x-2\right)\left(x^2-x-1\right)$

* Xét $x-2=0\Rightarrow x=2$: thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Xét $x^2-x-1=0$: Loại.

* Xét $x-2=x^2-x-1$ ta có: $x=1$.

* TH $x\neq 2;\ x\neq 1$. Với x nguyên ta chứng minh được $\left(x-1;x^2-x-1\right)=1$.

Nên x^3-3x^2+x+2 là số chính phương khi $x-2$ và x^2-x-1 cùng là số chính phương.

Để x^2-x-1 là số chính phương thì $x^2-x-1=y^2$ với $y\in\mathbb{Z}$.

Tìm được $x=2$ (loại do $x\neq 2$) và $x=-1$. Thử lại $x=-1$ ta có x^3-3x^2+x+2 có giá trị bằng -1 không phải là số chính phương nên $\Rightarrow x=-1$ (loại).

Vậy $x=2$ hoặc $x=1$ thì x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$ (*).

Điều kiện: $x>0$. Khi đó ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x(x+3)}+2\sqrt{x+2}-2x-\sqrt{\frac{x^2+5x+6}{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{x+3}{x}}-\sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}}+2\sqrt{x+2}-2x=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x+3}{2}}\left(x-\sqrt{x+2}\right)-2\left(x-\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x+2}=0 \text{ hoặc } \sqrt{\frac{x+3}{x}}-2=0$$

Nếu $x-\sqrt{x+2}=0$ ta có $x=2$ thỏa mãn.

Nếu $\sqrt{\frac{x+3}{x}}-2=0$ ta có $x=1$ thỏa mãn.

Vậy $S=\{1;2\}$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

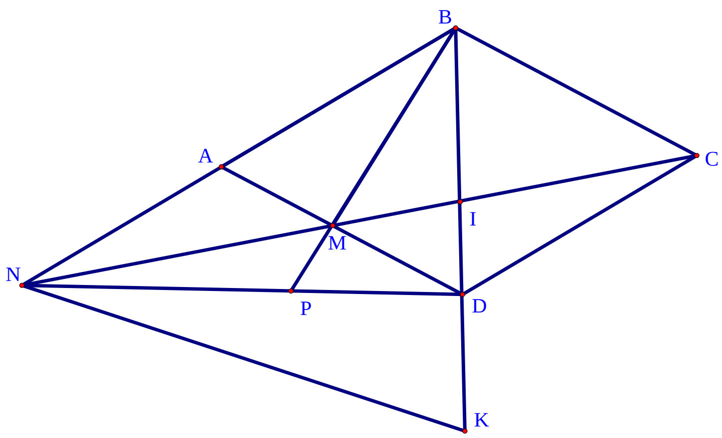
Cho hình thoi $ABCD$ có $AB=BD=a$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N, trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $AN+DK=2a$. Gọi giao điểm của CN với BD và AD thứ tự là I và M. Tia BM cắt ND tại P.

1. Chứng minh $IC.CN=IN.CM$.

2. Chứng minh $DM.BN=a^2$. Từ đó tính số đo góc $\widehat{BPD}$.

3. Tìm vị trí điểm N và K để diện tích tứ giác $ADKN$ lớn nhất.

Lời giải



+ Do $ABCD$ là hình thoi nên $AB=BC=CD=AD=a$.

+ BI là đường phân giác của tam giác BNC nên $\frac{IC}{IN}=\frac{BC}{BN}=\frac{a}{BN}$.

+ Vì $AM\,//\,BC$ nên áp dụng định lý Ta lét trong tam giác NBC ta có:
$\frac{MC}{CN}=\frac{AB}{BN}=\frac{a}{BN}$.

Suy ra $\frac{MC}{CN}=\frac{IC}{IN}\left(=\frac{a}{BN}\right)\Rightarrow IC.CN=IN.CM$.

+ Dễ dàng chứng minh được hai tam giác BNC và DCM đồng dạng với nhau (g-g).

$$\Rightarrow \frac{BC}{DM}=\frac{BN}{DC}\Rightarrow DM.BN=a^2$$

Ta có $AB=AD=a$ và $BD=a\Rightarrow \Delta ABD$ đều $\widehat{ABD}=\widehat{BDM}=60^o$.

Lại có $DM.BN=a^2\Rightarrow \frac{a}{DM}=\frac{BN}{a}\Rightarrow \frac{BD}{DM}=\frac{BN}{BD}\ (2)$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ hai tam giác MDB và DBN đồng dạng (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BND}=\widehat{DBM}$.
Xét hai tam giác DBP và DNB có góc $\widehat{D}$ chung và $\widehat{BND}=\widehat{DBM}$.
$\Rightarrow$ hai tam giác DBP và DNB đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \widehat{NBD}=\widehat{BPD}=60^o$.
Vì S_{ABD} không đổi $\Rightarrow S_{ADKN}$ lớn nhất khi $S_{ADKN}+S_{ABD}$ lớn nhất hay S_{NBK} lớn nhất.

Thật vậy ta có: $S_{NBK}=\frac{1}{2}NB.BK.\sin 60^o$ (Học sinh phải chứng minh công thức này).

$\Rightarrow S_{NBK}=\frac{1}{4}NB.BK.\sqrt{3}$.

Lại có $NB.BK\le\left(\frac{NB+BK}{2}\right)^2=4a^2\ \Rightarrow S_{NBK}\le a^2\sqrt{3}$

Dấu “=” xảy ra khi $BN=BK=2a$, mà $AN+DK=2a$, $BA=BD=a$. Vậy N,K cách A,D một khoảng là a.

Câu 5: *(1,0 điểm)*
Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $a^5+\frac{1}{a}\ge 2a^2$; $b^5+\frac{1}{b}\ge 2b^2$; $c^5+\frac{1}{c}\ge 2c^2$.

Từ đó suy ra: $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ (1)$.

Mặt khác $a^2+1\ge 2a$; $b^2+1\ge 2b$; $c^2+1\ge 2c$. Suy ra:

$$a^2+b^2+c^2\ge 2(a+b+c)-3=3\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI QUẬN BẮC TỪ LIÊM NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức:

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}}+\frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}:\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi x = $3+\sqrt{5}$; y = $3-\sqrt{5}$

2. Cho 2 biểu thức: $P=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b};Q=\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}$ với $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn: $a\neq b\neq c$ và $a^3+b^3+c^3=3abc$. Chứng minh rằng: $P.Q=9$

Câu 2: *(4,0 điểm)* Giải các phương trình sau:

a) $x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=6$

b) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2\left(x^2+1\right)+2x-1$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2+2xy-7x-12=0$

b) Tìm số tự nhiên n để: $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC>AB$, đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD=HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh: $\Delta ADC\backsim\Delta BEC$. Cho $AB=m$, tính BE theo m.

b) Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: $\Delta BHM\backsim\Delta BEC$. Tính góc $\widehat{AHM}$.

c) Tia AM cắt BC tại G.Chứng minh rằng: $\frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\leq\frac{3}{2}$.

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI QUẬN BẮC TỪ LIÊM
NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức:

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}}+\frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}:\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi x = $3+\sqrt{5}$; y = $3-\sqrt{5}$

2. Cho 2 biểu thức: $P=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b};Q=\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}$ với $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn: $a\neq b\neq c$ và $a^3+b^3+c^3=3abc$. Chứng minh rằng: $P.Q=9$

Lời giải

1. a) ĐKXĐ: $x>0; y>0; x\neq y$

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}}+\frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}:\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$$

$$=\sqrt{\frac{x+y}{xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}+\frac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3\left(\sqrt{x}.\sqrt{y}\right)}}.\frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\sqrt{\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}}.\frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{xy}}.\frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

b) Với $x=3+\sqrt{5}$; $y=3-\sqrt{5}$ ta có: $x > y$ do đó:

$$A=\frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}>0$$

Mà $A^2=\frac{(xy)^2}{x+y-2\sqrt{xy}}=\frac{\left[\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)\right]^2}{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})-2\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}}=\frac{4^2}{6-2.2}=8$

Vậy $A=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

2. Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$$\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=0\ \ (1)$$

Mà $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\neq 0$ (Do $a\neq b\neq c$)

Do đó: (1) $\Leftrightarrow a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c; a+c=-b; \mathrm{b+c=-a}$ (2)

Mặt khác:

$$P=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}=\frac{ab(b-a)+bc(b-c)+ac(c-a)}{abc}$$
$$P=\frac{ab(a-b)+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c}{abc}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}\ (3)$$

Hơn nữa:

Đặt $\begin{cases}a-b=z\\ b-c=x\\ c-a=y\end{cases}$ Ta có: $\begin{cases}x-y=a+b-2c=-3c\\ y-z=b+c-2a=-3a\\ z-x=a+c-2b=-3b\end{cases}$ (do (2))

Vì thế:

$$Q=\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}=-\frac{1}{3}\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)$$

$=-\frac{1}{3}.\frac{(x-y).(\mathrm{y-z}).(\mathrm{x-z})}{xyz}$ (Biến đổi tương tự rút gọn P)

$$=-\frac{1}{3}.\frac{(-3\mathrm{c}).(-3\mathrm{a}).[-(-3\mathrm{b})]}{(a-b).(b-c).(c-a)}$$

$=\frac{-9abc}{(a-b).(b-c).(c-a)}$ (4)

Từ (3), (4) ta có: $\mathrm{P.Q}=\frac{(a-b).(b-c).(a-c)}{abc}.\frac{-9abc}{(a-b).(b-c).(c-a)}=9$

Vậy $P.Q\ =\ 9$

Câu 2: *(4,0 điểm)* Giải các phương trình sau:

a) $x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=6$

b) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2\left(x^2+1\right)+2x-1$

Lời giải

a) ĐKXĐ : $x\neq -1$. Đặt $x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)=a$; $x+\frac{5-x}{x+1}=b$

Ta có : $a+b=x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)+\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=\frac{5x-x^2+x^2+x+5-x}{x+1}=5$

Mà $a.b = 6$ Do đó $\begin{cases} ab = 6 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $a = 2; b = 3$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

Với $a = 3; b = 2$ thì $x^2 - 2x + 3 = 0$ (PT vô nghiệm)

b) *Giải phương trình* : $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2\left(x^2+1\right) + 2x - 1$ (1)

Đặt $\sqrt{x^2+1} = y$ $(y \geq 1)$ Ta có :

$(1) \Leftrightarrow (4x-1).y = 2y^2 + 2x - 1$
$\Leftrightarrow 2y^2 - 4xy + 2x + y - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \left(2y^2 - 4xy + 2y\right) - \left(y - 2x + 1\right) = 0$
$\Leftrightarrow 2y\left(y - 2x + 1\right) - \left(y - 2x + 1\right) = 0$
$\Leftrightarrow (y - 2x + 1).(2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = \frac{1}{2} < 1 \text{ (L)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x - 1$ (ĐK : $x \geq 1$)

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow x(3x-4) = 0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 (KTM) \\ x = \frac{4}{3} (TM) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$

b) Tìm số tự nhiên n để: $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$

$$y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 8xy - 28x - 48 = 0$$

$\Leftrightarrow (2y - 7)(2y + 7 + 4x) = -1$

TH1: $\begin{cases} 2y-7=1 \\ 2y+7+4x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=4 \end{cases}$

TH1: $\begin{cases} 2y-7=-1 \\ 2y+7+4x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy $x = -4, y = 4$ hoặc $x = -3, y = 3$

b) Tìm số tự nhiên n để: $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$là số nguyên tố

Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không phải nguyên tố;

Xét $n = 1$thì $A = 3$ nguyên tố.

Xét $n > 1$: $A = n^{2012} - n^2 + n^{2002} - n + n^2 + n + 1$
$= n^2((n^3)^{670} - 1) + n.((n^3)^{667} - 1) + (n^2 + n + 1)$

Mà $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Tương tự, $(n^3)^{667} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.

Do đó A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ nên A là hợp số.

Số tự nhiên cần tìm $n = 1$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

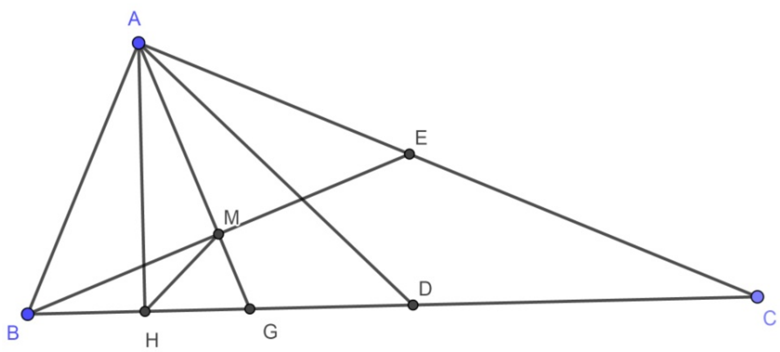
Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC > AB$, đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh: $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$. Cho $AB = m$, tính BE theo m.

b) Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: $\Delta BHM \backsim \Delta BEC$. Tính góc $\widehat{AHM}$.

c) Tia AM cắt BC tại G.Chứng minh rằng: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$

Lời giải



a) Chứng minh hai tam giác ADC và BEC đồng dạng. Biết $AB = m$, tính BE theo m.

C/m: ΔCDE và ΔCAB đồng dạng (g.g)

Tam giác ADC và tam giác BEC :

$\frac{CD}{CE}=\frac{CA}{CB}$ (Vì hai tam giác CDE và CAB đồng dạng)

Góc C : chung

Suy ra tam giác ADC đồng dạng tam giác BEC (c.g.c)

C/m: Tam giác AHD vuông cân tại H => $\widehat{ADH}=45°\Rightarrow \widehat{ADC}=135°$

ΔADC đồng dạng với ΔBEC (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{BEC}$

$\Rightarrow \widehat{BEC}=135°$

$\Rightarrow \widehat{AEB}=45°$

$\Rightarrow \Delta AEB$ vuông cân tại A

Do đó, $BE=m\sqrt{2}$

b) Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: $\Delta BHM \# \Delta BEC$. Tính góc $\widehat{AHM}$

- Có: $AB^2=BH.BC$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow 2AB^2=2BH.BC$

$\Rightarrow BE^2=2BH.BC$

$\Rightarrow \frac{BE}{2BC}=\frac{BH}{BE}\Rightarrow \frac{BM}{BC}=\frac{BH}{BE}$ (Vì BE = 2 BM)

- C/m: ΔBHM và ΔBEC đồng dạng (c.g.c)

- Vì ΔBHM và ΔBEC đồng dạng (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BHM}=\widehat{BEC}=135°\Rightarrow \widehat{AHM}=45°$

c) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh rằng: $\frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$

Tam giác ABE cân tại E nên AM còn là phân giác của góc BAC

Suy ra: $\frac{GB}{GC}=\frac{AB}{AC}$ (T/c đường Phân giác) (1)

- C/m: ΔAHC và ΔBAC đồng dạng (g.)

$\Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{HC}{AC}\Rightarrow \frac{AH}{HC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{HD}{HC}=\frac{AB}{AC}(Do\ AH=HD)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra :

$$\frac{GB}{GC}=\frac{HD}{HC}\Rightarrow \frac{GB}{GB+GC}=\frac{HD}{HD+HC}\Rightarrow \frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$$

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{3}{2}$.

Lời giải

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{3}{2}$.

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (Với a,b > 0) => $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}=\frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{(x+y)+(y+z)}\right]\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{y+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+z}+\frac{4}{y+z}\right)$$

$$=\frac{4}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)=\frac{1}{4}.6=\frac{3}{2}$$

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN VŨ QUANG (V2) NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1:

a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^3+y^3-6\left(x^2+y^2\right)+13(x+y)-20=0$.

Tính giá trị của $A=x^3+y^3+12xy$.

b) Cho biểu thức $x^2-x-1=0$. Tính giá trị của $Q=\dfrac{x^6-3x^5+3x^4-x^3+2017}{x^6-x^3-3x^2-3x+2017}$.

c) Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}+\dfrac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$.

Câu 2:

a) Cho biểu thức $B=\dfrac{2}{a}-\left(\dfrac{a^2}{a^2-ab}+\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{b^2}{b^2-ab}\right):\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

Rút gọn và tính giá trị của B với $|2a-1|=1$ và $|b+1|=\dfrac{1}{2}$.

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số cao nhất bằng 1.

Biết $P(2015)=2016$; $P(2016)=2017$; $P(2017)=2018$.

Tính $P(2014)+P(2018)$.

Câu 3:

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+11x+28}+\dfrac{1}{x^2+17x+70}=\dfrac{3}{4x-2}$.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-xy+y^2=3$.

Câu 4:

a) Tìm x, y để biểu thức $F=5x^2+2y^2-2xy-4x+2y+3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n+3^n+4^n$ là số chính phương.

Câu 5:

a) Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM=\dfrac{1}{3}AB$, N là trung điểm của CD, G là trọng tâm tam giác BMN, I là giao điểm của AG và BC. Tính $\dfrac{AG}{GI}$ và $\dfrac{IB}{IC}$.

b) Cho tam giác ABC, phân giác trong góc A cắt BC tại D, trên các đoạn thẳng DB, DC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAD}=\widehat{FAD}$. Chứng minh rằng $\dfrac{BE.BF}{CE.CF}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

c) Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng đường chéo AC, trên tia đối của tia AD lấy điểm E. Đường thẳng EB cắt đường thẳng DC tại F, CE cắt AF tại O. Chứng minh rằng $\Delta AEC \# \Delta CAF$, tính số đo $\widehat{EOF}$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN VŨ QUANG (V2) NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1:

a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^3+y^3-6\left(x^2+y^2\right)+13(x+y)-20=0$.

Tính giá trị của $A=x^3+y^3+12xy$.

b) Cho biểu thức $x^2-x-1=0$. Tính giá trị của $Q=\dfrac{x^6-3x^5+3x^4-x^3+2017}{x^6-x^3-3x^2-3x+2017}$.

c) Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}+\dfrac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$.

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có:

$x^3-6x^2+12x-8+y^3-6y^2+12y-8+x+y-4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^3+(y-2)^3+x+y-4=0$

$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[(x-2)^2-(x-2)(y-2)+(y-2)^2+1\right]=0$

Vì $(x-2)^2-(x-2)(y-2)+(y-2)^2+1=\left(x-2-\dfrac{y-2}{4}\right)^2+\dfrac{3(y-2)^2}{4}+1>0$

Do đó $x+y-4=0 \Rightarrow A=(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]+12xy=4(16-3xy)+12xy=64$

Vậy $A=64$.

b) Ta có

$x^6-3x^5+3x^4-x^3+2017$

$=\left(x^6-x^5-x^4\right)+\left(-2x^5+2x^4+2x^3\right)+\left(2x^4-2x^3-2x^2\right)+\left(-x^3+x^2+x\right)+\left(x^2-x-1\right)+2018$

$=\left(x^2-x-1\right)\left(x^4-2x^3-2x^2-x+1\right)+2018=2018$

$x^6-x^3-3x^2-3x+2017$

$=\left(x^6-x^5-x^4\right)+\left(x^5-x^4-x^3\right)+\left(2x^4-2x^3-2x^2\right)+\left(2x^3-2x^2-2x\right)+\left(x^2-x-1\right)+2018$

$=\left(x^2-x-1\right)\left(x^4+x^3+2x^2+2x+1\right)+2018=2018$

Do đó $Q=1$.

c) Từ $x+y=1 \Rightarrow x=1-y; y=1-x$. Khi đó

$\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}=\dfrac{1-y}{y^3-1}-\dfrac{1-x}{x^3-1}$

$=\dfrac{-1}{y^2+y+1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{-x^2-x-1+y^2+y+1}{\left(x^2+x+1\right)\left(y^2+y+1\right)}$

$=\dfrac{(y-x)(y+x+1)}{x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+x+y+1}$

$=\dfrac{2(y-x)}{x^2y^2+2xy+x^2+y^2+2}=\dfrac{2(y-x)}{x^2y^2+3}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0.$$

Câu 2:

a) Cho biểu thức $B=\frac{2}{a}-\left(\frac{a^2}{a^2-ab}+\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{b^2}{b^2-ab}\right):\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

Rút gọn và tính giá trị của B với $|2a-1|=1$ và $|b+1|=\frac{1}{2}$.

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số cao nhất bằng 1.

Biết $P(2015)=2016$; $P(2016)=2017$; $P(2017)=2018$.

Tính $P(2014)+P(2018)$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $a,b\neq 0; a\neq b$.

Ta có

$|2a-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2a-1=1\\2a-1=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=0\end{array}\right.$. Vì $a\neq 0$ nên $a=1$

$$|b+1|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b+1=\frac{1}{2}\\b+1=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=-\frac{1}{2}\\b=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Do đó

$$B=2-\left(\frac{1}{1-b}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{b}{1-b}\right):\frac{1-b+b^2}{1-b}$$

$$=2-\frac{(1+b)b+(1-b^2)(1-b)}{b(1-b)}.\frac{1-b}{1-b+b^2}$$

$$=2-\frac{1+b^3}{b(1-b+b^2)}=2-\frac{1+b}{b}=\frac{b-1}{b}$$

Với $b=-\frac{1}{2}\Rightarrow B=3$.

Với $b=-\frac{3}{2}\Rightarrow B=\frac{5}{3}$.

b) Gọi đa thức $Q(x)=P(x)-(x+1)$ ta có $Q(2015)=Q(2016)=Q(2017)=0$

Vì $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên $Q(x)$ cũng có hệ số cao nhất bằng 1.

Do đó $Q(x)$ có dạng $Q(x)=(x-2015)(x-2016)(x-2017)(x-a)$

Suy ra $P(x)=(x-2015)(x-2016)(x-2017)(x-a)+(x+1)$

Ta có

$$P(2014)+P(2018)=(-1).(-2).(-3).(2014-a)+2015+3.2.1.(2018-a)+2019$$
$$=(-6).2014+6a+6.2018-6a+4034=4058$$

Câu 3:

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+11x+28}+\dfrac{1}{x^2+17x+70}=\dfrac{3}{4x-2}$.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-xy+y^2=3$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\neq -1$; $x\neq -4$; $x\neq -7$; $x\neq -10$.

Phương trình ban đầu trở thành:

$$\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{3}{(x+4)(x+7)}+\frac{3}{(x+7)(x+10)}=\frac{9}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+10}=\frac{9}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+10)}=\frac{1}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+10)=4x-2$$

$$\Leftrightarrow x^2+7x+12=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3(n) \\ x=-4(l) \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-3\}$.

b) Ta có

$$x^2-xy+y^2=3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4xy+4y^2=12$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)^2=3(4-y^2)\geq 0$$

$$\Rightarrow y^2\leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2\leq y\leq 2$$

- Với $y=1\Rightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$
- Với $y=-1\Rightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$
- Với $y=2\Rightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$
- Với $y=-2\Rightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$
- Với $y=0\Rightarrow x^2=3(l)$

Vậy $(x,y)\in\{(-2,-1);(1,-1);(-1,1);(2,1);(-1,-2);(1,2)\}$.

Câu 4:

a) Tìm x,y để biểu thức $F=5x^2+2y^2-2xy-4x+2y+3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n+3^n+4^n$ là số chính phương.

Lời giải

a) Ta có

$$F=5x^2+2y^2-2xy-4x+2y+3$$
$$=y^2+4x^2+1-4xy-4x+2y+x^2+y^2+2xy+2$$
$$=\left(y-2x+1\right)^2+\left(x+y\right)^2+2$$

Do đó $F\ge 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x;y)=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Vậy $\min F=2$

b) Đặt $A=2^n+3^n+4^n$. Nếu $n=1$ thì $A=9$ (thỏa mãn)

Xét $n>1$ hay $n\ge 2$ thì 2^n+4^n chia hết cho 4.

Ta có 3^n chia 4 dư 1 với n chẵn hoặc -1 với n lẻ. Mà một số chính phương chia 4 dư 0 hoặc 1 nên A phải chia 4 dư 1 nên 3^n phải chia 4 dư 1. Suy ra n chẵn.

Với n chẵn: 2^n chia 3 dư 1, 4^n chia 3 dư 1, 3^n chia hết cho 3.

Do đó A chia 3 dư 2 (vô lí, vì một số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1).

Vậy $n=1$.

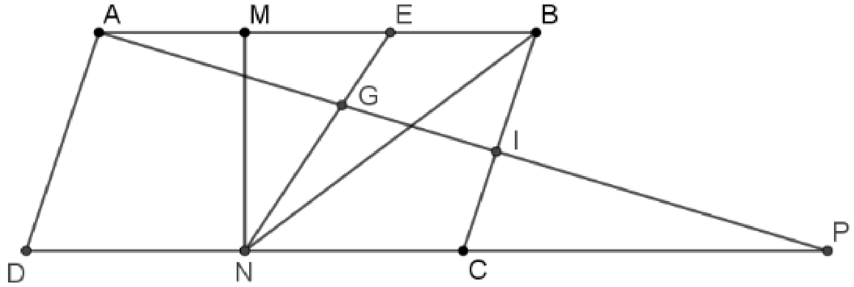
Câu 5:

a) Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM=\frac{1}{3}AB$, N là trung điểm của CD, G là trọng tâm tam giác BMN, I là giao điểm của AG và BC. Tính $\frac{AG}{GI}$ và $\frac{IB}{IC}$.

b) Cho tam giác ABC, phân giác trong góc A cắt BC tại D, trên các đoạn thẳng DB, DC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAD}=\widehat{FAD}$. Chứng minh rằng $\frac{BE.BF}{CE.CF}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

c) Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng đường chéo AC, trên tia đối của tia AD lấy điểm E. Đường thẳng EB cắt đường thẳng DC tại F, CE cắt AF tại O. Chứng minh rằng $\Delta AEC\,\#\;\Delta CAF$, tính số đo $\widehat{EOF}$.

Lời giải



a) Gọi P là giao điểm của tia AI và tia DC

Áp dụng định lí Thales, ta có:

$\frac{AE}{NP}=\frac{GE}{GN}=\frac{1}{2}\Rightarrow NP=2AE\Rightarrow NC+CP=2.\frac{2}{3}AB$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB+CP=\frac{4}{3}AB\Rightarrow CP=\frac{5}{6}AB$

Suy ra $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{CP}=\frac{6}{5}$

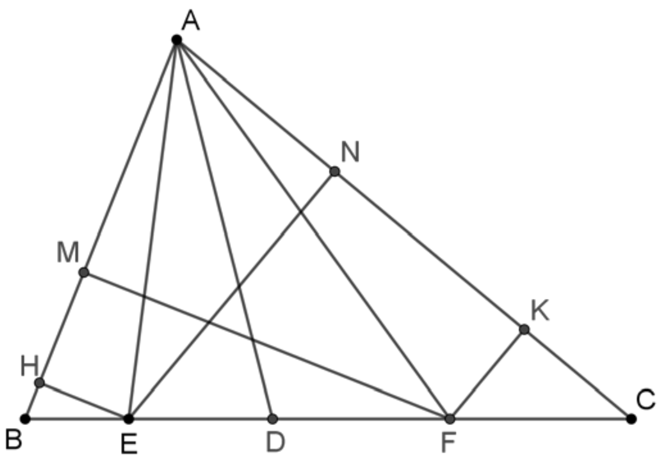
Ta có $\frac{AG}{PA}=\frac{GE}{EN}=\frac{1}{3};\ \frac{IA}{IP}=\frac{IB}{IC}=\frac{6}{5}$

$\Rightarrow \frac{IA}{IP+IA}=\frac{6}{5+6}\Rightarrow \frac{IA}{PA}=\frac{6}{11}$

$\Rightarrow \frac{GI}{PA}=\frac{IA}{PA}-\frac{AG}{PA}=\frac{6}{11}-\frac{1}{3}=\frac{7}{33}$

Do đó $\frac{AG}{GI}=\frac{AG}{PA}.\frac{PA}{GI}=\frac{1}{3}.\frac{33}{7}=\frac{11}{7}$.

b)



Kẻ $EH\perp AB$ tại H, $EN\perp AC$ tại N, $FM\perp AB$ tại M và $FK\perp AC$ tại K

Vì $\widehat{EAD}=\widehat{FAD}$ và $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$

$\Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{CAF}$ và $\widehat{BAF}=\widehat{CAE}$

$\Rightarrow \Delta HAE\#\ \Delta KAF\Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{HE}{KF}$

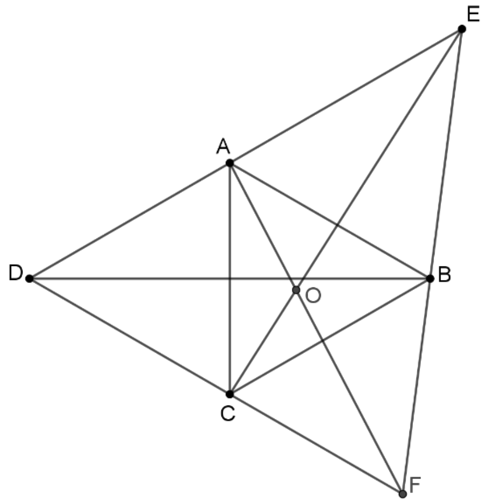
Lại có $\frac{S_{ABE}}{S_{ACF}}=\frac{BE}{CF}=\frac{HE.AB}{KF.AC}=\frac{AE.AB}{AF.AC}$

$\Rightarrow \frac{BE}{CF}=\frac{AE.AB}{AF.AC}(1)$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \frac{BF}{CE}=\frac{AF.AB}{AE.AC}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BE.BF}{CE.CF}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

c)



Vì $AC = AD = BC = CD$ nên các ΔACD và ΔABC đều.

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{CFB}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{FCB} = 60°$

$\Rightarrow \Delta ABE \# \Delta CFB$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AB}{CF} \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AC}{CF}$

$\Rightarrow \Delta AEC \# \Delta CAF$

$\Rightarrow \widehat{CFA} = \widehat{ACE}$ mà $\widehat{FAB} = \widehat{CFA}\left(AB // DF\right)$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{FAB}$

Do đó $\widehat{CAF} + \widehat{FAB} = \widehat{CAB} = 60°$

$\Rightarrow \widehat{CAF} + \widehat{ACE} = 60° \Rightarrow \widehat{EOF} = 120°$.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI SỐ 10 - CHỌN HSG NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(5,0 điểm)* Cho biểu thức: $A=\left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$, với $a \ge 0$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Thính giá trị của biểu thức A khi $a=2010-2\sqrt{2009}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)=28x^2$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3=3(x-y) \\ x+y=-1. \end{cases}$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2=-2\left(x^6-x^3y-32\right)$.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác AD. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD.

Chứng minh rằng: $2AD \le BM + CN$.

Câu 4: (5,*0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, P là điểm trên cạnh BC; các điểm N, L thuộc AP sao cho $CN \perp AP$ và $AL = CN$.

1. Chứng minh góc MCN bằng góc MAL.

2. Chứng minh ΔLMN vuông cân.

3. Diện tích ΔABC gấp 4 lần diện tích ΔMNL, hãy tính góc CAP.

Câu 5: *(2,0 điểm)* Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $ab = 6$. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2}{|a-b|} \ge 4\sqrt{3}.$

LỜI GIẢI ĐỀ THI SỐ 10 - HSG NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(5,0 điểm)*

Cho biểu thức: $A=\left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$, với $a \ge 0$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Thính giá trị của biểu thức A khi $a=2010-2\sqrt{2009}$.

Lời giải

1. Điều kiện $a \ne 0$. Ta có:

$$A = \left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$$

$$=\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1}:\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{a+1}:\frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2(a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1+\sqrt{a}.$$

2. $a = 2010 - 2\sqrt{2009} = \left(\sqrt{2019}-1\right)^2$

$\Rightarrow A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2009}-1)^2} = \sqrt{2009}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8) = 28x^2$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ x + y = -1. \end{cases}$

Lời giải

1. Ta có

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+8) = 28x^2$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+6x+8\right)\left(x^2+9x+8\right) = 28x^2 \qquad (1)$$

+) Với $x=0$, không phải là nghiệm của phương trình (1).

+) Với $x \neq 0$ chia hai vế (1) cho x^2 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x+\frac{6}{x}+9\right)\left(x+\frac{9}{x}+8\right) = 28$$

Đặt $t = x + \frac{8}{x}$, phương trình trên trở thành

$(t+6)(t+9) = 28 \Leftrightarrow t^2 + 15t + 26 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-13. \end{array}\right.$

+) Với $t=-2$ ta có $x + \frac{8}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 8 = 0$, phương trình vô nghiệm.

+) Với $t=-2$ ta có $x + \frac{8}{x} = -13 \Rightarrow x^2 + 13x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -13 \pm \sqrt{137}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = -13 \pm \sqrt{137}$.

2. Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-3) = 0 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

Hệ này tương đương với tuyển của hai hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \text{(I) hoặc } \begin{cases} x^2+xy+y^2-3=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \text{(II).}$$

+) Giải hệ (I) có nghiệm là $(x;y) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

+) Xét hệ (II) từ $x+y=-1$ ta có $y=-x-1$ thay vào phương trình đầu của hệ (II) ta được

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Từ đó ta thấy hệ (II) có hai nghiệm là: $(1;-2)$; $(2;-1)$.

Kết luận: Hệ đã cho có nghiêm $(x;y)$ là: $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $(1;-2)$; $(2;-1)$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2=-2\left(x^6-x^3y-32\right)$.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD.

Chứng minh rằng: $2AD \le BM + CN$.

Lời giải

1. Ta có: : $y^2=-2\left(x^6-x^3y-32\right) \Leftrightarrow x^6+\left(y-x^3\right)^2=64$

$\Rightarrow x^6 \le 64 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$, do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1;-2;1;0;1;2\}$.

Xét các trường hợp:

$+\ x=2 \Rightarrow \left(y-x^3\right)^2=0 \Rightarrow y=8$.

$+\ x=1 \Rightarrow \left(y-x^3\right)^2=63 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

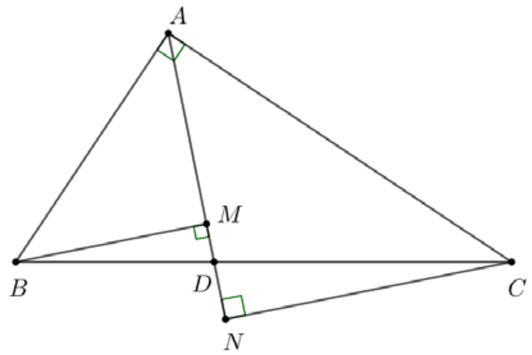
$+\ x=0 \Rightarrow \left(y-x^3\right)^2=4 \Rightarrow y=8$ hoặc $y=-8$.

$+\ x=-1 \Rightarrow \left(y-x^3\right)^2=63 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$, nên phương trình này không có nghiệm nguyên.

$+\ x=-2 \Rightarrow \left(y-x^3\right)^2=0 \Rightarrow y=-8$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $(x;y) \in \{(0;8);(0;-8);(2;8);(-2;-8)\}$.

2.



Ta có ΔAMB và ΔANC vuông cân nên $MA=MB$ và $NA=NC$.

Nên $BM+CN=AM+AN$. Giả sử: $AB \le AC$

Theo tính chất phân giác ta có $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB} \ge 1$.

Vì $BM \,//\, CN$ suy ra $\frac{DN}{DM}=\frac{DC}{DB} \ge 1$ do đó

$DN \ge DM$.

Nếu I là trung điểm của MN thì $AD \le AI$ và $AM+AN=2AI$.

Khi đó $2AD \le 2AI=AM+AN=BM+CN$ (đpcm).

Câu 4: (5,0 *điểm*)

Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, P là điểm trên cạnh BC; các điểm N, L thuộc AP sao cho $CN \perp AP$ và $AL=CN$.

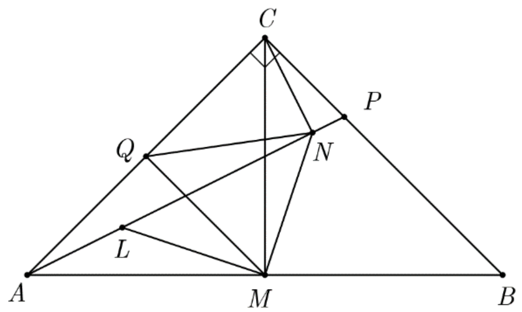
1. Chứng minh góc MCN bằng góc MAL.

2. Chứng minh ΔLMN vuông cân.

3. Diện tích ΔABC gấp 4 lần diện tích ΔMNL, hãy tính góc CAP.

Lời giải

1.



Đặt $\widehat{ACP} = a \Rightarrow \widehat{ACN} = 90^\circ - a$

Khi đó, $\widehat{MCN} = \widehat{ACN} - 45^\circ = 90^\circ - a - 45^\circ = 45^\circ - a = \widehat{LAM}$.

2.

Do ΔABC vuông tại A mà AM là trung tuyến nên

$AM = CM$ và $AL = CN$ (gt), $\widehat{MCN} = \widehat{LAM}$

Nên $\Delta AML = \Delta CMN \Rightarrow LM = MN$ và $\widehat{AML} = \widehat{CMN} \Rightarrow$

$\widehat{LMN} = 90^\circ - \widehat{AML} + \widehat{CMN} = 90^\circ$.

Vậy tam giác ΔLMN vuông cân tại M.

3 . Do các ΔLMN, ΔABC vuông cân nên:

$2\,S_{\Delta LMN} = MN^2$ và $2\,S_{\Delta ABC} = AC^2$.

$S_{ABC} = 4S_{\Delta LMN}$ (gt). Từ đó suy ra MN = $MN = \frac{1}{2}AC$.

Gọi Q là trung điểm của AC thì $QM = QN = \frac{1}{2}AC = MN$

$\Rightarrow \widehat{QMN} = 60^\circ$ và $\widehat{QNA} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Mặt khác $AQ = NQ$ nên $\widehat{CAP} = \widehat{QNA} = 15^\circ$.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $ab = 6$. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2}{|a-b|} \geq 4\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a^2+b^2}{|a-b|} = \frac{(a-b)^2+2ab}{|a-b|} = |a-b| + \frac{12}{|a-b|}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi : $|a-b| + \frac{12}{|a-b|} \geq 2\sqrt{|a-b|.\frac{12}{|a-b|}} = 4\sqrt{3}$.

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9 – AMSTERDAM LẦN 3
NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Câu 2: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3-9x^2+6x-1=0$
Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

Câu 3: Cho tam giác ABC, $(AB<AC)$, với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G, gọi I là hình chiếu của H trên GA.

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.

2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $GH\perp AM$.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9 – AMSTERDAM LẦN 3
NĂM HỌC 2017 - 2018

Câu 1: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn:

$p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $p \le q$.

Trường hợp 1: $p=2$

$\Rightarrow p(p+3)=2(2+3)=2.5=10$

$\Rightarrow 10+q(q+3)=n(n+3)$

$\Leftrightarrow 10=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p; q; n là các số nguyên dương

$\Rightarrow n>q\ge 2.$

$\Rightarrow n+q+3>2+2+3=7$

Mà $10=1.10=2.5$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=10 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=7 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ q=3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(2;3;4)$.

Trường hợp 2: $p=3$

$\Rightarrow p(p+3)=3.(3+3)=3.6=18$

$\Rightarrow 18+q(q+3)=n(n+3) \Leftrightarrow 18=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p; q; n là các số nguyên dương

$\Rightarrow n>q\ge 3.$

$\Rightarrow n+q+3>3+3+3=9$

Mà $18=1.18=2.9=3.6$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(3;7;8)$.

Trường hợp 3: $p>3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

Nếu $a:3$ dư 1 $\Rightarrow a=3k+1 \Rightarrow a+3=3k+4$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3$ dư 1.

Nếu $a:3$ dư 2 $\Rightarrow a=3k+2 \Rightarrow a+3=3k+5$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3$ dư 1.

Trở lại bài toán chính:

$$q \geq p > 3 \Rightarrow p \not\vdots 3; q \not\vdots 3.$$

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3$ dư 2.

Mà $n(n+3):3$ dư 1 (nếu $n \not\vdots 3$) hoặc $n(n+3)\vdots 3$ nếu $n \vdots 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3) \neq n(n+3)$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3-9x^2+6x-1=0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

Lời giải

Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$2x^3-9x^2+6x-1=0$

Khi phân tích đa thức $2x^3-9x^2+6x-1$ ra thừa số ta được:

$2x^3-9x^2+6x-1=2(x-a)(x-b)(x-c)$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c)=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=\dfrac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\left(\frac{9}{2}\right)^2-2.3=\frac{57}{4}$$

Tính $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=3^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

Tính $a^3+b^3+c^3$:

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=\frac{9}{2}\left(\frac{57}{4}-3\right)+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{417}{8}$

Vậy:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\frac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2=\frac{57}{4} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{9}{2} \\ a^3+b^3+c^3=\frac{417}{8} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$

$\Leftrightarrow S=\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)+\left(b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4\right)$

$+\left(c^4+c^3a+c^2a^2+ca^3+a^4\right)$

$\Leftrightarrow S=2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+a^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$\Leftrightarrow S=\left(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\right)+\left(a^4+a^3b+a^3c\right)+\left(b^4+b^3a+b^3c\right)$

$+\left(c^4+c^3a+c^3b\right)-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

$\Leftrightarrow S=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+a^3(a+b+c)+b^3(a+b+c)+c^3(a+b+c)$

$-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

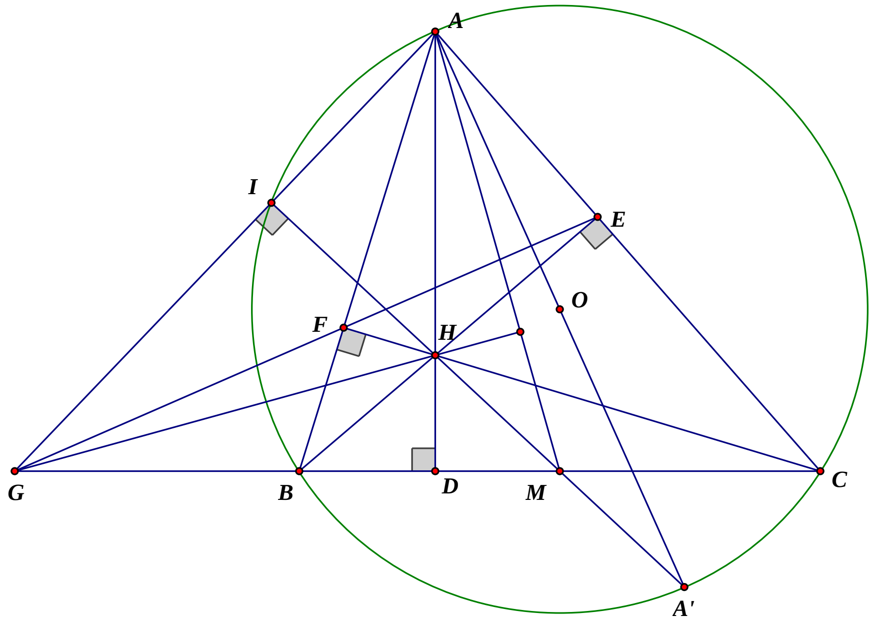
$\Leftrightarrow S=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

$\Leftrightarrow S=\left(\frac{57}{4}\right)^2+\frac{9}{2}\cdot\frac{417}{8}-\frac{9}{2}=\frac{3465}{8}$

Câu 3: Cho tam giác ABC, $(AB<AC)$, với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G, gọi I là hình chiếu của H trên GA.

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $GH \perp AM$.

Lời giải



1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
Dễ dàng chứng minh tứ giác $AIFH$ nội tiếp và tứ giác $AFHE$ nội tiếp
$\Rightarrow$ 5 điểm A, F, H, E, I cùng thuộc một đường tròn.
$\Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp.
$\Rightarrow GI.GA = GF.GE$ (1).
Dễ dàng chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow GF.GE = GB.GC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra: $GI.GA = GB.GC$ $\Rightarrow$ tứ giác $BCAI$ nội tiếp (điều phải chứng minh).
2. Chứng minh $GH \perp AM$.
Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ đường kính AA' của (O).
Vì tứ giác $BCAI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow I \in (O) \Rightarrow \widehat{AIA'} = 90° \Rightarrow A'I \perp AI$ hay $A'I \perp AG$.
Mà $HI \perp AG$ (giả thiết) $\Rightarrow A'I \equiv HI \Rightarrow A'$, I, H thẳng hàng.
Mà dễ dàng chứng minh được $A'H$ đi qua trung điểm M của BC (tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành).
$\Rightarrow M$, I, H thẳng hàng.
Xét ΔAGM có: $AD \perp AM$, $MI \perp AG$ và AD cắt MI tại H.
$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác AGM.
$\Rightarrow GH \perp AM$
Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ thì ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 9=\left(a+b+c\right)^2>a^2+b^2+c^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

Trường hợp 2: $a>\frac{1}{3}$; $b>\frac{1}{3}$; $c>\frac{1}{3}$ ta có $a+b+c=3>a+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Rightarrow a<\frac{7}{3}$ tương tự $b<\frac{7}{3}$; $c<\frac{7}{3}$. Vậy $a;b;c\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{1}{x^2}-x^2\ge -4x+4\ \ \forall x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$. (*).

Thật vậy

(*) $\Leftrightarrow 1-x^4\ge -4x^3+4x^2\Leftrightarrow x^4-4x^3+4x^2-1\le 0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(x^2-2x-1\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(\left(x-1\right)^2-2\right)\le 0$ luôn đúng với $\forall x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy $\frac{1}{a^2}-a^2\ge -4a+4$; $\frac{1}{b^2}-b^2\ge -4b+4$; $\frac{1}{c^2}-c^2\ge -4c+4$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-a^2-b^2-c^2\ge -4\left(a+b+c\right)+12=0$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 5: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

Lời giải

Giả sử không có 2 điểm nào trong mặt phẳng được tô cùng màu mà khoảng cách giữa chúng là 1 đơn vị độ dài.

Xét một điểm O bất kỳ có màu vàng trên mặt phẳng.

Vẽ đường tròn $\left(O,\sqrt{3}\right)$. Lấy một điểm P bất kỳ trên $\left(O\right)$.

Dựng hình thoi $OAPB$ có cạnh bằng 1 và có đường chéo là OP.

Dễ thấy $OA=OB=AB=AC=BC=1$.

Theo giả thiết, A, B phải tô khác màu vàng và khác màu nhau.

Do đó P phải tô vàng. Từ đây suy ra tất cả các điểm trên (O) phải tô vàng.

Điều này trái với giả thiết vì dễ thấy tồn tại hai điểm trên (O) có khoảng cách 1 đơn vị độ dài.

P/s: Số 1 có thể được thay bởi bất kỳ số thực dương nào.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC NINH

Năm học 2017 – 2018

Câu 1:

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ với $x\geq 2$.

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức $A=x^5+\dfrac{1}{x^5}$; $B=x^7+\dfrac{1}{x^7}$.

Câu 2: **(4,0 điểm)**

1) Cho phương trình $x^2+\left(m^2+1\right)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\dfrac{2x_1-1}{x_2}+\dfrac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\dfrac{55}{x_1x_2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)\end{cases}$.

Câu 3: **(3,5 điểm)**

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Câu 4: **(6,0 điểm)**

Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{BAC}>90^\circ\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM>CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD=MB.MC$ và $BN.CM=BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

3) Khi $2AB=R$, xác định vị trí của M để $2MA+AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: **(2,5 điểm)**

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\leq\frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT = AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK = MT$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC NINH

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: **(4,0 điểm)**

1) Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 2$.

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức

$A = x^5 + \dfrac{1}{x^5}$; $B = x^7 + \dfrac{1}{x^7}$.

Lời giải

1)

$$P = \frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\dfrac{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1}-\sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\right)}{\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1} = \frac{\sqrt{2}.2\sqrt{x-1}}{2} = \sqrt{2}.\sqrt{x-1}.$$

2)

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-2=7 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=3 \text{ (do } x>0\text{)}$$

Ta có $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=3.6=18$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=47$$

+) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)=x^5+\dfrac{1}{x^3}+x^3+\dfrac{1}{x^5}=x^5+\dfrac{1}{x^5}+18$

$$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}+18=141 \Leftrightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=123$$

+) $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)=x^7+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^7}=x^7+\dfrac{1}{x^7}+3$

$$\Rightarrow x^7+\frac{1}{x^7}+3=846 \Leftrightarrow x^7+\frac{1}{x^7}=843$$

Câu 2: **(4,0 điểm)**

1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)\end{cases}$.

Lời giải

1) $\Delta=\left(m^2+1\right)^2-4\left(m-2\right)=m^4+2\left(m-1\right)^2+7>0$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\left(m^2+1\right)\\x_1x_2=m-2\end{cases}$

$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}\Leftrightarrow\frac{\left(2x_1-1\right)x_1+\left(2x_2-1\right)x_2}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1x_2\right)^2+55}{x_1x_2}$

$\Rightarrow 2x_1^2-x_1+2x_2^2-x_2=\left(x_1x_2\right)^2+55\Leftrightarrow 2\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)-\left(x_1x_2\right)^2-55=0$

$\Leftrightarrow 2\left(-\left(m^2+1\right)\right)^2-4\left(m-2\right)+\left(m^2+1\right)-\left(m-2\right)^2-55=0$

$\Leftrightarrow 2\left(m^4+2m^2+1\right)-4m+8+m^2+1-m^2+4m-4-55=0$

$\Leftrightarrow m^4+2m^2-24=0$ (2)

Đặt $m^2=a$ $\left(a\ge 0\right)$

Phương trình (2) trở thành $a^2+2a-24=0$

Ta có $\Delta'=25>0$ $\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm:

$a_1=4$ (Nhận); $a_2=-6$ (Loại, vì $a<0$)

+) Với $a=4\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=2$; $m=-2$ là giá trị cần tìm.

2) $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4 & (1)\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right) & (2)\end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^2+y-xy-4=0\Leftrightarrow x^2+2x-3-xy+y=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+3\right)-y\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+3-y\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\y=x+3\end{array}\right.$

+) Thay $x=1$ vào phương trình (2) ta được: $4.1^2-24.1+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)^2=9$ (ĐK $y>\frac{11}{3}$

$\Leftrightarrow\sqrt{3y^2-11y}=10-2y\Leftrightarrow 3y^2-11=\left(10-2y\right)^2\Leftrightarrow y^2-29y+100=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=25(TM)\\y=4(TM)\end{array}\right.$

+) Thay $y = x+3$ vào phương trình (2) ta được

$$4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3(x+3)-11}+\sqrt{x+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-24x+35=5\sqrt{3x-2}+5\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 4x^2-24x+35-5\sqrt{3x-2}-5\sqrt{x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-28x+24+\left(3x+2-5\sqrt{3x-2}\right)+\left(x+9-5\sqrt{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)(x-6)+\frac{9(x-1)(x-6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{(x-1)(x-6)}{x+9+5\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-6)\left(4+\frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}\right)=0$$

Vì $\left(4+\frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}\right)>0,\ \forall x\ge \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow (x-1)(x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=4 \\ x=6\Rightarrow y=9 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ là: $(1;4)$, $(1;25)$, $(6;9)$.

Câu 3: **(3,5 điểm)**

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Lời giải

1) $\begin{cases} m+n^2 \,\vdots\, m^2-n \\ n+m^2 \,\vdots\, n^2-m \end{cases}$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n^2\ge m^2-n \\ n+m^2\ge n^2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-n+1)(m+n)\ge 0 \\ (n-m+1)(m+n)\ge 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-n+1\ge 0 \\ n-m+1\ge 0 \end{cases}$ (do m, n nguyên dương)

$\Leftrightarrow -1\le m-n\le 1$

*) TH1: $m-n=-1 \Leftrightarrow m=n-1$

+) $m+n^2 \,\vdots\, m^2-n$

$$\Rightarrow \frac{m+n^2}{m^2-n}\in Z$$

$$\Rightarrow \frac{n-1+n^2}{(n-1)^2-n}\in Z$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2-3n+1)+4n-2}{n^2-3n+1}\in Z$$

$$\Rightarrow \frac{4n-2}{n^2-3n+1}\in Z \Rightarrow n^2-3n+1\le 4n-2$$

$\Rightarrow n^2-7n+3\le 0 \Rightarrow \dfrac{7-\sqrt{37}}{2}\le n\le \dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$

vì $n\in \mathbb{N}^* \Rightarrow n\in\{1;2;3;4;5;6\}$

$\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;3)$.

*) TH2: $m-n=0\Leftrightarrow m=n$

$m+n^2 \,\vdots\, m^2-n$

$\Rightarrow \dfrac{m+n^2}{m^2-n}\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \dfrac{n+n^2}{n^2-n}\in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{\left(n^2-n\right)+2n}{n^2-n}\in \mathbb{Z}\Rightarrow \dfrac{2}{n-1}\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n-1\le 2 \Rightarrow n\le 3$

Vì $n\in \mathbb{N}^* \Rightarrow n\in\{1;2;3\} \Rightarrow m\in\{1;2;3\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;2)$, $(3;3)$.

*) TH3: $m-n=1\Leftrightarrow m=n+1$

$n+m^2 \,\vdots\, n^2-m$

$\Rightarrow \dfrac{n+m^2}{n^2-m}\in \mathbb{Z}\Rightarrow \dfrac{n+(n+1)^2}{n^2-n-1}\in \mathbb{Z}\Rightarrow \dfrac{n^2+3n+1}{n^2-n-1}\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \dfrac{4n+2}{n^2-n-1}\in \mathbb{Z}\Rightarrow n^2-n-1\le 4n+2 \Rightarrow n^2-5n-3\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\le n\le \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

Vì $n\in \mathbb{N}^* \Rightarrow n\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow m\in\{2;3;4;5;6\}$

Thử lại vào (1) ta được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(3;2)$

2) Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A. Khi đó $|T|=8$ và với a, b thuộc T ta có a^2+b^2, do đó $k\ge 9$

Xét các cặp số sau:

$A=\{1;4\}\cup\{3;2\}\cup\{5;16\}\cup\{6;15\}\cup\{7;12\}\cup\{8;13\}\cup\{9;10\}\cup\{11;14\}$

Ta thấy tổng bình phương của mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố

Xét T là một tập con của A và $|T|=9$, khi đó theo nguyên lí Dirichlet T sẽ chứa ít nhất 1 cặp nói trên.

Vậy $k_{\min}=9$

Câu 4: **(6,0 điểm)**

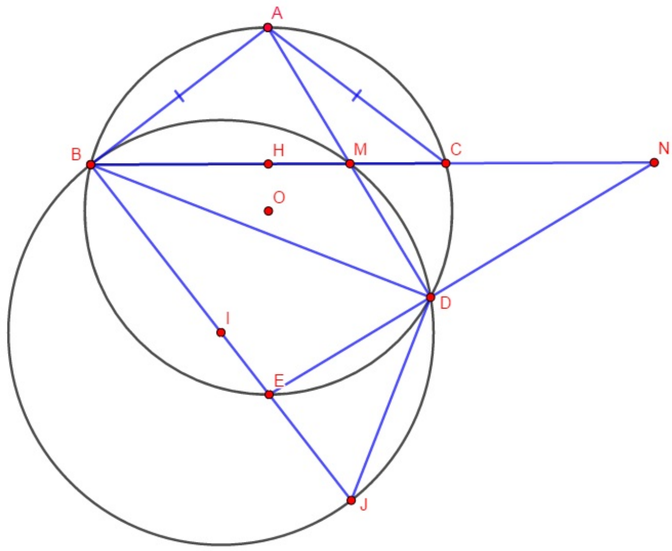
Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{BAC}>90^\circ\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM>CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset\frown{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

3) Khi $2AB = R$, xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



1) +) Ta có $\Delta MAB \sim \Delta MCD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow MA.MD = MB.MC$ (đpcm)

+) Theo gt A là điểm chính giữa cung nhỏ BC $\Rightarrow DA$ là tia phân giác $\widehat{BDC}$ của ΔBDC (1)

Mặt khác, E là điểm chính giữa cung lớn BC $\Rightarrow AE$ là đường kính của (O)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = 90° \Rightarrow DA \perp DN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DN$ là tia phân giác ngoài $\widehat{BDC}$ của ΔBDC

Do đó, theo tính chất cảu tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của tam giác ta có:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow BM.CN = BN.CM \text{ (đpcm).}$$

2) Kẻ BE cắt (I) tại J

Ta có $\widehat{EBD} = \widehat{EAD}$

$\widehat{BJD} = \widehat{DMC}$ (góc trong- góc ngoài)

Mà $\widehat{EAD} + \widehat{DMC} = 90° \Rightarrow \widehat{EBD} + \widehat{BJD} = 90°$

$\Rightarrow BD \perp JD \Rightarrow BJ$ là đường kính $\Rightarrow I \in BJ$ hay $I \in BE$

$\Rightarrow B, I, E$ thẳng hàng (đpcm).

3) $\Delta HAM \backsim \Delta DAE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AE} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AM.AD = AH.AE$

Với $AE = 2R$; $AH = \dfrac{AB^2}{AE} = \dfrac{R}{8}$

$\Rightarrow AM.AD = \dfrac{R^2}{4}$

Theo BĐT Cô- si: $2AM + AD \geq 2\sqrt{2AM.AD} = 2\sqrt{2.\dfrac{R^2}{4}} = R\sqrt{2}$

GTNN đạt được khi: $2AM = AD$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AD

$\Rightarrow$ $OM \perp AD$

$\Rightarrow$ M là giao điểm của đường tròn đường kính OA với BC.

Câu 5: **(2,5 điểm)**

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT = AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK = MT$.

Lời giải

1) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$VT = \frac{25}{3\sqrt[3]{2.2\left(xy+yz+zx\right)}} \geq \frac{25}{xy+yz+zx+4} = \frac{25}{xy+yz+zx+x+y+z+1}$$

$$\geq \frac{25}{\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)}$$

Cần chứng minh $\sum\left(x+1\right)^2\left(y+1\right) \leq 25$

Sau khi rút gọn, BĐT trở thành $x^2y+y^2z+z^2x \leq 4$

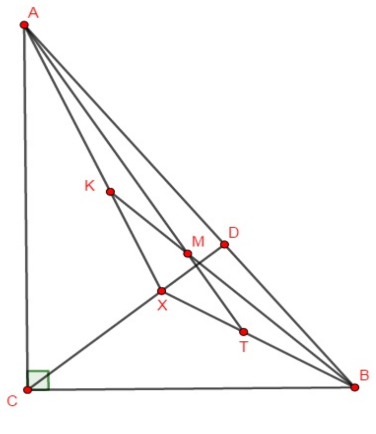
Giả sử y nằm giữa x và z, suy ra $\left(y-x\right)\left(y-z\right) \leq 0$ hay $y^2+zx \leq xy+yz$

Do đó $y^2z+z^2x \leq xyz+yz^2$

$$x^2y+y^2z+z^2x \leq x^2y+xyz+yz^2 \leq y\left(z+x\right)^2 = \frac{1}{2}.2y\left(z+x\right)\left(z+x\right) \leq \frac{1}{54}$$

$\left(2y+z+x+z+x\right)^3 = 4$.

2)



Vẽ đường tròn $\left(A;AC\right)$, $\left(B;BC\right)$ và đường tròn (I) ngoại tiếp ΔABC

Kẻ AX cắt (I) tại Y, BX cắt (I) tại Z, AZ cắt BY tại P

Ta có $\widehat{AYB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow AY\perp BP$

$\widehat{BZA}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow BZ\perp AP$

$\Rightarrow X$ là trực tâm của ΔABP

Ta thấy $\Delta ABC\backsim\Delta ACD\Rightarrow AC^2=AD.AB=AT^2$

$\Rightarrow\widehat{ATD}=\widehat{ABT}$

Tương tự, ta có $\widehat{BKD}=\widehat{BAK}$

Ta có $\widehat{APD}=\widehat{ABZ}=\widehat{ATZ}$ $\Rightarrow$ tứ giác $ADTP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AT\perp PT$ (1)

Tương tự, ta có $BK\perp PK$ (2)

$\Rightarrow PK=PT$ (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra $\Delta MKP=\Delta MTP$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow MK=MT$ (đpcm).

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẾN TRE

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: (6 điểm)

a) Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x-2016}+\sqrt{2018x-2017}=2018$.

b) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+6x^2y=7\\2y^3+3xy^2=5\end{cases}$.

Câu 2: (4 điểm)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12\left(a^2+28\right)}+\sqrt{12\left(b^2+28\right)}+\sqrt{c^2+28}}.$$

Câu 3: (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Giả sử các điểm B,C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB<AC$ và $AC<BC$. Đường trung thực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng: $OM.ON=R^2$.

b) Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T. Chứng minh ba điểm S,T,O thẳng hàng.

Câu 4: (4 điểm)

a) Tìm các số x,y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16\left(x^3-y^3\right)=15xy+371$.

b) Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẾN TRE – TỈNH BẾN TRE

NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 5: (6 điểm)

a) Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x-2016}+\sqrt{2018x-2017}=2018$.

b) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+6x^2y=7\\2y^3+3xy^2=5\end{cases}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ge\dfrac{2017}{2018}$.

Xét $\dfrac{2017}{2018}\le x<1\Rightarrow\begin{cases}2017x-2016<1\\2018x-2017<1\end{cases}\Rightarrow 2017\sqrt{2017x-2016}+\sqrt{2018-2017}<2018$.

Xét $x>1\Rightarrow\begin{cases}2017x-2016>1\\2018x-2017>1\end{cases}\Rightarrow 2017\sqrt{2017x-2016}+\sqrt{2018x-2017}>2018$.

Xét $x=1$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

b) Ta có: $A=\dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

$$A=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\sqrt{5}+5}+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2.$$

c)

$$\begin{cases}x^3+6x^2y=7\\2y^3+3xy^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+6x^2y=7\\2y^3+3xy^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^3+30x^2y=35\\14y^3+21xy^2=35\end{cases}\Leftrightarrow 5x^3+30x^2y=14y^3+21xy^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^3-5x^2y+35x^2y-35x^2y+14xy^2-14y^3=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(5x^2+35xy+14y^2\right)=0.$$

Xét $x-y=0\Rightarrow x=y$ thay vào phương trình $x^3+6x^2y=7$ ta được

$7x^3=7\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$.

Xét $5x^2+35xy+14y^2=0$. Đặt $y=xt$, ta có:

$5x^2+35x^2t+14x^2t^2=0\Leftrightarrow x^2\left(14t^2+35t+5\right)=0$.

Vì $x=0$ không phải là nghiệm nên $14t^2+35t+5=0 \Rightarrow t=\dfrac{-35\pm 3\sqrt{105}}{28}$.

Với $t=\dfrac{-35-3\sqrt{105}}{28} \Rightarrow y=x\left(\dfrac{-35-3\sqrt{105}}{28}\right)$ thay vào phương trình $x^3+6x^2y=7$ ta được

$$x^3=\frac{98}{-91-9\sqrt{105}} \Rightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{98}{91+9\sqrt{105}}} \Rightarrow y=\frac{35+3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\frac{98}{91+9\sqrt{105}}}.$$

Với $t=\dfrac{-35+3\sqrt{105}}{28} \Rightarrow y=x\left(\dfrac{-35+3\sqrt{105}}{28}\right)$ thay vào phương trình $x^3+6x^2y=7$ ta được

$$x^3=\frac{98}{-91+9\sqrt{105}} \Rightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}} \Rightarrow y=\frac{35-3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}}.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm: $(1;1)$, $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{98}{91+9\sqrt{105}}};\dfrac{35+3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\dfrac{98}{91+9\sqrt{105}}}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{98}{91-9\sqrt{105}}};\dfrac{35-3\sqrt{105}}{28}\sqrt[3]{\dfrac{98}{91-9\sqrt{105}}}\right)$.

Câu 6: (4 điểm)
Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12\left(a^2+28\right)}+\sqrt{12\left(b^2+28\right)}+\sqrt{c^2+28}}.$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{12\left(a^2+28\right)}=\sqrt{12\left(a^2+ab+bc+ca\right)}=\sqrt{6(a+b).2(a+c)}$.

Áp dụng BĐT CauChy được $\sqrt{6(a+b)2(a+c)}\le\dfrac{6(a+b)+2(a+c)}{2}=4a+3b+c$.

$\Rightarrow \sqrt{12\left(a^2+28\right)}\le 4a+3b+c$ (1). Tương tự $\sqrt{12\left(b^2+28\right)}\le 4b+3a+c$ (2) và $\sqrt{c^2+28}\le\dfrac{a+b}{2}+c$ (3).

Cộng theo vế (1), (2) và (3) được:

$$\sqrt{12\left(a^2+28\right)}+\sqrt{12\left(b^2+28\right)}+\sqrt{c^2+28}\le\frac{15a+15b+6c}{2}.$$

Do đó: $P \ge \dfrac{2(5a+5b+2c)}{15a+15b+6c} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy GTNN của P là $\dfrac{2}{3}$. Đạt được khi và chỉ khi $a=b=\sqrt{\dfrac{28}{11}}$, $c=5\sqrt{\dfrac{28}{11}}$.

Câu 7: (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Giả sử các điểm B,C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB<AC$ và $AC<BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

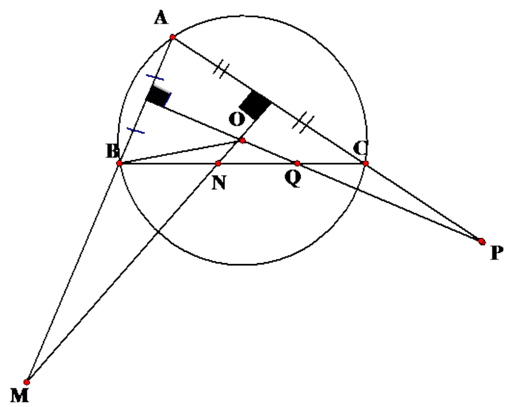
a) Chứng minh rằng: $OM.ON=R^2$.

b) Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T. Chứng minh ba điểm S,T,O thẳng hàng.

Lời giải

a)



Xét ΔOBM và ΔONB, ta có:

$\widehat{BOM}$: chung

Ta có $\widehat{OMB}=90°-\widehat{A}$

Và $\widehat{OBN}=\dfrac{1}{2}\left(180°-\widehat{BOC}\right)=90°-\widehat{A}$

Nên $\widehat{OMB}=\widehat{OBN}$

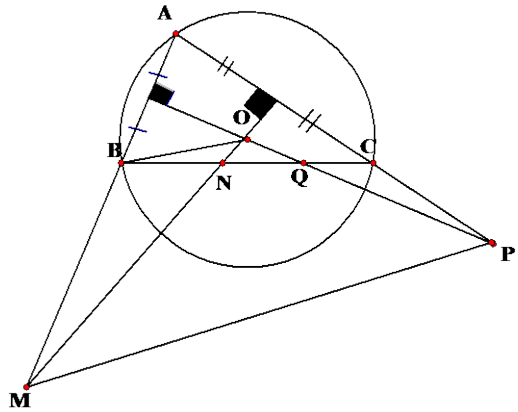
Vậy $\Delta OBM \sim \Delta ONB$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{OM}{OB}=\dfrac{OB}{ON}$

$\Rightarrow ON.OM = OB^2 = R^2$

$\Rightarrow OM.ON = R^2$.

b)



Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có:

$OP.OQ = R^2 \Rightarrow ON.OM = OP.OQ$.

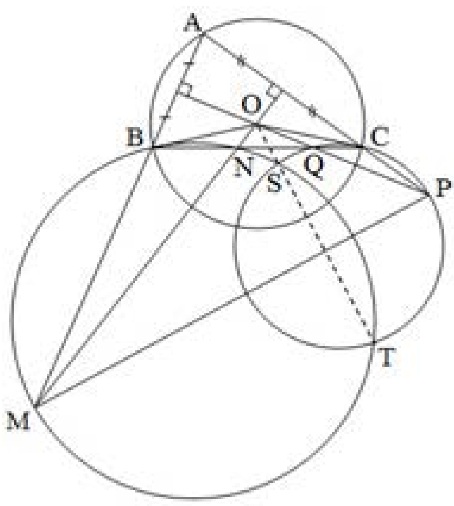
$\Rightarrow \dfrac{OP}{ON} = \dfrac{OM}{OQ}$, có $\widehat{MOP}$ chung.

Vậy $\Delta OPM \sim \Delta ONQ$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ONQ} = \widehat{OPM}$.

Suy ra tứ giác $MNQP$ nội tiếp hay bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T. Chứng minh ba điểm S, T, O thẳng hàng.



Ta chứng minh O thuộc đường thẳng ST. Thật vậy, giả sử OS cắt hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ lần lượt tại T_1 và T_2.

Xét ΔONS và ΔOT_1M .

$\widehat{MOT_1}$: chung

$\widehat{OT_1M} = \widehat{ONS}$ ($MNST_1$ nội tiếp)

Vậy $\Delta ONS \sim \Delta OT_1M$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{ON}{OT_1} = \dfrac{OS}{OM}$.

$\Rightarrow ON.OM = OS.OT_1 \ (1)$.

Chứng minh tương tự, $OP.OQ = OS.OT_2 \ (2)$

Mà $ON.OM = OP.OQ \ (3)$.

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $OS.OT_1 = OS.OT_2$.

Do đó T_1 trùng với T_2.

Vậy ba điểm S, T, O thẳng hàng.

Câu 8: (4 điểm)

a) Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16\left(x^3 - y^3\right) = 15xy + 371$.

b) Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

Lời giải

a) Vì x, y nguyên dương nên $16\left(x^3 - y^3\right) = 15xy + 371 > 0 \Rightarrow x > y$.

Ta lại có $15xy = 16\left(x^3 - y^3\right) - 371$ là số lẻ nên x, y đều lẻ. suy ra

$y \ge 1; x > y \ge 1 \Rightarrow x \ge 3$.

Xét $x = 3 \Rightarrow y < 3 \Rightarrow y = 1$ thay vào phương trình thỏa mãn.

Xét $x \ge 5$ ta có $x - 2 \ge y$, suy ra $16\left(x^3 - y^3\right) \ge 16\left[x^3 - (x-2)^3\right] = 16\left(6x^2 - 12x + 8\right)$.

Mặt khác $15xy + 371 \le 15x(x-2) + 371 = 15x^2 - 30x + 371$. Ta chứng minh

$16\left(6x^2 - 12x + 8\right) > 15x^2 - 30x + 371$.

Thật vậy, $16\left(6x^2-12x+8\right)>15x^2-30x+371$

$\Leftrightarrow 81x^2-162x-243>0 \Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)>0$ đúng với mọi $x\ge 5$.

Suy ra $16\left(x^3-y^3\right)>15xy+371$ với mọi $x\ge 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;1)$.

b) Ta có 671 chia cho 3 dư 2; 673 chia cho 3 dư 1; 675 chia cho 3 dư 0.
Ta thấy mỗi loại bóng đèn có số bóng khi chia cho 3 được các số dư khác nhau 0, 1, 2.

Sau mỗi bước thay bóng đèn, số bóng đèn mỗi loại giảm đi 1 hoặc tăng thêm 2, khi đó số dư của chúng khi chia cho 3 thay đổi như sau:

- Số chia cho 3 dư 0 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 2.

- Số chia cho 3 dư 1 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 0.

- Số chia cho 3 dư 2 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 1.

Do đó sau mỗi bước thay bóng thì số bóng đèn mỗi loại chia cho 3 cũng có số dư khác nhau là 0, 1, 2. Vì vậy luôn luôn chỉ có 1 loại bóng đèn có số lượng bóng chia hết cho 3. Giả sử đến một lúc nào đó tất cả bóng đèn cùng một loại, thì số bóng đèn của 2 loại kia đều 0 và chia hết cho 3 (mâu thuẫn).

Vậy không thể thay bóng theo quy trình như trên để tất cả bóng đèn cùng một loại.

ĐỀ THI CHỌN HSG DAKLAK

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(4 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $P=\dfrac{2017}{2018}$.

2) Giải phương trình $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right)=20$.

Câu 2: *(4 điểm)*

1) Cho phương trình $x^2+2(2m-3)x+m^2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 khác 0, (chúng có thể trùng nhau) và biểu thức $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Cho parabol $(P): y=ax^2$. Tìm điều kiện của a để trên (P) có $A(x_0;y_0)$ với hoành độ dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}$.

Câu 3: *(4 điểm)*

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2-y^2+4x-2y=18$.

2) Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

a) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,b là 1.

b) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho ΔABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E ($D\neq B, E\neq C$). BE cắt CD tại H. Kéo dài AH cắt BC tại F.

1) Chứng minh các tứ giác $ADHE$ và $BDHF$ là tứ giác nội tiếp.

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác $HMFN$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

Câu 5: *(2 điểm)*

Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-y+2018$.

Câu 6: *(2 điểm)*

Cho tam giác đều ABC. Một điểm M nằm trong tam giác nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc bằng 150^0. Chứng minh $MA^2\geq 2MB.MC$.

--HẾT--

LỜI GIẢI

ĐỀ THI CHỌN HSG DAKLAK - NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(4 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $P=\dfrac{2017}{2018}$.

2) Giải phương trình $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right)=20$.

Lời giải

1) Ta có:

$$P=\frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}=\frac{x-3+2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}}{x+3\sqrt{x}+2}=\frac{x-3+2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.$$

Mặt khác $P=\dfrac{2017}{2018}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2017}{2018}\Leftrightarrow\sqrt{x}=2016\Leftrightarrow x=2016^2$.

2) Ta có:

$$\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4\right)=20\Leftrightarrow x\left(x-4\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)=20\Leftrightarrow\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-8\right)=20$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-4+4\right)\left(x^2-2x-4-4\right)=20\Leftrightarrow\left(x^2-2x-4\right)^2-16=20.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-4\right)^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-4=6\\x^2-2x-4=-6\end{array}\right..$$

Ta thấy phương trình $x^2-2x-4=-6$ vô nghiệm.

Mặt khác, $x^2-2x-4=6\Leftrightarrow x^2-2x-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{11}\\x=1+\sqrt{11}\end{array}\right..$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1-\sqrt{11}$ và $x=1+\sqrt{11}$.

Câu 2: *(4 điểm)*

1) Cho phương trình $x^2+2\left(2m-3\right)x+m^2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0, (chúng có thể trùng nhau) và biểu thức $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Cho parabol $\left(P\right): y=ax^2$. Tìm điều kiện của a để trên $\left(P\right)$ có $A\left(x_0;y_0\right)$ với hoành độ dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}$.

Lời giải

1)Phương trình $x^2+2(2m-3)x+m^2=0$ có hai nghiệm khác 0 khi

$$\begin{cases}(2m-3)^2-m^2\ge 0\\ m^2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-3)(m-1)\ge 0\\ m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 3\end{array}\right.\\ m\ne 0\end{cases}.$$

Mặt khác, theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2(2m-3)\\ x_1x_2=m^2\end{cases}$.

Lại có $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{-2(2m-3)}{m^2}=\dfrac{-12m+18}{3m^2}=\dfrac{-2m^2+2m^2-12m+18}{3m^2}$

$=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2(m-3)^2}{3m^2}\ge-\dfrac{2}{3}$.

Dấu bằng sảy ra khi $m=3$.

2) Ta có

$\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}\Leftrightarrow\sqrt{x_0^2+1}-x_0=\sqrt{y_0+4}-\sqrt{y_0+3}$.

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+1}+x_0}=\dfrac{1}{\sqrt{y_0+4}+\sqrt{y_0+3}}$.

Vậy nên $\begin{cases}\sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4}=x_0-\sqrt{y_0+3}\\ \sqrt{x_0^2+1}+\sqrt{y_0+4}=x_0+\sqrt{y_0+3}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}=\sqrt{y_0+4}\Rightarrow x_0^2+1=y_0+4$

$\Rightarrow(1-a)x_0^2=3\Rightarrow x_0^2=\dfrac{3}{1-a}>0\Rightarrow 1-a>0\Leftrightarrow a<1$.

Câu 3: *(4 điểm)*

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2-y^2+4x-2y=18$.

2) Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

a) a,b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a,b là 1.

b) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Lời giải

1.Ta có $x^2-y^2+4x-2y=18\Leftrightarrow(x^2+4x+4)-(y^2+2y+1)=21$

$\Leftrightarrow(x+2)^2-(y+1)^2=21\Leftrightarrow(x-y+1)(x+y+3)=21$.

Do đó sảy ra các trường hợp sau:

+) $\begin{cases}x-y+1=1\\ x+y+3=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\ y=9\end{cases}$.

+) $\begin{cases} x-y+1=3 \\ x+y+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

2. Ta có: $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: $1; a\ ; b(ab+1)(2ab+1)$; b; ab; $a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1; ab(ab+1); N\ ; (ab+1)(2ab+1)$; $b(ab+1); a(2ab+1)\ ; a(ab+1)$; $b(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì a; b; $ab+1$; $2ab+1$ là số nguyên tố Do $a,\ b>1 \Rightarrow ab+1>2$

Nếu $a;b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b=3$.

Vậy $a=2;\ b=3$.

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho ΔABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E ($D \neq B, E \neq C$). BE cắt CD tại H. Kéo dài AH cắt BC tại F.

1) Chứng minh các tứ giác $ADHE$ và $BDHF$ là tứ giác nội tiếp.

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác $HMFN$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

Lời giải

1) Chứng minh tứ giác ADHE và BDHF là tứ giác nội tiếp. (Đơn giản).

2) Ta có:

$\widehat{BAC}+\widehat{DHE}=\widehat{MFN}+\widehat{BHC}=180^o$ (tứ giác ADHE; HMFN nội tiếp).

Mà $\widehat{DHE}=\widehat{BHC}$ (đối đỉnh) suy ra $\widehat{BAC}=\widehat{MFN}=\widehat{F_1}+\widehat{F_2}$. Lại có $\widehat{F_1}=\widehat{B_1};\widehat{F_2}=\widehat{C_1};\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$ (tứ giác $BDHF$, $CEHF$, $BCED$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{F_1}=\widehat{F_2}=\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$.

Do đó $\widehat{BAC}=2\widehat{B_1}=2\left(90^o-\widehat{BAC}\right)\Rightarrow 3\widehat{BAC}=180^o\Rightarrow \widehat{BAC}=60^o$

Câu 5: (2 điểm)

Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-y+2018$.

Lời giải

Điều kiện $-3\le x\le 3$.

Khi đó $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$

$\Leftrightarrow (y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3+2\sqrt{9-x^2}$

$\Leftrightarrow a^3+2a=b^3+2b,\left(a=y+1;b=\sqrt{9-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^3-b^3\right)+2(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+2\right)=0$

Do $a^2+ab+b^2+2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2+2>0$.

Suy ra

$a-b=0\Leftrightarrow y+1-\sqrt{9-x^2}=0\Leftrightarrow y=\sqrt{9-x^2}-1$

$\Leftrightarrow x-y=x-\sqrt{9-x^2}+1=4-\left(3-x+\sqrt{9-x^2}\right)\le 4$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases}3-x=0\\ 9-x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=-1.$

Vậy giá trị lớn nhất của T là 2022 tại $x=3;y=-1.$

Ta lại có

$x-y\ge 1-3\sqrt{2}\Leftrightarrow x-\sqrt{9-x^2}+1\ge 1-3\sqrt{2}\Leftrightarrow x+3\sqrt{2}\ge\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow x^2+6\sqrt{2}x+18\ge 9-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+6\sqrt{2}x+9\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}x+3\right)^2\ge 0$ (Đúng).

Suy ra $T=x-y+2018\ge 1-3\sqrt{2}+2018=2019-3\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $\sqrt{2}x+3=0\Leftrightarrow x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn).

Suy ra $y=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\left(1-3\sqrt{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Vậy GTNN của T là $2019-3\sqrt{2}$ tại $x=\frac{-3\sqrt{2}}{2};y=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 6: (2 điểm)

Cho tam giác đều ABC. Một điểm M nằm trong tam giác nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc bằng 150^o. Chứng minh $MA^2 \ge 2MB.MC$.

Lời giải

Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chưa điểm M , lấy điểm E sao cho ΔAME đều;
Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chưa điểm M , lấy điểm F sao cho ΔCMF đều.

-Ta có

$\widehat{MAE} + \widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{BAE} = \widehat{MAB} + \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAM} \Rightarrow \Delta BAE = \Delta CAM$ (cgc). Suy ra $BE = CM$; $\widehat{ABE} = \widehat{ACM}$.

-Tương tự $\widehat{MCF} = \widehat{ACB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{MCB} + \widehat{BCF} = \widehat{MCB} + \widehat{ACM} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{ACM}$.

-Ta có $BE = CM; CM = CF \Rightarrow BE = CF; \widehat{ABE} = \widehat{ACM}; \widehat{ACM} = \widehat{BCF} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BCF}$.

Suy ra $\Delta BAE = \Delta CBF\left(c-g-c\right) \Rightarrow AE = BF$. Mà $AE = AM \Rightarrow BF = AM$.

-Mặt khác $\widehat{BMF} = \widehat{BMC} - \widehat{CMF} = 150^o - 60^o = 90^o$. (ΔCMF đều, nên $MF = MC$)

-Xét $\Delta BMF : \widehat{BMF} = 90^0 \Rightarrow BF^2 = MB^2 + MF^2 \Rightarrow MA^2 = MB^2 + MC^2 \ge 2MB.MC$ (ΔCMF đều $MF = MC$).

--HẾT--

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH HÀ GIANG

NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1.

a) Cho $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính $A=\left(x^4-x^3-x^2+2x-1\right)^{2017}$.

b) Cho a,b,c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng: $A=\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.

b) Cho $P(x)=x^2+ax+b$ với $a,b\in N$. Biết $P(1)=2017$. Tính $P(3)+P(-1)$.

Câu 3.

Tìm các số nguyên dương n sao cho n^4+n^3+1 là số chính phương.

Câu 4.

Cho $a;b;c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+\dfrac{a^2+b^2}{c}\geq 2(a+b+c)$.

Câu 5.

Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi D là trung điểm BC. Lấy M bất kỳ trên cạnh AD, $(M\neq A,D)$. Gọi N,P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống các cạnh AB,AC và H là hình chiếu của N xuống đường thẳng PD.

a) Chứng mính $AH\perp BH$.

b) Đường thẳng qua B, song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I. Chứng minh ba điểm H,N,I thẳng hàng.

............HẾT.........

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH HÀ GIANG NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1.

a) Cho $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính $A=\left(x^4-x^3-x^2+2x-1\right)^{2017}$.

b) Cho a,b,c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng: $A=\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải.

a. Ta có: $x\sqrt{2}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\left(\sqrt{7}+1\right)-\left(\sqrt{7}-1\right)=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$.

Vậy : $A=1$.

b. Ta có:

$$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{2}{(a-b)(b-c)}+\frac{2}{(b-c)(c-a)}+\frac{2}{(c-a)(a-b)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.

b) Cho $P(x)=x^2+ax+b$ với $a,b\in N$. Biết $P(1)=2017$. Tính $P(3)+P(-1)$.

Lời giải.

a. ĐKXĐ: $x\neq 1; x\neq \dfrac{3}{2}$

- Xét $x=0$ không là nghiệm.
- Xét $x\neq 0$, phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{2}{2x-5+\dfrac{3}{x}}+\dfrac{13}{2x+1+\dfrac{3}{x}}=6$.

Đặt : $2x-5+\dfrac{3}{x}=t$ ta được $\dfrac{2}{t}+\dfrac{13}{t+6}=6\Leftrightarrow 2t^2+7t-4=0\Leftrightarrow (2t-1)(t+4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}\\ t=-4\end{array}\right.$

✓ Với $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2x-5+\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4}\\ x=2\end{array}\right.$.

✓ Với $t=-4 \Rightarrow 2x-5+\dfrac{3}{x}=-4 \Rightarrow 2x^2-x+3=0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{3}{4}\,;\,2\right\}$.

b. Vì $P(1)=2017 \Rightarrow 2017=1+a+b \Rightarrow a+b=2016$.

Do đó: $P(3)+P(-1)=(9+3a+b)+(1-a+b)=10+2(a+b)=4042$.

Câu 3.

Tìm các số nguyên dương n sao cho n^4+n^3+1 là số chính phương.

Lời giải.

Đặt : $A=n^4+n^3+1$.

- Với $n=1$ thì $A=3$ không thỏa mãn.
- Với $n\geq 2$ ta có $4A=4n^4+4n^3+4$.
  - Xét: $4A-\left(2n^2+n-1\right)^2=3n^2+2n+3>0 \Rightarrow 4A>\left(2n^2+n-1\right)^2$.
  - Xét: $4A-\left(2n^2+n\right)^2=4-n^2\leq 0 \Rightarrow 4A\leq\left(2n^2+n\right)^2$.

Vậy: $4A=\left(2n^2+n\right)^2 \Rightarrow n=2$

Với $n=2$ thì $A=25$ thỏa mãn bài toán.

Câu 4.

Cho $a;b;c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+\dfrac{a^2+b^2}{c}\geq 2(a+b+c)$.

Lời giải.

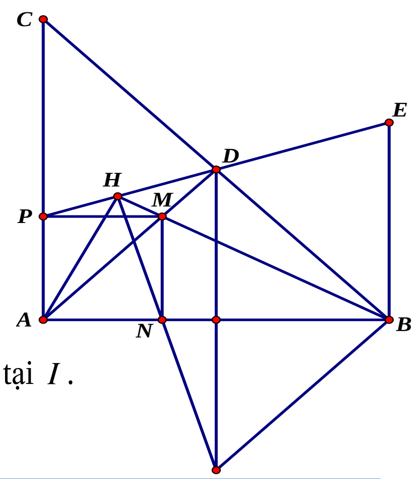
Áp dụng bất đăngt thức Cauchy ta có :

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq 2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$

$$=\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)\geq 2(a+b+c)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 5.



Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi D là trung điểm BC. Lấy M bất kỳ trên cạnh AD, $(M\neq A, D)$. Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống các cạnh AB, AC và H là hình chiếu của N xuống đường thẳng PD.

a) Chứng minh $AH\perp BH$.

b) Đường thẳng qua B, song song với AD cắt đường trung trực của AB tại I. Chứng minh ba điểm H, N, I thẳng hàng.

Lời giải.

a. Đường thẳng qua B song song với AC cắt tia PD tại E

Ta có : $BE = PC = BN$ suy ra ΔBEN vuông cân tại B.

Do: $\widehat{NBE} = \widehat{NHE} = 90^0$ nên $B; H$ cùng thuộc đường tròn đường kính NE.

Suy ra : $\widehat{NHB} = \widehat{NEB} = 45^0$ (1)

Tương tự hai điểm $A; H$ cùng thuộc đường tròn đường kính PN suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{APN} = 45^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHB} = 90^0$ hay $AH \perp BH$.

b. Từ giả thiết suy ra $\widehat{AIB} = 90^0$ nên I là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AIB}$ của đường tròn đường kính AB.

Mặt khác, theo kết quả câu a thì tia HN là tia phân giác của $\widehat{AHB}$ và $\widehat{AHB}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AIB}$ của đường tròn đường kính AB. nên HN phải đi qua I Do đó ba điểm H, N, I thẳng hàng.

...........HẾT.........

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HÀ TĨNH NĂM HỌC 2017-2018

I. – PHẦN GHI KẾT QUẢ (Thí sinh chỉ ghi kết quả vào tờ giấy thi)

Câu 1:

Tìm số cạnh của đa giác lồi có 27 đường chéo.

Câu 2:

Cho $a_i = 2017$ và $a_{n+1} = a_n + 2017$ với mọi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Tìm a_{2018} .

Câu 3:

Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $b > 2a > 0$. Tính giá trị của $p = \dfrac{5ab}{3a^2 + 2b^2}$.

Câu 4:

Hai vật chuyển động trên một đường tròn có chu vi bằng $200m$, vận tốc vật thứ nhất là $4m/s$, vận tốc vật thứ hai là $6m/s$. Hai vật xuất phát cùng một thời điểm tại một vị trí và chuyển động cùng chiều. Hỏi sau 16 phút vật thứ hai vượt lên trước vật thứ nhất mấy lần? (không kể lúc xuất phát)

Câu 5:

Có bao nhiêu tam giác khác nhau mà độ dài các cạnh là các số tự nhiên (cùng đơn vị đo) thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Câu 6:

Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+3} = 2$.

Câu 7:

Cho các số a, b thỏa mãn $a^3 + 8b^2 = 1 - 6ab$. Tính $a + 2b$.

Câu 8:

Tìm các số nguyên dương a ,b ,c, $(b > c)$ thỏa mãn $\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ 2(a+b+c) = bc \end{cases}$.

Câu 9:

Biết khoảng cách từ trọng tâm tam giác ABC đến các cạnh tỉ lệ với các số 2 ; 3 ; 4 và chu vi của tam giác ABC là 26. Tìm độ dài các cạnh tam giác ABC .

Câu 10:

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$; $\widehat{B} = 50^\circ$, cạnh $AB = 2\sqrt{3}$. Tính $AC(AC + BC)$.

II. – PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 \\ 2(x^3 - y) = y^3 - x \end{cases}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D ,E , F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Gọi I là giao điểm của BO và EF. M là điểm di động trên đoạn CE. Gọi H là giao điểm của BM và EF.

a) Chứng minh nếu $AM = AB$ thì các tứ giác $BDHF$, $ABHI$ nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của BM và cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$ của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE , DF. Chứng minh $PQ \le EF$.

Câu 13: Cho x , y là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của $F = \left|5x^2 + 11xy - 5y^2\right|$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HÀ TĨNH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1:

Tìm số cạnh của đa giác lồi có 27 đường chéo.

Lời giải

Gọi số cạnh của đa giác lồi là n ,$(n \in \mathbb{N}, n > 3)$. Ta có $\dfrac{n(n-3)}{2} = 27 \Rightarrow$

$n = 9$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

Cho $a_1 = 2017$ và $a_{n+1} = a_n + 2017$ với mọi $n \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm a_{2018}.

Lời giải

Ta có $a_2 = a_1 + 2017 = 2.2017$, $a_3 = a_2 + 2017 = 3.2017$,…

Do đó $a_{2018} = 2018.2017 = 4070306$.

Câu 3: *(5,0 điểm)*

Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ $\Leftrightarrow$ với $b > 2a > 0$. Tính giá trị của $p = \dfrac{5ab}{3a^2 + 2b^2}$.

Lời giải

Ta có $4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a-b)(4a-b) = 0$. Do $b > 2a > 0$ nên

$b = 4a$. Suy ra $P = \dfrac{20a^2}{3a^2 + 32a^2} = \dfrac{4}{7}$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Hai vật chuyển động trên một đường tròn có chu vi bằng $200m$, vận tốc vật thứ nhất là $4m/s$, vận tốc vật thứ hai là $6m/s$. Hai vật xuất phát cùng một thời điểm tại một vị trí và chuyển động cùng chiều. Hỏi sau 16 phút vật thứ hai vượt lên trước vật thứ nhất mấy lần? (không kể lúc xuất phát)

Lời giải

Gọi t là thời gian để hai vật gặp nhau tính từ lúc xuất phát. Quảng đường mỗi vật đi được đến lúc gặp nhau là $S_1 = v_1 t = 4t$, $S_2 = v_2 t = 6t$. Vì hai vật đi cùng chiều nên $S_2 - S_1 = S \Rightarrow 6t - 4t = 200 \Rightarrow t = 100$ (giây).

Do đó cứ sau 100 giây chúng gặp nhau một lần. Vậy sau 16 phút = 960 giây thì chúng gặp nhau số lần là $\left[\frac{960}{100}\right] = 9$. Vậy vật thứ hai vượt lên trước 9 lần.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Có bao nhiêu tam giác khác nhau mà độ dài các cạnh là các số tự nhiên (cùng đơn vị đo) thuộc tập hợp $\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Lời giải

Số tam giác khác nhau là $\left[\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}\right] = \left[\frac{8.10.15}{24}\right] = 50$.

Câu 6: *(3,0 điểm)*

Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+3} = 2$.

Lời giải

ĐKXĐ $x \geq -3$. Đặt $\sqrt[3]{1-x} = a$; $\sqrt{x+3} = b \geq 0$.

Ta có $\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=4 \end{cases} \Rightarrow a\left(a^2+a-4\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

Từ đó tìm được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1;\dfrac{15\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Câu 7: *(3,0 điểm)*

Cho các số a,b thỏa mãn $a^3+8b^2=1-6ab$. Tính $a+2b$.

Lời giải

Ta có $x^3+y^3+z^3=3xyz \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x=y=z \end{array}\right.$.

Do đó $a^3+8b^3=1-6ab \Leftrightarrow a^3+(2b)^3+(-1)^3=3a(2b)(-1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+2b-1=0 \\ a=2b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+2b=-2 \end{array}\right.$.

Câu 8: *(3,0 điểm)*

Tìm các số nguyên dương a , b , c , $(b>c)$ thỏa mãn $\begin{cases} b^2+c^2=a^2 \\ 2(a+b+c)=bc \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $b^2+c^2=a^2 \Rightarrow (b+c)^2-2bc=a^2 \Rightarrow (b+c)^2-4(a+b+c)=a^2 \Rightarrow (b+c-2)^2=(a+2)^2$.

Vì $b>c\ge 1$ nên $b+c-2\ge 1$ do đó $b+c-2=a+2 \Rightarrow a=b+c-4 \Rightarrow b^2+c^2=(b+c-4)^2 \Leftrightarrow (b-4)(c-4)=8$.

Vì $b-4>c-4\ge -3$ nên có các trường hợp sau

TH1: $\begin{cases} b-4=8 \\ c-4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=12 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow a=13$.

TH2: $\begin{cases} b-4=4 \\ c-4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=8 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow a=10$.

Câu 9: *(3,0 điểm)*

Biết khoảng cách từ trọng tâm tam giác ABC đến các cạnh tỉ lệ với các số $2;3$; 4 và chu vi của tam giác ABC là 26. Tìm độ dài các cạnh tam giác ABC.

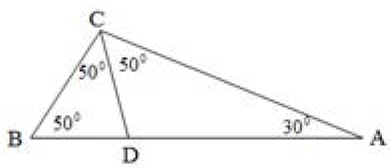
Lời giải

Gọi độ dài các cạnh $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C lần lượt là x , y , z. Khoảng cách từ trọng tâm tam giác ABC đến các cạnh tỉ lệ với các số 2 ; 3 ; 4 nên ta có $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$. Mặt khác $ax=by=cz=2S_{ABC}$ nên $\frac{a}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=\frac{c}{\frac{1}{z}}=\frac{a}{\frac{1}{2k}}=\frac{1}{\frac{1}{3k}}=\frac{c}{\frac{1}{4k}}=\frac{a+b+c}{\frac{13}{12k}}=24k$. Suy ra $a=12$; $b=8$; $c=6$.

Câu 10: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=30^\circ$; $\widehat{B}=50^\circ$, cạnh $AB=2\sqrt{3}$. Tính $AC(AC+BC)$.

Lời giải



Kẻ đường phân giác CD.

Ta có $\widehat{ACB}=100^\circ \Rightarrow \widehat{BCD}=\widehat{ACD}=50^\circ$.

Suy ra tam giác BCD cân tại D. Suy ra $BD=DC$.

Lại có $\Delta ADC \# \Delta ACB \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2=AB.AD$.

Và $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC} \Rightarrow AC.BC=AB.CD$.

Suy ra $AC.BC + AC^2 = AB\left(AD + CD\right) = AB\left(AD + BD\right) = AB^2 = 12$ hay $AC\left(AC + BC\right) = 12$.

II – PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11: *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 \\ 2\left(x^3 - y\right) = y^3 - x \end{cases}$.

Lời giải

Thay $1 = 2y^2 - x^2$ và phương trình thứ hai ta có $2x^3 - 2y\left(2y^2 - x^2\right) = y^3 - x\left(2y^2 - x^2\right)$

$\Leftrightarrow\ x^3 - 5y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 0$. Đặt $y = xt$ được $x^3\left(5t^3 - 2t^2 - 2t - 1\right) = 0$.

Xét $x = 0$, thay vào phương trình thứ hai ta được $y\left(y^2 + 2\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ không thỏa mãn phương trình thứ nhất.

Xét $5t^3 - 2t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t - 1\right)\left(5t^2 + 3t + 1\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Do đó $y = x$, khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 1 \\ x\left(x^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right) \in \left\{\left(-1;-1\right),\left(1;1\right)\right\}$.

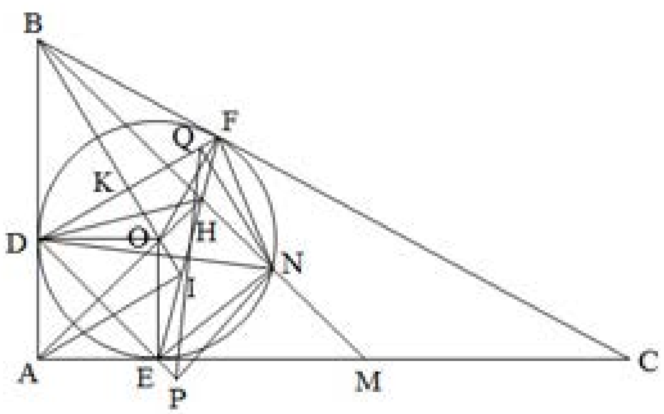
Câu 12: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D , E , F lần lượt là tiếp điểm của $\left(O\right)$ với các cạnh AB, AC, BC. Gọi I là giao điểm của BO và EF. M là điểm di động trên đoạn CE. Gọi H là giao điểm của BM và EF.

a) Chứng minh nếu $AM = AB$ thì các tứ giác $BDHF$, $ABHI$ nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của BM và cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$ của $\left(O\right)$, P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE , DF. Chứng minh $PQ \le EF$.

Lời giải



Gọi K là giao điểm của BO và DF. Ta có tam giác IKF vuông tại K. Hình chữ nhật $ADOE$ có $OD=OE$ nên nó là hình vuông. Suy ra $\widehat{DEF}=\frac{1}{2}\widehat{DOE}=45^\circ$. Suy ra $\widehat{BIF}=45^\circ$.

a) Khi $AM=AB$ thì tam giác AMB vuông cân tại A suy ra $\widehat{DBH}=45^\circ=\widehat{DFH}$.
Nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp. Do đó năm điểm $B,D,O,\ H,F$ cùng thuộc đường tròn đường kính BO. Suy ra $\widehat{BFO}=\widehat{BHO}=90^\circ \Rightarrow OH\perp BM$, mà tam giác ABM vuông cân và có AH là phân giác nên $AH\perp BM$. Suy ra A,O,H thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{BAH}=\widehat{BIH}=45^\circ$. Vậy tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

b) Tứ giác $PNQD$ nội tiếp suy ra $\widehat{NPQ}=\widehat{NDQ}=\widehat{NEF}$. Tương tự ta có

$\widehat{NQP}=\widehat{NDP}=\widehat{NFE}$

$\widehat{NQP}=\widehat{NDP}=\widehat{NFE}$. Suy ra $\Delta NEF\ \#\Delta NQP \Rightarrow \frac{PQ}{EF}=\frac{NQ}{NE}\le 1$

$\Rightarrow PQ\le EF$.

Dấu $"="$ xảy ra khi P trùng F ,Q trùng E hay DN là đường kính của (O).

Câu 13: *(3,0 điểm)*

Cho x ,y là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của $F=\left|5x^2+11xy-5y^2\right|$.

Lời giải

Đặt $F=\left|5x^2+11xy-5y^2\right|=f(x,y)$, m là GTNN của F.

Ta có m là số nguyên và $f(0;1)=f(1;0)=5 \Rightarrow m\le 5$.

Vì x ,y là các số nguyên không đồng thời bằng 0 nên $5x^2+11xy-5y^2\ne 0$ hay $F\ne 0$.

Xét $x=2n$; $y=2k$. Ta có $f(x;y)=f(2n;2k)=4f(n;k)$ nên giá trị $f(2n;2k)$ không thể là GTNN. Do đó GTNN của F xảy ra khi x ,y không cùng chẵn, vì vậy m là số lẻ.

* Nếu $m=1$ suy ra tồn tại x ,y để $\left|5x^2+11xy-5y^2\right|=1 \Leftrightarrow$ $100x^2+220xy-100y^2=\pm 20 \Leftrightarrow (10x+11y)^2-221y^2=\pm 20 \Leftrightarrow$ $(10x+11y)^2\pm 20=221y^2\vdots 3$. Suy ra $(10x+11y)^2$ chia 13 dư 6 hoặc dư 7. Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0,1,3,4,9,10,12. Do đó vô lý.

* Nếu $m=3$ suy ra tồn tại x,y để $\left|5x^2=11xy-5y^2\right|=3 \Leftrightarrow$ $100x^2+220xy-100y^2=\pm 60 \Leftrightarrow \left(10x+11y^2\right)=\pm 60=221y^2\vdots 3$. Suy ra $(10x+11y)^2$ chia 13 dư 5 hoặc dư . Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0,1,3,4,9,10,12. Do đó vô lý.

Vậy GTNN của F là 5.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG KHÁNH HÒA NĂM HỌC 2017-2018.

Bài 1: *(4,0 điểm)*

Giải phương trình: $2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right)=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$.

Bài 2: *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$ là một số nguyên.

b) Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$

Bài 3: *(2,0 điểm)*

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^3y+xy^3$

Bài 4: *(2,0 điểm)*

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p=a^3-b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng : Nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Bài 5: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Gọi E, F lần lượt là các chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Đường tròn (I) đi qua E, F và tiếp xúc với BC tại D.

Chứng minh rằng: $\frac{DB^2}{DC^2}=\frac{BF.BE}{CF.CE}$.

Bài 6: *(2,0 điểm)*

Trên bàn có n $(n\in\mathbb{N}, n>1)$. viên bi. Có hai người lần lượt lấy bi. Mỗi người đến lượt mình được lấy một số bi tùy ý (ít nhất 1 viên bi) trong những viên bi còn lại trên bàn, nhưng không vượt quá số viên bi mà người lấy trước vừa lấy, biết rằng người lấy đầu tiên lấy không quá $n-1$ viên bi. Người nào lấy viên bi cuối cùng được xem là người chiến thắng. Tìm các số n sao cho người lấy trước có chiến lược chiến thắng.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TỈNH KHÁNH HÒA NĂM HỌC 2017-2018 .

Bài 1: *(4,0 điểm)*

Giải phương trình: $2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right)=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$.

Lời giải:

$$\text{ĐK : }\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-1\ \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ \ge -2 \\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$$

$2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right)=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow\ 10x+6\sqrt{x^2+x-2}=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$ (1).

Đặt $t=3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$ mà $x\ \ge\ 1\ \Rightarrow\ t\ \ge\ \sqrt{3}$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow\ t^2-t-20=0\ \Leftrightarrow\ (t+4)(t-5)=0\ \Leftrightarrow\ t=5\ \left(t\ge\sqrt{3}\right)$.

Khi đó ta có phương trình: $3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=5$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}-3+\sqrt{x+2}-2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2\ \left(\text{do } \dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}>0\right)$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{2\}$.

Bài 2: *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$ là một số nguyên.

b) Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$$

Lời giải:

a) Với $x=a+b\ \Rightarrow x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\Rightarrow x^3=a^3+b^3+3abx.$

Áp dụng: Đặt $a=\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}$, $b=\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}, x=\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$

$\Rightarrow x^3=70+70+3\sqrt[3]{70^2-4901}x\Rightarrow x^3=140-3x\Leftrightarrow x^3+3x-140=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+5x+28)=0\Leftrightarrow x-5=0$ (do $x^2+5x+28>0$) $\Leftrightarrow x=5.$

Vậy $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}=5$ là một số nguyên (đpcm).

b) Ta có

$1\ =\ n+1-n=\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}\right).$

Mà $\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}<3\sqrt[3]{(n+1)^2}\Rightarrow 1<3\sqrt[3]{(n+1)^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$.

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<\dfrac{3\sqrt[3]{(n+1)^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{(n+1)\sqrt[3]{n}}=3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

Nên $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)+...+3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)<3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$

Bài 3: *(2,0 điểm)*

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^3y+xy^3$.

Lời giải:

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm ta có:

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|\ge 2xy \Rightarrow x^2+y^2+xy\ge 2xy+xy=3xy\Rightarrow xy\le\dfrac{1}{3}$.

Ta có $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow 2ab\le a^2+b^2 \Leftrightarrow 4ab\le(a+b)^2\Leftrightarrow ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$ (1).

$P=x^3y+xy^3=xy\left(x^2+y^2\right)=xy(1-xy)$ vì $x^2+xy+y^2=1$

Áp dụng BĐT (1) ta có $2P=2xy.(1-xy)\le\dfrac{(2xy+1-xy)^2}{4}=\dfrac{(1+xy)^2}{4}\le\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2:4=\dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow P\le\dfrac{2}{9}$.

Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{2}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$xy=\dfrac{1}{3}$ và $|x|=|y| \Rightarrow x=y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $x=y=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

Bài 4: *(2,0 điểm)*

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p=a^3-b^3$ với a,b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng : Nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Lời giải:

Ta có $p=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ là số nguyên tố mà a,b là số nguyên dương $a-b=1$

$\Rightarrow a=b+1\Rightarrow p=(b+1)^3-b^3=3b^2+3b+1\Rightarrow 4p=12b^2+12b+4\equiv 1(mod 3)$

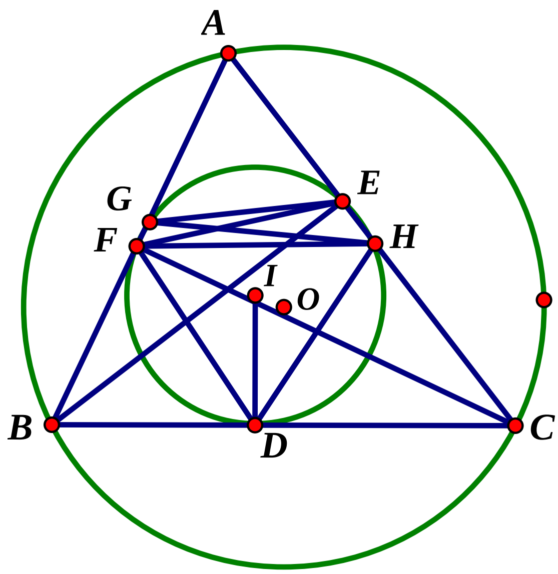
Nếu lấy $4p$ chia 3 và loại bỏ phần dư ta được $A=4b^2+4b+1=(2b+1)^2$ là số chính phương lẻ.

Bài 5: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Gọi E, F lần lượt là các chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Đường tròn (I) đi qua E, F và tiếp xúc với BC tại D.

Chứng minh rằng: $\dfrac{DB^2}{DC^2} = \dfrac{BF.BE}{CF.CE}$.

Lời giải:



Gọi $H = AC \cap (\text{I}),\ G = AB \cap (I)$.

Trước hết ta chứng minh được $\Delta CDH \backsim \Delta CED(g-g)$ do $\begin{cases} \widehat{C} \text{ chung} \\ \widehat{CDH} = \widehat{CED} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CH} = \dfrac{CE}{CD} \Rightarrow CD^2 = CH.CE\ (1)$.

Chứng minh tương tự : $\Delta BDF \backsim \Delta BGD(g-g) \Rightarrow \dfrac{BD}{BF} = \dfrac{BG}{BD} \Rightarrow BD^2 = BG.BF\ (2)$.

Ta có $\widehat{GBE} = \widehat{HCF}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$) và $\widehat{BGE} = \widehat{CHF}$ (cùng bù với $\widehat{EHF}$)

$\Rightarrow \Delta BGE \backsim \Delta CHF\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{BG}{CH} = \dfrac{BE}{CF}$ (3). Từ (1), (2) và (3)

$\Rightarrow \dfrac{DB^2}{DC^2} = \dfrac{BG.BF}{CH.CE} = \dfrac{BG}{CH}.\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BE}{CF}.\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BF.BE}{CF.CE}$ (đpcm).

Bài 6: *(2,0 điểm)*

Trên bàn có $n\ (n \in \mathbb{N}, n > 1)$. viên bi. Có hai người lần lượt lấy bi. Mỗi người đến lượt mình được lấy một số bi tùy ý (ít nhất 1 viên bi) trong những viên bi còn lại trên bàn, nhưng không vượt quá số viên bi mà người lấy trước vừa lấy, biết rằng người lấy đầu tiên lấy không quá $n-1$ viên bi. Người nào lấy viên bi cuối cùng được xem là người chiến thắng. Tìm các số n sao cho người lấy trước có chiến lược chiến thắng.

Lời giải:

+ Ta thấy rằng nếu n lẻ thì người đi trước luôn thắng, bằng cách ở nước đi đầu tiên, người đó chỉ lấy một viên bi, do đó ở những nước đi tiếp theo, mỗi người chỉ được lấy một viên bi.

+ Xét trường hợp n chẵn. Rõ ràng người nào lấy một số lẻ viên bi đầu tiên sẽ thua, vì để lại cho người đi nước tiếp theo một số lẻ viên bi, trở về trường hợp trên. Do đó, người chiến thắng phải luôn lấy một số chẵn viên bi. Như vậy, các viên bi gắn thành từng cặp và mỗi người đến lượt sẽ lấy một số cặp nào đó.

TH1: Nếu chỉ có một cặp $\left(n=2\right)$: người đi trước thua vì chỉ được lấy một viên.

TH2: Nếu số cặp lẻ và lớn hơn 1 $\left(n\equiv 2 \bmod 4\right)$: ta sẽ trở về trường hợp n lẻ (vì các viên bi đã được gắn thành cặp) và người đi trước sẽ thắng.

TH3: Nếu số cặp chẵn $\left(n\equiv 0 \bmod 4\right)$: mỗi người muốn thắng thì luôn phải lấy một số chẵn cặp (nếu ngược lại thì trở về TH2). Khi đó các viên bi được gắn thành từng nhóm 4 viên. Tương tự TH1 và TH2 ta thấy nếu số nhóm là một $\left(n=4\right)$; nếu $n>4$ và số nhóm lẻ $\left(n\equiv 4 \bmod 8\right)$ thì người đi trước thắng. Nếu số nhóm là chẵn $\left(n\equiv 0 \bmod 8\right)$, ta lại gắn các viên bi thành từng nhóm 8 viên,…

+ Như vậy người đi trước có chiến lược thắng khi và chỉ khi n không phải là một lũy thừa của 2 $\left(n\neq 2^k\right)$.

……………….HẾT…………….

SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

MÔN TOÁN LỚP 9 NĂM HỌC 2017-2018

Thời gian làm bài: *150 phút*

Bài 1. a) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}$.

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}$.

Bài 2. a) Giải phương trình $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

Bài 3. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2}\\(3x+2y)(y+1)=4-x^2\end{cases}$

b) Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}\geq 4$

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA=2R$, đường kính BC quay quanh O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O) lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm của DE và AO

a) Chứng minh rằng $AK.AI=AE.AC$.

b) Tính độ dài của đoạn AK theo R.

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 5. Từ 625 số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,...,625$ chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT VÀ ĐÁP SỐ

ĐỀ HSG HƯNG YÊN – NĂM HỌC 2017 - 2018

Bài 1. a) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2018}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}$.

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}$.

Lời giải

a) Từ giả thiết

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}\Rightarrow 2018=\frac{ab}{a+b}\Rightarrow \sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}=\sqrt{a-\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{b-\frac{ab}{a+b}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{a+b}}=\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{a+b}$$ (Vì $a,b>0$).

b) Ta có a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$ nên $6a^2+\sqrt{3}a-\sqrt{3}=0$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}-6a^2}{\sqrt{3}}=1-2\sqrt{3}a^2>0\Rightarrow a^2<\frac{1}{2\sqrt{3}}<\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2-\sqrt{3}<0.$$

Do đó $A=\dfrac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}=\dfrac{(a+2).\left(\sqrt{a^4+a+2}+a^2\right)}{a^4+a+2-a^4}=\sqrt{a^4+1-2\sqrt{3}a^2+2}+a^2$

$$=\sqrt{\left(a^2-\sqrt{3}\right)^2}+a^2=\left|a^2-\sqrt{3}\right|+a^2=\sqrt{3}-a^2+a^2=\sqrt{3}.$$

Bài 2. a) Giải phương trình $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

Lời giải

a) Giải phương trình $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x$. ĐK: $x\le 1$

$$\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{2-x}=x\left(1+\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow x\left(\sqrt[3]{2-x}-1-\sqrt{1-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt[3]{2-x}=1+\sqrt{1-x}\end{array}\right.$$

Xét phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1+\sqrt{1-x}$.

Đặt $\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=a\\ \sqrt{1-x}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b+1\\ a^3-b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ b^3+3b^2+3b+1-b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ b^3+2b^2+3b=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}\Rightarrow x=1$.

Đối chiếu ĐKXĐ ta có: $x\in\{0;1\}$.

b) $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y\Leftrightarrow(x-2018)^2+1=\left(y^2-3y+1\right)^2$

$\Leftrightarrow(x-2018)^2-\left(y^2-3y+1\right)^2=1\Leftrightarrow\left(y^2-3y-x+2019\right)\left(y^2-3y+x-2017\right)=1$

Vì cặp $x;y$ nguyên nên:

TH1: $\begin{cases}y^2-3y-x+2019=1\\ y^2-3y+x-2017=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ y^2-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2018;y=0\\ x=2018;y=3\end{array}\right.$.

TH2: $\begin{cases}y^2-3y-x+2019=-1\\ y^2-3y+x-2017=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ y^2-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2018;y=1\\ x=2018;y=2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có các nghiệm $(x;y)\in\{(2018;0),(2018;1),(2018;2),(2018;3)\}$

Bài 3. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} & (1)\\ (3x+2y)(y+1)=4-x^2\end{cases}$

b) Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\dfrac{3yz}{x}+\dfrac{4zx}{y}+\dfrac{5xy}{z}\ge 4$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x,y\ge-\dfrac{1}{2}$. Từ $(3x+2y)(y+1)=4-x^2$

$\Leftrightarrow(x+2y+4)(x+y-1)=0$. Vì $x,y\ge-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x+2y-4>0$, do đó:

$x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$

Thay vào phương trình (1) ta được: $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\dfrac{4x^2-4x+1}{2}\quad(2)$;

$\left(-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\right)$

Đặt $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=t$, $(2)\Leftrightarrow t=-\dfrac{t^4-8t^2}{8}\Leftrightarrow t(t-2)\left(t^2+2t-4\right)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\sqrt{5}-1 \end{array}\right. \text{ (Vì } t>0\text{).}$$

TH1: $t=2 \Rightarrow \sqrt{(2x+1)(3-2x)}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}; y=\frac{3}{2} \\ x=\frac{3}{2}; y=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

TH2: $t=\sqrt{5}-1 \Rightarrow \sqrt{(2x+1)(3-2x)}=1-\sqrt{5}<0$ (vô lí).

Vậy phương trình có nghiệm: $(x;y) \in \left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức CauChy ta có

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}=\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+2\left(\frac{zy}{x}+\frac{xy}{z}\right)+3\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right) \ge 2z+4y+6x$$

$$=4(x+y)+2(z+x) \ge 8\sqrt{xy}+4\sqrt{xz}=4\sqrt{x}(2\sqrt{y}+\sqrt{z})=4\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}=4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA=2R$, đường kính BC quay quanh O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O) lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm của DE và AO

a) Chứng minh rằng $AK.AI=AE.AC$.

b) Tính độ dài của đoạn AK theo R.

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải

a) Ta có tứ giác $BCED$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC}+\widehat{DEC}=180° \Rightarrow \widehat{AEK}=\widehat{ABC}$ (cùng bù $\widehat{DEC}$).

Mặt khác $\widehat{ABC}=\widehat{AIC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC); suy ra $\widehat{AEK}=\widehat{AIC}$ (bắc cầu)

Xét ΔAEK và ΔAIC có : $\widehat{AEK}=\widehat{AIC}$ và $\widehat{EAK}$ chung nên $\Delta AEK \backsim \Delta AIC$(g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AI}=\dfrac{AK}{AC} \Rightarrow AE.AC=AK.AI$

b) Xét ΔAOB và ΔCOI có : $\widehat{AOB}=\widehat{COI}$ (đối đỉnh) và $\widehat{BAO}=\widehat{ICO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BI) nên $\Delta AOB \backsim \Delta COI$(g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OI} \Rightarrow OI=\dfrac{OB.OB}{OA}=\dfrac{R}{2} \Rightarrow AI=\dfrac{5}{2}R$

Kẻ tiếp tuyến AN với đường tròn (O), dễ dàng chứng minh được $\Delta ANE \backsim \Delta ACN$(g.g)

$\Rightarrow AE.AC=AN^2=AO^2-ON^2=3R^2$.

Mà theo câu (a) : $AE.AC=AK.AI \Rightarrow AK.\dfrac{5}{2}R=3R^2 \Rightarrow AK=\dfrac{6}{5}R$.

c) Gọi F là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔADE với OA, ta có $\widehat{AFD}=\widehat{AED}$ mà $\widehat{AEK}=\widehat{ABC}$ (câu a) nên $\widehat{AFD}=\widehat{ABC}$ nên tứ giác $BDFO$ nội tiếp đường tròn. Dễ dàng chứng minh được $\Delta ADF \backsim \Delta AOB$(g.g) $\Rightarrow AD.AB=AF.AO$; và ta cũng chứng minh được $AD.AB=AN^2 \Rightarrow AF.AO=AN^2 \Rightarrow AF=\dfrac{3}{2}R$ không đổi, mà A cố định nên F cố định suy ra AF cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE thuộc đường trung trực của đoạn AF cố định.

Bài 5. Từ 625 số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,...,625$ chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

Lời giải

Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau:

+) nhóm thứ 1 gồm năm số chính phương $\{49;225;400;576;625\}$

+) 310 nhóm còn lại mỗi nhóm gồm hai số có tổng bằng 625 (không chứa các số của nhóm 1).

Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm thứ 1, thì 311 số này thuộc các nhóm còn lại. Theo nguyên tắc Dirichle phải có ít nhất hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625 (vô lí). Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm thứ 1. Số này là số chính phương.

--HẾT--

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9 – AMSTERDAM LẦN 3
NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Câu 2: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3-9x^2+6x-1=0$
Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

Câu 3: Cho tam giác ABC, $(AB<AC)$, với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G, gọi I là hình chiếu của H trên GA.
1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $GH\perp AM$.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9 – AMSTERDAM LẦN 3
NĂM HỌC 2017 - 2018

Câu 1: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn:
$p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $p\le q$.
Trường hợp 1: $p=2$

$\Rightarrow p(p+3)=2(2+3)=2.5=10$

$\Rightarrow 10+q(q+3)=n(n+3)$

$\Leftrightarrow 10=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p; q; n là các số nguyên dương
$\Rightarrow n>q\ge 2.$
$\Rightarrow n+q+3>2+2+3=7$
Mà $10=1.10=2.5$

$$\Rightarrow\begin{cases}n+q+3=10\\ n-q=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+q=7\\ n-q=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=4\\ q=3\end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(2;3;4)$.

Trường hợp 2: $p=3$

$\Rightarrow p(p+3)=3.(3+3)=3.6=18$

$\Rightarrow 18+q(q+3)=n(n+3)\Leftrightarrow 18=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p; q; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n>q\geq 3$.

$\Rightarrow n+q+3>3+3+3=9$

Mà $18=1.18=2.9=3.6$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(3;7;8)$.

Trường hợp 3: $p>3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

Nếu $a:3$ dư 1 $\Rightarrow a=3k+1\Rightarrow a+3=3k+4$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3$ dư 1.

Nếu $a:3$ dư 2 $\Rightarrow a=3k+2\Rightarrow a+3=3k+5$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3$ dư 1.

Trở lại bài toán chính:

Vì $q\geq p>3\Rightarrow p\nmid 3; q\nmid 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3$ dư 2.

Mà $n(n+3):3$ dư 1 (nếu $n\nmid 3$) hoặc $n(n+3)\vdots 3$ nếu $n\vdots 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3)\neq n(n+3)$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3-9x^2+6x-1=0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

Lời giải

Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$2x^3-9x^2+6x-1=0$$

Khi phân tích đa thức $2x^3-9x^2+6x-1$ ra thừa số ta được:

$2x^3-9x^2+6x-1=2(x-a)(x-b)(x-c)$

$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c)=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=\dfrac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\left(\frac{9}{2}\right)^2-2.3=\frac{57}{4}$$

Tính $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=3^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

Tính $a^3+b^3+c^3$:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=\frac{9}{2}\left(\frac{57}{4}-3\right)+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{417}{8}$$

Vậy:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\dfrac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{57}{4} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{9}{2} \\ a^3+b^3+c^3=\dfrac{417}{8} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$S=\frac{a^5-b^5}{a-b}+\frac{b^5-c^5}{b-c}+\frac{c^5-a^5}{c-a}$$

$$\Leftrightarrow S=(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)+(b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4)$$

$$+(c^4+c^3a+c^2a^2+ca^3+a^4)$$

$$\Leftrightarrow S=2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+a^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow S=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)+(a^4+a^3b+a^3c)+(b^4+b^3a+b^3c)$$

$$+(c^4+c^3a+c^3b)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow S=(a^2+b^2+c^2)^2+a^3(a+b+c)+b^3(a+b+c)+c^3(a+b+c)$$

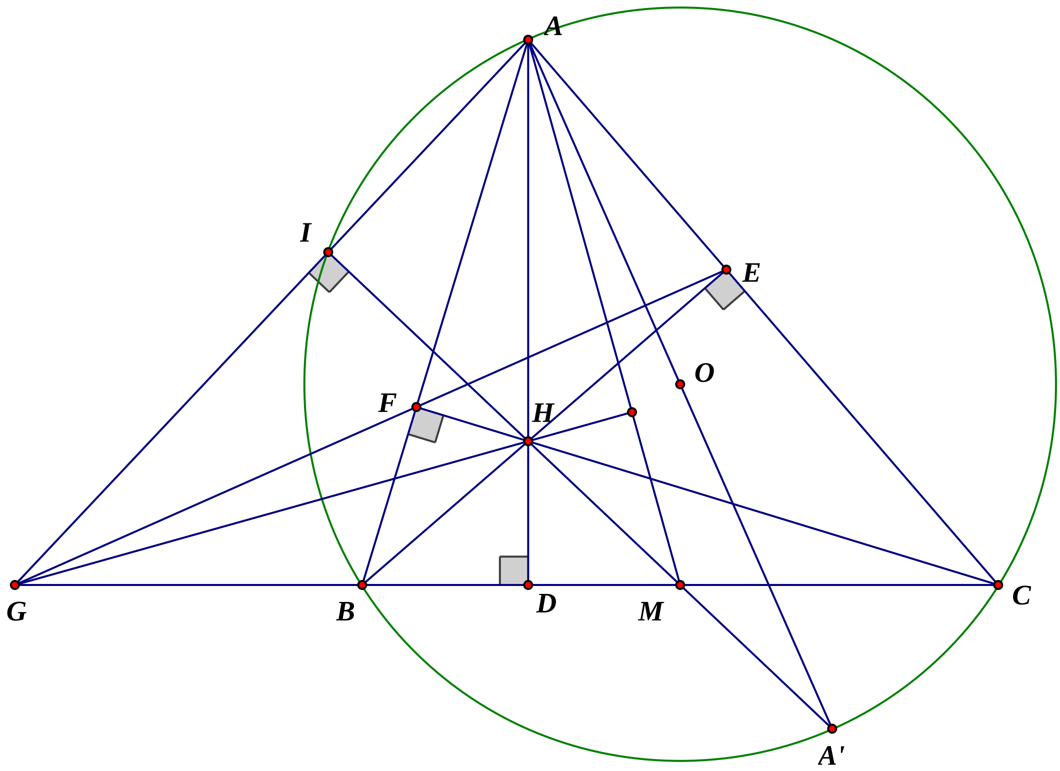
$$-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow S=(a^2+b^2+c^2)^2+(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$\Leftrightarrow S=\left(\frac{57}{4}\right)^2+\frac{9}{2}\cdot\frac{417}{8}-\frac{9}{2}=\frac{3465}{8}$

Câu 3: Cho tam giác ABC, $(AB<AC)$, với ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại G, gọi I là hình chiếu của H trên GA.
1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $GH \perp AM$.

Lời giải



1. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.
Dễ dàng chứng minh tứ giác $AIFH$ nội tiếp và tứ giác $AFHE$ nội tiếp
$\Rightarrow$ 5 điểm A, F, H, E, I cùng thuộc một đường tròn.
$\Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp.
$\Rightarrow GI.GA=GF.GE$ (1).

Dễ dàng chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow GF.GE=GB.GC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $GI.GA=GB.GC$ $\Rightarrow$ tứ giác $BCAI$ nội tiếp (điều phải chứng minh).
2. Chứng minh $GH \perp AM$.
Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ đường kính AA' của (O).

Vì tứ giác $BCAI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow I\in(O)\Rightarrow \widehat{AIA'}=90^\circ \Rightarrow A'I\perp AI$ hay $A'I\perp AG$.
Mà $HI\perp AG$ (giả thiết) $\Rightarrow A'I\equiv HI\Rightarrow A'$, I, H thẳng hàng.
Mà dễ dàng chứng minh được $A'H$ đi qua trung điểm M của BC (tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành).
$\Rightarrow M$, I, H thẳng hàng.
Xét ΔAGM có: $AD\perp AM$, $MI\perp AG$ và AD cắt MI tại H.
$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác AGM.
$\Rightarrow GH\perp AM$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ thì ta có

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 9=(a+b+c)^2>a^2+b^2+c^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

Trường hợp 2: $a>\frac{1}{3}$; $b>\frac{1}{3}$; $c>\frac{1}{3}$ ta có $a+b+c=3>a+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Rightarrow a<\frac{7}{3}$ tương tự

$b<\frac{7}{3}$; $c<\frac{7}{3}$. Vậy $a;b;c\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{1}{x^2}-x^2\ge -4x+4\ \ \forall x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$. (*).

Thật vậy

(*) $\Leftrightarrow 1-x^4\ge -4x^3+4x^2\Leftrightarrow x^4-4x^3+4x^2-1\le 0\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2-2x-1\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left((x-1)^2-2\right)\le 0$ luôn đúng với $\forall x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy $\frac{1}{a^2}-a^2\ge -4a+4$; $\frac{1}{b^2}-b^2\ge -4b+4$; $\frac{1}{c^2}-c^2\ge -4c+4$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-a^2-b^2-c^2\ge -4(a+b+c)+12=0$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$ (đpcm).

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 5: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

Lời giải

Giả sử không có 2 điểm nào trong mặt phẳng được tô cùng màu mà khoảng cách giữa chúng là 1 đơn vị độ dài.

Xét một điểm O bất kỳ có màu vàng trên mặt phẳng.

Vẽ đường tròn $\left(O,\sqrt{3}\right)$. Lấy một điểm P bất kỳ trên (O).

Dựng hình thoi $OAPB$ có cạnh bằng 1 và có đường chéo là OP.

Dễ thấy $OA=OB=AB=AC=BC=1$.

Theo giả thiết, A, B phải tô khác màu vàng và khác màu nhau.

Do đó P phải tô vàng. Từ đây suy ra tất cả các điểm trên (O) phải tô vàng. Điều này trái với giả thiết vì dễ thấy tồn tại hai điểm trên (O) có khoảng cách 1 đơn vị độ dài.

P/s: Số 1 có thể được thay bởi bất kỳ số thực dương nào.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. a) Cho A$=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le\dfrac{1}{4}$

b) Cho $x,y,z\ne 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$. Chứng minh

$$\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx.$$

Câu 2. a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-xy=2\\x^3=x+y\end{cases}$.

Câu 3. a) Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\dfrac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên.

b) Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chia hết cho 3267.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{BDC}=90^0$, đường phân giác góc $\widehat{BAD}$ cắt cạnh BC và đường thẳng CD lần lượt tại E và F. Gọi O,O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔCEF.

1) Chứng minh rằng O' thuộc đường tròn (O).

2) Khi DE vuông góc BC.

a) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường thẳng BC tại G. Chứng minh rằng $BG.CE=BE.CG$.

b) Đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm H (H khác C). Kẻ tiếp tuyến chung IK (I thuộc (O), K thuộc (O') và H,I,K nằm cùng phía bờ OO'). Dựng hình bình hành $CIMK$. Chứng minh $OB+O'C>HM$.

Câu 5. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 3xyz$. Tìm GTLN của

$$P=\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+zx}+\frac{z^2}{z^4+xy}.$$

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. a) Cho $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le \dfrac{1}{4}$

b) Cho $x,y,z\ne 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$.

Chứng minh $\left(\dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2zx}+\dfrac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx$.

Lời giải

a) Ta có

$$A=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)$$
$$=2x$$

$$B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}=1-\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}=1-\left|2\sqrt{x}-1\right|=2\sqrt{x}\left(0\le x\le\frac{1}{4}\right)$$

b) Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\Rightarrow yz+xz+xy=0$

$$\Rightarrow x^2+2yz=x^2+yz+yz=x^2+yz-xz-xy=x(x-z)-y(x-z)=(x-z)(z-y)$$

Tương tự $\Rightarrow y^2+2zx=(y-z)(y-x);\ z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2yx}$$

$$=\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-y)(z-x)}$$

$$=\frac{-y+z-z+x-x+y}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2yx}\right)(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018})=0.$$

Câu 2. a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-xy=2\\ x^3=x+y\end{cases}$

Lời giải

a) Điều kiện $x\ge 2$

$$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+3x-10}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5}(\sqrt{x-2}-1)=\sqrt{x-2}-1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=1\\ \sqrt{x+5}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-4\end{array}\right.$$

So với điều kiện ta được phương trình có 1 nghiệm $x=3$.

b) $\begin{cases}x^2+y^2-xy=2\\ x^3=x+y\end{cases}$

Từ phương trình $x^3=x+y \Leftrightarrow 2x^3=2(x+y)=(x^2+y^2-xy)(x+y)=x^3+y^3$

$\Rightarrow x^3=y^3 \Rightarrow x=y$

Với $x=y$ thế vào phương trình $x^2+y^2-xy=2$ ta được

$$y^2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\{(\sqrt{2};\sqrt{2});(-\sqrt{2};-\sqrt{2})\}$.

Câu 3. a) Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\frac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên.

b) Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chia hết cho 3267.

Lời giải

a) Điều kiện $x\neq 0$.

Đặt $a=x+\sqrt{2018} \Rightarrow x=a-\sqrt{2018}$

Xét $b=\frac{7}{x}-\sqrt{2018}=\frac{7}{a-\sqrt{2018}}-\sqrt{2018}=\frac{7-a\sqrt{2018}+2018}{a-\sqrt{2018}}$

$\Rightarrow b(a-\sqrt{2018})=2025-a\sqrt{2018}$

$\Rightarrow ab-2015=(b-a)\sqrt{2018}$

Với $a,b\in Z$

$\Rightarrow ab-2025\in Z \Rightarrow (a-b)\sqrt{2018}=0$

$\Rightarrow a=b$

$\Rightarrow a=b=\pm\sqrt{2025}=\pm 45$

+ $a=45 \Rightarrow x=45-\sqrt{2018}$

+ $a=-45 \Rightarrow x=-45-\sqrt{2018}$

b) $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=(10a+b)^2-(10b+a)^2=99(a^2-b^2)$

$\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ chia hết cho 3267 nên $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ chia hết cho 33

$1\le a,b\le 9 \Rightarrow a=b$,hay $a=7,b=4$; $a=4,b=7$

Vậy ta có các số $11;22;33;44;47;55;66;74;77;88;99$.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{BDC}=90^0$, đường phân giác góc BAD cắt cạnh BC và đường thẳng CD lần lượt tại E và F. Gọi O,O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔCEF.

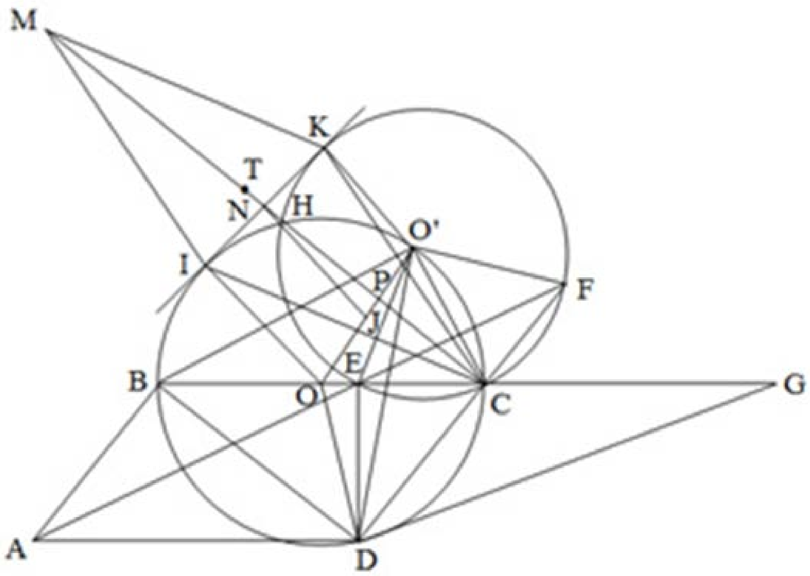
1) Chứng minh rằng O' thuộc đường tròn (O).

2) Khi DE vuông góc BC.

a) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường thẳng BC tại G. Chứng minh rằng $BG.CE=BE.CG$.

b) Đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm H (H khác C). Kẻ tiếp tuyến chung IK (I thuộc (O), K thuộc (O') và H,I,K nằm cùng phía bờ OO'). Dựng hình bình hành $CIMK$. Chứng minh $OB+O'C>HM$.

Lời giải



a)

$\widehat{BAE}=\widehat{DAE}$ (giả thuyết); $\begin{cases}\widehat{BAE}=\widehat{EFC}\\ \widehat{DAE}=\widehat{FEC}\end{cases}\Rightarrow \widehat{EFC}=\widehat{FEC}$

suy ra ΔEFC cân tại C $\Rightarrow CE=CF$

mà $\widehat{BEA}=\widehat{FEC}\Rightarrow \widehat{BEA}=\widehat{BAE}$ nên ΔABE cân tại B

$\Rightarrow BA=BE$ mà $BA=CD$ nên $BE=CD$

$\begin{cases}CE=CF\\ BE=CD\end{cases}\Rightarrow BE+CE=DC+CF \Leftrightarrow BC=DF$ (1).

Mặt khác $\Delta O'CF$ cân $\Rightarrow \widehat{O'CF}=\widehat{O'FC}$

Với $CE=CF\Rightarrow \widehat{O'CE}=\widehat{O'CF}\Rightarrow \widehat{O'CE}=\widehat{O'FC}$ (2)

Mà $O'C = O'F$ (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $\Delta BO'C = \Delta DO'F \Rightarrow \widehat{O'BC} = \widehat{O'DF}$

Nên tứ giác $BDCO'$ nội tiếp hay điêm O' thuộc đường tròn (O').

b) Tam giác BCD tại D,nội tiếp đường tròn (O).

Ta có $\begin{cases} DG^2 = CG.BG \\ DE^2 = BE.CE \end{cases} \Rightarrow DG^2 - DE^2 = CG.BG - BE.CE \Leftrightarrow GE^2 = CG.BG - BE.CE$

$\Rightarrow (CE + CG)^2 = CG.BG - BE.CE$

$\Leftrightarrow CE^2 + 2CE.CG + CG^2 = CG.BG - BE.CE$

$\Leftrightarrow CE^2 + CE.CG + BE.CE = CG.BG - CG^2 - CE.CG$

$\Leftrightarrow CE(CE + CG + BE) = CG(BG - CG - CE)$ $\Leftrightarrow CE.BG = CG.BE$.

c) Tia CH cắt IK tại N. Áp dụng phương tích đường tròn ta có $NK^2 = NH.NC = NI^2$ $\Rightarrow NK = NI$ mà $CIMK$ là hình bình hành, do đó M, N, H, C thẳng hàng.

Suy ra $OB^2 + O'C = OI + O'K = 2NJ$. Gọi T là điểm đối xứng với H qua N, P là giao điểm của CH với OO'.

Ta có $\begin{cases} PH = PC \\ OO' \perp CH \end{cases} \Rightarrow NJ > NP$.

$\Rightarrow 2NJ > 2NP = NP + NP = NP + PH + NP = NT + PC + NP = TC = HM$

Vậy $OB + O'C > HM$. .

Câu 5. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 3xyz$. Tìm GTLN của $P = \dfrac{x^2}{x^4 + yz} + \dfrac{y^2}{y^4 + zx} + \dfrac{z^2}{z^4 + xy}$.

Lời giải

Ta có $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \le 3xyz \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \le 3$.

Với $x, y, z > 0$, theo BĐT Cauchy ta được $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$

$x^4 + yz \ge 2\sqrt{x^4yz} = 2x^2\sqrt{yz} \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^4 + yz} \le \dfrac{1}{2\sqrt{yz}}$

Tương tự ta được: $\dfrac{y^2}{y^4 + zx} \le \dfrac{1}{2\sqrt{zx}}; \dfrac{z^2}{z^4 + xy} \le \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$.

$$P=\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+zx}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\right)\le\frac{3}{2}.$$

GTLN của $P=\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

ĐỀ THI CHỌN HSG TP ĐÀ NẴNG

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(1 điểm)*

Tính $A=\dfrac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}}+\sqrt{\dfrac{2}{18-5\sqrt{11}}}$

Câu 2: *(1,5 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x>0$; $x\neq 1$.

Rút gọn A và chứng minh $A<\dfrac{2}{3}$.

Câu 3: *(1,5 điểm)*

Cho đường thẳng d_m có phương trình: $y=mx+2m-1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn đi qua một điểm H cố định. Tìm tọa độ của điểm H

b) Tìm giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến d_m lớn nhất.

Câu 4: *(2 điểm)*

a) Tìm tất cả các số của x thỏa mãn $\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7}=7$

b) Tìm tất cả (x,y,z) thỏa mãn $\begin{cases} x^2-2x=y \\ y^2+2y=z \\ x+y+z+1+\sqrt{x-1}=0 \end{cases}$

Câu 5: *(1 điểm)*

Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu giảm chiều rộng đi 1 m và tăng chiều dài thêm 2 m thì diện tích không đổi; ngoài ra nếu giảm chiều dài đi 4 m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3 m ta được hình vuông. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu.

Câu 6: *(1 điểm)*

Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo $AC=4$, $\widehat{ABC}=150^o$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ C đến AB và AD. Tính độ dài đoạn EF .

Câu 7: *(1 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng qua C và song song với AB tại D.

a) Chứng minh rằng: $BC^2=AB.CD$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC; E là giao điểm của CG và BD. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại F. Chứng minh rằng: $\widehat{EAG}=\widehat{FAG}$.

--- HẾT ---

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TP ĐÀ NẴNG
NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(1 điểm)*

Tính $A=\frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}}+\sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}$

Lời giải

$$A=\frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}}+\sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}=\frac{\left(1+\sqrt{11}\right).\left(2-\sqrt{11}\right)}{4-11}+\sqrt{\frac{2.\left(18+5\sqrt{11}\right)}{49}}=$$

$$=\frac{9-\sqrt{11}+5+\sqrt{11}}{7}=2$$

Câu 2: *(1,5 điểm)* Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x>0$; $x\neq 1$

Rút gọn A và chứng minh $A<\frac{2}{3}$.

Lời giải

+ Rút gọn $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x>0$; $x\neq 1$.

$$A=\left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})}+\frac{1(x+1+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

$$A=\left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{2\sqrt{x}}{(x+1+\sqrt{x})}$$

+ Chứng minh $A<\frac{2}{3}$.

Xét hiệu $A-\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{x}}{(x+1+\sqrt{x})}-\frac{2}{3}=\frac{6\sqrt{x}-2x-2\sqrt{x}-2}{3(x+1+\sqrt{x})}=\frac{-2(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+1+\sqrt{x})}<0$

$\Leftrightarrow A-\frac{2}{3}<0\Rightarrow A<\frac{2}{3}$

Câu 3: *(1,5 điểm)* Cho đường thẳng d_m có phương trình: $y=mx+2m-1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn đi qua một điểm H cố định. Tìm tọa độ của điểm H

b) Tìm giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến d_m lớn nhất.

Lời giải

a) Gọi $H\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định luôn đi qua d_m với mọi m.

$H\left(x_0;y_0\right)\in d_m$ với mọi m

Ta có: $y_0=mx_0+2m-1\Leftrightarrow y_0+1=\left(x_0+2\right)m\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+2=0\\y_0+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-2\\y_0=-1\end{cases}$.

Vậy $H(-2\,;-1)$

b) Khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến d_m

$$h_{(A,d_m)}=\frac{|m-2+2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{3|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\le 3\sqrt{2} \quad \text{do} \left((m-1)^2\le 2\left(m^2+1\right)\Rightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\le\sqrt{2}\right)$$

Dấu “ = ” xảy ra khi $m=-1$

Khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến d_m lớn nhất là $3\sqrt{2}$ khi $m=-1$

Câu 4: *(2 điểm)*

a) Tìm tất cả các số của x thỏa mãn $\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7}=7$

b) Tìm tất cả (x,y,z) thỏa mãn $\begin{cases} x^2-2x=y \\ y^2+2y=z \\ x+y+z+1+\sqrt{x-1}=0 \end{cases}$

Lời giải

a) ĐK $x\ge 2$

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7}=7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}+3)^2}=7$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}-2|+\sqrt{x-2}+3=7$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}-2+\sqrt{x-2}+3=7 \\ 2-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}+3=7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x-2}=6 \\ 5=7 \ \text{(loai)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=11 \ (t/m)$$

b) Tìm tất cả (x,y,z) thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2-2x=y \\ y^2+2y=z \\ x+y+z+1+\sqrt{x-1}=0 \end{cases} \qquad (\text{I})$$

Thay (1) và (2) vào (3) ta có:

$$x+x^2-2x+y^2+2y+1+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(x-1)+\sqrt{x-1}=0$$

Vế trái ≥ 0; Vế phải $=\ 0$ nên dấu bằng xảy ra khi:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Suy ra $z=-1$

Vậy $(x,\ y,\ z)=(1,-1,-1)$

Câu 5: *(1 điểm)*

Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu giảm chiều rộng đi 1 m và tăng chiều dài thêm 2 m thì diện tích không đổi; ngoài ra nếu giảm chiều dài đi 4 m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3 m ta được hình vuông. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu.

Lời giải

Gọi chiều rộng và chiều dài của thửa ruộng hình chữ nhật là x ; y với ($x>1$; $y>4$)

Nếu giảm chiều rộng đi 1 m và tăng chiều dài thêm 2 m thì diện tích không đổi nên ta có pt

$$(x-1)\cdot(y+2)=xy \quad (1)$$

Nếu giảm chiều dài đi 4m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3m ta được hình vuông nên ta có pt

$$x+3=y-4 \Leftrightarrow x=y-7 \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta có: $(y-8)\cdot(y+2)=y\cdot(y-7) \Leftrightarrow y=16; x=9$

Vậy diện tích thửa ruộng ban đầu là: 16.9 = 144 (m^2)

Câu 6: *(1 điểm)*

Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo $AC=4$, $\widehat{ABC}=150^o$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ C đến AB và AD. Tính độ dài đoạn EF .

Lời giải

[redacted]

Ta có: Tứ giác $AECF$ nội tiếp vì $\widehat{AEC}=\widehat{CFA}=90^\circ$

Nên: $\widehat{EAC}=\widehat{CFE}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{EC}$)

$\widehat{FAC}=\widehat{FEC}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{FC}$)

$\widehat{DAC}=\widehat{BCA}$ (so le trong)

Suy ra: $\Delta BAC \backsim \Delta CFE (g\cdot g)$

$$\frac{BC}{CE}=\frac{AC}{FE} \Rightarrow FE=\frac{CE\cdot AC}{BC}=AC\cdot\sin 30^\circ=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

Câu 7: *(1 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng qua C và song song với AB tại D.

a) Chứng minh rằng: $BC^2=AB.CD$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC; E là giao điểm của CG và BD. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại F. Chứng minh rằng: $\widehat{EAG}=\widehat{FAG}$.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta BCD\ (g \cdot g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow BC^2 = AB.CD$ (1)

b) Qua A kẻ tiếp tuyến tại C với (O) cắt đường thẳng qua B song song với AC tại I, cắt AF tại J. Nối AE cắt CD tại H.

Chứng minh được: $BC^2 = AC.BI$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AB.CD = AC.BI \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BI}{CD}$ (3)

Lại có: $AC \,//\, JI \Rightarrow \dfrac{AN}{JB} = \dfrac{FN}{FB} = \dfrac{CN}{IB}$ do $AN = NC \Rightarrow JB = IB$ (4)

Tương tự: $AB \,//\, FI \Rightarrow \dfrac{AP}{CH} = \dfrac{EP}{EC} = \dfrac{BP}{CD}$ do $AP = BP \Rightarrow CD = CH$ (5)

Từ (3),(4),(5) ta có: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BJ}{CH} \Rightarrow \dfrac{AB}{BJ} = \dfrac{AC}{CH}$

$\Rightarrow \Delta ABJ \backsim \Delta ACH\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{BJA} \Rightarrow \widehat{JAB} = \widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{FAC}$.

--- HẾT ---

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH KIÊN GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: (3 điểm)

1) Cho biểu thức $A = n^2 + 4n + 5$ (n là số tự nhiên lẻ). Chứng minh rằng A không chia hết cho 8.

2) Cho số x $(x \in \mathbb{R};\ x > 0)$ thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức:

$B = x^5 + \dfrac{1}{x^5}$.

Câu 2: (3 điểm)

Rút gọn biểu thức:

$$X = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + ...\sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}}.$$

Câu 3: (4 điểm)

1) Giải phương trình: $3x + 2\sqrt{27x^3 + 8} = 9x^2 + 6$.

2) Tìm hai số m, n cùng dấu thỏa mãn điều kiện: $|m| + 2|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất sao cho hai phương trình sau có nghiệm chung: $x^2 + mx + 2 = 0$; $x^2 + 2nx + 6 = 0$.

Câu 4: (3 điểm)

1) Cho phương trình: $x^2 + 2(m-3)x - m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+t} + \dfrac{z}{t+x} + \dfrac{t}{x+y} \geq 2$.

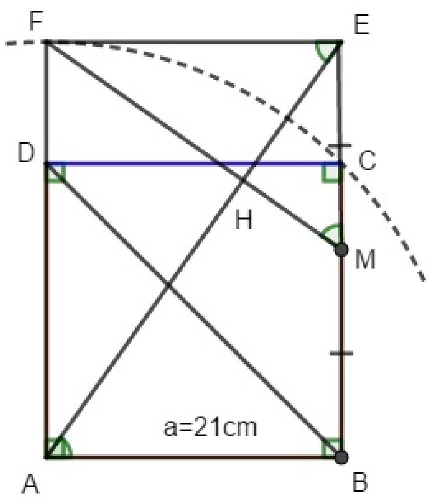
Câu 5: (3,5 điểm) Để có được tờ giấy khổ A4 (kích thước xấp xỉ 21cm x 29,7cm) người ta thực hiện như hình vẽ minh họa bên.

Bước 1: Tạo ra hình vuông $ABCD$ cạnh $a = 21$ cm.

Bước 2: Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt tia AD tại F.

Bước 3: Tạo hình chữ nhật $ABEF$.

Khi đó hình chữ nhật $ABEF$ chính là tờ giấy A4 thông dụng hiện nay.



Bạn An ngồi nghịch xếp tờ giấy A4 này theo đường thẳng AE, rồi xếp theo đường thẳng FM (M là trung điểm BE) khi mở tờ giấy ra. An ngạc nhiên thấy hai đường thẳng FM và AE vuông góc với nhau. Em hãy chứng minh giúp bạn An về điều đó.

Câu 6: (4 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, nối AE cắt cung nhỏ CD tại M. Trên cung nhỏ CB lấy điểm N sao cho cung nhỏ DM bằng cung nhỏ CN, nối AN cắt dây cung BC tại F. Chứng minh rằng: F là trung điểm của BC.

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH KIÊN GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: (3 điểm)

1) Cho biểu thức $A = n^2 + 4n + 5$ (n là số tự nhiên lẻ). Chứng minh rằng A không chia hết cho 8.

2) Cho số x $(x \in \mathbb{R};\ x > 0)$ thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức:

$B = x^5 + \dfrac{1}{x^5}$.

Lời giải

1) Ta có: $n^2 + 4n + 5 = n^2 - 1 + 4n + 6 = (n-1)(n+1) + 2(2n+3)$.

Do n lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (n-1)(n+1) \vdots 8$.

Mà $2n+3$ lẻ $\Rightarrow 2n+3$ không chia hết cho 4 $\Rightarrow 2(2n+3)$ không chia hết cho 8

$\Rightarrow (n-1)(n+1) + 2(2n+3)$ $\Rightarrow (n-1)(n+1) + 2(2n+3)$ không chia hết cho 8.

2) Ta có: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 3$ (do $x > 0$).

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 18.7 = 126 \Leftrightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 126 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123.$$

Câu 2: (3 điểm)

Rút gọn biểu thức:

$$X = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \ldots \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}}.$$

Lời giải

Tổng quát: $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\dfrac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{[n(n+1)]^2}}$

$$= \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2 + 2n(n+1) + 1}{[n(n+1)]^2}} = \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{[n(n+1)]^2}} = \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Vậy $X = \sqrt{1 + \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2}} + \ldots \sqrt{1 + \dfrac{1}{2017^2} + \dfrac{1}{2018^2}}$

$$= 1 + \frac{1}{1.2} + 1 + \frac{1}{2.3} + 1 + \frac{1}{3.4} + \ldots + 1 + \frac{1}{2017.2018}$$

$$= 2017 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = 2018 - \frac{1}{2018} = \frac{4072323}{2018}.$$

Câu 3: (4 điểm)

1) Giải phương trình: $3x+2\sqrt{27x^3+8}=9x^2+6$.

2) Tìm hai số m, n cùng dấu thỏa mãn điều kiện: $|m|+2|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất sao cho hai phương trình sau có nghiệm chung: $x^2+mx+2=0$; $x^2+2nx+6=0$.

Lời giải

1) $3x+2\sqrt{27x^3+8}=9x^2+6$ Điều kiện: $x\ge -\frac{2}{3}$

Pt $\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)}=9x^2+6$

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+4-2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)}+3x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9x^2-6x+4}-\sqrt{3x+2}\right)^2=0 \Leftrightarrow 9x^2-6x+4=3x+2$

$\Leftrightarrow 9x^2-9x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

2) Do m, n cùng dấu nên:

- Nếu $m>0; n>0$ thì $|m|+2|n|=m+2n$.

- Nếu $m<0; n<0$ thì $|m|+2|n|=-m-2n=-(m+2n)$.

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình ta được: $\begin{cases} x_0^2+mx_0+2=0 \\ x_0^2+2nx_0+6=0\end{cases}$ có nghiệm chung

$\Rightarrow 2x_0^2+(m+2n)x_0+8=0$ có nghiệm x_0. $\Rightarrow \Delta=(m+2n)^2-4.2.8\ge 0$

$\Leftrightarrow (m+2n)^2\ge 64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2n\ge 8 \\ m+2n\le -8\end{array}\right. \Rightarrow |m|+2|n|\ge 8$.

Vậy $|m|+2|n|$ đạt GTNN là 8 khi $\left[\begin{array}{l} m+2n=8 \\ m+2n=-8\end{array}\right.$.

+ TH1: $m+2n=8$, ta được $2x_0^2+8x_0+8=0 \Leftrightarrow x_0^2+4x_0+4=0 \Leftrightarrow x_0=-2$.

Ta có $\begin{cases} (-2)^2+m.(-2)+2=0 \\ (-2)^2+2n.(-2)+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=\frac{5}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn).

+ TH2: $m+2n=8$, ta được $2x_0^2-8x_0+8=0 \Leftrightarrow 2(x_0-2)^2=0 \Leftrightarrow x_0=2$.

Ta có $\begin{cases} 2^2+m.2+2=0 \\ 2^2+2n.2+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n=-\frac{5}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy với $m=3$ và $n=\frac{5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0=-2$.

Vậy với $m=-3$ và $n=-\frac{5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0=2$.

Câu 4: (3 điểm)

1) Cho phương trình: $x^2+2(m-3)x-m-3=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Cho $x,\ y,\ z,\ t$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+t}+\frac{z}{t+x}+\frac{t}{x+y}\ge 2$$

Lời giải

1) Xét phương trình: $x^2+2(m-3)x-m-3=0$. Giả sử $x_1<2<x_2$

Áp dụng Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1x_2=-m-3 \\ x_1+x_2=-2(m-3) \end{cases}$.

Để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2 thì:

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ (x_1-2)(x_2-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2+m+3>0 \\ x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-5m+12>0 \\ 3m-11<0 \end{cases} \Rightarrow m<\frac{11}{3}$$ (do $m^2-5m+12$ luôn lớn hơn 0).

Vậy với $m<\frac{11}{3}$ thì phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Đặt $A=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+t}+\frac{z}{t+x}+\frac{t}{x+y}$, $M=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+t}+\frac{t}{t+x}$

$N=\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{t}{z+t}+\frac{x}{t+x}$.

$$\Rightarrow M+N=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+t}+\frac{t}{t+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{t}{z+t}+\frac{x}{t+x}=4.$$

Ta có $N+A=\frac{y+t}{x+y}+\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+t}{z+t}+\frac{x+z}{t+x}$

$$=(\mathrm{y+t})\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+t}\right)+(x+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{t+x}\right)\ge\frac{4(y+t)}{x+y+z+t}+\frac{4(x+z)}{x+y+z+t}=4.$$

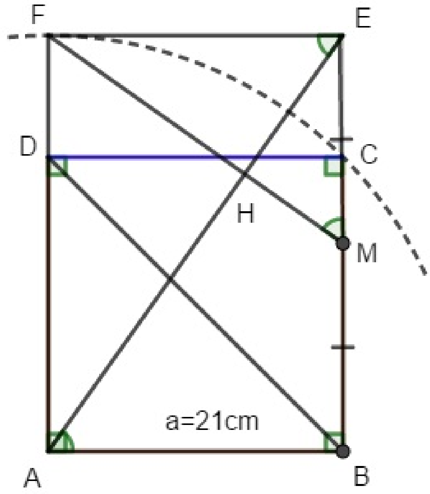
Chứng minh tương tự ta cũng có $A+M\ge 4$

$\Rightarrow A+M+A+N\ge 8\Rightarrow A\ge 2$. Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=t>0$.

Câu 5: (3,5 điểm) Để có được tờ giấy khổ A4 (kích thước xấp xỉ 21cm x 29,7cm) người ta thực hiện như hình vẽ minh họa bên.

Bước 1: Tạo ra hình vuông $ABCD$ cạnh $a = 21$ cm.
Bước 2: Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt tia AD tại F.
Bước 3: Tạo hình chữ nhật $ABEF$.
Khi đó hình chữ nhật $ABEF$ chính là tờ giấy A4 thông dụng hiện nay.

Bạn An ngồi nghịch xếp tờ giấy A4 này theo đường thẳng AE, rồi xếp theo đường thẳng FM (M là trung điểm BE) khi mở tờ giấy ra. An ngạc nhiên thấy hai đường thẳng FM và AE vuông góc với nhau. Em hãy chứng minh giúp bạn An vẽ điều đó.



Lời giải

Ta có: $AC = DB = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 21\sqrt{2}$ (cm). Mà $AC = AF$ (C, F thuộc đường tròn tâm A)

$\Rightarrow AF = AC = 21\sqrt{2} = EB$. Xét ΔABE vuông tại B ta có
$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{21^2 + (21\sqrt{2})^2} = 21\sqrt{3}$.

Xét ΔFME vuông tại E ta có: $EM = \dfrac{1}{2}EB = \dfrac{21\sqrt{2}}{2}$. Áp dụng định lí Py-ta-go ta có:

$$FM = \sqrt{FE^2 + ME^2} = \sqrt{21^2 + \left(\frac{21\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{21\sqrt{6}}{2}.$$

Ta có: $\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{21\sqrt{3}}{21} = \sqrt{3}$; $\dfrac{FM}{ME} = \dfrac{\frac{21\sqrt{6}}{2}}{\frac{21\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}$. Xét ΔAEF và ΔFME ta có:

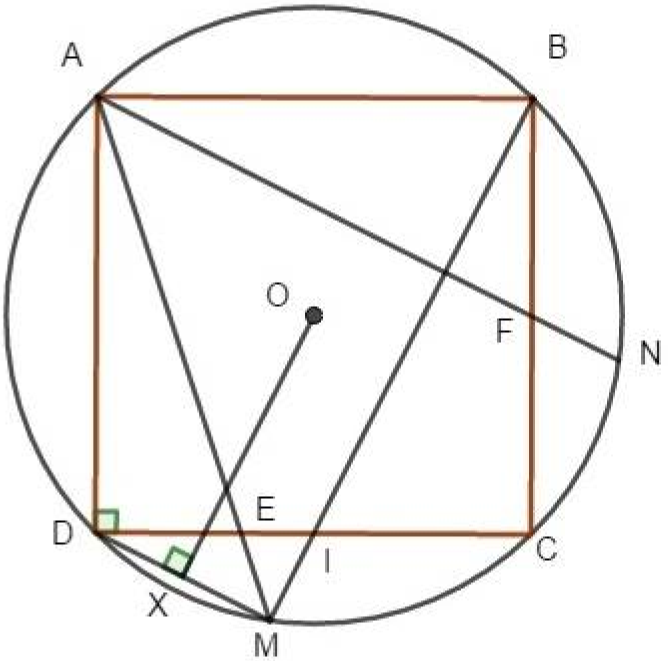
$$\begin{cases} \widehat{AFE} = \widehat{FEM} = 90^\circ \\ \dfrac{AE}{EF} = \dfrac{FM}{ME} \end{cases} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta FME \ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{FEA} = \widehat{FME}$$

Mà $\widehat{FEA} + \widehat{HEM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FME} + \widehat{MEH} = 90^\circ \Rightarrow FM \perp AE$.

Câu 6: (4 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, nối AE cắt cung nhỏ CD tại M. Trên cung nhỏ CB lấy điểm N sao cho cung nhỏ DM bằng cung nhỏ CN, nối AN cắt dây cung BC tại F. Chứng minh rằng: F là trung điểm của BC.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của BM và CD. Ta có EI // AB $\Rightarrow \dfrac{EI}{AB} = \dfrac{ME}{AM}$.

Kẻ OX vuông góc với . Khi đó DM $\Delta OXD \backsim \Delta ADE$ $(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DX}{OD} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{\sqrt{DE^2 + AD^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow DX = \frac{1}{\sqrt{10}}R \Rightarrow DM = \frac{2}{\sqrt{10}}R$$

Ta có $\Delta DEM \backsim \Delta AEC \Rightarrow \dfrac{ME}{CE} = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{MD}{AC} \Rightarrow \dfrac{ME}{AE}.\dfrac{DE}{CE} = \dfrac{MD^2}{AC^2} = \dfrac{1}{10}$

$$\Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{ME}{AM} = \frac{1}{6} \Rightarrow EI = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}CD \Rightarrow ID = EI + DE = \frac{1}{2}CD$$

$\Rightarrow \Delta CMI \backsim \Delta BNF$ $(g.c.g) \Rightarrow BF = CI = \dfrac{1}{2}BC$ (đpcm).

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH LẠNG SƠN NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức: $A=\dfrac{x\sqrt{x}-x-4\sqrt{x}+4}{2-3\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}-4}{2+3\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ với $x\geq 0,\ x\neq 1,\ x\neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Cho phương trình: $x^2-2mx+2m-1=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$B=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2-4x+1+\sqrt{3x-1}=0$.

b) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(2017).f(2018)=2019$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC có $AC>AB$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC $(I\in BC)$ cắt (O) ở E. Tại E và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F, AE cắt CF tại N, AB cắt CE tại M.

a) Chứng minh tứ giác $AMNC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{1}{CN}+\dfrac{1}{CI}=\dfrac{1}{CF}$.

c) Gọi AD là trung tuyến của tam giác ABC, kẻ $DK//AI$ $(K\in AC)$. Chứng minh $2AK=AC-AB$.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh nhân ngày thành lập đoàn $26-3$. Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận thấy số trận thắng thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH LẠNG SƠN NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức: $A=\dfrac{x\sqrt{x}-x-4\sqrt{x}+4}{2-3\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}-4}{2+3\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1,\ x\ne 4$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$.

Đặt $t=\sqrt{x}$, $t\ge 0, t\ne 1, t\ne 2$ khi đó:

$$A=\frac{t^3-t^2-4t+4}{2-3t+t^3}-\frac{t^3+t^2-4t-4}{2+3t-t^3}$$

$$A=\frac{(t-1)(t-2)(t+2)}{(t-1)(t-1)(t+2)}-\frac{(t+1)(t-2)(t+2)}{(t+1)(t+1)(2-t)}$$

$$A=\frac{t-2}{t-1}+\frac{t+2}{t+1}=\frac{2t^2-4}{t^2-1}=2-\frac{2}{t^2-1}$$

$$A=2-\frac{2}{x-1}.$$

Vậy với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$ thì $A=2-\dfrac{2}{x-1}$.

b) $x=\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(2+\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}-1}$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$x=\sqrt{2}+1$(Thỏa mãn ĐKXĐ).

Với $x=\sqrt{2}+1$ thì $A=2-\dfrac{2}{\sqrt{2}+1-1}=2-\dfrac{2}{\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Cho phương trình: $x^2-2mx+2m-1=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}.$$

Lời giải

Phương trình: $x^2-2mx+2m-1=0$.

a) có $a+b+c=0$ nên có hai nghiệm: $x_1=1,\ x_2=2m-1$. Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm $\forall m\in\mathbb{R}$.

b) Do phương trình luôn có nghiệm nên theo hệ thức Vi-et ta có:

$x_1 + x_2 = 2m;\ \ x_1.x_2 = 2m - 1$.

Suy ra: $B = \dfrac{2(2m-1)+3}{(x_1+x_2)^2+2} = \dfrac{4m+1}{4m^2+2}$.

Xét $B + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4m+1}{4m^2+2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4m+1+2m^2+1}{4m^2+2} = \dfrac{2\left(m^2+2m+1\right)}{2\left(m^2+2\right)} = \dfrac{\left(m+1\right)^2}{m^2+2} \geq 0$ với $\forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow B \geq \dfrac{-1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\left(m+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $MinB\dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0$.

b) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(2017).f(2018) = 2019$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{1}{3}$.

$x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (3x-1) - x + \sqrt{3x-1} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{3x-1} \geq 0$ ta được: $x^2 - t^2 - x + t = 0$.

$\Rightarrow (x-t)(x+t) - (x-t) = 0 \Leftrightarrow (x-t)(x+t-1) = 0$.

TH1: $x - t = 0$ hay $x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = \left(-3\right)^2 - 4.1.1 = 5 > 0$

$x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (Thỏa mãn); $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (Thỏa mãn)

TH2: $x + t - 1 = 0$ hay $t = 1 - x \Rightarrow \sqrt{3x-1} = 1 - x$, ĐK: $x \leq 1$

$\Rightarrow 3x - 1 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = \left(-5\right)^2 - 4.1.2 = 17 > 0$

$x = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ (Thỏa mãn); $x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ (Loại);

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.

b) Từ giả thiết ta có $f(2017), f(2018)$ là các số nguyên và $x = 2017$, $x = 2018$ không là nghiệm của PT $f(x) = 0$.

Giả sử phương trình $f(x)=0$ có nghiệm nguyên là $x=a\in\mathbb{Z}$, theo định lý Bơ-zu ta có: $f(x)=(x-a).g(x)$ với $g(x)$ là đa thức hệ số nguyên không nhận $x = 2017$, $x = 2018$ làm nghiệm.

Do vậy: $f(2017)=(2017-a).g(2017),\quad f(2018)=(2018-a).g(2018)$.

Nhân vế với vế và áp dụng giả thiết $f(2017).f(2018)=2019$;

$2019=(2017-a).g(2017).(2018-a).g(2018)$.

Điều này là vô lý vì vế trái là số lẻ, còn vế phải là số chẵn ($(2017-a)$; $(2018-a)$ là 2 số nguyên liên tiếp, tích là số chẵn).

Vậy $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên (đpcm).

Câu 4: *(6,0 điểm)*

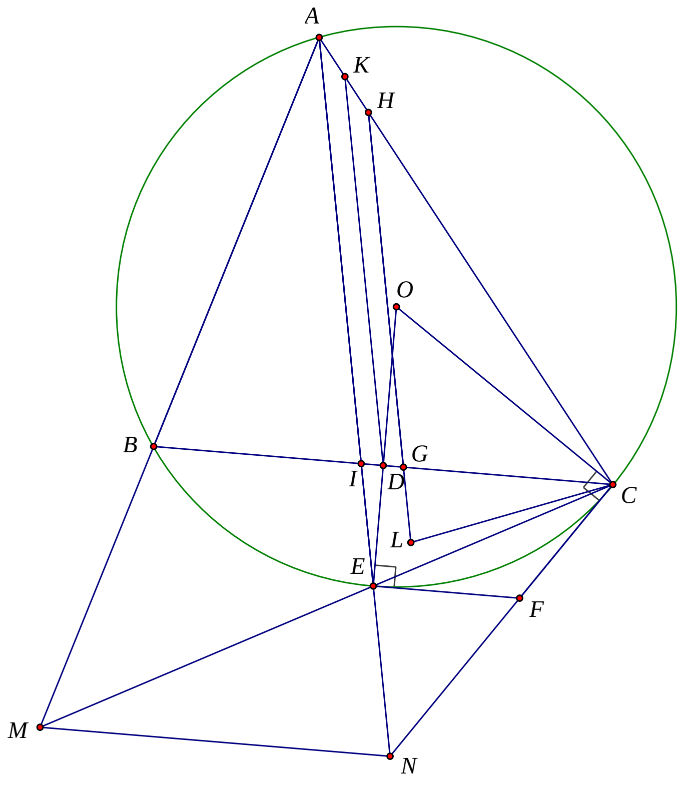
Cho tam giác nhọn ABC có $AC>AB$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC $(I\in BC)$ cắt (O) ở E. Tại E và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F, AE cắt CF tại N, AB cắt CE tại M.

a) Chứng minh tứ giác $AMNC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{1}{CN}+\dfrac{1}{CI}=\dfrac{1}{CF}$.

c) Gọi AD là trung tuyến của tam giác ABC, kẻ $DK//AI$ $(K\in AC)$. Chứng minh $2AK=AC-AB$.

Lời giải



a) Do AI là phân giác nên $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$, theo tính chất góc ngoài đường tròn, ta có :

$\overset{\frown}{AMC} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{ANC}$.

Vậy tứ giác $AMNC$ nội tiếp.

b) Do hai tứ giác $AMNC$ và $ABEC$ nội tiếp, nên ta có các góc trong bằng nhau:

$\widehat{AMN} = \widehat{MCN}$; $\widehat{ABE} = \widehat{BCE}$; $\widehat{CAE} = \widehat{CMN}$.

Suy ra : $BC // MN // EF$, ΔCMN cân tại N.

Xét tam giác CIN có CE là phân giác và $EF//IC$ nên ta có các tỉ số

$\frac{EN}{EI} = \frac{CN}{CI}$; $\frac{EN}{EI} = \frac{FN}{FC} \Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{FN}{FC}$.

$\Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{CN - CF}{FC} \Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{CN}{FC} - 1$.

Chuyển vế : $\frac{CN}{CI} + 1 = \frac{CN}{FC}$, chia 2 vế cho CN ta có điều phải chứng minh.

c) Gọi H thuộc AC sao cho K là trung điểm của AH , Kẻ $HG//AI$ với G thuộc BC , trên HG lấy điểm L sao cho $CG = CL$ (ΔCLG cân).

Từ $AI // DK // HG$ và K là trung điểm của AH nên $DI = DG$, theo giả thiết $DB = DC$ nên $BI = GC$ vậy $BI = CL$.

$AI // HL$ nên $\widehat{BAI} = \widehat{IAC} = \widehat{LHC}$, và $\widehat{BIA} = \widehat{EIC} = \widehat{LGC} = \widehat{HLC}$ (so le và đồng vị).

Xét hai tam giác AIB và HLC có hai góc bằng nhau nên góc còn lại bằng nhau, có 1 cạnh bằng nhau $BI = CL$ nên $\Delta AIB = \Delta HLC$ (g – c – g).

Vậy $AB = HC$.

Mặt khác $HC = AC – AH = AC – 2AK$ nên $AB = AC – 2AK \Rightarrow 2AK = AC – AB$ (đpcm).

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh nhân ngày thành lập đoàn $26 - 3$. Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận thấy số trận thắng thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

Lời giải

Gọi số trận hòa là x ($x \in N^*$) $\Rightarrow$ tổng số điểm của các trận hòa là $2x$, (1 trận hòa có 2 đội, mỗi đội được 1 điểm).

Theo giả thiết số trận thắng là $4x$ $\Rightarrow$ tổng số điểm của các trận thắng là $12x$.

Tổng số điểm các đội là 336 $\Rightarrow 2x + 12x = 336 \Rightarrow x = 24$.

Vậy ta có tất cả $24 + 4.24 = 120$ trận đấu diễn ra.

Từ giả thiết có n đội, mỗi đội đấu với n – 1 đội còn lại nên số trận đấu diễn ra là n(n – 1) , nhưng đây là tính cả trận lượt đi và lượt về, giả thiết mỗi đội đấu với nhau đúng 1 lần nên tổng số trận giảm đi một nửa, do đó có tất cả $\frac{n(n-1)}{2}$ trận đấu.

Vậy $\frac{n(n-1)}{2} = 120 \Rightarrow n(n-1) = 240 \Rightarrow n = 16$, ($n = -15$ loại).

Vậy có tất cả 16 đội bóng tham gia.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC NINH NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x\ge 2$.

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức $A=x^5+\dfrac{1}{x^5}$; $B=x^7+\dfrac{1}{x^7}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{2x_1-1}{x_2}+\dfrac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\dfrac{55}{x_1x_2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)\end{cases}$.

Câu 3: *(3,5 điểm)*

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{BAC}>90^\circ\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM>CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD=MB.MC$ và $BN.CM=BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

3) Khi $2AB=R$, xác định vị trí của M để $2MA+AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\ne 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\le\frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK=BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT=AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK=MT$.

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC NINH NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x\ge 2$.

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức $A=x^5+\dfrac{1}{x^5}$; $B=x^7+\dfrac{1}{x^7}$.

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x\ge 2$.

Ta có:

$$P=\dfrac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\dfrac{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1}-\sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}}$$

$$=\dfrac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\right)}{\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1}=\dfrac{\sqrt{2}.2\sqrt{x-1}}{2}=\sqrt{2}.\sqrt{x-1}.$$

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức $A=x^5+\dfrac{1}{x^5}$; $B=x^7+\dfrac{1}{x^7}$.

Ta có: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7\Leftrightarrow\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\right)-2=7\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=3$ (do $x>0$)

Ta có $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=3.6=18$

$$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=47$$

+) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)=x^5+\dfrac{1}{x^3}+x^3+\dfrac{1}{x^5}=x^5+\dfrac{1}{x^5}+18$

$$\Rightarrow x^5+\dfrac{1}{x^5}+18=141\Leftrightarrow x^5+\dfrac{1}{x^5}=123$$

+) $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)=x^7+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^7}=x^7+\dfrac{1}{x^7}+3$

$$\Rightarrow x^7+\dfrac{1}{x^7}+3=846\Leftrightarrow x^7+\dfrac{1}{x^7}=843$$

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{2x_1-1}{x_2}+\dfrac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\dfrac{55}{x_1x_2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)\end{cases}$.

Lời giải

1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}$.

Ta có: $\Delta=\left(m^2+1\right)^2-4\left(m-2\right)=m^4+2\left(m-1\right)^2+7>0$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\left(m^2+1\right)\\x_1x_2=m-2\end{cases}$

$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}\Leftrightarrow\frac{\left(2x_1-1\right)x_1+\left(2x_2-1\right)x_2}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1x_2\right)^2+55}{x_1x_2}$

$\Rightarrow 2x_1^2-x_1+2x_2^2-x_2=\left(x_1x_2\right)^2+55\Leftrightarrow 2\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)-\left(x_1x_2\right)^2-55=0$

$\Leftrightarrow 2\left[-\left(m^2+1\right)\right]^2-4\left(m-2\right)+\left(m^2+1\right)-\left(m-2\right)^2+55=0$

$\Leftrightarrow 2\left(m^4+2m^2+1\right)-4m+8+m^2+1-m^2+4m-4-55=0$

$\Leftrightarrow m^4+2m^2-24=0$ (2)

Đặt $m^2=a\quad\left(a\ge 0\right)$

Phương trình (2) trở thành $a^2+2a-24=0$

Ta có $\Delta'=25>0\Rightarrow$phương trình có 2 nghiệm:

$a_1=4$ (Nhận); $a_2=-6$ (Loại, vì $a<0$)

+) Với $a=4\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=2$; $m=-2$ là giá trị cần tìm.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4 & (1)\\4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right) & (2)\end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^2+y-xy-4=0\Leftrightarrow x^2+2x-3-xy+y=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+3\right)-y\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+3-y\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\y=x+3\end{array}\right.$

+) Thay $x=1$ vào phương trình (2) ta được: $4.1^2-24.1+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)^2=9\Leftrightarrow 3y-11+2\sqrt{\left(3y-11\right)y}+y=9$

$\Leftrightarrow\sqrt{3y^2-11y}=10-2y$

Điều kiện $y\le 5$, khi đó pt $\Leftrightarrow 3y^2-11y=\left(10-2y\right)^2\Leftrightarrow 3y^2-11y=100-40y+4y^2$

$\Leftrightarrow y^2-29y+100=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=25\,(ktm)\\y=4\,(tm)\end{array}\right.$

+) Thay $y=x+3$ vào phương trình (2) ta được

$$4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3(x+3)-11}+\sqrt{x+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-24x+35=5\sqrt{3x-2}+5\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 4x^2-24x+35-5\sqrt{3x-2}-5\sqrt{x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-28x+24+\left(3x+2-5\sqrt{3x-2}\right)+\left(x+9-5\sqrt{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2-7x+6\right)+\frac{(3x+2)^2-\left(5\sqrt{3x-2}\right)^2}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{(x+9)^2-\left(5\sqrt{x+3}\right)^2}{x+9+5\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)(x-6)+\frac{9x^2-63x+54}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{x^2-7x+6}{x+9+5\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)(x-6)+\frac{9(x-1)(x-6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{(x-1)(x-6)}{x+9+5\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-6)\left(4+\frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}\right)=0$$

Vì $\left(4+\dfrac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\dfrac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}\right)>0,\ \forall x\ge\dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow (x-1)(x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=4 \\ x=6\Rightarrow y=9\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ là: $(1;4)$, $(6;9)$

Câu 3: *(3,5 điểm)*

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Lời giải

1) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

Ta có: $\begin{cases} m+n^2 \vdots m^2-n \\ n+m^2 \vdots n^2-m\end{cases}$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n^2\ge m^2-n \\ n+m^2\ge n^2-m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(n-m+1)(m+n)\ge 0 \\ (m-n+1)(m+n)\ge 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n-m+1\ge 0 \\ m-n+1\ge 0\end{cases}$ (do m, n nguyên dương)

$\Leftrightarrow -1\le m-n\le 1$

*) TH1: $m-n=-1 \Leftrightarrow m=n-1$

+) $m+n^2 \vdots m^2-n$

$$\Rightarrow \frac{m+n^2}{m^2-n}\in Z \Rightarrow \frac{n-1+n^2}{(n-1)^2-n}\in Z \Rightarrow \frac{\left(n^2-3n+1\right)+4n-2}{n^2-3n+1}\in Z$$

$\Rightarrow \dfrac{4n-2}{n^2-3n+1} \in Z \Rightarrow n^2-3n+1 \le 4n-2$

$\Rightarrow n^2-7n+3 \le 0 \;\Rightarrow \dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \le n \le \dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$

vì $n \in N^* \;\Rightarrow n \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

$\Rightarrow m \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp $(m;n)$ thỏa mãn là: $(1;\ 2),(2;\ 3)$.

*) TH2: $m-n=0 \Leftrightarrow m=n$

$m+n^2 \vdots m^2-n$

$\Rightarrow \dfrac{m+n^2}{m^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{n+n^2}{n^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{(n^2-n)+2n}{n^2-n} \in Z \Rightarrow \dfrac{2}{n-1} \in Z$

$\Rightarrow n-1 \le 2 \;\Rightarrow n \le 3$

Vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3\} \;\Rightarrow m \in \{1;2;3\}$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;2)$, $(3;3)$.

*) TH3: $m-n=1 \Leftrightarrow m=n+1$

$n+m^2 \vdots n^2-m$

$\Rightarrow \dfrac{n+m^2}{n^2-m} \in Z \Rightarrow \dfrac{n+(n+1)^2}{n^2-n-1} \in Z \Rightarrow \dfrac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in Z$

$\Rightarrow \dfrac{4n+2}{n^2-n-1} \in Z \Rightarrow n^2-n-1 \le 4n+2 \;\Rightarrow n^2-5n-3 \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{5-\sqrt{37}}{2} \le n \le \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

Vì $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow m \in \{2;3;4;5;6\}$

Thử lại vào (1) ta được các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(2;\ 1),(3;\ 2)$.

Vậy các cặp nguyên dương (m,n) thỏa mãn là $(1;\ 2),(2;\ 1),(2;\ 3),(3;\ 2),(2;\ 2),(3;\ 3)$.

2) Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A. Khi đó $|T|=8$ và với a, b thuộc T ta có a^2+b^2 là hợp số, do đó $k \ge 9$

Xét các cặp số sau:

$A = \{1;4\} \cup \{3;2\} \cup \{5;16\} \cup \{6;15\} \cup \{7;12\} \cup \{8;13\} \cup \{9;10\} \cup \{11;14\}$

Ta thấy tổng bình phương của mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố

Xét T là một tập con của A và $|T|=9$, khi đó theo nguyên lí Dirichlet T sẽ chứa ít nhất 1 cặp nói trên.

Vậy $k_{\min}=9$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{BAC} > 90°\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM > CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O)(

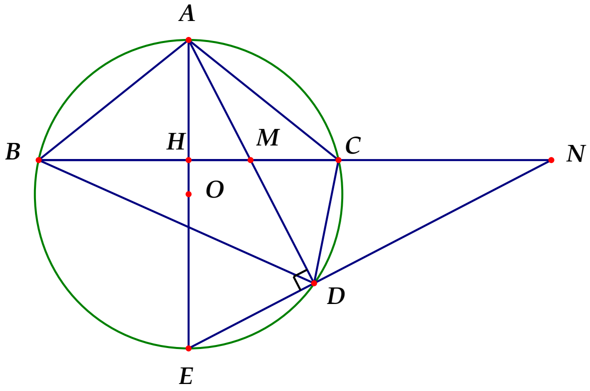
D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

3) Khi $2AB = R$, xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



1) Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$.

+) Ta có $\Delta MAB \# \Delta MCD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow MA.MD = MB.MC$ (đpcm)

+) Theo gt A là điểm chính giữa cung nhỏ BC $\Rightarrow DA$ là tia phân giác $\widehat{BDC}$ của ΔBDC (1)

Mặt khác, E là điểm chính giữa cung lớn BC $\Rightarrow AE$ là đường kính của (O)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = 90° \Rightarrow DA \perp DN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DN$ là tia phân giác ngoài $\widehat{BDC}$ của ΔBDC

Do đó, theo tính chất của tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của tam giác ta có:

$\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BN}{CN} \Rightarrow BM.CN = BN.CM$ (đpcm)

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

Kẻ BE cắt (I) tại J

Ta có $\widehat{EBD} = \widehat{EAD}$

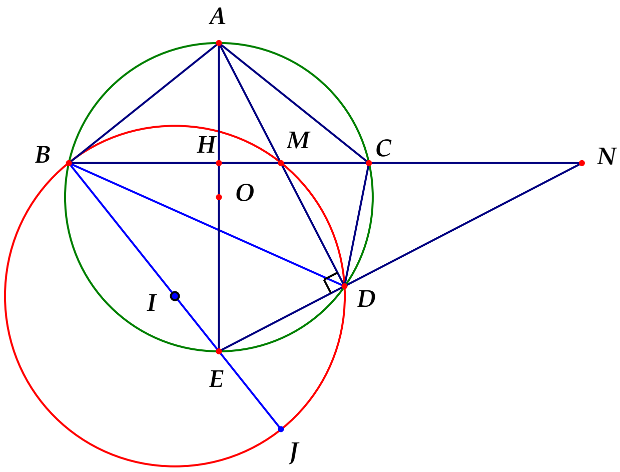
$\widehat{BJD} = \widehat{DMC}$ (cùng bù với $\widehat{BMD}$)

Mà $\widehat{EAD} + \widehat{DMC} = \widehat{EAD} + \widehat{HMA} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{EBD} + \widehat{BJD} = 90°$

$\Rightarrow BD \perp JD \Rightarrow BJ$ là đường kính $\Rightarrow$ $I \in BJ$ hay $I \in BE$

$\Rightarrow$ B, I, E thẳng hàng (đpcm)



3) Khi $2AB = R$, xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $\Delta HAM \# \Delta DAE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AM.AD=AH.AE$

Với $AE=2R$; $AH=\dfrac{AB^2}{AE}=\dfrac{R}{8} \Rightarrow AM.AD=\dfrac{R^2}{4}$

Theo BĐT Cô- si: $2AM+AD\geq 2\sqrt{2AM.AD} =2\sqrt{2.\dfrac{R^2}{4}}=R\sqrt{2}$

GTNN đạt được khi: $2AM=AD$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của $AD \Rightarrow OM\perp AD$

$\Rightarrow M$ là giao điểm của đường tròn đường kính OA với BC

Câu 5: *(2,5 điểm)*

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK=BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT=AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK=MT$.

Lời giải

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$VT=\frac{25}{3\sqrt[3]{2.2\left(xy+yz+zx\right)}}\geq \frac{25}{xy+yz+zx+4}=\frac{25}{xy+yz+zx+x+y+z+1}$$

$$\geq \frac{25}{\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)}$$

Cần chứng minh $\sum\left(x+1\right)^2\left(y+1\right)\leq 25$

Sau khi rút gọn, BĐT trở thành $x^2y+y^2z+z^2x\leq 4$

Giả sử y nằm giữa x và z, suy ra $\left(y-x\right)\left(y-z\right)\leq 0$ hay $y^2+zx\leq xy+yz$

Do đó $y^2z+z^2x \leq xyz+yz^2$

$$x^2y+y^2z+z^2x\leq x^2y+xyz+yz^2 \leq y\left(z+x\right)^2 = \frac{1}{2}.2y\left(z+x\right)\left(z+x\right)\leq \frac{1}{54}$$

$$\left(2y+z+x+z+x\right)^3=4.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK=BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT=AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK=MT$.

Vẽ đường tròn $\left(A;AC\right)$, $\left(B;BC\right)$ và đường tròn (I) ngoại tiếp ΔABC

Kẻ AX cắt (I) tại Y, BX cắt (I) tại Z, AZ cắt BY tại P

Ta có $\widehat{AYB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow AY\perp BP$

$\widehat{BZA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow BZ \perp AP$

$\Rightarrow X$ là trực tâm của ΔABP

Ta thấy $\Delta ABC \# \Delta ACD \Rightarrow AC^2 = AD.AB = AT^2$

$\Rightarrow \Delta ATD \# \Delta ABT$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ATD} = \widehat{ABT}$

Tương tự, ta có $\widehat{BKD} = \widehat{BAK}$

Ta có $\widehat{APD} = \widehat{ABZ} = \widehat{ATD}$ $\Rightarrow$ tứ giác $ADTP$ là tứ giác nội tiếp

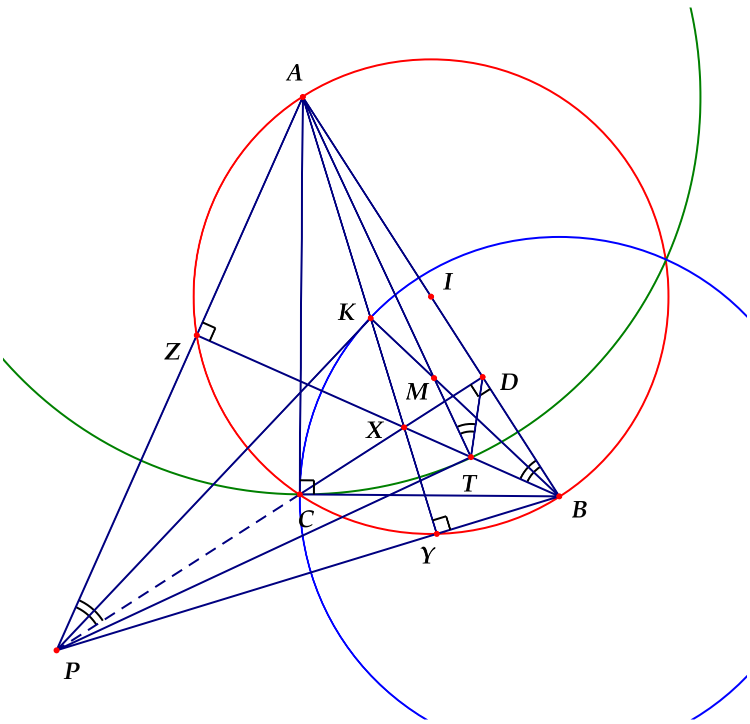
$\Rightarrow AT \perp PT$ (1)

Tương tự, ta có $BK \perp PK$ (2)

$\Rightarrow PK = PT$ (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra $\Delta MKP = \Delta MTP$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow MK = MT$ (đpcm)



……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG BẮC GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$.

Rút gọn M và tìm x để $M>1$.

b) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$.

Tính $H=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{30-\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\dfrac{5}{x^2}}=6x^2$.

b) Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3};x^2+2\sqrt{3};x-\dfrac{2}{x}$ là số nguyên.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương.

b) Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng $OA=R$, vẽ đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy H bất kỳ sao cho $AH<R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$. Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB=AC=R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M\in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N\in OC$).

a) Chứng minh $OM.OB=ON.OC$ và MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh $OB.OC=2R^2$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi.

(chú ý: dùng kiến thức học kỳ 1 lớp 9).

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho dãy số $n,n+1,n+2,\ldots,2n$ với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh:………………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH LONG AN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$.

Rút gọn M và tìm x để $M>1$.

b) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$.

Tính $H=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne 1, x\ne 3, x\ne 4$.

$$*\,M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}+\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\left(\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}:\frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-11\right)}:\frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-11\right)}:\frac{3x-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{3(x-3)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$*\,M>1\Rightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}-1>0\Leftrightarrow\frac{4-2\sqrt{x}}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}>0\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}<0.$$

Ta có: $\sqrt{x}-2<\sqrt{x}-1$ nên $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}<0$ khi $\begin{cases}\sqrt{x}-2<0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<4$.

Kết hợp ĐKXĐ ta có $1<x<4$ và $x\ne 3$

Vậy $M>1$ khi $\Leftrightarrow 1<x<4$ và $x\ne 3$

b) $H=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$.

Vì $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ nên $1+c=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+c$

$=\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

Tương tự ta có

$1+a=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$;

$1+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$.

$$H=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=0.$$

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=6x^2$.

b) Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3}; x^2+2\sqrt{3}; x-\frac{2}{x}$ là số nguyên.

Lời giải

a) Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=6x^2$ ĐK: $x^2\ge\sqrt{\frac{5}{6}}$

Vì $x^2\ge\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow\frac{5}{x^2}>0;\ 6x^2-1>0$,

Theo bất đẳng thức AM – GM với hai số dương $\frac{5}{x^2}$ và $6x^2-1$ ta có

$$\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}=\sqrt{\frac{5}{x^2}\left(6x^2-1\right)}\le\frac{\frac{5}{x^2}+\left(6x^2-1\right)}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{5}{x^2}=6x^2-1\Leftrightarrow x=\pm1$

Vì $x^2\ge\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow 6x^2-\frac{5}{x^2}\ge0$,

Theo bất đẳng thức AM – GM với hai số không âm $6x^2-\frac{5}{x^2}$ và 1 ta có

$$\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=\sqrt{(6x^2-\frac{5}{x^2})\cdot1}\le\frac{(6x^2-\frac{5}{x^2})+1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $6x^2-\frac{5}{x^2}=1\Leftrightarrow x=\pm1$

Vậy ta có $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}} \le \frac{\frac{5}{x^2}+6x^2-1+6x^2-\frac{5}{x^2}+1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}} \le 6x^2$ Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow x=\pm 1$(thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 1$.

b) Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3};\ x^2+2\sqrt{3};\ x-\frac{2}{x}$ là số nguyên.

Đặt $a=x-\sqrt{3};\ b=x^2+2\sqrt{3};\ c=x-\frac{2}{x}$ với $a,b,c\in Z$.

Từ $a=x-\sqrt{3} \Rightarrow x=a+\sqrt{3}$; từ $b=x^2+2\sqrt{3} \Rightarrow x^2=b-2\sqrt{3}$, nên ta có

$\left(a+\sqrt{3}\right)^2=b-2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2+2\sqrt{3}a+3=b-2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(a+1)=b-a^2-3$.

Nếu $a+10\ne 0 \Rightarrow a\ne -1 \Rightarrow 2\sqrt{3}=\frac{b-a^2-3}{a+1}$,

vì $a,b\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b-a^2-3}{a+1}\in\mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ (Vô lý).

Vậy $a+1=0$ nên ta có $\begin{cases} a+1=0 \\ b-a^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{3}-1$

Với $x=\sqrt{3}-1$ ta có $a=-1; b=4$ và $c=-2$ nguyên, thỏa mãn đầu bài.

Câu 3: *(5,0 điểm)*

a) Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương.

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$.

Lời giải

a) Vì $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3+14x^2+9x-6=k^2$ với $k\in\mathbb{N}$.

Ta có $4x^3+14x^2+9x-6=4x^2(x+2)+6x(x+2)-3(x+2)=(x+2)(4x^2+6x-3)$

nên ta có $(x+2)(4x^2+6x-3)=k^2$.

Đặt $(x+2,4x^2+6x-3)=d$ với $d\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $x+2\,\vdots\, d \Rightarrow (x+2)(4x-2)\,\vdots\, d \Rightarrow 4x+6x-4\,\vdots\, d$.

Ta lại có $4x^2+6x-3\,\vdots\, d \Rightarrow (4x^2+6x-3)-(4x^2+6x-4)=1\,\vdots\, d \Rightarrow d=1$

$\Rightarrow (x+2,4x^2+6x-3)=1$

mà $(x+2)(4x^2+6x-3)$ nên ta có:

$x+2$ và $4x^2+6x-3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2=a^2$ và $4x^2+6x-3=b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}*$
.

Vì $x>0$ nên ta có $4x^2<b^2<4x^2+12x+9 \Leftrightarrow (2x)^2<b^2<(2x+3)^2$.

Vì b lẻ nên $b^2=(2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2+6x-3=4x^2+4x+1 \Leftrightarrow x=2$.

Với $x=2$ ta có $4x^3+14x^2+9x-6=100=10^2$ là số chính phương.

b) Vì x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz \Rightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=1$.

Nên ta có: $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$; Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=z$

$$\Rightarrow \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right).$$

Tương tự ta có $\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$; $\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}\right)$.

Do đó $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$; Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Ta có $(x+y+x)^2-3(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-3xy-3yz-3zx$

$$=x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right]\ge 0$$

Nên $(x+y+x)^2\ge 3(xy+yz+zx)\Rightarrow (xyz)^2\ge 3(xy+yz+xz)$

$$\Rightarrow 3\dfrac{xy+yz+xz}{xyz}\le xyz \Rightarrow 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\le xyz$$

Vậy $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng $OA=R$, vẽ đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy H bất kỳ sao cho $AH<R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$. Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB=AC=R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M\in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N\in OC$).

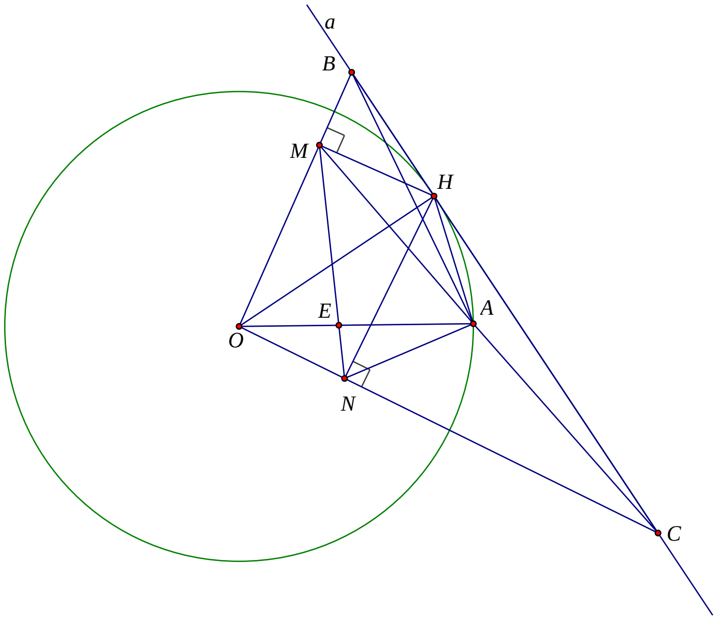
a) Chứng minh $OM.OB=ON.OC$ và MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh $OB.OC=2R^2$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi.

(chú ý: dùng kiến thức học kỳ 1 lớp 9)

Lời giải



a) Ta có $OH \perp HB$ (Tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \Delta OHB$ vuông tại H, mà $HM \perp OB$ (gt) nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$.

Chưng minh tương tự ta có $ON \cdot OC = OH^2 = R^2$. Vậy ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC$.

Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ mà $OA = R$ nên ta có $OM \cdot OB = OA^2 \Rightarrow \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OA}{OB}$.

Xét ΔOMA và ΔOAB có $\widehat{O}$ chung, có $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OA}{OB} \Rightarrow \Delta OMA \# \Delta OAB \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OBA}$.

Ta có $AO = AB = R$ (gt) $\Rightarrow \Delta OAB$ cân $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{OBA} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{OBA}$, vậy $\widehat{OAM} = \widehat{AOM} \Rightarrow \Delta OMA$ cân $\Rightarrow MO = MA$.

Chứng minh tương tự ta có ΔONA cân $\Rightarrow NO = NA$.

Ta có $MO = MA; NO = NA$, vậy MN là trung trực của OA, gọi E là giao điểm của MN với OA ta có $EO = EA = \dfrac{OA}{2}$ và $MN \perp OA$ tại E, mà O, A cố định nên E cố đinh.

Vậy MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC \Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{ON}{OB}$.

Xét ΔOMN và ΔOCB có $\widehat{O}$ chung, có $\dfrac{OM}{OC} = \dfrac{ON}{OB} \Rightarrow \Delta OMN \backsim \Delta OCB$ (c.g.c)

mà $OE \perp MN$ và $OH \perp BC$ nên ta có $\dfrac{OM}{OC} = \dfrac{OE}{OH} \Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OE}{2OE} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}OC$ (vì $OH = OA = 2OE$).

Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ (cm trên) $\Rightarrow \dfrac{1}{2}OC \cdot OB = R^2 \Rightarrow OC \cdot OB = 2R^2$.

c) Ta có $\Delta OMN \# \Delta OCB$ (cm trên)$\Rightarrow \dfrac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \dfrac{OE^2}{OH^2} = \dfrac{OE^2}{OA^2} = \dfrac{OE^2}{(2OE)^2} = \dfrac{1}{4}$.

Nên $S_{OMN}=\frac{1}{4}S_{OCB}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot OH\cdot BC=\frac{1}{8}R\cdot BC\le\frac{1}{8}R(AB+AC)=\frac{1}{8}R(R+R)=\frac{1}{4}R^2$.

Dấu "=" xảy ra khi B,A,C thẳng hàng $\Leftrightarrow H\equiv A$.

Vậy diện tích ΔOMN lớn nhất là $S_{OMN}=\frac{1}{4}R^2$ khi $H\equiv A$.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho dãy số $n,n+1,n+2,\ldots,2n$ với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Lời giải

Nếu n là lũy thừa bậc hai của một số tự nhiên thì bài toán chứng minh xong.

Nếu n không là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên, ta luôn tìm được 1 số nguyên dương k sao cho $k^2<n<(k+1)^2$. Vì n nguyên dương và $n>k^2\Rightarrow n\ge k^2+1$, vậy ta có:

$$2n-(k+1)^2\ge 2(k^2+1)-(k+1)^2=2k^2+4k+2-k^2-2k-1=k^2-2k+1=(k-1)^2\ge 0$$

Vậy mọi k nguyên dương, nên ta có $k^2<n<(k+1)^2\le 2n$.

Vậy trong dãy luôn có ít nhất một lũy thừa bậc hai của một số tự nhiên.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẬU GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(2,5 điểm)*

Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{\left(x^2-9\right)\left(y^2-y-2\right)}{\left(x^3-6x^2+9x\right)\left(y+1\right)}$ biết $x^2+16y^2-7xy=xy-\left|x-4\right|$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm các số tự nhiên n sao cho $A=n^2+2n+8$ là số chính phương.

Câu 3: *(4,5 điểm)*

a) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2(1+xy) \\ xy-x+y-2=0 \end{cases}$

Câu 4: *(5,5 điểm)*

Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$.

a) Tính theo R chiều dài cạnh và chiều cao tam giác ABC.

b) Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC $\left(M\ne B;C\right)$. Trên tia đối của tia MB lấy $MD=MB$. Chứng minh ΔMCD đều.

c) Xác định vị trí điểm M sao cho tổng $S=MA+MB+MC$ là lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất của S theo R.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{9b}{c+a-b}+\dfrac{16}{a+b-c}$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẬU GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(2,5 điểm)*

Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{\left(x^2-9\right)\left(y^2-y-2\right)}{\left(x^3-6x^2+9x\right)\left(y+1\right)}$ biết $x^2+16y^2-7xy=xy-\left|x-4\right|$.

Lời giải

ĐKXĐ: $y\ne -1; x\ne 0; x\ne 3$.

Ta có $A=\dfrac{\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(y+1\right)\left(y-2\right)}{x\left(x-3\right)^2\left(y+1\right)}=\dfrac{\left(x+3\right)\left(y-2\right)}{x(x-3)}$.

Từ giả thiết $x^2+16y^2-7xy=xy-|x-4| \Leftrightarrow (x-4y)^2=-|x-4|\le 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Do đó $A=-\dfrac{7}{4}$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm các số tự nhiên n sao cho $A=n^2+2n+8$ là số chính phương.

Lời giải

a) Với $x, y\neq 0$ ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+2y-xy=0 \Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=4 \Leftrightarrow (x-2)(y-2)=4$.

Lập bảng xét các ước của 4 ta có các nghiệm :

$(x;y)\in\{(-2;1);(1;-2);(3;6);(4;4);(6;3)\}$.

b) Đặt $n^2+2n+8=a^2 \Leftrightarrow (a-n-1).(a+n+1)=7$ với a nguyên dương

Vì $a+n+1>a-n-1$ nên $\begin{cases} a+n+1=7 \\ a-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ n=2 \end{cases}$.

Câu 3: *(4,5 điểm)*

a) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2(1+xy) \\ xy-x+y-2=0 \end{cases}$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có: $\dfrac{a^2}{b}+b\ge 2a$

Tương tự ta có: $\dfrac{b^2}{c}+c\ge 2b;\ \dfrac{c^2}{a}+a\ge 2c$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b}+b+\dfrac{b^2}{c}+c+\dfrac{c^2}{a}+a\ge 2a+2b+2c \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c$.

Dấu “ =” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Từ phương trình $xy-x+y-2=0 \Leftrightarrow 1+xy=x-y+3$.

Thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$x+y=2(x-y+3) \Leftrightarrow x+y=2x-2y+6=0 \Leftrightarrow x=3y-6$

Thay vào phương trình thứ hai ta được $3y^2-8y+4=0 \Leftrightarrow (3y-2).(y-2)=0$

Với $y=2\Rightarrow x=0$.

Với $y=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=-4$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(0;2);\left(-4;\dfrac{2}{3}\right)$.

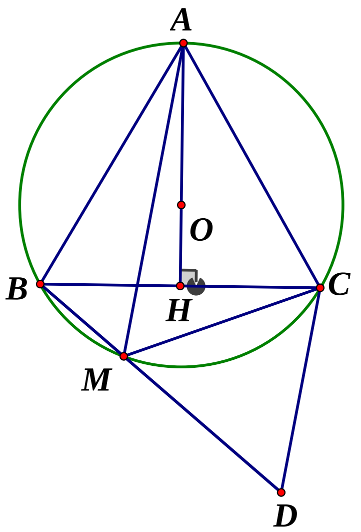
Câu 4: *(5,5 điểm)* Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$.

a) Tính theo R chiều dài cạnh và chiều cao tam giác ABC.

b) Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC $(M \neq B;C)$. Trên tia đối của tia MB lấy $MD=MC$. Chứng minh ΔMCD đều.

c) Xác định vị trí điểm M sao cho tổng $S=MA+MB+MC$ là lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất của S theo R.

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH. Ta có $AH=\dfrac{3.AO}{2}=\dfrac{3R}{2}$; $AB=\dfrac{AH}{\sin B}=\dfrac{\frac{3R}{2}}{\sin 60^\circ}=R\sqrt{3}$.

b) Tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\widehat{CMD}=\widehat{BAC}=60^\circ$

ΔMCD cân có $\widehat{CMD}=60^\circ$ nên ΔCMD là tam giác đều.

c) Ta có ΔMCD đều nên $MC=MD=CD$.

Xét ΔAMC và ΔBDC có $AC=BC$; $MC=CD$; $\widehat{ACM}=\widehat{BCD}=60^\circ+\widehat{BCM}$

Nên $\Delta AMC=\Delta BDC\,(c.g.c)\Rightarrow MA=BD.$

Do đó: $S=MA+MB+MC=MA+MB+MD=MA+BD=2MA$.

Vậy S lớn nhất khi MA là đường kính của đường tròn (O) hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{9b}{c+a-b}+\dfrac{16}{a+b-c}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=y+z \\ 2b=z+x \\ 2c=z+y \end{cases}$

Ta có : $S=\dfrac{y+z}{2x}+\dfrac{9(z+x)}{2y}+\dfrac{16(x+y)}{2z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{9x}{y}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{16x}{z}+\dfrac{9z}{y}+\dfrac{16y}{z}\right)$

$\geq \dfrac{1}{2}.\left(2.3+2.4+2.3.4\right)=19$

Giá trị nhỏ nhất của S là 19. Đạt được khi và chỉ khi $a=\dfrac{7}{8};b=\dfrac{5}{8};c=\dfrac{1}{2}$.

……………..**HẾT**……………

ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH PHÚ THỌ NĂM HỌC 2017-2018.

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm).

Câu 1: Cho phương trình $x^2+mx+4=0$. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm kép là :

A. $\{4;-4\}$. **B.** $\{4\}$. **C.** $\{-4\}$. **D.** $\{16\}$.

Câu 2: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, góc tạo bởi hai đường thẳng có phương trình $y=5-x$ và $y=5+x$ bằng :

A. 70^{o}. **B.** 30^{o}. **C.** 90^{o}. **D.** 45^{o}.

Câu 3: Cho $x=\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Giá trị của biểu thức $\left(x^3-4x-2\right)^{2018}$ bằng :

A. -2^{2018}. **B.** 2^{2018}. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 4: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2018;-1)$ và $B(-2018;1)$. Đường trung trực của

đoạn thẳng AB có phương trình là :

A. $y=-\dfrac{x}{2018}$. **B.** $y=\dfrac{x}{2018}$. **C.** $y=2018x$. **D.** $y=-2018x$.

Câu 5: Cho biểu thức $P=\sqrt{2x-\sqrt{8x-4}}-\sqrt{2x+\sqrt{8x-4}}$, khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $P=-2$ với mọi $x\ge\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-2$ với mọi $x\ge1$.

C. $P=-2\sqrt{2x-1}$ với mọi $x\le1$. **D.** $P=-2\sqrt{2x-1}$ với mọi $\dfrac{1}{2}\le x\le1$.

Câu 6: Trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy cho điểm M, biết rằng M cách đều trục

tung, trục hoành và đường thẳng $y=2-x$. Hoành độ của điểm M bằng :

A. $2+\sqrt{2}$. **B.** $2-\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khoảng cách từ $M\left(2018;2018\right)$ đến đường thẳng $y=x-2$ bằng:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A\left(\dfrac{2}{3}m;m-10\right)$. Khi m thay đổi thì khẳng định nào

dưới đây đúng ?

A. Điểm A thuộc một đường thẳng cố định. **B.** Điểm A thuộc một đường tròn cố định.

C. Điểm A thuộc một đoạn thẳng cố định. **D.** Điểm A thuộc đường thẳng $y=x-10$.

Câu 9: Cho tam giác ABC có $AB=3$ cm, $AC=4$ cm à $BC=5$ cm. Kẻ đường cao AH, gọi I, K lần

lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác HAB và tam giác HAC. Độ dài của đoạn thẳng

KI bằng :

A. $1,4$ cm. **B.** $2\sqrt{2}$ cm. **C.** $1,45$ cm. **D.** $\sqrt{2}$ cm.

Câu 10: Cho AB là một dây cung của đường tròn $(O;\ 1\,cm)$ và $\widehat{AOB}=150^{o}$. Độ dài của đoạn thẳng

AB bằng :

A. 2 cm. **B.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm. **C.** $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ cm **D.** $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Câu 11: Cho hai đường tròn $(I;3)$ và $(O;6)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Qua A vẽ hai tia vuông

góc với nhau cắt hai đường tròn đã cho tại B và C. Diện tích lớn nhất của tam giác ABC bằng:

A. 6. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 12: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi x, y lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của

tam giác ABC và tam giác ABD. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ bằng :

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;\,R)$ đường kính AC và dây cung $BD=R\sqrt{2}$. Gọi

$x,\ y,\ z,\ t$ lần lượt là khoảng cách từ điểm O tới $AB,\ CD,\ BC,\ DA$. Giá trị của biểu thức $xy+zt$ bằng :

A. $2\sqrt{2}R^2$. **B.** $\sqrt{2}R^2$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}R^2$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}R^2$.

Câu 14: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $(I;2\,cm)$ và nội tiếp đường tròn $(O;6\,cm)$. Tổng

khoảng cách từ điểm O tới các cạnh của tam giác ABC bằng :

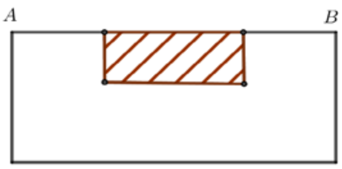
A. 8 *cm.* **B.** 12 *cm.* **C.** 16 *cm.* **D.** 32 *cm.*

Câu 15: Nếu một tam giác có độ dài các đường cao bằng $12,15,20$ thì bán kính đường tròn nội tiếp tam

giác đó bằng :

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6 .

Câu 16: Trên một khu đất rộng, người ta muốn rào một mảnh đất nhỏ hình chữ nhật để trồng rau an toàn, vật liệu cho trước là $60m$ lưới để rào. Trên khu đất đó người ta tận dụng một bờ rào AB có sẵn (*tham khảo hình vẽ bên*) để làm một cạnh hàng rào. Hỏi mảnh đất để trồng rau an toàn có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?



A. 400 m^2. **B.** 450 m^2. **C.** 225 m^2. **D.** 550 m^2.

B. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 17: **(3,0 điểm).**

a) Cho $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2018$ với a,b,c đôi một khác nhau và khác không. Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=91$ và $b^2=ca$.

Câu 18: **(3,5 điểm).**

a) Giải phương trình $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2}=0$.

b) Hai vị trí A và B cách nhau $615\ m$ và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A, B đến bờ sông lần lượt là $118\ m$ và $487\ m$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi được bằng bao nhiêu mét (*làm tròn đến đơn vị mét*).

Câu 19: **(4,0 điểm).**

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) tại D và E ($AD < AE$). Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ tại các điểm M và N.

a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng bốn điểm M, E, N, I cùng thuộc một đường tròn (T).

b) Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (T) tiếp xúc nhau.

c) Chứng minh rằng đường thẳng IT luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 20: **(1,5 điểm).**

Chứng minh rằng $(a+b+c)\left[\frac{3a-b}{a^2+ab}+\frac{3b-c}{b^2+bc}+\frac{3c-a}{c^2+ca}\right] \le 9$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

……………….HẾT…………….

LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH PHÚ THỌ NĂM HỌC 2017-2018 .

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm: Mỗi câu 0,5 điểm) .

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	C	B	C	B, D	A, B	B	A
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
	D	B	C	A	C	A	A	B

B. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm) .

Câu 17: **(3,0 điểm).**

a) Cho $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2018$ với a,b,c đôi một khác nhau và khác không.

Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=91$ và $b^2=ca$.

Lời giải

a) Ta có $a^2(b+c)=b^2(c+a)\Leftrightarrow \dfrac{a}{bc+ab}=\dfrac{b}{ab+ca}=\dfrac{a-b}{c(b-a)}=-\dfrac{1}{c}$.

Suy ra $ab+bc+ca=0\Leftrightarrow bc=-a(b+c)\Leftrightarrow -abc=a^2(b+c)=2018.(1)$

$ab+bc+ca=0\Leftrightarrow ab=-c(a+b)\Leftrightarrow -abc=c^2(a+b).(2)$

Từ (1) và (2) ta được $c^2(a+b)=2018$.

b) Đặt $b=qa;c=q^2a(q>1)$ thì ta được $a(1+q+q^2)=91=13.7$.

Trường hợp 1: Nếu q là số tự nhiên thì ta được :

$\begin{cases}a=1\\1+q+q^2=91\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\q=9\end{cases}\Rightarrow a=1;b=9;c=81.$

$\begin{cases}a=7\\1+q+q^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\q=3\end{cases}\Rightarrow a=7;b=21;c=63.$

$\begin{cases}a=13\\1+q+q^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=13\\q=2\end{cases}\Rightarrow a=13;b=26;c=52.$

Trường hợp 2: Nếu q là số hữu tỷ thì giả sử $q=\dfrac{x}{y}(x\ge 3;y\ge 2)$.

Khi đó : $a(1+q+q^2)=91\Leftrightarrow a(x^2+xy+y^2)=91y^2\ (x^2+xy+y^2\ge 19)$

Ta có : $c=\dfrac{ax^2}{y^2}\in\mathbb{N}\Rightarrow\dfrac{a}{y^2}\in\mathbb{N}\Rightarrow a=ty^2\Rightarrow x^2+xy+y^2=91\Rightarrow x=6;y=5.$

và $a=25;b=30;c=36$.

Vậy có 8 bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn $(1;9;81),(81;9;1),(7;21;63),(63;21;7);...$

Câu 18: **(3,5 điểm).**

a) Giải phương trình $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2}=0$.

b) Hai vị trí A và B cách nhau $615\ m$ và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A,B đến bờ sông lần lượt là $118\ m$ và $487\ m$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi được bằng bao nhiêu mét (*làm tròn đến đơn vị mét*).

Lời giải

a) $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+2x+2\right)-\sqrt{x^2+2x+2}-2=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+2}=-1(L)\\ \sqrt{x^2+2x+2}=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2+2x+2=4 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{3}\\ x=-1+\sqrt{3}\end{array}\right..$

b) Gọi C,D lần lượt là hình chiếu của A,B lên bờ sông. Đặt $CE=x\left(0<x<492\right)$

Ta có $CD=\sqrt{615^2-\left(487-118\right)^2}=492.$

Quãng đường di chuyển của người đó bằng $AE+EB$

$=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{\left(492-x\right)^2+487^2}$

Ta có với mọi a,b,c,d thì $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{\left(a+c\right)^2+\left(b+d\right)^2}$ (1).

Thật vậy $(1)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\geq\left(a+c\right)^2+\left(b+d\right)^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\geq ac+bd$ (2)

Nếu $ac+bd<0$ thì (2) luôn đúng. Nếu $ac+bd\geq0$ bình phương hai vế ta được (2) trở thành $\left(ad-bc\right)^2\geq0.$ Dấu đẳng thức sảy ra khi $ad=bc.$

Áp dụng (1) thì $AE+EB\geq\sqrt{\left(x+492-x\right)^2+\left(487+118\right)^2}=\sqrt{608089}\approx779{,}8m$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $487x=118\left(492-x\right)\Leftrightarrow x\approx96m$

Vậy quãng đường nhỏ nhất là 780 m .

Câu 19: **(4,0 điểm).**

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC với (O) (B,C là các tiếp điểm). Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) tại D và E ($AD<AE$). Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ tại các điểm M và N.

a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng bốn điểm M,E,N,I cùng thuộc một đường tròn (T).

b) Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (T) tiếp xúc nhau.

c) Chứng minh rằng đường thẳng IT luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^o$ nên tứ giác $ABON$ nội tiếp .

Gọi J là giao điểm của AD với đường tròn $(ABOC)$. Suy ra ΔDMA đồng dạng ΔDNJ .

Suy ra : $DM.DN=DA.DJ$

Mà : $DA=2DI; DJ=\dfrac{1}{2}DE.$

Nên $DM.DN=DI.DE \Rightarrow \Delta DMI$ đồng dạng ΔDEN

Vậy tứ giác $MINE$ nội tiếp hay có đpcm.

b) Dễ thấy khi $MN\perp OA$ thì (O) và (T) tiếp xúc nhau tại E.

Khi MN không vuông góc OA. Gọi K là giao điểm của MN với tiếp tuyến của (O) tại E.

Ta có O, J, K thẳng hàng .

Trong tam giác $OEK: KJ.KO=KE^2$ (1) (Định lý hình chiếu) .

Trên đường tròn $(ABOC)$ ta có $KJ.KO=KN.KM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KE^2=KN.KM$ nên KE tiếp xúc (T)

c) Ta có $\widehat{OED}=\widehat{ODE}=\widehat{TIE}$

Nên $IT//OD$. Gọi $W=OA\cap IT$.

Vì I là trung điểm của AD nên W là trung điểm OA (đpcm)

Khi $MN\perp OA$ thì $W\in IT$.

Câu 20: **(1,5 điểm).**

Chứng minh rằng $(a+b+c)\left[\dfrac{3a-b}{a^2+ab}+\dfrac{3b-c}{b^2+bc}+\dfrac{3c-a}{c^2+ca}\right]\le 9$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử $a+b+c=t$ và đặt $a=tx; b=ty; c=tz \Rightarrow x+y+z=1$.

Ta chứng minh $t(x+y+z)\left[\dfrac{t(3x-y)}{t^2(x^2+xy)}+\dfrac{t(3y-z)}{t^2(y^2+yz)}+\dfrac{t(3z-x)}{t^2(z^2+zx)}\right]\le 9$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-y}{x^2+xy}+\frac{3y-z}{y^2+yz}+\frac{3z-x}{z^2+zx}\le 9.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-(x+y)}{x(x+y)}+\frac{4y-(y+z)}{y(y+z)}+\frac{4z-(z+x)}{z(z+x)}\le 9 \Leftrightarrow \frac{4}{1-z}-\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{1-y}-\frac{1}{z}\le 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 9$$

Vì a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên $a+b>c \Rightarrow x,y,z\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có:

$\frac{5x-1}{x-x^2}\le 18x-3 \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1)\le 0$ đúng $\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\frac{5y-1}{y-y^2}\le 18y-3 \Leftrightarrow (3y-1)^2(2y-1)\le 0$ đúng $\forall y\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\frac{5z-1}{z-z^2}\le 18z-3 \Leftrightarrow (3z-1)^2(2z-1)\le 0$ đúng $\forall z\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Suy ra : $\frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 18(x+y+z)-9 \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 9$

……………….HẾT…………….

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ YÊN
NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: Tính giá trị của $P=\dfrac{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}}+\dfrac{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}}$.

Câu 2: Giải phương trình $\dfrac{(2017-x)^2+(2017-x)(x-2018)+(x-2018)^2}{(2017-x)^2-(2017-x)(2018-x)+(x-2018)^2}=\dfrac{13}{37}$.

Câu 3: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{\dfrac{a}{a+2b}}>\dfrac{a}{a+b}$.

b) $\sqrt{\dfrac{a}{a+2b}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+2c}}+\sqrt{\dfrac{c}{c+2a}}>1$.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng hai tia Bx, Cy vuông góc với cạnh BC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD=BA$, trên tia Cy lấy điểm E sao cho $CE=CA$. Gọi G là giao điểm của BE và CD, K và L lần lượt là giao điểm của AD, AE với cạnh BC.

a) Chứng minh rằng $CA=CK; BA=BL$;

b) Đường thẳng qua G song song với BC cắt AD, AE theo thứ tự tại I, J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên BC. Chứng minh rằng tam giác IHJ vuông cân.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M chuyển động trên cạnh BC (M khác B,C). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB,AC. Vẽ các đường tròn $(H;HM)$ và $(K;KM)$.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (H) và (K) luôn cắt nhau;

b) Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (H) và (K). Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 6: Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p+1$ bằng lập phương của một số tự nhiên.

……………….HẾT…………….

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI 9 TỈNH PHÚ YÊN 2017-2018

Câu 1. Tính giá trị của $P=\dfrac{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}}+\dfrac{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}}$

Lời giải

$$P=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}+\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}=1.$$

Câu 2. Giải phương trình $\dfrac{\left(2017-x\right)^2+\left(2017-x\right)\left(x-2018\right)+\left(x-2018\right)^2}{\left(2017-x\right)^2-\left(2017-x\right)\left(2018-x\right)+\left(x-2018\right)^2}=\dfrac{13}{37}.$

Lời giải

Đặt $2017-x=a$ và $x-2018=b.$ Ta có phương trình $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{13}{37}$

$\Leftrightarrow 12a^2+25ab+12b^2=0\Leftrightarrow 12a^2+16ab+9ab+12b^2=0\Leftrightarrow\left(3a+4b\right).\left(4a+3b\right)=0$

Xét $3a+4b=0\Rightarrow 3\left(2017-x\right)+4\left(x-2018\right)=0\Leftrightarrow x=2021$

Xét $4a+3b=0\Rightarrow 4(2017+x)+3(x-2018)=0\Rightarrow x=2014$

Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2014;2021\right\}$.

Câu 3. Cho $a,b,c>0.$ Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{\dfrac{a}{a+2b}}>\dfrac{a}{a+b}$ b) $\sqrt{\dfrac{a}{a+2b}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+2c}}+\sqrt{\dfrac{c}{c+2a}}>1$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có : $\sqrt{\dfrac{a}{a+2b}}=\dfrac{a}{\sqrt{a.(a+2b)}}\geq\dfrac{a}{a+b}.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=a+2b\Rightarrow b=0$ vô lý. Vậy $\sqrt{\dfrac{a}{a+2b}}>\dfrac{a}{a+b}$

b) Tương tự câu a ta có :

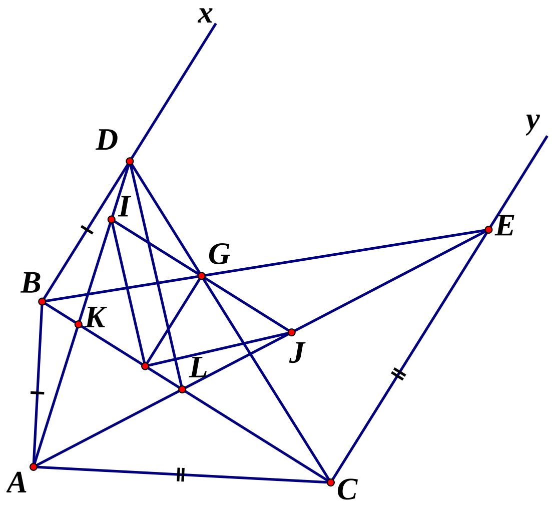
$$\sqrt{\frac{a}{a+2b}}+\sqrt{\frac{b}{b+2c}}+\sqrt{\frac{c}{c+2a}}>\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại $A.$ Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm $A,$ dựng hai tia $Bx,$ Cy vuông góc với cạnh $BC.$ Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD=BA,$ trên tia Cy lấy điểm E sao cho $CE=CA.$ Gọi G là giao điểm của BE và $CD,$ K và L lần lượt là giao điểm của $AD,$ AE với cạnh $BC.$

a) Chứng minh rằng $CA=CK;BA=BL;$

b) Đường thẳng qua G song song với BC cắt $AD,$ AE theo thứ tự tại $I,$ $J.$ Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên $BC.$ Chứng minh rằng tam giác IHJ vuông cân.

Lời giải



a) Ta có $BD = BA \Rightarrow \Delta ABD$ cân nên $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$

Mà $\widehat{BAD} + \widehat{KAC} = 90° = \widehat{BDA} + \widehat{BKD} = \widehat{BDA} + \widehat{AKC} \Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{AKC}$

$\Rightarrow \Delta ACK$ cân nên $CA = CL$

Tương tự ΔABL cân nên $BA = BL$

b) Áp dụng định lý Ta let và hệ quả của nó ta có:

$\frac{CH}{BH} = \frac{GE}{GB} = \frac{CE}{BD} = \frac{CA}{BA} = \frac{CK}{BL} = \frac{CK - CH}{BL - BH} = \frac{HK}{HL}$ (Giả sử $AB > AC$)

Suy ra $\frac{HK}{HL} = \frac{CE}{BD} = \frac{GC}{GD} = \frac{IK}{ID}$ hay $\frac{HK}{HL} = \frac{IK}{ID} \Rightarrow HI // DL$

Ta lại có $BD = BL$ nên tam giác BDL vuông cân

$\Rightarrow \widehat{BLD} = 45° \Rightarrow \widehat{JIH} = \widehat{BHI} = \widehat{BLD} = 45°$

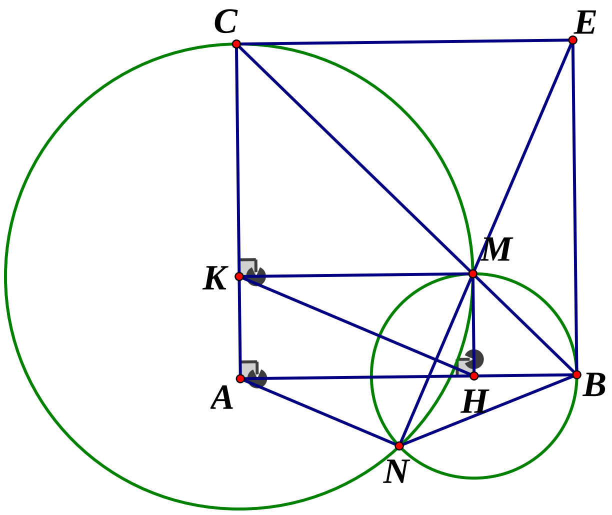
Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{IJH} = 45° \Rightarrow \Delta IHJ$ vuông cân tại H.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M chuyển động trên cạnh BC (M khác B, C). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC. Vẽ các đường tròn $(H; HM)$ và $(K; KM)$.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (H) và (K) luôn cắt nhau;

b) Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (H) và (K). Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Ta có $\left|HM-KM\right|<HK<HK+KM$ nên 2 đường tròn (H) và (K) luôn cắt nhau.

b) Ta có $\widehat{NHM}=\widehat{NCB}$; $\widehat{NMK}=\widehat{NBC}$

Do $AKMH$ là chữ nhật nên

$\widehat{NHM}+\widehat{NKM}=90°\Rightarrow\widehat{NCB}+\widehat{NBC}=90°\Rightarrow\widehat{BNC}=90°$

Vẽ hình vuông $ABEC$ ta có $A,\ N,\ B,\ E,\ C$ cùng thuộc đường tròn đường kính BC cố định.

Ta lại có $\widehat{NEB}=\widehat{NCB}$ mà $\widehat{NCB}=\widehat{NMH}$, $\widehat{NEB}=\widehat{NHM}$, do $MH//EB$ nên ba điểm N,M,E thẳng hàng. Vậy MN luôn đi qua điểm E cố định.

Câu 6. Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p+1$ bằng lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Xét $p=2\Rightarrow 7p+1=15$ (loại)

Xét $p>2$ thì p là số nguyên tố lẻ nên $7p+1$ là số tự nhiên chẵn.

Đặt $7p+1=(2k)^3$ với k nguyên dương .

Khi đó $7p=(2k)^3-1=(2k-1)(4k^2+2k+1)$

Vì p và 7 đều là số nguyên tố nên

TH1: $\begin{cases}2k-1=7\\4k^2+2k+1=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4\\p=73\end{cases}$ (thỏa mãn)

TH2: $\begin{cases}2k-1=1\\4k^2+2k+1=7p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\p=1\end{cases}$ (loại)

TH3: $\begin{cases}2k-1=p\\4k^2+2k+1=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k-1=p\\2k^2+k-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\p=1\end{cases}$ (loại)

Vậy $p=73$ thỏa mãn bài toán.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BÌNH THUẬN

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $Q=\sqrt{25x}:\left[\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1}\right]$ với $x\neq 1$ và $x>0$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho hệ phương trình ẩn x và y: $\begin{cases} ax-y=a^2-2 \\ (a+1)x+ay=2a-1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình trên với $a=1$.

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. (4,0 điểm)

Với k là số nguyên dương, ký hiệu $B_k=\left\{x\in N^*/\,x \text{ là bội số của k}\right\}$.

Cho m,n là các số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng B_{mn} là tập hợp con của $B_m\cap B_n$

b) Tìm điều kiện của m và n để $B_m\cap B_n$ là tập hợp con của B_{mn}.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là điểm thay đổi trên BC (E không trùng B và C) và F thay đổi trên CD sao cho $\widehat{EAF}=45^0$, BD cắt AE, AF lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh năm điểm E, M, N, F, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính tỷ số $\dfrac{MN}{FE}$.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi E,F thay đổi.

Câu 5. (2,0 điểm)

Trên mặt phẳng cho 4035 điểm phân biệt. Biết rằng trong ba điểm bất kỳ trong số đó luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn một. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng một chứa không ít hơn 2018 điểm đã cho.

------------------***Hết***-----------------

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH BÌNH THUẬN
NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $Q=\sqrt{25x}:\left[\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1}\right]$ với $x\neq 1$ và $x>0$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn. Với $x\neq 1$ và $x>0$, ta có:

$$Q=\sqrt{25x}:\left[\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{x}-1}\right]=5\sqrt{x}:\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(3\sqrt{x}+2\right)+3\left(\sqrt{x}+1\right)\right]$$

$$=5\sqrt{x}:\left(x+\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2+3\sqrt{x}+3\right)=5\sqrt{x}:\left(x+\sqrt{x}+1\right)=\frac{5\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Tìm x để biểu thức Q nhận giá trị nguyên.

Dễ thấy $Q>0$.

Phương trình sau có nghiệm $x>0,\ x\neq 1$.

$Q=\frac{5\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow Q.x+\left(Q-5\right).\sqrt{x}+Q=0$ có nghiệm $x>0,\ x>1$.

$\Leftrightarrow Q.y^2+\left(Q-5\right).y+Q=0$ có nghiệm $y>0,\ y\neq 1$.

$\Delta=\left(Q-5\right)^2-4Q^2=\left(3Q-5\right)\left(-Q-5\right)\geq 0\Leftrightarrow -5\leq Q\leq\frac{5}{3}$.

Mà $\begin{cases}Q\in Z\\ Q>0\end{cases}$ nên $\left[\begin{array}{l}Q=1\\ Q=2\end{array}\right.$.

Với $Q=1$ tìm được $x=7\pm 4\sqrt{3}$ (Thỏa mãn).

Với $Q=2$ phương trình vô nghiệm.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho hệ phương trình ẩn x và y: $\begin{cases}ax-y=a^2-2\\ (a+1)x+ay=2a-1\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình trên với $a=1$.

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)$ thỏa $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a) Nghiệm của HPT là: $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$

b) $\begin{cases} ax-y=a^2-2 \\ (a+1)x+ay=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x-ay=a^3-2a \\ (a+1)x+ay=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+a+1)x=a^3-1 \\ (a+1)x+ay=2a-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a-1 \\ y=-a+2 \end{cases}$ (với mọi a)

Nên $P=xy=(a-1)(-a+2)=\frac{1}{4}-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$.

P đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$ đạt được khi $a=\frac{3}{2}$

Câu 3. (4,0 điểm)

Với k là số nguyên dương, ký hiệu $B_k=\{x\in N^*/x$ là bội số của k$\}$.

Cho m,n là các số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng B_{mn} là tập hợp con của $B_m\cap B_n$

b) Tìm điều kiện của m và n để $B_m\cap B_n$ là tập hợp con của B_{mn}.

Lời giải:

a) Ta có: $B_{mn}=\{x\in N^*/x$ là bội của$(mn)\}=\{mn;\ 2mn;\ 3mn;...;\ kmn\}$

$B_m\cap B_n=\{x\in N^*/x$ *là* bội của m *và* $n\}$

$=\{BCNN(m,n);\ 2BCNN(m,n);\ ...;\ hBCNN(m,n)\}$

Vì $\begin{cases} mn\,\vdots\, m \\ mn\,\vdots\, n \end{cases} \Rightarrow mn\in BC(m,n)\Rightarrow kmn\in BC(m,n)$

Nên B_{mn} là tập hợp con của $B_m\cap B_n$

b) Để $B_m\cap B_n$ là tập hợp con của B_{mn} mà theo câu a thì B_{mn} là tập hợp con của $B_m\cap B_n$ Nên

$B_{mn}=B_m\cap B_n\Leftrightarrow BCNN(m,n)=mn\Leftrightarrow(m,n)=1$.

Hay m và n là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là điểm thay đổi trên BC (E không trùng B và C) và F thay đổi trên CD sao cho $\widehat{EAF}=45^0$, BD cắt AE, AF lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh năm điểm $E,\ M,\ N,\ F,\ C$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính tỷ số $\frac{MN}{FE}$.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi E,F thay đổi.

Lời giải:

a) Tứ giác $AMFD$ nội tiếp đường tròn (vì $\widehat{\text{MAF}} = \widehat{MDF} = 45^0$)

$\Rightarrow \widehat{\text{AFM}} = \widehat{ADM} = 45^0$ $\Rightarrow \Delta\text{AMF}$ vuông cân $\Rightarrow \text{FM} \perp \text{AE}$

Tương tự: $EN \perp \text{AF}$

$\Rightarrow M, N, C$ nhìn EF dưới một góc vuông $\Rightarrow M, N, F, C, E$ nằm trên đường tròn đường kính EF .

b) $\Delta ANE \backsim \Delta\text{AMF(g-g)} \Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta\text{AEF(c-g-c)} \Rightarrow \dfrac{MN}{FE} = \dfrac{AM}{FA} = \sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) Tính chất trực tâm tam giác $AEF \Rightarrow$ $FE \perp AH$

Dễ thấy : $\widehat{FAD} = \widehat{FMD} = \widehat{FEN} = \widehat{FAH}$ (Các tứ giác $ADFM; EFNM; ANHE$ nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta FAD = \Delta FAH\,(\text{ch}-\text{gn}) \Rightarrow AH = AD$ (Không đổi)

Mà $FE \perp AH$

$\Rightarrow EF$ tiếp xúc với đường tròn $(A; AD)$ cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

Trên mặt phẳng cho 4035 điểm phân biệt. Biết rằng trong ba điểm bất kỳ trong số đó luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn một. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng một chứa không ít hơn 2018 điểm đã cho.

Lời giải:

Dùng nguyên lý Dirichlet:

- Nếu khoảng cách hai điểm bất kỳ đều bé hơn 1 thì ta chỉ cần chọn 1 điểm A bất kỳ trong số 4035 điểm đã cho rồi vẽ đường tròn $(A;1)$ đường tròn này chứa tất cả 4034 điểm còn lại nên ta có điều phải chứng minh.

- Giả sử rằng có hai điểm A và B trong số 4035 điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 1, vẽ các đường tròn tâm A và B có cùng bán kính bằng 1, ta còn lại 4033 điểm. Mỗi điểm C bất kỳ trong số 4033 điểm ấy, theo giả thiết $AB; AC; BC$ phải có một đoạn thẳng có độ dài bé hơn 1 mà $AB > 1$, nên $AC < 1$ hoặc $BC < 1$. Do đó hoặc C nằm trong đường tròn $(A;1)$ hoặc $(B;1)$, do có 4033 điểm

C như vậy nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất $\left[\frac{4033}{2}\right]+1=2017$ điểm nằm trong cùng 1 đường tròn (Trong hai đường tròn đang xét) Giả sử đó là đường tròn $(A;1)$. Cùng với điểm A ta có 2018 điểm nằm trong cùng một đường tròn $(A;1)$ $\Rightarrow$ ***ĐPCM***.

-------------------*Hết*-----------------

ĐỀ THI HSG TỈNH QUẢNG NINH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1:

a) Rút gọn biểu thức $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$.

b) Cho hai số dương $x,\ y$ thỏa mãn $x^3+y-x\sqrt[3]{y}=\dfrac{-1}{27}$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{x}{y}$.

Câu 2:

a) Với mọi số nguyên $n,$ chứng minh rằng : $n(n+2)(73n^2-1)\vdots 24$.

b) Tìm số tự nhiên n để $2^4+2^7+2^n$ là số chính phương.

Câu 3:

a) Giải hệ phương trình : $\sqrt{2-3x}=-3x^2+7x-1$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}3x-y^2-2\sqrt{(x-2)(y+1)}=-5\\ -2x+y^2+y=6\end{cases}$.

Câu 4: Cho đoạn thẳng $AB,$ điểm C nằm giữa hai điểm A và $B.$ Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $AB,$ vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính $BC.$ Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC $(M\neq B; M\neq C)$. Kẻ MH vuông góc với BC $(H\in BC)$, đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại $K.$ Hai đường thẳng AK và CM giao nhau tại $E.$

a) Chứng minh rằng $\widehat{HKB}=\widehat{CEB}$ và $BE^2=BC.AB;$

b) Từ C kẻ $CN\perp AB$ (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), đường thẳng NK cắt CE tại $P.$ Chứng minh rằng $NP=PE;$

c) Chứng minh rằng khi NE là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính AB thì $NE=2NC.$

Câu 5: Cho $a,\ b$ là các số dương thỏa mãn $a+b+2ab=12.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{a^2+ab}{a+2b}+\dfrac{b^2+ab}{2a+b}$.

……………….HẾT…………….

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẢNG NINH 2017-2018

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$.

b) Cho hai số dương $x,\ y$ thỏa mãn $x^3+y-x\sqrt[3]{y}=\dfrac{-1}{27}$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{x}{y}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{4}+1\right)^3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}=1.$$

b) Ta có $x^3+y-x\sqrt[3]{y}=\dfrac{-1}{27}\Leftrightarrow 27x^3+27y+1-27x\sqrt[3]{y}=0$

$\Leftrightarrow (3x)^3+\left(3\sqrt[3]{y}\right)^3+1-3.3x.\sqrt[3]{y}=0$

$\Leftrightarrow \left(3x+\sqrt[3]{y}+1\right).\left[\left(3x-3\sqrt[3]{y}\right)^2+\left(3.\sqrt[3]{y}-1\right)^2+(1-3x)^2\right]=0$

Do $x,y>0$ nên suy ra $3x=3\sqrt[3]{y}=1\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{27}\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}=9.$

Vậy giá trị của biểu thức $\dfrac{x}{y}$ là 9.

Câu 2.

a) Với mọi số nguyên $n,$ chứng minh rằng : $n(n+2)(73n^2-1)\,\vdots\,24.$

b) Tìm số tự nhiên n để $2^4+2^7+2^n$ là số chính phương.

Lời giải

a) Ta có $n(n+2)(73n^2-1)=72n^2.n.(n+2)+(n-1)n(n+1)(n+2)\,\vdots\,24.$

b) Ta thử $n=1,2,3$ đều không thỏa mãn .

Với $n>4$ thì ta có

$2^4+2^7+2^n=k^2\Leftrightarrow 2^4(9+2^{n-4})=k^2\Rightarrow k\,\vdots\,4$. Đặt $k=4h$ với h là số tự nhiên. Ta có:

$$9+2^{n-4}=h^2\Rightarrow 2^{n-4}=h^2-9=(h-3)(h+3)\Rightarrow\begin{cases}h-3=2^x\\ h+3=2^y\\ x+y=n-4\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 6=2.3=2^y-2^x=2^x.\left(2^{y-x}-1\right)$

$\Rightarrow\begin{cases}2^x=2\\ 2^{y-x}-1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=8\\ h=5\Rightarrow k=20\end{cases}.$

Vậy $n=8$ là giá trị phù hợp.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình : $\sqrt{2-3x}=-3x^2+7x-1.$

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - y^2 - 2\sqrt{(x-2)(y+1)} = -5 \\ -2x + y^2 + y = 6 \end{cases}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \le \dfrac{2}{3}$

Phương trình

$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 + \sqrt{2-3x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-2) + \dfrac{1-3x}{\sqrt{2-3x}+1} = 0$

$\Leftrightarrow (1-3x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}+1} + 2 - x\right) = 0. Do\, x \le \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2 - x \ge \dfrac{4}{3} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}+1} + 2 - x > 0$

Suy ra $1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}(TMDK)$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{3}$

b) ĐKXĐ: $(x-2)(y+1) \ge 0$. Cộng theo hai vế phương trình của hệ ta được:

$x - 2 - 2\sqrt{(x-2)(y+1)} + y + 1 = 0\,(*)$

Xét $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge -1 \end{cases}$. phương trình $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{y+1}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = y + 3$

Thay vào $-2x + y^2 + y = 6$ được $y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+3) = 0 \Rightarrow y = 4$ (Vì $y \ge -1$)

Nên $x = 7$.

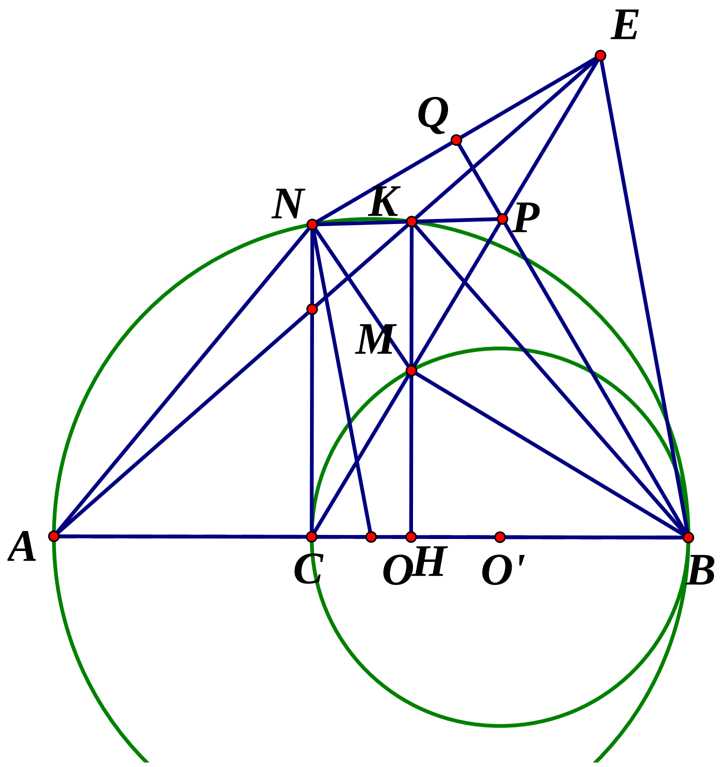
Xét $\begin{cases} x < 2 \\ y < -1 \end{cases}$ .Khi đó $x - 2 - 2\sqrt{(x-2).(y+1)} + y + 1 < 0$ phương trình vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (7;4)$.

Câu 4. Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa hai điểm A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC $(M \ne B; M \ne C)$. Kẻ MH vuông góc với BC $(H \in BC)$, đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K. Hai đường thẳng AK và CM giao nhau tại E.

d) Chứng minh rằng $\widehat{HKB} = \widehat{CEB}$ và $BE^2 = BC.AB$;
e) Từ C kẻ $CN \perp AB$ (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), đường thẳng NK cắt CE tại P. Chứng minh rằng $NP = PE$;
f) Chứng minh rằng khi NE là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính AB thì $NE = 2NC$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BME} = \widehat{BKE} = 90^0$ nên BMKE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HKB} = \widehat{CEB}$ mà $\widehat{HKB} = \widehat{BAE}$ (cùng phụ với $\widehat{HKA}$) nên $\widehat{CEB} = \widehat{BAE}$

Xét ΔBEC và ΔBAE có: $\widehat{CEB} = \widehat{BAE}$ và $\widehat{ABE}$ chung nên đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{BC}{BE} \Rightarrow BE^2 = BC.AB.$

b) Xét tam giác ABN vuông tại N có $NC \perp AB$

Suy ra $BN^2 = BC.AB \Rightarrow BN = BE$

Hay ΔBNE cân tại $B \Rightarrow \widehat{BNE} = \widehat{BEN}$ (1)

Theo câu a) thì $\widehat{CEB} = \widehat{BAE}$ mà $\widehat{BAE} = \widehat{BNP} \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{BNP}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{PNE} = \widehat{PEN} \Rightarrow \Delta PNE$ cân tại $P \Rightarrow NP = PE.$

c) Gọi Q là giao điểm của tia BP và NE

Vì $BP = BE$ và $PN = PE$ nên $BQ \perp NE$

NE là tiếp tuyến của (O) nên $ON \perp NE$. Do đó $ON // BQ \Rightarrow \widehat{BNO} = \widehat{QBN}$

Mà $\widehat{BNO} = \widehat{NBO} \Rightarrow \widehat{QBN} = \widehat{NBO}$ hay BN là tia phân giác của $\widehat{CBQ}$ mà $NQ \perp BQ$ và $NC \perp BC$ nên $NQ = NC$. Vì BQ là đường trung trực của NE nên $NE = 2.NQ$ suy ra $NE = 2NC.$

Câu 5. Cho $a,\ b$ là các số dương thỏa mãn $a + b + 2ab = 12.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{a^2 + ab}{a + 2b} + \dfrac{b^2 + ab}{2a + b}.$

Lời giải

Ta có $12 = a + b + 2ab \le \frac{(a+b)^2}{2} + (a+b) \Rightarrow a + b \ge 4.$ Khi đó

$$A = (a+b).\left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{2a+b}\right) = (a+b).\left(\frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{2ab+b^2}\right) \ge 4.\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+2ab}$$

$$\ge 4.\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + \frac{(a+b)^2}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MinA = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a = b = 2.$

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1:

1) Chứng minh $n^6-2n^4+n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

2) Cho ba số phân biệt a,b,c. Đặt:

$$x=(a+b+c)^2-9ab,\quad y=(a+b+c)^2-9bc,\quad z=(a+b+c)^2-9ac.$$

Chứng minh rằng trong ba số x,y,z có ít nhất một số dương.

Câu 2:

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13$.

2) Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+2018}=2018$.

Câu 3:

1) Cho ba số a,b,c không âm thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)$ và p,q,r là ba số thỏa mãn: $p+q+r=0$. Chứng minh rằng: $apq+bqr+crp\le 0$.

2) Cho các số dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}.$$

Câu 4:

1) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD,BE,CF và trực tâm là H.

a) Chứng minh rằng: $AC.BD.CE=BE.CD.BH$

b) Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn đường kính AH cắt đoạn thẳng IJ tại K. Tia AK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại M và cắt đoạn thẳng BC tại P. Tia MD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q. Chứng minh tứ giác $AQDP$ là tứ giác nội tiếp.

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D,E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB,AC sao cho $BD=AE$. Xác định vị trí của điểm D,E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất.

LỜI GIẢI ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1:

1) Chứng minh $n^6-2n^4+n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

2) Cho ba số phân biệt a,b,c. Đặt:

$$x=(a+b+c)^2-9ab,\quad y=(a+b+c)^2-9bc,\quad z=(a+b+c)^2-9ac.$$

Chứng minh rằng trong ba số x,y,z có ít nhất một số dương.

Lời giải

1) Ta có: $n^6-2n^4+n^2=n^6-n^4-n^4+n^2=n^4(n^2-1)-n^2(n^2-1)=[n(n-1)(n+1)]^2$

Đặt $A=n(n-1)(n+1)$, ta có $\begin{cases}A\vdots 2\\ A\vdots 3\end{cases}$ và $(2,3)=1$ $\Rightarrow A\vdots 6$ $\Rightarrow [n(n-1)(n+1)]^2\vdots 36$ (đpcm)

2) Ta có:

$x+y+z=(a+b+c)^2-9ab+(a+b+c)^2-9bc+(a+b+c)^2-9ac=3(a+b+c)^2-9(ab+bc+ca)$

$=3\left[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right]=\dfrac{3}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

Vì a,b,c là ba số phân biệt nên $\dfrac{3}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]>0\Rightarrow x+y+z>0$.

Do đó trong ba số x,y,z phải có ít nhất một số dương.

Câu 2:

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13$

2) Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+2018}=2018$

Lời giải

1) Ta có: $(x-y)(2x+y+1)+9(y-1)=13\Leftrightarrow 2x^2+xy+x-2xy-y^2-y+9y-9-13=0$

$(2x^2-2xy+6x)+(xy-y^2+3y)-(5x-5y+15)=7\Leftrightarrow 2x(x-y+3)+y(x-y+3)-5(x-y+3)=7$

$\Leftrightarrow (x-y+3)(2x+y-5)=7$

+ TH1: $\begin{cases}x-y+3=1\\2x+y-5=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-2\\2x+y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{10}{3}\\ y=\dfrac{16}{3}\end{cases}$ (loại)

+ TH2: $\begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{-2}{3} \end{cases}$ (loại)

+ TH3: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

+ TH4: $\begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-10 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy pt đã cho có nghiệm nguyên $(x;y)$ là: $(-2;2)$, $(-2;8)$.

2) ĐKXĐ: $x \ge -2018$, đặt $\sqrt{x+2018}=t$, $,t \ge 0 \Rightarrow t^2 - x = 2018$

Ta có $x^2+\sqrt{x+2018}=2018 \Leftrightarrow x^2+t=t^2-x \Leftrightarrow (x+t)(x-t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+t=0 \\ x+1=t \end{array}\right.$

+ TH1: $\begin{cases} x+t=0 \\ -2018 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2018=0 \\ -2018 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-3\sqrt{897}}{2}$

+ TH2: $\begin{cases} x+1=t \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2017=0 \\ x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{8069}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\dfrac{1-3\sqrt{897}}{2}$; $x=\dfrac{-1+\sqrt{8069}}{2}$.

Câu 3:

1) Cho ba số a,b,c không âm thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca)$ và p,q,r là ba số thỏa mãn: $p+q+r=0$. Chứng minh rằng: $apq+bqr+crp \le 0$.

2) Cho các số dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}.$$

Lời giải

1) Từ gt: $a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a-b-c)^2 \le 4bc \Leftrightarrow |a-b-c| \le 2\sqrt{bc}$

Lại có: $p+q+r=0 \Leftrightarrow r=-p-q$

$\Rightarrow apq+bqr+crp = apq+bq(-p-q)+cp(-p-q) = apq-bpq-bq^2-cpq-cp^2$

$= pq(a-b-c)-(bq^2+cp^2)$

Ta có: $bq^2+cp^2 \ge |pq|2\sqrt{bc} \ge |pq||a-b-c| \ge pq(a-b-c)$

$\Rightarrow pq\left(a-b-c\right)-\left(bq^2+cp^2\right)\le 0 \Rightarrow apq+bqr+crp\le 0$ (đpcm).

2) Sử dụng BĐT AM – GM, ta có: $a^2+b^2\ge 2ab=2$

$$\Rightarrow M=\left(a+b+1\right)\left(a^2+b^2\right)+\frac{4}{a+b}\ge\left(a+b+1\right).2+\frac{4}{a+b}=\left(a+b+\frac{4}{a+b}\right)+a+b+2$$

$\ge 2\sqrt{\left(a+b\right).\frac{4}{a+b}}+2\sqrt{ab}+2=2.2+2+2=8$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 8 khi $a=b=1$.

Câu 4:

1) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD,BE,CF và trực tâm là H.

a) Chứng minh rằng: $AC.BD.CE=BE.CD.BH$

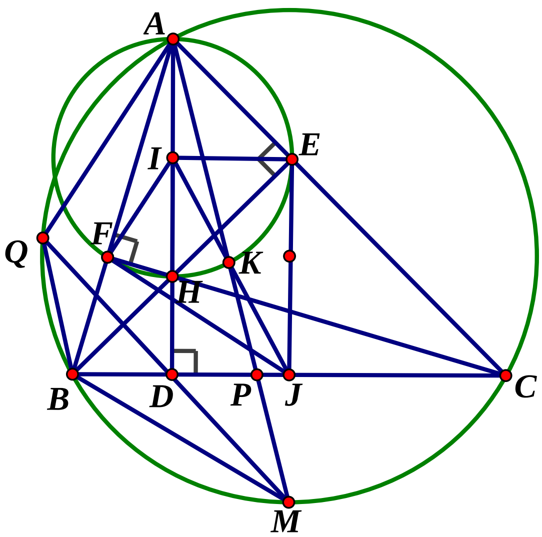
b) Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn đường kính AH cắt đoạn thẳng IJ tại K. Tia AK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại M và cắt đoạn thẳng BC tại P. Tia MD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q. Chứng minh tứ giác $AQDP$ là tứ giác nội tiếp.

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D,E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB,AC sao cho $BD=AE$. Xác định vị trí của điểm D,E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải



1. a) Ta có: $\Delta BDH \backsim \Delta BEC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{BD}{BE}=\frac{BH}{BC} \Rightarrow BH.BE=BC.BD$ (1)

$\Delta BEC \backsim \Delta ADC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CE}{CD} \Rightarrow \ BC.CD = CE.AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BH.BE.BC.CD = BC.BD.CE.AC$

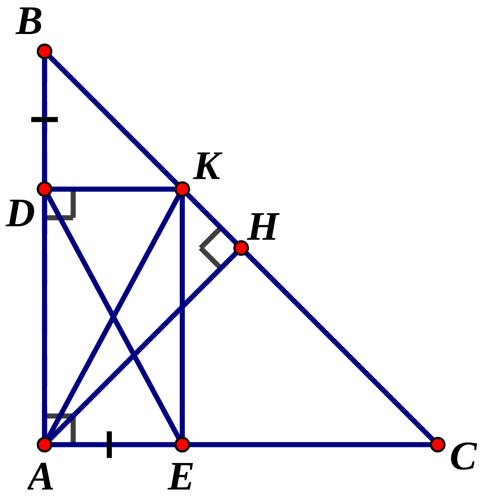
$\Rightarrow \ AC.BD.CE = BE.CD.BH$ (đpcm).

b) Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ nội tiếp

Ta có: $IE = IF = \dfrac{1}{2}AH$; $JE = JF = \dfrac{1}{2}BC \ \Rightarrow \Delta IEJ = \Delta IFJ$ (c-c-c)

$\Rightarrow \widehat{JIE} = \widehat{JIF} \Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KIF} \Rightarrow \dfrac{\widehat{KIE}}{2} = \dfrac{\widehat{KIF}}{2} \Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KAF} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{MC} = \widehat{MB}$

$\Rightarrow \widehat{BDQ} = \widehat{MBC} + \widehat{BMQ} = \widehat{MAB} + \widehat{BAQ} = \widehat{QAP} \ \Rightarrow$ Tứ giác $AQDP$ nội tiếp.



2. a) Kẻ $AH \perp BC\,(H \in BC)$, qua D kẻ $DK \perp AB\,(K \in BC)$

$\Rightarrow \widehat{DKB} = 90^0 - \widehat{ABC} = 45^0 \ \Rightarrow \ \Delta BDK$ vuông cân tại D.

$\Rightarrow BD = DK = AE \ \Rightarrow$ Tứ giác $ADKE$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow DE = AK$.

Ta có: $AK \ge AH \Rightarrow DE \ge AH$. Vậy DE nhỏ nhất khi $K \equiv H$ khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm AC.

b)

Đặt $AB = AC = a$, $(a > 0)$; $BD = AE = x \Rightarrow \ AD = a - x$

Ta chứng minh BĐT: Với mọi a,b ta luôn có: $(a + b)^2 \ge 4ab$ (*)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow (a - b)^2 \ge 0$ (BĐT luôn đúng).

Áp dụng (*) ta có: $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}AD.AE = \dfrac{1}{2}(a - x)x \le \dfrac{1}{8}\left[(a - x) + x\right]^2 = \dfrac{a^2}{8}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2}{2}$. Do đó: $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \ge \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{3a^2}{8}$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra khi $a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$. Vậy tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất là $\dfrac{3a^2}{8} = \dfrac{3AB^2}{8}$ khi D,E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH AN GIANG

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$ với

$x>0, x\neq 1, x\neq \dfrac{1}{4}$

Tính giá trị của P tại $x=\dfrac{4}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

b) *(2,0 điểm)* Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\le 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) *(3,0 điểm*) Giải phương trình : $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\left(x+\dfrac{x-4}{x-1}=5\right)$

b) *(2,0 điểm)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1\\ x^3+y^3=x+3y\end{cases}$

Câu 3: *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A. Vẽ đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) và (K)

a) *(3,0 điểm)* Chứng minh rằng ba điểm $B,\ N,\ C$ thẳng hàng

b) *(2,0 điểm)* Lấy D là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A và B) điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD=CE$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A

Câu 4: *(3,0 điểm)* Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là điểm nằm trên nửa đường tròn khác A và B. Xác định vị trí điểm M sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất

Câu 5: *(3,0 điểm)* Tìm tất cả các số nguyên x,y thỏa phương trình

$2x^2+y^2+xy=2(x+y)$

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH AN GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) (*2,0 điểm*) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$$ với

$x>0, x\neq 1, x\neq \frac{1}{4}$

Tính giá trị của P tại $x=\frac{4}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

b) (*2,0 điểm*) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$

Lời giải

a) Ta có $P=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right):\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right]:\left[\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right]:\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right]$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Lại có :

$$x=\frac{4}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{\left|\sqrt{5}+1\right|+\left|\sqrt{5}-1\right|}{\sqrt{2}}.\frac{4}{\sqrt{10}}=4$$

Vậy $P=\frac{4-\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$

b) Ta có

$$S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

$$=\left(4a^3-a^4\right)+\left(4b^3-b^4\right)+\left(4c^3-c^4\right)$$

Ta chứng minh : $\left(4a^3-a^4\right)\leq 4a^2$ thật vậy

$\left(4a^3-a^4\right)\le 4a^2$

$\Leftrightarrow a^4-4a^3+4a^2\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2\left(a-2\right)^2\ge 0$

Tương tự

$\left(4b^3-b^4\right)\le 4b^2$

$\left(4c^3-c^4\right)\le 4c^2$

Vậy ta có :

$S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$

$=\left(4a^3-a^4\right)+\left(4b^3-b^4\right)+\left(4c^3-c^4\right)$

$\le 4\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 48$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 48 xảy ra khi $\left(a,b,c\right)=\left(2,2,2\right)$

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) *(3,0 điểm)* Giải phương trình : $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\left(x+\dfrac{x-4}{x-1}=5\right)$

b) *(2,0 điểm)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2+y^2+xy=1\\x^3+y^3=x+3y\end{cases}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định $x\ne 1$

Đặt $y=\dfrac{x\left(x-4\right)}{x-1}$ suy ra $x+\dfrac{x-4}{x-1}=x-4+\dfrac{x-4}{x-1}+4=y+4$

Phương trình trở thành :

$y\left(y+4\right)=5$

$\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-5\end{array}\right.$

- Với $y=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\x_2=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$
- Với $y=-5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\\x_2=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$

b) Ta có

$x^3+y^3=(x+3y).1$

$\Leftrightarrow x^3+y^3=(x+3y)(x^2+y^2+xy)$

$\Leftrightarrow 2y^3+4xy^2+4x^2y=0$

$\Leftrightarrow 2y(y^2+2xy+2x^2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2y=0\\ y^2+2xy+x^2+x^2=0\end{array}\right.$

- Với $y=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ suy ra hệ có nghiệm $(\pm 1;0)$
- Với

$(x+y)^2+x^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ thay vào không thỏa phương trình (1)

Vậy hệ có hai nghiệm $(-1;0);(1;0)$

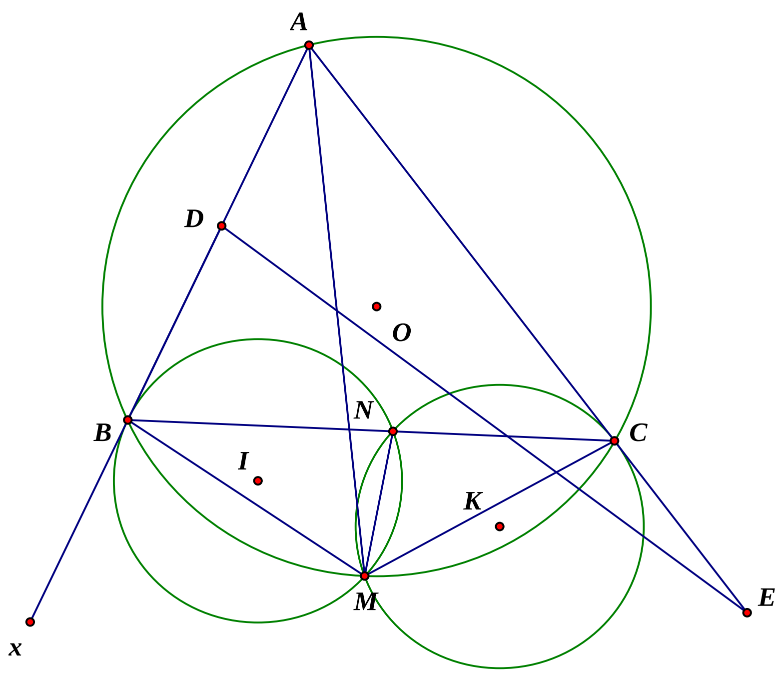
Câu 3: *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A. Vẽ đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) và (K)

a) *(3,0 điểm)* Chứng minh rằng ba điểm B, N, C thẳng hàng

b) *(2,0 điểm)* Lấy D là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A và B) điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD=CE$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A

Lời giải



-

a) Xét (I) : $\widehat{BNM}=\widehat{MBx}$ cùng chắn cung BM

Xét (K) : $\widehat{MNC}=\widehat{MCE}$ cùng chắn cung MC

Do tứ giác $ABMC$ nội tiếp (gt)

Suy ra: $\widehat{ABM}+\widehat{ACM}=180^0$

Mà : $\widehat{MBx}+\widehat{MCE}=180^0$

Nên : $\widehat{BNM}+\widehat{CNM}=180^0$ suy ra B,N ,C thẳng hàng

b) Xét ΔBDM và ΔCEM có

$$\begin{cases} BD=CE(gt) \\ \widehat{DBM}=\widehat{ECM}(ABMC \text{ nt}) \Rightarrow \Delta BDM=\Delta CEM\,(c.g.c) \\ BM=MC(gt) \end{cases}$$

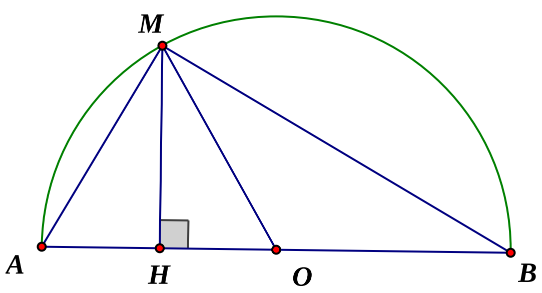
$\Rightarrow \widehat{BDM}=\widehat{CEM} \Rightarrow$ tứ giác $ADME$ nội tiếp

Do M cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua điểm cố định là M

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là điểm nằm trên nửa đường tròn khác A và B. Xác định vị trí điểm M sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất

Lời giải



Ta có : $\widehat{AMB}=90^0$ Suy ra tam giác AMB vuông tại M

$MA^2+MB^2=AB^2=4R^2$ (1)

Chu vi tam giác MAB : $MA+MB+AB=MA+MB+2R$

Chu vi lớn nhất khi : $MA+MB$ lớn nhất

Lại có

$(MA+MB)^2=MA^2+2MA.MB+MB^2$

$=4R^2+2.MA.MB$

$MA+MB$ lớn nhất $\Leftrightarrow (MA+MB)^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow MA.MB$ lớn nhất

Gọi H là chân đường cao hạ từ M đến AB khi đó

$MA.MB=MH.AB=MH.2R$ do đó $MA.MB$ lớn nhất khi MH lớn nhất

$MH=R \Leftrightarrow H\equiv O \Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung AB

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Tìm tất cả các số nguyên x,y thỏa phương trình $2x^2+y^2+xy=2(x+y)$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$2x^2+(y-2)x+y^2-2y=0$ (1)

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn x

$\Delta=(y-2)^2-8(y^2-2y)=-7y^2+12y+4=(y-2)(-7y-2)$

Để (1) có nghiệm thì $\Delta\ge 0\Leftrightarrow \frac{-2}{7}\le y\le 2$ do $y\in Z\Leftrightarrow y\in\{0,1,2\}$

- Với $y=0\Rightarrow 2x^2=2x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$
- Với $y=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{2}(loai)\\x=1\end{array}\right.$
- Với $y=2\Leftrightarrow 2x^2=0\Leftrightarrow x=0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(0;2);(1;1);(1;0);(0;0)$

ĐỀ THI CHỌN HSG TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=2018$ và $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2017}{2018}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x,y\right)$ thỏa mãn phương trình $\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}=\frac{7}{13}$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình : $6x^2+2x+1=3x\sqrt{6x+3}$

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+x+2=y^3-3y^2+4y \\ 2\sqrt{x+2}=y+2 \end{cases}$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m,n,p với p nguyên tố thỏa mãn

$$m^{2019}+n^{2019}=p^{2019}$$

b) Cho $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=3$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16}$$

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với $AB<AC<BC$,nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, M là trung điểm của AC và P là điểm thay đổi trên đoạn MH (P khác M và P khác H).

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAO}<\widehat{HAC}$

b) Khi $\widehat{APB}<90^\circ$, chứng minh ba điểm B,O,P thẳng hàng.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHP cắt nhau tại Q (Q khác P). Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Câu 5: *(1,0 điểm)* Cho đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Chia $2n$ đỉnh này thành n cặp điểm, mỗi cặp điểm này thành một đoạn thẳng (hai đoạn thẳng bất kì trong số n đoạn thẳng được tạo ra không có đầu mút chung).

a) Khi $n=4$, hãy chỉ ra một cách chia sao cho trong bốn đoạn thẳng được tạo ra không có hai đoạn nào có độ dài bằng nhau.

b) Khi $n=10$, chứng minh rằng trong mười đoạn thẳng được tạo ra luôn tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

………………HẾT……………

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Từ giả thiết, ta có

$$P=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3 = 2018.\frac{2017}{2018}-3=2014$$

b) Điều kiện: $x^2+xy+y^2\neq 0$. Từ phương trình suy ra $x-y\neq 0$. Bây giờ ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$13(x-y)=7(x^2+xy+y^2) \qquad (1)$$

Từ đây, ta có $13(x-y)$ chia hết cho 7. Mà $(14,7)=1$ nên $x-y$ chia hết cho 7. (2)

Mặt khác, ta lại có $x^2+xy+y^2 = \frac{1}{4}(x-y)^2+\frac{3}{4}(x+y)^2\geq\frac{1}{4}(x-y)^2$

Do đó, kết hợp với (1), ta suy ra $13(x-y)\geq\frac{7}{4}(x-y)^2$

Từ đó, với chú ý $x-y\neq 0$, ta có đánh giá $0<x-y<\frac{52}{7}$. Kết hợp với (2), ta được $x-y=7$ và $x^2+xy+y^2=13$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Điều kiện: $x\geq-\frac{1}{2}$. Do $6x^2+2x+1=5x^2+(x+1)^2>0$ nên từ phương trình ta suy ra $x>0$. Bây giờ, đặt $a=\sqrt{6x+3}$, ta có $6x^2+2x+1=6x^2+\frac{1}{3}a^2$ nên phương trình có thể được viết lại thành $6x^2+\frac{1}{3}a^2=3xa$, hay $(a-6x)(a-3x)=0$.

Từ đây, ta có $a=3x$ hoặc $a=6x$.

Với $a=3x$, ta có $9x^2=6x+3$. Từ đây, với chú ý $x>0$, ta giải được $x=0$.

Với $a=6x$, ta có $36x^2=6x+3$. Từ đây, với chú ý $x>0$, ta giải được $x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$.

b) Điều kiện: $x\geq-2$. Từ phương trình thứ hai, ta suy ra $y\geq-2$. Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $2\sqrt{y+1}=y+2$ hay $\left(\sqrt{y=1}-1\right)^2=0$.

Giải phương trình này, ta được $y=0$. Một cách tương ứng, ta có $x=-1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x,y) duy nhất là $(-1;0)$.

Câu 3: *(5,0 điểm)*

a) Giả sử tồn tại bộ số (m,n,p) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Dễ thấy $0<m,n<p$.
Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(m+n)A = p^{2018} \quad , \quad (1)$$

trong đó $A = m^{2018} - m^{2017}n + m^{2016}.n^2 - ... - mn^{2017} + n^{2018}$
Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có $A=1$ và

$$m+n = p^{2018} = m^{2019} + n^{2019}$$

Từ đó dễ thấy $m=n=1$ và $p^{2018}=2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p.
Do $m+n>1$ nên từ (1) suy ra $m+n$ chia hết cho p. Khi đó, ta có

$$A \equiv 2019m^{2018} \pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và $0<m<p$ nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p, hay $p=2019$. Từ đây, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay $m \neq n$.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng $\left(m^3\right)^{673} + \left(n^3\right)^{673} = 2019^{2018}$

hay $(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right) = 2019^{2018}$,

trong đó, $B = \left(m^3\right)^{672} - \left(m^3\right)^{671}\left(n^3\right) + ... - \left(m^3\right)\left(n^3\right)^{671} + \left(n^3\right)^{672}$.

Do $m \neq n$ nên $m^2-mn+n^2 = (m-n)^2 + mn > 1$, từ đó ta có m^2-mn+n^2 chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$m^2-mn+n^2 \equiv 3n^2 \pmod{2019}$$

$$m^2-mn+n^2 \not\equiv 0 \pmod{2019}$$

Vậy không tồn tại các số m,n,p thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b) Ta sẽ chứng minh $P \geq \frac{1}{6}$ với dấu bằng đạt được tại $(x,y,z)=(0,1,2)$ (và các hoán vị vòng quanh của bộ này). Bất đẳng thức $P \geq \frac{1}{6}$ tương đương với

$$\frac{16x}{y^3+16} + \frac{16y}{z^3+16} + \frac{16z}{x^3+16} \geq \frac{8}{3}$$

hay

$$\left(x - \frac{16x}{y^3+16}\right) + \left(y - \frac{16y}{z^3+16}\right) + \left(z - \frac{16z}{x^3+16}\right) \leq x+y+z-\frac{8}{3}.$$

Một cách tương đương, ta phải chứng minh

$$\frac{xy^3}{y^3+16} + \frac{yz^3}{z^3+16} + \frac{zx^3}{x^3+16} \leq \frac{1}{3} \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử y nằm giữa x và z. Ta có:

$$y^3+16 = (y+4)(y-2)^2 + 12y \geq 12y$$

nên $\frac{xy^3}{y^3+16} \leq \frac{xy^2}{12}$.

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{yz^3}{z^3+16}\le\frac{yz^2}{12}\ ;\ \frac{zx^3}{x^3+16}\le\frac{zx^2}{12}$$

Suy ra

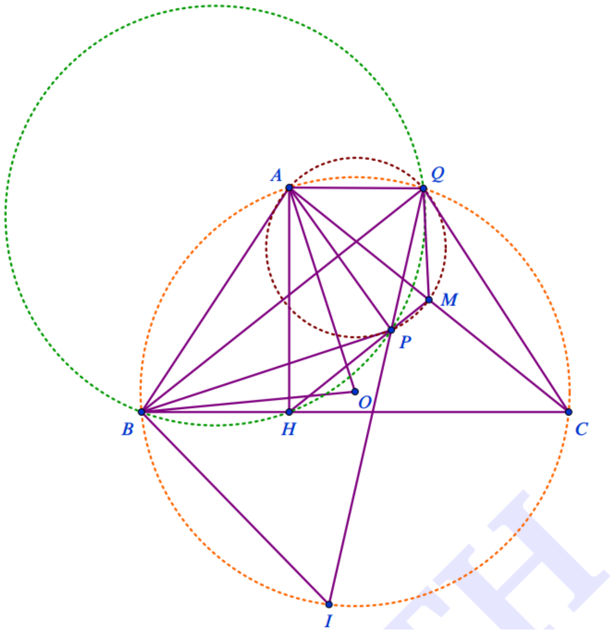
$$\frac{xy^3}{y^3+16}+\frac{yz^3}{z^3+16}+\frac{zx^3}{x^3+16}\le\frac{xy^2+yz^2+zx^2}{12}\qquad(2)$$

Do y nằm giữa x và z nên ta có $(y-z)(y-z)\le 0$ suy ra $y^2+zx\le xy+yz$ và $xy^2+zx^2\le xy^2+xyz$. Từ đó, ta có đánh giá

$xy^2+yz^2+zx^2\le y\left(x^2+xz+z^2\right)\le y(x+z)^2 = y(3-y)^2=4-(4-y)(y-1)^2\le 4$ (3)

Từ (2) và (3), ta thu được (1). Vậy $\min P=\frac{1}{6}$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*



Ta có $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ = $\widehat{AOB}$ (tính chất góc nội tiếp chắn cung). Mà $OA=OB$ nên $\widehat{BAO}=\widehat{ABO}$, suy ra $\widehat{AOB}+2\widehat{BAO}=90^\circ$.

Từ đây, ta có $2\widehat{ACB}+2\widehat{BAO}=90^\circ$, hay $\widehat{BA0}=90^\circ-\widehat{ACB}=\widehat{HAC}$ (vì $\widehat{AHC}=90^\circ$).

Vậy $\widehat{BAO}=\widehat{CAH}$.

Xét tứ giác $APHB$, ta có $\widehat{APB}=\widehat{AHB}=90^\circ$ (gt). Mà hai góc này cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $APHB$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ABP}=\widehat{AHP}$ (cùng chắn cung AP) (1)

Xét tam giác AHC vuông tại H có M là trung điểm của AC nên $MH=MC=MA$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền).

Từ đó suy ra $\widehat{AHP}=\widehat{AHM}=\widehat{MAH}=\widehat{CAH}=\widehat{BAO}=\widehat{ABO}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\widehat{ABP}=\widehat{ABO}$ nên các tia BO và BP trùng nhau. Từ đó suy ra ba điểm B, O, P thẳng hàng.

Ta có tứ giác $BQPH$ nội tiếp và hai góc BQP, BHP ở vị trí đối nhau nên

$$\widehat{BQP}=180^\circ-\widehat{BHP}=\widehat{PHC}=\widehat{MHC}\ .$$

Mặt khác, ta lại có $MH=MC$ (chứng minh trên) nên $\widehat{MHC}=\widehat{MCH}=\widehat{ACB}$.

Từ đây, ta suy ra $\widehat{BQP} = \widehat{ACB}$

Lại có tứ giác $AQMP$ nội tiếp nên $\widehat{AQP} = \widehat{AMP} = \widehat{AMH}$ (cùng chắn cung AP).

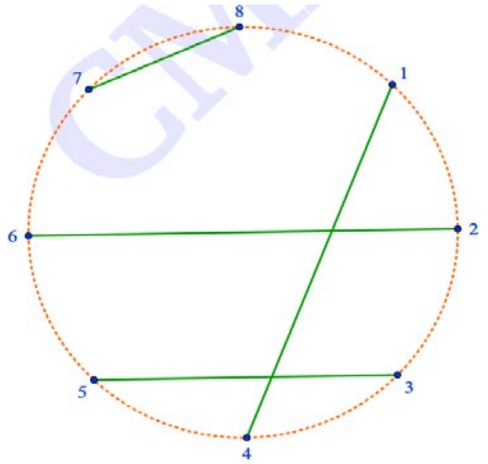
Mà $\widehat{AMH} = \widehat{MHC} + \widehat{MCH} = 2\widehat{MCH} = 2\widehat{ACB}$ (tính chất góc ngoài) nên $\widehat{AQP} = 2\widehat{ACB}$

Từ đó $\widehat{AQB} = \widehat{AQP} - \widehat{BQP} = \widehat{ACB}$.

Hai góc $\widehat{AQB}$ và $\widehat{ACB}$ cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $ACQB$ nội tiếp. Bây giờ, gọi I là giao điểm khác P của PQ và (O). Ta có $\widehat{BQI} = \widehat{BQP} = \widehat{ACB} = \widehat{AQB}$ nên sđ $\overset{\frown}{BA}$ = sđ $\overset{\frown}{BI}$, hay $BA = BI$. Suy ra I là giao điểm khác A của các đường tròn (B, BA) và (O), tức I cố định. Vậy đường thẳng PQ luôn đi qua điểm I cố định.

Câu 5: *(3,0 điểm)* Ta đánh số $2n$ đỉnh của đa giác từ 1 đến $2n$. Khi đó, độ dài của đoạn thẳng nối hai đỉnh có thể coi tương ứng với số lượng cung nhỏ nằm giữa hai đỉnh đó, cũng chính là chênh lệch giữa hai số thứ tự theo mod n rồi cộng thêm 1. Sự tồn tại hai cặp đoạn thẳng có độ dài bằng nhau trong đề bài tương ứng với việc tồn tại hai cặp đỉnh có sự chênh lệch giữa các số thứ tự bằng nhau theo mod n.

a) Ta cần chỉ ra cách chia cặp 8 số từ 1 đến 8 sao cho không có hai cặp nào có chênh lệch giống nhau theo mod 4. Cụ thể là, $(1,4),(2,6),(3,5)$ và $(7,8)$ và với các chênh lệch là $3, 4, 2, 1$ thỏa mãn đề bài.



b) Giả sử tồn tại cách ghép cặp (a_1, b_1) ,(a_2, b_2) ,…,(a_{10}, b_{10}) cho các số từ 1 đến 20 sao cho không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 10. Suy ra

$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{10} - b_{10}| \equiv 0 + 1 + ... + 9 \pmod{10}$

$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{10} - b_{10}| \equiv 5 \pmod{10}$

Do đó tổng $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{10} - b_{10}|$ là số lẻ. Chú ý rằng với mọi x, y nguyên thì $|x - y|$ có cùng tính chẵn lẻ với $x + y$. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tổng $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + ... + (a_{10}, b_{10})$, cũng lẻ. Mặt khác, ta lại có

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + ... + (a_{10}, b_{10}) = 1 + 2 + ... + 20 = 210$ là số chẵn. Mâu thuẫn nhận được cho ta kết quả cần chứng minh.

ĐỀ THI CHỌN HSG TP HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(3,0 điểm)*

Cho hai số a,b thỏa điều kiện: $a^2+b^2=1$, $a^4+b^4=\frac{1}{2}$.

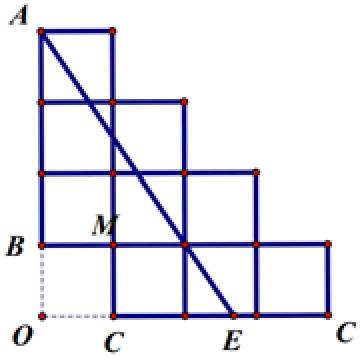
Tính giá trị của biểu thức $P=a^{2018}+b^{2018}$.

Câu 2: *(3,0 điểm)*

Giải phương trình: $\sqrt{5-x}+2\sqrt{3+x}=6$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2. Các điểm A,B,C,D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE .



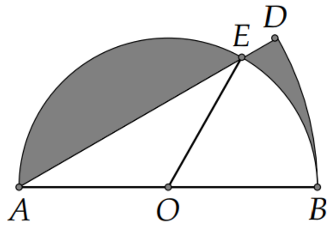
Câu 4: *(4,0 điểm)*

1) Cho hai số thực x,y. Chứng minh rằng $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\geq 2x\left(1-y^2\right)$.

2) Các số $A;B;C;D;A+C;B+C;A+D;B+D$ là tám số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 8. Biết A là số lớn nhất trong các số A,B,C,D. Tìm A .

Câu 5: *(5,0 điểm)*

1) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=4cm$. Góc $\widehat{DAB}=30^0$ và cung $\overset{\frown}{DB}$ là một phần của đường tròn tâm A. Tính diện tích phần tô đậm.



2) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Đường thẳng qua I vuông góc AD cắt cạnh BC tại N. Đường thẳng qua I vuông góc BC cắt cạnh AD tại M. Chứng minh rằng nếu $AB+CD=2MN$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 6: *(3,0 điểm)*

Một ô tô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là $v\ km/h$. nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên sau khi đi được 120 km với vận tốc v , ô tô tăng thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TP HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: *(3,0 điểm)*

Cho hai số a,b thỏa điều kiện: $a^2+b^2=1$, $a^4+b^4=\frac{1}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a^{2018}+b^{2018}$.

Lời giải

Ta có $a^4+b^4=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2b^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a^2\left(1-a^2\right)=\frac{1}{4}$

$4a^4-4a^2+1=0 \Leftrightarrow \left(2a^2-1\right)^2=0 \Rightarrow a^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b^2=\frac{1}{2}$.

Do đó $P=\left(a^2\right)^{1009}+\left(b^2\right)^{1009}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1009}+\left(\frac{1}{2}\right)^{1009}=\frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 2: *(3,0 điểm)*

Giải phương trình: $\sqrt{5-x}+2\sqrt{3+x}=6$.

Lời giải

ĐKXĐ: $-3\le x\le 5$ .Bình phương 2 vế của phương trình ta được:

$5-x+4\sqrt{(5-x)(x+3)}+4(3+x)=36 \Leftrightarrow 4\sqrt{(5-x)(x+3)}=19-3x$

Với ĐK: $-3\le x\le \frac{19}{3}$ .Ta có phương trình

$16(5-x)(x+3)=(19-3x)^2$

$\Leftrightarrow 25x^2-146x+121=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(25x-121)=0$

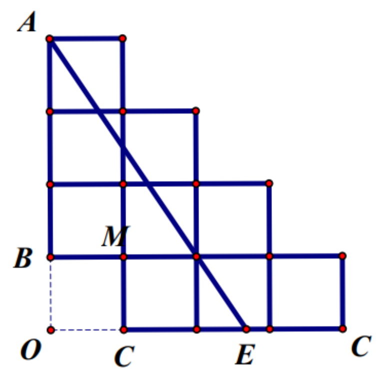
$\Leftrightarrow x=1$ hay $x=\frac{121}{25}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{121}{25}\right\}$.

.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích $4\,cm^2$. Các điểm A,B,C,D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE.



Lời giải

Mỗi hình vuông có diện tích $4\,cm^2$ nên mỗi hình vuông nhỏ có cạnh là $2\,cm$.

$S_{AOE}=S_{OBMC}+\frac{1}{2}S_{9\,hinh\,vuong}=4+\frac{1}{2}.9.4=22cm^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}OA.OE=22 \Rightarrow OE=\frac{22.2}{4}=\frac{11}{2}(cm)$ (vì $OA=4.2=8cm$).

Vậy $CE=OE-OC=\frac{11}{2}-2=\frac{7}{2}(cm)$.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

1) Cho hai số thực x, y. Chứng minh rằng $(1+x^2)(1+y^2) \geq 2x(1-y^2)$.

Lời giải

Ta có $(1+x^2)(1+y^2) \geq 2x(1-y^2)$

$\Leftrightarrow\ x^2y^2+x^2+y^2+1 \geq 2x-2xy^2$

$\Leftrightarrow\ (x^2-2x+1)+(x^2y^2+2xy^2+y^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(xy+y)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng).

Vậy $(1+x^2)(1+y^2) \geq 2x(1-y^2)$.

2) Các số $A; B; C; D; A+C; B+C; A+D; B+D$ là tám số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 8. Biết A là số lớn nhất trong các số A, B, C, D . Tìm A.

Lời giải

Ta có tổng của 8 số: $3(A+B+C+D)=36 \Leftrightarrow A+B+C+D=12 \quad (1)$.

Mà $B+C+D \geq 1+2+3=6 \Rightarrow A \leq 6$.

Hơn nữa $4A > A+B+C+D=12 \Leftrightarrow A>3$.

Nếu $A=4 \Rightarrow B,C,D \in \{1;2;3\} \Rightarrow B+C+D=6$. Điều này mâu thuẫn (1).

Nếu $A=5 \Rightarrow B,C,D \in \{1;2;3;4\}$. (1) $\Rightarrow B+C+D=7$. Do đó $B,C,D \in \{1;2;4\}$.

Do $A+D$ và $A+C$ bé hơn bằng 8 nên $C,D \neq 4 \Rightarrow B=4$. Nếu $C=1, D=2$ thì $A+C=B+D=6$ là vô lý. Nếu $C=2, D=1$ thì $A+D=B+C=6$ là vô lý.

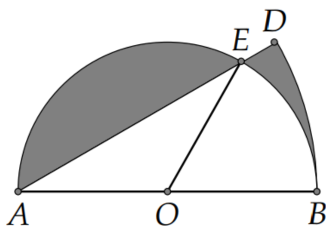
Do đó A chỉ có thể là 6, suy ra $B,C,D \in \{1;2;3;4;5\}$. Từ (1) ta có $B+C+D=6$. Do đó $B,C,D \in \{1;2;3\}$. Hơn nữa $A+D, A+C \leq 8$ nên $C,D \neq 3$, suy ra $B=3$. Với $C=1, D=2$ hay hay $C=2, D=1$ đều thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy $A=6$.

Câu 5: *(5,0 điểm)*

1) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=4cm$. Góc $\widehat{DAB}=30°$ và cung $\overset{\frown}{DB}$ là một phần của đường tròn tâm A . Tính diện tích phần tô đậm.

Lời giải

$$S_{phần\ trắng}=S_{\Delta OAE}+S_{quạt\ OBE}=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$$



$$S_{phần\ trắng}=S_{\Delta OAE}+S_{quạt\ OBE}=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$$

$$S_{phần\ tô\ đậm}=S_{nửa\ hình\ tròn}+S_{quạt\ ABD}-2S_{phần\ trắng}$$

$$=2\pi+\frac{4\pi}{3}-2\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\pi-2\sqrt{3}$$

Câu 6: *(3,0 điểm)*

Một ô tô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là $v\ km/h$. Nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên sau khi đi được 120 km với vận tốc v, ô tô tăng thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

Lời giải

Đổi đơn vị : 48 phút $=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$ (giờ).

Gọi $s\ (km)$ là quãng đường giữa hai thành phố A và B $(s>0)$ .Nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{s}{v}-\frac{s}{v+20\%}=1 \Leftrightarrow v=\frac{s}{6}\ (1).$$

Sau khi đi được 120 km với vận tốc v, ô tô tăng thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút nên ta có phương trình: $\frac{120}{s}-\frac{s-120}{v+25\%v}=\frac{s}{v}-\frac{4}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} v=\frac{s}{6} \\ \frac{120}{2}-\frac{s-120}{v+25\%v}=\frac{s}{v}-\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=60 \\ s=360 \end{cases}$

Vậy quãng đường giữa hai thành phố A và B là $360\,km$.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2017 - 2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x>0, x\neq 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{4(x+1)x^{2018}-2x^{2017}+2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Biết phương trình $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$ có hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Tìm m để độ dài đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó bằng $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

b) Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x,y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x,y chia hết cho p.

Câu 4: *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O,I,I_a. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC, P là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của (O), PI_a cắt (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC, N là điểm đối xứng với P qua O.

a) Chứng minh IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

Câu 5: *(2,0 điểm)* Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x\geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}\geq\frac{5}{2}.$$

------------- **HẾT** --------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………….… Số báo danh:……………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THANH HÓA 2017 - 2018

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x>0, x\neq 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{4(x+1)x^{2018}-2x^{2017}+2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Lời giải

a) Với điều kiện $x>0, x\neq 1$, ta có :

$$P=\frac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Ta có với điều kiện $x>0, x\neq 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1>\sqrt{x}+1>1$

$$\Rightarrow 0<P=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}<\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}<2$$

Do P nguyên nên suy ra $P=1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x=1$ (loại).

Vậy không có giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

<u>Chú ý 1</u>: *Có thể làm theo cách sau*

$P=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Px+\left(P-1\right)\sqrt{x}+P-2=0$, coi đây là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$.

Nếu $P=0 \Rightarrow -\sqrt{x}-2=0$ vô lí, suy ra $P\neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có

$$\Delta=(P-1)^2-4P(P-2)\ge 0\Leftrightarrow -3P^2+6P+1\ge 0\Leftrightarrow P^2-2P+1\le\frac{4}{3}\Leftrightarrow(P-1)^2\le\frac{4}{3}$$

Do P nguyên nên $(P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $(P-1)^2=0\Leftrightarrow P=1\Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $(P-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P=2\\P=0\end{array}\right.\Rightarrow P=2\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ không thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

b) Vì $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

nên $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2+2x-1$.

Do đó $P=\dfrac{2x^{2017}\left(2x^2+2x-1\right)+2x+1}{\left(2x^2+2x-1\right)+x+1}=\dfrac{2x+1}{x+1}=3-\sqrt{3}.$

<u>Chú ý 2:</u> Nếu học sinh không thực hiện biến đổi mà dùng máy tính cầm tay để thay số và tìm được kết quả đúng thì <u>chỉ cho 0,5 đ.</u>

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Biết phương trình $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$ có hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Tìm m để độ dài đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó bằng $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0\\2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

Lời giải

a) Phương trình $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)\left((m-2)x-m\right)=0$ có hai nghiệm khi và chỉ khi $m\ne 2.$ Khi đó 2 nghiệm của phương trình là $a=1$và $b=\dfrac{m}{m-2}$.

Hai nghiệm đó là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông suy ra

$\dfrac{m}{m-2}>0\Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>2$.

Từ hệ thức $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$ trong tam giác vuông ta có $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{(m-2)^2}{m^2}=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow\dfrac{m-2}{m}=\pm\dfrac{1}{2}$

Với $\dfrac{m-2}{m}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2m-4=m\Rightarrow m=4$ (thỏa mãn)

Với $\dfrac{m-2}{m}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2m-4=-m\Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$ (loại)

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

b) $\begin{cases}(x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0 & (1)\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 & (2)\end{cases}$

ĐKXĐ: $x+y\neq 0$

Chia phương trình (1) cho $(x+y)^2$ ta được hệ $\begin{cases}8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13\\ \left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)^2+3(x-y)^2=23\\ \left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1\end{cases}$

Đặt $u=x+y+\dfrac{1}{x+y}, v=x-y$ (ĐK: $|u|\geq 2$), ta có hệ $\begin{cases}5u^2+3v^2=23 & (3)\\ u+v=1 & (4)\end{cases}$

Từ (4) rút $u=1-v$, thế vào (3) ta được

$5u^2+3(1-u)^2=23\Leftrightarrow 4u^2-3u-10=0\Leftrightarrow u=2$ hoặc $u=-\dfrac{5}{4}$.

Trường hợp $u=-\dfrac{5}{4}$ loại vì $|u|<2$.

Với $u=2\Rightarrow v=-1$ (thỏa mãn). Khi đó ta có hệ $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x+y}=2\\ x-y=-1\end{cases}$

Giải hệ trên bằng cách thế $x=-1+y$ vào phương trình đầu ta được

$2y-1+\dfrac{1}{2y-1}=2\Leftrightarrow y=1$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0;1)$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Lời giải

a) $y^2-5y+62=(y-2)x^2+\left(y^2-6y+8\right)x$ (1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow(y-2)(y-3)+56=(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$

$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$

Nhận thấy $(y-2)+(x-1)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy ta có

+) $56=1.7.8 \Rightarrow (x;y)=(2;9).$

+) $56=7.1.8 \Rightarrow (x;y)=(8;3).$

+) $56=(-8).1.(-7) \Rightarrow (x;y)=(-7;3).$

+) $56=1.(-8).(-7) \Rightarrow (x;y)=(2;-6).$

+) $56=(-8).7.(-1) \Rightarrow (x;y)=(-7;9).$

+) $56=7.(-8).(-1) \Rightarrow (x;y)=(8;-6).$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.

Chú ý 3: ***Học sinh có thể biến đổi phương trình đến dạng***

$(y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$ (***được 0,5đ***), sau đó xét các trường hợp xảy ra. ***Khi đó với mỗi nghiệm đúng tìm được thì cho 0,25 đ*** *(tối đa 6 nghiệm = 1,5 đ)*

b) Do $p-5 \vdots 8$ nên $p=8k+5$ $(k \in \mathbb{N})$

Vì $\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2} \vdots \left(ax^2-by^2\right) \vdots p$ nên $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4} \vdots p$

Nhận thấy $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1} \vdots \left(a^2+b^2\right)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4} \vdots p$ (*)

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có :

$x^{8k+4}=x^{p-1}\equiv 1(\bmod p),\ \ y^{8k+4}=y^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$

$\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2(\bmod p)$. Mâu thuẫn với (*).Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

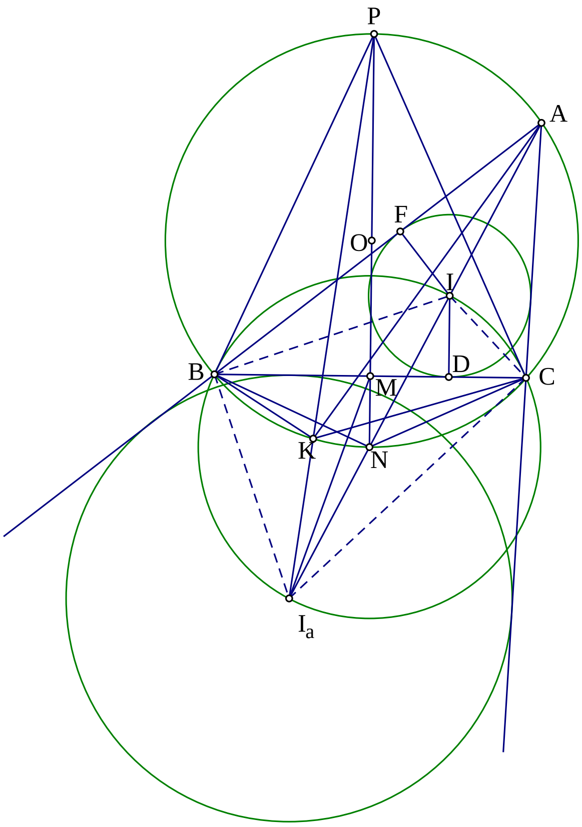
Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC, P là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của (O), PI_a cắt (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC, N là điểm đối xứng với P qua O.

a) Chứng minh IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

c) Chứng minh $\widehat{DAI}=\widehat{KAI_a}$.

Lời giải



a) I_a là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, từ đó suy ra $BI_a \perp BI, CI_a \perp CI$

(Phân giác trong và phân giác ngoài cùng một góc thì vuông góc với nhau).

Xét tứ giác IBI_aC có $\widehat{IBI_a} + \widehat{ICI_a} = 180^0$

Từ đó suy ra tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính II_a .

b) Nhận thấy bốn điểm A, I, N, I_a thẳng hàng (vì cùng thuộc tia phân giác của $\widehat{BAC}$).

Do NP là đường kính của (O) nên $\widehat{NBP} = 90^0$, M là trung điểm của BC nên $PN \perp BC$ tại M

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PBN ta có $NB^2 = NM.NP$

Vì $\widehat{BIN}$ là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác ABI nên $\widehat{BIN} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC + BAC}\right)$ (1)

Xét (O): $\widehat{NBC} = \widehat{NAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (cùng chắn cung NC)

$\Rightarrow \widehat{NBI} = \widehat{NBC} + \widehat{CBI} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BIN} = \widehat{NBI}$ nên tam giác NIB cân tại N

Chứng minh tương tự tam giác NIC cân tại N

Từ đó suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC, cũng chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBI_aC \Rightarrow NI_a^2 = NB^2 = NM.NP$

Vậy NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z} \geq \frac{5}{2}.$$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{xz}{y^2+yz}+\dfrac{y^2}{xz+yz}+\dfrac{x+2z}{x+z}=\dfrac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1}+\dfrac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1}+\dfrac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$

$$=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1}+\frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1}+\frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}=\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1}+\frac{1+2c^2}{1+c^2}$$

trong đó $a^2=\dfrac{x}{y},\ b^2=\dfrac{y}{z},\ c^2=\dfrac{z}{x}\ \ (a,b,c>0)$

Nhận xét rằng $a^2.\,b^2=\dfrac{x}{z}=\dfrac{1}{c^2}\geq 1\ \ (do\ x\geq z)$.

Xét

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1}-\frac{2ab}{ab+1}=\frac{a^2\left(a^2+1\right)(ab+1)+b^2\left(b^2+1\right)(ab+1)-2aba^2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)(ab+1)}$$

$$=\frac{ab\left(a^2-b^2\right)^2+(a-b)\left(a^3-b^3\right)+(a-b)^2}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)(ab+1)}\geq 0$$

Do đó $\dfrac{a^2}{b^2+1}+\dfrac{b^2}{a^2+1}\geq\dfrac{2ab}{ab+1}=\dfrac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1}=\dfrac{2}{1+c}\ \ (1)$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Khi đó $\dfrac{2}{1+c}+\dfrac{1+2c^2}{c^2+1}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{2\left(2\left(1+c^2\right)+(1+c)\left(1+2c^2\right)\right)-5(1+c)\left(1+c^2\right)}{2(1+c)\left(1+c^2\right)}$

$$=\frac{1-3c+3c^2-c^3}{2(1+c)\left(1+c^2\right)}=\frac{(1-c)^3}{2(1+c)\left(1+c^2\right)}\geq 0\ \ (do\ c\leq 1)\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi

$a=b,\ c=1 \Leftrightarrow x=y=z.$

ĐỀ KHẢO SÁT LẦN I TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY NĂM HỌC 2017 - 2018

Câu 1: ***(2,0 điểm)***

Cho hai biểu thức: $A = \dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{2x+\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2}$ với $0 \le x \ne 1$.

a) Tính giá trị của A với $x = 6+2\sqrt{5}$;

b) Rút gọn B;

c) Đặt $P = B : A$.Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2: ***(2,0 điểm)*** *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một người đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định trước. Nếu người đó đi nhanh hơn mỗi giờ 10 km thì tới B sớm hơn dự định 36 phút; nếu người đó đi chậm hơn mỗi giờ 10 km thì tới B muộn hơn dự định 54 phút. Hỏi quãng đường AB dài bao nhiêu km?

Câu 3: **(2,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1-x-y}{x+y} = \dfrac{22}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{5+x+y}{x+y} = 3. \end{cases}$

2. Cho parabal $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = 2(m-2)x - 4m + 13$.

a) Với $m = 4$, trên cùng một hệ tọa độ Oxy, vẽ (P) và (d). Xác định tọa độ giao điểm A, B.

b)Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1.x_2 + 2018$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: **(3,5 điểm)**

Cho đường tròn tâm (O) và dây BC khác đường kính. Lấy A thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ lớn sao cho $AB > AC$ (A khác C). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh EB là phân giác góc $\widehat{DEF}$

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh IE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔMED.

d) Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt ở P và N.

Chứng minh rằng khi A di động trên cung $\overset{\frown}{BC}$ lớn (nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết ban đầu) thì đường tròn ngoại tiếp ΔMNP luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: ***(0,5 điểm)*** Cho $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} + \frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} + \frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4}$$

LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1: ***(2,0 điểm)***

Cho hai biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2}$ với $0 \le x \ne 1$.

a) Tính giá trị của A với $x = 6+2\sqrt{5}$;

b) Rút gọn B;

c) Đặt $P = B : A$.Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Tính giá trị của A với $x = 6+2\sqrt{5}$

$$x = 6+2\sqrt{5} = 5+2\sqrt{5}+1 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2.\sqrt{5}.1 + 1^2 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} = \left|\sqrt{5}+1\right| = \sqrt{5}+1$$

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{5}+1$ vào $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$

$$A = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)+3}{2\left(\sqrt{5}+1\right)-2} = \frac{2\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}} = \frac{\left(2\sqrt{5}+5\right).\sqrt{5}}{2\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{2.5+5.\sqrt{5}}{2.5} = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy $x = 6+2\sqrt{5}$ thì $A = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

b) Rút gọn B

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2} \quad \left(0 \le x \ne 1\right)$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$B = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right).\left(\sqrt{x}-1\right) - \left(\sqrt{x}-2\right).\left(\sqrt{x}+2\right) + 2x+\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$B = \frac{x-1-x+4+2x+\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$B=\frac{2x+\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$B=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}.$$

c) Đặt $P = B:A$. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

$$P=B:A=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}:\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}.\frac{2\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}=\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=2+\frac{-6}{\sqrt{x}+2}$$

P nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{-6}{\sqrt{x}+2}$ nguyên $\Leftrightarrow -6\,\vdots\left(\sqrt{x}+2\right)\Leftrightarrow \sqrt{x}+2\in Ư\left(6\right)$

Mà Ư(-6)=$\left\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\right\}$

Mặt khác: $\sqrt{x}+2>0$

$\Rightarrow \sqrt{x}+2\in\left\{2;3;6\right\}\Rightarrow\sqrt{x}\in\left\{0;1;4\right\}\Rightarrow x\in\left\{0;16\right\}\ \left(\text{tm}\right).$

Kết luận: Vậy $x=\left\{0;16\right\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: ***(2,0 điểm)*** *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một người đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định trước. Nếu người đó đi nhanh hơn mỗi giờ 10 km thì tới B sớm hơn dự định 36 phút; nếu người đó đi chậm hơn mỗi giờ 10 km thì tới B muộn hơn dự định 54 phút. Hỏi quãng đường AB dài bao nhiêu km?

Lời giải

Đổi 36 phút$=0,6h$; 54 phút$=0,9h$

Gọi vận tốc dự định là: $v(km/h)(\text{v}>0)$

Gọi thời gian dự định là: $t(h)(\text{t}>0)$

Nếu người đó đi thêm được 10 km mỗi giờ thì vận tốc là: $(v+10)(km/h)$

Khi đó người đó đến B sớm hơn dự định 36 phút nên thời gian người đó đi là: $(t-0,6)(\text{h})$

Vì quãng đường AB không đổi nên ta có phương trình là: $(v+10)(t-0,6)=v.t\ \ (1)$

Nếu người đó đi chậm hơn 10 km mỗi giờ thì vận tốc là: $(v-10)(km/h)$

Khi đó người đó đến B muộn hơn dự định 54 phút nên thời gian người đó đi là: $(t+0,9)(h)$

Vì quãng đường AB không đổi nên ta có phương trình là: $(v-10)(t+0,9)=v.t\ \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(v+10)(t-0,6)=v.t\\(v-10)(t+0,9)=v.t\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} vt+10t-0,6v-6=v.t \\ vt-10t+0,9v-9=v.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t-0,6v=6 \\ -10t+0,9v=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3,6 \\ v=50 \end{cases}$$

Vậy quãng đường AB là: $50.3,6=180\ (\text{km})$.

Câu 3: **(2,0 điểm)**

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1-x-y}{x+y}=\dfrac{22}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5+x+y}{x+y}=3 \end{cases}$

2) Cho parabal $(P): y=x^2$ và đường thẳng (d) $y=2(m-2)x-4m+13$.

a) Với $m=4$, trên cùng một hệ tọa độ $\mathrm{Ox}y$, vẽ (P) và (d). Xác định tọa độ giao điểm A, B.

b)Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $S=x_1^2+x_2^2+4x_1.x_2+2018$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

1) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne -y$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1-x-y}{x+y}=\dfrac{22}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5+x+y}{x+y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{x+y}+1=\dfrac{22}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5}{x+y}+1=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{7}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5}{x+y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{5}{x+y}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5}{x+y}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{13}{3} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5}{x+y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=3 \\ \dfrac{5}{x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}\ (\text{tm})$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(4;1)$.

2)

a) Với $m=4$ phương trình đường thẳng (d) là: $y=4x-3$.

*Vẽ đồ thị:

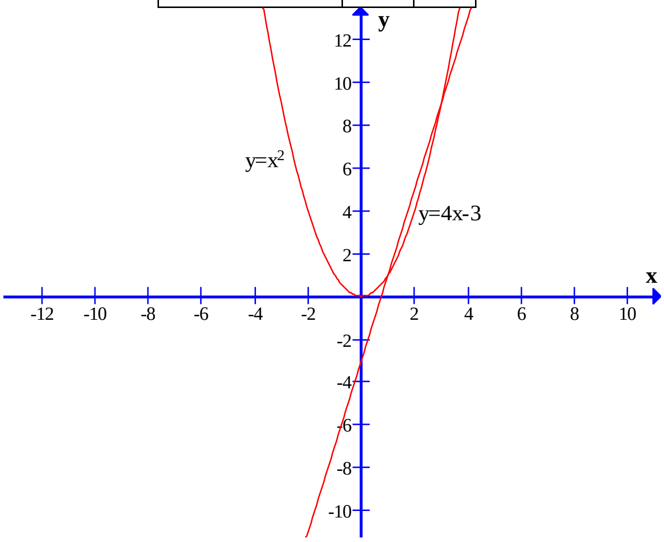
- Vẽ (P): $y=x^2$. Ta có bảng giá trị

Parabol (P) đi qua hai điểm $(0;-3)$ và $(1;1)$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- Vẽ (d): $(d): y = 4x - 3$. Ta có bảng giá trị

x	0	$\frac{3}{4}$
$y = 4x - 3$	-3	0



* Tìm giao điểm của hai đồ thị:

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \ (1).$$

Vì $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.

- Nếu $x = 1 \Rightarrow y = 1$.
- Nếu $x = 3 \Rightarrow y = 9$.

Vậy (P) giao (d) tại $A(1;1)$ và $B(3;9)$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = 2(m-2)x - 4m + 13$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m-2)x + 4m - 13 = 0$$

$$\Delta' = (m-2)^2 - (4m - 13) = m^2 - 4m + 4 - 4m + 13$$
$$\Delta' = m^2 - 8m + 17 = (m-4)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B

Áp dụng hệ thức viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 x_2 = 4m - 13 \end{cases}$

$$S = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1.x_2 + 2018 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 + 2018$$

$$S = \left(2m - 4\right)^2 + 2\left(4m - 13\right) + 2018$$

$$S = 4m^2 - 16m + 16 + 8m - 26 + 2018$$

$$S = 4m^2 - 8m + 2008$$

$$S = (2m - 2)^2 + 2004 \geq 2004$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 2004 khi $m = 1$.

Câu 4: **(3,5 điểm)**

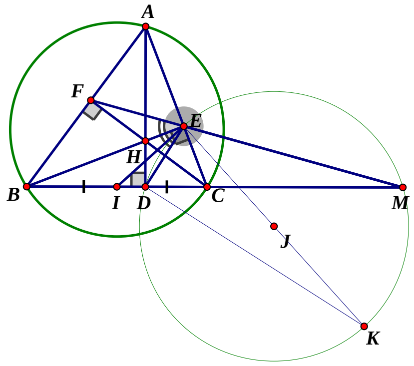
Cho đường tròn tâm (O) và dây BC khác đường kính. Lấy A thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ lớn sao cho $AB > AC$ (A khác C). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh EB là phân giác góc $\widehat{\text{DEF}}$

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh IE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔMED.

d) Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt ở P và N. Chứng minh rằng khi A di động trên cung $\overset{\frown}{BC}$ lớn (nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết ban đầu) thì đường tròn ngoại tiếp ΔMNP luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải

a) Ta có: AD, BF, CF là các đường cao của ΔABC

$$\Rightarrow \widehat{BFD} = 90^o; \widehat{CEB} = 90^o$$

Xét tứ giác $BFEC$ có:

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^o$

Mà 2 góc này cùng nhìn BC

tứ giác $BFEC$ nội tiếp (dhnb)

b) Ta có: Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCB} \text{ (t/c) } (1)$$

Xét tứ giác $CEHD$ có $\widehat{HEC} = 90^o; \widehat{HDC} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $CEHD$ nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow \widehat{DCH} = \widehat{DEH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DEH} = \widehat{FEB}$

$\Rightarrow EB$ là phân giác của $\widehat{\text{DEF}}$

c) Ta có: I là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow IB = IC = IE$

$\Rightarrow \Delta IEC$ cân $\Rightarrow \widehat{IEC} = \widehat{ICE}$ (t/c)

Lại có: $\widehat{ICE}$ là góc ngoài của ΔEMC $\Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{MEC} + \widehat{CME}$

$\Rightarrow \widehat{IEC} = \widehat{CEM} + \widehat{CME}$

Lại có: $\widehat{CEM} = \widehat{FEA}$(đối đỉnh)

Dễ dàng chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AHF}$

$\Rightarrow \widehat{IEC} = \widehat{AHF} + \widehat{CME} = \widehat{DHC} + \widehat{CME} = \widehat{DEC} + \widehat{CME}$

$\Leftrightarrow \widehat{IED} + \widehat{DEC} = \widehat{DEC} + \widehat{CME} \Rightarrow \widehat{IED} = \widehat{CME}$

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEM . Kẻ đường kính EK

$\Rightarrow$ tứ giác $KDEM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{EKD}$ (t/c)

Mà $\widehat{EMD} = \widehat{IED}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{EKD} = \widehat{IED}$

Lại có: ΔDEK vuông tại D

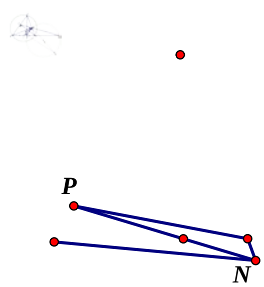
$\Rightarrow \widehat{EKD} + \widehat{KED} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IED} + \widehat{KED} = 90^\circ$

$\Rightarrow IE \perp JE$

$\Rightarrow IE$ là tiếp tuyến của (J)

d)



+) Ta có: $FE//PN \Rightarrow \widehat{CPE} = \widehat{FEA}$ (2 góc đồng vị)

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{FEA}$ (vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{CPF} = \widehat{CBN}$

+) C/m : Tứ giác $CPBN$ nội tiếp

+) C/m : $DP.DN = DB.DC$

+) Ta Có : IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMED (cmt)

$\Rightarrow$ C/m : $IE^2 = IM.ID$

Mà $IE = IB$

$\Rightarrow IB^2 = IM.ID$

$\Rightarrow IB^2 - ID^2 = IM.ID - ID^2$

$\Rightarrow (IB - ID)(IB + ID) = ID(IM - ID)$

$\Rightarrow BD.DC = ID.DM$

+) C/m : $DP.DN = ID.DM$

+) C/m : Tứ giác $MNIP$ nội tiếp

$\Rightarrow$ Khi A di động trên cung $\overset{\frown}{BC}$ lớn (nhưng vẫn thảo mãn giả thiết ban đầu) thì đường tròn ngoại tiếp ΔMNP luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: ***(0,5 điểm)*** Cho $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{x}{3\sqrt{x + 2y - 1} - 4} + \frac{y}{3\sqrt{y + 2z - 1} - 4} + \frac{z}{3\sqrt{z + 2x - 1} - 4}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} (*)$ với $x, y, z > 0$, a, b, c bất kì.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$,

Thật vậy quy đồng hai vế lên ta được bất đẳng thức tương đương $(ay - bx)^2 \geq 0$, luôn đúng. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng ta được $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{a+b}{x+y} = \frac{c}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ (đpcm).

Bất đẳng thức thức (*) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm 3 và $\sqrt{x+2y-1}$ ta có:

$$3\sqrt{x+2y-1} \le \frac{9+x+2y-1}{2} = \frac{x}{2}+y+4 \Rightarrow 3\sqrt{x+2y-1}-4 \le \frac{x}{2}+y$$

Suy ra $\dfrac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} \ge \dfrac{x}{\dfrac{x}{2}+y} = \dfrac{2x}{x+2y} = \dfrac{2x^2}{x^2+2xy}$.

Tương tự $\dfrac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} \ge \dfrac{2y^2}{y^2+2yz}; \dfrac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4} \ge \dfrac{2z^2}{z^2+2zx}$

Cộng vế với vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được

$$T \ge \frac{2x^2}{x^2+2xy}+\frac{2y^2}{y^2+2yz}+\frac{2z^2}{z^2+2zx}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$\frac{2x^2}{x^2+2xy}+\frac{2y^2}{y^2+2yz}+\frac{2z^2}{z^2+2zx} \ge 2\left(\frac{(x+y+z)^2}{x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2zx}\right) = 2.$$

Do đó $T \ge 2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1=9 \\ y+2z-1=9 \\ z+2x-1=9 \\ \dfrac{x}{x^2+2xy}=\dfrac{y}{y^2+2yz}=\dfrac{z}{z^2+2zx} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{10}{3}$ (tmđk).

Vậy Min $T=2$ khi $x=y=z=\dfrac{10}{3}$.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2018}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

Câu 2: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{z}$ và $y\neq z$. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Câu 3: Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$.

Câu 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ x+2y=2\end{cases}$ (m là tham số và x,y là ẩn số).

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm (x,y) trong đó x,y là các số nguyên.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$.

Câu 6: Cho tam giác ABC vuông tại A. $AB=12cm$, $AC=16cm$. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng BI vuông góc với đường thẳng MI.

Câu 7: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}=50^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN.

a) Chứng minh rằng $MB.DN=BH.AD$.

b) Tính số đo góc $\widehat{MON}$.

Câu 8: Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O). Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) (điểm A không trùng với điểm B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB, đường thẳng (d) cắt đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Câu 9: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\leq\frac{2}{3}.$$

Câu 10: Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1: Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2018}{a-1}\right)\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1\end{cases}$. Khi đó:

$$P=\left[\frac{\sqrt{a}+2018}{(\sqrt{a}+1)^2}-\frac{\sqrt{a}-2018}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right]\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+2018)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}-2018)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}.\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$$

$$=\frac{2.2017\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}.\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}=\frac{2017}{a-1}.$$

Câu 2: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{z}$ và $y\neq z$.

Chứng minh đẳng thức $\frac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-y+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-x+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$$

.

Câu 3: Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321 \Leftrightarrow 1111a+111b+11c+d=4321$ (1)

Vì $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{N}$ và $1\le a\le 9$, $0\le b,\ c,\ d\le 9$ nên $3214\le 1111a\le 4321$ $\Rightarrow a=3$.

Thay vào (1) ta được $111b+11c+d=988$ (2). Lập luận tương tự ta có:

$880 \le 111b \le 988 \Rightarrow b = 8$. Thay vào (2) ta được $11c + d = 100$. Mà $91 \le 11c \le 100 \Rightarrow c = 9$ và $d = 1$.

Câu 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x + y = 2\\ x + 2y = 2\end{cases}$ (m là tham số và x, y là ẩn số).

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) trong đó x, y là các số nguyên.

Lời giải

Từ phương trình $x + 2y = 2 \Rightarrow x = 2 - 2y$ thế vào phương trình thứ nhất ta được $(m-1)(2-2y) + y = 2 \Leftrightarrow (2m-3)y = 2m-4$ (3).

Hệ có nghiệm (x, y) trong đó x, y là các số nguyên $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm y là số nguyên.

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m - 3 \ne 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm $y = \dfrac{2m-4}{2m-3} = 1 - \dfrac{1}{2m-3}$.

$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-3=1\\ 2m-3=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=1\end{array}\right.$. Vậy có hai giá trị m thỏa mãn là $1;\ 2$.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}1 - x \ge 0\\ 4 + x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le 1$ (*).

Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với $5 + 2\sqrt{1-x}.\sqrt{4+x} = 9$

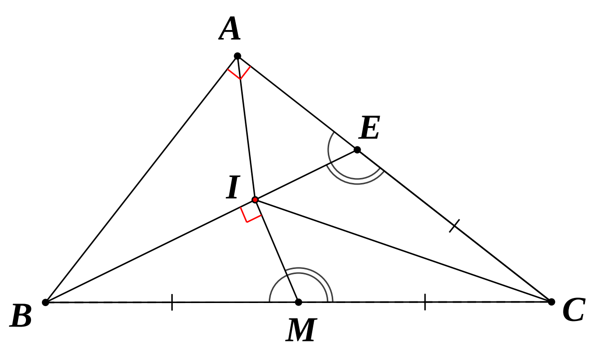
$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4+x)} = 2 \Leftrightarrow (1-x)(4+x) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-3\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $x = 0;\ x = -3$.

Câu 6: Cho tam giác ABC vuông tại A. $AB = 12cm$, $AC = 16cm$. Gọi I là giao điểm các đường

phân giác trong của tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng BI vuông góc với đường thẳng MI.

Lời giải



Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20cm$. Gọi E là giao điểm của BI với AC.

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EC}{BC}=\dfrac{AE+EC}{AB+BC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow EC=\dfrac{BC}{2}=10cm$.

Ta có $\Delta ICE=\Delta ICM$ $(c-g-c)$ do $EC=MC=10$; $\widehat{ICE}=\widehat{ICM}$; IC chung

$\Rightarrow \widehat{IEC}=\widehat{IMC}\Rightarrow \widehat{IEA}=\widehat{IMB}$. Mặt khác $\widehat{IBM}=\widehat{IBA}\Rightarrow \Delta IBM\backsim\Delta ABE$.

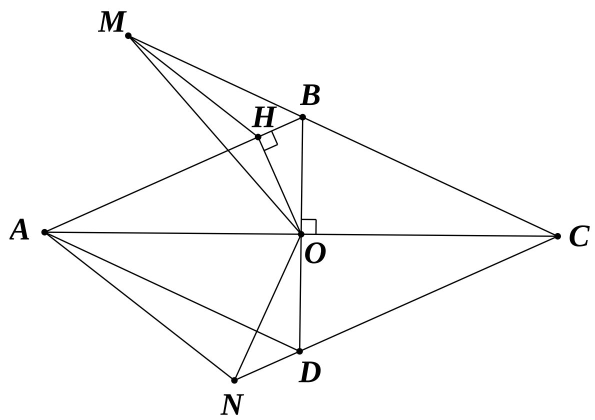
$\Rightarrow \widehat{BIM}=\widehat{BAE}=90°\Rightarrow BI\perp MI$.

Câu 7: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}=50°$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN.

a) Chứng minh rằng $MB.DN=BH.AD$.

b) Tính số đo góc $\widehat{MON}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{MBH}=\widehat{ADN}$, $\widehat{MHB}=\widehat{AND}$ $\Rightarrow \Delta MBH\backsim\Delta ADN$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{AD}=\dfrac{BH}{DN}\Rightarrow MB.DN=BH.AD$ (1).

Ta có $\Delta OHB\backsim\Delta AOD\Rightarrow \dfrac{BH}{DO}=\dfrac{OB}{AD}\Rightarrow DO.OB=BH.AD$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $MB.DN=DO.OB\Rightarrow \dfrac{MB}{DO}=\dfrac{OB}{DN}$.

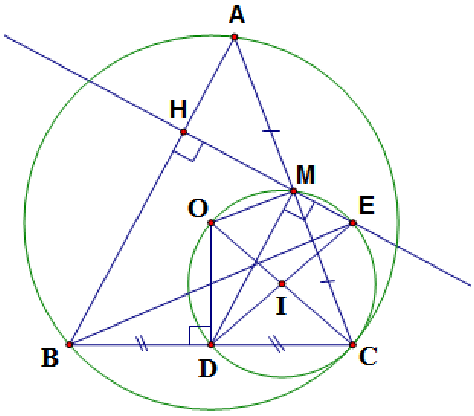
Ta lại có $\widehat{MBO}=180°-\widehat{CBD}=180°-\widehat{CDB}=\widehat{ODN}$

$\Rightarrow \Delta MBO\backsim\Delta ODN\Rightarrow \widehat{OMB}=\widehat{NOD}$.

$\Rightarrow \widehat{MON}=180°-\left(\widehat{MOB}+\widehat{NOD}\right)=180°-\left(\widehat{MOB}+\widehat{OMB}\right)=180°-\widehat{OBC}=115°$.

Câu 8: Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O). Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) (điểm A không trùng với điểm B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB, đường thẳng (d) cắt đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải



Gọi D là trung điểm của đoạn BC, vì tam giác BOC, AOC là các tam giác cân tại O nên $OD \perp BC,\ OM \perp AC$.

Ta có: $\widehat{ODC} = \widehat{OMC} = 90° \Rightarrow$ Bốn điểm O, D, C, M cùng nằm trên đường tròn (I) có tâm I cố định, đường kính OC cố định.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua tâm I, khi đó E cố định và DE là đường kính của đường tròn (I).

Nếu $H \neq E, H \neq B$:

- Với $M \equiv E \Rightarrow \widehat{BHE} = 90°$

- Với $M \neq E$, do $DM \,//\, BH \Rightarrow \widehat{DMH} = 90°$. Khi đó $\widehat{DME} = \widehat{DMH} = 90° \Rightarrow H, M, E$ thẳng hàng. Suy ra $\widehat{BHE} = 90°$.

Vậy ta luôn có: $\widehat{BHE} = 90°$ hoặc $H \equiv E$ hoặc $H \equiv B$, do đó H thuộc đường tròn đường kính BE cố định.

Câu 9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{2}{3}.$$

Lời giải

Với $\forall x, y, z > 0$ ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$\Rightarrow (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Ta có $5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (2a + b)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a + b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Tương tự $\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} \le \dfrac{1}{2b+c} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$. Đẳng thức xảy ra khi $b=c$.

$\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \le \dfrac{1}{2c+a} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$. Đẳng thức xảy ra khi $c=a$.

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$

$\le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{3}{c}\right) \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \le \dfrac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{3}{2}$.

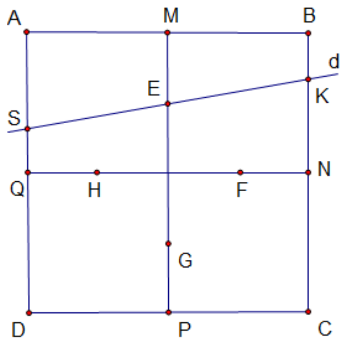
Câu 10: Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\dfrac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Lời giải



Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh là a $(a>0)$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trong *2018* đường thẳng đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát, giả sử d cắt các đoạn thẳng AD, MP, BC lần lượt tại S, E, K sao cho $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$.

Từ $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$ ta suy ra được: $DS+CK=3(AS+BK)$

$\Leftrightarrow a-AS+a-BK=3(AS+BK) \Leftrightarrow AS+BK=\dfrac{1}{2}a$

$\Leftrightarrow EM=\dfrac{1}{4}a$, suy ra E cố định và d đi qua E.

Lấy F, H trên đoạn NQ và G trên đoạn MP sao cho $FN=GP=HQ=\dfrac{a}{4}$.

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định E, F, G, H.

Theo nguyên lý Dirichlet từ 2018 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left[\dfrac{2018}{4}\right]+1=505$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm E, F, G, H cố định, nghĩa là 505 đường thẳng đó đồng quy.

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP THÀNH PHỐ BẮC GIANG NĂM HỌC 2016 – 2017

Bài 1: *(5,0 điểm)*

a. Cho biểu thức $M=\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với $a,b>0$ và $a\neq b$

Rút gọn M và tính giá trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1$.

b. Tìm các số nguyên a,b thoả mãn $\dfrac{5}{a+b\sqrt{2}}-\dfrac{4}{a-b\sqrt{2}}+18\sqrt{2}=3$.

c. Cho a,b,c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$; $\sqrt{abc}=3$.

Tính giá trị biểu thức $H=\dfrac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$.

Bài 2: *(4,5 điểm)*

a. Tính giá trị của biểu thức $N=\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

b. Cho a,b là số hữu tỉ thỏa mãn $\left(a^2+b^2-2\right)(a+b)^2+(1-ab)^2=-4ab$.

Chứng minh $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ.

c. Giải phương trình $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)$.

Bài 3: *(3,5 điểm)*

a. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $x^5+y^2=xy^2+1$.

b. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh . $\dfrac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\le\dfrac{3}{2}$.

Bài 4: *(6,0 điểm)*

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao $AM<R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, từ C vẽ CH vuông góc với AB, CE vuông góc với AM. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N. Đường thẳng MO cắt CE, CA, CH lần lượt tại Q,K,P.

a)Chứng minh $MNCO$ là hình thang cân.

b) MB cắt CH tại I. Chứng minh KI song song với AB.

c)Gọi G và F lần lượt là trung điểm của AH và AE. Chứng minh PG vuông góc với QF.

Bài 5: *(1,0 điểm)*

Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A=4^{27}+4^{2016}+4^{n}$ là số chính phương.

Họ tên thí sinh.. SBD:...............................

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BẮC GIANG 2016-2017

Bài 1: *(5,0 điểm)*

a. Cho biểu thức $M=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}-\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với $a,b>0$ và $a\neq b$

Rút gọi M và tính giá trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1$

b. Tìm các số nguyên a,b thoả mãn $\frac{5}{a+b\sqrt{2}}-\frac{4}{a-b\sqrt{2}}+18\sqrt{2}=3$

c. Cho a,b,c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$; $\sqrt{abc}=3$

Tính giá trị biểu thức $H=\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$

Lời giải

a) Rút gọn $M=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a,b>0$ và $a\neq b$

Ta có.

$(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1\Leftrightarrow ab-a-b+1+2\sqrt{ab}=1$

$\Leftrightarrow ab=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow (\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}})^2=1\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=1$

+ Nếu $a>b>0$

$\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}>0;\sqrt{ab}>0\Rightarrow\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}>0$

$\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\Rightarrow\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1\Rightarrow M=1$

+ nếu $0<a<b$

$\Rightarrow\sqrt{a}<\sqrt{b}\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}<0;\sqrt{ab}>0\Rightarrow\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}<0$

$\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=\frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\Rightarrow\frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1\Rightarrow M=-1$

b) $\frac{5}{a+b\sqrt{2}}-\frac{4}{a-b\sqrt{2}}+18\sqrt{2}=3$

$\Leftrightarrow 5a-5b\sqrt{2}-4a-4b\sqrt{2}+18\sqrt{2}\left(a^2-2b^2\right)=3\left(a^2-2b^2\right)$

$\Leftrightarrow 5a-5b\sqrt{2}-4a-4b\sqrt{2}+18a^2\sqrt{2}-36b^2\sqrt{2}=3a^2-6b^2$

$\Leftrightarrow 18a^2\sqrt{2}-36b^2\sqrt{2}-9b\sqrt{2}=3a^2-6b^2-a$

$\Leftrightarrow\left(18a^2-36b^2-9b\right)\sqrt{2}=3a^2-6b^2-a$

Nếu $18a^2-36b^2-9b\neq 0\Rightarrow \sqrt{2}=\dfrac{3a^2-6b^2-a}{18a^2-36b^2-9b}$

Vì a,b nguyên nên $\dfrac{3a^2-6b^2-a}{18a^2-36b^2-9b}\in Q\Rightarrow \sqrt{2}\in Q\Rightarrow$ Vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Vậy ta có $18a^2-36b^2-9b=0\Rightarrow \begin{cases}18a^2-36b^2-9b=0\\ 3a^2-6b^2-a=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3a^2-6b^2=\dfrac{3}{2}b\\ 3a^2-6b^2=a\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2}b$

Thay $a=\dfrac{3}{2}b$ vào $3a^2-6b^2-a=0$ Ta có

$3\cdot\dfrac{9}{4}b^2-6b^2-\dfrac{3}{2}b=0\Leftrightarrow 27b^2-24b^2-6b=0\Leftrightarrow 3b(b-2)=0$

Ta có $b=0$ (loại) ; $b=2$ (thoã mãn) , vậy $a=3$. Kết luận

c) Ta có $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$

mà $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$ nên $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=13$

Ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7\Rightarrow \sqrt{c}-6=-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1$

nên $\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6=\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)$

Tương tự $\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6=\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right);\sqrt{ac}+\sqrt{b}-6=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)$

Vậy $H=\dfrac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$

$=\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{c}-1+\sqrt{a}-1+\sqrt{b}-1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-3}{\sqrt{abc}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)-1}=\dfrac{7-3}{3+7-13-1}=-1$

Bài 2: (4,5 điểm)

a. Tính giá trị của biểu thức **N=** $\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

b. Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $\left(a^2+b^2-2\right)\left(a+b\right)^2+(1-ab)^2=-4ab$

Chứng minh $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

c. Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$

Lời giải

a) **N=** $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{8+2\sqrt{13}}}+\sqrt{25-10\sqrt{2}+2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(4+\sqrt{3})+2\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}+(4+\sqrt{3})}}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})^2}}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}+\left|5-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}+5-\sqrt{2}=5$

b) Theo $(\mathrm{GT})\Rightarrow\left[(a+b)^2-2(ab+1)\right](a+b)^2+(1+ab)^2=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^4-2(a+b)^2(1+ab)+(1+ab)^2=0$

$\Leftrightarrow \left[(a+b)^2-(1+ab)\right]^2=0\Rightarrow (a+b)^2\text{-}(1+ab)=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2=1+ab\Leftrightarrow |a+b|=\sqrt{1+ab}\in Q$ Vì $a,b\in Q$

Vậy $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ.

c) Điều kiện: $x\ge 1$ (*).

Ta có:

$x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)$

$\Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{x-1}+x-1-2(x+\sqrt{x-1})-3=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x-1}\right)^2-2\left(x+\sqrt{x-1}\right)-3=0$

Đặt $x+\sqrt{x-1}=y$ (Điều kiện: $y\ge 1\,(**)$, phương trình trở thành $y^2-2y-3=0$.

$y^2-2y-3=0\Leftrightarrow (y+1)(y-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=3\end{array}\right.$

+Với $y=-1$ không thỏa mãn điều kiện (**).

+ Với $y=3$ ta có phương trình:

$x+\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=3-x\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 3\\x-1=9-6x+x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 3\\x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 3\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Bài 3: **(3,5 điểm)**

a. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $x^5 + y^2 = xy^2 + 1$

b. Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh .

$$\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \le \frac{3}{2}$$

Lời giải

a)Ta có $x^5 + y^2 = xy^2 + 1 \Leftrightarrow \left(x^5 - 1\right) - \left(xy^2 - y^2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) - y^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \end{array}\right.$$

*Nếu $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ta có $1 + y^2 = y^2 + 1$ đúng với mọi y nguyên

Vậy ngiệm của PT là $(1; y \in Z)$

*Nêu $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \Rightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (2y)^2$

Ta có.

$$(2y)^2 - \left(2x^2 + x\right)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 - 4x^4 - 4x^3 - x^2$$

$$= 3x^2 + 4x + 4 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$$

Vậy ta có $(2x^2 + x)^2 < (2y)^2$ *

Ta có $\left(2x^2 + x + 2\right)^2 - (2y)^2 = 5x^2 \ge 0$, Vậy ta có $(2y)^2 \ge \left(2x^2 + x + 2\right)^2$ **

Từ * và ** ta có

$$(2x^2 + x)^2 < (2y)^2 \le \left(2x^2 + x + 2\right)^2 \Rightarrow (2y)^2 = \left(2x^2 + x + 1\right)^2;$$

$$(2y)^2 = \left(2x^2 + x + 2\right)^2$$

Nếu $(2y)^2 = (2x^2 + x + 1)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

+ Nếu $x = -1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

+Nếu $x = 3 \Rightarrow y^2 = 121 \Rightarrow y = \pm 11$

-Nếu $(2y)^2 = (2x^2 + x + 2)^2 \Leftrightarrow -5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

b) Ta có $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x+y+z\right)^2=...=\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(x-z\right)^2\geq 0$

$\Rightarrow \left(x+y+z\right)^2\leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ nên với $x,y,z>0$ ta có

$x+y+z\leq\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}$, áp dụng ta có .

$$\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\leq\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\right)}$$

-Với $x,y>0$ ta có $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\left(x+y\right)^2\geq 4xy\Rightarrow\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Áp dụng ta có .

$$\frac{1}{ab+a+2}=\frac{1}{ab+1+a+1}=\frac{1}{ab+abc+a+1}=\frac{1}{ab(c+1)+(a+1)}$$
$$\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab(c+1)}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{abc}{ab(c+1)}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$$

Vậy ta có $\frac{1}{ab+a+2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$

Tương tự ta có $\frac{1}{bc+b+2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$; $\frac{1}{ca+c+2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$ nên.

$$\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\right)}$$
$$\leq\sqrt{3\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)}=\frac{3}{2}$$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\leq\frac{3}{2}$ dấu "=" có khi $a=b=c=1$.

Bài 4: *(6,0 điểm)*

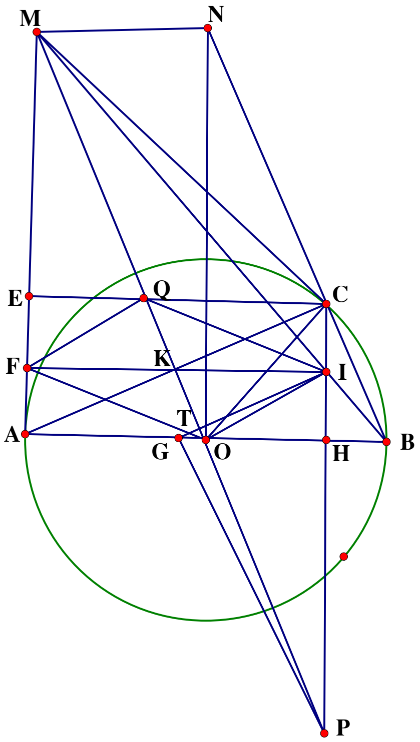
Cho nửa đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao $AM<R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, từ C vẽ CH vuông góc với AB, CE vuông góc với AM. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N. Đường thẳng MO cắt CE, CA, CH lần lượt tại Q,K,P.

a)Chứng minh $MNCO$ là hình thang cân.

b) MB cắt CH tại I. Chứng minh KI song song với AB.

c)Gọi G và F lần lượt là trung điểm của AH và AE. Chứng minh PG vuông góc với QF.

Lời giải



a)Ta có ΔACB nội tiếp đường tròn (vì...) mà AB là đường kính nên ΔACB vuông tại C $\Rightarrow AC \perp BN$.

Ta có $MA = MC$ (.....), $OA = OC$ (....) nên MO là trung trực của AC.
$\Rightarrow MO \perp AC \Rightarrow MO // NB \Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{NBO}$

Ta có $OA \perp MA$ (....)$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^0$; xét ΔMAO và ΔNOB có

$\widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^0; \widehat{MOA} = \widehat{NBO}; OA = OB = R \Rightarrow \Delta MAO = \Delta NOB \Rightarrow MO = NB$

Ta có $MO // NB; MO = NB \Rightarrow MNBO$ là hình bình hành.Ta có $\Delta MAO = \Delta NOB$ (cm trên) nên ta có $NO = MA$, mà $MA = MC$ (...) nên $NO = MC$ vậy $MNBO$ là hình thang cân.

b)Xét ΔCHB và ΔMAO có $\widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^0; \widehat{CBH} = \widehat{MOA}$ (cm trên)

$$\Rightarrow \Delta CHB \sim \Delta MAO \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{AO} = \frac{HB}{R}$$

Ta có $CH \perp AB$ (gt) ; $MA \perp AB$ (...)$\Rightarrow CH // MA \Rightarrow IH // MA \Rightarrow \dfrac{IH}{MA} = \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{HB}{2R}$

Nên ta có $\Rightarrow \dfrac{CH}{MA} = \dfrac{HB}{R} = 2 \cdot \dfrac{HB}{2R} = 2 \cdot \dfrac{IH}{MA} = \dfrac{2IH}{MA} \Rightarrow CH = 2IH \Rightarrow IC = IH$.

Chỉ ra KI là đường trung bình của tam giác $ACH \Rightarrow KI // AB$

c) Chưng minh $FQIO$ là hình bình hành $\Rightarrow QF // IO$

-Chứng minh O là trục tâm tam giác GIP .

$\Rightarrow PG \perp OI \Rightarrow PG \perp QF$

Bài 6: *(1,0 điểm)*

Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{n}$ là số chính phương.

Lời giải

* $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{n} = \left(2^{27}\right)^{2}\left(1 + 4^{1989} + 4^{n-27}\right)$

Vì A và $\left(2^{27}\right)^{2}$ là số chính phương nên $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương.

Ta có $1 + 4^{1989} + 4^{n-27} > 4^{n-27} = (2^{n-27})^{2}$

*mà $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương nên ta có .

$1 + 4^{1989} + 4^{n-27} \geq \left(2^{n-27} + 1\right)^{2} \Leftrightarrow 2^{n-27} \leq 2^{3977} \Leftrightarrow n \leq 4004$

Với $n = 4004$ ta có $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{4004} = \left(2^{27} + 2^{4004}\right)^{2}$ là số chính phương.

Vậy $n = 4004$ thì $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{n}$ là số chính phương.

ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 SGD BÌNH DƯƠNG
NĂM HỌC:2016 - 2017

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các ngiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2017$.

b) Xác định số điện thoại của THCS X thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

Câu 2. (4,0 điểm)

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$, $M\in(O;R)$. Chứng minh rằng:

$MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$.

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}=1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49\end{cases}$

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số a,b,c,d ta luôn có: $\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)\ge(ab+cd)^2$.

b) Cho $a,b>0$ chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)}\ge\dfrac{1}{25}$

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA.

Chứng minh rằng: $S_{ABCD}\le MP.NQ\le\dfrac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho đa giác lồi có 12 cạnh.

a) Tìm số đường chéo.

b) Tìm số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của đa giác đó ?

-------------***Hết***-------------

LỜI GIẢI ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 SGD BÌNH DƯƠNG NĂM HỌC 2016 - 2017

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2017$.

b) Xác định số điện thoại của THCS X thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

Lời giải

a) Phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2017 \quad (x,y\ge 0) \Leftrightarrow x=2017^2+y-4034\sqrt{y}$

Do $x,y\in Z \Rightarrow \sqrt{y}\in Z$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $\begin{cases} y=a^2 \\ x=(2017-a)^2 \end{cases}$

b) Ta có: $\overline{xxyy}=11.\overline{x0y}$ là số chính phương nên :

$$\overline{x0y}\,\vdots\,11 \Leftrightarrow 100x+y\,\vdots\,11 \Leftrightarrow 99x+x+y\,\vdots\,11 \Leftrightarrow x+y\,\vdots\,11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=11 \\ x+y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=11 \\ x=y=0 \end{array}\right.$$

- Với $x=y=0$ ta tìm được số : $\overline{xxyy}=0000$
- Với $x+y=11$ ta có: $\overline{xxyy}=11.\overline{x0y}=11.(99x+x+y)=11.(99x+11)=11^2.(9x+1)$

  $\Rightarrow 9x+1$ là số chính phương.

  $\Rightarrow x=7 \Rightarrow y=4$

Vậy: $\overline{xxyy}=7744$; $\overline{xxyy}=0000$

Câu 2. (4,0 điểm) Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$, $M\in(O;R)$. Chứng minh rằng:

$MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$.

Lời giải

Giả sử: $M\in\overset{\frown}{AC}$.

Dễ thấy: $MA+MC=MB$ (trên MB lấy I sao cho $MI=MC$, ta chứng minh: $IB=MA$)

Đặt: $MA=x$; $MB=y$; $MC=y-x$.

Ta có: $AM^2+BM^2+CM^2=x^2+y^2+(x-y)^2$

$=2(x^2+y^2-xy)$ (1)

Kẻ $AH\perp BM \Rightarrow MH=\dfrac{x}{2}\Rightarrow AH^2=\dfrac{3}{4}x^2$.

Mà $BH=MB-MH=y-\dfrac{x}{2}$

$BH=MB-MH=y-\dfrac{x}{2}\Rightarrow AB^2=AH^2+BH^2=\dfrac{3}{4}x^2+y^2+\dfrac{1}{4}x^2-xy=x^2+y^2-xy$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow AM^2 + BM^2 + CM^2 = 2AB^2 = 2\left(R\sqrt{3}\right)^2 = 6R^2$ **(đpcm)**

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$

Lời giải

a) Phương trình: $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1$

Điều kiện: $\begin{cases} 9-x^2 \ge 0 \\ 3-\sqrt{9-x^2} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x \ne 0 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)\left(3+\sqrt{9-x^2}\right)}{\left(3+\sqrt{9-x^2}\right)} + \frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(3-\sqrt{9-x^2}\right) + \frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1 \Leftrightarrow 4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)^2 - 4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3-\sqrt{9-x^2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{11}}{2} (tmđk)$$

b) Hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$ $đk: x, y \ne 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y} = 5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2 = 53 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x} = a \\ y+\dfrac{1}{y} = b \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5-b \\ 2b^2 - 10b - 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7; a = -2 \\ b = -2; a = 7 \end{cases}$

- $\begin{cases} a=-2 \\ b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-2 \\ y+\dfrac{1}{y}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

- $\begin{cases} a=7 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=7 \\ y+\dfrac{1}{y}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2} \\ y=-1 \end{cases}$

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số a,b,c,d ta luôn có: $\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)\ge\left(ab+cd\right)^2$

b) Cho $a,b>0$ chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)}\ge\dfrac{1}{25}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)\ge\left(ab+cd\right)^2 \Leftrightarrow a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2\ge a^2b^2+c^2d^2+2abcd$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2+c^2b^2-2abcd\ge 0 \Leftrightarrow (ad-cb)^2\ge 0 \quad \text{(luôn đúng)}.$$

b) Với $a,b>0$. Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)}\ge\frac{1}{25} \Leftrightarrow 25a^2+25b^2\ge(4a+3b)(3a+4b)$$

$$\Leftrightarrow 13\left(a^2+b^2\right)\ge 25ab \Leftrightarrow 13(a-b)^2+ab\ge 0$$

Dấu "=" không xảy ra, vậy: $\dfrac{a^2+b^2}{(4a+3b)(3a+4b)}>\dfrac{1}{25}$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Chứng minh rằng: $S_{ABCD}\le MP.NQ\le\dfrac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$

Lời giải

Ta có: $MP.NQ\ge 2S_{MNPQ}=S_{ABCD}$

Gọi R là trung điểm của AC, ta có :

$NR=\dfrac{1}{2}AB; \quad QR=\dfrac{1}{2}CD$

Suy ra: $NQ\le NR+QR\le\dfrac{1}{2}(AB+CD)$

Tương tự: $PM\le\dfrac{1}{2}(AD+BC)$

$\Rightarrow \text{MP}.\text{NQ} \le \frac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le MP.NQ \le \frac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho đa giác lồi có 12 cạnh

a) Tìm số đường chéo.

b) Tìm số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của đa giác đó ?

Lời giải

a) Số đường chéo của đa giác là: $\frac{12(12-3)}{2}=54$

b) Nhận thấy rằng với mỗi cạnh của đa giác, ta lập được 10 tam giác mà mỗi tam giác thỏa mãn đề bài mà đa giác ban đầu có 12 cạnh nên số tam giác thỏa mãn đề bài là $10.12=120$

Tuy nhiên nếu như tính theo cách trên thì các tam giác mà có 2 cạnh là 2 cạnh kề của đa giác đã cho được tính 2 lần

Ta có số tam giác được tính 2 lần như trên là 12 tam giác nên số tam giác thỏa mãn đề bài thực chất là: $120-12=108$ tam giác.

-------------***Hết***-------------

ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 9 TỈNH BẾN TRE NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1: *(7,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16 với mọi n là số nguyên.

b) Cho biểu thức $B = \sqrt{\dfrac{\left(x^2-3\right)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{\left(x+2\right)^2 - 8x}$. Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên.

c) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

Câu 2: *(3,0 điểm)*

Cho hàm số $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ có đồ thị (D).

a) Vẽ đồ thị (D) của hàm số trên.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m$ vô nghiệm.

c) Dựa vào đồ thị (D), tìm tập nghiệm của bất phương trình: $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} \ge x$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực thỏa: $\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 2017 \\ z^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1009 \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 \end{cases}$ $\quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z)$

Chứng minh rằng $\dfrac{2z}{x} = \dfrac{y+z}{x+z}$.

Câu 4: *(5,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AE < BE$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2).

a) Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN. Chứng minh rằng đường thẳng EF vuông góc với đường thẳng AB.

b) Với $AB = 18$ cm và $AE = 6$ cm, Vẽ đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại C và D sao cho điểm C thuộc cung nhỏ AD. Tính độ dài đoạn thẳng CD.

Câu 5: *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhỏ hơn $90°$. Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại M (điểm M thuộc AC). Chứng minh $\dfrac{AM}{MC} + 1 = 2\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2$.

……………….HẾT…………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 9 TỈNH BẾN TRE NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(7,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng $A=n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4$ chia hết cho 16 với mọi n là số nguyên.

b) Cho biểu thức $B=\sqrt{\dfrac{\left(x^2-3\right)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}$. Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên.

c) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy$.

Lời giải

a) $A=n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4=n^4.\left(n^4+4n^3+6n^2+4n+1\right)=\left[n(n+1)\right]^4$.

Vì $n(n+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $n(n+1)\vdots 2 \Rightarrow \left[n(n+1)\right]^4 \vdots 2^4=16$.

Do đó $A\vdots 16$ với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$.

b) $B=\sqrt{\dfrac{\left(x^2-3\right)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}=\sqrt{\dfrac{\left(x^2+3\right)^2}{x^2}}+\sqrt{(x-2)^2}=\dfrac{x^2+3}{|x|}+|x-2|$

Điều kiện xác định $x\neq 0$.

+) Xét $x<0$: $B=\dfrac{-x^2-3}{x}-x+2=\dfrac{-2x^2+2x-3}{x}=-2x+2-\dfrac{3}{x}$

Với $x\in\mathbb{Z}$, B có giá trị nguyên khi $\dfrac{x}{3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in Ư(3)$, mà x < 0 nên $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$

+) Xét $0<x\le 2$: $B=\dfrac{x^2+3}{x}-x+2=\dfrac{2x+3}{x}=2+\dfrac{3}{x}$

Với $x\in\mathbb{Z}$, B có giá trị nguyên khi $\dfrac{3}{x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in Ư(3)$ mà $0<x\le 2\Leftrightarrow x=1$

+) Xét $x>2$: $B=\dfrac{x^2+3}{x}+x-2=\dfrac{2x^2-2x+3}{x}=2x-2+\dfrac{3}{x}$

Với $x\in\mathbb{Z}$, B có giá trị nguyên khi $\dfrac{3}{x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in Ư(3)$ mà $x>2$ nên $x=3$.

Kết luận

$$B=\begin{cases}\dfrac{-2x^2+2x-3}{x} & khi\ x<0\\ \dfrac{2x+3}{x} & khi\ 0<x\le 2\\ \dfrac{2x^2-2x+3}{x} & khi\ \ x>2\end{cases}$$

Với $x\in\mathbb{Z}$, B có giá trị nguyên khi và chỉ khi $x\in\{\pm1;\pm3\}$.

c) $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy\Leftrightarrow(x-1)\left(x-2y^2+y\right)=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\x-2y^2+y=1\end{cases}\\\begin{cases}x-1=-1\\x-2y^2+y=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\2y^2-y-1=0\end{cases}\\\begin{cases}x=0\\2y^2-y-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(2;1)$ và $(0;1)$.

Câu 2: *(3,0 điểm)*

Cho hàm số $y=2\sqrt{x^2-6x+9}-x-2$ có đồ thị (D).

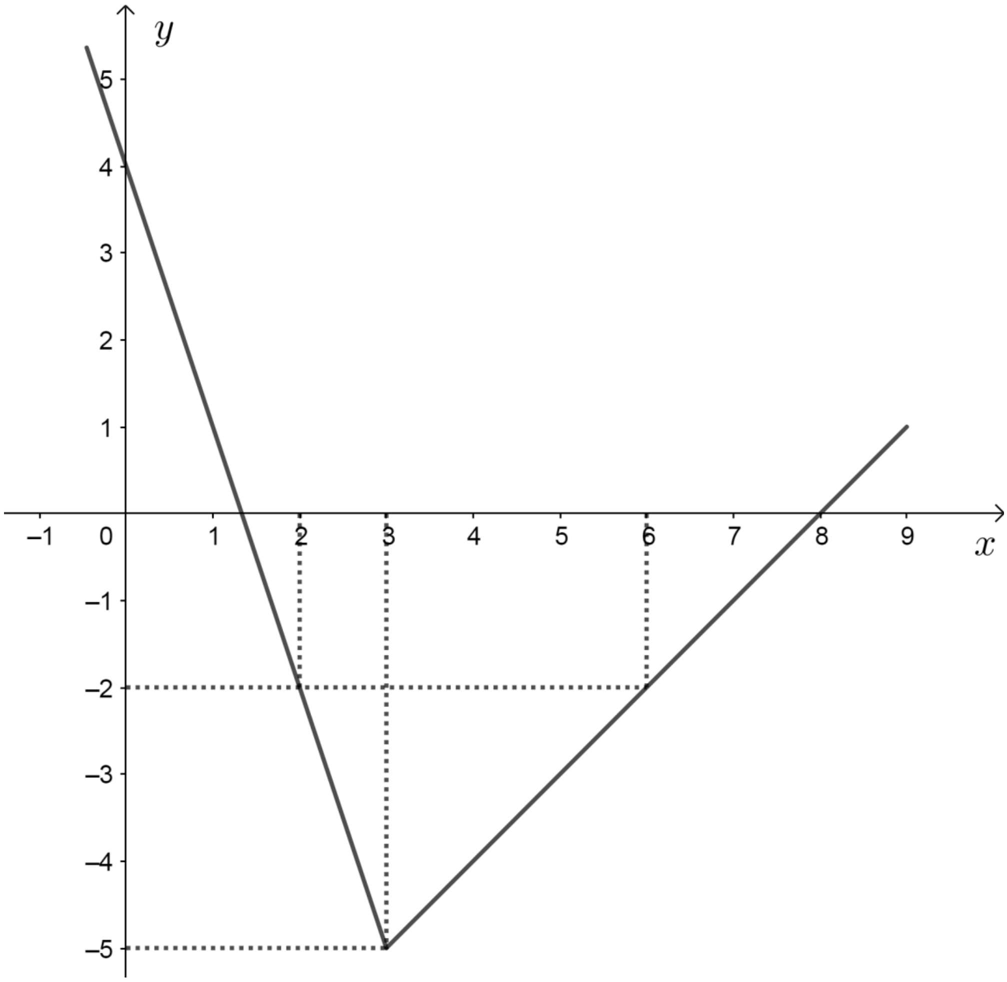
a) Vẽ đồ thị (D) của hàm số trên.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sqrt{x^2-6x+9}-x-2=m$ vô nghiệm.

c) Dựa vào đồ thị (D), tìm tập nghiệm của bất phương trình: $2\sqrt{x^2-6x+9}\ge x$.

Lời giải

a) $y=2\sqrt{x^2-6x+9}-x-2=2|x-3|-x-2=\begin{cases}x-8 & \text{, khi } x\ge 3\\-3x+4, & \text{khi } x<3\end{cases}$.



b) Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị sau:

$(D): y=2\sqrt{x^2-6x+9}-x-2$ (1)

$(D'): y=m$

Trong đó, (D') là đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ là m.

Phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi (D) và (D') không giao nhau.

Dựa vào đồ thị , ta có:

(D)và (D') không giao nhau $\Leftrightarrow m < -5$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $m < -5$.

c) $2\sqrt{x^2-6x+9} \geq x \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-6x+9} - x - 2 \geq -2 (1)$

Các nghiệm của bất phương trình trên là hoành độ của các điểm thuộc (D) mà có tung độ $y \geq -2$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 6 \\ x \leq 2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 6 \vee x \leq 2\}$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực thỏa: $\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 2017 \ (1) \\ z^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1009 \quad (2) \qquad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z) \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 \ (3) \end{cases}$

Chứng minh rằng $\dfrac{2z}{x} = \dfrac{y+z}{x+z}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 2017 \ (1) \\ z^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1009 \quad (2) \qquad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z) \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 \ (3) \end{cases}$$

(1) trừ (2), vế theo vế, ta có: $x^2 + xy - z^2 = 1008 \ (4)$

(3) trừ (4), vế theo vế, ta có:

$$xz - xy + 2z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xz + 2z^2 = xy$$

$$\Leftrightarrow 2xz + 2z^2 = xy + xz$$

$$\Leftrightarrow 2z(x+z) = x(y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$$

Vậy $\dfrac{2z}{x} = \dfrac{y+z}{x+z}$.

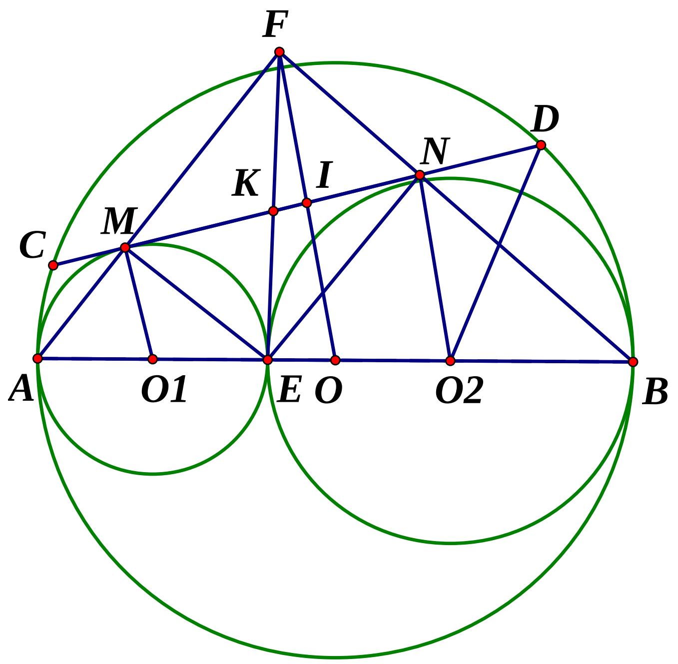
Câu 4: *(5,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AE < BE$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2).

a) Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN. Chứng minh rằng đường thẳng EF vuông góc với đường thẳng AB.

b) Với $AB = 18\,cm$ và $AE = 6\,cm$, Vẽ đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại C và D sao cho điểm C thuộc cung nhỏ AD. Tính độ dài đoạn thẳng CD.

Lời giải



Hình vẽ điểm N chưa chính xáchình như kéo theo điểm F cũng chưa chính xác

a) MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) nên

$MN \perp O_1M; MN \perp O_2N \Rightarrow O_1M // O_2N \Rightarrow \widehat{MO_1E} + \widehat{NO_2E} = 180°$

ΔO_1AM cân tại O_1 suy ra $\widehat{MO_1E} = 2\widehat{O_1AM}$

ΔO_2BN cân tại O_2 nên $\widehat{NO_2E} = 2\widehat{O_2BN}$

$\Rightarrow \widehat{MO_1E} + \widehat{NO_2E} = 2\left(\widehat{O_1AM} + \widehat{O_2BN}\right) \Rightarrow \widehat{O_1AM} + \widehat{O_2BN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MFN} = 90^0$.

Mặt khác $\widehat{AME} = \widehat{BNE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{ENF} = 90°$ suy ra $MENF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{NME}$

Mà $\widehat{O_1EM} = \widehat{O_1ME}$ (ΔO_1ME cân tại O_1) và $\widehat{NME} + \widehat{O_1ME} = 90°$ (MN là tiếp tuyến)

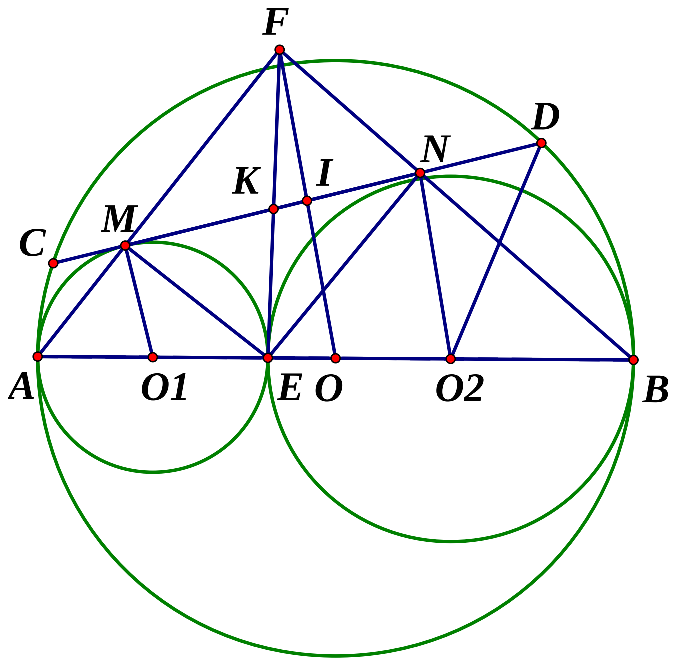
$\Rightarrow \widehat{MEF} + \widehat{O_1EM} = 90^\circ$ hay $EF \perp AB$ tại E.

b) Ta có $AB = 18$ cm, $AE = 6$ cm $\Rightarrow EB = 12$ cm, $OF = 9$ cm.

ΔAFB vuông tại F có đường cao EF nên $EF^2 = AE.EB = 6.12 = 72 \Rightarrow EF = 6\sqrt{2}$ cm

$\Rightarrow MN = EF = 6\sqrt{2}$ cm.

Gọi K, I lần lượt là giao điểm của EF, OF với MN.



Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật nên có $\widehat{NMF} = \widehat{NEF}$ mà $\widehat{NEF} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ góc BEM) $\Rightarrow \widehat{NMF} = \widehat{ABF}$ (1) $\Rightarrow \Delta FNM \backsim \Delta FAB$

Ta lại có ΔOAF cân tại O suy ra $\widehat{OAF} = \widehat{OFA}$ (2)

Và $\widehat{OAF} + \widehat{ABF} = 90^\circ$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta suy ra $\widehat{NMF} + \widehat{OFA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIF} = 90^\circ$.

ΔFNM đồng dạng ΔFAB và có FI, FE là hai đường cao tương ứng nên

$\frac{FI}{EF} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{FI}{6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{18} \Rightarrow FI = 4$ cm

$\Rightarrow OI = OF - FI = 9 - 4 = 5$ cm.

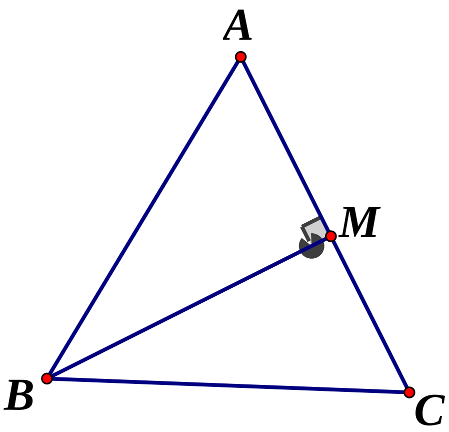
ΔOID vuông tại I nên $ID^2 = OD^2 - OI^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \Rightarrow ID = 2\sqrt{14}$ cm.

Vì $OF \perp CD$ tại I nên $CD = 2.ID = 4\sqrt{14}$ cm.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhỏ hơn 90^0. Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại M (điểm M thuộc AC). Chứng minh $\frac{AM}{MC} + 1 = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2$.

Lời giải



ΔABC cân tại A nên $AB = AC$.

Ta có

$$\frac{AM}{MC}+1=2.\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{AM+MC}{MC}=2.\frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{AC}{MC}=2.\frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow BC^2=2.AC.MC$$

Như vây, ta chỉ cần chứng minh: $BC^2 = 2AC.MC$.

Thật vậy, ta có

$$BC^2 = BM^2 + MC^2 = AB^2 - AM^2 + \left(AC - AM\right)^2$$
$$= AC^2 - AM^2 + AC^2 - 2AC.AM + AM^2$$
$$= 2AC^2 - 2.AC.AM = 2AC.(AC - AM) = 2.AC.MC$$

……………..**HẾT**……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐẮC LẮC NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Cho số thực a mà $a>2$. Rút gọn biểu thức

$$A=\frac{1}{a}.\left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}+\frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}\right].$$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-3x\sqrt{y}+3\sqrt{y}=1 \\ \dfrac{16}{x}-3\sqrt{y}=5 \end{cases}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1) Tìm m để phương trình $x^2+(2m+1)x+3m-1=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=5$.

2) Cho số thực b thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x)=x^2+bx+2017$ có giá trị nhỏ nhất là một số thực dương. Chứng minh cả hai phương trình $4x^2-12\sqrt{10}x+b=0$ và $4x^2-12\sqrt{10}x-b=0$ đều có hai nghiệm phân biệt.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $1+2^x=y^2$.

2) Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $M(n)=2^{n^2}+2^{4n^4+1-n^2}$. Chứng minh rằng $2^{M(n)}-8$ luôn chia hết cho 31.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn *(O)* có tâm *O*. Dây *AB* cố định không phải đường kính. Gọi *I* là trung điểm của đoạn *AB*. Trên cung nhỏ *AB* lấy hai điểm *C*, *E* sao cho góc *CIA* và *EIB* là góc nhọn. *CI* cắt đường tròn *(O)* tại điểm *D* khác *C*. *EI* cắt đường tròn *(O)* tại điểm *F* khác *E*. Các tiếp tuyến với đường tròn *(O)* tại *C* và *D* cắt nhau tại *M*, các tiếp tuyến với đường tròn *(O)* tại *E* và *F* cắt nhau tại *N*. Nối *OM* cắt *CD* tại *P* và *ON* cắt *EF* tại *Q*. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác *PQNM* nội tiếp.

2) *MN* song song với *AB*.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác *ABC* cân tại *C*, có góc ở đỉnh là $36°$. Chứng minh $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 6: *(2,0 điểm)*

Cho hai số thực a, b thay đổi sao cho $1\le a\le 2;1\le b\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left(a+b^2+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+a^2+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{2}{a}\right)$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐẮC LẮC NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Tìm m để phương trình $x^2+(2m+1)x+3m-1=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=5$.

2) Cho số thực b thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x)=x^2+bx+2017$ có giá trị nhỏ nhất là một số thực dương. Chứng minh cả hai phương trình $4x^2-12\sqrt{10}x+b=0$ và $4x^2-12\sqrt{10}x-b=0$ đều có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

1) $A=\dfrac{1}{a}.\left[\dfrac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}+\dfrac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}\right]$

$$=\frac{1}{a}.\left[\frac{\left(\sqrt{a-1}\right)^3+1}{\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}}+\frac{\left(\sqrt{a-1}\right)^3-1}{\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}.\left[\frac{\left(\sqrt{a-1}+1\right)\left(a-1-\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{\left(\sqrt{a-1}-1\right)\left(a-1+\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{a-1}-1}\right]$$

$$=\frac{1}{a}.\left(a-\sqrt{a-1}+a+\sqrt{a-1}\right)=2\ (do\ a>2\Rightarrow a-1>0;\sqrt{a-1}-1>0).$$

2) $\begin{cases}x^2-3x\sqrt{y}+3\sqrt{y}=1\\ \dfrac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\ (*)\end{cases}$ (ĐK: $x\neq 0; y\geq 0$)

Ta có $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\left(x-3\sqrt{y}+1\right)=0\\ \dfrac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=0\\ \dfrac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}(1)\\ \begin{cases}x-3\sqrt{y}+1=0\\ \dfrac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}(2)\end{array}\right.$

Giải (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 3\sqrt{y}=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{121}{9}\end{cases}$ (TMĐK).

Giải (2) $\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ \dfrac{16}{3\sqrt{y}-1}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ 3y+4\sqrt{y}-7=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ \left(\sqrt{y}-1\right)\left(3\sqrt{y}+7\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$ (TMĐK).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left\{\left(1;\dfrac{121}{9}\right);(2;1)\right\}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1) Tìm m để phương trình $x^2+(2m+1)x+3m-1=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=5$.

2) Cho số thực b thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x)=x^2+bx+2017$ có giá trị nhỏ nhất là một số thực dương. Chứng minh cả hai phương trình $4x^2-12\sqrt{10}x+b=0$ và $4x^2-12\sqrt{10}x-b=0$ đều có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

1) Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(3m-1)=4(m-1)^2+1>0$ với mọi m. Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo Viét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-(2m+1)\\ x_1x_2=3m-1\end{cases}$.

Khi đó: $x_1^2+x_2^2=5\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$.

$\Leftrightarrow(2m+1)^2-2(3m-1)=5\Leftrightarrow 2m^2-m-1=0\Leftrightarrow(m-1)(2m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$.

2) $P(x)=x^2+bx+2017=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+2017-\dfrac{b^2}{4}\ge 2017-\dfrac{b^2}{4}$.

Do đó $Min\,P(x)=2017-\dfrac{b^2}{4}$.

Ta có: $2017-\dfrac{b^2}{4}>0\Leftrightarrow b^2<4.2017\Leftrightarrow -2\sqrt{2017}<b<2\sqrt{2017}$.

Phương trình: $4x^2-12\sqrt{10}x+b=0$ có $\Delta_1'=360-4b$.

Phương trình : $4x^2-12\sqrt{10}x-b=0$ có $\Delta'_2=360+4b$.

Mà $-2\sqrt{2017}<b<2\sqrt{2017}\Rightarrow\begin{cases}360-8\sqrt{2017}<360-4b<360+8\sqrt{2017}\\ 360-8\sqrt{2017}<360+4b<360+8\sqrt{2017}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'_1>0\\ \Delta'_2>0\end{cases}$.

Vậy cả hai phương trình đã cho đều có hai nghiệm phân biệt.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $1+2^x=y^2$.

2) Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $M(n)=2^{n^2}+2^{4n^4+1-n^2}$. Chứng minh rằng $2^{M(n)}-8$ luôn chia hết cho 31.

Lời giải

1) $1+2^x=y^2\Leftrightarrow(y+1)(y-1)=2^x\Rightarrow\begin{cases}y+1=2^m & (1)\\ y-1=2^n & (2)\\ m+n=x\end{cases}$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2^m-2^n=2=2^2-2\Rightarrow m=2,n=1\Rightarrow x=3;y=3$.

2) • Nếu n chẵn $\Rightarrow n^2\,\vdots\,4\Rightarrow n^2=4t\,(t\in\mathbb{N})\Rightarrow 2^{n^2}=2^{4t}=16^t=5k_1+1\,(k_1\in\mathbb{N})$.

Và $4n^4+1-n^2=4p+1\,(p\in\mathbb{N})\Rightarrow 2^{4n^4+1-n^2}=2^{4p+1}=2.16^p=5k_2+2\,(k_2\in\mathbb{N})$.

Nên $M(n)=5k+3\,(k\in\mathbb{N})\Rightarrow 2^{M(n)}-8=2^{5k+3}-8=8(32^k-1)\,\vdots\,31$ (1)

• Nếu n lẻ $\Rightarrow n^2 = 4t + 1\left(t \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow 2^{n^2} = 2^{4t+1} = 2.16^t = 5k_1 + 2\left(k \in \mathbb{N}\right)$

Và $4n^4 + 1 - n^2 = 4p\,(p \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{4n^4+1-n^2} = 2^{4p} = 16^p = 5k_2 + 1(k \in \mathbb{N})$

Nên $M(n) = 5k + 3(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{M(n)} - 8 = 2^{5k+3} - 8 = 8\left(32^k - 1\right) \vdots 31$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2^{M(n)} - 8$ luôn chia hết cho 31.

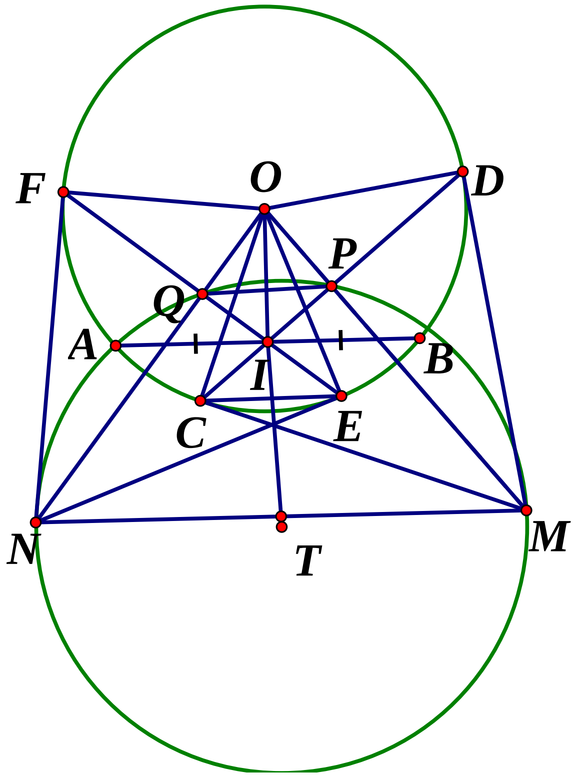
Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn *(O)* có tâm *O*. Dây *AB* cố định không phải đường kính. Gọi *I* là trung điểm của đoạn *AB*. Trên cung nhỏ *AB* lấy hai điểm *C*, *E* sao cho góc *CIA* và *EIB* là góc nhọn. *CI* cắt đường tròn *(O)* tại điểm *D* khác *C*. *EI* cắt đường tròn *(O)* tại điểm *F* khác *E*. Các tiếp tuyến với đường tròn *(O)* tại *C* và *D* cắt nhau tại *M*, các tiếp tuyến với đường tròn *(O)* tại *E* và *F* cắt nhau tại *N*. Nối *OM* cắt *CD* tại *P* và *ON* cắt *EF* tại *Q*. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác *PQNM* nội tiếp.

2) *MN* song song với *AB*.

Lời giải



1) Chứng minh: Tứ giác *PQNM* nội tiếp.

Ta có: $OC = OD$ (bán kính), $MC = MD$.

(*MC*, *MD* là 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra: *OM* là trung trực của $CD \Rightarrow OM \perp DP$

Xét ΔODM có:

$\widehat{ODM} = 90^0$ (*MD* là tiếp tuyến của *(O)* tại *D*),

$OM \perp DP\,(cmt)$

$\Rightarrow OD^2 = OP.OM \quad (a)$

Chứng minh tương tự có: $OF^2 = OQ.ON\,(b)$.

Lại có: $OD = OF$ (bán kính) (c)

Từ (a), (b), (c) suy ra:

$OP.OM = OQ.ON \Rightarrow \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{ON}{OM}$.

Xét ΔOPQ và ΔONM có:

$\widehat{O}$ chung; $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{ON}{OM}(cmt)$.

$\Rightarrow \Delta OPQ \backsim \Delta ONM$ (c.g.c) nên $\widehat{OPQ} = \widehat{ONM}$.

Vậy tứ giác *PQNM* nội tiếp (đpcm).

2) Chứng minh: *MN* song song với *AB*.

Tứ giác *OPIQ* có : $\widehat{OPI} = \widehat{OQI} = 90^0$ (theo câu a)

Vậy tứ giác *OPIQ* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QOI} = \widehat{QPI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung *QI*)

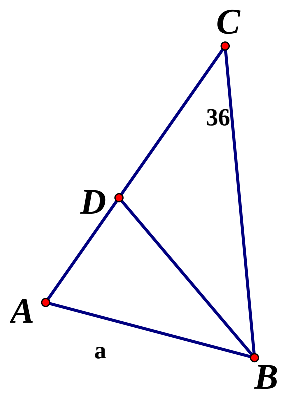
Lại có $\widehat{ONM} = \widehat{OPQ}\,(cmt) \Rightarrow \widehat{QOI} + \widehat{ONM} = \widehat{QPI} + \widehat{OPQ} = \widehat{OPI} = 90^0\,(do\, OM \perp DP)$.

$\Rightarrow \Delta ONT$ vuông tại *T* (*T* là giao điểm của *OI* và *MN*).

$\Rightarrow OI \perp MN$, mặt khác $OI \perp AB$ (vì $IA = IB = \dfrac{1}{2}AB\,(gt)$). Vậy *AB* // *MN* (đpcm).

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại C, có góc ở đỉnh là $36°$. Chứng minh: $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Lời giải

Ta có: $\widehat{CAB}=\widehat{CBA}=\dfrac{180^0-\widehat{ACB}}{2}=\dfrac{180^0-36^0}{2}=72^0$ (Vì tam giác ABC cân tại C).

Kẻ phân giác BD của góc $\widehat{ABC}\Rightarrow\widehat{CBD}=\widehat{ABD}=36^0$.
Chứng minh được ΔBDC cân tại D, ΔABD cân tại B.
Đặt $AC=BC=x,\ AB=BD=CD=a\ \left(x>0,a>0\right)$.

Mặt khác BD là phân giác của ΔABC.

Nên $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CD+AD}{BC+AB}=\dfrac{AC}{BC+AB}$

$\Rightarrow\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{x+a}\Rightarrow x^2-ax-a^2=0$ (*)

Giải phương trình (*) ta được $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$ (vì $x>0$)

nên $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)a}{2}:a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 6: *(2,0 điểm)*

Cho hai số thực a, b thay đổi sao cho $1\le a\le 2;1\le b\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left(a+b^2+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+a^2+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{2}{a}\right)$.

Lời giải

Áp dụng BĐT: $xy\le\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4}$.

Ta có: $A=\left(a+b^2+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+a^2+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{2}{a}\right)\le\dfrac{\left(a+\dfrac{2}{a}+b+\dfrac{2}{b}+a^2+\dfrac{4}{a^2}+b^2+\dfrac{4}{b^2}\right)}{4}$.

Đặt $a+\dfrac{2}{a}=x\Rightarrow a^2+\dfrac{4}{a^2}=x^2-4;b+\dfrac{2}{b}=y\Rightarrow b^2+\dfrac{4}{b}=y^2-4$.

Lại có: $1\le a\le 2\ ;1\le b\le 2$ suy ra:

$\left(a-1\right)\left(a-2\right)\le 0\Rightarrow a^2\le 3a-2\Rightarrow a+\dfrac{2}{a}=\dfrac{a^2+2}{a}\le\dfrac{3a-2+2}{a}=3\Rightarrow 0<x\le 3$.

$\left(b-1\right)\left(b-2\right)\le 0\Rightarrow b^2\le 3b-2\Rightarrow b+\dfrac{2}{b}=\dfrac{b^2+2}{b}\le\dfrac{3b-2+2}{b}=3\Rightarrow 0<y\le 3$.

Nên $A\le\dfrac{\left(x+y+x^2+y^2-8\right)^2}{4}\le\dfrac{\left(3+3+9+9-8\right)^2}{4}=64$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b^2+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b}=b+a^2+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{2}{a} \\ (a-1)(a-2)=0 \\ (b-1)(b-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=2 \end{array}\right.$.

Vậy $Max\,A=64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=2 \end{array}\right.$.

…………….. HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH BÌNH ĐỊNH NĂM HỌC 2016-2017

Bài 1 *(6,0 điểm).*

1. Cho biểu thức: $P = \dfrac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \dfrac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

2. Cho biểu thức: $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Bài 2 *(5,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực $x,\ y$ dương, ta luôn có: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$

b) Cho phương trình: $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\dfrac{1+x_1^2}{x_1} - \dfrac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2$

Bài 3 *(2,0 điểm)*

Cho $x,\ y,\ z$ là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

Bài 4 *(7,0 điểm).*

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh $MB + MC = MA$.

b) Gọi $H,\ I,\ K$ lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống $AB,\ BC,\ CA$. Gọi $S,\ S'$ lần lượt là diện tích của tam giác $ABC,\ MBC$. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$$

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. $AD,\ BE,\ CF$ là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD, lấy N trên tia DE sao cho $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc $\widehat{NMF}$.

-----------------*Hết*-----------------

Họ và tên học sinh:…………………………………………………….SBD:…………

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm, học sinh không được sử dụng máy tính bỏ túi)

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG BÌNH ĐỊNH NĂM HỌC 2016-2017

Bài 1 *(6,0 điểm).*

1. Cho biểu thức: $P = \dfrac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \dfrac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

2. Cho biểu thức: $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Lời giải

1. a) Rút gọn được $P = \dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}$ (với $m \geq 0,\ m \neq 1$)

1b) $P = \dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{m}-1}$

Ta có: $P \in N \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{m}-1} \in N \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1$ là ước dương của 2 $\Rightarrow$ $m \in \{4;\ 9\}$ (TMĐK)

Vậy $m = 4;\ m = 9$ là giá trị cần tìm.

2. $a + b + c \vdots 4$ $(a,\ b,\ c \in Z)$

Đặt $a+b+c = 4k\ (k \in Z) \Rightarrow a+b = 4k - c;\ b+c = 4k - a;\ a+c = 4k - b$

Ta có: $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc = (4k-c)(4k-a)(4k-b) - abc$

$= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k - b) - abc$

$= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc$

$= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc$ (*)

Giả sử $a,\ b,\ c$ đều chia 2 dư 1 $\Rightarrow$ $a+b+c$ chia 2 dư 1 (1)

Mà: $a+b+c \vdots 4 \Rightarrow a+b+c \vdots 2$ (theo giả thiết) (2)

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai

$\Rightarrow$ Trong ba số $a,\ b,\ c$ ít nhất có một số chia hết cho 2

$\Rightarrow 2abc \vdots 4$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ $P \vdots 4$

Bài 2 *(5,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực $x,\ y$ dương, ta luôn có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$

b) Cho phương trình: $2x^2+3mx-\sqrt{2}=0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(\frac{1+x_1^2}{x_1}-\frac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2$

Lời giải

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}\ge\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2\ge4ab\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\ge0$ (đúng)

b) PT có $a,\ c$ trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Ta có: $x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$ và $x_1.x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $M=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(\frac{1+x_1^2}{x_1}-\frac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2=......=$

$\left(x_1-x_2\right)^2\left[1+\frac{\left(1-x_1x_2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^2}\right]=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]\left[1+\frac{\left(1-x_1x_2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^2}\right]$

$=\left(9+\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)m^2+8\sqrt{2}+8\ge8\sqrt{2}+8$

Dấu "=" xảy ra khi $m=0$

Vậy GTNN của M là $8\sqrt{2}+8$ khi $m=0$

Bài 3 *(2,0 điểm)*

Cho $x,\ y,\ z$ là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương x^2 và yz, ta có:

$x^2+yz\ge2\sqrt{x^2yz}=2x\sqrt{yz}\Rightarrow\frac{1}{x^2+yz}\le\frac{1}{2x\sqrt{yz}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{x\sqrt{yz}}$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{y^2+xz}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{y\sqrt{xz}}$ và $\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{z\sqrt{xy}}$

Suy ra: $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{xz}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\right)$ (1)

Ta có: $\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{xz}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}$ (2)

Ta có: $\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}\le x+y+z$ (3)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \le 2x + 2y + 2z$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)^2 \ge 0$ (BĐT đúng)

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$.

Từ (2) và (3) suy ra: $\dfrac{1}{x\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{y\sqrt{xz}} + \dfrac{1}{z\sqrt{xy}} \le \dfrac{x+y+z}{xyz} = \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{xy}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: $\dfrac{1}{x^2+yz} + \dfrac{1}{y^2+xz} + \dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}\right)$

Bài 4 *(7,0 điểm).*

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh $MB + MC = MA$.

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$$

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD, lấy N trên tia DE sao cho $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc $\widehat{NMF}$.

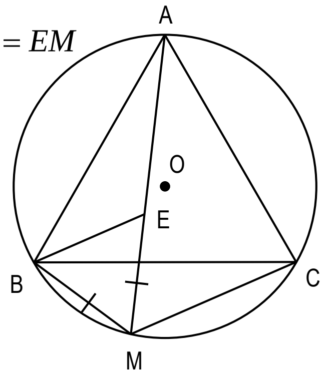
Lời giải

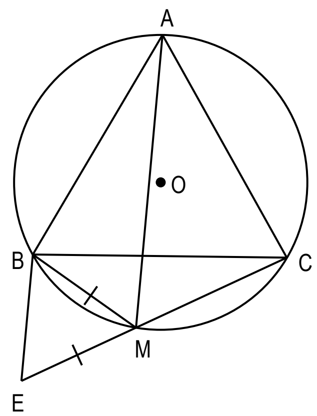
1.a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$\Delta BMA = \Delta BEC \Rightarrow MA = EC$

Do đó: $MB + MC = MA$





Cách 2:

Trên AM lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: ΔBEM là tam giác đều

$\Rightarrow BE = BM = EM$

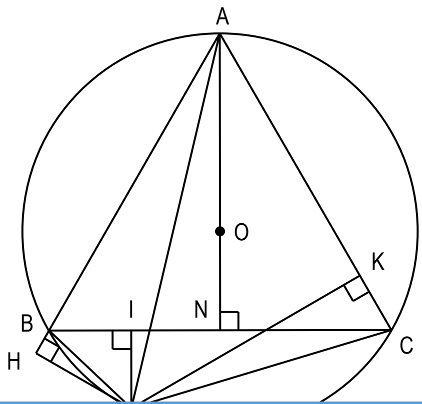
$\Delta MBC = \Delta EBA$ (c.g.c) $\Rightarrow MC = AE$

Do đó: $MB + MC = MA$.

1.b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì ΔABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng $\Rightarrow AN = \dfrac{3}{2}R$



Ta có: $AN = AB.\sin\widehat{ABN} \Rightarrow AB = \dfrac{AN}{\sin\widehat{ABN}} = \dfrac{3}{2}R : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Ta có: $\dfrac{1}{2}MH.AB = S_{ABM} \Leftrightarrow MH = \dfrac{2S_{ABM}}{AB} = \dfrac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$

$\dfrac{1}{2}MK.AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \dfrac{2S_{ACM}}{AC} = \dfrac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$

$\dfrac{1}{2}MI.BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \dfrac{2S_{BCM}}{BC} = \dfrac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \dfrac{2S'}{R\sqrt{3}}$

Do đó: $MH + MK + MI = \dfrac{2S'}{R\sqrt{3}} + \dfrac{2}{R\sqrt{3}}\left(S_{ABM} + S_{ACM}\right) = \dfrac{2S'}{R\sqrt{3}} + \dfrac{2}{R\sqrt{3}}.S_{ABMC}$

$$\dfrac{2S'}{R\sqrt{3}} + \dfrac{2}{R\sqrt{3}}.\left(S + S'\right) = \dfrac{2\sqrt{3}\left(S + 2S'\right)}{3R}$$

2. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K.

Tứ giác $AEDB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{BAC}$

Mà: $\widehat{MKD} = \widehat{CDE}$ (vì $MK // BC$).

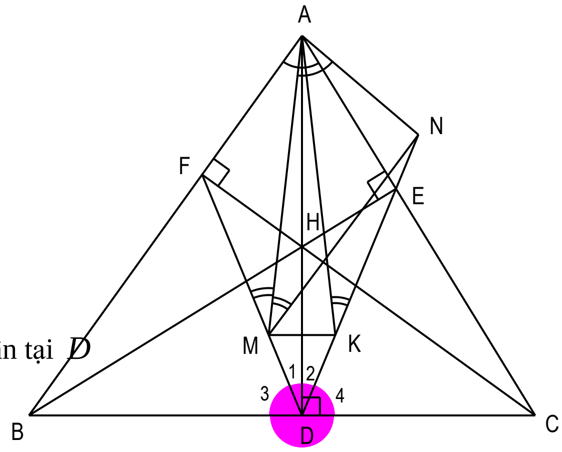
Do đó: $\widehat{MKD} = \widehat{MAN} \Rightarrow$ Tứ giác $AMKN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AKN}$

Ta có: $\widehat{D_3} = \widehat{D_4}$ $(= \widehat{BAC}) \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$

ΔDMK có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại D

$\Rightarrow DM = DK$



$\Delta AMD = \Delta AKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AKD}$

Nên: $\widehat{AMF} = \widehat{AKN}$. Ta có: $\widehat{AMF} = \widehat{AMN}\left(= \widehat{AKN}\right)$

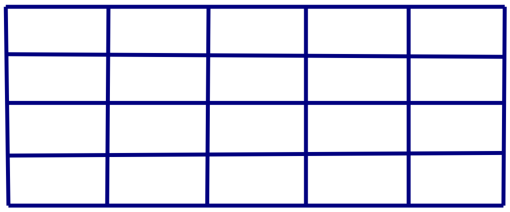
Vậy: MA là phân giác của góc $\widehat{NMF}$.

=====**HẾT**=====

ĐỀ THI CHỌN HSG HÀ TĨNH NĂM HỌC 2016-2017

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ

Câu 1: Có bao nhiêu hình chữ nhật trong hình vẽ sau:



Câu 2: Tìm số hạng thứ 7 của dãy số sau đây: 1; 1; 2; 5; 29;..........

Câu 3: Có 5 đôi giày màu xanh và 10 đôi giày màu đỏ bỏ chung trong cái hộp. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu chiếc giày (mà không nhìn vào trong hộp) để chắc chắn có một đôi cùng màu và đi được.

Câu 4: Có một nhóm bạn rủ nhau đi câu cá, bạn câu được ít nhất câu được $\frac{1}{9}$ tổng số cá câu được, bạn câu được nhiều cá nhất câu được $\frac{1}{7}$ tổng số cá câu được. Biết rằng số cá câu được của mỗi bạn là khác nhau. Hỏi nhóm bạn có bao nhiêu người?.

Câu 5: Tìm các số hữu tỷ x, y thỏa mãn đẳng thức: $\sqrt{x}-2\sqrt{y}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Câu 6: Giải phương trình $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[3]{2}$.

Câu 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(x+\sqrt{2x+y})=3-y\\ x^2-2xy-y^2=2\end{cases}$.

Câu 8: Cho các số $x,y>0$ thỏa mãn $x+\frac{4}{y}\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{(x+2y)(y+2x)}{x^2+y^2}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh AC và các đường thẳng AD, BM, CE đồng quy tại K nằm trong tam giác ($D\in BC; E\in AB$). Biết ΔAKE và ΔBKE có diện tích lần lượt là 10 cm^2 và 20 cm^2. Tính diện tích tam giác ABC.

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác trong CD đồng quy. Tính $\frac{AB}{AC}$.

II. PHẦN II. TỰ LUẬN

Câu 11: Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\sqrt{a+b}=\frac{\overline{ab}}{a+b}$.

Câu 12: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn và có các cạnh đối không song song. Gọi F là giao điểm của AB và CD, E là giao điểm của AD và BC; H, G theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD. Đường phân giác góc BED cắt GH tại điểm I.

a) Chứng minh rằng $IH.BD=IG.AC$.

b) Cho độ dài $CD = 2.AB$. Tìm tỉ số diện tích $\frac{S_{IAB}}{S_{ICD}}$.

Câu 13: Cho hình tròn (C) có bán kính bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương k sao cho với mọi cách vẽ k điểm bất kỳ và phân biệt thuộc hình tròn (C) thì luôn tồn tại hai điểm trong k điểm đó thỏa mãn khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

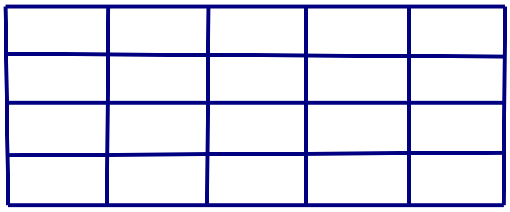
……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG HÀ TĨNH NĂM HỌC 2016-2017

Câu 14: Có bao nhiêu hình chữ nhật trong hình vẽ sau:



Lời giải

Số hình chữ nhật là $(1+2+3+4+5).(1+2+3+4)=150$

Cách tính: Xét các hình chữ nhật kích thước $m.n$

Câu 1: Tìm số hạng thứ 7 của dãy số sau đây: 1; 1; 2; 5; 29;..........

Lời giải

Quy luật $a_{n+2}=a_{n+1}^2+a_n^2$ $(n\geq 1; n\in\mathbb{N})$

Suy ra $a_7=a_6^2+a_5^2=\left(a_5^2+a_4^2\right)^2+a_5^2=\left(29^2+5^2\right)^2+29^2=750797$

Câu 2: Có 5 đôi giày màu xanh và 10 đôi giày màu đỏ bỏ chung trong cái hộp. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu chiếc giày (mà không nhìn vào trong hộp) để chắc chắn có một đôi cùng màu và đi được.

Lời giải

Theo đề bài trong hộp có 15 chiếc giày trái và 15 chiếc giày phải.
Phải lấy ít nhất $15+1=16$ chiếc giày để chắc chắn có một đôi cùng màu và đi được.

Câu 3: Có một nhóm bạn rủ nhau đi câu cá, bạn câu được ít nhất câu được $\frac{1}{9}$ tổng số cá câu được, bạn câu được nhiều cá nhất câu được $\frac{1}{7}$ tổng số cá câu được. Biết rằng số cá câu được của mỗi bạn là khác nhau. Hỏi nhóm bạn có bao nhiêu người?.

Lời giải

Giả sử có n bạn và số cá của các bạn là $a_1>a_2>a_3>......>a_n$

Ta có $9a_n=a_1+a_2+......+a_n=7a_1\Rightarrow 9a_n>na_n; 7a_1<na_1\Rightarrow n=8$

Câu 4: Tìm các số hữu tỷ x, y thỏa mãn đẳng thức: $\sqrt{x}-2\sqrt{y}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có $2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}.\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{2}.\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$=\sqrt{6}-2\sqrt{\frac{1}{2}}$

Vì $x, y\in\mathbb{R}$ nên $x=6; y=\frac{1}{2}$.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

$\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$

$\Leftrightarrow(x-2)-(x-4)-3\sqrt[3]{x-2}.\sqrt[3]{x-4}\left(\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-4}\right)=2$

$\Leftrightarrow 2-3\sqrt[3]{2(x-2)(x-4)}=2$

$\Leftrightarrow(x-2)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right..$

Câu 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(x+\sqrt{2x+y})=3-y\\x^2-2xy-y^2=2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2x+y\ge 0$

$2(x+\sqrt{2x+y})=3-y\ \Leftrightarrow(2x+y)+2\sqrt{2x+y}-3=0$

Đặt $\sqrt{2x+y}=t,t\ge 0$ ta có phương trình $t^2+2t-3=0$

$\Leftrightarrow(t-1)(t+3)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\,(\text{nhận})\\t=-3\,(\text{loại})\end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=1\\x^2-2xy-y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\x^2-y(2x+y)=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\x^2-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\x^2+2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=-3\\y=7\end{cases}\end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y)=(1;-1);\ (-3;7)$.

Câu 7: Cho các số $x,y>0$ thỏa mãn $x+\dfrac{4}{y}\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{(x+2y)(y+2x)}{x^2+y^2}$.

Lời giải

$1\ge x+\dfrac{4}{y}\ge 4\sqrt{\dfrac{x}{y}}\Rightarrow\dfrac{x}{y}\le\dfrac{1}{16}$

$P=\dfrac{(x+2y)(y+2x)}{x^2+y^2}=\dfrac{2(x^2+y^2)+5xy}{x^2+y^2}=2+\dfrac{5}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

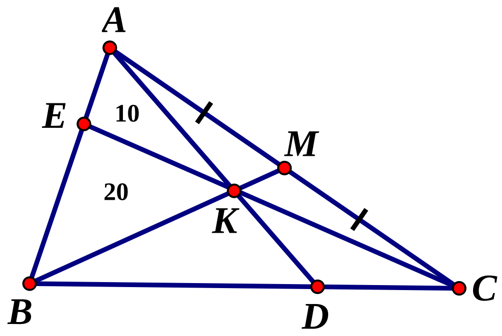
Mà $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{256x}\right)+\dfrac{255y}{256x}\ge 2.\dfrac{1}{16}+\dfrac{255}{16}=\dfrac{257}{16}$

Suy ra $P\le 2+\dfrac{5.16}{257}=\dfrac{594}{257}$

Vậy giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{594}{257}$ khi $x=\dfrac{1}{2};y=8$.

Câu 8: Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh AC và các đường thẳng AD, BM, CE đồng quy tại K nằm trong tam giác ($D \in BC; E \in AB$). Biết ΔAKE và ΔBKE có diện tích lần lượt là $10\ \text{cm}^2$ và $20\,\text{cm}^2$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải



Ta có ΔAKE và ΔBKE là hai tam giác có chung đường cao nên $\frac{S_{AKE}}{S_{BKE}} = \frac{AE}{BE} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow BE = 2AE \Rightarrow S_{CBE} = 2S_{CEA}$

M là trung điểm của AC nên $S_{ABM} = S_{CBM}$, $S_{AKM} = S_{CKM} \Rightarrow S_{BCK} = 30$

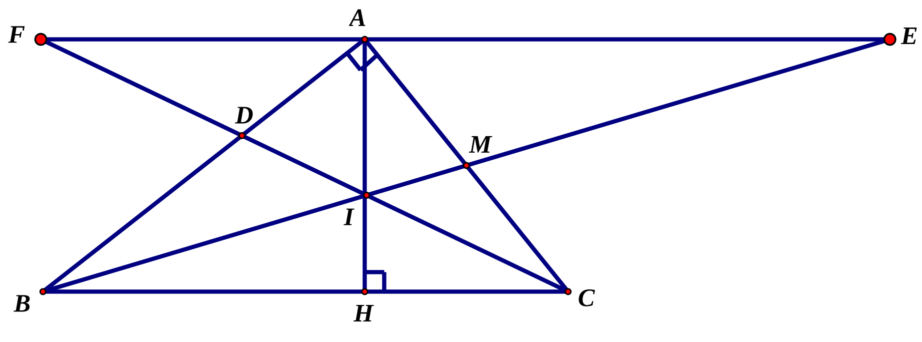
Mà $S_{CBE} = 2S_{CEA} \Rightarrow S_{BCK} + S_{BKE} = 2\left(S_{AKE} + 2S_{AKM}\right) \Leftrightarrow 50 = 2\left(10 + 2S_{AKM}\right) \Rightarrow 2S_{AKM} = 15$

$\Rightarrow S_{ACE} = 25$

Do đó $S_{ABC} = S_{BCE} + S_{ACE} = 50 + 25 = 75\ \text{cm}^2$.

Câu 9: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác trong CD đồng quy. Tính $\frac{AB}{AC}$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác trong CD.
Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BM tại E, cắt CD tại F

ΔIBH có $AE // BH$, nên $\frac{AE}{BH} = \frac{IA}{IH}$ (hệ quả của định lý Talet)

ΔIHC có $AF // CH$, nên $\frac{FA}{HC} = \frac{IA}{IH}$ (hệ quả của định lý Talet)

Suy ra $\frac{AE}{BH} = \frac{FA}{HC} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{AE}{FA}$

ΔBDC có $BC // FA$, nên $\frac{AD}{BD} = \frac{FA}{BC}$ (hệ quả của định lý Talet)

ΔBMC có $BC // EA$, nên $\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AE}$ (hệ quả của định lý Talet)

Do đó $\frac{BH}{HC}.\frac{AD}{BD}.\frac{CM}{MA} = \frac{AE}{FA}.\frac{FA}{BC}.\frac{BC}{AE} = 1$ hay $BH.AD.CM = HC.BD.MA$

Mà $MA = MC$ nên suy ra $BH.AD = HC.BD$ hay $\frac{BH}{HC} = \frac{BD}{AD}$ (1)

mặt khác, CD là phân giác của ΔABC nên $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$ (2)

ΔABC vuông tại A, AH là đường cao có $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH.BC}{HC.BC} = \frac{BH}{HC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC}{AC}$ suy ra $AB^2 = BC.AC$

$\Rightarrow BC^2 - AC^2 = BC.AC$ (vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$)

Đặt $BC = t.AC$ (với $0 < t < 1$) ta có $(t.AC)^2 - AC^2 = t.AC.AC$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\text{nhận}) \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Suy ra $BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} AC$

Khi đó $AB^2 = BC.AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} AC.AC = AC^2.\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Câu 10: Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\sqrt{a+b} = \frac{\overline{ab}}{a+b}$.

Lời giải

Ta có với $a,b \in \mathbb{N}^*$ thì $\sqrt{a+b} = \frac{\overline{ab}}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{(a+b)^3} = \overline{ab} \Leftrightarrow (a+b)^3 = \left(\overline{ab}\right)^2$ nên $a+b$ là số chính phương.

Vì $1 \le a+b \le 18$ nên $a+b \in (1;4;9;16)$

Với $a+b=1$ ta có $\overline{ab}=1$ (loại)

Với $a+b=4$ ta có $\overline{ab}=8$ (loại)

Với $a+b=9$ ta có $\overline{ab}=27$

Với $a+b=16$ ta có $\overline{ab}=64$ (loại)

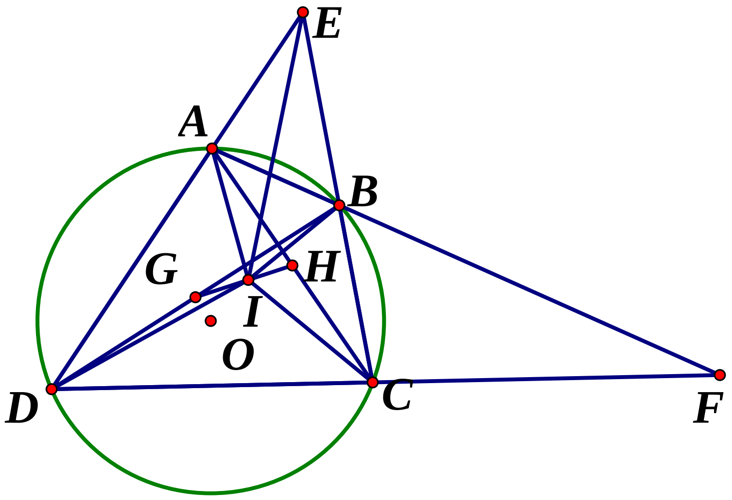
Vậy số tự nhiên cần tìm là 27

Câu 11: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn và có các cạnh đối không song song. Gọi F là giao điểm của AB và CD, E là giao điểm của AD và BC; H,G theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD. Đường phân giác góc BED cắt GH tại điểm I

a) Chứng minh rằng $IH.BD = IG.AC$.

b) Cho độ dài $CD = 2.AB$. Tìm tỉ số diện tích $\dfrac{S_{IAB}}{S_{ICD}}$.

Lời giải



a) Ta có $\Delta EBD \backsim \Delta EAC$ (g.g) nên tỉ số giữa các đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng .

$\Rightarrow \dfrac{EG}{EH} = \dfrac{BD}{AC} = \dfrac{DG}{CH} = \dfrac{DE}{EC}$

Ta có $\widehat{EDG} = \widehat{ECH}$ (cùng nhìn cung AB)

$\Rightarrow \Delta EDG \backsim \Delta ECH$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DEG} = \widehat{CEH}$

$\Rightarrow$ EI là phân giác của $\widehat{GEH}$

Do đó $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{EG}{EH} = \dfrac{GI}{HI} \Rightarrow IH.BD = IG.AC$

b) Ta có $\Delta FBD \backsim \Delta FCA$ (g.g)

$\Rightarrow \Delta FGD \backsim \Delta FHA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{GFD} = \widehat{HFA}$

$\Rightarrow \dfrac{FG}{FH} = \dfrac{GD}{HA} = \dfrac{BD}{AC} = \dfrac{IG}{IH}$

$\Rightarrow FI$ là phân giác của $\widehat{GFH}$

$\Rightarrow FI$ là phân giác của $\widehat{AFD}$

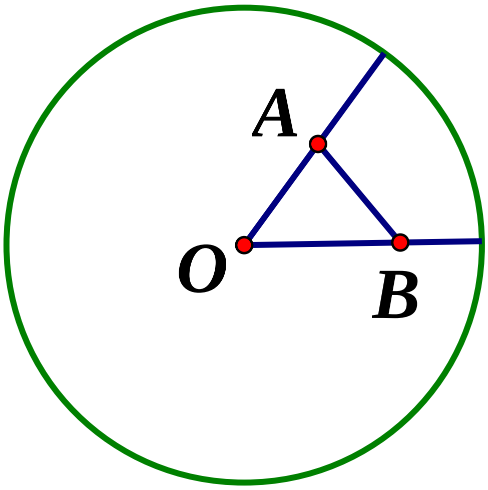
Gọi M, N là chân đường vuông góc hạ từ I lên các đường thẳng AB, CD.

Khi đó $IM = IN$

Ta có $\dfrac{S_{IAB}}{S_{ICD}} = \dfrac{\frac{1}{2}IM.AB}{\frac{1}{2}IN.CD} = \dfrac{\frac{1}{2}IM.AB}{\frac{1}{2}IN.2AB} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 12: Cho hình tròn (C) có bán kính bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương k sao cho với mọi cách vẽ k điểm bất kỳ và phân biệt thuộc hình tròn (C) thì luôn tồn tại hai điểm trong k điểm đó thỏa mãn khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Lời giải



Xét $k=7$, vẽ 7 điểm gồm 1 điểm ở tâm và 6 điểm trên cùng đường tròn tạo thành lục giác đều. Lúc đó khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ bằng 1. Suy ra $k \geq 8$

Với $k=8$, luôn tồn tại ít nhất 7 điểm không trùng tâm đường tròn. Ta kẻ các bán kính đi qua 7 điểm đó.

Khả năng 1: Nếu có 2 điểm thuộc cùng 1 bán kính thì khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 1 (vì không có điểm nào trùng tâm)

Khả năng 2: Không có 2 điểm nào cùng thuộc một bán kính, lúc đó có 7 bán kính, suy ra hai bán kính tạo với nhau một góc nhỏ hơn $60°$.

Giả sử hai bán kính đó chứa A và B. Vì góc $\widehat{AOB}$ không là góc lớn nhất của ΔOAB nên $AB < \max\{OA;OB\} \leq 1$

Vậy trường hợp $k=8$ thỏa mãn

Suy ra giá trị nhỏ nhất của k là 8.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2};b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính a^7+b^7.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Cho hàm số $y=ax+b\,(a\neq 0)$ có đồ thi là *(d)*. Lập phương trình đường thẳng *(d)*, biết *(d)* đi qua điểm $A(1;2)$ và cắt trục hoành tại điểm *B* có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm *C* có tung độ dương và thỏa mãn $(OB+OC)$ nhỏ nhất (*O* là gốc tọa độ).

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Giải phương trình: $4x^3+5x^2+1=\sqrt{3x+1}-3x$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}=5y^2-\sqrt{6x-3} \\ 2y^4\left(5x^2-17x+6\right)=6-15x \end{cases}$.

Câu 5: *(6,0 điểm)*

Cho điểm *M* thuộc nửa đường tròn *(O)* đường kính *AB* $(M\neq A,M\neq B,MA<MB)$. Tia phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt *AB* tại *C*. Qua *C* vẽ đường vuông góc với *AB* cắt đường thẳng *AM*, *BM* theo thứ tự ở *D*, *H*.

a) Chứng minh: $CA=CH$.

b) Gọi *E* là hình chiếu vuông góc của *H* trên tiếp tuyến tại *A* của *(O)*, *F* là hình chiếu vuông góc của *D* trên tiếp tuyến tại *B* của *(O)*. Chứng minh *E*, *M*, *F* thẳng hàng.

c) Gọi S_1,S_2 thứ tự là diện tích tứ giác *ACHE và BCDF*. Chứng minh $CM^2<\sqrt{S_1.S_2}$

Câu 6: *(2,0 điểm)*

Cho ba số $a,b,c\geq 1$ thỏa mãn $32abc=18(a+b+c)+27$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}.$$

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1: *(2,0 điểm)* Cho $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2};b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính a^7+b^7.

Lời giải

Ta có : $a+b=\sqrt{2}$; $ab=\dfrac{1}{4}$; $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Lại có $a^7+b^7=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-a^3b^3(a+b)$.

$$=\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]\left[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\right]-a^3b^3(a+b).$$

$$=\left[\sqrt{2^3}-3.\frac{1}{4}.\sqrt{2}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-2.\frac{1}{16}\right]-\frac{1}{16}.\sqrt{2}=\frac{5}{4}.\sqrt{2}.\frac{17}{8}-\frac{1}{64}.\sqrt{2}=\frac{169\sqrt{2}}{64}.$$

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Cho hàm số $y=ax+b$ ($a\neq 0$) có đồ thị là *(d)*. Lập phương trình đường thẳng *(d)*, biết *(d)* đi qua điểm $A(1;2)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $(OB+OC)$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}.$$

Lời giải

a) Do *(d)* đi qua điểm $A(1;2)$ nên *(d)* có dạng $y=ax+2-a$.

Có *(d)* cắt trục Ox tại $B\left(\dfrac{a-2}{a};0\right)$ và cắt trục Oy tại $C(0;2-a)$.

Vì điểm B có hoành độ dương và C có tung độ dương nên $a<0$.

Khi đó ta có $OB+OC=\dfrac{a-2}{a}+2-a=1-\dfrac{2}{a}+2-a=3+\dfrac{-2}{a}+(-a)\geq 3+2\sqrt{\dfrac{-2}{a}.(-a)}=5$.

Suy ra $OB+OC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=-\sqrt{2}$.

Vậy phương trình *(d)* có dạng: $y=-\sqrt{2}x+2+\sqrt{2}$.

b) $3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$ (1)

ĐK: $3x-16y-24\geq 0$

$3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$

$\Leftrightarrow (3x-16y-24)^2=9x^2+16x+32$

$\Leftrightarrow 9(3x-16y-24)^2=9(9x^2+16x+32)$

$\Leftrightarrow (9x-48y-72)^2=81x^2+144x+288$

$\Leftrightarrow (9x-48y-72)^2=(9x+8)^2+224$

$\Leftrightarrow (9x-48y-72)^2-(9x+8)^2=224$

$\Leftrightarrow (9x-48y-72+9x+8)(9x-48y-72-9x-8)=224$

$\Leftrightarrow (18x-48y-64)(-48y-80)=224$

$\Leftrightarrow -32.(9x-24y-32)(3y+5)=224$

$\Leftrightarrow (9x-24y-32).(3y+5)=-7$.

Với x, y nguyên thì $(3y+5)$ là ước của (-7) và chia cho 3 dư 2.

$\Rightarrow (3y+5)=-1$ hoặc $(3y+5)=-7$

+) TH1: $(3y+5)=-1 \Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=-1$

+) TH2: $(3y+5)=-7 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow x=-7$

Vậy các cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-1;-2);(-7;-4)$.

Câu 3: *(3,0 điểm)* Giải phương trình: $4x^3+5x^2+1=\sqrt{3x+1}-3x$.

Lời giải

ĐK: $x \ge \frac{-1}{3}$.

$4x^3+5x^2+1=\sqrt{3x+1}-3x$

$\Leftrightarrow 4x^3+5x^2+1-\sqrt{3x+1}+3x=0$

$\Leftrightarrow 4x^3+5x^2+x+(2x+1)-\sqrt{3x+1}=0$

$$\Leftrightarrow 4x^3+5x^2+x+\frac{(2x+1)^2-(3x+1)}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2+x)(x+1)+\frac{4x^2+x}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2+x)\left[(x+1)+\frac{1}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}\right]=0\,(*)$$

Với $x \ge \frac{-1}{3}$ thì $(x+1)+\frac{1}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}>0$

$(*) \Leftrightarrow 4x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-1}{4} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm $x=0; x=-\frac{1}{4}$.

Câu 4: *(3,0 điểm)* Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}=5y^2-\sqrt{6x-3} \\ 2y^4(5x^2-17x+6)=6-15x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \ge \frac{1}{2}$. Biến đổi phương trình thứ hai ta được:

$2y^4(5x-2)(x-3)=3(2-5x)$ suy ra $x=\frac{2}{5}$ (loại) hoặc $2xy^4+3=6y^4$

Ta đưa về hệ phương trình $\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}.\sqrt{2x-1}=5y^2-\sqrt{3} \\ 2xy^4+3=6y^4 \end{cases}$

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên chia 2 vế của phương trình thứ nhất cho y^2 và phương trình thứ hai cho y^4 có:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{y^2}\sqrt{2x-1}=5-\dfrac{\sqrt{3}}{y^2} \\ 2x-1+\dfrac{3}{y^4}=5 \end{cases}$$

Đặt $a=\sqrt{2x-1}$; $b=\dfrac{\sqrt{3}}{y^2}$ với $a\ge 0;b\ge 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+ab+b=5(1) \\ a^2+b^2=5\ (2) \end{cases}$

Ta được $a=\dfrac{5-b}{1+b}$ thay vào phương trình (2) ta có:

$\left(\dfrac{5-b}{1+b}\right)^2+b^2=5 \Leftrightarrow b^4+2b^3-3b^2-20b+20=0 \Leftrightarrow (b-1)(b-2)(b^2+5b+10)=0$.

Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

+Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\pm\sqrt[4]{3} \end{cases}$

+) Với $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x=1 \\ y=\pm\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Kết luận $(x;y)\in\left\{\left(\dfrac{5}{2};\pm\sqrt[4]{3}\right);\left(1;\pm\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Câu 5: *(6,0 điểm)* Cho điểm *M* thuộc nửa đường tròn *(O)* đường kính *AB* $(M\ne A, M\ne B, MA<MB)$. Tia phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt *AB* tại *C*. Qua *C* vẽ đường vuông góc với *AB* cắt đường thẳng *AM*, *BM* theo thứ tự ở *D*, *H*.

a) Chứng minh: $CA=CH$.

b) Gọi *E* là hình chiếu vuông góc của *H* trên tiếp tuyến tại *A* của *(O)*, *F* là hình chiếu vuông góc của *D* trên tiếp tuyến tại *B* của *(O)*. Chứng minh *E*, *M*, *F* thẳng hàng.

c) Gọi S_1,S_2 thứ tự là diện tích tứ giác *ACHE và BCDF* . Chứng minh $CM^2<\sqrt{S_1.S_2}$.

Lời giải

a) Do *MC* là phân giác của ΔAMB , theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AM}{BM}(1)$

Xét ΔBHC và ΔBAM có: $\widehat{BCH}=\widehat{BMA}=90^0$, $\widehat{ABM}$ là góc chung.

$\Rightarrow \Delta BHC$ đồng dạng với ΔBAM $\Rightarrow \dfrac{HC}{BC}=\dfrac{AM}{BM}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC=HC$.

b) Tứ giác *ACHE* là hình vuông suy ra $AH=EC$.

Gọi *AH* cắt *EC* tại *I*.

Xét ΔAMH vuông tại $M \Rightarrow MI=\dfrac{AH}{2} \Rightarrow MI=\dfrac{EC}{2} \Rightarrow \widehat{EMC}=90^0$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{CMF}=90^0$.

Vậy $\widehat{EMF} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ suy ra E, M, F thẳng hàng.

c) Do tứ giác $ACHE$ là hình vuông $\Rightarrow CH = \dfrac{CE}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow S_1 = CH^2 = \dfrac{CE^2}{2} \Rightarrow 2S_1 = CE^2$

Tương tự $2S_2 = CF^2$

Xét ΔFCE vuông tại C, đường cao CM, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$\dfrac{1}{CE^2} + \dfrac{1}{CF^2} = \dfrac{1}{CM^2}$

$\Rightarrow CM^2 = \dfrac{CE^2.CF^2}{CE^2 + CF^2} = \dfrac{2S_1S_2}{S_1 + S_2} \le \dfrac{2S_1S_2}{2\sqrt{S_1S_2}} = S_1.S_2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 \Leftrightarrow AM = BM$ (vô lý vì $AM < BM$).

Vậy $CM^2 < \sqrt{S_1.S_2}$.

Câu 6: *(2,0 điểm)* Cho ba số $a, b, c \ge 1$ thỏa mãn $32abc = 18(a+b+c) + 27$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a} + \dfrac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \dfrac{\sqrt{c^2-1}}{c}$.

Lời giải

+) Sử dụng bất đẳng thức : Với $x, y, z \ge 0$, ta luôn có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3(x+y+z)}$

Từ bất đẳng thức đã cho ta có:

$$P = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}} \le \sqrt{3\left[3 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]} = \sqrt{9 - 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$$

Suy ra $P \le \sqrt{9 - \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2}$.

Từ giả thiết $32abc = 18(a+b+c) + 27 \Leftrightarrow 18\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}\right) + \dfrac{27}{abc} = 32$ (*)

Ta có: $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} \le \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2$ và $\dfrac{1}{abc} \le \dfrac{1}{27}.\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^3$.

Đặt $t = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Từ (*) ta có:

$$18\left(\frac{t^2}{3}\right) + 27.\left(\frac{t^3}{27}\right) \ge 32 \Leftrightarrow t^3 + 6t^2 - 32 \ge 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+4)^2 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 2.$$

Suy ra $P \le \sqrt{9 - \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2} \le \sqrt{9 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$.

ĐỀ THI CHỌN HSG PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN NAM TRỰC

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$, với $x>0; x\neq 1$.

2. Cho $x+\sqrt{3}=2$, tính giá trị biểu thức $A=7\left(x^2-4x\right)^{100}+\left(x^2-4x\right)^{50}+2016$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^x+3=y^2$.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$.

Câu 4: *(2,0 điểm)*

Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

Câu 5: *(7,0 điểm)*

1. Cho đường tròn tâm O và đường thẳng (d) cắt đường tròn tâm O tại hai điểm B,C ((d) không đi qua O). Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A nằm ngoài đường tròn tâm O). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a, Chứng minh 4 điểm O,M,N,I cùng nằm trên một đường tròn và $AK.AI=AM^2$.

b, Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

2. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 1m, trong hình vuông đó đặt 55 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\dfrac{1}{9}$m. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với ít nhất bảy đường tròn.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH LONG AN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$, với $x>0; x\neq 1$.

2. Cho $x+\sqrt{3}=2$, tính giá trị biểu thức $A=7\left(x^2-4x\right)^{100}+\left(x^2-4x\right)^{50}+2016$.

Lời giải

1. Ta có $P=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}^{8}-1\right)}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$x-\sqrt{x}+1.$$

2. Ta có: $x+\sqrt{3}=2\Rightarrow x-2=-\sqrt{3}\Rightarrow (x-2)^2=3\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow x^2-4x=-1$. Suy ra:

$$A=7(-1)^{100}+(-1)^{50}+2016=2024$$

Câu 2: *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^x+3=y^2$.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

Lời giải

1. Với $x=0$ thì $y=2$ hoặc $y=-2$.

Với $x=1$ thì $y^2=5$ (loại).

Với $x\geq 2$ thì VT chia 4 dư 3. Vì VT là số tự nhiên lẻ nên y là số tự nhiên lẻ. Từ đó suy ra VP chia 4 dư 1 $\Rightarrow$ vô lí.

Vậy nghiệm tự nhiên của phương trình là $(x;y)=(0;2)$.

2. Để phương trình có nghiệm thì $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5\geq 0\Leftrightarrow x\geq \dfrac{5}{3}$. Khi đó ta có:

$$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0\Leftrightarrow x=2$$

Do $\forall x>\dfrac{5}{3}$ ta chứng minh được $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 2xy-z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 2xy-(2-x-y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y & (1) \\ (x-2)^2+(y-2)^2=0 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta giải được $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) ta được $z=-2$.

Câu 4: *(2,0 điểm)*

Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

Lời giải

Vì $x,y,z>0$ nên áp dụng BĐT Côsi đối với hai số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}}=2\frac{x}{2}=x \quad (1).$$

Tương tự ta có:

$$\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\ge y \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge z \quad (3)$$

Cộng $(1)+(2)+(3)$, ta được:

$$P\ge x+y+z-\frac{x+y+z}{2}=1$$

Dấu “=” xảy ra $x=y=z=\frac{2}{3}$. Vậy $\min P=1\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

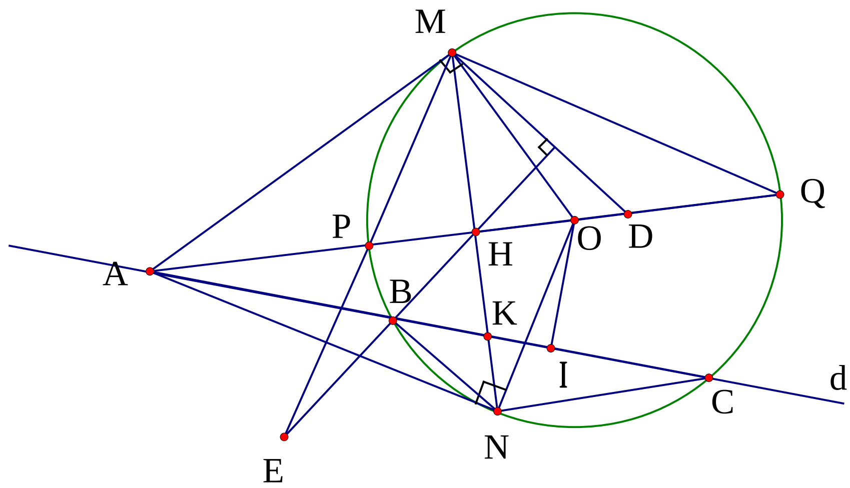
1. Cho đường tròn tâm O và đường thẳng (d) cắt đường tròn tâm O tại hai điểm B,C ((d) không đi qua O). Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A nằm ngoài đường tròn tâm O). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a, Chứng minh 4 điểm O,M,N,I cùng nằm trên một đường tròn và $AK.AI=AM^2$.

b, Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

2. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 1m, trong hình vuông đó đặt 55 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\frac{1}{9}$m. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với ít nhất bảy đường tròn.

Lời giải



a, * Ta có I là trung điểm BC (dây BC không đi qua O) nên $OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIA} = 90^o$.

Suy ra I thuộc đường tròn đường kính AO (1).

Ta có $\widehat{AMO} = 90^o$ (do AM là tiếp tuyến của (O)) nên M thuộc đường tròn đường kính AO (2).

Ta có $\widehat{ANO} = 90^o$ (do AN là tiếp tuyến của (O)) nên N thuộc đường tròn đường kính AO (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra 5 điểm A, M, N, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường AO.

* Ta có AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác của góc $\widehat{MON}$. Mà ΔOMN cân tại O nên $OA \perp MN$.

Ta có ΔAMO vuông tại M có đường cao MH nên suy ra $AH.AO = AM^2$.

Ta có ΔAHK đồng dạng với ΔAIO (vì $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^o$ và $\widehat{OAI}$ chung) nên $AK.AI = AH.AO$.

Vậy $AK.AI = AM^2$. (đpcm)

b, Ta có M thuộc đường tròn (O) nên $\widehat{PMQ} = 90^o$.

Xét ΔMHE và ΔQDM có $\widehat{MEH} = \widehat{DMQ}$ (cùng phụ với $\widehat{DMP}$), $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$ (cùng phụ với $\widehat{MPO}$).

Suy ra $\Delta MHE \sim \Delta QDM$. Do đó ta được $\frac{ME}{MQ}=\frac{MH}{DQ}$.

Tương tự ta có $\Delta PMH \sim \Delta MQH \Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{MH}{HQ}=\frac{MH}{2DQ} \Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{1}{2}\frac{ME}{MQ}$.

Suy ra $ME=2MP$. Vậy P là trung điểm ME . (đpcm).

* Kẻ 9 đường thẳng song song cách đều chia hình vuông thành 10 hình chữ nhật có chiều rộng là $0,1$ m.

Vì đường kính của mỗi đường tròn lớn hơn $0,1$ m nên mỗi đường tròn bị ít nhất một trong 9 đường thẳng vừa kẻ cắt.

Nếu mỗi đường thẳng chỉ cắt không quá 6 đường tròn thì số đường tròn không quá $9.6=54$.

Vì có 55 đường tròn nên ít nhất phải có 1 đường thẳng cắt 7 đường tròn.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 2016 - 2017

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

2) Cho $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$.

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B.

Câu 2: (4,0 điểm)
Giải phương trình

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$.

Câu 3: (3,0 điểm)

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-25=y(y+6)$.

Câu 4: (7,0 điểm)
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh $\widehat{CIJ}=\widehat{CBH}$.

b) Chứng minh ΔCJH đồng dạng với ΔHIB.

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh $HE.HD = HC^2$.

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

2) Cho $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$.

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B.

Lời giải

1) Ta có $A=\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

$$A=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+3\right)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+3\right)}{2+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}+\frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+3\right)}{\sqrt{5}+3}+\frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{3-\sqrt{5}}$$

$$=2\sqrt{2}.$$

2. $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

a) ĐKXĐ: $x\ge 0$

$$A=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^3}-1\right)}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^3}+1\right)}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}=-2\sqrt{x}.$$

b) $B=A+x-1=-2\sqrt{x}+x-1=x-2\sqrt{x}-1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2-2\ge -2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

Câu 2: (4,0 điểm)

Giải phương trình

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$.

Lời giải

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$.

ĐKXĐ : $x\ge 1$.

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\frac{x+3}{2}\ (*)$$

+) Nếu $x\ge 2$ phương trình (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\dfrac{x+3}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=\dfrac{x+3}{2}\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=x+3$

$\Leftrightarrow 16(x-1)=x^2+6x+9\Leftrightarrow x^2-10x+25=0\Leftrightarrow (x-5)^2=0\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn).

+) Nếu $1\le x<2$ phương trình (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=\dfrac{x+3}{2}\Leftrightarrow 2=\dfrac{x+3}{2}\Leftrightarrow 4=x+3\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=5$.

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$.

Đặt $u=\sqrt{2x^2+5x+12}, v=\sqrt{2x^2+3x+2}\ (u>0, v>0)$

$\Rightarrow u^2=2x^2+5x+12, v^2=2x^2+3x+2\Rightarrow u^2-v^2=2x+10=2(x+5)$.

Từ (1) $\Rightarrow 2(u+v)=(u^2-v^2)\Leftrightarrow (u+v)(u-v-2)=0\ (2)$

Vì $u>0, v>0$, từ (2) suy ra: $u-v-2=0$. Vì vậy $\sqrt{2x^2+5x+12}=\sqrt{2x^2+3x+2}+2$ (3)

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình

$$2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ 2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ 7x^2+6x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ (7x^2-7)+(6x+6)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)(7x-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x=-1, x=\dfrac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1, x=\dfrac{1}{7}(tm)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1,\ x=\dfrac{1}{7}$.

Câu 3: (3,0 điểm)

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k+3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-25=y(y+6)$.

Lời giải

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k+3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

Giả sử $2016k+3=a^3$ với k và a là số nguyên.

Suy ra: $2016k=a^3-3$.

Ta chứng minh a^3-3 không chia hết cho 7.

Thật vậy: Ta biểu diễn $a=7m+r$, với $r \in \{0;1;-1;2;-2;3;-3\}$.

Trong tất cả các trường hợp trên ta đều có a^3-3 không chia hết cho 7

Mà $2016k$ luôn chia hết cho 7, nên $a^3-3 \neq 2016k$. Ta suy ra điều phải chứng minh.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-25=y(y+6)$.

Từ $x^2-25=y(y+6) \Leftrightarrow (y+3+x)(y+3-x)=-16$

Để ý trong phương trình chỉ chứa ẩn số x với số mũ bằng 2, do đó ta có thể hạn chế giải với x là số tự nhiên.

Khi đó: $y+3+x \geq y+3-x$.

Ta có $(y+3+x)+(y+3-x)=2(y+3)$ là số chẵn

Suy ra 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có tích của chúng là số chẵn, vậy 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ là 2 số chẵn.

Ta chỉ có cách phân tích -16 ra tích của 2 số chẵn sau đây:

$-16 = 8.(-2) = 4.(-4) = 2.(-8)$ trong đó thừa số đầu bằng giá trị $(y+3+x)$.

Khi $y+3+x=8$, $y+3-x$ = -2 ta có $x=5, y=0$.

Khi $y+3+x=4$, $y+3-x$ = -4 ta có $x=4, y=-3$.

Khi $y+3+x=2$, $y+3-x$ = -8 ta có $x=5, y=-6$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:

$(x,y) \in (x;y) \in \{(\pm5,0);(\pm5,-6);(\pm4,-3)\}$.

Câu 4: (7,0 điểm)
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

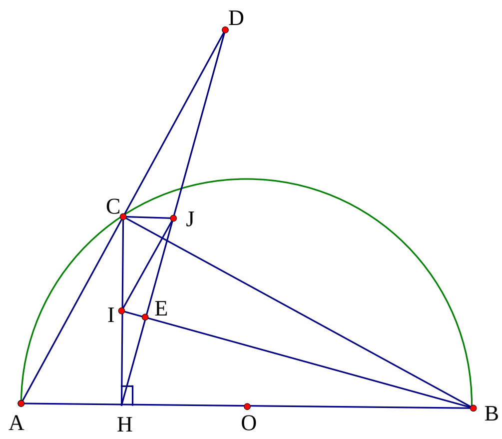
a) Chứng minh $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$.

b) Chứng minh ΔCJH đồng dạng với ΔHIB.

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh $HE.HD = HC^2$.

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a)+ Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$

Suy ra $BC \perp CD$ (1)

+ Lập luận để chỉ ra $IJ \parallel CD$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$

+ Suy ra $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$ (cùng phụ với $\widehat{HCB}$) (3)

b)+) Trong Δ vuông CBH ta có: $\tan\widehat{CBH} = \dfrac{CH}{BH}$ (4)

+ Lập luận chứng minh được $CJ \parallel AB$

+ Mà $CH \perp AB$ (gt)

+ Suy ra $CJ \perp CH$

+) Trong tam giác vuông CIJ ta có $\tan\widehat{CIJ} = \dfrac{CJ}{CI} = \dfrac{CJ}{HI}(CI = HI)$ (5)

+ Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \dfrac{CH}{HB} = \dfrac{CJ}{HI}$

+ Xét ΔCJH và ΔHIB có $\widehat{HCJ} = \widehat{BHI} = 90^0$ và $\dfrac{CH}{HB} = \dfrac{CJ}{HI}$ (cmt)

+ Nên ΔCJH đồng dạng với ΔHIB

c)+ Lập luận để chứng minh được $\widehat{HEI} = 90^0$

+ Chứng minh được ΔHEI đồng dạng với ΔHCJ

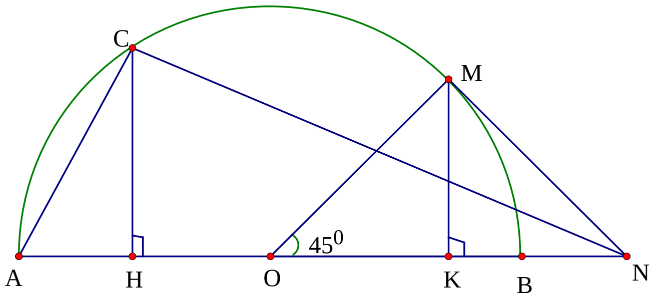
+ Suy ra $\dfrac{HE}{HC}=\dfrac{HI}{HJ}$

+ Suy ra $HE.HJ=HI.HC$

+ Mà $HJ=\dfrac{1}{2}HD;\;\; HI=\dfrac{1}{2}HC$

+ Suy ra $HE.HD=HC^2$

d)



+ Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOM}=45^0$

+ Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định

+ Kẻ $MK\perp AB$ tại K.

+ Chứng minh được ΔMON vuông cân tại M và $KM=KN$ suy ra $\widehat{ANC}=45^{\circ}$.

Xét $C\equiv M$

Ta có $C\equiv M$ nên $H\equiv K$

Do đó $AH+CH<AH+HN=AN$ $\;AH+CH=AK+KM=AK+KN=AN$ (không đổi)

+ Xét C khác M.

Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM

Do đó $\widehat{ANC}<\widehat{ANM}=45^0$

+ ΔHNC có $\widehat{NHC}=90^0$

nên $\widehat{HNC}+\widehat{HCN}=90^0$

Mà $\widehat{HNC}<45^0$ nên $\widehat{HCN}>45^0$

Suy ra $\widehat{HNC}<\widehat{HCN}$

Suy ra $HC<HN$

+ Do đó $AH+CH<AH+HN=AN$

+ Vậy Khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOC}=45^0$ thì $AH+CH$

đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c\geq 2\sqrt{a(b+c)}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}$.

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq\frac{2b}{a+b+c};\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c}{a+b+c}$

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+c\\b=c+a\\c=a+b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0$ (trái với giả thiết).

Vậy dấu " = " không xảy ra, nên $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

-------------------HẾT--------------------

ĐỀ THI HSG THÀNH PHỐ VINH NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1:

a) Cho $a+b+c=0;\ a,b,c\neq 0.$ Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2-b^2}.$$

b) Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+5x+3}-6}{\sqrt{x^3-2x^2-7x+3}}$ tại $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}.$

Câu 2:

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x-y-xy=5 \end{cases}.$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $(2x+5y+1)\left(2^{|x|}+x^2+x+y\right)=105.$

Câu 3:

a) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2014^{2014}+1\right)$ chia hết cho $n^3+2012n.$

b) Cho $x,\ y$ là các số nguyên thỏa mãn $2x^2+x=3y^2+y.$
Chứng minh $x-y;2x+2y+1;3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

Câu 4: Cho đường tròn $(O;R)$ và một đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Trên d lấy một điểm M bất kỳ, qua M kẻ các tiếp tuyến $MA,\ MB$ với đườn tròn ($A,\ B$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AOC, tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại E.

a) Chứng minh tam giác BCM đồng dạng với tam giác BEO;

b) Chứng minh CM vuông góc với OE;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của dây AB và diện tích tứ giác $MAOB$.

Câu 5: Giả sử a,b,c là những số thực thỏa mãn $a,b,c\neq 0$ và $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$

Chứng minh rằng $\dfrac{a^6+b^6+c^6}{a^3+b^3+c^3}=abc.$

……………….HẾT…………….

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI 9 VINH NĂM 2016-2017

Câu 1

a) Cho $a+b+c=0;\ a,b,c\neq 0.$ Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2-b^2}.$$

b) Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{x^3+x^2+5x+3}-6}{\sqrt{x^3-2x^2-7x+3}}$$ tại $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}.$

Lời giải

a) Từ $a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c$

Bình phương hai vế ta được $a^2+b^2+2ab=c^2$ nên $a^2+b^2-c^2=-2ab$

Tương tự : $b^2+c^2-a^2=-2bc$ và $c^2+a^2-b^2=-2ac$

Do đó $A=\frac{ab}{-2ab}+\frac{bc}{-2bc}+\frac{ca}{-2ca}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

Vậy $A=-\frac{3}{2}.$

b) Ta có $x\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=2-1=1$

Suy ra $x\sqrt[3]{2}=x+1\Rightarrow 2x^3=(x+1)^3$ hay $x^3=3x^2+3x+1$

Do đó

$$P=\frac{\sqrt{3x^2+3x+1+x^2+5x+3}-6}{\sqrt{3x^2+3x+1-2x^2-7x+3}}=\frac{\sqrt{4x^2+8x+4}-6}{\sqrt{x^2-4x+4}}$$

$$=\frac{\sqrt{4(x+1)^2}-6}{\sqrt{(x-2)^2}}=\frac{2|x+1|-6}{|x+2|}=\frac{2(x+1)-6}{x-2}=\frac{2x-4}{x-2}=2.$$

(vì $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}>2$)

Vậy $P=2$ tại $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}.$

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\ x-y-xy=5\end{cases}.$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $(2x+5y+1)\left(2^{|x|}+x^2+x+y\right)=105.$

Lời giải

a) Ta có : $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\ x-y-xy=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)^2+3xy=3\\ x-y-xy=5\end{cases}$

Đặt $a=x-y$, $b=xy$ (1)

Hệ phương trình trên trở thành $\begin{cases}a^2+3b=3\\ a-b=5\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=-6\\ b=-11\end{cases}$

Với $a=3,\ b=-2$ thay vào (1) ta được

$\begin{cases}x-y=3\\ xy=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ và $\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$

Với $a=-6,b=-11$ thay vào (1) ta được

$\begin{cases}x-y=-6\\xy=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-6\\y^2-6y+11=0\end{cases}$. Hệ phương trình vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases};\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$.

b) $(2x+5y+1)\left(2^{|x|}+x^2+x+y\right)=105.$

Vì 105 là số lẻ nên $2x+5y+1$ và $2^{|x|}+x^2+x+y$ phải là các số lẻ

Từ $2x+5y+1$ là số lẻ mà $2x+1$ là số lẻ nên $5y$ là số chẵn suy ra y chẵn

$2^{|x|}+x^2+x+y$ là số lẻ mà $x^2+x=x(x+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên là số chẵn, y cũng chẵn nên $2^{|x|}$ là số lẻ. Điều này xảy ra khi $x=0$

Thay $x=0$ vào phương trình đã cho ta được:

$(5y+1)(y+1)=105\Leftrightarrow 5y^2+6y-104=0\Leftrightarrow 5y^2-20y+26y-104=0$

$\Leftrightarrow 5y(y-4)+26(y-4)=0\Leftrightarrow(5y+26)(y-4)=0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-26}{5}$ (loại) hoặc $y=4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)=(0;4)$.

Câu 3.

a) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2014^{2014}+1\right)$ chia hết cho $n^3+2012n.$

b) Cho $x,\ y$ là các số nguyên thỏa mãn $2x^2+x=3y^2+y.$ Chứng minh $x-y;2x+2y+1;3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

Lời giải

a) Giả sử tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2014^{2014}+1\right)$ chia hết cho $n^3+2012n.$

Ta có $n^3+2012n=n^3-n+2013n=n(n-1)(n+1)+2013n$

Vì $n-1,n,n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3

Suy ra $n(n-1)(n+1)\vdots 3$ mà $2013\vdots 3$ nên $\left(n^3+2012n\right)\vdots 3(1)$

Mặt khác $2014^{2014}+1=(2013+1)^{2014}+1$ chia cho 3 dư 2 vì $2013\vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) dẫn đến điều giả sử trên là vô lý, tức là không có số nguyên nào thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho

b) Từ: $2x^2+x=3y^2+y$ (1) $\Rightarrow 2x^2-2y^2+x-y=y^2\Rightarrow(x-y)(2x+2y+1)=y^2(2)$

Mặt khác từ (1) ta có: $3x^2-3y^2+x-y=x^2\Leftrightarrow(x-y)(3x+3y+1)=x^2$

$\Rightarrow(x-y)^2(2x+2y+1)(3x+3y+1)=x^2y^2$

$\Rightarrow(2x+2y+1)(3x+3y+1)$ là số chính phương (3)

Gọi $(2x+2y+1;3x+3y+1)=d$

$\Rightarrow(2x+2y+1)\vdots d;\ (3x+3y+1)\vdots d\Rightarrow(3x+3y+1)-(2x+2y+1)=(x+y)\vdots d$

$\Rightarrow 2(x+y)\vdots d\Rightarrow(2x+2y+1)-2(x+y)=1\vdots d$ nên d = 1

$\Rightarrow(2x+2y+1;3x+3y+1)=1$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là số chính phương

Lại có từ (2) suy ra $(x-y)(2x+2y+1)$ là số chính phương nên $x-y$ cũng là số chính phương.

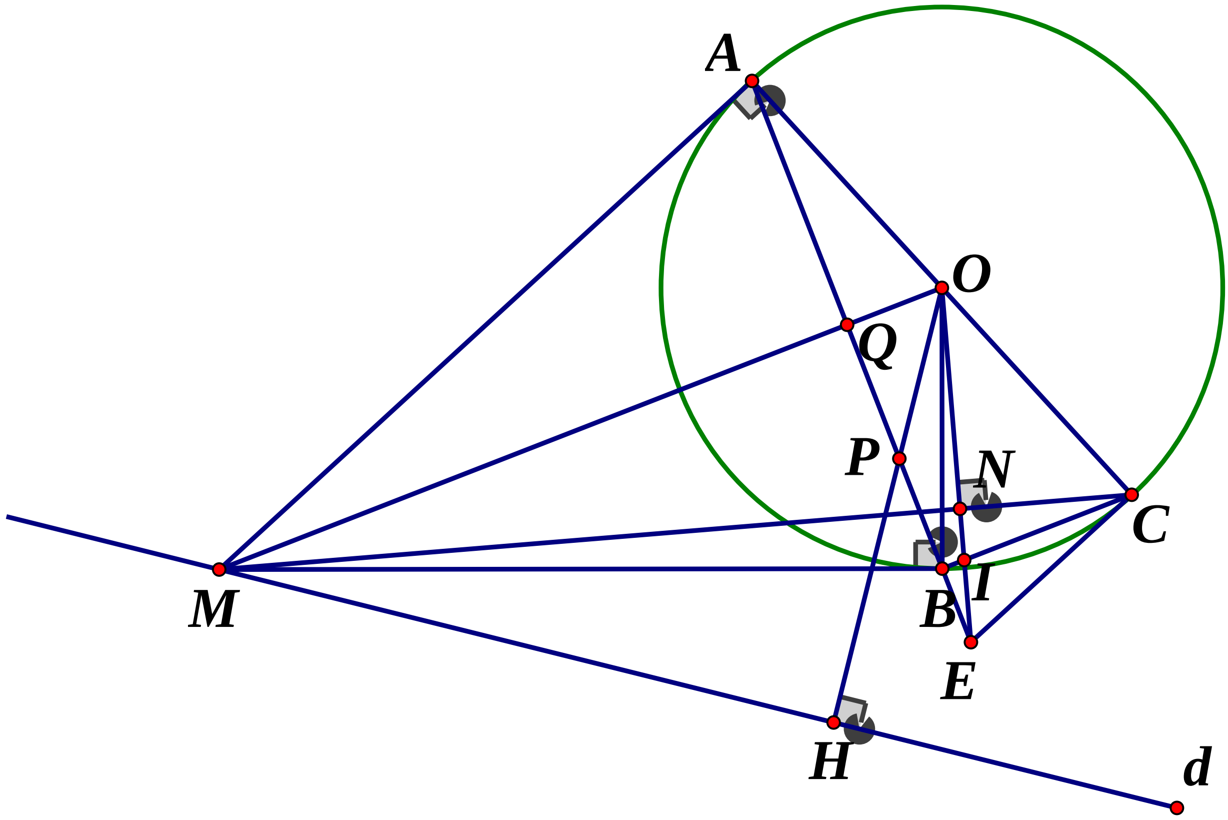
Vậy $2y^2 + x = 3y^2 + y$ thì $x - y; 2x + 2y + 1$ và $3x + 3y + 1$ đều là các số chính phương.

Câu 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và một đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Trên d lấy một điểm M bất kỳ, qua M kẻ các tiếp tuyến $MA,\ MB$ với đườn tròn ($A,\ B$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AOC, tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại E.

a) Chứng minh tam giác BCM đồng dạng với tam giác BEO;

b) Chứng minh CM vuông góc với OE;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của dây AB và diện tích tứ giác $MAOB$.



a) Gọi Q là giao điểm của AB với OM

Ta có AM //CE (cùng vuông góc với AC)

Suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{MAB}$ (so le trong)

Mà $\widehat{ABC} = 90^0; \widehat{AQM} = 90^0$ và $\widehat{AMO} = \widehat{OMB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{OMB} = \widehat{BCE}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow \tan \widehat{BCE} = \tan \widehat{OMB} \Rightarrow \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{OB}{MB} \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{OB}{BE}$ (1)

Lại có $\widehat{MBA} = \widehat{OBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ABO}$)

Nên $\widehat{MBC} = \widehat{OBE}$ (cùng $= 90^0 + \widehat{OBC}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta MBC \# \Delta OBE\,(c.g.c)$

b) Từ $\Delta MBC \# \Delta OBE \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{BEO}$

Gọi I và N lần lượt là giao điểm của OE với BC và MC

$\Delta BIE \# \Delta NIC\,(g.g) \Rightarrow \widehat{IBE} = \widehat{INC}$ mà $\widehat{IBE} = 90^0$

Nên $\widehat{INC} = 90^0$. Vậy $CM \perp OE$

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d. P là giao điểm của AB với OH

Ta có $\Delta OQP \# \Delta OHM\,(g.g) \Rightarrow \frac{OQ}{OH} = \frac{OP}{OM}$

$\Rightarrow QO.OM = OP.OH = OA^2 = R^2 \Rightarrow OP = \frac{R^2}{OH}$

Mà O và d cố định $\Rightarrow OH$ không đổi nên OP không đổi

Lại có $AB = 2AQ = 2\sqrt{OA^2 - OQ^2}$ mà $OQ \le OP$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{OA^2 - OP^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{OH^2}} = \frac{2R}{OH}.\sqrt{OH^2 - R^2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow Q \equiv P \Leftrightarrow M \equiv H$

Vậy GTNN của $AB = \frac{2R}{OH}.\sqrt{OH^2 - R^2} \Leftrightarrow M \equiv H$

*) Vì $MO \perp AB$ nên $S_{AOBM} = \frac{1}{2}AB.OM = AQ.OM$

Vẽ dây cung A_1B_1 vuông góc với OH tại P, do P và (O) cố định nên A_1B_1 không đổi

Vì $OP \ge OQ \Rightarrow AB \ge A_1B_1$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây).

Mà $OM \ge OH \Rightarrow S_{AOBM} \ge \frac{1}{2}A_1B_1.OH$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$

Vậy GTNN của $S_{AOBM} = \frac{1}{2}A_1B_1.OH$ khi và chỉ khi $M \equiv H$.

Câu 5. Giả sử a,b,c là những số thực thỏa mãn $a,b,c \ne 0$ và $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0.$ Chứng minh rằng $\frac{a^6+b^6+c^6}{a^3+b^3+c^3} = abc.$

Lời giải

Do đó $*a^6+b^6+c^6 = (3abc)^2 - 2.3a^2b^2c^2 = 3a^2b^2c^2$

Vậy $\frac{a^6+b^6+c^6}{a^3+b^3+c^3} = \frac{3a^2b^2c^2}{3abc} = abc.$

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2016-2017

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

Với x ≥ 0, x ≠ 1.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \dfrac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

b) Cho $a;b;c$ là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$

b) Cho $x; y$ là 2 số thực thoả mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: CM vuông góc với EF.

b) Chứng minh: $NB.DE = a^2$ và $B; D; M$ thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác $AEFC$ gấp 3 lần diện tích của hình vuông $ABCD$.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

-------------- *Hết*------------

Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

Bài 1: **(4,0 điểm)**

Điều kiện: x ≥ 0, x ≠ 1.

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}=\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}-1}{2}=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b)Với x ≥ 0, x ≠ 1. Ta có:

$$P=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)=0$$

Vì $\sqrt{x}+3>0$ nên $\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow x=4$ (t/m)

Vậy P = $\frac{2}{7}$ khi x = 4

c)Vì $x\geq0\Rightarrow x+\sqrt{x}+1\geq1$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}\leq2\Leftrightarrow0<P\leq2\Leftrightarrow P(P-2)\leq0\Leftrightarrow P^2-2P\leq0\Leftrightarrow P^2\leq2P$$

Dấu “=” xảy ra khi P = 2 ⇔ x = 0

Vậy $P^2 \leq 2P$

Bài 2: **(4,0 điểm)**

$$2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy\Leftrightarrow 2y^2x+x+y+1-x^2-2y^2-xy=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(2y^2-y-x\right)=-1$$

Vì x, y ∈ Z nên x - 1 ∈ Ư(-1) = $\{1;-1\}$

+) Nếu x – 1 = 1 ⇒ x = 2 Khi đó $2y^2$ - y – 2 = - 1

⇔ y = 1 (t/m)hoặc y = $\frac{-1}{2}\notin$ Z (loại).

+) Nếu x – 1 = -1 $\Rightarrow$ x = 0 .

Khi đó $2y^2 - y = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (t/m)hoặc $y = \frac{-1}{2} \notin Z$ (loại)

Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

b)Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = 0$

Vì $a,b,c \neq 0$ nên $a+b+c=0$.

$\Rightarrow a+b=-c \Leftrightarrow (a+b)^3 = (-c)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b) = -c^3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$

Vậy $a^3+b^3+c^3 \vdots 3$ với $a,b,c \in Z$.

Lưu ý: Nếu học sinh sử dụng hằng đẳng thức.

$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

mà không chứng minh thì trừ 0,5 điểm.

Bài 3: (4,0 điểm)

a)Đkxđ: $\forall x \in R$.

$\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2+6x+9} = 10x-20$

Vì $\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2+6x+9} \geq 0$ với $\forall x \Rightarrow 10x-20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Ta có: $\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2+6x+9} = 10x-20$

$|2x+5|+|x+3| = 10x-20 \Leftrightarrow 2x+5+x+3 = 10x-20$

$\Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow x = 4(t/m)$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=4$.

b) $x^2+2y^2+2xy+7x+7y+10=0$.

$\Leftrightarrow (x+y)^2+7(x+y)+10 = -y^2 \Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+5) = -y^2 \leq 0$

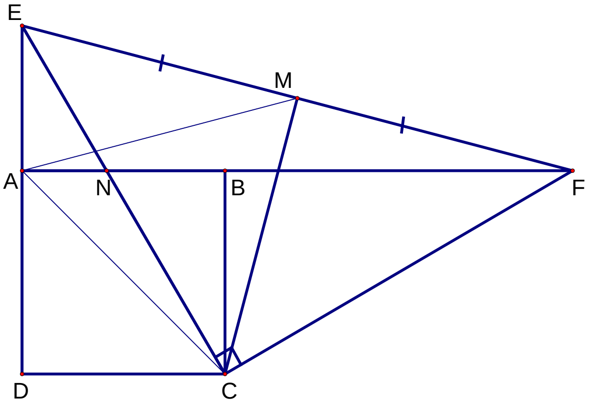
$\Leftrightarrow -4 \leq x+y+1 \leq -1$

- $x+y+1=-4$ khi $x=-5$; $y=0$.
- $x+y+1=-1$ khi $x=-2$; $y=0$.

Vậy $A_{\min} = -4$ khi $x=-5$; $y=0$

$A_{\max} = -1$ khi $x = -2$; $y = 0$.

Bài 4: (6,0 điểm)



Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{BCF}$ (cùng phụ với $\widehat{ECB}$).

Chứng minh được $\Delta EDC = \Delta FBC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) .

$\Rightarrow CE = CF \Rightarrow \Delta ECF$ cân tại C

Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp \text{EF}$.

* Vì $\Delta EDC = \Delta FBC \Rightarrow ED = FB$.

ΔNCF vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$BC^2 = NB.BF \Rightarrow a^2 = NB.DE$ (đpcm).

* $\Delta C\text{EF}$ vuông tại C có CM là đường trung tuyến nên $CM = \dfrac{\text{EF}}{2}$

$\Delta A\text{EF}$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = \dfrac{\text{EF}}{2}$

$\Rightarrow CM = AM \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC.

$\Rightarrow B, D, M$ thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC (đpcm).

Đặt $DE = x\,(x > 0) \Rightarrow BF = x$.

$$S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2}\text{AF}(AE + CB) = \frac{1}{2}(AB + BF).(AE + AD)$$

$$= \frac{1}{2}(a + x).DE = \frac{1}{2}(a + x)x$$

$$S_{\Delta ACFE} = 3.S_{\Delta ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + x)x = 3a^2 \Leftrightarrow 6a^2 - ax - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - x)(3a + x) = 0$$

Do $x > 0$; $a > 0$; $\Rightarrow 3a + x > 0 \Rightarrow 2a - x = 0 \Leftrightarrow x = 2a$.

$\Leftrightarrow A$ là trung điểm của $DE \Leftrightarrow AE = a$.

Vì $AE//\text{BC}$ nên $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AE}{BC} = 1$.

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Vậy với N là trung điểm của AB thì $S_{\Delta ACFE} = 3.S_{\Delta ABCD}$.

Bài 5: (1 điểm)

* Vì $a,b,c>0$ nên $\dfrac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \dfrac{a}{a+b} < \dfrac{a+c}{a+b+c}$.

Tương tự: $\dfrac{b}{b+c} < \dfrac{b+a}{a+b+c}$; $\dfrac{c}{c+a} < \dfrac{c+b}{a+b+c}$.

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \qquad (1)$$

* Ta có: $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} = \dfrac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$

Vì $a,b,c>0$ nên theo bất đẳng thức Cô- si ta có:

$$\frac{a+(b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

Tương tự: $\dfrac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\dfrac{b}{a+c}}$; $\dfrac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\dfrac{c}{b+a}}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b+c$; $b = c+a$; $c = a+b$.

tức là $a = b = c$ (vô lý).

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \ (2).$$

Từ (1); (2) ta có đpcm.

ĐỀ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ BẮC GIANG NĂM HỌC 2017-2018
(BẢNG A)

Bài 1. (5 điểm)

a/ Cho biểu thức $M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$

Rút gọn M và tìm x để $M>1$

b/ Cho a, b, c >0 thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Tính $H=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a}+\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Bài 2. : (4 điểm)

a/ Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=6x^2$

b/ Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3};x^2+2\sqrt{3};x-\frac{2}{x}$ là số nguyên

Bài 3. (4 điểm)

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương

b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$

Bài 4. (6 điểm)

Cho đoạn thẳng $OA=R$, vẽ đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy H bấy kỳ sao cho $AH<R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$. Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB=AC=R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M\in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N\in OC$)

a/ Chứng minh $OM.OB=ON.OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB.OC=2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Bài 5. (1 điểm)

cho dãy số $n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$ với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ BẮC GIANG NĂM HỌC 2017-2018 (BẢNG A)

Bài 1. (5 điểm)

a/ Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$

Rút gọn M và tìm x để $M>1$

b/ Cho a, b, c >0 thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Tính $H=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Lời giải

a/ Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$

Rút gọn M và tìm x để M>1

$$*M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}+\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\left(\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}:\frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-11\right)}:\frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-11\right)}:\frac{3x-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{3(x-3)}=\frac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

Vậy M=$\dfrac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}$ với $x\ge 0; x\ne 1,3,4$

$$*M>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}-1>0\Leftrightarrow\frac{4-2\sqrt{x}}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}>0\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}>0$$

Ta có $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}2-\sqrt{x}<0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 1<x<4$. Vậy M>1 khi 1<x<4 và x$\ne$3 b/Cho a, b, c >0 thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Tính H= $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a}+\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

- Vì $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ nên $1+c=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+c=...=\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$
- Tương tự ta có $1+a=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right);1+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$
- Vậy $H=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=0$$

Bài 2.

a/ Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=6x^2$

b/ Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3};x^2+2\sqrt{3};x-\frac{2}{x}$ là số nguyên

Lời giải

a/ Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=6x^2$ ĐK: $x^2\ge\sqrt{\frac{5}{6}}$

Vì $x^2\ge\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow\frac{5}{x^2}>0;6x^2-1>0$, theo côsi ta có

$$\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}=\sqrt{\frac{5}{x^2}\left(6x^2-1\right)}\le\frac{\frac{5}{x^2}+\left(6x^2-1\right)}{2}$$

Dấu = có khi $\frac{5}{x^2}=6x^2-1\Leftrightarrow x=\pm1$

Vì $x^2\ge\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow 6x^2-\frac{5}{x^2}\ge0$, theo côsi ta có $\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=\sqrt{(6x^2-\frac{5}{x^2})\cdot1}\le\frac{(6x^2-\frac{5}{x^2})+1}{2}$

Dấu = có khi $6x^2-\frac{5}{x^2}=1\Leftrightarrow x=\pm1$

Vây ta có $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}\le\frac{\frac{5}{x^2}+6x^2-1+6x^2-\frac{5}{x^2}+1}{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}\le6x^2$ Dấu = có khi $\Leftrightarrow x=\pm1$

Vậy x= ± 1 là nghiệm phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}}+\sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}}=6x^2$

b/ Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3}; x^2+2\sqrt{3}; x-\frac{2}{x}$ là số nguyên

Đặt $a=x-\sqrt{3}; b=x^2+2\sqrt{3}; c=x-\frac{2}{x}$ với $a,b,c\in Z$

Từ $a=x-\sqrt{3}\Rightarrow x=a+\sqrt{3}$; từ $b=x^2+2\sqrt{3}\Rightarrow x^2=b-2\sqrt{3}$, nên ta có

$\left(a+\sqrt{3}\right)^2=b-2\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2+2\sqrt{3}a+3=b-2\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(a+1)=b-a^2-3$

-Nếu $a+1\neq 0\Rightarrow a\neq -1\Rightarrow 2\sqrt{3}=\frac{b-a^2-3}{a+1}$, vì $a,b\in Z\Rightarrow\frac{b-a^2-3}{a+1}\in Q\Rightarrow 2\sqrt{3}\in Q\Rightarrow$ VL

Vậy $a+1\neq 0$ nên ta có $\begin{cases}a+1=0\\ b-a^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=4\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}-1$

Với $x=\sqrt{3}-1$ ta có $a=-1; b=4$ và $c=-2$ nguyên, thỏa mãn đầu bài

Bài 3. (4 điểm)

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương

b/ Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$

Lời giải

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương

Vì $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3+14x^2+9x-6=k^2$ với $k\in N$

Ta có $4x^3+14x^2+9x-6=\ldots=(x+2)\left(4x^2+6x-3\right)$ nên ta có $(x+2)\left(4x^2+6x-3\right)=k^2$

Đặt $\left(x+2, 4x^2+6x-3\right)=d$ với $d\in N^*$

Ta có $x+2\,\vdots\, d\Rightarrow(x+2)(4x-2)\,\vdots\, d\Rightarrow 4x+6x-4\,\vdots\, d$

Ta lại có $4x^2+6x-3\,\vdots\, d\Rightarrow\left(4x^2+6x-3\right)-\left(4x^2+6x-4\right)=1\,\vdots\, d\Rightarrow d=1$

Vậy $\left(x+2, 4x^2+6x-3\right)=1$

mà $(x+2)\left(4x^2+6x-3\right)=k^2$ nên ta có

$x+2$ và $4x^2+6x-3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2=a^2$ và $4x^2+6x-3=b^2$ với $a,b\in N^*$.

Vì $x>0$ nên ta có $4x^2<b^2<4x^2+12x+9\Leftrightarrow(2x)^2<b^2<(2x+3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2=(2x+1)^2\Leftrightarrow 4x^2+6x-3=4x^2+4x+1\Leftrightarrow x=2$

Với $x=2$ ta có $4x^3+14x^2+9x-6=100=10^2$ là số chính phương

b/ Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$

Từ Gt suy ra: $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=1$.

Nên ta có: $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)}$

$\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right);"="\Leftrightarrow y=z$

Vậy $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$.

Tương tự ta có $\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$; $\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}\right)$

Vậy ta có $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right);"="\Leftrightarrow x=y=z$

Ta có $(x+y+x)^2-3(xy+yz+xx)=....=\dfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right]\ge 0$

Nên $(x+y+x)^2\ge 3(xy+yz+xx)$

$\Rightarrow (xyz)^2\ge 3(xy+yz+xz)\Rightarrow 3\dfrac{xy+yz+xz}{xyz}\le xyz\Rightarrow 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\le xyz$

Vậy $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$; $"="\Leftrightarrow x=y=z$

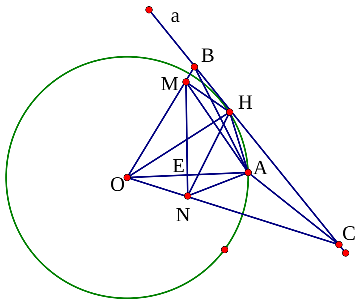
Bài 4. (6 điểm) Cho đoạn thẳng $OA=R$, vẽ đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy H bấy kỳ sao cho $AH<R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$. Trên đường thăng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB=AC=R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M\in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N\in OC$)

a/ Chứng minh $OM.OB=ON.OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB.OC=2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Lời giải



a/ Chứng minh $OM.OB=ON.OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

*Ta có $OH\perp HB$ (t/c tiếp tuyến)

$\Rightarrow \Delta OHB$ vuông tại H, mà $HM\perp OB$ (gt) nên

theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OM\cdot OB=OH^2=R^2$

Chưng minh tương tự ta có $ON\cdot OC=OH^2=R^2$.

Vậy ta có $OM\cdot OB=ON\cdot OC$

* Ta có $OM\cdot OB=OH^2=R^2$ mà $OA=R$ nên

ta có $OM \cdot OB = OA^2 \Rightarrow \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OA}{OB}$

Xét ΔOMA và ΔOAB có $\widehat{O}$ chung, có $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OA}{OB} \Rightarrow \Delta OMA \sim \Delta OAB$

$\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OBA}$. Ta có AO=AB=R (gt)

$\Rightarrow \Delta OAB$ cân $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{OBA} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{OBA}$,

Vậy $\widehat{OAM} = \widehat{AOM}$ $\Rightarrow \Delta OMA$ cân $\Rightarrow MO = MA$

Chứng minh tương tự ta có ΔONA cân $\Rightarrow NO = NA$

Ta có $MO = MA; NO = NA$, vậy MN là trung trực của OA, gọi E là giao điểm của MN với OA ta có EO=EA=$\dfrac{OA}{2}$ và $MN \perp OA$ tại E, mà O, A cố định nên E cố đinh. Vậy MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB.\ OC = 2R^2$

Ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC \Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{ON}{OB}$

Xét ΔOMN và ΔOCB có $\widehat{O}$ chung , có $\dfrac{OM}{OC} = \dfrac{ON}{OB} \Rightarrow \Delta OMN \sim \Delta OCB$,

mà $OE \perp MN$ và $OH \perp BC$

nên ta có $\dfrac{OM}{OC} = \dfrac{OE}{OH} \Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OE}{2OE} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}OC$ (vì $OH = OA = 2OE$)

Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ (cm trên) $\Rightarrow \dfrac{1}{2}OC \cdot OB = R^2 \Rightarrow OC \cdot OB = 2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Ta có $\Delta OMN \sim \Delta OCB$ (cm trên)$\Rightarrow \dfrac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \dfrac{OE^2}{OH^2} = \dfrac{OE^2}{OA^2} = \dfrac{OE^2}{(2OE)^2} = \dfrac{1}{4}$

Nên $S_{OMN} = \dfrac{1}{4}S_{OCB} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \dfrac{1}{8}R \cdot BC \le \dfrac{1}{8}R(AB + AC) = \dfrac{1}{8}R(R + R) = \dfrac{1}{4}R^2$

Dấu bằng có khi B, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow H \equiv A$

Vậy diện tích tam giác OMN lớn nhất là $S_{OMN} = \dfrac{1}{4}R^2$ khi $H \equiv A$

Bài 5. (1 điểm) Cho dãy số $n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$ với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Lời giải

-Nếu n là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên bài toán chứng minh xong

-Nếu n không là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên, ta luôn tìm được 1 số nguyên dương k sao cho $k^2 < n < (k+1)^2$.Vì n nguyên dương và $n > k^2 \Rightarrow n \ge k^2 + 1$, vậy ta có:

$$2n - (k+1)^2 \ge 2(k^2+1) - (k+1)^2 = \ldots = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \ge 0$$

Vậy mọi k nguyên dương , nên ta có $k^2 < n < (k+1)^2 \le 2n$

Vậy trong dãy luôn có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

……………..HẾT……………

PHÒNG GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
HUYỆN XUYÊN MỘC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Khóa thi, ngày 10 tháng 01 năm 2017

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng các số $A = 6^{2015} + 1$ và $B = 6^{2016} - 1$ đều là bội của 7.

b) So sánh $A = \dfrac{10^{2016} - 1}{10^{2017} - 11}$ và $B = \dfrac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 9}$

Câu 2: *(5,5 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.\

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Câu 3: *(3,5 điểm)*

a) Trên mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

b) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1 < \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} < 2$

Câu 4: *(5,5 điểm)*

Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của AM và OK.

a) Chứng minh $OE.OK$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

b) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N. Chứng minh: $IN = IO$.

c) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh: $EF \,//\, AB$.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;\ R)$. Một điểm P chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn $(O;\ R)$.

------- HẾT -----

PHÒNG GD&ĐT XUYÊN MỘC **ĐỀ CHÍNH THỨC**

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2016 – 2017 MÔN THI TOÁN LỚP 9
(Hướng dẫn chấm có ……… trang)

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng các số $A = 6^{2015} + 1$ và $B = 6^{2016} - 1$ đều là bội của 7.

b) So sánh $A = \dfrac{10^{2016} - 1}{10^{2017} - 11}$ và $B = \dfrac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 9}$

Lời giải

a) Ta có: $A = 6^{2015} + 1 \vdots 6 + 1 = 7 \vdots 7$ và $B = 6^{2016} - 1 = \left(6^2\right)^{1013} - 1 \vdots 6^2 - 1 = 35 \vdots 7$.

b) Ta có: $10.A = \dfrac{10.(10^{2016} - 1)}{10^{2017} - 11} = \dfrac{10^{2017} - 11 + 1}{10^{2017} - 11} = 1 + \dfrac{1}{10^{2017} - 11}$ (*)

$10.B = \dfrac{10.(10^{2016} + 1)}{10^{2017} + 9} = \dfrac{10^{2017} + 9 + 1}{10^{2017} + 9} = 1 + \dfrac{1}{10^{2017} + 9}$ (**)

Ta thấy $\dfrac{1}{10^{2017} - 11} > \dfrac{1}{10^{2017} + 9}$ nên từ (*) và (**) $\Rightarrow$ 10A > 10B $\Rightarrow$ A > B.

Câu 2: *(5,5 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.\

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Lời giải

a) Rút gọn $P = \dfrac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}}$

$$P = \frac{2\sqrt{x} - 9 + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$P = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất:

$$Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1} = \frac{(2017x^2 + 2017) - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{2017(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} = 2017 - \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \quad (*)$$

Vì $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$ nên từ (*)$\Rightarrow$ Q ≤ 2017.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy max Q = 2017 $\Leftrightarrow x=1$

c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2+5y^2=74$.

Cách 1:

Ta có: $6x^2+5y^2=74 \Leftrightarrow 6x^2-24=50-5y^2 \Leftrightarrow 6(x^2-4)=5(10-y^2)$ (*)

Từ (*) suy ra: $6(x^2-4) \vdots 5$, Mà $UCLN(6,5)=1$ nên $x^2-4 \vdots 5$

Đặt $x^2-4=5t$ ($t \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x^2=5t+4$ thay vào (*) $\Rightarrow y^2=10-6t$

Vì $\begin{cases} x^2>0 \\ y^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=5t+4>0 \\ y^2=10-6t>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>-\dfrac{4}{5} \\ t<\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{4}{5}<t<\dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$

$\oplus$ Khi t = 0 thì $y^2=10$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

$\oplus$ Khi t = 1 thì $\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ (vì nghiệm nguyên dương nên lấy $x>0, y>0$)

Cách 2:

Ta có: $6x^2+5y^2=74 \Leftrightarrow 6x^2-24=50-5y^2 \Leftrightarrow 6(x^2-4)=5(10-y^2)$ (*)

Từ (*) suy ra: $6(x^2-4) \vdots 5$, Mà $UCLN(6,5)=1$ nên $x^2-4 \vdots 5$

$\Rightarrow \left[\left(x^2-4\right)+5\right] \vdots 5 \Leftrightarrow x^2+1 \vdots 5$ (**)

Từ bài ra $\Rightarrow 0<6x^2<74 \Rightarrow 0<x^2<12$, Kết hợp (**)$\Rightarrow x^2=4$ hoặc $x^2=9$

$\oplus$ Khi $x^2=4$ thì $y^2=10$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

$\oplus$ Khi $x^2=9$ thì $y^2=4 \Rightarrow$ ($x=3, y=2$) (vì $x>0, y>0$)

Câu 3: *(3,5 điểm)*

a) Trên mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x+(m-3)y=1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

b) Cho các số dương $a,\ b,\ c$. Chứng minh rằng: $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$

Lời giải

a) Xét pt: $(m-4)x+(m-3)y=1$

Ta thấy: $(m-4).0+(m-3).0=0 \neq 1$ nên (d) không thể đi qua $O(0;0)$.

+ Với $m=4$ ta được $y=1$ nên khoảng cách từ (d) đến $O(0;0)$ bằng $|y|=1$.

+ Với $m=3$ ta được $x=-1$ nên khoảng cách từ (d) đến $O(0;0)$ bằng $|x|=|-1|=1$.

+ Với $m\neq 3;\ m\neq 4$ thì (d) cắt Ox tại $A\left(\dfrac{1}{m-4},0\right)$ và cắt Oy tại $B\left(0,\dfrac{1}{m-3}\right)$.

Kẻ OH vuông góc với (d) tại $H;$ ta có khoảng cách từ (d) đến $O(0;0)$ là OH

.

Dựa vào ΔOAB vuông tại O chỉ ra được

$$\frac{1}{OH^2}=(m-4)^2+(m-3)^2=2\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

Suy ra được: $OH\leq\sqrt{2}$

Suy được khoảng cách từ O đến (d) lớn nhất $OH=\sqrt{2}$ khi $m=\dfrac{7}{2}$

b)Vì $a,\ b,\ c$ là các số dương (gt) nên ta có:

$$\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}\quad (1)$$

$$\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{b+c+a}\quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{c+a}<\frac{c+b}{c+a+b}\quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2) và (3), ta có: $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$ (đpcm).

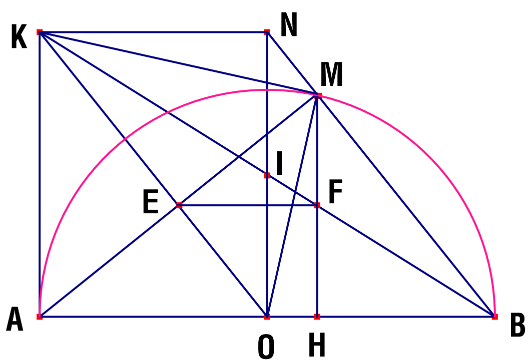
Câu 4: *(5,5 điểm)*

Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB=2R$. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của AM và OK.

a) Chứng minh $OE.OK$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

b) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N. Chứng minh: $IN=IO$.

c) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh: $EF\ /\!/\ AB$.



Lời giải

a) Chứng minh được $OK \perp AM$ tại E.

Dựa vào ΔOAK vuông tại A chỉ ra được $OE.OK = OA^2 = R^2$ không đổi.

b) Chứng minh được: $OK \,//\, BN$ $(\perp AM)$

Chứng minh được: $\Delta AOK = \Delta OBN$ (g.c.g) $\Rightarrow OK = BN$.

Suy được $OBNK$ là hình bình hành từ đó suy được: $IN = IO$.

c) Chứng minh được $\Delta AOK \backsim \Delta HBM \Rightarrow \frac{HB}{AO} = \frac{MB}{OK} \Rightarrow \frac{HB^2}{AO^2} = \frac{MB^2}{OK^2}$ (1)

Chỉ ra được $MB^2 = HB.AB$ và $OA^2 = OE.OK$ (câu a) (2)

Từ (1) và (2) suy được $\frac{HB^2}{OK.OE} = \frac{HB.AB}{OK^2} \Rightarrow \frac{HB}{OE} = \frac{AB}{OK} \Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{OE}{OK}$ (3)

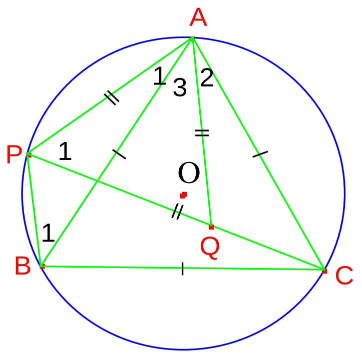
Chứng minh được $\frac{HB}{AB} = \frac{FB}{BK}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{FB}{KB} = \frac{OE}{OK} \Rightarrow EF \,//\, OB \,//\, AB$ (đl Ta let)

Câu 5: *(2,5 điểm)*

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;\ R)$. Một điểm P chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn $(O;\ R)$.

Lời giải



- Vì ΔABC đều, $P \in \overset{\frown}{AB}$ nên $AP < PC$. Lấy điểm Q trên PC sao cho $PQ = PA$.

Ta thấy ΔAPQ cân có $\widehat{APQ} = \widehat{P_1} = 60^0$ (chắn cung 120^o) nên ΔAPQ đều $\Rightarrow$ $AP = AQ = PQ$

- Chứng minh được $\Delta APB = \Delta AQC$ $(c.g.c) \Rightarrow PB = QC$.

Từ đó $\Rightarrow PA + PB = PQ + QC = PC$. Mà PC là một dây của $(O;\ R)$ nên $PC \le 2R$.

Chứng tỏ tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn $(O;\ R)$. *(đpcm)*

--- HẾT ---

UBND HUYỆN XUYÊN MỘC
PHÒNG GD&ĐT XUYÊN MỘC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài thi 150 phút

ĐỀ DỰ BỊ

Câu 1: *(2,5 điểm)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(m,\ n)$ sao cho $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$

Câu 2: *(7,5 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$

b) $|x-2014| + |x-2016| + |y-2016| + |x| = 2016$

c) Tìm GTNN của biểu thức: $A = \dfrac{3-4\sqrt{x}}{x+1}$

d) Cho $x,\ y,\ z$ là các số không âm và $x + y + z = 1$.CMR: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \le \sqrt{6}$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a + b + c$ ($a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của tam giác).

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge 2.\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

Câu 4: *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi $(I;r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là tiếp điểm của AB với đường tròn $(I;r)$; H là giao điểm của AI với đường tròn $(O;R)$ (H khác A), HK là đường kính của đường tròn (O). Gọi a là độ dài đoạn OI. Chứng minh:

a) Tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng.

b) $HB = HI$.

c) $IA.IH = R^2 - a^2$.

d) $R^2 - 2Rr = a^2$.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn (C) đường kính $PQ = 2R$ cố định và một đường kính MN của đường tròn thay đổi (MN khác PQ). Qua P vẽ đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn, (d) cắt QM và QN lần lượt ở E và F .

a) Chứng minh tam giác QMN đồng dạng với tam giác QFE.

b) Tìm vị trí của đường kính MN để EF có độ dài nhỏ nhất và tính GTNN đó theo R .

------- HẾT -----

PHÒNG GD&ĐT XUYÊN MỘC **ĐỀ DỰ BỊ**

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2016 – 2017 MÔN THI TOÁN LỚP 9
(Hướng dẫn chấm có ……… trang)

Câu 1: *(2,5 điểm)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(m,\ n)$ sao cho $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$

Lời giải:

Ta có: $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 2n - 3 + \dfrac{16}{n^2 + 7}$ (1)

Vì $m, n \in \mathbb{Z}$ nên $n^2 + 7 \in U(16) \Rightarrow n^2 + 7 \in \{8;16\} \Rightarrow n^2 \in \{1;9\} \Rightarrow n \in \{\pm 1; \pm 3\}$ (2)

Từ (1) và (2) suy được: $(m,n) = \{(1;1),(-3;-1);(4;3),(-8;-3)\}$

Câu 2: *(7,5 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$

b) $|x-2014| + |x-2016| + |y-2016| + |x| = 2016$

c) Tìm GTNN của biểu thức: $A = \dfrac{3-4\sqrt{x}}{x+1}$

d) Cho $x,\ y,\ z$ là các số không âm và $x + y + z = 1$.CMR:

$A = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \le \sqrt{6}$

Lời giải:

a)Rút gọn $A = \left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$

$$= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1) + \sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x^3}+1}{2\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$$

b) $|x-2014| + |x-2016| + |y-2016| + |x| = 2016$ (1)

Ta có: $|x-2016| + |x| = |2016-x| + |x| \ \ge\ |x+2016-x| = 2016$ (2)

Chỉ ra được dấu « = » xảy ra khi $0 \le x \le 2016$ (*)

Từ (1) và (2) suy được: $|x-2014| + |y-2016| = 0$

Lập luận suy được: $\begin{cases} |x-2014| = 0 \\ |y-2016| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = 2016 \end{cases}$

Đối chiếu ĐK (*) và kết luận được nghiệm

c) Tìm GTNN của biểu thức: $A = \dfrac{3-4\sqrt{x}}{x+1}$ ĐK: $x \ge 0$

$$A = \frac{3-4\sqrt{x}}{x+1} = \frac{(x-4\sqrt{x}-4)-(x+1)}{x+1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x+1} - 1 \ \ge\ -1 \text{ (vì } x \ge 0)$$

Chỉ ra được: $\min A = -1$ khi $x = 4$ (tmđk)

d) Áp dụng BĐT Bunhiakopski có

$$A^2 = \left(1.\sqrt{x+y} + 1.\sqrt{y+z} + 1.\sqrt{z+x}\right)^2$$

$$\le \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{x+y}\right)^2 + \left(\sqrt{y+z}\right)^2 + \left(\sqrt{z+x}\right)^2\right)$$

$$= 3.2(x+y+z) = 6 \ \left(vì\ x+y+z=1\right)$$

Suy được $A \le \sqrt{6}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a+b+c$ ($a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của tam giác).

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge 2.\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

Lời giải:

Chỉ ra được: $p-a = \dfrac{b+c-a}{2} > 0;\ p-b > 0;\ p-c > 0$

Áp dụng BĐT Cô si ta có :

$$\left[(p-a)+(p-b)\right]\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right) \ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}.\frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} = 4$$

Suy được: $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} \ge \dfrac{4}{p-a+p-b} = \dfrac{4}{c}$

Tương tự: $\dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge \dfrac{4}{a};\ \dfrac{1}{p-c} + \dfrac{1}{p-a} \ge \dfrac{4}{b}$

Suy được: $2.\left(\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}\right) \ge 4.\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Suy được đpcm và dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 4: *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi $(I;r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là tiếp điểm của AB với đường tròn $(I;r)$; H là giao điểm của AI với đường tròn $(O;R)$ (H khác A), HK là đường kính của đường tròn (O). Gọi a là độ dài đoạn OI. Chứng minh:

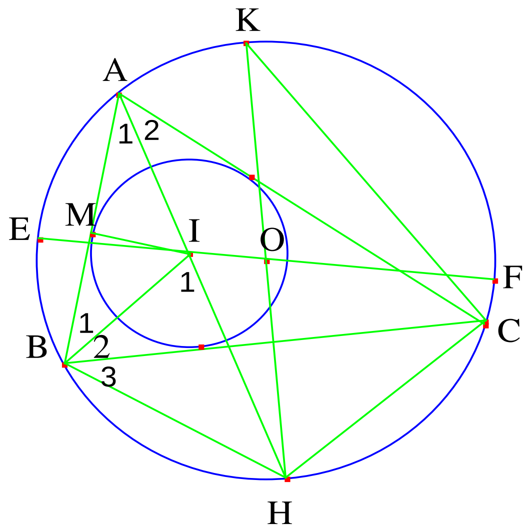
a) Tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng.

b) $HB = HI$.

c) $IA.IH = R^2 - a^2$.

d) $R^2 - 2Rr = a^2$.

Lời giải:



a) Chứng minh được các tam giác ΔAMI và ΔKCH là các tam giác vuông

- Chứng minh được $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{K}$
- Suy ra được tam giác $\Delta AMI \backsim \Delta KCH$ *(đpcm)*

b) Chứng minh được $\hat{I}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1$; $\widehat{IBH} = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1$

Do đó $\hat{I}_1 = \widehat{IBH} \Rightarrow HB = HI$ *(đpcm)*

c) Gọi EF là đường kính của (O) và đi qua I .

- Nêu được: $IA.IH = IE.IF$ (hệ thức trong đường tròn)
- Suy ra: $IA.IH = (R-a).(R+a) = R^2 - a^2$

d) Vì $\Delta AMI \backsim \Delta KCH$ (Từ câu a) nên $\frac{IA}{HK} = \frac{IM}{HC} \Rightarrow IA.HC = HK.IM = 2Rr$ (*)

Mà $HB = HC$ (do $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$) $\Rightarrow HC = HI$.

Kết hợp câu c), thay vào (*) ta có: $R^2 - a^2 = 2Rr \Rightarrow R^2 - 2Rr = a^2$ *(đpcm)*

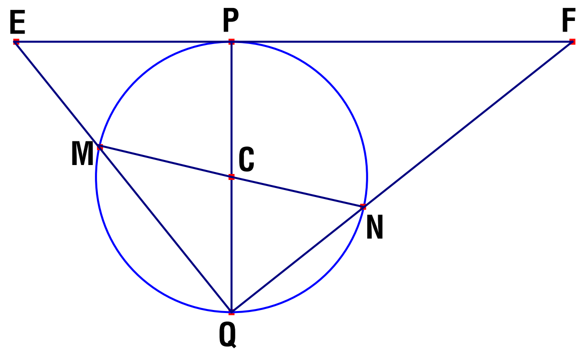
Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn (C) đường kính $PQ = 2R$ cố định và một đường kính MN của đường tròn thay đổi (MN khác PQ). Qua P vẽ đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn, (d) cắt QM và QN lần lượt ở E và F .

a) Chứng minh tam giác QMN đồng dạng với tam giác QFE .

b) Tìm vị trí của đường kính MN để EF có độ dài nhỏ nhất và tính GTNN đó theo R .

Lời giải:



a) Chứng minh được: $QM.QE = QN.QF\left(= PQ^2\right) \Rightarrow \dfrac{QM}{QF} = \dfrac{QN}{QE}$

Chỉ ra được: $\Delta QMN \backsim \Delta QFE(c.g.c)$

b) Xét ΔQFE vuông tại Q có $PQ \perp EF$ (gt) (1) $\Rightarrow$ $PQ^2 = PE.PF$ (hệ thức 2)

$PE.PF = (2R)^2 = 4R^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số EP, PF > 0 ta có

$EF = EP + PF \geq 2\sqrt{EP.PF} = 2.\sqrt{4R^2} = 4R$

$\Rightarrow$ EF nhỏ nhất bằng $4R$ khi $EP = PF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ΔQEF cân tại Q có PQ là đường cao đồng thời là phân giác.

Chỉ ra được $PMQN$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ $PMQN$ là hình vuông $\Rightarrow MN \perp PQ$

Vậy khi $MN \perp PQ$ thì EF có độ dài nhỏ nhất bằng 4R.

--- HẾT---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI : TOÁN
Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. **(1,5 điểm)**

Cho biểu thức $M=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a\ge 0; a\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm tất cả các giá tị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Bài 2. **(2,0 điểm)**

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}}=9$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+xz=48 \\ xy+y^2+yz=12 \\ xz+yz+z^2=84 \end{cases}$

Bài 3. **(2,0 điểm)**

a) Cho $a=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}....\sqrt{2}.\sqrt{2}}_{2016 \text{ thừa số } \sqrt{2}}$ và $b=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.......\sqrt{2}.\sqrt{2}}_{3016 \text{ thừa số } \sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a và b có cùng chữ số hàng đơn vị.

b) Cho hàm số $y=ax+a+1$ với a là tham số, $a\ne 0$ và $a\ne -1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đồ thị của hàm số đạt giá trị lớn nhất

Bài 4. **(3,5 điểm)** Cho trước tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M tùy ý. Đường tròn $(M;MB)$ cắt đoạn thẳng AM tại D.

a) Chứng minh rằng tam giác BDM là tam giác đều.

b) Chứng minh rằng: $MA=MB+MC$.

c) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cung nhỏ BC thì điểm D luôn luôn nằm trên một đường tròn cố định có tâm thuộc đường tròn (O).

Bài 5. **(1,0 điểm)** Cho $x+y+z=0$ và $xyz\ne 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}+\frac{1}{y^2+z^2-x^2}+\frac{1}{z^2+x^2-y^2}$$

--- HẾT----

ĐÁP ÁN HỌC SINH GIỎI 9 ĐÀ NẴNG 2015-2016

Bài 1. **(1,5 điểm)**

Cho biểu thức $M=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a\ge 0; a\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm tất cả các giá tị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có: $M=\dfrac{3a+3\sqrt{a}-3}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}-\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}+\dfrac{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$

$M=\dfrac{3a+3\sqrt{a}-3-(a-1)-(a-4)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\dfrac{a+3\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$

$M=\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$ $M=\dfrac{\sqrt{a}-1+2}{\sqrt{a}-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$.

b) M nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{a}-1$ là ước của 2.

$\Leftrightarrow \sqrt{a}-1\in\left\{-1;1;2\right\}\Leftrightarrow a\in\left\{0;4;9\right\}(do\sqrt{a}\ge 0)$.

Bài 2. **(2,0 điểm)**

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}}=9$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+xz=48 \\ xy+y^2+yz=12 \\ xz+yz+z^2=84 \end{cases}$.

Lời giải

a) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}}=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1+6\sqrt{x-1}+9}=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+3\right)^2}=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}+3=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$.

b) Cộng 3 phương trình của hệ ta được $\left(x+y+z\right)^2=144\Leftrightarrow x+y+z=\pm 12$

Mặt khác hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z)=48 \\ y(x+y+z)=12 \\ z(x+y+z)=84 \end{cases}$ kết hợp với trên ta có hai trường hợp sau:

\+ Với $x+y+z=-12$ hệ có nghiệm $\left(x;y;z\right)=\left(-4;-1;-7\right)$.

\+ Với $x+y+z=12$ hệ có nghiệm $\left(x;y;z\right)=\left(4;1;7\right)$.

Bài 3. **(2,0 điểm)**

a) Cho $a=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}....\sqrt{2}.\sqrt{2}}_{2016\ \text{thừa số}\ \sqrt{2}}$ và $b=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.......\sqrt{2}.\sqrt{2}}_{3016\ \text{thừa số}\ \sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a và b có cùng chữ số hàng đơn vị.

b) Cho hàm số $y=ax+a+1$ với a là tham số, $a\neq 0$ và $a\neq -1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đồ thị của hàm số đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Nhận xét $\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}=16$ (8 thừa số $\sqrt{2}$)

2016 chia hết cho 8 được 252 như vậy có thể phân số a thành 252 nhóm, mỗi nhóm có giá trị bằng 16 (có hàng đơn vị là 6) nên tích của 252 nhóm này cũng có hàng đơn vị là 6.

3016 chia hết cho 8 được 377 như vậy có thể phân số b thành 377 nhóm, mỗi nhóm có giá trị bằng 16 (có hàng đơn vị là 6) nên tích của 377 nhóm này cũng có hàng đơn vị là 6.

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Tam giác vuông OAB tại O nên nếu gọi h là khoảng cách từ O đến đồ thị hàm số thì $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^2}=\frac{a^2+1}{(a+1)^2}$

$$\Rightarrow h^2=\frac{a^2+2a+1}{1+a^2}=1+\frac{2a}{1+a^2}\le 1+\frac{2|a|}{1+a^2}\le 2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=1$. Vậy khi $a=1$ thì khoảng cách từ O đến đồ thị hàm số là lớn nhất.

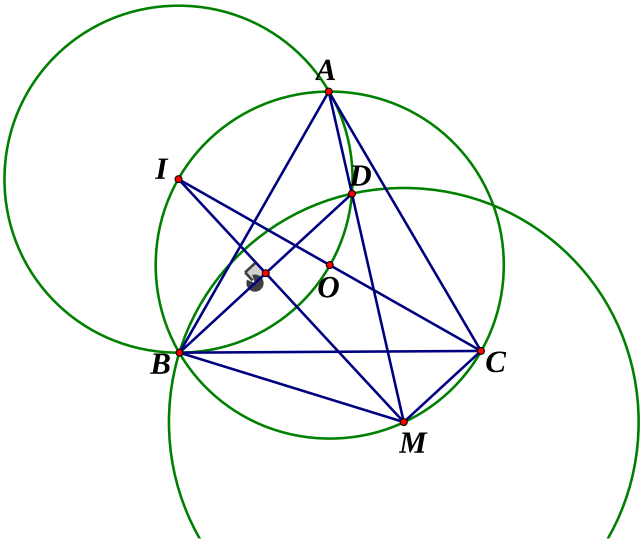
Bài 4. **(3,5 điểm)** Cho trước tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M tùy ý. Đường tròn $(M;MB)$ cắt đoạn thẳng AM tại D.

a) Chứng minh rằng tam giác BDM là tam giác đều.

b) Chứng minh rằng: $MA=MB+MC$.

c) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cung nhỏ BC thì điểm D luôn luôn nằm trên một đường tròn cố định có tâm thuộc đường tròn (O).

Lời giải



a) Ta có: $MB = MD$ (bán kính đường tròn (M))

$\widehat{BMD} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Nên ΔBMD đều.

b) $\Delta ABD = \Delta CBM$ vì $AB = CB; BD = BM$

Và $\widehat{ABD} = 60^\circ - \widehat{DBC} = \widehat{CBM} \Rightarrow DA = MC \Rightarrow MA = MD + DA$

Mà $MD = MB$.

vậy $MA = MB + MC$.

c) Gọi I là giao điểm của (O) với phân giác CO (trong tam giác đều ABC)

$\Rightarrow I$ là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và I là điểm cố định thuộc (O)

Nên MI là phân giác $\widehat{BMD}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O))

Nên MI là trung trực đoạn thẳng BD vì BDM là tam giác đều

Suy ra $ID = IB$.

Do đó D luôn thuộc đường tròn $(I; IB)$ cố định có tâm thuộc (O).

Bài 5. **(1,0 điểm)** Cho $x + y + z = 0$ và $xyz \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2}.$$

Lời giải

Ta có : $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -(y + z); y = -(z + x); z = -(x + y)$

$$\Rightarrow x^2 = (y + z)^2; y^2 = (z + x)^2; z^2 = (x + y)^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{x^2 + y^2 - (x + y)^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - (y + z)^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - (x + z)^2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{-2xy} + \frac{1}{-2yz} + \frac{1}{-2xz} \Rightarrow P = \frac{x + y + z}{-2xyz} = 0.$$

--- HẾT----

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN HẠ HÒA NĂM HỌC 2015 - 2016

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x+xy+y=9$.

b) Với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2+3ab-11b^2$ chia hết cho 5 thì a^4-b^4 chia hết cho 5.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Cho $f(x)=(x^3+12x-31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

b) Cho a,b,x,y là các số thực thoả mãn: $x^2+y^2=1$ và $\dfrac{x^4}{a}+\dfrac{y^4}{b}=\dfrac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^{2016}}{a^{1008}}+\dfrac{y^{2016}}{b^{1008}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1008}}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$.

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}4x^2-2y^2=2\\x^2+xy=2\end{cases}$

Câu 4: *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC $(H\in BC)$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB=AF.AC$.

b) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm I,A,K thẳng hàng.

c) Chứng minh tỷ số $\dfrac{AH^3}{BC.BE.CF}$ không đổi.

d) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $PEFQ$ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho x,y,z dương sao cho $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{1}{3x+3y+2z}+\dfrac{1}{3y+3z+2x}+\dfrac{1}{3z+3x+2y}$.

……………….HẾT……………

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN HẠ HÒA NĂM HỌC 2015 - 2016

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x+xy+y=9$.

b) Với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2+3ab-11b^2$ chia hết cho 5 thì a^4-b^4 chia hết cho 5.

Lời giải

a) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x+xy+y=9$.

Ta có: $x+xy+y=9 \Leftrightarrow x(y+1)+y+1=10 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=10$

Vì $x,y\in\mathbb{N}$ và $10=1.10=2.5$ nên ta có bảng sau:

$x+1$	1	2	5	10
$y+1$	10	5	2	1
x	0	1	4	9
y	9	4	1	0

Vậy $(x,y)=(0;9),(1;4),(4;1),(9;0)$.

b) Với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2+3ab-11b^2$ chia hết cho 5 thì a^4-b^4 chia hết cho 5.

Ta có:

$$4a^2+3ab-11b^2=(5a^2+5ab-10b^2)-(a^2+2ab+b^2)=5(a^2+ab-2b^2)-(a+b)^2$$

mà $4a^2+3ab-11b^2 \vdots 5 \Rightarrow (a+b)^2 \vdots 5 \Rightarrow a+b \vdots 5$

Ta có: $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b) \Rightarrow a^4-b^4 \vdots 5$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Cho $f(x)=(x^3+12x-31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

b) Cho a,b,x,y là các số thực thoả mãn: $x^2+y^2=1$ và $\dfrac{x^4}{a}+\dfrac{y^4}{b}=\dfrac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^{2016}}{a^{1008}}+\dfrac{y^{2016}}{b^{1008}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1008}}$.

Lời giải

a) Cho $f(x)=(x^3+12x-31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

Ta có: $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow a^3=32+3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})}.\left(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^3=32+3.(-4).a \Leftrightarrow a^3=32-12a \Leftrightarrow a^3+12a-32=0$$

$$\Leftrightarrow a^3+12a-31=1 \Rightarrow f(a)=1^{2015}=1$$

b) Cho a,b,x,y là các số thực thoả mãn: $x^2+y^2=1$ và $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2016}}{a^{1008}}+\frac{y^{2016}}{b^{1008}}=\frac{2}{(a+b)^{1008}}$.

Ta có: $x^2+y^2=1 \Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2=1$

mà $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b} \cdot \Rightarrow \frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{(x^2+y^2)^2}{a+b}$

$\Leftrightarrow b(a+b)x^4+a(a+b)y^4=ab\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)$

$\Leftrightarrow b^2x^4+a^2y^4-2abx^2y^2=0 \Leftrightarrow (bx^2-ay^2)^2=0$

Ta có: $\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

$\Rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}}=\frac{y^{2016}}{b^{1008}}=\frac{1}{(a+b)^{1008}} \Rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}}+\frac{y^{2016}}{b^{1008}}=\frac{2}{(a+b)^{1008}}$ (đpcm).

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14.$

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4x^2-2y^2=2 \\ x^2+xy=2 \end{cases}$

Lời giải

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14.$

ĐKXĐ: $1,5 \le x \le 2,5$

+) Áp dụng bất đẳng thức Bunhia cốp xki, ta có:

$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)^2 \le 2\left(2x-3+5-2x\right)=4 \Rightarrow \sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x} \le 2 \quad (1)$

+) Ta có: $3x^2-12x+14=3\left(x^2-4x+4\right)+2=3\left(x-2\right)^2+2 \ge 2$

$\Rightarrow \sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x} \le 2 \le 3x^2-12x+14$

Suy ra $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=2 \\ 3x^2-12x+14=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3}=\sqrt{5-2x} \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có một nghiệm $x=2$.

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4x^2-2y^2=2 & (1) \\ x^2+xy=2 & (2) \end{cases}$

Lấy pt (1) trừ pt (2) vế với vế, ta được:

$3x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(3x+2y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=\frac{-2}{3}y \end{array}\right.$

TH1: $x = y$

Khi đó pt (1): $4x^2 - 2x^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1.$

TH2: $x = \frac{-2}{3}y$

Khi đó pt (1): $4 \cdot \frac{4}{9}y^2 - 2y^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{-2}{9}y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = -9$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x, y) = (1; 1), (-1; -1)$.

Câu 4: *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$.

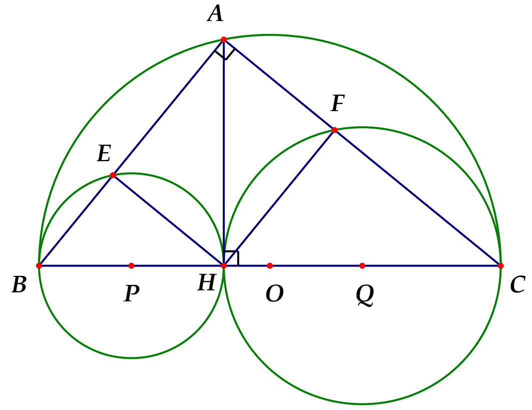
b) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.

c) Chứng minh tỷ số $\frac{AH^3}{BC.BE.CF}$ không đổi.

d) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $PEFQ$ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$.



Xét ΔABH vuông tại H có HE là đường cao

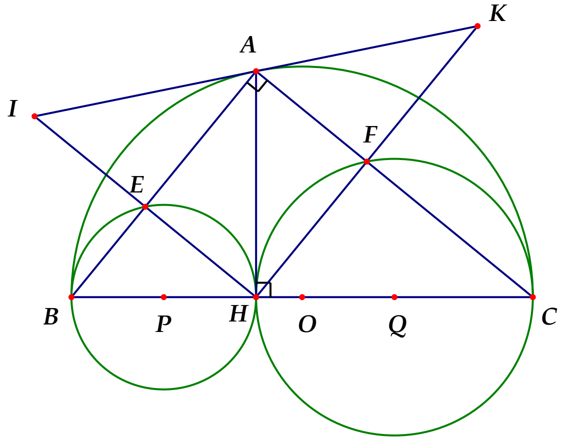
$\Rightarrow AE.AB = AH^2$ (1)

Xét ΔACH vuông tại H có HF là đường cao

$\Rightarrow AF.AC = AH^2$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AE.AB = AF.AC$.

b) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.



Vì I đối xứng với H qua AB nên $\widehat{IAH}=2\widehat{HAE}$

Vì K đối xứng với H qua AC nên $\widehat{KAH}=2\widehat{HAF}$

$\Rightarrow \widehat{IAH}+\widehat{KAH}=2\widehat{HAE}+2\widehat{HAF}=2\left(\widehat{AHE}+\widehat{HAF}\right)=180^o.$

Vậy ba điểm I, A, K thẳng hàng.

c) Chứng minh tỷ số $\dfrac{AH^3}{BC.BE.CF}$ không đổi.

Ta có : $AH^2=BH.CH\Rightarrow AH^4=BH^2.CH^2=BE.BA.CF.CA=BE.CF.AH.BC$

$\Rightarrow AH^3=BE.CF.BC\Rightarrow \dfrac{AH^3}{BE.CF.BC}=1.$

d) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $PEFQ$ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

Ta có: $S_{PQFE}=\dfrac{1}{2}(PE+FQ).EF=\dfrac{1}{4}BC.FE$

mà $FE\le\dfrac{BC}{2}\Rightarrow S_{PQFE}\le\dfrac{BC^2}{8}\cdot$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của nửa đường tròn tâm O, đường kính BC.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z dương sao cho $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=6.$

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{1}{3x+3y+2z}+\dfrac{1}{3y+3z+2x}+\dfrac{1}{3z+3x+2y}\cdot$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$ ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}=\frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{(x+y)+(y+z)}\right]\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3x+3y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{1}{3y+3z+2x}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{y+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)$$

$$\frac{1}{3z+3x+2y}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)$$

Suy ra $P\le\frac{1}{16}\cdot4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\cdot$

Dấu “=” xảy ra $x=y=z=\frac{1}{4}.$

……………..HẾT……………

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN

Đề chính thức

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 CẤP THCS
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn thi: TOÁN - BẢNG A
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Chia 18 vật có khối lượng 2016^2; 2015^2; 2014^2; ...;1999^2 gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x + 171 = y^2$

Câu 2: *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2 + 6x + 1 = (2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+1}{b^2+1} + \dfrac{b+1}{c^2+1} + \dfrac{c+1}{a^2+1} \geq 3$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm $(O;\ R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh: $\widehat{HPO} = \widehat{HQO}$

b) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Tìm hình vuông có kích thước nhỏ nhất để trong hình vuông đó có thể sắp xếp được 5 hình tròn có bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn bất kì nào trong chúng có điểm trong chung.

--- HẾT ---

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NGHỆ AN
NĂM HỌC 2015 – 2016 – NGHỆ AN
Môn thi: TOÁN 9 - BẢNG A

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Chia 18 vật có khối lượng 2016^2; 2015^2; 2014^2; ...;1999^2 gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x+171=y^2$

Lời giải

a) Nhận xét:

$n^2+(n+5)^2=2n^2+10n+25 \;=x+25$

$(n+1)^2+(n+4)^2=\;2n^2+10n+17=x+17$

$(n+2)^2+(n+3)^2=\;2n^2+10n+13\;=x+13$

- Lần thứ nhất, chia 6 vật có khối lượng 1999^2, ..., 2004^2 thành ba phần: $A+25$, $A+17$, $A+13$.

Lần thứ hai, chia 6 vật có khối lượng 2005^2, ..., 2010^2 thành ba phần: $B+25$, $B+17$, $B+13$.

Lần thứ ba, chia 6 vật có khối lượng 2011^2, ..., 2016^2 thành ba phần: $C+25$, $C+17$, $C+13$.

- Lúc này ta chia thành các nhóm như sau:

Nhóm thứ nhất $A+25$, $B+17$, $C+13$.

Nhóm thứ hai $B+25$, $C+17$, $A+13$.

Nhóm thứ ba $C+25$, $A+17$, $B+13$.

Khối lượng của mỗi nhóm đều bằng $A+B+C+55$ (gam).

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x+171=y^2$

- Viết phương trình đã cho về dạng: $9.(3^{x-2}+19)=y^2$ ($x\ge 2$). Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2}+19=z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương)

- Nếu $x-2$ là số lẻ thì $x-2=2k+1$, khi đó $3^{2k+1}+19=\left(3^{2k+1}+1\right)+18=4.B+18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương. Do đó $x-2$ là số chẵn

- Ta có $3^{x-2}+19=z^2 \Leftrightarrow \left(z-3^k\right)\left(z+3^k\right)=19$.

Vì 19 là số nguyên tố và $z-3^k<z+3^k$ nên $\begin{cases} z-3^k=1\\ z+3^k=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10\\ 3^k=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10\\ k=2\end{cases}$

Vậy x = 6 và y = 30.

Câu 2: *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2+6x+1=\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+1=y^2-4x\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases}$

Lời giải

a) Giải phương trình: $x^2+6x+1=\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3}$ (*)

ĐKXĐ: R.

Vì $x=\frac{-1}{2}$ nên phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+1}{2x+1}=\sqrt{x^2+2x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+1}{2x+1}-2=\sqrt{x^2+2x+3}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+1-2(2x+1)}{2x+1}=\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}+2)(\sqrt{x^2+2x+3}-2)}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{2x+1}=\frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}-\frac{1}{2x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+2x-1=0 & (1)\\ \sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 & (2)\end{array}\right.$$

PT (1) có hai nghiệm $x_{1;2}=-1\pm\sqrt{2}$

PT (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}=2x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2}\\ x^2+2x+3=(2x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow x_3=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

Vậy phương đã cho có ba nghiệm: $x_{1;2}=-1\pm\sqrt{2}; x_3=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+1=y^2-4x\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2=y^2\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2x+1\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases}$

- Xét hệ: $\begin{cases} y=2x+1\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1\\ x^2+x(2x+1)+(2x+1)^2=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1\\ 7x^2+5x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1\\ \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-\frac{5}{7}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-\frac{5}{7}\\ y=-\frac{3}{7}\end{cases}$$

- Xét hệ: $\begin{cases} y=-2x-1\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1\\ x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 3x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

- Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là: $(0;1),\ \left(-\dfrac{5}{7};-\dfrac{3}{7}\right),\ (0;-1),\ (-1;1).$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\geq 3$.

Lời giải

- Sử dụng bất đẳng thức Cô si,ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1}\geq a+1-\frac{b^2(a+1)}{2b}=a+1-\frac{b+ab}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

- Tương tự: $\dfrac{b+1}{c^2+1}\geq b+1-\dfrac{c+bc}{2}$ **(2)** và $\dfrac{c+1}{a^2+1}\geq c+1-\dfrac{a+ca}{2}$ **(3)**

- Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\geq\dfrac{a+b+c}{2}+3-\dfrac{ab+bc+ca}{2}$

- Mặt khác $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ hay $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2=9$

- Do đó: $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\geq\dfrac{a+b+c}{2}+3-\dfrac{ab+bc+ca}{2}=\dfrac{3}{2}+3-\dfrac{9}{6}=3$.

- Vậy $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\geq 3$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

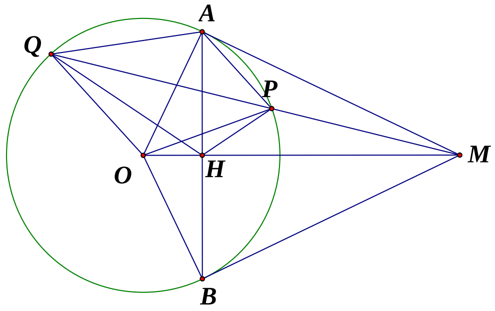
Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm $(O;\ R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M , Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh: $\widehat{HPO}=\widehat{HQO}$

b) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\dfrac{1}{EA}+\dfrac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Chứng minh: $\widehat{HPO}=\widehat{HQO}$



Ta có: $\Delta MPA \backsim \Delta MAQ(g.g) \Rightarrow MA^2=MP.MQ$ (1)

ΔMAO vuông tại A, có đường cao AH nên $MA^2 = MH.MO$ (2)

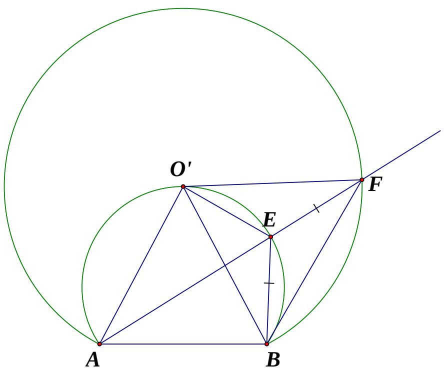
Từ (1) và (2) suy ra $MP.MQ = MH.MO$ hay $\dfrac{MP}{MH} = \dfrac{MO}{MQ}$ (*)

Ta xét: ΔMPH và ΔMOQ có góc M chung kết hợp với (*):

$\Rightarrow \Delta MPH \backsim \Delta MOQ(c.g.c)$ $\Rightarrow \widehat{MHP} = \widehat{MQO}$.

Do đó tứ giác $PQOH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HPO} = \widehat{HQO} = \dfrac{1}{2} sd\widehat{OH}$ (đpcm)

b) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.



-Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho $EB = EF$ hay ΔEBF cân tại E, suy ra $\widehat{BFA} = \dfrac{1}{2}\widehat{BEA}$. Đặt $\widehat{AEB} = \alpha$ khi đó $\widehat{AFB} = \dfrac{\alpha}{2}$ nên F di chuyển trên cung chứa góc $\dfrac{\alpha}{2}$ dựng trên BC.

-Ta có: $\dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{EB} \ge \dfrac{4}{EA + EB}$. Như vậy $\dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{EB}$ nhỏ nhất khi $EA + EB$ lớn nhất hay $EA + EF$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ AF lớn nhất (**).

- Gọi O' là điểm chính giữa của cung lớn AB, suy ra $\Delta O'AB$ cân tại O' $\Rightarrow O'A = O'B$ (3)

-Xét $\Delta O'EB$ và $\Delta O'\text{EF}$ có $EB = EF$, $O'E$ chung và $\widehat{FEO'} = \widehat{BEO'}$ (cùng bù với $\widehat{BAO'}$ $\Rightarrow$ $\Delta O'EB = \Delta O'EF(c.g.c) \Rightarrow O'B = O'F$ (4)

-Từ (3) và (4) suy ra O' là tâm cung chứa góc $\dfrac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC (cung đó và cung lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB)

- Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của (O') khi $E \equiv O'$ (***).

-Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Tìm hình vuông có kích thước nhỏ nhất để trong hình vuông đó có thể sắp xếp được 5 hình tròn có bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn bất kì nào trong chúng có điểm trong chung.

Lời giải

- Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ cạnh là $a > 2$ chứa 5 hình tròn bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm trong chung. Suy ra tâm của các hình tròn này nằm trong hình vuông $MNPQ$ tâm O cạnh là $a-2$ và $MN\,//\,AB$. Các đường trung bình của hình vuông $MNPQ$ chia hình vuông này thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau.

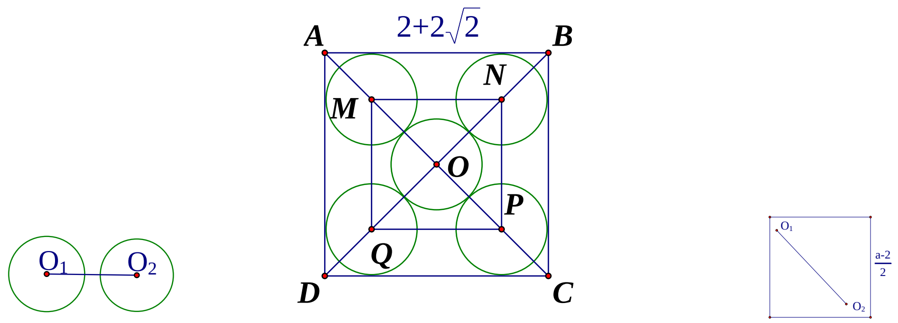
- Theo nguyên lí Dirichle tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 2 trong 5 tâm của các hình tròn nói trên, chẳng hạn đó là O_1 và O_2.

- Do 5 hình tròn này không có hai hình tròn nào có điểm trong chung nên $O_1O_2 \geq 2$ (1).

- Mặt khác O_1O_2 cùng nằm trong một hình vuông nhỏ có cạnh là $\dfrac{a-2}{2}$ nên $O_1O_2 \leq \dfrac{a-2}{2}.\sqrt{2}$ (2) (với $\dfrac{a-2}{2}.\sqrt{2}$ là đường chéo hình vuông nhỏ).

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{a-2}{2}\sqrt{2} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq 2+2\sqrt{2}$. Do đó mọi hình vuông có cạnh lớn hơn hoặc bằng ($2+2\sqrt{2}$) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy hình vuông $ABCD$ có cạnh ($2+2\sqrt{2}$) thỏa mãn yêu cầu bài toán.



--- HẾT ---

ĐỀ THI CHỌN HSG PGD HẠ HÒA NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2+8x=38-6y^2$.

b) Tìm số tự nhiên n để n^4+4 là số nguyên tố.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x+y+2016$.

b) Chứng minh rằng:

Nếu $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ thì $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $4\left(x^2+4x+2\right)=11\sqrt{x^4+4}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0 \\ y(x+y)^2-2x^2-7y=2 \end{cases}$.

Câu 4: *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O;\,R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Kẻ các đường cao $AD,\,BE,\,CF$ cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ và $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\cos^2 A$.

b) Chứng minh rằng: $S_{DEF}=\left(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C\right).S_{ABC}$.

c) Xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho chu vi ΔDEF đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho $a,\,b,\,c$ là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}.$$

………………..**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG PGD HẠ HÒA NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2+8x=38-6y^2$.

b) Tìm số tự nhiên n để n^4+4 là số nguyên tố.

Lời giải

a) Ta có $4x^2+8x=38-6y^2 \Leftrightarrow 2x^2+4x=19-3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3(7-y^2)$.

Ta thấy: $2(x+1)^2 \vdots 2 \Rightarrow (7-y^2) \vdots 2 \Rightarrow y$ lẻ.

Mặt khác: $7-y^2\ge 0 \Rightarrow y^2\le 7$. Do đó $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$.

Khi đó $2(x+1)^2=18 \Rightarrow x+1=\pm 3 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-4$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)\in\{(2;1);\ (2;-1);\ (-4;1);\ (-4;-1)\}$.

b) Ta có $n^4+4=n^4+4+4n^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$.

Vì n là số tự nhiên nên $n^2+2n+2>1$, mà n^4+4 là số nguyên tố nên $n^2-2n+2=1 \Leftrightarrow n=1$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x+y+2016$.

b) Chứng minh rằng:

Nếu $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ thì $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

Lời giải

a) Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $\left(x-\sqrt{x^2+2015}\right)$ ta được:

$-2015\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015\left(x-\sqrt{x^2+2015}\right)$ (1)

Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $\left(y-\sqrt{y^2+2015}\right)$ ta được:

$-2015\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)=2015\left(y-\sqrt{y^2+2015}\right)$ (2)

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta được $x+y=0$.

Vậy $A=x+y+2016=2016$.

b) Đặt $ax^3=by^3=cz^3=t$, ta có $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}}=\sqrt[3]{t}$ (vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$) (1).

Mặt khác $\sqrt[3]{t}=x\sqrt[3]{a}=y\sqrt[3]{b}=z\sqrt[3]{c}$. Suy ra $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{t}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{t}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $4\left(x^2+4x+2\right)=11\sqrt{x^4+4}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0 \\ y(x+y)^2-2x^2-7y=2 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có $4\left(x^2+4x+2\right)=11\sqrt{x^4+4}$ (1)

$\Leftrightarrow 6\left(x^2+2x+2\right)-2\left(x^2-2x+2\right)=11\sqrt{\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{6\left(x^2+2x+2\right)}{x^2-2x+2}-2=11\sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}}$ (do $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ với mọi x).

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}}$, $(t>0)$. Phương trình (1) trở thành $6t^2-11t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{-1}{6} \end{array}\right.$.

Chọn $t=2$, khi đó $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}=4 \Leftrightarrow 3x^2-10x+6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}\right\}$.

b) Thay $y=0$ vào hệ phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Với $y\neq 0$ ta có:

$$\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0 \\ y(x+y)^2-2x^2-7y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y \\ y(x+y)^2-2\left(x^2+1\right)=7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ (x+y)^2-2\dfrac{x^2+1}{y}=7 \end{cases}$$

.

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}$, $v=x+y$

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{array}\right.$.

- Với $v=3, u=1$ ta có hệ phương trình

  $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{array}\right.$.

- Với $v=-5$, $u=9$ ta có hệ phương trình

  $\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\{(1;2);(-2;5)\}$.

Câu 4: *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ và $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$.

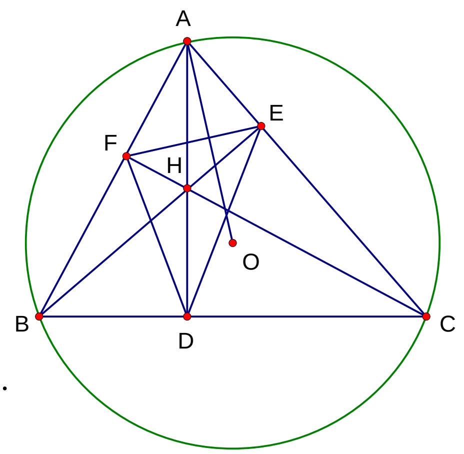
b) Chứng minh rằng: $S_{DEF} = \left(1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C\right).S_{ABC}$.

c) Xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho chu vi ΔDEF đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Ta có ΔABE vuông tại E nên $\cos A = \dfrac{AE}{AB}$, ΔACF vuông tại F nên $\cos A = \dfrac{AF}{AC}$.

Suy ra $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).



Khi đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A$.

b) Tương tự câu a) ta có:

$\dfrac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$, $\dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$.

Từ đó suy ra:

$\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$.

Suy ra $S_{DEF} = \left(1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C\right).S_{ABC}$.

c) Ta chứng minh được $OA \perp EF$; $OB \perp DF$; $OC \perp ED$.

Ta có $2S_{ABC} = 2.\left(S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE}\right) \Rightarrow BC.AD = OA.EF + OB.FD + OC.ED$

$\Rightarrow BC.AD = R\left(EF + FD + ED\right) \Rightarrow EF + FD + ED = \dfrac{BC.AD}{R}$.

Chu vi ΔDEF đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ca}.$$

Lời giải

Ta có $P \ge \dfrac{a^2}{2bc} + \dfrac{b^2}{2ca} + \dfrac{c^2}{2ab} + \dfrac{2ab}{c^2+ab} + \dfrac{2bc}{a^2+bc} + \dfrac{2ca}{b^2+ca}$.

Mà $\dfrac{a^2}{2bc} = \dfrac{a^2+bc}{2bc} - \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{b^2}{2ca} = \dfrac{b^2+ca}{2ca} - \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{c^2}{2ab} = \dfrac{c^2+ab}{2ab} - \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $P \ge \left(\dfrac{a^2+bc}{2bc} + \dfrac{2bc}{a^2+bc}\right) + \left(\dfrac{b^2+ca}{2ca} + \dfrac{2ca}{b^2+ca}\right) + \left(\dfrac{c^2+ab}{2ab} + \dfrac{2ab}{c^2+ab}\right) - \dfrac{3}{2}$

$\ge 2+2+2-\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$ (Vì với $x, y > 0$, áp dụng BĐT Cosi ta được $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2$).

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy GTNN của P bằng $\dfrac{9}{2}$ đạt được khi $a=b=c$.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho $P=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

a) Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P>1$.

b) Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\dfrac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|}=4$.

b) Tìm số nguyên x thỏa mãn $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Cho $a=x+\dfrac{1}{x}$, $b=y+\dfrac{1}{y}$, $c=xy+\dfrac{1}{xy}$. Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2-abc$.

b) Chứng minh rằng với mọi $x>1$ ta luôn có $3\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)<2\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho tứ giác $ABCD$ có $AD=BC$, $AB<CD$. Gọi I,Q,H,P lần lượt là trung điểm của AB,AC,CD,BD.

a) Chứng minh $IPHQ$ là hình thoi và PQ tạo với AD,BC hai góc bằng nhau.

b) Về phía ngoài tứ giác $ABCD$, dựng hai tam giác bằng nhau ADE và BCF. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AB,CD,EF cùng thuộc một đường thẳng.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Tam giác ABC có $BC=40$ cm, phân giác $AD=45$ cm, đường cao $AH=36$ cm. Tính độ dài BD,DC.

Câu 6: *(2,0 điểm)*

Với a,b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1+a)(1+b)=\dfrac{9}{4}$.

Hãy tìm GTNN của $P=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho $P=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

a) Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P>1$.

b) Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\geq 0$; $x\neq 1$; $x\neq 4$.

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{2\left(x+1\right)}{x-1}.$$

$$P>1\Leftrightarrow\frac{2\left(x+1\right)}{x-1}>1\Leftrightarrow\frac{2\left(x+1\right)}{x-1}-1>0\Leftrightarrow\frac{x+3}{x-1}>0\Leftrightarrow x-1>0 \text{ (Do } x\geq 0 \text{ nên } x+3>0\text{)}$$

$\Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp với điều kiện suy ra: $P>1$ khi $x>1$ và $x\neq 4$.

b) Với $x\geq 0$; $x\neq 1$; $x\neq 4$, $P=\dfrac{2\left(x+1\right)}{x-1}=2+\dfrac{4}{x-1}$.

P nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của 4.

P đạt giá trị nguyên lớn nhất $\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$.

Vậy P đạt giá trị nguyên lớn nhất bằng 6 khi $x=2$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\dfrac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|}=4$.

b) Tìm số nguyên x thỏa mãn $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x-3+|3+2x|\neq 0$.

Phương trình $\dfrac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|}=4\Leftrightarrow|5-3x|-|x-1|=4\left(x-3+|3+2x|\right)$

$$\Leftrightarrow|5-3x|-|x-1|+4|3+2x|-4x+12=0 \quad (*).$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Với $x<\dfrac{-3}{2}$, phương trình $(*)\Leftrightarrow -3x+5+x-1+4(2x+3)-4x+12=0$

  $\Leftrightarrow 2x=-28\Leftrightarrow x=-14$ (thỏa mãn đk).

- Với $\dfrac{-3}{2}\leq x<1$, phương trình $(*)\Leftrightarrow -3x+5+x-1-4(2x+3)-4x+12=0$

  $\Leftrightarrow -14x=-4\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{7}$ (thỏa mãn đk).

- Với $1\leq x<\dfrac{5}{3}$, phương trình $(*)\Leftrightarrow -3x+5-x+1-4(2x+3)-4x+12=0$

$$\Leftrightarrow -16x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8} \text{ (loại)}.$$

- Với $x \ge \frac{5}{3}$, phương trình $(*) \Leftrightarrow 3x - 5 - x + 1 - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow -10x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{5} \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-14; \frac{2}{7}\right\}$.

b) Ta có $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1)$.

Ta xét các trường hợp:

- TH1: $x + y = 0 \Rightarrow xy(xy+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 0 \\ xy = -1 \end{array}\right.$.

  Với $xy = 0$ và $x + y = 0$ suy ra $x = y = 0$.

  Với $xy = -1$ và $x + y = 0$ suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

- TH2: $x + y \ne 0 \Rightarrow (x+y)^2$ là số chính phương mà $xy(xy+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp (là hai số nguyên tố cùng nhau). Do đó phương trình $(x+y)^2 = xy(xy+1)$ không có nghiệm nguyên.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là: $(x; y) \in \{(0;0); (1;-1); (-1;1)\}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Cho $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = xy + \frac{1}{xy}$. Tính giá trị của biểu thức $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

b) Chứng minh rằng với mọi $x > 1$ ta luôn có $3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) < 2\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, $b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$, $c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2$.

Lại có: $ab = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

$$\Rightarrow abc = \left(c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).c = c^2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(xy + \frac{1}{xy}\right) = c^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = c^2 + a^2 - 2 + b^2 - 2$$

.

Khi đó: $A = a^2 + b^2 + c^2 - \left(c^2 + a^2 - 2 + b^2 - 2\right) = 4$.

b) Xét $3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) < 2\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) < 2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)$

$$\Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{x}\right) < 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) \ (1) \ (\text{Vì } x > 1 \text{ nên } x - 1 > 0).$$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow t^2-3t-2>0\Leftrightarrow(t-2)(2t+1)>0\ (2)$.

Vì $x>1$ nên $(x-1)^2>0\ \Leftrightarrow x^2+1>2x\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}>2$ hay $t>2\Rightarrow(2)$ đúng $\Rightarrow(1)$ đúng.

Vậy ta có đpcm.

Câu 4: *(4,0 điểm)* Cho tứ giác $ABCD$ có $AD=BC$, $AB<CD$. Gọi I,Q,H,P lần lượt là trung điểm của AB,AC,CD,BD.

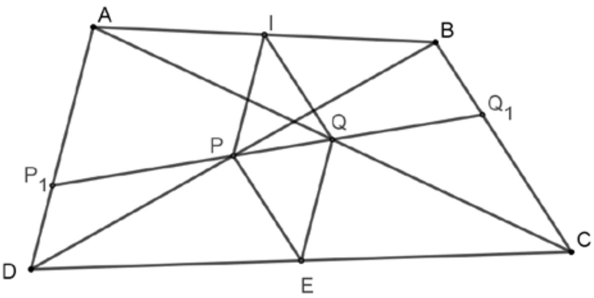
a) Chứng minh $IPHQ$ là hình thoi và PQ tạo với AD,BC hai góc bằng nhau.

b) Về phía ngoài tứ giác $ABCD$, dựng hai tam giác bằng nhau ADE và BCF. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AB,CD,EF cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải

a) Vì $IP//HQ$ và $IP=HQ$ (tính chất đường trung bình của tam giác)

nên $IPHQ$ là hình bình hành.



Mặt khác $IP=IQ$ (do $AD=BC$).

Suy ra $IPHQ$ là hình thoi.

Gọi P_1 và Q_1 lần lượt là giao điểm của PQ với AD và BC.

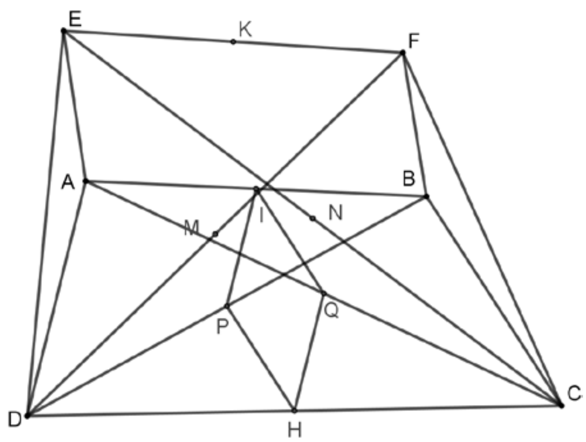
Nhận thấy ΔHPQ cân đỉnh H $\Rightarrow\widehat{HPQ}=\widehat{HQP}$ (1)

Mà $PH//BC\Rightarrow\widehat{BQ_1P}=\widehat{HPQ}$ (so le trong) (2) và $QH//AD\Rightarrow\widehat{AP_1P}=\widehat{HQP}$ (so le trong) (3).

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $\widehat{AP_1P}=\widehat{BQ_1P}$ (đpcm).

b) Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của EF, DF, CE.

Từ giả thiết $\Delta ADE=\Delta BCF$ và dựa vào tính chất đường trung bình của tam giác suy ra $\Delta HMP=\Delta HNQ$ (c.c.c)



$\Rightarrow\widehat{MHP}=\widehat{NHQ}\Rightarrow\widehat{MHQ}=\widehat{NHP}$

$\Rightarrow\widehat{MHN}$ và $\widehat{PHQ}$ có cùng tia phân giác.

Mặt khác dễ thấy $IPHQ$ và $KMHN$ là các hình thoi.

Suy ra HK và HI lần lượt là phân giác của $\widehat{MHN}$ và $\widehat{PHQ}$.

Suy ra H, I, K thẳng hàng.

Câu 5: *(2,0 điểm)* Tam giác ABC có $BC=40$ cm, phân giác $AD=45$ cm, đường cao $AH=36$ cm. Tính độ dài BD, DC.

Lời giải

Đặt $BD = x,\ DC = y$. Giả sử $x < y$. Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông AHD ta được $HD = 27$ cm.

Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC tại E.

Ta có $AE \perp AD \Rightarrow AD^2 = DE.DH \Rightarrow DE = \dfrac{AD^2}{DH} = \dfrac{45^2}{27} = 75$ cm.

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác ta có:

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{EB}{EC} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{75-x}{75+y}$ (1).

Mặt khác $x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - x$, thay vào (1) ta được $x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = 100 \end{array}\right.$.

Do $x < 40$ nên chọn $x = 15 \Rightarrow y = 25$.

Vậy $BD = 15$ cm, $CD = 25$ cm.

Câu 6: *(2,0 điểm)* Với a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1+a)(1+b) = \dfrac{9}{4}$.

Hãy tìm GTNN của $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho hai dãy $a^2;\ 1$ và $1;\ 4$ ta được:

$(1^2+4^2)(a^4+1^2) \geq (a^2+4)^2 \Rightarrow \sqrt{a^4+1} \geq \dfrac{a^2+4}{\sqrt{17}}$ (1). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự ta cũng có $\sqrt{b^4+1} \geq \dfrac{b^2+4}{\sqrt{17}}$ (2). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq \dfrac{a^2+b^2+8}{\sqrt{17}}$ $(*)$.

Mặt khác theo giả thiết $(1+a)(1+b) = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow a + b + ab = \dfrac{5}{4}$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $a^2 + \dfrac{1}{4} \geq a$, $b^2 + \dfrac{1}{4} \geq b$, $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

Cộng từng vế ba BĐT ta được: $\dfrac{3}{2}(a^2+b^2) + \dfrac{1}{2} \geq a + b + ab = \dfrac{5}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

Thay vào $(*)$ ta được $P \geq \dfrac{\dfrac{1}{2}+8}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Vậy GTNN của P bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ đạt được khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH LẠNG SƠN NĂM HỌC 2014-2015

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ $(x\ge 0; x\ne 1)$

1) Rút gọn biểu thức *A*.
2) Chứng minh rằng *A* không nhận giá trị nguyên với $x>0; x\ne 1$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Giải phương trình : $x^2+6x+10=2\sqrt{2x+5}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2(a+1)x+2a=0$ (1) (với *a* là tham số).
1) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi *a*.
2) Tìm *a* để phương trình (1) có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo là $2\sqrt{3}$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho góc *xOy* có số đo bằng $60°$. Đường tròn có tâm *K* tiếp xúc với tia *Ox* tại *M* và tiếp xúc với tia *Oy* tại *N*. Trên tia *Ox* lấy điểm *P* thỏa mãn $OP=3OM$. Tiếp tuyến của đường tròn *(K)* qua *P* cắt tia *Oy* tại *Q* khác *O*. Đường thẳng *PK* cắt đường thẳng *MN* tại *E*. Đường thẳng *QK* cắt đường thẳng *MN* tại *F*.
1) Chứng minh rằng hai tam giác ΔMPE và ΔKPQ đồng dạng với nhau.
2) Chứng minh tứ giác *PQEF* nội tiếp.
3) Gọi *D* là trung điểm *PQ*. Chứng minh tam giác ΔDEF đều.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho *x*, *y* dương thỏa mãn điều kiện : $x+y\ge 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………………………….….Số báo danh:………………….

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH LẠNG SƠN NĂM HỌC 2014-2015

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\quad (x\ge 0; x\ne 1)$

1) Rút gọn biểu thức *A*.
2) Chứng minh rằng *A* không nhận giá trị nguyên với $x>0; x\ne 1$.

Lời giải

Rút gọn được $A=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.
Chứng minh được 0 < A <1 nên *A* không nguyên.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Giải phương trình : $x^2+6x+10=2\sqrt{2x+5}$.

Lời giải

$x^2+6x+10=2\sqrt{2x+5}\Leftrightarrow x^2+8x+16=2x+5+2\sqrt{2x+5}+1$
$\Leftrightarrow (x+4)^2=\left(\sqrt{2x+5}+1\right)^2$.
Nghiệm phương trình là $x=-2$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2(a+1)x+2a=0$ (1) (với *a* là tham số).
1) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi *a*.
2) Tìm *a* để phương trình (1) có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo là $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Có $\Delta'=a^2+1>0$ với mọi *a* nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi *a*.
Theo giả thiết: $x_1^2+x_2^2=12$, và theo Viet $\begin{cases}x_1+x_2=2a+2\\ x_1.x_2=2a\end{cases}$
Nên $(2a+2)^2-4a=12$ hay $a=1;\ a=-2$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho góc *xOy* có số đo bằng $60°$. Đường tròn có tâm *K* tiếp xúc với tia *Ox* tại *M* và tiếp xúc với tia *Oy* tại *N*. Trên tia *Ox* lấy điểm *P* thỏa mãn $OP=3OM$. Tiếp tuyến của đường tròn *(K)* qua *P* cắt tia *Oy* tại *Q* khác *O*. Đường thẳng *PK* cắt đường thẳng *MN* tại *E*. Đường thẳng *QK* cắt đường thẳng *MN* tại *F*.
1) Chứng minh rằng hai tam giác *MPE* và *KPQ* đồng dạng với nhau
2) Chứng minh tứ giác *PQEF* nội tiếp
3) Gọi *D* là trung điểm *PQ*. Chứng minh tam giác *DEF* đều.

Lời giải

1) *PK* là phân giác góc $\widehat{QPO}$ nên $\widehat{MPE}=\widehat{KPQ}$ (*)
ΔOMN đều $\Rightarrow \widehat{EMP}=120°$.

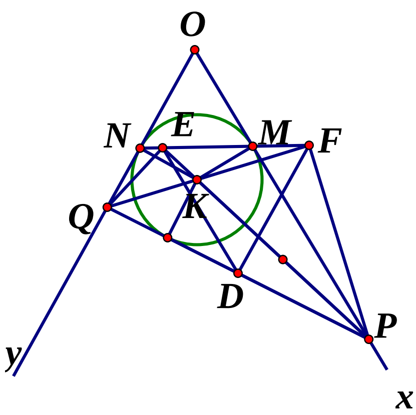
QK cũng là phân giác $\widehat{OQP}$

$\Rightarrow \widehat{QKP} = 180^0 - \left(\widehat{KPQ} + \widehat{KQP}\right)$.

Mà $2.\widehat{KQP} + 2.\widehat{KPQ} = 180° - 60° = 120° \Rightarrow \widehat{QKP} = 120°$.

Do đó $\widehat{EMP} = \widehat{QKP}$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $\Delta MPE \backsim \Delta KPQ$.



2) Do $\Delta MPE \backsim \Delta KPQ$ nên $\widehat{MEP} = \widehat{KQP}$ hay $\widehat{FEP} = \widehat{FQP}$.

Suy ra tứ giác $PQEF$ nội tiếp trong đường tròn.

3) Do $\Delta MPE \backsim \Delta KPQ$ nên $\frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PQ}$ suy ra $\frac{PM}{PE} = \frac{PK}{PQ}$.

Ngoài ra $\widehat{MPK} = \widehat{EPQ}$, do đó $\Delta MPK \backsim \Delta EPQ$ (c.g.c).

Từ đó: $\widehat{PEQ} = \widehat{PMK} = 90°$.

Suy ra, D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQEF$.
Vì vậy ΔDEF cân tại D.

Ta có: $\widehat{FPD} = 180° - \left(\widehat{FDP} + \widehat{EDQ}\right) = \widehat{POQ} = 60°$.

Do đó ΔDEF là tam giác đều.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho x, y dương thỏa mãn điều kiện : $x + y \geq 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$.

Lời giải

Ta có $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \geq 0$ nên $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với a, b dương.

Từ giả thiết, ta có:

$$2P = 3(x + y) + (3x + \frac{12}{x}) + \left(y + \frac{16}{y}\right) \geq 3.6 + 2.6 + 2.4 = 38$$

Nên $2P \geq 38 \Leftrightarrow P \geq 19$. Vậy $Min\ P = 19$ khi $x = 2; y = 4$.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NAM ĐỊNH NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(3,0 điểm)*

1. Tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

2. Cho các số thực x, y, z thoả mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$.

Tính giá trị của $S=\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

1. Giải phương trình $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0 \\ x^2+y-\sqrt{7x^2-3}=0. \end{cases}$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+y^2+xy-x-y=1$.

2. Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$.

Câu 4: *(7,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{ACB}$. Đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DIC tại điểm thứ hai là E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Đường thẳng đi qua E và song song với AB cắt BD tại P.

1. Chứng minh tam giác QBI cân.

2. Chứng minh $BP.BI=BE.BQ$.

3. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD, K là trung điểm của JE. Chứng minh $PK//JB$.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NAM ĐỊNH NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(3,0 điểm)*

1. Tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

2. Cho các số thực x, y, z thoả mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$.

Tính giá trị của $S=\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$.

Lời giải

1. Đặt $M=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}$. Ta có $M^2=\dfrac{10+2\sqrt{22}}{5+\sqrt{22}}=2 \Rightarrow M=\sqrt{2}$.

Ta lại có $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=3-\sqrt{2}$.

Do đó: $\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=3$.

2. Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$.

Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$.

Suy ra $S=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$$=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}.$$

Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$.

Do đó $S=-\dfrac{1}{7}$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

1. Giải phương trình $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0 & (1)\\ x^2+y-\sqrt{7x^2-3}=0. & (2)\end{cases}$

Lời giải

1. Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

$2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+11}$

$\Leftrightarrow 9x-1+4\sqrt{2x^2+5x-3}=5x+11\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-3}=3-x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ 2x^2+5x-3=9-6x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x^2+11x-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-12.\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Điều kiện $x\ge 1, y\in\mathbb{R}$.

$$y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow y^2-y-\sqrt{x-1}\left(y-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(y-1\right)\left(y-\sqrt{x-1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=\sqrt{x-1}\end{array}\right..$$

TH1: Với $y=1$, thay vào (2) ta được

$$x^2+1-\sqrt{7x^2-3}=0\Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{7x^2-3}\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=7x^2-3$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện của x).

TH2: Với $y=\sqrt{x-1}$, thay vào (2) ta được:

$$x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{7x^2-3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{7x^2-3}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x+2\right)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{7\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7\left(x+2\right)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0.\end{array}\right.$$

*) $x=2$ suy ra $y=1$.

*) $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7\left(x+2\right)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x+2\right)\frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=0.$$

Với $x\ge 1$ thì $\sqrt{7x^2-3}-2\ge 0\Rightarrow\left(x+2\right)\dfrac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}\ge 0$.

Suy ra $\left(x+2\right)\dfrac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $\left(1;1\right),\left(2;1\right)$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các số nguyên *x*, *y* thỏa mãn $x^2+y^2+xy-x-y=1$.

2. Chứng minh với mọi số nguyên dương *n* lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{\left(n-1\right)\sqrt{n}}}}}<3$.

Lời giải

1. Ta có $x^2+y^2+xy-x-y=1\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2+\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$.

Ta có bảng giá trị tương ứng (học sinh có thể xét từng trường hợp).

$x+y$	$x-1$	$y-1$	Nghiệm $(x;y)$
2	0	0	$(1;1)$
-2	0	0	Loại
0	2	0	Loại
0	-2	0	$(-1;1)$
0	0	2	Loại
0	0	-2	$(1;-1)$

Vậy các số $(x;y)$ cần tìm là $(1;1)$, $(-1;1)$, $(1;-1)$.

2. Với mỗi số nguyên dương k ta có $k=\sqrt{k^2}=\sqrt{1+\left(k^2-1\right)}=\sqrt{1+(k-1)(k+1)}$.

Sử dụng đẳng thức trên liên tiếp với $k=3,4,...,n$ ta được:

$$3=\sqrt{1+2.4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}}=\cdots$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)(n+1)}}}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}}>\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}\quad \text{(đpcm).}$$

Câu 4: *(7,0 điểm)*

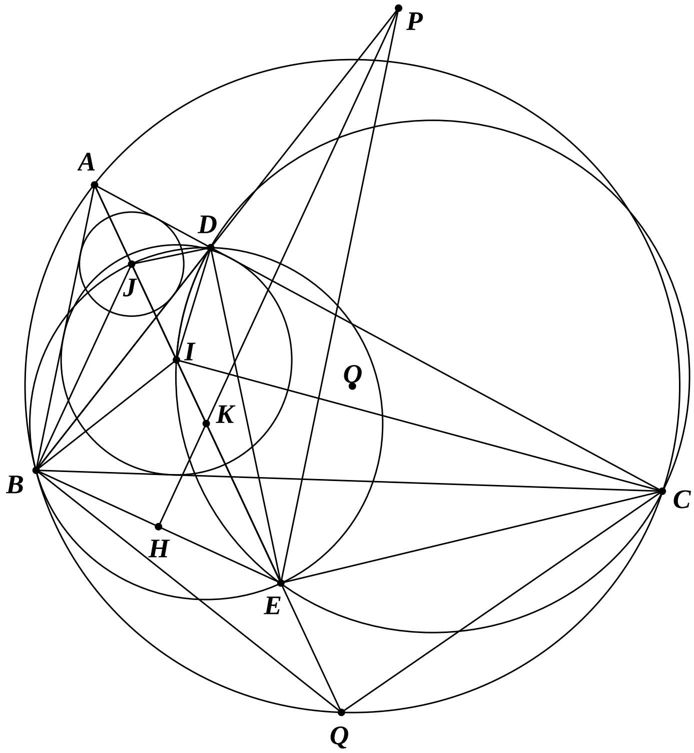
Cho tam giác nhọn *ABC* có $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Điểm *D* thuộc cạnh *AC* sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{ACB}$. Đường thẳng *AI* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *DIC* tại điểm thứ hai là *E* và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là *Q*. Đường thẳng đi qua *E* và song song với *AB* cắt *BD* tại *P*.

1. Chứng minh tam giác *QBI* cân.

2. Chứng minh $BP.BI=BE.BQ$.

3. Gọi *J* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABD*, *K* là trung điểm của *JE*. Chứng minh $PK//JB$.

Lời giải



1. Ta có AI là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên Q là điểm chính giữa của cung BC của (O).

Suy ra $\widehat{BAQ} = \widehat{QAC} = \widehat{QBC}$.

Khi đó $\widehat{IBQ} = \widehat{IBC} + \widehat{QBC} = \widehat{IBA} + \widehat{BAQ} = \widehat{BIQ} \Rightarrow \Delta QBI$ cân tại Q.

2. $\Delta ABD \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$ hay $AB^2 = AD.AC$. (1)

$\Delta ADI \backsim \Delta AEC$ (g.g) (có góc A chung và $\widehat{AID} = \widehat{ACE}$)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AI}{AC}$ hay $AI.AE = AD.AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AI.AE = AB^2 \Rightarrow \Delta ABI \backsim \Delta AEB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ABI} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$.

Mà $\widehat{AEP} = \widehat{BAE} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ (hai góc so le trong),

suy ra $\widehat{BEP} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{BAC}}{2}$.

Theo ý 1 ta có $\widehat{BIQ} = \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$ suy ra $\widehat{BIQ} = \widehat{BEP}$.

Ta có $\widehat{BPE} = \widehat{ABD} = \widehat{ACB} = \widehat{BQI}$

Suy ra $\Delta PBE \backsim \Delta QBI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BP}{BQ} = \frac{BE}{BI} \Leftrightarrow BP.BI = BE.BQ$ (đpcm).

3. $\Delta BQI \backsim \Delta BPE$ và ΔBQI cân tại Q nên ΔPBE cân tại P, suy ra $\widehat{PBE} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$

và $PH \perp BE$ với H là trung điểm của BE.

Vì HK là đường trung bình của ΔEBJ nên $HK // BJ$.

Ta có $\widehat{JBD} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$ và $\widehat{DBE} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$, suy ra $\widehat{JBE} = 90°$ hay $JB \perp BE$.

Suy ra $PH // JB$. Do đó P, H, K thẳng hàng hay $PK // JB$.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

Lời giải

Giả sử tất cả các câu lạc bộ đều có không quá 8 học sinh.

Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh.

Nếu $N > 4$, từ 5 trong số các câu lạc bộ này, chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh, khi đó 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nếu $N < 4$, khi đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không quá $3.8 = 24$, nghĩa là còn ít nhất $35 - 24 = 11$ học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh. Chọn 10 học sinh trong số này, không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $N = 4$.

Số học sinh tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4.8 = 32$, nghĩa là còn ít nhất 3 học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh.

Chọn 2 trong số học sinh này và mỗi câu lạc bộ trên chọn 2 học sinh, khi đó 10 học sinh không thỏa mãn điều kiện.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh tham gia.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2014 - 2015

Câu 1: *(1,5 điểm)*

Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right).$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A=-6.$

Câu 2: *(1,5 điểm)*

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình trên khi $m=10.$

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;\,y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x+y-2014=\frac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}.$$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

a) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{9a^3+3b^2+c}+\frac{b}{9b^3+3c^2+a}+\frac{c}{9c^3+3a^2+b}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\,y)$ thỏa mãn: $x(1+x+x^2)=4y(y-1).$

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng AC có độ dài bằng $a.$ Trên đoạn AC lấy điểm B sao cho $AC=4AB.$ Tia Cx vuông góc với AC tại điểm $C,$ gọi D là một điểm bất kỳ thuộc tia Cx (D không trùng với C). Từ điểm B kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại $K,\ E.$

a) Tính giá trị $DC.CE$ theo $a.$

b) Xác định vị trí điểm D để tam giác BDE có diện tích nhỏ nhất .

c) Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn có một dây cung cố định.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho dãy gồm 2015 số: $\dfrac{1}{1};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};...;\dfrac{1}{2014};\dfrac{1}{2015}.$

Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u,v bất kỳ trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u+v+uv$ vào vị trí của u hoặc $v.$ Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng đó không phụ thuộc vào việc chọn các số u,v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

-----------*Hết*-----------

Ghi chú: ***- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.***

- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………Số báo danh:……………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2014 - 2015

Câu 16. *(1,5 điểm)*

Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A=-6$.

Lời giải

a) A xác định khi $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+2\sqrt{x}-3\neq 0 \\ \sqrt{x}+3\neq 0 \\ \sqrt{x}-1\neq 0 \\ 2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)\neq 0 \\ x\neq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 4 \end{cases}$ ĐKXĐ: $x\geq 0;\ x\neq 1;\ x\neq 4$.

Ta có: $T=\dfrac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}$

$=2-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1}$

$M=2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

$A=T:M=\dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1}:\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$

Vậy với $x\geq 0;\ x\neq 1;\ x\neq 4$ thì $A=\dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$.

b) Biến đổi: $A=-6\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}=-6\Leftrightarrow \sqrt{x}-9=-6\left(\sqrt{x}-2\right)$

$\Leftrightarrow 7\sqrt{x}=21\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy để $A=-6$ thì $x=9$.

Câu 17. *(1,5 điểm)*

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình trên khi $m=10$.

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;\, y)$ thỏa mãn hệ thức:

$x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$.

Lời giải

Hệ phương trình: $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Thay $m=10$ ta được hệ: $\begin{cases} 10x-2y=2 \\ 2x+10y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y=1 \\ 2x+10y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50x-10y=10 \\ 2x+10y=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 52x=15 \\ 2x+10y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{15}{52} \\ y=\dfrac{5-2x}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{15}{52} \\ y=\dfrac{23}{52} \end{cases}$

Vậy với với $m=10$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=\left(\dfrac{15}{52};\dfrac{23}{52}\right)$

b) $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ 2x+m\dfrac{mx-2}{2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ (m^2+4)x=2m+10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\dfrac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in R$

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x=\dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\dfrac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}$

Thay $x=\dfrac{2m+10}{m^2+4}$ và $y=\dfrac{5m-4}{m^2+4}$ vào hệ thức: $x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$

Ta được: $\dfrac{-2014m^2+7m-8050}{m^2+4}=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$

$\Leftrightarrow -2014m^2+7m-8050=-2015m^2+14m-8056$

$\Leftrightarrow m^2-7m+6=0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=6 \end{array}\right.$

Vậy để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức:

$x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$ thì $m=1$ hoặc $m=6$.

Câu 18. *(1,5 điểm)*

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{9a^3+3b^2+c}+\frac{b}{9b^3+3c^2+a}+\frac{c}{9c^3+3a^2+b}$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn: $x(1+x+x^2)=4y(y-1)$.

Lời giải

a) Ta có: $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$, $\forall a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$.

(1)

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(a^2z^2-2acxz+c^2z^2)+(b^2y^2-2bcyz+c^2z^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(by-cz)^2\geq 0$ (đúng)

Dấu $"="\Leftrightarrow\begin{cases}ay=bx\\az=cx\\by=cz\end{cases}$

Áp dụng BĐT (1) ta có: $(9a^3+3b^2+c)(\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c)\geq(a+b+c)^2=1$

Dấu $"="\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow 9a^3+3b^2+c\geq\frac{1}{\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c}$ $\Rightarrow\frac{a}{9a^3+3b^2+c}\leq a(\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c)$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{9b^3+3c^2+a}\leq b(\frac{1}{9b}+\frac{1}{3}+a)$; $\frac{c}{9c^3+3a^2+b}\leq c(\frac{1}{9c}+\frac{1}{3}+b)$

$\Rightarrow P\leq 3.\frac{1}{9}+\frac{a+b+c}{3}+(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow P\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{(a+b+c)^2}{3}=1$. Do $ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$.

Vậy $P_{max}=1\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Ta có $x(1+x+x^2)=4y(y-1)$

$\Leftrightarrow(x^3+x^2)+(x+1)=4y^2-4y+1\Leftrightarrow(x+1)(x^2+1)=(2y-1)^2$ (1)

Vì $x, y\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow(2y-1)^2>0$ nên từ (1) $\Rightarrow x\geq 0$ và x chẵn.

Giả sử $(x+1, x^2+1)=d$ $\Rightarrow d$ lẻ và $x^2-1\,\vdots\, d$; $x^2+1\,\vdots\, d$ $\Rightarrow 2\,\vdots\, d$ $\Rightarrow d=1$

Vì $(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương và $(x+1, x^2+1)=1$ nên $(x+1)$ và (x^2+1) cũng là hai số chính phương.

Do $x\geq 0$ $\Rightarrow x^2<x^2+1\leq(x+1)^2$ $\Rightarrow x^2+1=(x+1)^2$ $\Rightarrow x=0$

Khi $x=0$, có $(1)\Leftrightarrow 4y(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$.

Vậy có hai cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0;0)$; $(0;1)$.

Câu 19. *(1,5 điểm)*

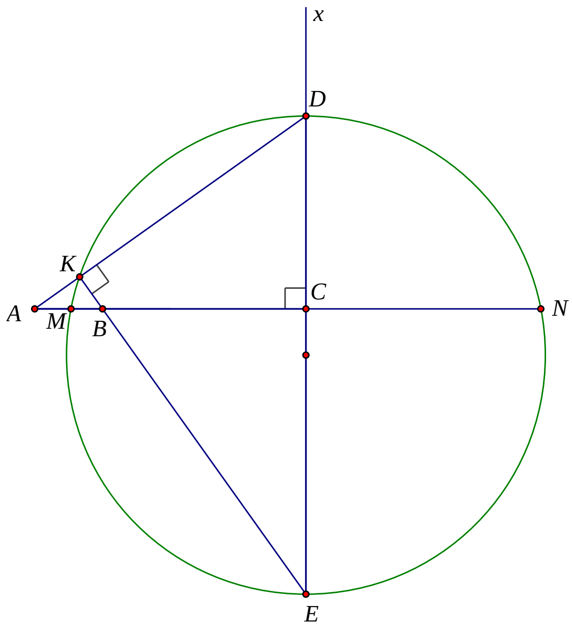
Cho đoạn thẳng AC có độ dài bằng a. Trên đoạn AC lấy điểm B sao cho $AC=4AB$. Tia Cx vuông góc với AC tại điểm C, gọi D là một điểm bất kỳ thuộc tia Cx (D không trùng với C). Từ điểm B kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại K, E.

a) Tính giá trị $DC.CE$ theo a.

b) Xác định vị trí điểm D để tam giác BDE có diện tích nhỏ nhất .

c) Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn có một dây cung cố định.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{EBC}=\widehat{ADC}$ (Cùng bù với góc $\widehat{KBC}$); $\widehat{ACD}=\widehat{ECB}=90°$

$\Rightarrow \Delta ACD\# \ \Delta ECB$ (g - g)

$\Rightarrow \dfrac{DC}{BC}=\dfrac{AC}{EC} \Rightarrow DC.CE=AC.BC$.

Do $AB=\dfrac{a}{4}$; $BC=\dfrac{3a}{4} \Rightarrow DC.EC=AC.BC=\dfrac{3a^2}{4}$.

b) $S_{\Delta BDE}=\dfrac{1}{2}BC.DE \Rightarrow S_{\Delta BDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi DE nhỏ nhất.

Ta có: $DE=DC+EC \geq 2\sqrt{DC.EC} =2\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} =a\sqrt{3}$ (Theo chứng minh phần a).

Dấu $"=" \Leftrightarrow DC = EC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow S_{(BDE)}$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ khi D thuộc tia Cx sao cho $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Gọi giao điểm của đường tròn đường kính DE với đường thẳng AC là M, N (M nằm giữa A và B) $\Rightarrow M, N$ đối xứng qua DE.

Ta có: $\Delta AKB \# \Delta ACD$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AK.AD = AC.AB. \qquad (1)$$

$\Delta AKM \# \Delta AND$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow AK.AD = AM.AN. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AM.AN = AC.AB = \dfrac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{4} = (AC - MC)(AC + NC) = AC^2 - MC^2$ (Do $MC = NC$)

$\Rightarrow MC^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow MC = NC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow M, N$ là hai điểm cố định.

Vậy đường tròn đường kính DE luôn có dây cung MN cố định.

Câu 20. *(1,0 điểm)*

Cho dãy gồm 2015 số: $\dfrac{1}{1}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; ...; \dfrac{1}{2014}; \dfrac{1}{2015}$.

Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u, v bất kỳ trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u + v + uv$ vào vị trí của u hoặc v. Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng đó không phụ thuộc vào việc chọn các số u, v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

Lời giải

Với hai số thực u, v bất kỳ ta luôn có: $(u+1)(v+1) = u + v + uv + 1 = (u + v + uv) + 1$ (*)

Với dãy số thực bất kỳ $a_1; a_2; ...; a_{2015}$, ta xét "***Tích thêm*** T":

$$T = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)...(a_{2015} + 1)$$

Áp dụng cách biến đổi dãy như trong đề bài kết hợp với nhận xét (*), ta nhận thấy "***Tích thêm*** T" không thay đổi với mọi dãy thu được.

Với dãy đã cho ban đầu của bài toán, “***Tích thêm*** T”:

$$T=\left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)...\left(\frac{1}{2015}+1\right)=\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}....\frac{2015}{2014}.\frac{2016}{2015}=2016.$$

Giả sử sau 2014 lần biến đổi tùy ý theo yêu cầu, dãy còn lại chỉ còn một số là x thì “***Tích thêm*** T” đối với dãy cuối là: $T=x+1$.

Vậy ta có: $x+1=2016 \Rightarrow x=2015$.

Bài toán được giải quyết và sau 2014 lần biến đổi dãy theo đúng yêu cầu của bài toán ta thu được số 2015.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ YÊN NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $P=\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}+\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right).$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P>6$.

Câu 2: *(4,5 điểm)*

Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3.$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

Cho ba số không âm x,y,z thỏa mãn $\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{1+2y}+\dfrac{1}{1+2z}=2.$

Chứng minh rằng $xyz\le\dfrac{1}{64}$.

Câu 4: *(2,5 điểm)*

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A}<90^\circ$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng nửa mặt phẳng bờ AD, D và M cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN.

Câu 5: *(5,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, G là trọng tâm. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt CG tại M. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại N. Gọi X,Y theo thứ tự là giao điểm của CN, AN và đường thẳng qua B song song với AC; Z,T theo thứ tự là giao điểm của BM, AM và đường thẳng qua C song song với AB. Chứng minh rằng :

a) $AB.CZ=AC.BX$.

b) $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ YÊN NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1: *(4,0 điểm)* Cho biểu thức $P=\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}+\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P>6$.

Lời giải

a) $P=\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}+\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$ (đk: $0<a\neq 1$)

$=\frac{\sqrt{a^3}-1^3}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}-\frac{\sqrt{a^3}+1^3}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}+\left(\frac{\sqrt{a^2}-1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}-\frac{\left(2+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)$

$=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}+\frac{a-1}{\sqrt{a}}.\frac{3a+3\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2-a+\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$

$=\frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}-\frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}+\frac{a-1}{\sqrt{a}}.\frac{2a+2\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$

$=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}.\frac{2\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$

$=2+\frac{2\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}$

$=\frac{2\sqrt{a}+2a+2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}}$

$=2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}+4$.

Vậy với $0<a\neq 1$ thì $P=2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}+4$.

b) Ta có $2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}}=4$ vậy $P\geq 8$ hay $P>6$ (đpcm).

Câu 2: *(4,5 điểm)* Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

Lời giải

$\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

$\Leftrightarrow 4x^2+5x+1-4\left(x^2-x+1\right)=\left(9x-3\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 9x-3=\left(9x-3\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}\right)$

$\Leftrightarrow \left(9x-3\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-3=0 \\ \sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}-1=0. \end{array}\right.$$

TH1: $9x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

TH2: Ta dễ chứng minh được phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}-1=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{3}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)* Cho ba số không âm x,y,z thỏa mãn $\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{1+2y}+\dfrac{1}{1+2z}=2.$

Chứng minh rằng $xyz \le \dfrac{1}{64}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{1+2x}=1-\dfrac{1}{1+2y}+1-\dfrac{1}{1+2z}=\dfrac{2y}{1+2y}+\dfrac{2z}{1+2z} \ge 2\sqrt{\dfrac{4yz}{(1+2y)(1+2z)}}$.

Tương tự ta có : $\dfrac{1}{1+2y} \ge 2\sqrt{\dfrac{4xz}{(1+2x)(1+2z)}}$.

$\dfrac{1}{1+2z} \ge 2\sqrt{\dfrac{4xy}{(1+2x)(1+2y)}}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{1+2x}.\dfrac{1}{1+2y}.\dfrac{1}{1+2z} \ge 8.\sqrt{\dfrac{64x^2y^2z^2}{(1+2x)^2(1+2y)^2(1+2z)^2}}$

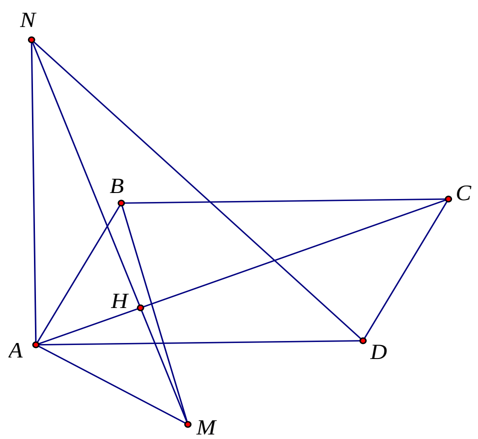
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)} \ge 8.\dfrac{8xyz}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)}$

$\Leftrightarrow 1 \ge 64xyz$

$\Leftrightarrow xyz \le \dfrac{1}{64}$ (đpcm).

Câu 4: *(2,5 điểm)* Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A}<90^\circ$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng nửa mặt phẳng bờ AD, D và M cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của MN và AC.

Ta có $\widehat{NAD}+\widehat{BAM}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NAB}+\widehat{BAD}+\widehat{BAD}+\widehat{DAM}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NAM}+\widehat{BAD}=180^\circ$.

Mặt khác $AB//CD$ $\Rightarrow \widehat{BAD}+\widehat{ABC}=180^\circ$.

Do đó $\widehat{NAM}=\widehat{ABC}$ $\left(=180^\circ-\widehat{BAD}\right)$.

Xét ΔNAM và ΔCAB có $AM=AB; AN=BC; \widehat{NAM}=\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta NAM=\Delta CAB \Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{AMN}$.

Xét ΔAHM có $\widehat{AMN}+\widehat{MAH}=\widehat{BAC}+\widehat{HAM}=\widehat{BAM}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AHM}=90^\circ$.

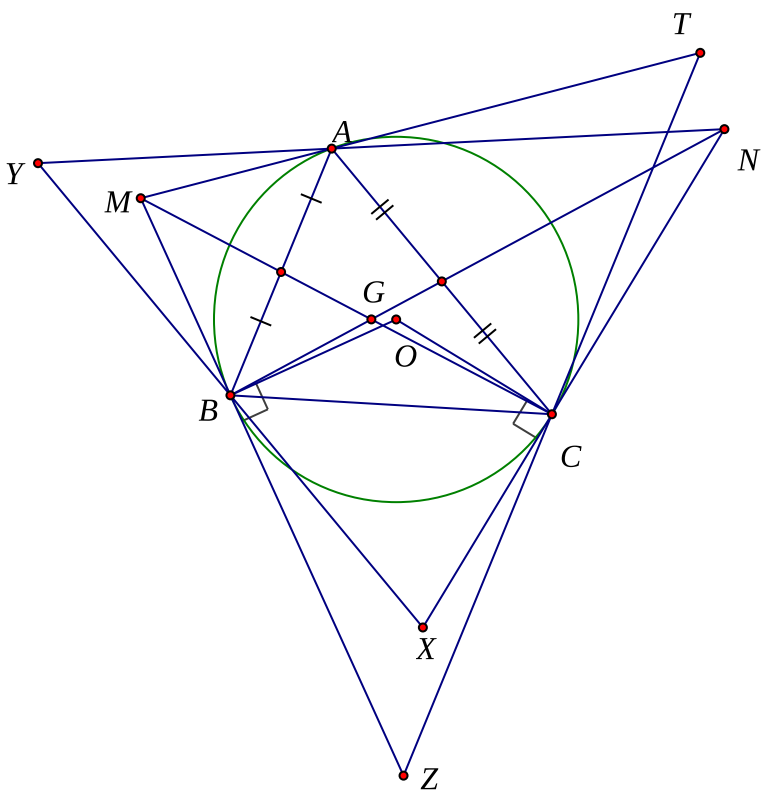
Vậy $AC\perp MN$.

Câu 5: *(5,0 điểm)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, G là trọng tâm. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt CG tại M. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại N. Gọi X,Y theo thứ tự là giao điểm của CN, AN và đường thẳng qua B song song với AC; Z,T theo thứ tự là giao điểm của BM, AM và đường thẳng qua C song song với AB. Chứng minh rằng :

a) $AB.CZ=AC.BX$.

b) $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}$.

Lời giải



a) Xét ΔBZC và ΔACB có:

$\widehat{CBZ}=\widehat{BAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung).

$\widehat{BCZ}=\widehat{ABC}$ (so le trong, $AB//CZ$)

Do đó $\Delta BZC \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CZ}{BC} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow AB.CZ = BC^2$. (1)

Tương tự, $\Delta ABC \backsim \Delta CXB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{BX} = \dfrac{AC}{CB} \Rightarrow AC.BX = BC^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CZ = AC.BX\left(= BC^2\right)$.

b) Vì $XY // AC$ và BN đi qua trung điểm AC nên $BX = BY$.

Vì $ZT // AB$ và CM đi qua trung điểm AB nên $CZ = CT$.

Theo a) có $AB.CZ = AC.BX \Rightarrow \dfrac{AC}{CZ} = \dfrac{AB}{BX} \Rightarrow \dfrac{AC}{CT} = \dfrac{AB}{BY}$.

Mặt khác $\widehat{ACT} = \widehat{ABY}\left(= \widehat{BAC}\right)$.

Do đó $\Delta CTA \backsim \Delta BYA\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{ATC} = \widehat{AYB}$

Ta lại có $\widehat{ATC} = \widehat{MAB}; \widehat{AYB} = \widehat{NAC}$ (đồng vị) $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

……………..**HẾT**……………

ĐỀ THI CHỌN HSG ĐỒNG NAI NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(4,0 điểm)* Tìm các số thực x thỏa $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$.

Câu 2: *(4,0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2y=1 \\ y^3+2x=-1 \end{cases}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)* Cho m và n là hai số nguyên dương lẻ thỏa $\begin{cases} (m^2+2)\,\vdots\, n \\ (n^2+2)\,\vdots\, m \end{cases}$.

1) Hãy tìm một cặp gồm hai số nguyên dương lẻ $(m;n)$ thỏa các điều kiện đã cho với $m>1$ và $n>1$.

2) Chứng minh $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, 4mn$.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

1) Tính số các ước dương của số 1000.

2) Tính số các ước dương chẵn của số 1000.

Câu 5: *(4,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn. Gọi (O) là đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng OB và DE, gọi N là giao điểm của hai đường thẳng OC và DE. Chứng minh bốn điểm B,C,M,N cùng thuộc một đường tròn.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG ĐỒNG NAI NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(4,0 điểm)* Tìm các số thực x thỏa $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$.

Lời giải

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho $x^2\neq 0$ ta được:

$$x^4+2x^3+x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{2} & (1) \\ x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{2} & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) ta được $x=\dfrac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Giải (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\dfrac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2y=1 \\ y^3+2x=-1 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x^3+2y=1 \\ y^3+2x=-1 \end{cases} \Rightarrow x^3+y^3+2x+2y=0 \Leftrightarrow (x+y)\left(x^2+y^2-xy+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x^2+y^2-xy+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x \\ \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+2=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Thay $y=-x$ vào $x^3+2y=1$ ta được $x^3-2x-1=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Với $x=-1 \Rightarrow y=1$.

Với $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y)=(-1;1)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 3: *(4,0 điểm)* Cho m và n là hai số nguyên dương lẻ thỏa $\begin{cases}(m^2+2)\,\vdots\, n\\(n^2+2)\,\vdots\, m\end{cases}$.

1) Hãy tìm một cặp gồm hai số nguyên dương lẻ $(m;n)$ thỏa các điều kiện đã cho với $m>1$ và $n>1$.

2) Chứng minh $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, 4mn$

Lời giải

1) Với $m=11$ và $n=41$ thỏa các điều kiện của bài toán

Vì khi đó $m^2+2=123\,\vdots\, 41$ và $n^2+2=1683\,\vdots\, 11$.

2) Vì $(m^2+2)\,\vdots\, n$ mà $n^2\,\vdots\, n$ nên $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, n$ (1)

Tương tự $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, m$ (2)

Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n $\Rightarrow m^2+n^2\,\vdots\, d$

Theo chứng minh trên $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, m \Rightarrow (m^2+n^2+2)\,\vdots\, d\Rightarrow 2\,\vdots\, d$

$\Rightarrow d=1$ (3) ; nếu $d>1$ thì $d=2$ mâu thuẫn với m và n lẻ

Từ (1), (2) , (3) suy ra $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, mn$

Cuối cùng vì m lẻ nên $m=2k+1$ (với $k\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow m^2=4k(k+1)+1$

Tương tự $n^2=4l(l+1)+1$(với $l\in\mathbb{N}$)

Suy ra $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, 4$.

Mà $(4,mn)=1$ nên suy ra $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, 4mn$.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

1) Tính số các ước dương của số 1000.

2) Tính số các ước dương chẵn của số 1000.

Lời giải

1) Ta có $1000=2^3.5^3$

Gọi k là một ước dương của 1000. Suy ra $k=2^n.5^m$ với $n,m\in\mathbb{N}$ thỏa $n\le 3$ và $m\le 3$

Vậy số ước dương của 1000 là $4.4=16$

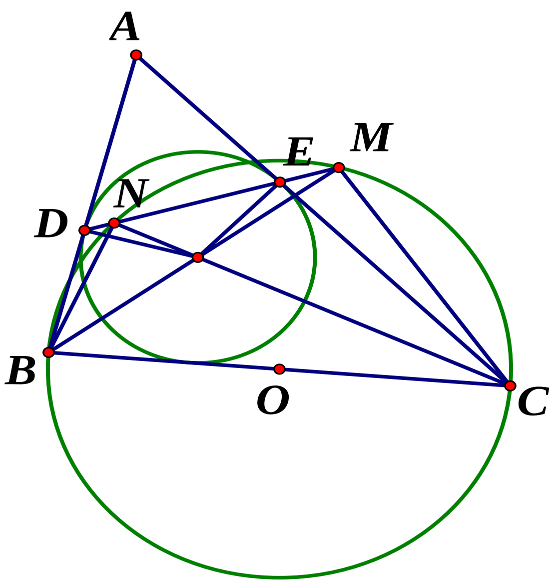
2) Gọi k là một ước dương chẵn của 1000. Suy ra $k=2^n.5^m$ với $n,m\in\mathbb{N}$ thỏa $1\le n\le 3$ và $m\le 3$

Vậy số ước dương chẵn của 1000 là $3.4=12$.

Câu 5: *(4,0 điểm)*Cho tam giác ABC có ba góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn. Gọi (O) là đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại D,

E. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng OB và DE, gọi N là giao điểm của hai đường thẳng OC và DE. Chứng minh bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Theo giả thiết $AD = AE$ suy ra ΔADE cân tại A $\Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{AED} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

Mà $\widehat{COM} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Vậy $\widehat{CEM} = \widehat{COM}$ suy ra tứ giác $COEM$ là tứ giác nội tiếp.

Theo giả thiết $OE \perp AC$. Từ đó $BM \perp CM$

Tương tự $CN \perp BN$ suy ra tứ giác $BCMN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BC.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN VĨNH BẢO 2013-2014

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức: $P=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\frac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x=\frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Bài 2: (4 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (D) và (L) lần lượt là đồ thị của hai hàm số: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ và $y=|x|$.

a) Vẽ đồ thị (D) và (L).

b) (D) và (L) cắt nhau tại M và N. Chứng minh OMN là tam giác vuông.

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình: $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$.

Bài 4: (2 điểm) Qua đỉnh A của hình vuông $ABCD$ cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}$.

Bài 5: (6 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF, $E\in(O)$ và $F\in(O')$. Gọi M là giao điểm của AE và DF; N là giao điểm của EB và FC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật.

b) $MN\perp AD$.

c) $ME.MA=MF.MD$.

---------- **Hết** ----------

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN VĨNH BẢO 2013-2014

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\dfrac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Lời giải:

a) ĐKXĐ: $x\ge 0; y\ge 0; xy\ne 1$.

Mẫu thức chung là $1-xy$

$$P=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{xy})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1-\sqrt{xy})}{1-xy}:\frac{1-xy+x+y+2xy}{1-xy}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{1-xy}.\frac{1-xy}{1+x+y+xy}$$

$$=\frac{2(\sqrt{x}+y\sqrt{x})}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

b) $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{4-3}=3-2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}-1)^2$

$$\sqrt{x}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$$

$$P=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{1+(\sqrt{3}-1)^2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{1+3-2\sqrt{3}+1}$$

$$P=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{5-2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}+2}{13}$$

Bài 2: (4 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (D) và (L) lần lượt là đồ thị của hai hàm số: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ và $y=|x|$.

a) Vẽ đồ thị (D) và (L).

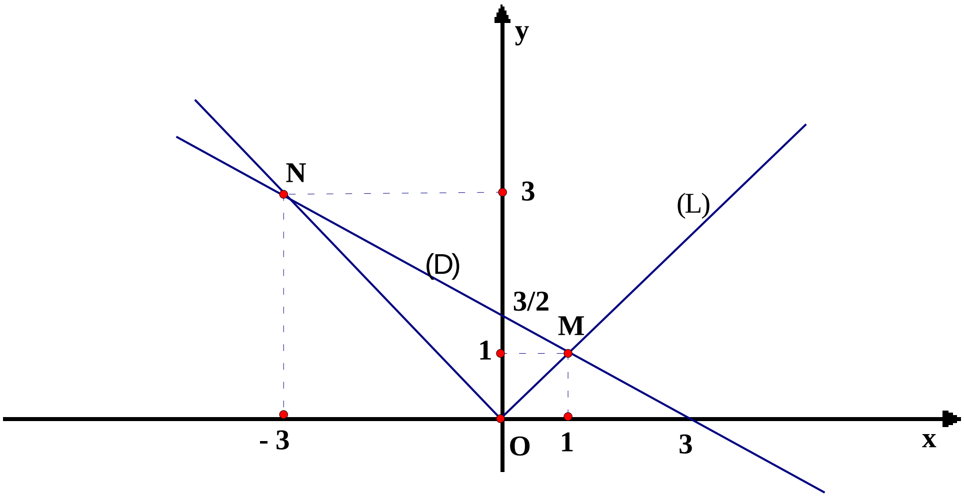
b) (D) và (L) cắt nhau tại M và N. Chứng minh OMN là tam giác vuông.

Lời giải:

a) thị $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ có : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ y = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

Đồ thị $y = |x| = \begin{cases} x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x \text{ khi } x \leq 0 \end{cases}$

Đồ thị như hình vẽ:



b) Đồ thị (D) và (L) cắt nhau tại hai điểm có tọa độ $M(1;\ 1)$ và $N(-\ 3;\ 3)$

Ta có: $OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM^2 = 2$

$$ON = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow ON^2 = 18$$

$$MN = \sqrt{(1-3)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow MN^2 = 20$$

Vì: $OM^2 + \ ON^2 = MN^2$

Vậy: tam giác OMN vuông tại O .

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Lời giải:

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) - 38 = 0$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

Ta được pt: $6y^2 - 5y - 50 = 0 \Leftrightarrow (3y - 10)(2y + 5) = 0$

Do đó: $y = \frac{10}{3}$ và $y = -\frac{5}{2}$

* Với $y = \frac{10}{3}$ thì: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$$

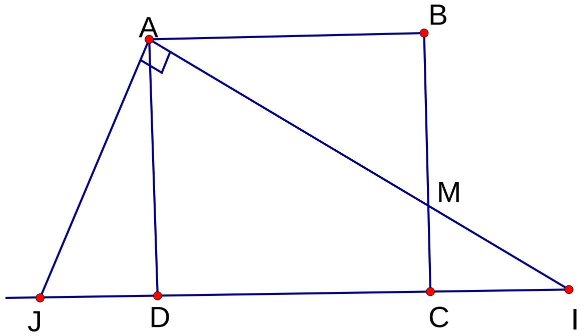
* Với $y = -\frac{5}{2}$ thì: $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = -2 \end{array}\right.$$

Bài 4: (2 điểm) Qua đỉnh A của hình vuông $ABCD$ cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$.

Lời giải:



Vẽ $Ax \perp AI$ cắt đường thẳng CD tại J.

Ta có ΔAIJ vuông tại A, có AD là đường cao thuộc cạnh huyền IJ, nên:

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AJ^2} + \frac{1}{AI^2} \quad (1)$$

Xét hai tam giác vuông ADJ và ABM, ta có:

$AB = AD = a$; $\widehat{DAJ} = \widehat{BAM}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta ADJ = \Delta ABM$. Suy ra: $AJ = AM$

Thay vào (1) ta được: $\dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$ (đpcm)

Bài 5: (6 điểm)

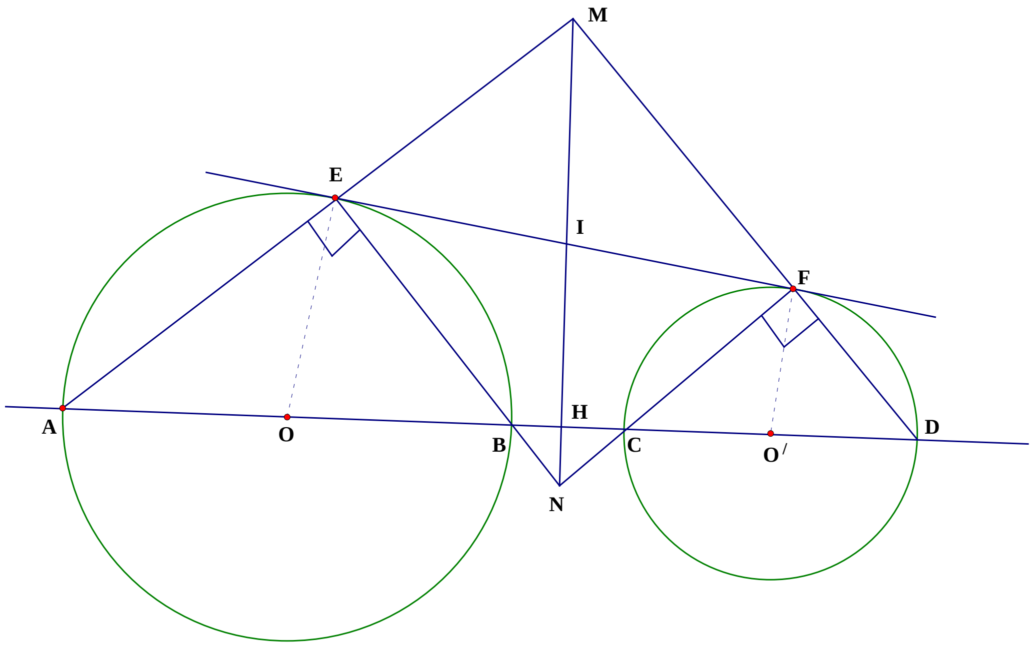
Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF, $E \in (O)$ và $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của AE và DF; N là giao điểm của EB và FC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật.

b) $MN \perp AD$.

c) $ME.MA = MF.MD$.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{AEB}=\widehat{CFD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và $(O^{'})$, nên:

$OE\perp EF$ và $OF\perp EF\Rightarrow O'E\ //\ O^{'}F$

=> $\widehat{EOB}=\widehat{FO'D}$ (góc đồng vị) $\Rightarrow\widehat{EAO}=\widehat{FCO^{'}}$

Do đó $MA\ //\ FN$, mà $EB\perp MA$ $\Rightarrow EB\perp FN$ Hay $\widehat{ENF}=90^0$.

Tứ giác $MENF$ có $\hat{E}=\hat{N}=\hat{F}=90^O$, nên $MENF$ là hình chữ nhật.

b) Gọi I là giao điểm của MN và EF; H là giao điểm của MN và AD

Vì $MENF$ là hình chữ nhật, nên $\widehat{IFN}=\widehat{INF}$

Mặt khác, trong đường tròn $(O^{'})$: $\widehat{IFN}=\widehat{FDC}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{FC}$

$\Rightarrow\widehat{FDC}=\widehat{HNC}\Rightarrow\Delta FDC\ \square\ \Delta HNC$ (g – g)

$\Rightarrow\widehat{NHC}=\widehat{DFC}=90^O$ hay $MN\perp AD$

c) Do $MENF$ là hình chữ nhật, nên $\widehat{MFE}=\widehat{FEN}$

Trong đường tròn (O) có: $\widehat{FEN}=\widehat{EAB}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EB}$

=> $\widehat{MFE}=\widehat{EAB}$ Suy ra $\Rightarrow\Delta M\ \square\ \Delta MDA$ (g – g)

=> $\frac{ME}{MD}=\frac{MF}{MA}$, hay $ME.MA\ =\ MF.MD.$

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NINH BÌNH NĂM HỌC 2014-2015

Câu 1. *(5,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}\right):\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right]$ (với $x\ge 0$, $x\ne 4$).

a) Rút gọn A.

b) Chứng minh rằng $A<1$, với mọi $x\ge 0$, $x\ne 4$.

c) Tìm x để A là số nguyên.

Câu 2. *(5,0 điểm)*

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$.

b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases}$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{2x^2+3xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+3yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+3zx+2x^2}$.

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn (O), dây cung BC cố định. Điểm A trên cung nhỏ BC, A không trùng với B, C và điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Gọi H là hình chiếu của A trên đoạn thẳng BC; E, F thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'. Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác HEF và ABC đồng dạng với nhau.

b) Hai đường thẳng HE và AC vuông góc với nhau.

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF là điểm cố định khi A chuyển động trên cung nhỏ BC.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A, độ dài cạnh huyền bằng 2015. Trong tam giác ABC lấy 2031121 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm có khoảng cách không lớn hơn 1.

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NINH BÌNH NĂM HỌC 2014 - 2015

Câu 1. *(5,0 điểm)* Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}\right):\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right]$ (với $x\ge 0$, $x\ne 4$).

a) Rút gọn A.

b) Chứng minh rằng $A<1$, với mọi $x\ge 0$, $x\ne 4$.

c) Tìm x để A là số nguyên.

Lời giải

a) $A=\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}\right):\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right]$

$=\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right].\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+4}$

$=\left[\sqrt{x}+2-\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}\right].\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+4}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}$.

b) Xét hiệu $1-A=1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x-2\sqrt{x}+4}>0$

Với mọi $x\ge 0, x\ne 4$, suy ra $A<1$ (đpcm).

c) Ta có $x-2\sqrt{x}+4=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+3>0$, với mọi $x\ge 0$

suy ra $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}\ge 0 \Rightarrow 0\le A<1 \Rightarrow A=0 \Rightarrow x=0$.

Câu 2. *(5,0 điểm)* Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$. b) $\begin{cases}x+y+z=6\\ xy+yz+zx=11\\ xyz=6\end{cases}$.

Lời giải

a) $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5 \Rightarrow x=0$

ĐK: $x+5\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -5$.

Đặt $\sqrt{2x^2+5x+12}=a$; $\sqrt{2x^2+3x+2}=b$ ($a,b\ge 0$).

$\Rightarrow a^2-b^2=2x+10 \Rightarrow x+5=\dfrac{a^2-b^2}{2}$

$$\Rightarrow a+b=\frac{a^2-b^2}{2} \Leftrightarrow 2(a+b)-(a^2-b^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(2-a+b)=0.$$

Vì $a+b>0$ nên $2-(a-b)=0 \Rightarrow a-b=2 \Rightarrow a=b+2$

$$\Rightarrow b+2+b=x+5 \Rightarrow b=\frac{x+3}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2+3x+2}=\frac{x+3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3$$

$$\Rightarrow 8x^2+12+8=x^2+6x+9 \Rightarrow (7x-1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{7} \\ x=-1 \end{array}\right. \text{ (Thỏa mãn).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\frac{1}{7}\right\}$.

b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=6-y \\ xy+yz+zx=11 \\ xz=\dfrac{6}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=6-y \\ y(6-y)+\dfrac{6}{y}=11 \\ xz=\dfrac{6}{y} \end{cases}$

$$\Rightarrow y(6-y)+\frac{6}{y}=11 \Rightarrow y^2(6-y)+6=11y \Leftrightarrow y^3-6y^2+11y-6=0.$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y-2)(y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \\ y=3 \end{array}\right.$$

*) Với $y=1 \Rightarrow x=3; z=2$ hoặc $x=2; z=3$.

*) Với $y=2 \Rightarrow x=3; z=1$ hoặc $x=1; z=3$.

*) Với $y=3 \Rightarrow x=2; z=1$ hoặc $x=1; z=2$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{2x^2+3xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+3yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+3zx+2x^2}$$

Lời giải

$$A=\sqrt{2x^2+3xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+3yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+3zx+2x^2}$$

$A=\sqrt{2(x+y)^2-xy}+\sqrt{2(y+z)^2-yz}+\sqrt{2(z+x)^2-zx}$

Ta có $2(x+y)^2-xy\ge 2(x+y)^2-\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{7}{4}(x+y)^2$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2+3xy+2y^2}\ge\dfrac{\sqrt{7}}{2}(x+y)$.

Tương tự ta có $\sqrt{2y^2+3yz+2z^2}\ge\dfrac{\sqrt{7}}{2}(y+z)$,

$\sqrt{2z^2+3zx+2x^2}\ge\dfrac{\sqrt{7}}{2}(z+x)$.

$\Rightarrow A\ge\sqrt{7}(x+y+z)=3\sqrt{7}$.

Vậy $\text{Min } A=3\sqrt{7}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

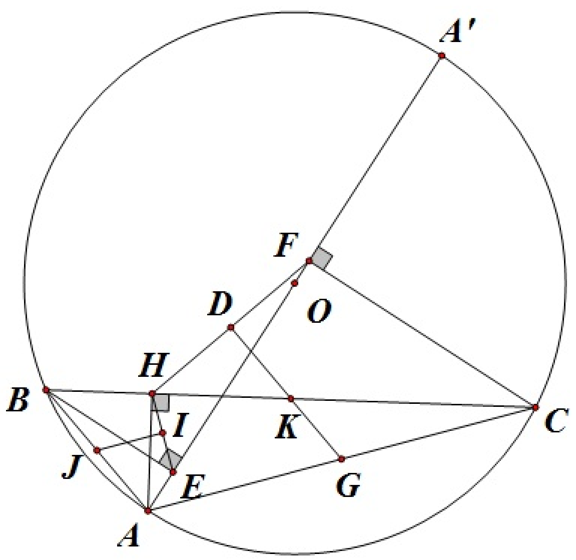
Câu 4. *(7,0 điểm)* Cho đường tròn (O), dây cung BC cố định. Điểm A trên cung nhỏ BC, A không trùng với B, C và điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Gọi H là hình chiếu của A trên đoạn thẳng BC; E, F thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'. Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác HEF và ABC đồng dạng với nhau.

b) Hai đường thẳng HE và AC vuông góc với nhau.

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF là điểm cố định khi A chuyển động trên cung nhỏ BC.

Lời giải



a) Tứ giác $ABHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABH}=\widehat{HEF}$ hay $\widehat{ABC}=\widehat{HEF}$.

Tứ giác $AHFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACH}=\widehat{AFH}$ hay $\widehat{ACB}=\widehat{EFH}$

Xét ΔHEF và ΔABC có:

$\widehat{ABC} = \widehat{HEF}$,

$\widehat{ACB} = \widehat{EFH}$

$\Rightarrow$ $\Delta HEF \backsim \Delta ABC$ (g.g).

b) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{HEF}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{AA'C}$ (cùng chắn cung AC) nên $\widehat{HEF} = \widehat{AA'C}$ $\Rightarrow HE // A'C$.

Do $A'C \perp AC$ nên $HE \perp AC$.

c) Ta có tứ giác $AHFC$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AC nên trung trực của HF đi qua trung điểm G của AC.

Mà $DG // AB$ nên DG đi qua trung điểm K của BC.

Tương tự: trung trực JI của HE cũng đi qua trung điểm K của BC.

Vì BC cố định nên K cũng cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF là điểm K cố định khi A chuyển động trên cung nhỏ BC.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A, độ dài cạnh huyền bằng 2015. Trong tam giác ABC lấy 2031121 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm có khoảng cách không lớn hơn 1.

Lời giải

Chia cạnh huyền BC thành 2015 đoạn thẳng bằng nhau. Từ các điểm chia đó vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh AB, AC ta được 2015 tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1 và $(2014+2013+...+1)$ hình vuông có đường chéo bằng 1.

Do đó trong tam giác ABC có tất cả $2015+\dfrac{(2014.2015)}{2}=2031120$ hình (vừa hình vuông có đường chéo bằng 1, vừa tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1).

Vậy trong 2031121 điểm sẽ tồn tại ít nhất hai điểm nằm trong một hình nào đó.

Với hai điểm đó thì khoảng cách của nó không lớn hơn 1.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ THỌ NĂM HỌC 2013 – 2014

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình trên tập nguyên $x^2+5y^2-4xy+4x-8y-12=0$

b) Cho $P(x)=x^3-3x^2+14x-2$.

Tìm các số tự nhiên x nhỏ hơn 100 mà $P(x)$ chia hết cho 11.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}$, biết $a=\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}$

b) Cho số thực $x,\ y,\ z$ đôi một khác nhau thỏa mãn

$x^3=3x-1,\ y^3=3y-1,\ z^3=3z-1$

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2=6$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $3x-1+\dfrac{x-1}{4x}=\sqrt{3x+1}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0\\ x^2-y^2+2x+y-3=0\end{cases}$

Câu 4: *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC không đi qua tâm. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm A và có số đo bằng α không đổi sao cho E và F khác phía với điểm A qua BC; AE và AF cắt BC lần lượt tại N và M. Lấy điểm D sao cho tứ giác $MNED$ là hình bình hành.

a) Chứng minh tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF. Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh A thì I chuyển động trên đường thẳng cố định.

c) Khi $\alpha=60^\circ$ và $BC=R$, tính theo R độ dài nhỏ nhất của đoạn OI.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x+y+z=3$

Chứng minh rằng $\dfrac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}+\dfrac{2y^2+x^2+z^2}{4-xz}+\dfrac{2z^2+y^2+x^2}{4-yx}\geq 4xyz$

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ THỌ NĂM HỌC 2013 – 2014

Câu 1: *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình trên tập nguyên $x^2+5y^2-4xy+4x-8y-12=0$

b) Cho $P(x)=x^3-3x^2+14x-2$.

Tìm các số tự nhiên x nhỏ hơn 100 mà $P(x)$ chia hết cho 11.

Lời giải

a) $x^2+5y^2-4xy+4x-8y-12=0 \Leftrightarrow x^2-4x(y-1)-(5y^2-8y-12)=0$ (*)

Để PT (*) có nghiệm nguyên x thì Δ' chính phương

$\Delta'=4(y-1)^2-5(5y^2-8y-12)=16-y^2\le 16$

từ đó tìm được $(x;y)\in\{(2;0);(-6;0);(-10;-4);(6;4)\}$

Cách khác: $x^2+5y^2-4xy+4x-8y-12=0\Leftrightarrow (x-2y+2)^2+y^2=16=4^2+0^2$

xét từng trường hợp sẽ ra nghiệm

mà $x, y\in\mathbb{Z}$ nên $(x-2y+2)^2=16, y=0$ (1) hoặc $x-2y+2=0, y^2=16$ (2).

Ta có (1) $\Leftrightarrow x=2, y=0$ hoặc $x=-6, y=0$.

(2) $\Leftrightarrow y=4, x=6$ hoặc $y=-4, x=-10$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)\in\{(2;0),(-6;0),(6;4),(-10;-4)\}$.

b) Ta có $P(x)=x^3-3x^2+14x-2=(x-2)(x^2-x+12)+22$

Để $P(x)$ chia hết 11 thì $(x-2)(x^2-x+12)\,\vdots\,11$

mà $(x^2-x+12)=x(x-1)+1+11$ ta có $x(x-1)+1$ không chia hết cho 11

suy ra (x^2-x+12) không chia hết cho 11 nên $x-2$ chia hết cho 11 mà $x<100;\ x\in\mathbb{N}$

suy ra $x\in\{2;13;22;35;47;57;68;79;90\}$

Cách khác: $P(x)=x^3-3x^2+14x-2=\left[(x-1)^3-1+11x\right]\vdots\,11\Leftrightarrow\left[(x-1)^3-1\right]\vdots\,11$

Suy ra $(x-1)^3$ chia cho 11 dư 1 suy ra $x-1$ chia cho 11 dư 1 suy ra x chia cho 11 dư 2

mà $x<100$ suy ra kết quả.

Đáp án chính thức:

Bổ đề: Cho x, y là các số tự nhiên và số nguyên tố p có dạng $p=3k+2$ thì

$x^3\equiv y^3 \pmod p \Leftrightarrow x\equiv y \pmod p$.

Thật vậy, $x\equiv y\pmod p \Rightarrow x^3\equiv y^3\pmod p$, đúng.

Với $x^3\equiv y^3\pmod p\Rightarrow x^{3k}\equiv y^{3k}\pmod p$.

Với x, y cùng chia hết cho p thì hiển nhiên đúng.

Với $(x,p)=1, (y,p)=1$ ta có $x^{p-1}\equiv y^{p-1}\equiv 1\pmod p\Rightarrow x^{3k+1}\equiv y^{3k+1}\pmod p$

$\Rightarrow x.x^{3k}\equiv y.y^{3k}\pmod p\Rightarrow x\equiv y\pmod p$ vì $x^{3k}\equiv y^{3k}\pmod p$.

Áp dụng Bổ đề, ta có

$P(x)\equiv P(y)\pmod{11}\Leftrightarrow (x-1)^3+11(x-1)+10\equiv (y-1)^3+11(y-1)+10\pmod{11}$

$\Leftrightarrow (x-1)^3\equiv (y-1)^3\pmod{11}\Leftrightarrow x-1\equiv y-1\pmod{11}\Leftrightarrow x\equiv y\pmod{11}$.

Do đó, $P(x)\equiv P(y)\pmod{11}\Leftrightarrow x\equiv y\pmod{11}$.

Suy ra với mỗi $n \in \mathbb{N}$, trong 11 giá trị $P(n), P(n+1), \ldots, P(n+10)$, có duy nhất một giá trị chia hết cho 11. Do đó, trong các số $P(1), P(2), \ldots, P(99)$ có đúng 9 số chia hết cho 11, còn $P(0) = -2$ không chia hết cho 11.

Vậy có đúng 9 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$, biết $a = \sqrt[3]{55 + \sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55 - \sqrt{3024}}$

b) Cho số thực $x,\ y,\ z$ đôi một khác nhau thỏa mãn

$x^3 = 3x - 1,\ y^3 = 3y - 1,\ z^3 = 3z - 1$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Lời giải

a) Tính $a^3 = 110 - 3a \Leftrightarrow (a-5)(a^2 + 5a + 22) = 0 \Leftrightarrow a = 5$ thay $a = 5$ vào $P = \dfrac{7}{3}$

b) Cộng cả ba đẳng thức ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 = 3x - 1 \\ y^3 = 3y - 1 \\ z^3 = 3z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ y^3 - z^3 = 3(y-z) \\ z^3 - x^3 = 3(z-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 & (1) \\ y^2 + zy + z^2 = 3 & (2) \\ x^2 + xz + z^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Trừ (1) cho (2) ta được $(x-z)(x+y+z) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$

Cộng (1); (2); (3) ta có $2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + xz = 9$ (*)

Mà từ $x + y + z = 0$ suy ra $xy + yz + xz = -\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ thay vào (*) ta có đpcm.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $3x - 1 + \dfrac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{-1}{3}$

$3\mathrm{x} - 1 + \dfrac{\mathrm{x} - 1}{4\mathrm{x}} = \sqrt{3\mathrm{x} + 1} \Leftrightarrow 4x(3x-1) + x - 1 = 4x\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 12x^2 - 3x - 1 = 4x\sqrt{3x+1}$

$16x^2 = \left(2x + \sqrt{3x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + \sqrt{3x+1} \\ -4x = 2x + \sqrt{3x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \sqrt{3x+1} \\ -6x = \sqrt{3x+1} \end{array}\right.$

Giải ra pt có 2 nghiệm $x = 1;\ \ x = \dfrac{3 - \sqrt{153}}{72}$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 (1) \\ 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2y - 6 = 0 (2) \end{cases}$

Lấy pt (1) trừ pt (2) ta được

$\left(x-2y\right)^2-3(x-2y)+2=0 \Leftrightarrow (x-2y-1)(x-2y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y+1 \\ x=2y+2 \end{array}\right.$

Thay vào phương trình $x^2-y^2+2x+y-3=0$ hệ có 4 nghiệm

$\left(x;y\right)\in\left\{(1;0);(-5-3);\left(\dfrac{-7+\sqrt{109}}{3};\dfrac{-13+\sqrt{109}}{6}\right);\left(\dfrac{-7-\sqrt{109}}{3};\dfrac{-13-\sqrt{109}}{6}\right)\right\}$

Câu 4: *(7,0 điểm)*

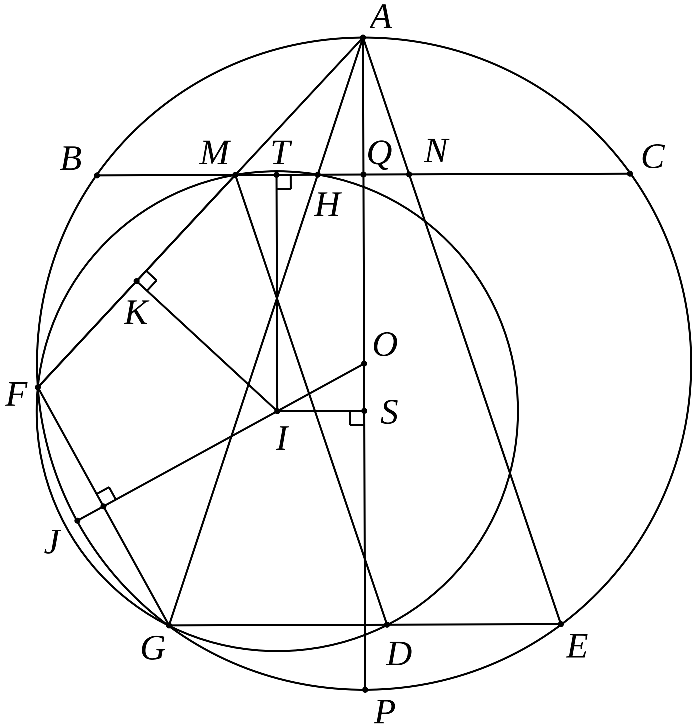
Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC không đi qua tâm. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm A và có số đo bằng α không đổi sao cho E và F khác phía với điểm A qua BC; AE và AF cắt BC lần lượt tại N và M. Lấy điểm D sao cho tứ giác $MNED$ là hình bình hành.

a) Chứng minh tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF. Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh A thì I chuyển động trên đường thẳng cố định.

c) Khi $\alpha=60°$ và $BC=R$, tính theo R độ dài nhỏ nhất của đoạn OI.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{MNE}=\dfrac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{AC}+$ sđ $\overset{\frown}{BFE}$) $=\dfrac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{AB}+$sđ $\overset{\frown}{BFE}$)

$\widehat{AFE}=$ sđ $\overset{\frown}{AC}+$ sđ $\overset{\frown}{CE}$

Suy ra: $\widehat{MNE}+\widehat{MFE}=180°$

Vậy tứ giác $MNEF$ nội tiếp

b) Gọi P là giao điểm khác A của AO với đường tròn $(O; R)$. Q là giao điểm của AO và BC.

Lấy G đối xứng với E qua $AP \Rightarrow D\in EG,\ G\in(O)$

Ta có $\widehat{MDG} = \widehat{NEG}$, $\widehat{AEG} + \widehat{AFG} = 180° \Rightarrow \widehat{MDG} + \widehat{MFG} = 180°$

Suy ra tứ giác *MDGF* nội tiếp (1)

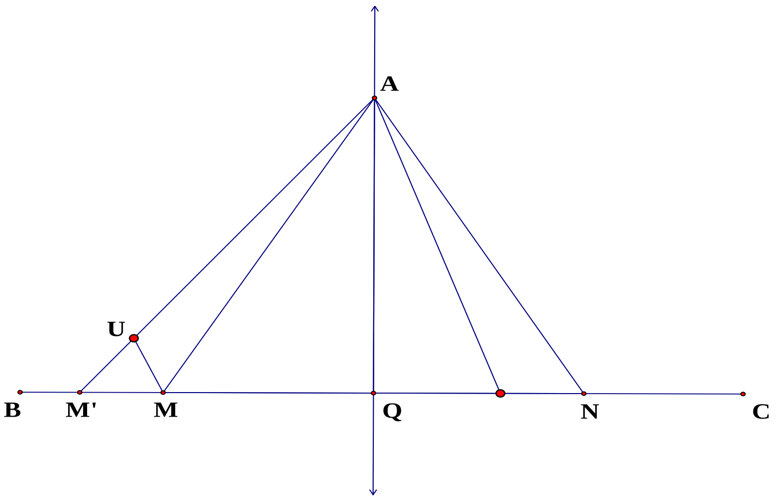
Gọi giao điểm của *AG* và *BC* là *H*

Chứng minh tương tự a) có tứ giác *MHGF* nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm *M, H, D, G, F* nằm trên một đường tròn.

Trung trực của đoạn thẳng *FG* đi qua *O* và cắt đường tròn *(O)* tại *J*; $I \in OJ$, sđ $\overset{\frown}{JF}$ =sđ $\overset{\frown}{JG}$ và sđ $\overset{\frown}{PG}$ =sđ $\overset{\frown}{PE}$ nên $\widehat{JOP} = \alpha$ hay *I* nằm trên đường thẳng cố định. Đó là đường thẳng đi qua *O* và tạo với *AO* một góc α không đổi.

c)



Hạ $IT \perp BC$ $\left(T \in BC\right) \Rightarrow TH = TM$. Do $QH = QN$, suy ra $IS = \dfrac{1}{2}MN$

Tam giác vuông *OSI* có $\widehat{IOS} = \alpha$ không đổi nên *OI* nhỏ nhất khi và chỉ khi *IS* nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *MN* nhỏ nhất. Ta chứng minh *MN* nhỏ nhất khi và chỉ khi tam giác *AMN* cân tại *A*.

Thật vậy, trên *BC* lấy *M' N'* sao cho $\widehat{M'AN'} = \alpha$. Không mất tính tổng quát giả sử $QM' > QN'$ suy ra $AM' > AN'$. Trên đoạn AM' lấy điểm *U* sao cho $AU = AN'$

$\Rightarrow \Delta AUM = \Delta ANN'$ (c.g.c)$\Rightarrow S_{AM'M} > S_{ANN'} \Rightarrow MM' > NN' \Rightarrow M'N' > MN$

Với $\alpha = 60°;\ BC = R$ suy ra $AQ = R - \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$,

$$MN = \frac{R\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{R\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3} \Rightarrow OI = \frac{R\left(2\sqrt{3}-3\right)}{6}.$$

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x+y+z=3$

Chứng minh rằng $\dfrac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz} + \dfrac{2y^2+x^2+z^2}{4-xz} + \dfrac{2z^2+y^2+x^2}{4-yx} \geq 4xyz$

Lời giải

Lời giải 1:

$$\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz} + \frac{2y^2+x^2+z^2}{4-xz} + \frac{2z^2+y^2+x^2}{4-yx} \geq 4xyz$$

$$\Leftrightarrow M=\frac{x^2+y^2+x^2+z^2}{xyz(4-yz)}+\frac{x^2+y^2+y^2+z^2}{xyz(4-xz)}+\frac{z^2+y^2+x^2+z^2}{xyz(4-yx)}\ge 4(*)$$

$$\Leftrightarrow M\ge\frac{2xy+2xz}{xyz(4-yz)}+\frac{2xy+2yz}{xyz(4-xz)}+\frac{2xz+2yz}{xyz(4-yx)}=N$$

$$N=2\left(\frac{y+z}{yz(4-yz)}+\frac{x+z}{xz(4-xz)}+\frac{x+z}{yx(4-yx)}\right)$$

$$N=2\left(\frac{1}{z(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yz)}+\frac{1}{y(4-yx)}\right)+2\left(\frac{1}{y(4-yz)}+\frac{1}{zx(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yx)}\right)$$

$$N\ge\frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}+\frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}=\frac{12\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}$$

Mặt khác

$$3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy)\le\left(\frac{3xyz+4-xz+4-xy+4-yz}{4}\right)^4=\left(\frac{3xyz+12-xz-xy-yz}{4}\right)^4$$

Mà $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}=3\Leftrightarrow\frac{xy+yz+xz}{xyz}\ge 3\Leftrightarrow 3xyz-xy-xz-yz\le 0$

$$3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy)\le\left(\frac{3xyz+12-xz-xy-yz}{4}\right)^4=81$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{3xyz(4-xy)(4-xz)(4-yz)}\le 3\sqrt[3]{3}$$

Nên $M\ge N\ge\frac{12\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}}=4$ BĐT (*) được cm dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=1$.

Đáp án chính thức:

Chứng minh được: $2x^2+y^2+z^2\ge 2x(y+z)$.

Tương tự ta có $2y^2+z^2+x^2\ge 2y(z+x)$, $2z^2+x^2+y^2\ge 2z(x+y)$.

Do đó ta sẽ chứng minh $\frac{x(y+z)}{4-yz}+\frac{y(z+x)}{4-zx}+\frac{z(x+y)}{4-xy}\ge 2xyz$.

Bất đẳng thức này tương đương với $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge 1$.

Ta có $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}\ge\frac{2\sqrt{yz}}{(2-\sqrt{yz})(2+\sqrt{yz})2yz}=\frac{1}{(2-\sqrt{yz})\sqrt{yz}(2+\sqrt{yz})}$, dễ có

$0<(2-\sqrt{yz})\sqrt{yz}=-(\sqrt{xy}-1)^2+1\le 1$ nên $\frac{1}{(2-\sqrt{yz})\sqrt{yz}(2+\sqrt{yz})}\ge\frac{1}{2+\sqrt{yz}}$.

Vậy nên $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}\ge\frac{1}{2+\sqrt{yz}}$, tương tự có $\frac{z+x}{(4-zx)2zx}\ge\frac{1}{2+\sqrt{zx}}$ và $\frac{x+y}{(4-xy)2xy}\ge\frac{1}{2+\sqrt{xy}}$.

Do đó $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\geq\frac{1}{2+\sqrt{xy}}+\frac{1}{2+\sqrt{yz}}+\frac{1}{2+\sqrt{zx}}$.

Với $a, b, c>0$ có $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 3+2+2+2=9$ nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ (*).

Áp dụng (*) ta có $\frac{1}{2+\sqrt{xy}}+\frac{1}{2+\sqrt{yz}}+\frac{1}{2+\sqrt{zx}}\geq\frac{9}{6+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}\geq 1$;

(Vì $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\leq\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}=x+y+z=3$).

Vậy $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\geq 1$.

Do vậy ta có $\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}+\frac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx}+\frac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy}\geq 4xyz$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

……………..HẾT……………

ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH HẢI DƯƠNG 2013-2014

Câu 1 (2 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$

với $-1\le x\le 1.$

b) Cho a và b là các số thỏa mãn $a>b>0$ và $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0$.

Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}$.

Câu 2 (2 điểm).

a) Giải phương trình $x^2(x^2+2)=4-x\sqrt{2x^2+4}.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3=2x+y \\ y^3=2y+x \end{cases}$.

Câu 3 (2 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$xy^2+2xy+x=32y$.

b) Cho hai số tự nhiên $a,\ b$ thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng $2a+2b+1$ là số chính phương.

Câu 4 (3 điểm).

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O,\ R)$. H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh $\widehat{HKM}=2\widehat{AMH}$.

b) Các tiếp tuyến của $(O,\ R)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của $(O,\ R)$ lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G.

Chứng minh $OD.GF = OG.DE$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R.

Câu 5 (1 điểm).

Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $2ab+6bc+2ac=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\dfrac{4ab}{a+2b}+\dfrac{9ac}{a+4c}+\dfrac{4bc}{b+c}$.

---------------------***Hết***----------------------

LỜI GIẢI ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH HẢI DƯƠNG 2013-2014

Câu 1 (2 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$

với $-1\le x\le 1$.

b) Cho a và b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0$.

Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}$.

Lời giải:

a) $A=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$

$=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$

$=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)}$

$=\sqrt{2x^2}=|x|\sqrt{2}$.

b) $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0\Leftrightarrow(a-2b)(a^2+ab+3b^2)=0$ (*)

Vì $a > b > 0\Rightarrow a^2+ab+3b^2>0$ nên từ (*) ta có $a=2b$

Vậy biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}=\dfrac{16b^4-4b^4}{b^4-64b^4}$

$B=\dfrac{12b^4}{-63b^4}=\dfrac{-4}{21}$

Câu 2 (2 điểm).

a) Giải phương trình $x^2(x^2+2)=4-x\sqrt{2x^2+4}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3=2x+y\\ y^3=2y+x\end{cases}$.

Lời giải:

a) Đặt $t=x\sqrt{2x^2+4}\Rightarrow t^2=2\left(x^4+2x^2\right)\Rightarrow x^2\left(x^2+2\right)=\dfrac{t^2}{2}$

ta được phương trình $\dfrac{t^2}{2}=4-t\Leftrightarrow t^2+2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\ t=2\end{array}\right.$

Với $t=-4$ ta có $x\sqrt{2x^2+4}=-4\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ 2\left(x^4+2x^2\right)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ x^4+2x^2-8=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$

Với $t=2$ ta có $x\sqrt{2x^2+4}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2\left(x^4+2x^2\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^4+2x^2-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2=\sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$. Kết luận nghiệm của phương trình.

b) Từ hệ ta có $x^3(2y+x)=y^3(2x+y) \Leftrightarrow (x^2-y^2)\left(2xy+x^2+y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3(x-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right.$

* Với $x=y$ ta tìm được $(x\,;\,y)=(0;\ 0);\ \left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$

* Với $x=-y$ ta tìm được $(x\,;\,y)=(0;\ 0);\ (1;-1);(-1;1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$(x\,;\,y)=(0;\ 0);\ \left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right);(1;-1);(-1;1)$

Câu 3 (2 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $xy^2+2xy+x=32y$.

b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng $2a+2b+1$ là số chính phương.

Lời giải:

a) $xy^2+2xy+x=32y \Leftrightarrow x(y+1)^2=32y$

Do y nguyên dương $\Rightarrow y+1\neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{32y}{(y+1)^2}$

Vì $(y,y+1)=1 \Rightarrow (y+1)^2 \in U(32)$

mà $32=2^5 \Rightarrow (y+1)^2=2^2$ và $(y+1)^2=2^4$ (Do $(y+1)^2>1$)

*Nếu $(y+1)^2=2^2 \Rightarrow y=1; x=8$

*Nếu $(y+1)^2=2^4 \Rightarrow y=3; x=6$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là:

$\begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

b) $2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$ $(*)$

Gọi d là ước chung của $(a-b,\ 2a+2b+1)$ $(d\in\mathbb{N}^*)$. Thì

$\begin{cases} (a-b)\,\vdots\, d \\ (2a+2b+1)\,\vdots\, d \end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a+2b+1)\,\vdots\, d^2$

$\Rightarrow b^2 \,\vdots\, d^2 \Rightarrow b\,\vdots\, d$

Mà $(a-b)\vdots d \Rightarrow a\vdots d \Rightarrow (2a+2b)\vdots d$, mà $(2a+2b+1)\vdots d \Rightarrow 1\vdots d \Rightarrow d=1$

Do đó $(a-b,\ 2a+2b+1)=1$. Từ $(*)$ ta được $a-b$ và $2a+2b+1$ là số chính phương $\Rightarrow 2a+2b+1$ là số chính phương.

Câu 4 (3 điểm).

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O,\ R)$. H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

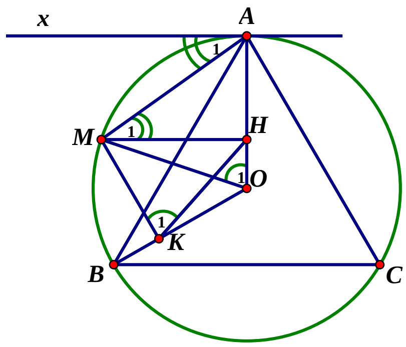
a) Chứng minh $\widehat{HKM}=2\widehat{AMH}$.

b) Các tiếp tuyến của $(O,\ R)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của $(O,\ R)$ lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G.

Chứng minh $OD.GF = OG.DE$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R.

Lời giải:



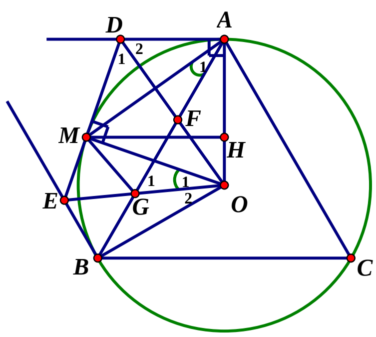
Qua A kẻ tia tiếp tuyến Ax của $(O,\ R)$. Ta có

$\widehat{A_1}=\frac{1}{2}\widehat{O_1}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AM}$ $\quad(1)$

Có $Ax\ //\ MH$ (cùng vuông góc với OA) $\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{M_1}$ (2)

Tứ giác $MHOK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{O_1}=\widehat{K_1}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MH}$) (3)

Từ (1); (2); (3) ta có $\widehat{M_1}=\frac{1}{2}\widehat{K_1}$ hay $\widehat{HKM}=2\widehat{AMH}$.



b) Có tứ giác $AOMD$ nội tiếp (4)

$\widehat{A_1}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BM}$; $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BM}$

$\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{O_1} \Rightarrow \widehat{G_1}=\widehat{D_2}=\widehat{D_1}$ tứ giác $AMGO$ nội tiếp (5)

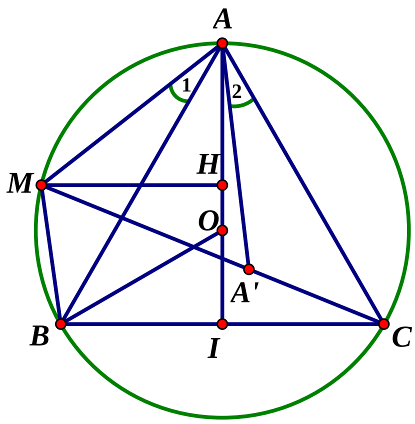
Từ (4), (5) ta có 5 điểm $A,\ D,\ M,\ G,\ O$ cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{G_1}=\widehat{D_2}=\widehat{D_1}$

$\Rightarrow \Delta OGF$ và ΔODE đồng dạng

$\Rightarrow \frac{OG}{OD}=\frac{GF}{DE}$ hay $OD.GF = OG.DE$.

c) Trên đoạn MC lấy điểm A' sao cho



$MA' = MA \Rightarrow \Delta AMA'$ đều

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}\left(=60^0 - \widehat{BAA'}\right)$

$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta A'AC \Rightarrow MB = A'C$

$\Rightarrow MA + MB = MC$

Chu vi tam giác MAB là

$MA + MB + AB = MC + AB \le 2R + AB$

Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của $(O,\ R)$

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AM $\Rightarrow H$ là trung điểm đoạn AO

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB$

Gọi I là giao điểm của AO và BC $\Rightarrow AI = \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB = (2+\sqrt{3})R$

Câu 5 (1 điểm).

Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c}$.

Lời giải:

Từ gt : $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$ và $a,b,c > 0$

Chia cả hai vế cho $abc > 0 \Rightarrow \frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$

đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$

Khi đó $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{4}{2x+y} + \frac{9}{4x+z} + \frac{4}{y+z}$

$$\Rightarrow C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x + y + 4x + z + y + z)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}} - \sqrt{x+2y}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z}\right)^2 + 17 \ge 17$$

Khi $x = \frac{1}{2}, y = z = 1$ thì $C = 7$

Vậy GTNN của C là 7 khi $a = 2;\ b = 1;\ c = 1$

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2014-2015

Câu 1. *(3,0 điểm)*

Cho $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2015}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn $AB=\sqrt{10}$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$5x^2+6xy+2y^2+2x+2y-40=0$.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\dfrac{x^3}{\sqrt{5-x^2}}+8x^2=40$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-15y-14=3.\left(2y^2-x\right) \\ 4x^3+6xy+15x+3=0 \end{cases}$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=5a$ và $AD=2a$ $(a>0)$. M là điểm bất kì trên cạnh AB (M khác A và khác B). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AC và DC.

a) Chứng minh rằng 5 điểm B, C, K, H, M cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

b) Tính $\dfrac{AH.MK}{MH}$ theo a.

c) Khi AK là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính AM theo a.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+ac+bc=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{19a+3}{1+b^2}+\dfrac{19b+3}{1+c^2}+\dfrac{19c+3}{1+a^2}$.

----------------- HẾT -----------------

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2014-2015

Câu 1. *(3,0 điểm)*

Cho $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2015}$.

Lời giải

Ta có

$$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Thay $x=\sqrt{2}$ vào A ta có

$$A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2015}=\left(4+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-1\right)^{2015}=1^{2015}=1$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{10}$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$5x^2+6xy+2y^2+2x+2y-40=0$.

Lời giải

a) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2=mx+1 \Leftrightarrow x^2-mx-1=0$

Ta có $\Delta=m^2+4$.

Vì $m^2+4>0$ nên đồ thị hàm số (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$

Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ là giao điểm của (P) và (d) ta có:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=10$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2)^2+\left(x_1^2-x_2^2\right)^2=10$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(x_1+x_2)^2(x_1-x_2)^2=10$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(x_1+x_2)^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=10$$

$$\Rightarrow m^2+4+m^2\left(m^2+4\right)=10$$

$$\Leftrightarrow m^4+5m^2-6=0$$

$\Leftrightarrow m^4 - m^2 + 6m^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 6) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = \pm 1$.

b) Ta có $5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y - 40 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 + 4x^2 + 4xy + y^2 = 41$

$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 + (2x + y)^2 = 41$

$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 + (2x + y)^2 = 4^2 + 5^2$

TH1: $\begin{cases} x + y + 1 = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} x + y + 1 = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ (loại).

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là $(2;1)$.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\dfrac{x^3}{\sqrt{5 - x^2}} + 8x^2 = 40$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3.(2y^2 - x) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

a) ĐK: $5 - x^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

Ta có: $\dfrac{x^3}{\sqrt{5 - x^2}} + 8x^2 = 40$

$\Leftrightarrow x^3 + 8x^2 \cdot \sqrt{5 - x^2} = 40 \cdot \sqrt{5 - x^2}$

$\Leftrightarrow x^3 + 8 \cdot \sqrt{5 - x^2} \cdot (x^2 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - \left(2 \cdot \sqrt{5 - x^2}\right)^3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 2 \cdot \sqrt{5 - x^2}\right) \cdot \left(x^2 + 2x \cdot \sqrt{5 - x^2} + 20 - 4x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 2 \cdot \sqrt{5 - x^2}\right) \cdot \left(2x \cdot \sqrt{5 - x^2} - 3x^2 - 20\right) = 0$

TH1: $x - 2 \cdot \sqrt{5 - x^2} = 0$ ĐK: $x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot (5 - x^2)$

$\Leftrightarrow 5x^2 = 20$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$

$\Leftrightarrow x = 2$.

TH2: $2x \cdot \sqrt{5 - x^2} - 3x^2 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 2x \cdot \sqrt{5 - x^2} = 3x^2 + 20$

$\Leftrightarrow 4x^2 \cdot \left(5 - x^2\right) = 9x^4 + 120x^2 + 400$

$\Leftrightarrow 13x^4 + 100x^2 + 400 = 0$ (vô nghiệm) .

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

b) Ta có: $\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3.\left(2y^2 - x\right) & (1) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$

Ở phương trình (1) ta có:

$x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot \left(2y^2 - x\right)$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x = y^3 + 15y + 6y^2 + 14$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + 3y + 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = \left(y + 2\right)^3 + 3 \cdot \left(y + 2\right)$

$\Leftrightarrow x = y + 2 \ \ (*)$

Từ (2) và $(*)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y \\ 4x^3 + 6x.\left(x - 2\right) + 15x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y \\ 4x^3 + 6x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y \\ 8x^3 + 12x^2 + 6x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x + 1\right)^3 = -5 \\ x - 2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 - \sqrt[3]{5}}{2} \\ y = \dfrac{-5 - \sqrt[3]{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\dfrac{-1 - \sqrt[3]{5}}{2}; \dfrac{-5 - \sqrt[3]{5}}{2}\right)$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

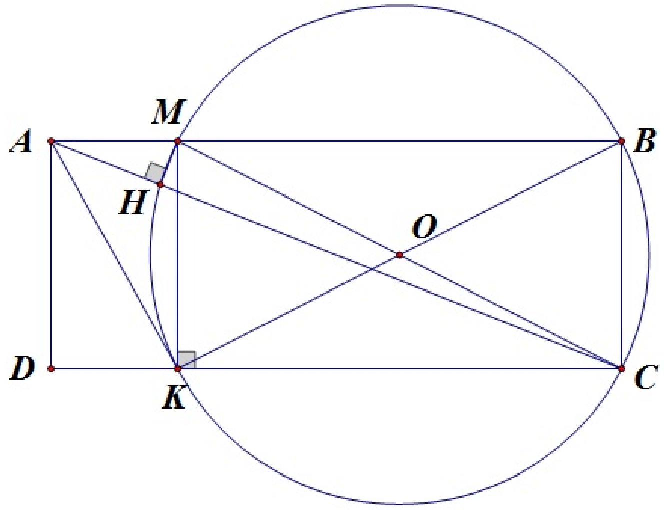
Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5a$ và $AD = 2a$ $\left(a > 0\right)$. M là điểm bất kì trên cạnh AB (M khác A và khác B). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AC và DC.

a) Chứng minh rằng 5 điểm B, C, K, H, M cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

b) Tính $\dfrac{AH.MK}{MH}$ theo a.

c) Khi AK là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$. Tính AM theo a.

Lời giải



a) Xét tứ giác $MHCB$ ta có $\widehat{MHC} = \widehat{MBC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{MHC} + \widehat{MBC} = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MHCB$ nội tiếp đường tròn đường kính MC (1).

Xét tứ giác $MKCB$ ta có $\widehat{MKC} = \widehat{MBC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{MKC} + \widehat{MBC} = 90°$

Tứ giác $MKCB$ nội tiếp đường tròn đường kính MC (2).

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm B, C, K, H, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MC.

Tâm O là trung điểm MC.

b) Xét ΔABC và ΔAHM có

$\widehat{MHM} = \widehat{MBC} = 90°$ và $\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AHM$.

$\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{MH}$ mà $MK = BC$

$\frac{AB}{AH} = \frac{MK}{MH} \Rightarrow AB = \frac{AH \cdot MK}{MH}$ mà $AB = 5a$

$\frac{AH \cdot MK}{MH} = 5a$.

c) Giả sử AK là tiếp tuyến của (O). Dễ dàng ta có tứ giác $MKCB$ là hình chữ nhật nên O sẽ nằm trên đoạn BK.

Xét ΔABK vuông tại K đường cao KM ta có $AM \cdot MB = MK^2$

$\Rightarrow AM \cdot (AB - AM) = AD^2 \Leftrightarrow AM \cdot 5a - AM^2 = 4a^2 \Leftrightarrow AM^2 - 5a \cdot AM + 4a^2 = 0$

$\Leftrightarrow AM^2 - 4a \cdot AM - a \cdot AM + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow AM \cdot (AM - 4a) - a \cdot (AM - 4a) = 0$

$\Leftrightarrow (AM - a) \cdot (AM - 4a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AM = a \\ AM = 4a \end{array}\right.$

Vậy $AM=4a$ hoặc $AM=a$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+ac+bc=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$ab+ac+bc\geq\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(b^2+a^2+c^2\right)}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 3s$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+ac+bc)\geq 3+2\cdot 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2\geq 9$$

$$\Rightarrow a+b+c\geq 3.$$

$$T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}=16\cdot\left(\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\right)+3\left(\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\right)$$

Đặt $A=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$ và $B=\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}$

Ta lại có:

a) $a+b+c-A=a+b+c-\left(\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\right)$

$$=\frac{ab^2}{1+b^2}+\frac{bc^2}{1+c^2}+\frac{ca^2}{1+a^2}\leq\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ac}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A\geq a+b+c-\frac{3}{2}\quad (*).$$

b) $a+b+c+3-B=a+b+c+3-\left(\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\right)$

$$=\frac{a+ab^2-a-1+1+b^2}{1+b^2}+\frac{b+bc^2-b-1+1+c^2}{1+c^2}+\frac{c+a^2c-c-1+1+a^2}{1+a^2}$$

$$=\frac{ab^2+b^2}{1+b^2}+\frac{bc^2+c^2}{1+c^2}+\frac{a^2c+a^2}{1+a^2}\leq\frac{3}{2}+\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Rightarrow B\geq a+b+c+3-\frac{3}{2}-\frac{a+b+c}{2}\Leftrightarrow B\geq\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\quad (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có:

$$16A+3B\geq 16\cdot\left(a+b+c-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow T\geq\frac{35}{2}\cdot(a+b+c)-\frac{39}{2}\geq 33$$

Vậy GTNN của T là 33. Dấu "$=$" xảy ra khi $a=b=c=1$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS
Năm học 2013-2014
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài : 150 phút
Ngày thi: 15/3/2014

Câu 1: **(3đ).** Tính:

$$T=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+......+\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

Câu 2: **(4đ).** Cho đa thức $P(x)=x^5-x;\ g(x)=(x^2-4)(x^2-1)x$

a) Hãy phân tích đa thức $P(x)-g(x)$ thành tích các nhân tử.

b) Chứng tỏ rằng nếu x là số nguyên thì $P(x)$ luôn chia hết cho 5.

Câu 3: **(4đ).** Cho $x_1;x_2\in[0;1]$

a) Chứng minh rằng $(1+x_1)^2\geq 4x_1^2$.

b) Chứng minh rằng : $(1+x_1+x_2)^2\geq 4(x_1^2+x_2^2)$.

Câu 4: **(4đ)** Cho hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{5}x-\sqrt{3}y=\sqrt{5}+\sqrt{3}\\(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{5}y=\sqrt{5}-3\end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình.

b) Tìm một phương trình bậc nhất hai ẩn x,y nhận 1 nghiệm là nghiệm của hệ phương trình đã cho và một nghiệm là $(0;0)$.

Câu 5: **(5đ).** Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=4\,cm$. Lấy một điểm M trên đường tròn sao cho $\widehat{BAM}=30^\circ$. Tiếp tuyến với đường tròn tại điểm A và điểm M cắt nhau tại C. CM cắt AB tại D.

a) Chứng minh rằng BM song song với OC.

b) Tính $S_{\Delta ACD}$?

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI AN GIANG NĂM 2013-2014

Câu 1: **(3đ)** Tính

$$T=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+......+\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}.$$

Lời giải

$$T=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+....+\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

Ta có : $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{n-n-1}=-\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$

$$T=-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{5}\right)-....-\left(\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)$$

$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{5}-....-\sqrt{99}-\sqrt{100}$$

$$=-1-\sqrt{100}=-11.$$

Câu 2: **(4đ)** Cho đa thức $P(x)=x^5-x;\ g(x)=\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)x$

a) Hãy phân tích đa thức $P(x)-g(x)$ thành tích các nhân tử.

b) Chứng tỏ rằng nếu x là số nguyên thì $P(x)$ luôn chia hết cho 5.

Lời giải

a) $P(x)=x^5-x$, $g(x)=\left(x^2-4\right).\left(x^2-1\right)x$

$$P(x)-g(x)=x^5-x-\left(x^2-4\right).\left(x^2-1\right)x=x^5-x-\left(x^4-5x^2+4\right)x$$

$$=x^5-x-\left(x^5-5x^3+4x\right)=5x^3-5x$$

$$=5x\left(x^2-1\right)=5x(x-1)(x+1).$$

Vậy $P(x)=5x(x-1)(x+1)$.

b) Theo trên $P(x)-g(x)=5x(x-1)(x+1)$ luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên x

Mặt khác $g(x)=\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)x=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ nên $g(x)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp

$\Rightarrow g(x)$ chia hết cho 5

Vậy $P(x)=g(x)+5x\left(x^2-1\right)$ luôn chia hết cho 5.

Câu 3: **(4đ)** Cho $x_1;x_2\in[0;1]$

a) Chứng minh rằng $(1+x_1)^2 \geq 4x_1^2$.

b) Chứng minh rằng : $(1+x_1+x_2)^2 \geq 4\left(x_1^2+x_2^2\right)$.

Lời giải

a) Xét $4x_1^2-(1+x_1)^2=(2x_1-1-x_1)(2x_1+1+x_1)=(x_1-1)(3x_1+1)$

Do $x_1 \in [0;1] \Rightarrow (x_1-1) \leq 0;\ (3x_1+1)>0$

Vậy $4x_1^2-(1+x_1)^2=(x_1-1)(3x_1+1) \leq 0$

Hay $(1+x_1)^2 \geq 4x_1^2$ dấu bằng xảy ra khi $x_1=1$

b) Do $(1+x_1+x_2)^2 \geq 4\left(x_1^2+x_2^2\right)$ và $x_1, x_2 \in [0;1] \Rightarrow x_1^2 \leq x_1; x_2^2 \leq x_2$. Ta được $x_1^2+x_2^2 \leq x_1+x_2$

Xét:

$(1+x_1+x_2)^2-4\left(x_1^2+x_2^2\right) \geq (1+x_1+x_2)^2-4(x_1+x_2)$

$\geq 1+2(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2-4(x_1+x_2)$

$\geq 1-2(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2=(1-x_1-x_2)^2 \geq 0$.

Vậy $(1+x_1+x_2)^2 \geq 4\left(x_1^2+x_2^2\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x_1^2=x_1 \\ x_2^2=x_2 \\ 1-x_1-x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=0; x_2=1$ hoặc $x_1=1; x_2=0$.

Câu 4: **(4đ)** Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{5}x-\sqrt{3}y=\sqrt{5}+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{5}y=\sqrt{5}-3 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình

b) Tìm một phương trình bậc nhất hai ẩn x, y nhận 1 nghiệm là nghiệm của hệ phương trình đã cho và một nghiệm là $(0;0)$.

Lời giải

a) $\begin{cases} \sqrt{5}x-\sqrt{3}y=\sqrt{5}+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{5}y=\sqrt{5}-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-\sqrt{15}y=5+\sqrt{15} \\ \left(3-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{15}y=\sqrt{15}-3\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-\sqrt{15}y=5+\sqrt{15} \\ (5-3+\sqrt{3})x=5+3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-\sqrt{15}y=5+\sqrt{15} \\ x=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\sqrt{3} \\ 5(1+\sqrt{3}) - \sqrt{15}y = 5+\sqrt{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\sqrt{3} \\ y = -1+\sqrt{5} \end{cases}.$$

b) Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax + by = c$

Phương trình có nghiệm $(0;0)$ suy ra $c = 0$.

Phương trình có nghiệm $\left(1+\sqrt{3};-1+\sqrt{5}\right) \Rightarrow a\left(1+\sqrt{3}\right) + b\left(-1+\sqrt{5}\right) = 0$

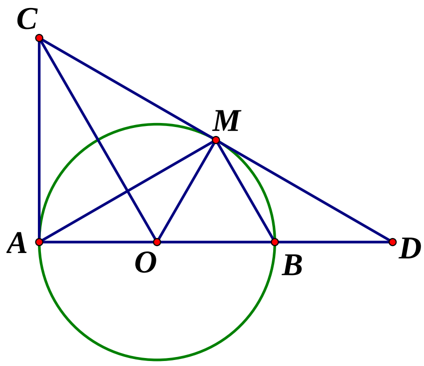
Ta có nhiều phương trình như thế nên có thể chọn $a = 1-\sqrt{5}; b = 1+\sqrt{3}$ vậy một phương trình thỏa đề bài đó là: $\left(1-\sqrt{5}\right)x + \left(1+\sqrt{3}\right)y = 0$.

Câu 5: **(5đ).** Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 4cm$. Lấy một điểm M trên đường tròn sao cho $\widehat{BAM} = 30°$. Tiếp tuyến với đường tròn tại điểm A và điểm M cắt nhau tại C. CM cắt AB tại D.

a) Chứng minh rằng BM song song với OC.

b) Tính $S_{\Delta ACD}$?

Lời giải



a) Theo đề bài ta có $\widehat{BAM} = 30°$, ΔAMB vuông tại M (do góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{\text{MBO}} = 60°$ $(*)$

ΔMOB cân có $\widehat{B} = 60°$ nên ΔMOB đều $\Rightarrow \widehat{AOM} = 120°$

CA, CM là hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ điểm C

nên CO là đường phân giác của $\widehat{ACM}$, hay CO là phân giác của $\widehat{AOM} \Rightarrow \widehat{COA} = 60°$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra BM // OC (hai góc đồng vị).

b) Nhận xét: Ba tam giác OAC, OMC và OMB là ba tam giác vuông bằng nhau do có một cạnh góc vuong bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau vậy $S_{ACD} = 3S_{ACO}$

Tam giác ACO vuông có cạnh góc vuông $OA = 2cm$; $\widehat{AOC} = 60° \Rightarrow AC = OA.\tan 60° = 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{ACO} = \frac{1}{2}AO.AC = \frac{1}{2}.2.2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Vậy diện tích tam giác ACD là $S_{ACD} = 6\sqrt{3}\,(cm^2)$.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH QUẢNG NAM NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x\ge 4$.

b) Cho a, b, c, d, e, f là các số thực khác 0, thỏa mãn $\frac{a}{d}+\frac{b}{e}+\frac{c}{f}=1$ và $\frac{d}{a}+\frac{e}{b}+\frac{f}{c}=0$. Tính giá trị của biểu thức $B=\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{e^2}+\frac{c^2}{f^2}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2-14n-256$ là một số chính phương.

b) Cho a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5.

Chứng minh rằng $a^{8n}+3a^{4n}-4$ chia hết cho 5, với mọi số tự nhiên n.

Câu 3: *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+2014}=2014$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$.

c) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $abc+2\left(1+a+b+c+ab+ac+bc\right)\ge 0$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

a) Cho hình bình hành $ABCD$, các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB và BC sao cho $AN=CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh KD là tia phân giác của góc AKC.

b) Cho ΔABC vuông tại A $\left(AB<AC\right)$. Biết $BC=4+4\sqrt{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2. Tính số đo của góc B và góc C của ΔABC.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O. Trên cạnh BC lấy điểm D tùy ý (D khác B và C). Đường tròn tâm O_1 qua D và tiếp xúc với AB tại B, đường tròn tâm O_2 qua D và tiếp xúc với AC tại C, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh rằng khi D di động trên cạnh BC thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử ΔABC cân tại A, chứng minh rằng tích $AD.AE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm D trên cạnh BC.

………………HẾT……………

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH QUẢNG NAM NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x\geq 4$.

b) Cho a,b,c,d,e,f là các số thực khác 0, thỏa mãn $\frac{a}{d}+\frac{b}{e}+\frac{c}{f}=1$ và $\frac{d}{a}+\frac{e}{b}+\frac{f}{c}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $B=\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{e^2}+\frac{c^2}{f^2}$.

Lời giải

a) Với $x\geq 4$, ta có

$$A=\sqrt{(x-4)+4\sqrt{x-4}+4}+\sqrt{(x-4)-4\sqrt{x-4}+4}=\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}$$

$$=\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|.$$

Xét các trường hợp:

- Với $x\geq 8$, ta có $A=\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2=2\sqrt{x-4}$.
- Với $4\leq x<8$, ta có $A=\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}=4$.

b) Với a,b,c,d,e,f là các số thực khác 0, ta có:

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{e}+\frac{c}{f}=1\Leftrightarrow\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{e}+\frac{c}{f}\right)^2=1\Leftrightarrow\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{e^2}+\frac{c^2}{f^2}+\frac{2ab}{de}+\frac{2bc}{ef}+\frac{2ca}{fd}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{e^2}+\frac{c^2}{f^2}+\frac{2abc}{def}\left(\frac{f}{c}+\frac{d}{a}+\frac{e}{b}\right)=1\Leftrightarrow\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{e^2}+\frac{c^2}{f^2}=1,\text{ vì }\frac{d}{a}+\frac{e}{b}+\frac{f}{c}=0.$$

Vậy $B=1$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2-14n-256$ là một số chính phương.

b) Cho a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5.

Chứng minh rằng $a^{8n}+3a^{4n}-4$ chia hết cho 5, với mọi số tự nhiên n.

Lời giải

a) Đặt $n^2-14n-256=k^2$, với $k\in\mathbb{N}$.

Khi đó $n^2-14n-256=k^2\Leftrightarrow(n-7)^2-k^2=305\Leftrightarrow(n-7+k)(n-7-k)=305$.

Mà $305=1.305=(-1).(-305)=5.61=(-5).(-61)$ và $(n-7-k)\leq(n-7+k)$, với $k\in\mathbb{N}$.

Ta xét các trường hợp sau:

- TH1: $\begin{cases}n-7-k=1\\n-7+k=305\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=160\\k=152\end{cases}$.
- TH2: $\begin{cases}n-7-k=-305\\n-7+k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-146\\k=152\end{cases}$.
- TH3: $\begin{cases}n-7-k=5\\n-7+k=61\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=40\\k=28\end{cases}$.

- TH4: $\begin{cases} n-7-k=-61 \\ n-7+k=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-26 \\ k=28 \end{cases}$.

Vì n và k là các số tự nhiên nên chọn $n=40$ hoặc $n=160$.

b) Ta có $a^{8n}+3a^{4n}-4=\left(a^{8n}-1\right)+3\left(a^{4n}-1\right)=\left[\left(a^8\right)^n-1\right]+3\left[\left(a^4\right)^n-1\right]$

$=\left(a^8-1\right)\left[\left(a^8\right)^{n-1}+\left(a^8\right)^{n-2}+\left(a^8\right)^{n-3}+...+1\right]+3\left(a^4-1\right)\left[\left(a^4\right)^{n-1}+\left(a^4\right)^{n-2}+\left(a^4\right)^{n-3}+...+1\right]$

$=\left(a^4+1\right)\left(a^4-1\right)\left[\left(a^8\right)^{n-1}+\left(a^8\right)^{n-2}+\left(a^8\right)^{n-3}+...+1\right]+3\left(a^4-1\right)\left[\left(a^4\right)^{n-1}+\left(a^4\right)^{n-2}+\left(a^4\right)^{n-3}+...+1\right]$

$=\left(a^4-1\right)\left(a^4+1\right).B+3\left(a^4-1\right).C=\left(a^4-1\right)\left[\left(a^4+1\right).B+3C\right]=\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\left[\left(a^4+1\right).B+3C\right]$

$=\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right).D$.

Vì a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5 nên ta xét các trường hợp sau:

- TH1: $a=5k+1$, khi đó $a^2-1=\left[\left(5k+1\right)^2-1\right]\vdots 5 \Rightarrow \left(a^{8n}+3a^{4n}-4\right)\vdots 5$.
- TH2: $a=5k+2$, khi đó $a^2+1=\left[\left(5k+2\right)^2+1\right]\vdots 5 \Rightarrow \left(a^{8n}+3a^{4n}-4\right)\vdots 5$.
- TH3: $a=5k+3$, khi đó $a^2+1=\left[\left(5k+3\right)^2+1\right]\vdots 5 \Rightarrow \left(a^{8n}+3a^{4n}-4\right)\vdots 5$.
- TH4: $a=5k+4$, khi đó $a^2-1=\left[\left(5k+4\right)^2-1\right]\vdots 5 \Rightarrow \left(a^{8n}+3a^{4n}-4\right)\vdots 5$.

Vậy $a^{8n}+3a^{4n}-4$ chia hết cho 5, với mọi số tự nhiên n.

Câu 3: *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+2014}=2014$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$.

c) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.
Chứng minh rằng $abc+2\left(1+a+b+c+ab+ac+bc\right)\geq 0$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x\geq -2014$.

Đặt $t=\sqrt{x+2014}$, $\left(t\geq 0\right)$ $\Rightarrow t^2=x+2014$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+t=2014 & (1) \\ t^2-x=2014 & (2) \end{cases}$.

Lấy $(2)-(1)$ vế theo vế ta được: $t^2-x^2-x-t=0 \Leftrightarrow \left(x+t\right)\left(t-x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-x \\ t=x+1 \end{array}\right.$.

- Với $t=-x$ thay vào (1) ta được

  $x^2-x-2014=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{8057}}{2}$ (loại vì $t\geq 0$) hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt{8057}}{2}$ (nhận).
- Với $t=x+1$ thay vào (1) ta được

$x^2+x-2013=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{8053}}{2}$ (loại vì $t \ge 0$) hoặc $x=\dfrac{-1+\sqrt{8053}}{2}$ (nhận).

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{1-\sqrt{8057}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1+\sqrt{8053}}{2}$.

b) Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$. Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} S=2-z \\ P=\dfrac{1}{2}\left(z^2+4\right) \end{cases}$.

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2-(2-z)X+\dfrac{1}{2}\left(z^2+4\right)=0\ (1)$.

Ta có $\Delta=(2-z)^2-4.\dfrac{1}{2}\left(z^2+4\right)=-z^2-4z-4=-(z+2)^2$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow (z+2)^2 \le 0 \Leftrightarrow z=-2$.

Thay $z=-2$ vào phương trình (1) ta được $X^2-4X+4=0 \Leftrightarrow X=2$.

$\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $x=y=2$, $z=-2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$.

c) Ta có $a^2+b^2+c^2=1 \Leftrightarrow a^2=1-b^2-c^2 \Rightarrow -1 \le a \le 1 \Rightarrow 1+a \ge 0$.
Tương tự ta cũng có $1+b \ge 0$, $1+c \ge 0$.
Khi đó $(1+a)(1+b)(1+c) \ge 0 \Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+ac+bc+abc \ge 0\ (1)$.

Mặt khác $(1+a+b+c)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 1+2(a+b+c)+(a+b+c)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 1+2(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ge 0$

$\Leftrightarrow 2(1+a+b+c+ab+ac+bc) \ge 0$ (vì $a^2+b^2+c^2=1$)

$\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+ac+bc \ge 0\ (2)$

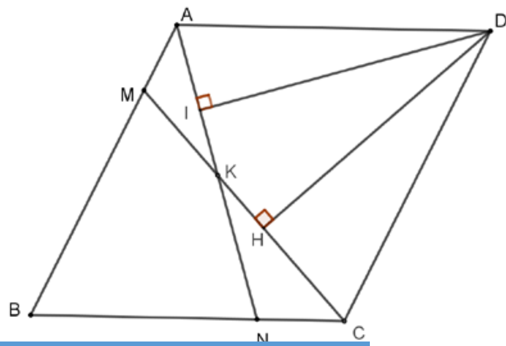
Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta được: $abc+2(1+a+b+c+ab+ac+bc) \ge 0$ (đpcm).

Câu 4: *(3,0 điểm)*

a) Cho hình bình hành $ABCD$, các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB và BC sao cho $AN=CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh KD là tia phân giác của góc AKC.

b) Cho ΔABC vuông tại A $(AB<AC)$. Biết $BC=4+4\sqrt{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2. Tính số đo của góc B và góc C của ΔABC.

Lời giải



a) Kẻ $DI \perp AN$ tại I, $DH \perp MC$ tại H.

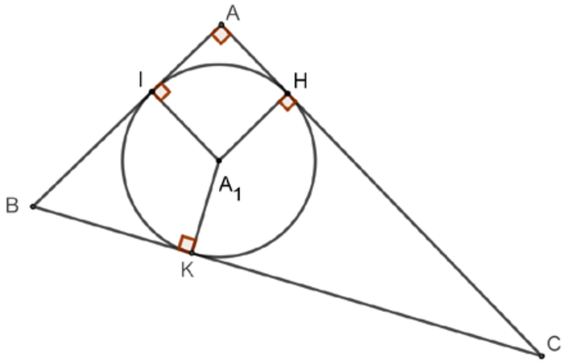
Ta có $S_{\Delta ADN}=\dfrac{1}{2}DI.AN$, $S_{\Delta DMC}=\dfrac{1}{2}DH.MC$.

Mà $S_{\Delta ADN}=S_{\Delta DMC}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

Suy ra $DI.AN=DH.MC \Rightarrow DI=DH$.
Khi đó ta có $\Delta IDK=\Delta HDK$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{HKD}$ hay KD là tia phân giác của góc AKC (đpcm).

b) Gọi I, H, K lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh AB, AC, BC.



Ta có $AB + AC = AI + IB + AH + HC$

$= AI + AH + BK + KC = 8 + 4\sqrt{3}$ (1).

$\Rightarrow (AB + AC)^2 = \left(8 + 4\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 + 2AB.A$

$\Rightarrow BC^2 + 2AB.AC = \left(8 + 4\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow AB.AC = \frac{\left(8+4\sqrt{\ }\right.}{2}$

Từ (1) và (2), kết hợp với $AB < AC$ suy ra $AB = 2 + 2\sqrt{3}$, $AC = 6 + 2\sqrt{3}$.

Khi đó $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4+4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

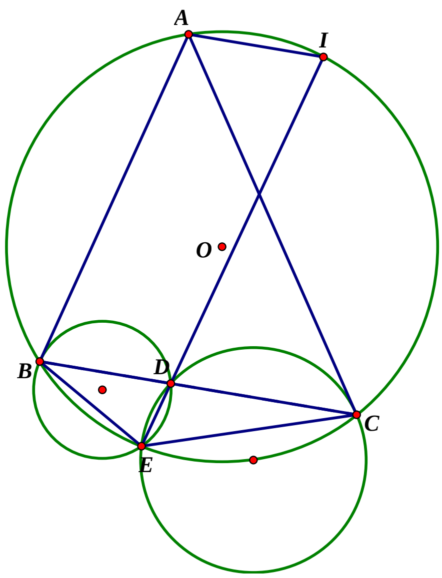
Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O. Trên cạnh BC lấy điểm D tùy ý (D khác B và C). Đường tròn tâm O_1 qua D và tiếp xúc với AB tại B, đường tròn tâm O_2 qua D và tiếp xúc với AC tại C, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh rằng khi D di động trên cạnh BC thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử ΔABC cân tại A, chứng minh rằng tích $AD.AE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm D trên cạnh BC.

Lời giải

a) Kéo dài ED cắt (O) tại I.



AB là tiếp tuyến của $(O_1) \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BED}$.

AC là tiếp tuyến của $(O_2) \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CED}$.

$\Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \widehat{BEC} \Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $ABEC$ nội tiếp (O).

$\Rightarrow \widehat{AIE} = \widehat{ACE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = \widehat{CED} + \widehat{DCE} = \widehat{IDC}$

$\Rightarrow AI // BC \Rightarrow I$ cố định.

Vậy đường thẳng DE luôn đi qua điểm I cố định (đpcm).

b) Ta có $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{IC}$ (do $AI // BC$).

Mà ΔABC cân tại A nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{IC} \Rightarrow I \equiv A$

$\Rightarrow A$, D, E thẳng hàng.

$\Rightarrow AD.AE = AB^2$ (vì $\Delta ABE \backsim \Delta ADB$).

Vậy $AD.AE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm D trên cạnh BC (đpcm).

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2013 – 2014

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$$

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

1. Cho phương trình $x^2+2(m-2)x+m^2-2m+4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{15m}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^4+y^4+z^4=xyz\end{cases}$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;\ b)$ sao cho $(a+b^2)$ chia hết cho (a^2b-1).

2. Tìm $x, y, z\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E. Gọi F là giao điểm của AM và CD.

1. Chứng minh tam giác EMF là tam giác cân.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM. Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng.

3. Chứng minh góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2013 – 2014

Câu 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$$

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

1. Điều kiện: $\sqrt{xy}\neq 1$.

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}:$$

$$\frac{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}}=\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

2. Theo Côsi, ta có: $6=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\leq 9$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{9}$.

Vậy: max$A$ = 9, đạt được khi: $x=y=\frac{1}{9}$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

1. Cho phương trình $x^2+2(m-2)x+m^2-2m+4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{15m}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z=1\\x^4+y^4+z^4=xyz\end{cases}$.

Lời giải

1. PT đã cho có hai nghiệm phân biệt có điều kiện:

$\Delta'>0\Leftrightarrow(m-2)^2-\left(m^2-2m+4\right)>0\Leftrightarrow m<0$ (*)

Với $m<0$ theo Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=4-2m\\x_1.x_2=m^2-2m+4\end{cases}$.

Ta có $\frac{2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{15m}\Leftrightarrow\frac{2}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{15m}$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m^2-6m+4}-\dfrac{1}{m^2-2m+4}=\dfrac{1}{15m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m+\dfrac{4}{m}-6}-\dfrac{1}{m+\dfrac{4}{m}-2}=\dfrac{1}{15}$. Đặt $m+\dfrac{4}{m}=t$ do $m<0\Rightarrow t<0$

Ta cos (1) trở thành $\dfrac{1}{t-6}-\dfrac{1}{t-2}=\dfrac{1}{15}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=12\end{array}\right.\Rightarrow t=-4$ (do $t<0$)

Với $t=-4$ ta có $m+\dfrac{4}{m}=-4\Leftrightarrow m=-2$ thỏa mãn (*)

2. Ta có:

$x^4+y^4+z^4=\dfrac{x^4+y^4}{2}+\dfrac{y^4+z^4}{2}+\dfrac{z^4+x^4}{2}\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=$

$=\dfrac{x^2y^2+y^2z^2}{2}+\dfrac{y^2z^2+z^2x^2}{2}+\dfrac{z^2x^2+x^2y^2}{2}\geq xyyz+yzzx+zxxy=$

$=xyz(x+y+z)=xyz$ (vì $x+y+z=1$).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;\ b)$ sao cho $(a+b^2)$ chia hết cho (a^2b-1).

2. Tìm $x,\ y,\ z\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Lời giải

1. Giả sử $(a+b^2)\vdots(a^2b-1)$, tức là: $a+b^2=k(a^2b-1)$, với $k\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow a+k=b(ka^2-b)\Leftrightarrow a+k=mb$ (1)

Ở đó $m\in\mathbb{Z}$, mà: $m=ka^2-b\Leftrightarrow m+b=ka^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$(m-1)(b-1)=mb-b-m+1\Leftrightarrow(m-1)(b-1)=(a+1)(k+1-ka)$ (3)

Do $m>0$ (điều này suy ra từ (1) do $a,\ k,\ b>0$) nên $m\geq 1$ (vì $m\in\mathbb{Z}$).

Do $b>0$ nên $b-1\geq 0$ (do $b\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow(m-1)(b-1)\geq 0$

Vì thế từ (3) suy ra: $(a+1)(k+1-ka)\geq 0$

Lại do $a>0$ nên suy ra: $k+1-ka\geq 0\Rightarrow k+1\geq ka\Rightarrow 1\geq k(a-1)$ (4)

Vì $a-1\geq 0$ (do $a\in\mathbb{Z}, a>0$) và $k\in\mathbb{Z}, k>0$ nên từ (4) có: $\left[\begin{array}{l} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a=2 \\ k=1\end{cases}\end{array}\right.$

- Với $a=1$. Thay vào (3) ta được: $(m-1)(b-1)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1=2\\b-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}m-1=1\\b-1=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=2\\b=3\end{array}\right.$

Vậy, trường hợp này ta có: $a=1,\ b=2$ hoặc $a=1,\ b=3$.

- Với $a=2$ (vì $k=1$). Thay vào (3) ta có: $(m-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=1\\m=1\end{array}\right.$.

Khi $b=1$, ta được: $a=2, b=1$.

Khi $m=1$: Từ (1) suy ra $a+k=b \Rightarrow b=3$. Lúc này được: $a=2,\ b=3$.

Tóm lại, có 4 cặp số $(a;\ b)$ thỏa mãn bài toán là: $(1;\ 2)$, $(1;\ 3)$, $(2;\ 3)$, $(2;\ 1)$.

2. Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z} \Leftrightarrow x+2\sqrt{3}=y+z+2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow (x-y-z)+2\sqrt{3}=2\sqrt{yz} \Rightarrow (x-y-z)^2+4\sqrt{3}(x-y-z)+12=4yz$ (1)

TH1. Nếu $x-y-z\neq 0$ Ta có $\sqrt{3}=\dfrac{4yz-(x-y-z)^2-12}{4(x-y-z)}$ vô lý (2)

(do $x,y,z\in\mathbb{N}$ nên vế phải của (2) là số hữu tỷ).

TH2. $x-y-z=0$ khi đó $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x-y-z=0\\yz=3\end{cases}$ (3)

Giải (3) ra ta được $\begin{cases}x=4\\y=1\\z=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=4\\y=3\\z=1\end{cases}$ thử lại thỏa mãn.

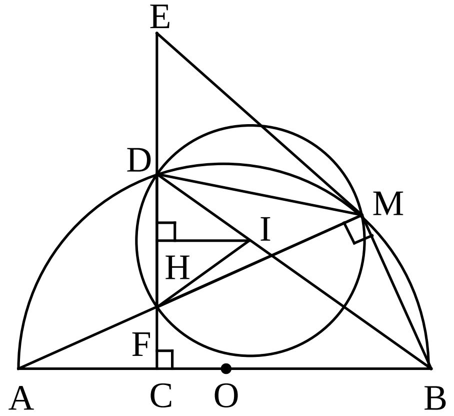
Câu 4: *(6,0 điểm)*

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E. Gọi F là giao điểm của AM và CD.

1. Chứng minh tam giác EMF là tam giác cân.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM. Chứng minh ba điểm $D,\ I,\ B$ thẳng hàng.

3. Chứng minh góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD.



Lời giải

1. Ta có M thuộc đường tròn tâm O đường kính AB (giả thiết) nên $\widehat{AMB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

hay $\widehat{FMB}=90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{FCB}=90^\circ$ (giả thiết).Do đó $\widehat{FMB}+\widehat{FCB}=180^\circ$.

Suy ra $BCFM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{\text{EFM}}\ (1)$ (vì cùng bù với $\widehat{CFM}$).

Mặt khác $\widehat{CBM} = \widehat{\text{EMF}}\ (2)$ (góc nội tiếp; góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{\text{EFM}} = \widehat{\text{EMF}}$.

Suy ra tam giác EMF là tam giác cân tại E.

(Có thể nhận ra ngay $\widehat{EMF} = \widehat{MBA} = \widehat{MFE}$ nên suy ra EMF cân)

2. Gọi H là trung điểm của DF. Suy ra $IH \perp DF$ và $\widehat{DIH} = \dfrac{\widehat{\text{DIF}}}{2}$ (3)

Trong đường tròn (I) ta có: $\widehat{DMF}$ và $\widehat{\text{DIF}}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung DF. Suy ra $\widehat{DMF} = \dfrac{1}{2}\widehat{\text{DIF}}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{DMF} = \widehat{DIH}$ hay $\widehat{DMA} = \widehat{DIH}$.

Trong đường tròn (O) ta có: $\widehat{DMA} = \widehat{DBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DA}$)

Suy ra $\widehat{DBA} = \widehat{DIH}$.

Vì IH và BC cùng vuông góc với EC nên suy ra $IH \,//\, BC$. Do đó $\widehat{DBA} + \widehat{HIB} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{DIH} + \widehat{HIB} = 180^o \Rightarrow$ Ba điểm $D,\ I,\ B$ thẳng hàng.

3. Vì ba điểm $D,\ I,\ B$ thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{ABD} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$.

Mà C cố định nên D cố định $\Rightarrow \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$ không đổi.

Do đó góc ABI có số đo không đổi khi M thay đổi trên cung BD.

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Cho $x,\ y$ là các số thực dương thoả mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \dfrac{1}{x^3 + y^3} + \dfrac{1}{xy}$.

Lời giải

Ta có: $B = \dfrac{1}{(x+y)^3 - 3xy(x+y)} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{1-3xy} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1-2xy}{xy(1-3xy)}$.

Theo Côsi: $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Gọi B_0 là một giá trị của B, khi đó, tồn tại $x,\ y$ để:

$B_0 = \dfrac{1-2xy}{xy(1-3xy)} \Leftrightarrow 3B_0\left(xy\right)^2 - \left(2 + B_0\right)xy + 1 = 0$ (1)

Để tồn tại $x,\ y$ thì (1) phải có nghiệm $x,\ y \Leftrightarrow \Delta = B_0^2 - 8B_0 + 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B_o \ge 4 + 2\sqrt{3} \\ B_o \le 4 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Để ý rằng với giả thiết bài toán thì $B > 0$. Do đó ta có: $B_0 \ge 4 + 2\sqrt{3}$.

Với $B_0 = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \dfrac{2 + B_0}{6B_0} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \Rightarrow x(1-x) = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - x + \frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Vậy, $B_{\min} = 4+2\sqrt{3}$, đạt được khi $x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2},\ y = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$ hoặc

$$x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2},\quad y = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG THANH OAI - NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(6,0 điểm)*

a) Cho $M=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1. Rút gọn M.

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức P.

$P=3x^{2013}+5x^{2011}+2006$ với $x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}-\sqrt{3}.$

Câu 2: *(4,0 điểm)* Giải phương trình:

a) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=24$

b) $\left|2x-x^2-1\right|=2x-x^2-1$

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Cho hai số dương x,y thoả mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) Cho x,y,z là các số dương thoả mãn $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{3x+3y+2z}+\dfrac{1}{3x+2y+3z}+\dfrac{1}{2x+3y+3z}\le\dfrac{3}{2}$.

Câu 4: *(5,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.

2. Gọi α là số đo của góc BFE. Hai đường kính AB và CD thoả mãn điều kiện gì thì biểu thức $P=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó.

3. Chứng minh các hệ thức sau: $CE.DF.EF=CD^3$ và $\dfrac{BE^3}{BF^3}=\dfrac{CE}{DF}$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho: n^4+n^3+1 là số chính phương.

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG THANH OAI NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho $M=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1. Rút gọn M.

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức P.

$P=3x^{2013}+5x^{2011}+2006$ với $x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}-\sqrt{3}.$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$ (*)

1) Rút gọn M : Với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$

$$M=\left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $M=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$) (*)

2) $M=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3\,\vdots\,\sqrt{x}+1\Leftrightarrow\sqrt{x}+1\in U(3)$

$U(3)\in\{\pm 1;\pm 3\}$ Vì $x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}+1\ge 1$

Nên $\sqrt{x}+1\in\{1;3\}$ Xảy ra các trường hợp sau:

$\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ (TMĐK (*))

$\sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (không TMĐK (*) loại)

Vậy $x=0$ thì M nhận giá trị nguyên.

b)

$$x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}-\sqrt{3}$$

Có $\sqrt{18-8\sqrt{2}}=\sqrt{(4-\sqrt{2})^2}=\left|4-\sqrt{2}\right|=4-\sqrt{2}$

$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{3}+4}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\left|\sqrt{3}+1\right|$

$x=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{3}-1}}-\sqrt{3}=\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\sqrt{3}=\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}-\sqrt{3}$

$x=\sqrt{6+2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}-\sqrt{3}=\sqrt{6+2\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

$x=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{3}=\left|\sqrt{3}+1\right|-\sqrt{3}=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$

Với $x=1$.Ta có $P=3.1^{2013}+5.1^{2011}+2006=3+5+2006=2014$

Vậy với $x=1$ thì $P=2014$.

Câu 2: *(1,0 điểm)*

a) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=24$

b) $\left|2x-x^2-1\right|=2x-x^2-1$

Lời giải

a) $(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)=24 \Leftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20)=24$ (1)

Đặt $x^2+9x+19=y$ phương trình (1) trở thành :

$(y+1)(y-1)-24=0 \Leftrightarrow y^2-25=0 \Leftrightarrow (y-5)(y+5)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+9x+24)(x^2+9x+14)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2+9x+24)=0$

Chứng tỏ $x^2+9x+24>0$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=-2; x=-7$.

b) Ta có $2x-x^2-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2<0$

Phương trình trở thành : $2x-x^2-1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x=1$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=1$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Cho hai số dương thỏa mãn: $x+y=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$M=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

b) Cho x, y là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{3}{2}$

Lời giải

a) *(1,0 điểm)*

$$M=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^2y^2+1+1+\frac{1}{x^2y^2}=\frac{x^4y^4+2x^2y^2+1}{x^2y^2}$$

$$=\frac{\left(x^2y^2+1\right)^2}{x^2y^2}=\left(\frac{x^2y^2+1}{xy}\right)^2=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2$$

Ta có: $xy+\frac{1}{xy}=\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}$

* Ta có: $xy+\frac{1}{16xy}\geq 2\sqrt{xy.\frac{1}{16xy}}=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (1)

* $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow xy\leq\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{xy}\geq 4\Rightarrow\frac{1}{16xy}\geq\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{15}{16xy}\geq\frac{15}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}\geq\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$.

Vậy $M=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2\geq\left(\frac{17}{4}\right)^2=\frac{289}{16}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{16xy}\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{4}\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$ (Vì $x,y>0$)

Vậy $Min_M=\frac{289}{16}$ tại $x=y=\frac{1}{2}$.

b) *(1,0 điểm)*

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ (với $a,b>0$) $\Rightarrow\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Ta có: $\frac{1}{3x+3y+2z}=\frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}\right)$

$$\leq\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{(x+y)+(y+z)}\right]\leq\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\right]$$

$$\leq\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{2}{y+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+z}+\frac{4}{y+z}\right)$$

$$\leq\frac{4}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)=\frac{1}{4}.6=\frac{3}{2}$$

Câu 4: *(5,0 điểm)*

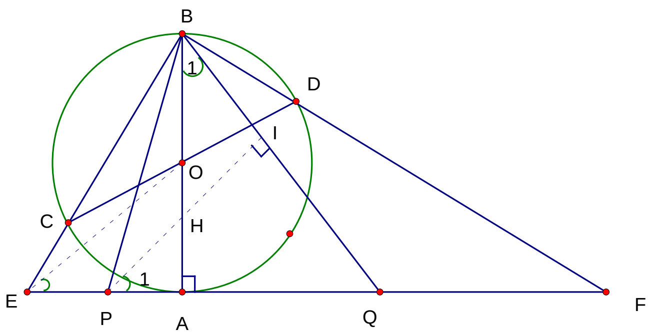
Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1) Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.

2) Gọi α là số đo của góc BFE. Hai đường kính AB và CD thoả mãn điều kiện gì thì biểu thức $P=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó.

3) Chứng minh các hệ thức sau: $CE.DF.EF=CD^3$ và $\dfrac{BE^3}{BF^3}=\dfrac{CE}{DF}$.

Lời giải



1) BA là đường cao của tam giác BPQ suy ra H thuộc BA.

Nối OE, ΔBEF vuông tại B; $BA\perp EF$ nên $AB^2=AE.AF$.

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AF}\Rightarrow \frac{AE}{\frac{1}{2}AB}=\frac{AB}{\frac{1}{2}AF}\Rightarrow \frac{AE}{OA}=\frac{AB}{AQ}$$

Vậy $\Delta AEO\#\ \Delta ABQ$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{ABQ}=\widehat{AEO}$ mà $\widehat{ABQ}=\widehat{P_1}$ (góc có các cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{AEO}=\widehat{P_1}$, mà hai góc đồng vị.

Trong ΔAEO có $PE=PA$ (giả thiết); $PH//OE$ suy ra H là trung điểm của OA.

2) Ta có:

$$P=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3$$

$$P=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left[\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right]$$

$$P=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

Ta có:

$$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2\ge 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Leftrightarrow 1\ge 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Leftrightarrow \sin^2\alpha\cos^2\alpha\le\frac{1}{4}$$

Suy ra: $P=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\ge 1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

Do đó: $P_{\min}=\dfrac{1}{4}$ khi và chỉ khi: $\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\cos\alpha$ (vì α là góc nhọn)

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1\Leftrightarrow tg\alpha=1\Rightarrow\alpha=45^\circ$$

Khi đó CD vuông góc với AB.

3) Ta có ΔACB và ΔADB nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow ADBC$ là hình chữ nhật.

Ta có: $CD^2 = AB^2 = AE.AF$

$\Rightarrow CD^4 = AB^4 = AE^2.AF^2 = (EC.EB).(DF.BF) = (EC.DF).(EB.BF) = EC.DF.AB.EF$

$\Rightarrow AB^3 = CE.DF.EF$

Vậy $CD^3 = CE.DF.EF$

Ta có: $\dfrac{BE^2}{BF^2} = \dfrac{EA.EF}{FA.EF} = \dfrac{AE}{AF} \Rightarrow \dfrac{BE^4}{BF^4} = \dfrac{AE^2}{AF^2} = \dfrac{CE.BE}{DF.BF} \Rightarrow \dfrac{BE^3}{BF^3} = \dfrac{CE}{DF}$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương vì $n^4 + n^3 + 1 > n^4 = (n^2)^2$

$\Rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + k)^2 = n^4 + 2kn^2 + k^2 \ (k \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow n^3 - 2kn^2 = k^2 - 1 \Rightarrow n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \geq 0$

Mà $k^2 - 1 \vdots n^2 \Rightarrow k^2 = 1$ hoặc $n^2 \leq k^2 - 1$

Nếu $k^2 = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow n^2(n-2) = 0 \Rightarrow n = 2$

Thử lại $2^4 + 2^3 + 1 = 5^2$ (thỏa mãn)

Khi $k \neq 1 \Rightarrow k^2 > k^2 - 1 \geq n^2 \Rightarrow k > n$

$\Rightarrow n - 2k < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \geq 0$.

Vậy $n = 2$.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1: *(2,0 điểm)*

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^2(b-2c)+b^2(c-a)+2c^2(a-b)+abc\ .$$

2) Cho x, y thỏa mãn $x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$.

Tính giá trị của biểu thức $A=x^4+x^3y+3x^2+xy-2y^2+1$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $(x^2-4x+11)(x^4-8x^2+21)=35$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2012}\right)=2012\\ x^2+z^2-4(y+z)+8=0\end{cases}$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì (n^2+n+1) không chia hết cho 9.

2) Xét phương trình $x^2-m^2x+2m+2=0$ (1) (ẩn x). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; BO cắt EF tại I. M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

1) Tính $\widehat{BIF}$.

2) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM=AB$ thì tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B=(a+b+c+3)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right).$$

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1: *(2,0 điểm)*

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^2(b-2c)+b^2(c-a)+2c^2(a-b)+abc\ .$$

2) Cho x, y thỏa mãn $x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$.

Tính giá trị của biểu thức $A=x^4+x^3y+3x^2+xy-2y^2+1$.

Lời giải

1)

$a^2(b-2c)+b^2(c-a)+2c^2(a-b)+abc=2c^2(a-b)+ab(a-b)-c\left(a^2-b^2\right)-ac(a-b)$

$=(a-b)\left[2c^2-2ac+ab-bc\right]$

$=(a-b)\left[2c(c-a)+b(a-c)\right]$

$=(a-b)(a-c)(b-2c)$

2) Ta có:

$x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$

$\Rightarrow x^3=2y+3\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}.\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}\left(\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}\right)$

$\Rightarrow x^3+3x-2y=0$

$A=x^4+x^3y+3x^2-2xy+3xy-2y^2+1=\left(x^4+3x^2-2xy\right)+\left(x^3y+3xy-2y^2\right)+1$

$A=x\left(x^3+3x-2y\right)+y\left(x^3+3x-2y\right)+1=1$

Câu 2: *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $\left(x^2-4x+11\right)\left(x^4-8x^2+21\right)=35$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2012}\right)=2012\\ x^2+z^2-4(y+z)+8=0\end{cases}$.

Lời giải

1) Phương trình đã cho tương đương với

$\left[(x-2)^2+7\right]\left[\left(x^2-4\right)^2+5\right]=35$ (1)

Do $\left.\begin{matrix}(x-2)^2+7\geq 7\forall x\\ (x^2-4)^2+5\geq 5\forall x\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[(x-2)^2+7\right]\left[(x^2-4)^2+5\right]\geq 35\ \forall x$

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+7=7\\ (x^2-4)^2+5=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=2$

2)
$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2012}\right)=2012 & (1)\\ x^2+z^2-4(y+z)+8=0 & (2)\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2012}\right)\left(\sqrt{y^2+2012}-y\right)=2012\left(\sqrt{y^2+2012}-y\right)$$

(Do $\sqrt{y^2+2012}-y\neq 0,\forall y$)

$$\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)2012=2012\left(\sqrt{y^2+2012}-y\right)$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+2012}=\sqrt{y^2+2012}-y$$

$$\Leftrightarrow x+y=\sqrt{y^2+2012}-\sqrt{x^2+2012}$$

$$\Leftrightarrow x+y=\frac{\left(\sqrt{y^2+2012}-\sqrt{x^2+2012}\right)\left(\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}\right)}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}}$$

$$\Leftrightarrow x+y=\frac{y^2-x^2}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\frac{\sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}}=0$$

Do $\left.\begin{matrix}\sqrt{y^2+2012}>|y|\geq y & \forall y\\ \sqrt{x^2+2012}>|x|\geq -x & \forall x\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x>0$

Thay $y=-x$ vào (2) $\Rightarrow x^2+z^2+4x-4z+8=0\Leftrightarrow (x+2)^2+(z-2)^2=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)^2=0\\(z-2)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\z=2\end{cases}\Rightarrow y=-x=2$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)=(-2;2;2)$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

3) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $\left(n^2+n+1\right)$ không chia hết cho 9.

4) Xét phương trình $x^2-m^2x+2m+2=0$ (1) (ẩn x). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Lời giải

1)
Đặt $A=n^2+n+1$ do $n\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $n=3k$; $n=3k+1$; $n=3k+2\,(k\in\mathbb{Z})$

* $n=3k$ $\Rightarrow$ A không chia hết cho 9 (vì A không chia hết cho 3)

* $n=3k+1$ $\Rightarrow A=9k^2+9k+3$ không chia hết cho 9.

* $n=3k+2$ $\Rightarrow A=9k^2+9k+7$ không chia hết cho 9

Vậy với mọi số nguyên n thì $A=n^2+n+1$ không chia hết cho 9.

2) Giả sử tồn tại $m\in\mathbb{N}^*$ để phương trình có nghiệm x_1, x_2

Theo Vi-et: $\begin{cases}x_1+x_2=m^2\\ x_1x_2=2m+2\end{cases}\Rightarrow(x_1-1)(x_2-1)=-m^2+2m+3$

Với $m\in\mathbb{N}^*$. Ta có $x_1x_2\ge 4$ vµ $x_1+x_2\ge 1$ mà x_1 hoặc x_2 nguyên và $x_1+x_2=m^2\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x_1,x_2\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(x_1-1)(x_2-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m+3\ge 0\Leftrightarrow(m+1)(m-3)\le 0\Leftrightarrow m\le 3\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$

Với $m=1$; $m=2$ thay vào ta thấy phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $m=3$ thay vào phương trình ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$; $x=8$ thỏa mãn. Vậy $m=3$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; BO cắt EF tại I. M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

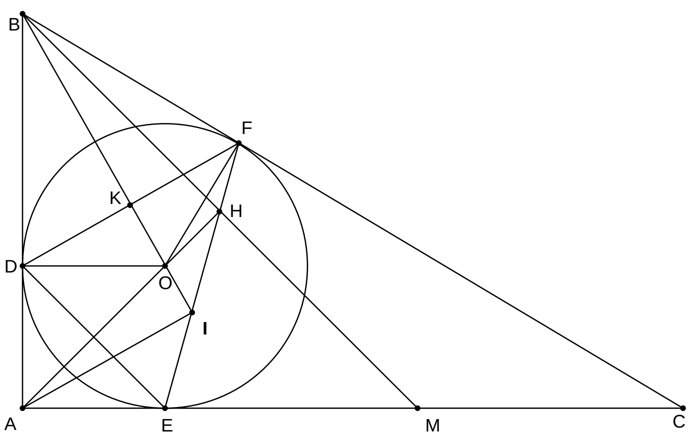
1) Tính $\widehat{BIF}$.

2) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM=AB$ thì tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Lời giải

1)



Gọi K là giao điểm của BO với DF $\Rightarrow\Delta IKF$ vuông tại K

Có $\widehat{DFE}=\frac{1}{2}\widehat{DOE}=45^\circ \Rightarrow \widehat{BIF}=45^\circ$

Khi $AM=AB$ thì ΔABM vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{DBH}=45^\circ$. Có $\widehat{DFH}=45^\circ$

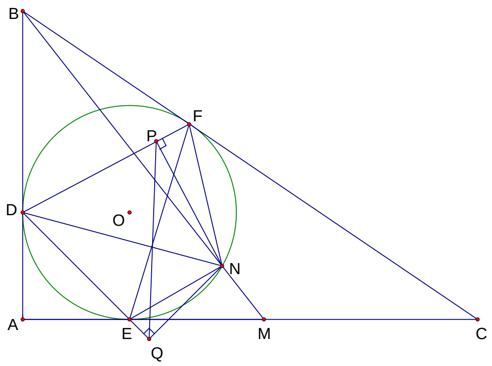
$\Rightarrow$ Tứ giác $BDHF$ nội tiếp.

$\Rightarrow$ 5 điểm B, D, O, H, F cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{BFO}=\widehat{BHO}=90^\circ \Rightarrow OH\perp BM$, mà $OA\perp BM$ $\Rightarrow A$, O, H thẳng hàng.

$\widehat{BAH}=\widehat{BIH}=45^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

2)



Có tứ giác $PNQD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QPN}=\widehat{QDN}=\widehat{EFN}$.

Tương tự có $\widehat{NQP}=\widehat{NDP}=\widehat{FEN} \Rightarrow \Delta NEF$ và ΔNQP đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{PQ}{EF}=\frac{NQ}{NE}\le 1 \Rightarrow PQ\le EF$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $P\equiv F$; $Q\equiv E$ $\Rightarrow$ DN là đường kính của (O) $\Rightarrow$ PQ lớn nhất bằng EF.

Cách xác định điểm M: Kẻ đường kính DN của (O), BN cắt AC tại M thì PQ lớn nhất.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=(a+b+c+3)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$.

Lời giải

Đặt $x=1+c$, $y=1+b$, $z=1+a$

Do $0 \le a \le b \le c \le 1 \Rightarrow 1 \le z \le y \le x \le 2$. Khi đó

$$A = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3+3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right) \ge 0 \Leftrightarrow 1-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{x.y}{y.z} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z} \le \frac{x}{z}+1$$

$$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right) \ge 0 \Leftrightarrow 1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z.y}{y.x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{z}{y}+\frac{y}{x} \le \frac{z}{x}+1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} \le \frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2 \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y} \le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$$

Đặt $\frac{x}{z} = t \Rightarrow 1 \le t \le 2$

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x} = t+\frac{1}{t} = \frac{t^2+1}{t} = \frac{2t^2-5t+2}{2t}+\frac{5}{2} = \frac{(2t-1)(t-2)}{2t}+\frac{5}{2}$$

Do $1 \le t \le 2 \Rightarrow \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} \le 0 \Rightarrow \frac{x}{z}+\frac{z}{x} \le \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow A \le 3+2.\frac{5}{2}+2 = 10$$

Ta thấy khi $a=b=0$ và $c=1$ thì $A=10$ nên giá trị lớn nhất của A là 10.

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN CẨM GIÀNG NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức: $A=\left(x^2-x-1\right)^2+2013$.

Tính giá trị của A khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}$.

b) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2013}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2013}\right)=2013$. Chứng minh rằng $x^{2013}+y^{2013}=0$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2+5x+1=(x+5)\sqrt{x^2+1}$.

b) Chứng minh $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{b+a}}>2$, với $a,b,c>0$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Tìm số dư của phép chia đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2013$ cho đa thức $x^2+10x+21$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $3y^2+x^2+2xy+2x+6y+2017$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC, $\widehat{A}=90°, AB<AC$, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh:

a) $DE^2=BH.HC$.

b) $AH^3=BC.BD.CE$.

2. Cho tam giác ABC, $BC=a, AC=b, AC=c$. Chứng minh: $\sin\dfrac{\widehat{A}}{2}\le\dfrac{a}{b+c}$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho a,b,c là ba cạnh một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN CẨM GIÀNG NĂM HỌC 2013-2014

Câu 1: *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức: $A=\left(x^2-x-1\right)^2+2013$.

Tính giá trị của A khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}$.

b) Cho $\left(x+\sqrt{x^2+2013}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2013}\right)=2013$. Chứng minh rằng $x^{2013}+y^{2013}=0$.

Lời giải

a) Ta có $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)-\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{\sqrt{3}+1-1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1-\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}{\sqrt{3}+1-1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$.

Thay $x=2$ vào biểu thức A, ta có:

$A=\left(2^2-2-1\right)+2013=2014$.

Vậy khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}$ thì giá trị của biểu thức A là 2014.

b) $\left(x+\sqrt{x^2+2013}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2013}\right)=2013$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x^2+2013}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2013}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2013}\right)=2013\left(x-\sqrt{x^2+2013}\right)$

$\Leftrightarrow -2013\left(y+\sqrt{y^2+2013}\right)=2013\left(x-\sqrt{x^2+2013}\right)$

$\Leftrightarrow -y-\sqrt{y^2+2013}=x-\sqrt{x^2+2013}$.

Tương tự $-x-\sqrt{x^2+2013}=y-\sqrt{y^2+2013}$

Do đó $x+y=0\Rightarrow x=-y\Rightarrow x^{2013}+y^{2013}=0$ (đpcm).

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2+5x+1=\left(x+5\right)\sqrt{x^2+1}$.

b) Chứng minh $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{b+a}}>2$, với $a,b,c>0$.

Lời giải

a) $x^2+5x+1=\left(x+5\right)\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow x^2+1+5x=\left(x+5\right)\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow x^2+1+5x-x\sqrt{x^2+1}-5\sqrt{x^2+1}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+5\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}-x=0\\ \sqrt{x^2+1}-5=0.\end{array}\right.$

TH1: $\sqrt{x^2+1}-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+1=x^2 \end{cases}$ (không có x thỏa mãn).

TH2: $\sqrt{x^2+1}-5=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=5 \Leftrightarrow x^2+1=25 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{24}$.

b) Ta có $\dfrac{b+c+a}{2} \ge \sqrt{(b+c)a} \Leftrightarrow \dfrac{b+c+a}{2a} \ge \dfrac{\sqrt{(b+c)a}}{a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{b+c+a}{2a} \ge \sqrt{\dfrac{b+c}{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b+c}} \ge \dfrac{2a}{a+b+c}$.

Tương tự $\sqrt{\dfrac{b}{a+c}} \ge \dfrac{2b}{a+b+c}, \sqrt{\dfrac{c}{b+a}} \ge \dfrac{2c}{a+b+c}$.

$\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{b+a}} \ge \dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b+c=a, c+a=b, a+b=c$, $a,b,c>0$ (vô lí).

Vậy $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{b+a}} > 2$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Tìm số dư của phép chia đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2013$ cho đa thức $x^2+10x+21$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $3y^2+x^2+2xy+2x+6y+2017$.

Lời giải

a) $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2013$

$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+2013$

$=(x^2+10x+21-5)(x^2+10x+21+3)+2013$

$=(y-5)(y+3)+2013$, đặt $y=x^2+10x+21$

$=y^2-2y+1998$ chia cho y dư 1998.

Vậy số dư của phép chia đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2013$ cho đa thức $x^2+10x+21$ là 1998.

b) $A=3y^2+x^2+2xy+2x+6y+2017$

$=(y+x+1)^2+2(1+y)^2+2014 \ge 2014$.

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} y+x+1=0 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1. \end{cases}$

Vậy $\min A=2014$ khi $x=0, y=-1$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC, $\widehat{A}=90°, AB<AC$, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh:

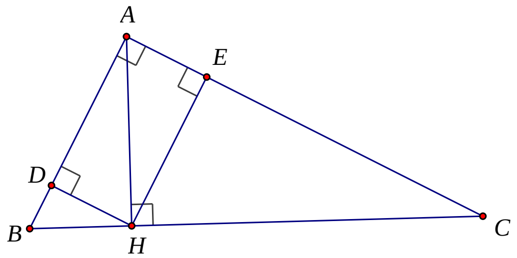
a) $DE^2 = BH.HC$.

b) $AH^3 = BC.BD.CE$.

2. Cho tam giác ABC, $BC=a, AC=b, AC=c$. Chứng minh: $\sin\frac{\widehat{A}}{2} \le \frac{a}{b+c}$.

Lời giải

1.



a) Vì D, E là hình chiếu của H trên AB, AC nên $DH \perp AB, HE \perp AC$.

Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{DAE} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90°$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = DE$.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao , ta có $AH^2 = BH.HC$.

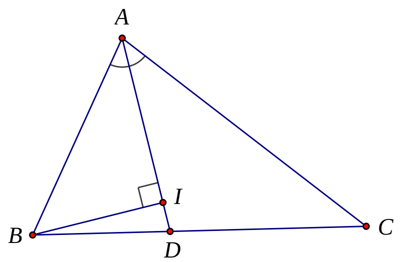
Do đó $DE^2 = BH.HC$.

b) $AH^2 = BH.HC \Rightarrow AH^3 = BH.HC.AH$.

Mặt khác $AH.CB = AB.AC, BA^2 = BH.BC, AC^2 = CH.BC$

Do đó $AH^3 = BC.BD.CE$.

2.



Vẽ đường phân giác AD của ΔABC.

Ta có $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{a}{b+c}$.

Vẽ $BI \perp AD \Rightarrow BI \le BD$.

Ta có $\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{BI}{AB} \Rightarrow \sin\frac{\widehat{A}}{2} \le \frac{BD}{AB+AC}$.

Vậy $\sin\frac{\widehat{A}}{2} \le \frac{a}{b+c}$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho a, b, c là ba cạnh một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Lời giải

Với $x>0, y>0$ ta có $(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\Rightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$ (1)

a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên $a+b-c>0, a+c-b>0, c+b-a>0$.

Áp dụng BĐT (1) với các số $x=a+b-c, y=a+c-b$ dương ta có:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}\ge\frac{4}{a+b-c+a+c-b}=\frac{2}{a}$$

Tương tự $\frac{1}{b+a-c}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{4}{c+b-a+a+b-c}=\frac{2}{b}$

$$\frac{1}{c+b-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{4}{c+b-a+c+a-b}=\frac{2}{c}$$

Do đó $\frac{2}{a+b-c}+\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{c+a-b}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (đpcm).

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG KIÊN GIANG NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Tìm m để hàm số $y=\left(m^2-2m\right)x+m^2-1$ nghịch biến và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=5x^2+y^2+z^2-4x-2xy-z-1$.

c) Cho $x+y=-5$ và $x^2+y^2=11$. Tính x^3+y^3.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn: $A=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}:2\sqrt{1+\dfrac{2x}{3-x}}$.

b) Cho a,b,c thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$.

Tính giá trị biểu thức $Q=\left(a^{27}+b^{27}\right)\left(b^{27}+c^{27}\right)\left(c^{27}+a^{27}\right)$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{17-x}=3$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\dfrac{y+5}{2x-3}}=2\\ 3x+2y=19\end{cases}$ với $x>\dfrac{3}{2};y>-5$.

Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là CD. Qua A vẽ $AK\,//\,BC$ ($K\in CD$) và qua B kẻ $BI\,//\,AD$ ($I\in CD$); BI cắt AC tại F, AK cắt BD tại E.

a) Chứng minh $KD=CI$ và $EF\,//\,AB$.

b) Chứng minh $AB^2=CD.EF$.

Câu 5: *(4,0 điểm)*

Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. M là một điểm di động trên cung BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh: $MB+MC=MA$.

b) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Gọi H, K, Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB,BC,AC; đặt diện tích tam giác ABC là S và diện tích tam giác MBC là S'. Chứng minh rằng: $MH+MK+MQ=\dfrac{2\sqrt{3}\left(S+2S'\right)}{3R}$ khi M di động trên cung BC.

……………….**HẾT**…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG KIÊN GIANG NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Tìm m để hàm số $y=\left(m^2-2m\right)x+m^2-1$ nghịch biến và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=5x^2+y^2+z^2-4x-2xy-z-1$.

c) Cho $x+y=-5$ và $x^2+y^2=11$. Tính x^3+y^3.

Lời giải

a) Hàm số $y=\left(m^2-2m\right)x+m^2-1$ nghịch biến $\Leftrightarrow m^2-2m<0 \Leftrightarrow m\left(m-2\right)<0$

$\Leftrightarrow 0<m<2$ (1)

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 khi $m^2-1=3 \Leftrightarrow m=\pm 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn đề bài

b) $M=5x^2+y^2+z^2-4x-2xy-z-1$

$=x^2-2xy+y^2+4x^2-4x+1+z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}$

$=\left(x-y\right)^2+\left(2x-1\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\geq -\frac{9}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-1=0 \\ z-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M=-\frac{9}{4}$ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

c) Ta có: $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2+y^2-xy\right)=-5\left(11-xy\right)$ (1)

mà $x+y=-5 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=25 \Rightarrow 11+2xy=25 \Leftrightarrow xy=7$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x^3+y^3=-5\left(11-7\right)=-20$

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn: $A=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+\left(x+2\right)\sqrt{9-x^2}}:2\sqrt{1+\dfrac{2x}{3-x}}$.

b) Cho a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

Tính giá trị biểu thức $Q=\left(a^{27}+b^{27}\right)\left(b^{27}+c^{27}\right)\left(c^{27}+a^{27}\right)$.

Lời giải

a) Điều kiện: $-3<x<3$

$$A=\frac{\left(x+3\right)\left(x+2\right)+x\sqrt{3+x}.\sqrt{3-x}}{x\left(3-x\right)+\left(x+2\right)\sqrt{3+x}.\sqrt{3-x}}:2\sqrt{\frac{3-x}{3-x}+\frac{2x}{3-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{3+x}\left[(x+2)\sqrt{3+x}+x\sqrt{3-x}\right]}{\sqrt{3-x}\left[x\sqrt{3-x}+(x+2)\sqrt{3+x}\right]}:2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$$

$$=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}:2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\frac{1}{2}.$$

b) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0\Rightarrow(a+b)\left[c(a+b+c)+ab\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)\left[c(a+c)+bc+ab\right]=0\Leftrightarrow(a+b)\left[c(a+c)+b(c+a)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(a+c)(b+c)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=0\\b+c=0\\a+c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\b=-c\\c=-a\end{array}\right.$$

Thế vào tính được $Q=0$.

Câu 3: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{17-x}=3$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\frac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\frac{y+5}{2x-3}}=2\\3x+2y=19\end{cases}$ với $x>\frac{3}{2};y>-5$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{17-x}=3$

$$\Leftrightarrow x+10+17-x+3\sqrt[3]{(x+10)(17-x)}\left(\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{17-x}\right)=27$$

$$\Leftrightarrow 27+3\sqrt[3]{(x+10)(17-x)}.3=27$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{(x+10)(17-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow(x+10)(17-x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+10=0\\17-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-10\\x=17\end{array}\right..$$

b) Đặt $\sqrt{\frac{2x-3}{y+5}}=a$ (với $a>0$), khi đó phương trình $\sqrt{\frac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\frac{y+5}{2x-3}}=2$ có dạng

$a+\frac{1}{a}=2\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow(a-1)^2=0\Leftrightarrow a=1$(thỏa mãn điều kiện)

Với $a=1\Rightarrow\frac{2x-3}{y+5}=1\Leftrightarrow 2x-y=8$.

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=8\\3x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2y=16\\3x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=35\\3x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y)=(5;2)$.

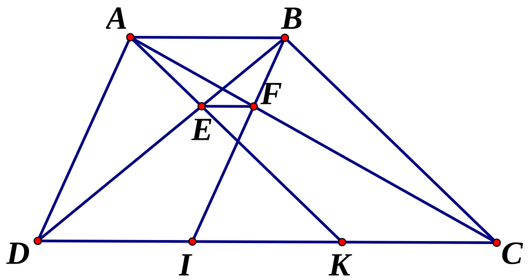
Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là CD. Qua A vẽ $AK // BC$ ($K \in CD$) và qua B kẻ $BI // AD$ ($I \in CD$); BI cắt AC tại F, AK cắt BD tại E.

a) Chứng minh $KD = CI$ và $EF // AB$.

b) Chứng minh $AB^2 = CD.EF$.

Lời giải



a) Ta có các tứ giác $ABID, ABCK$ là hình bình hành (tứ giác có các cạnh đối song song)

$\Rightarrow DI = CK\left(= AB\right)$

$\Rightarrow DI + IK = CK + IK \Rightarrow DK = CI$

$\Delta AEB \backsim \Delta KED$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{EK} = \dfrac{AB}{KD}$

$\Delta AFB \backsim \Delta CFI$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AB}{CI}$

Mà $KD = CI$ $\Rightarrow \dfrac{AE}{EK} = \dfrac{AF}{FC} \Rightarrow EF // KC$ (Định lý Ta let đảo trong ΔAKC)

Vì $KC // AB$ nên $EF // AB$.

b) Ta có $\Delta KED \backsim \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DK}{AB} = \dfrac{DE}{EB} \Rightarrow \dfrac{DK + AB}{AB} = \dfrac{DE + EB}{EB} \Rightarrow \dfrac{DK + KC}{AB} = \dfrac{DB}{EB} \Rightarrow \dfrac{DC}{AB} = \dfrac{DB}{EB}$ (1)

(Vì $ABCK$ là hình bình hành)

Do $EF // DI$ (theo chứng minh : $EF // KC$ và $I \in KC$)

$\Rightarrow \dfrac{DB}{EB} = \dfrac{DI}{EF}$ mà $DI = AB$ $\Rightarrow \dfrac{DB}{EB} = \dfrac{AB}{EF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{DC}{AB} = \dfrac{AB}{EF} \Rightarrow AB^2 = DC.EF$.

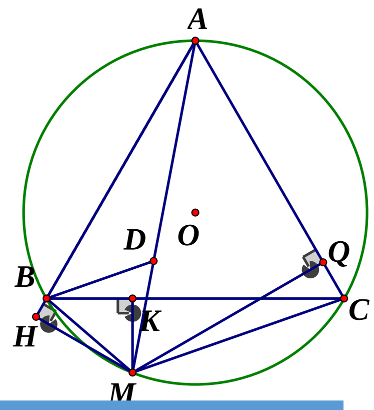
Câu 5: *(4,0 điểm)*

Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. M là một điểm di động trên cung BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh: $MB + MC = MA$.

b) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Gọi H, K, Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, AC; đặt diện tích tam giác ABC là S và diện tích tam giác MBC



là S'. Chứng minh rằng: $MH+MK+MQ=\dfrac{2\sqrt{3}\left(S+2S'\right)}{3R}$ khi M di động trên cung BC

.

Lời giải

a) Trên MA lấy D sao cho $MD=MB$ suy ra ΔMDB cân tại M

$\widehat{BMD}=\widehat{BCA}=60°$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$) suy ra ΔMDB đều

Xét ΔMBC và ΔDBA có

$MB=BD$ (vì ΔMDB đều)

$BC=AB$ (vì ΔABC đều)

$\widehat{MBC}=\widehat{DBA}$ (cùng cộng $\widehat{DBC}$ bằng $60°$)

$\Rightarrow \Delta MBC=\Delta DBA$ (c.g.c)

$\Rightarrow MC=DA$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $MD=MB$ suy ra $MB+MC=MA$.

b) Ta có MA là dây cung của $\left(O;R\right)$ suy ra $MA\le 2R$

$\Rightarrow MA+MB+MC\le 4R$ (không đổi)

Dấu “ =” xảy ra $\Leftrightarrow$ MA là đường kính $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC.

c) Ta có $\dfrac{MH.AB}{2}+\dfrac{MK.BC}{2}+\dfrac{MQ.AC}{2}=S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MAC}$

$\Rightarrow AB.\left(MH+MK+MQ\right)=2\left(S+2S'\right)$

$\Rightarrow MH+MK+MQ=\dfrac{2\left(S+2S'\right)}{AB}$

Vì AB là cạnh tam giác đều nội tiếp $\left(O;R\right)$

$\Rightarrow AB=R\sqrt{3}$ $\Rightarrow MH+MK+MQ=\dfrac{2\sqrt{3}\left(S+2S'\right)}{3R}$.

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN KIM THÀNH NĂM HỌC 2012-2013

Bài 1: **(4,0 điểm)**

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

b) Cho x, y, z thoả mãn: $xy+yz+zx=1$.

Hãy tính giá trị biểu thức $A=x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}}+y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}}+z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Bài 2: **(3,0 điểm)**

a) Cho hàm số: $f(x)=\left(x^3+12x-31\right)^{2012}$

Tính $f(a)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho n^2+17 là số chính phương?

Bài 3: **(4,0 điểm)**

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$

b) $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

Bài 4: **(3,0 điểm)**

a) Tìm $x; y$ thỏa mãn: $2\left(x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\right)=xy$

b) Cho $a;b;c$ là các số thuộc đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=6$.

Hãy chứng minh rằng: $a+b+c\geq 0$

Bài 5: **(6,0 điểm)** Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao $AK;BD;CE$ cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\dfrac{KC}{KB}=\dfrac{AC^2+CB^2-BA^2}{CB^2+BA^2-AC^2}$

b) Giả sử: $HK=\dfrac{1}{3}AK$. Chứng minh rằng: $\tan B.\tan C=3$.

c) Giả sử $S_{ABC}=120\,\text{cm}^2$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Hãy tính diện tích tam giác ADE ?

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN KIM THÀNH NĂM HỌC 2012-2013

Bài 1: (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

b) Cho x, y, z thoả mãn: $xy+yz+zx=1$.

Hãy tính giá trị biểu thức $A=x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}}+y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}}+z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

ĐKXĐ: $x\neq 4; x\neq 9$

$A=$

$$\frac{2\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

b) Cho x, y, z thoả mãn: $xy+yz+zx=1$.

Hãy tính giá trị biểu thức $A=x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}}+y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}}+z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Ta có: $xy+yz+zx=1 \Leftrightarrow 1+x^2=xy+yz+zx+x^2=y\left(x+z\right)+x\left(x+z\right)=\left(x+z\right)\left(x+y\right)$

Tương tự: $1+y^2=\left(y+z\right)\left(y+x\right),\ 1+z^2=\left(z+x\right)\left(z+y\right)$

Thay các kết quả trên vào biểu thức A để tính.

Bài 2: (3,0 điểm)

a) Cho hàm số: $f\left(x\right)=\left(x^3+12x-31\right)^{2012}$

Tính $f\left(a\right)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho n^2+17 là số chính phương?

Lời giải

a) Cho hàm số: $f\left(x\right)=\left(x^3+12x-31\right)^{2012}$

Tính $f\left(a\right)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

Từ $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$\Rightarrow a^3=32+3\sqrt[3]{\left(16-8\sqrt{5}\right)\left(16+8\sqrt{5}\right)}\left[\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}\right]=32-12a$ nên

$a^3+12a=32$.

Vậy $f\left(a\right)=1$.

b) Tìm số tự nhiên n sao cho n^2+17 là số chính phương?

Giả sử: $n^2+17=k^2$ ($k\in N$) và $k>n$ $\Rightarrow$ $\left(k-n\right)\left(k+n\right)=17\Leftrightarrow\begin{cases}k-n=1\\k+n=17\end{cases}\Rightarrow n=8$

Vậy với $n=8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3: **(4,0 điểm)**

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$

b) $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

Lời giải

a) ĐK: $-4\le x\le 1$

Bình phương 2 vế: $1-x+4+x+2\sqrt{(1-x)(4+x)}=9\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)(4+x)}=2$

$\Leftrightarrow 4-3x-x^2=4\Leftrightarrow x(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=0; x=-3$.

b) $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

ĐKXĐ: x $\ge\dfrac{-3}{2}$

$x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow\left(x^2+2x+1\right)+\left(2x+3-2\sqrt{2x+3}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\\sqrt{2x+3}=1\end{cases}\Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bài 4: **(3,0 điểm)**

a) Tìm $x;y$ thỏa mãn: $2\left(x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\right)=xy$

b) Cho $a;b;c$ là các số thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=6$.

Hãy chứng minh rằng: $a+b+c\ge 0$

Lời giải

a) Tìm $x;y$ thỏa mãn: $2\left(x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\right)=xy$

ĐK: $x\ge 4; y\ge 4$. Ta có:

$$2\left(x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\right)=xy \Leftrightarrow x.2.\sqrt{y-4}+y.2.\sqrt{x-4}=xy$$

Xét $VP = x.2.\sqrt{y-4}+y.2.\sqrt{x-4}$

Theo BĐT Côsi: $2\sqrt{y-4}\le \dfrac{4+y-4}{2}=\dfrac{y}{2}; 2\sqrt{x-4}\le \dfrac{4+x-4}{2}=\dfrac{x}{2}$

Vậy $VP\le xy=VT$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{x-4}=2\\ \sqrt{y-4}=2\end{cases}\Rightarrow x=y=8$ khi (thỏa mãn ĐK)

b) Cho $a;b;c$ là các số thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=6$.

Hãy chứng minh rằng: $a+b+c\ge 0$

Do $a;b;c$ là các số thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ nên $a+1\ge 0; a-2\le 0$ nên $\left(a+1\right)\left(a-2\right)\le 0$

Hay $a^2-a-2\le 0\Rightarrow a^2\le a+2$

Tương tự $b^2\le b+2;\ c^2\le c+2.$

Do đó $a^2+b^2+c^2\le a+b+c+6$. Mà theo đề bài $a^2+b^2+c^2=6$ nên $a+b+c\ge 0$

Bài 5: **(6,0 điểm)** Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao $AK;BD;CE$ cắt nhau tại H.

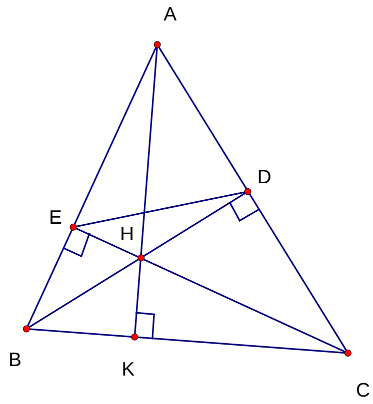
a) Chứng minh: $\dfrac{KC}{KB}=\dfrac{AC^2+CB^2-BA^2}{CB^2+BA^2-AC^2}$

b) Giả sử: $HK=\dfrac{1}{3}AK$. Chứng minh rằng: $\tan B.\tan C=3$.

c) Giả sử $S_{ABC}=120\,\text{cm}^2$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Hãy tính diện tích tam giác ADE ?

Lời giải

a) Sử dụng định lý Pytago:



$$\frac{AC^2+CB^2-BA^2}{CB^2+BA^2-AC^2}=\frac{AK^2+KC^2+(BK+CK)^2-AB^2}{(BK+CK)^2+BA^2-(AK+KC)^2}$$

$$=\frac{2CK^2+2BK.CK}{2BK^2+2BK.CK}=\frac{2CK(CK+BK)}{2BK(BK+CK)}=\frac{CK}{BK}$$

b) Ta có $\tan B=\frac{AK}{BK};\tan C=\frac{AK}{CK}$

nên $\tan B\tan C=\frac{AK^2}{BK.CK}$ (1)

Mặt khác ta có $\widehat{B}=\widehat{HKC}$ mà $\tan HKC=\frac{KC}{KH}$

Nên $\tan B=\frac{KC}{KH}$

Tương tự $\tan C=\frac{KB}{KH}$. Do đó $\tan B.\tan C=\frac{KB.KC}{KH^2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow(\tan B.\tan C)^2=\left(\frac{AK}{KH}\right)^2$

Theo giả thiết $HK=\frac{1}{3}AK$ nên $\tan B.\tan C=3$

c) Ta chứng minh được: ΔABC và ΔADE đồng dạng vậy: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\left(\frac{AB}{AD}\right)^2$ (3)

Mà $\widehat{BAC}=60°$ nên $\widehat{ABD}=30°\Rightarrow AB=2AD$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=4\Rightarrow S_{ADE}=30$ (cm^2)

……………….HẾT…………….

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức : $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

2/ Tìm các giá trị của x để $\dfrac{1}{A}\le-\dfrac{5}{2}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=ax^2$ $(a\ne0)$ và đường thẳng $(d): y=bx+1$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm $M(1;2)$.

2/ Với a,b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc toạ độ).

Câu 3: *(2,0 điểm)*

1/ Cho phương trình: $x^2-(2m+1)x+m^2+m-6=0$ (m là tham số). Tìm m để

phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

2/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\end{cases}$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho *A* là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (*O*). Từ *A* kẻ tiếp tuyến *AP* và *AQ* tới đường tròn (*P* và *Q* là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua *O* và vuông góc với *OP* cắt đường thẳng *OQ* tại *M*.

1/ Chứng minh rằng: $MO=MA$.

2/ Lấy điểm *N* trên cung lớn *PQ* của đường tròn (*O*) sao cho tiếp tuyến với (*O*) tại N cắt các tia *AP*, *AQ* lần lượt tại *B* và *C*. Chứng minh rằng:

a) $AB+AC-BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm *N*.

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ//BC$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho x,y là các số thực dương thoả mãn : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=2$. Chứng minh rằng:

$$5x^2+y-4xy+y^2\ge3.$$

……………….HẾT…………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH THANH HÓA NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức : $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

2/ Tìm các giá trị của x để $\dfrac{1}{A}\le -\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

1/ Rút gọn biểu thức A.

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$$ (ĐK: $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$)

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{x}+2+(x-9)-(x-4)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}:\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)(x-4)}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-4}$$

2/ Tìm các giá trị của x để $\dfrac{1}{A}\le -\dfrac{5}{2}$

$$\frac{1}{A}\le -\frac{5}{2}\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+1}\le -\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x-8\le -5\sqrt{x}-5$$

$$\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3\le 0\Leftrightarrow -3\le \sqrt{x}\le \frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le \sqrt{x}\le \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{1}{4}$$

Kết hợp với ĐK $\Rightarrow$ $0\le x\le \dfrac{1}{4}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=ax^2$ $(a\ne 0)$ và đường thẳng $(d): y=bx+1$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm $M(1;2)$.

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc toạ độ).

Lời giải

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm $M(1;2)$.

$M \in (P) \Rightarrow 2 = a.1^2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x^2$

$M \in (d) \Rightarrow 2 = b.1 + 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = x + 1$

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc toạ độ).

Xét pt hoành độ gđ: $2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow M(1;2);\ N\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$$

$$S_{\Delta MON} = S_{thang} - (S_1 + S_2) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2} + 2\right).\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + 1.2\right). = 0,75$$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

1/ Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

2/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$.

Lời giải

1/ Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 > 0 \\ m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

2/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$. (ĐK: $x \geq 1;\ y \geq 1$)

(2) $\Leftrightarrow x+y=xy$ (3)

Hai vế của (1) đều dương nên bình phương hai vế ta có:

$$x+y-2+2\sqrt{(x-1)(y-1)}=4$$
$$\Leftrightarrow x+y-2+2\sqrt{xy-(x+y)+1}=4$$

Thay (3) vào ta có: $x+y=4$ kết hợp với (3) có hệ: $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$

Áp dụng hệ thức Viete ta có x; y là hai nghiệm của pt: $x^2-4x+4=0$

$\Rightarrow x=2; y=2$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho *A* là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (*O*). Từ *A* kẻ tiếp tuyến *AP* và *AQ* tới đường tròn (*P* và *Q* là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua *O* và vuông góc với *OP* cắt đường thẳng *OQ* tại *M*.

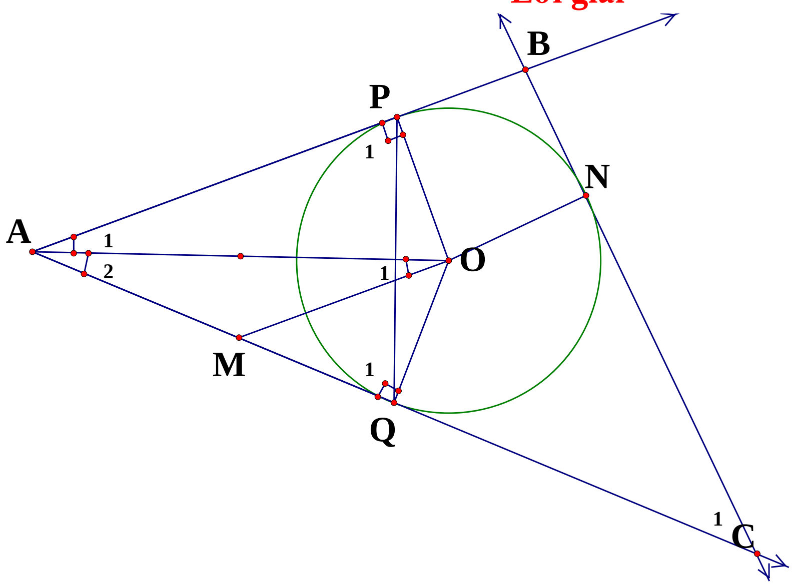
1/ Chứng minh rằng: $MO=MA$.

2/ Lấy điểm *N* trên cung lớn *PQ* của đường tròn (*O*) sao cho tiếp tuyến với (*O*) tại N cắt các tia *AP*, *AQ* lần lượt tại *B* và *C*. Chứng minh rằng:

a) $AB+AC-BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm *N*.

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ//BC$.

Lời giải



$\widehat{A_1}=\widehat{O_1}$ và $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ $\Rightarrow \widehat{A_2}=\widehat{O_1}$ $\Rightarrow \Delta MAO$ cân $\Rightarrow MO=MA$

2/ Lấy điểm *N* trên cung lớn *PQ* của đường tròn (*O*) sao cho tiếp tuyến với (*O*) tại N cắt các tia *AP*, *AQ* lần lượt tại *B* và *C*. Chứng minh rằng:

a) $AB+AC-BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm *N*.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AP = AQ$, $CQ = CN$, $BP = BN$

$\Rightarrow AB + AC - BC = AP + BP + AQ + QC - CN - BN = 2AP\ (const)$

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ//BC$.

Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{C_1}$

Mà $\widehat{P_1} = \widehat{Q_1}$ $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{Q_1}$ $\Rightarrow PQ//BC$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho x, y là các số thực dương thoả mãn : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3.$$

Lời giải

* Ta có:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$

* $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{y} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{2x-1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{2x-1}$

Vì: $y > 0$; $x > 0$ $\Rightarrow 2x - 1 > 0$ $\Rightarrow x > \frac{1}{2}$. Thay $y = \frac{2x}{2x-1}$ vào $x^2 + y - 3 \geq 0$

Ta có: $x^2 + y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2x}{2x-1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3}{2x-1} \geq 0$

Vì $2x - 1 > 0$ $\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Mà

$$2x^3 - x^2 - 4x + 3$$
$$= 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 3x + 3$$
$$= (x-1)(2x^2 + x - 3)$$
$$= (x-1)^2(2x+3) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

Suy ra $(2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \quad \forall x > 0; y > 0$

Vậy $5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$

……………..**HẾT**……………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH KIÊN GIANG
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2011-2012
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi : 01/03/2012

Câu 1: **(4 điểm)**

a) Cho $S=1+3+3^2+3^3+3^4+......+3^{96}+3^{97}+3^{98}+3^{99}$
Chứng minh S chia hết cho 40.

b) Rút gọn phân thức $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}$.

Câu 2: **(4 điểm)**

a) Thực hiện phép tính : $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

b) Cho $a+b+c=0;\ a,b,c\neq 0$. Chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|.$$

Câu 3: **(4 điểm)**

a) Giải phương trình: $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}|x-2|+2|y-1|=9\\ x+|y-1|=-1\end{cases}$.

Câu 4: **(5 điểm)** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$ có hai đường chéo AC,BD vuông góc với nhau tại I $(I\neq O)$. Vẽ đường kính CE.

a) Chứng minh $ABDE$ là hình thang cân.

b) Chứng minh $\sqrt{AB^2+CD^2+BC^2+DA^2}=2R\sqrt{2}$.

c) Từ A và B vẽ các đường thẳng vuông góc đến CD lần lượt cắt BD tại F, cắt AC tại K. Chứng minh A,N,K,F là bốn đỉnh của một tứ giác đặc biệt.

Câu 5: **(3 điểm)** Cho hai điểm A, B cố định và điểm M di động sao cho MAB là tam giác có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB và K là chân đường cao vẽ từ M của tam giác MAB. Tính giá trị lớn nhất của tích $KH.KM$.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 KIÊN GIANG NĂM 2011-2012

Câu 1: **(4 điểm)**

a) Cho $S=1+3+3^2+3^3+3^4+......+3^{96}+3^{97}+3^{98}+3^{99}$. Chứng minh S chia hết cho 40.

b) Rút gọn phân thức $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}$.

Lời giải

a) $S=\left(1+3^1+3^2+3^3\right)+\left(3^4+3^5+3^6+3^7\right)+.....+\left(3^{96}+3^{97}+3^{98}+3^{99}\right)$

$S=\left(1+3^1+3^2+3^3\right)+3^4.\left(1+3^1+3^2+3^3\right)+....+3^{96}.\left(1+3^1+3^2+3^3\right)$

$S=\left(1+3^1+3^2+3^3\right).\left(1+3^4+3^8......+3^{96}\right)$

$S=40.\left(1+3^4+3^8......+3^{96}\right)$

Vậy S chia hết cho 40.

b) Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$.

$=(a+b)^3+c^3-3ab.(a+b)-3abc$

$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c).\left(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\right)$

$=(a+b+c).\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

Ta lại có: $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$

$=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Kết quả $=\dfrac{a+b+c}{2}$ với $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\neq 0$.

Câu 2: **(4 điểm)**

a) Thực hiện phép tính : $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

b) Cho $a+b+c=0;\ a,b,c\neq 0$. Chứng minh đẳng thức

$\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}.\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}.\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}.\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\left(\sqrt{3}+1\right)}+\frac{\sqrt{2}.\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$=\sqrt{2}.\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)$$

$$=\sqrt{2}.\frac{\left(2+\sqrt{3}\right).\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right).\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}=\sqrt{2}$$

b) Ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{c+b+a}{abc}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|.$$

Câu 3: **(4 điểm)**

a) Giải phương trình: $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}|x-2|+2|y-1|=9\\ x+|y-1|=-1\end{cases}$.

Lời giải

a) **Điều kiện:** $4x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{-1}{4}$.

Với điều kiện trên, phương trình trở thành:

$$2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}\Leftrightarrow 4x^2+4x+2=2\sqrt{4x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+\left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2=0\Rightarrow\begin{cases}4x^2=0\\ \sqrt{4x+1}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0\ \text{(thỏa)}.$$

b) $\begin{cases}|x-2|+2|y-1|=9\ (1)\\ x+|y-1|=-1\ (2)\end{cases}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow|y-1|=-1-x\geq 0\Rightarrow x\leq -1$.

Thế vào phương trình (1) ta có

$|x-2|+2(-1-x)=9\Leftrightarrow|x-2|-2x=11$

$\Rightarrow 2-x-2x=9 \Rightarrow x=-3$ (vì $x \le -1$).

Thế $x=-3$ vào phương trình (2) : $|y-1|=-1+3=2 \Rightarrow y-1=\pm 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ là $(-3;3);(-3;-1)$.

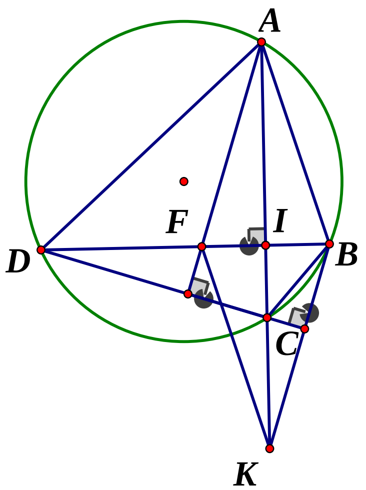
Câu 4: **(5 điểm)** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$ có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại I $(I \neq O)$. Vẽ đường kính CE.

a) Chứng minh $ABDE$ là hình thang cân.

b) Chứng minh $\sqrt{AB^2+CD^2+BC^2+DA^2}=2R\sqrt{2}$.

c) Từ A và B vẽ các đường thẳng vuông góc đến CD lần lượt cắt BD tại F, cắt AC tại K. Chứng minh A, N, K, F là bốn đỉnh của một tứ giác đặc biệt.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{EAC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE \perp AC$.

Mà $BD \perp AC$ (gt) $\Rightarrow AE // BD$

$\Rightarrow ABDE$ là hình thang.

Mà $ABDE$ nội tiếp đường tròn (O) nên $ABDE$ là hình thang cân.

b) Ta có $\widehat{EDC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta DEC$ vuông ở D.

$\Rightarrow ED^2+CD^2=EC^2=(2R)^2=4R^2$

Mà $AB=ED$ (vì $ABDE$ là hình thang cân)$\Rightarrow AB^2+CD^2=4R^2$

Chứng minh tương tự$\Rightarrow BC^2+DA^2=4R^2$.

$\Rightarrow AB^2+CD^2+BC^2+DA^2=8R^2 \Rightarrow \sqrt{AB^2+CD^2+BC^2+DA^2}=2R\sqrt{2}$.

c) Ta có : $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$\widehat{IAF}=\widehat{BDC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Suy ra: $\widehat{BAC}=\widehat{IAF} \Rightarrow \Delta ABF$ cân tại A.

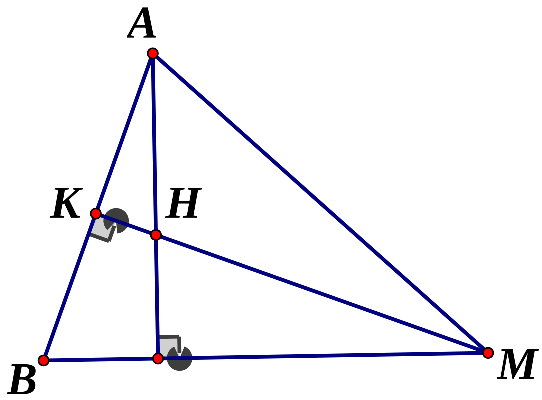
Mà AI là đường cao , nên AI là đường trung tuyến $\Rightarrow IB=IF$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow IA = IK \Rightarrow ABKF$ là hình bình hành

Mà $AK \perp BF$ nên $ABKF$ là hình thoi.

Câu 5: **(3 điểm)** Cho hai điểm A, B cố định và điểm M di động sao cho MAB là tam giác có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB và K là chân đường cao vẽ từ M của tam giác MAB. Tính giá trị lớn nhất của tích $KH.KM$.

Lời giải



Xét ΔKAH và ΔKMB ta có:

$\widehat{AKH} = \widehat{MKB} = 90°$

$\widehat{KAH} = \widehat{KMB}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta KAH \# \Delta KMB(g-g)$

$\Rightarrow \frac{KH}{KB} = \frac{AK}{KM} \Rightarrow KH.KM = AK.KB$

Áp dụng bất đẳng thức cosi cho hai số dương

Ta có: $\sqrt{AK.KB} \le \frac{AK+KB}{2} \Leftrightarrow AK.KB \le \frac{AB^2}{4}$

Do đó $KH.KM \le \frac{AB^2}{4}$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AK = KB$. Vậy giá trị lớn nhất của $KH.KM$ là $\frac{AB^2}{4}$.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2011-2012

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$.

và $P = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

b) Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in N$, n > 1). Chứng minh A không phải là số chính phương.

Câu 2: *(4,5 điểm)*

a) Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1} = 3x^2 + 6$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 3 \\ y + \dfrac{1}{z} = 3 \\ z + \dfrac{1}{x} = 3 \end{cases}$

Câu 3: *(4,5 điểm)*

a) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2x+y+z} + \dfrac{1}{x+2y+z} + \dfrac{1}{x+y+2z} \le 1$

b) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ thỏa mãn $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = x^2 + y^2 + z^2$

Câu 4: *(4,5 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC.

a) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

b) Khi $\widehat{BOC} = 120°$, xác định vị trí của điểm M để $\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2011-2012

Câu 1: *(4,0 điểm)*

a) Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$ và $P = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

b) Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in N$, $n > 1$). Chứng minh A không phải là số chính phương.

Lời giải

Với $a \in Z$ thì $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3. Mà $(2;3) = 1 \Rightarrow a^3 - a \vdots 6 \Rightarrow S - P = (a_1^2 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \ldots + (a_n^3 - a_n) \vdots 6$

Vậy $S \vdots 6 \Leftrightarrow P \vdots 6$

$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n+1)^2.(n^2 - 2n + 2)$ với $n \in N$, n > 1 thì

$n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 2: *(4,5 điểm)*

a) Giải phương trình: $10\sqrt{x^3 + 1} = 3x^2 + 6$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 3 \\ y + \dfrac{1}{z} = 3 \\ z + \dfrac{1}{x} = 3 \end{cases}$

Lời giải

a) $10\sqrt{x^3 + 1} = 3(x^2 + 2)$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} = 3(x^2 + 2)$ điều kiện $x \geq -1$

Ta có :

Đặt $\sqrt{x+1} = a$ $(a \geq 0)$; $\sqrt{x^2 - x + 1} = b$ $(b > 0)$

Ta có: $10ab = 3a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ b = 3a \end{array}\right.$

Trường hợp1: $a = 3b$

Ta có: $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 - x + 1}$ (1)

$\Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 9 = x + 1$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$

Trường hợp 2: $b = 3a$

Ta có: $3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$\Leftrightarrow 9(x+1)=x^2-x+1$

$\Leftrightarrow x^2-10x\text{-}8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5+\sqrt{33}\ \ (TM) \\ x_2=5-\sqrt{33}\ \ (TM) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=5\pm\sqrt{33}$

$\Delta' = 25-9.8<0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

b)

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=3 & (1) \\ y+\dfrac{1}{z}=3 & (2) \\ z+\dfrac{1}{x}=3 & (3) \end{cases}$$

Từ (3) $\Rightarrow z=\dfrac{3x-1}{x}$ thay vào (2)$\Rightarrow 3xy+3=8x+y$ (4)

Từ (1) $\Rightarrow xy+1=3y \Leftrightarrow 3xy+3=9y$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow 8x+y=9y \Rightarrow x=y$

Chứng minh tương tự : $y=z$

Từ đó $\Rightarrow x=y=z$

Thay vào (1) $\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ hệ có 2 nghiệm $x=y=z=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Câu 3: *(4,5 điểm)*

a) Cho $x>0, y>0, z>0$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\le 1$

b) Cho $x>0, y>0, z>0$ thỏa mãn $x^{2011}+y^{2011}+z^{2011}=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=x^2+y^2+z^2$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$ (với $x,y>0$)

Ta có: $\dfrac{1}{2x+y+z}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y+z}\right)$; $\dfrac{1}{y+z}\le\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{4z}$

Suy ra: $\dfrac{1}{2x+y+z} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{4z}\right)$ (1)

Tương tự: $\dfrac{1}{x+2y+z} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{4z}\right)$ (2)

$\dfrac{1}{x+y+2z} \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{2z})$ (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z} \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z} \le 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{3}{4}$

b) Áp dụng bất đẳng thức CôSy cho x^{2011}, x^{2011} và 2009 số 1 ta có:

$\underbrace{x^{2011}+x^{2011}+1+1+...+1}_{2009\,C/S1} \ge 2011\sqrt[2011]{(x^2)^{2011}}$

$\Rightarrow 2x^{2011}+2009 \ge 2011x^2$ (1)

Tương tự: $2y^{2011}+2009 \ge 2011y^2$ (2)

$2z^{2011}+2009 \ge 2011z^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le \dfrac{2(x^{2011}+y^{2011}+z^{2011})+3.2009}{2011}$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 3$

Giá trị lớn nhất của M là 3 khi và chỉ khi $x=y=z=1$

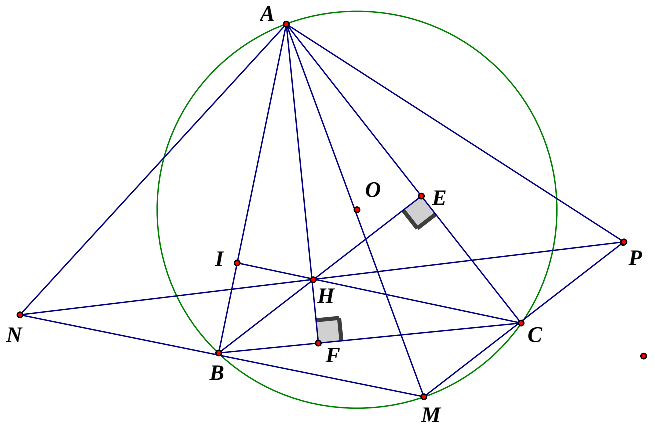
Câu 4: *(4,5 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC.

a) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

b) Khi $\widehat{BOC}=120°$, xác định vị trí của điểm M để $\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

Gọi giao điểm của BH với AC là E, AH với BC là F, CH với AB là I.

$\Rightarrow$ $HECF$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ACB}$ (1)

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (Do M, N đối xứng AB) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $AHBN$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NHB}$ (*)

Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ (Do M, N đối xứng AB) (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow$ $\widehat{NHB} = \widehat{BAM}$

Chứng minh tương tự: $\widehat{PHC} = \widehat{MAC}$

$\Rightarrow \widehat{NHB} + \widehat{PHC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC}$

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{IHE} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{NHB} + \widehat{PHC} + \widehat{BHC} = 180^0$ (vì $\widehat{IHE} = \widehat{BHC}$)

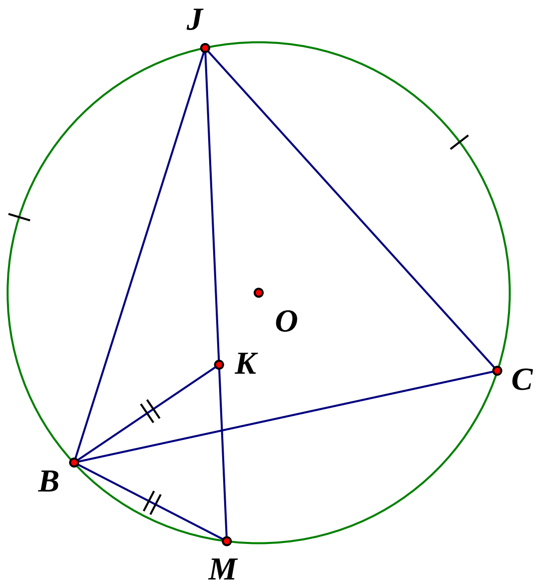
$\Rightarrow$ N, H, P thẳng hàng

b) Khi $\widehat{BOC} = 120°$, xác định vị trí của điểm M để $\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi J là điểm chính giữa của cung lớn BC .

$\widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \Delta BJC$ đều

Trên đoạn JM lấy K sao cho $MK = MB$ $\Rightarrow \Delta JKB = \Delta CMB$



$\Rightarrow BM + MC = JM$

$\dfrac{1}{BM} + \dfrac{1}{MC} \geq \dfrac{4}{BM + MC}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{BM} + \dfrac{1}{MC} \geq \dfrac{4}{JM}$

JM lớn nhất $\Leftrightarrow$ JM là đường kính (O) lúc đó M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Vậy $\dfrac{1}{BM} + \dfrac{1}{MC}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

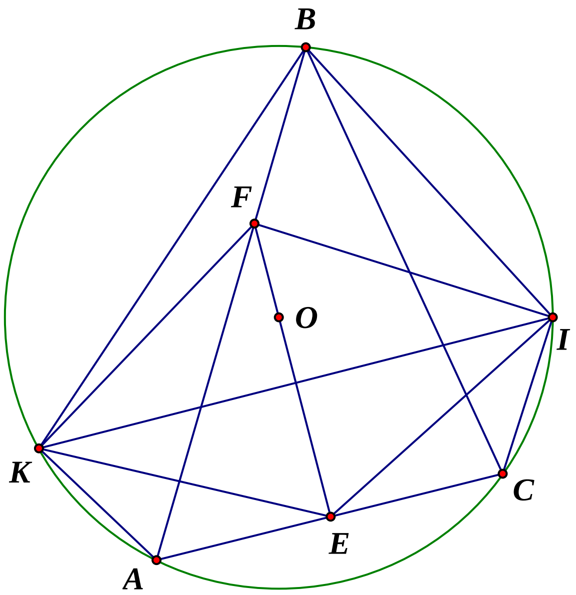
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

+ Khi $\widehat{BAC} = 90° \Rightarrow \widehat{BIC} = 90°$.

$\Rightarrow$ F trùng với B, E trùng với C lúc đó EF là đường kính.

$\Rightarrow$ EF đi qua điểm O cố định.



+ Khi $\widehat{BAC} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} > 90^\circ$.

Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.

$\Rightarrow \widehat{E\mathrm{IF}} = \widehat{E\mathrm{AF}}$ (cùng bù $\widehat{BIC}$)

$\widehat{EKF} = \widehat{E\mathrm{IF}}$ (Do I và K đối xứng qua EF)

$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{E\mathrm{AF}}$

$\Rightarrow AKF\mathrm{E}$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{K\mathrm{AB}} = \widehat{K\mathrm{EF}}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{KF}$) (1)

$\widehat{\mathrm{IEF}} = \widehat{K\mathrm{EF}}$ (Do I và K đối xứng qua EF) (2)

$\widehat{\mathrm{IEF}} = \widehat{BIK}$ (cùng phụ $\widehat{KIE}$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{K\mathrm{AB}} = \widehat{BIK}$

$\Rightarrow$ $AKBI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ $K \in (O)$

Mà EF là đường trung trực của KI $\Rightarrow$ $E,\ O,\ F$ thẳng hàng.

+ Khi $\widehat{BAC} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} < 90^\circ$ chứng minh tương tự.

Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. *(2.0 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2mx+m-4=0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=26m$.

b) Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho tam giác ABC đều cố định nội tiếp trong đường tròn (O). Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại điểm thứ hai là E $(E\neq A)$. Đường thẳng d cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) lần lượt tại M và N, MC cắt BN tại F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác CAN đồng dạng với tam giác BMA, tam giác MBC đồng dạng với tam giác BCN.

b) Tứ giác $BMEF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi nhưng luôn đi qua A.

Câu 4. *(1,5 điểm)*

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$\dfrac{b+c+5}{1+a}+\dfrac{c+a+4}{2+b}+\dfrac{a+b+3}{3+c}\geq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng n^4+4^n là hợp số.

--------------------HẾT----------------------

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) ĐK: $0\le x\ne 1$. Ta có:

$$P=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2x-6\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-x+16\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+16)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}.$$

b) $P=\dfrac{x+16}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3+\dfrac{25}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+3+\dfrac{25}{\sqrt{x}+3}-6$

$$\ge 2\sqrt{(\sqrt{x}+3)\frac{25}{\sqrt{x}+3}}-6=10-6=4$$

Vậy GTNN của $P=4$, dấu $"="$ xảy ra khi $\sqrt{x}+3=\dfrac{25}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow x=4$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2mx+m-4=0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=26m$

b) Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

Lời giải

a) $x^2-2mx+m-4=0$

Ta có: $\Delta'=m^2-m+4=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$, với $\forall m$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=m-4\end{cases}$

Ta có $x_1^3+x_2^3=26m \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=26m$

$\Leftrightarrow 8m^3-6m(m-4)=26m \Leftrightarrow m(8m^2-6m-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

b) Gọi $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$ là hai nghiệm nguyên của phương trình.

Theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m-4 \end{cases}$.

Suy ra $x_1+x_2-2x_1x_2=8 \Leftrightarrow 2(x_1+x_2)-4x_1x_2-1=15 \Leftrightarrow (2x_1-1)(2x_2-1)=-15$.

TH1: $\begin{cases} 2x_1-1=-1 \\ 2x_2-1=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=8 \end{cases} \Rightarrow m=4$

TH2: $\begin{cases} 2x_1-1=-5 \\ 2x_2-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases} \Rightarrow m=0$

TH3: $\begin{cases} 2x_1-1=-15 \\ 2x_2-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-7 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow m=-3$

TH4: $\begin{cases} 2x_1-1=-3 \\ 2x_2-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases} \Rightarrow m=1$

Thử lại $m=0$, $m=1$, $m=-3$, $m=4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

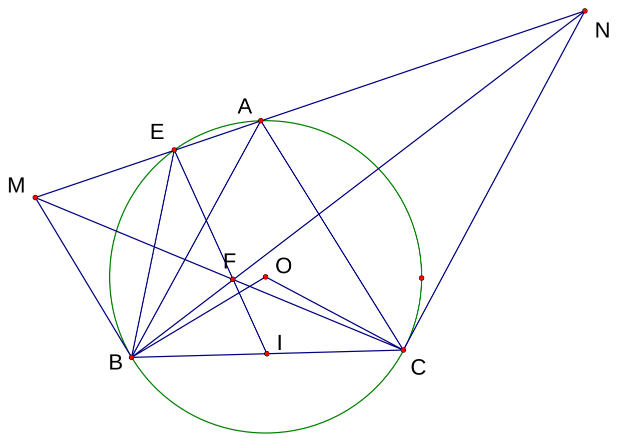
Cho tam giác ABC đều cố định nội tiếp trong đường tròn (O). Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại điểm thứ hai là E $(E \neq A)$. Đường thẳng d cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) lần lượt tại M và N, MC cắt BN tại F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác CAN đồng dạng với tam giác BMA, tam giác MBC đồng dạng với tam giác BCN.

b) Tứ giác $BMEF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi nhưng luôn đi qua A.

Lời giải



a) Ta có: $AC//BM \Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{CAN}$

$AB//CN \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CNA}$

Xét ΔCAN và ΔBMA có

$\widehat{BMA} = \widehat{CAN}$

$\widehat{BAM} = \widehat{CNA}$

$\Rightarrow \Delta CAN \backsim \Delta BMA$ (g.g)

Suy ra: $\dfrac{MB}{AC} = \dfrac{AB}{NC} \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{CN}$

Mặt khác $\widehat{MBC} = \widehat{BCN} = 120°$

Xét ΔMBC và ΔBCN có

$\dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{CN}$

$\widehat{MBC} = \widehat{BCN} = 120°$

$\Rightarrow \Delta MBC \backsim \Delta BCN$ (c.g.c) .

b) Ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BCM} + \widehat{NBC} = \widehat{BCM} + \widehat{BMC} = 180° - \widehat{MBC} = 60°$

Mặt khác $\widehat{BEM} = \widehat{BCA} = 60°$ (do t/c góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Suy ra $\widehat{BFM} = \widehat{BEM} = 60°$. Do đó tứ giác $BMEF$ nội tiếp.

c) Gọi I là giao điểm của EF với BC.

Ta có $\widehat{IBF} = \widehat{BMF}$ (câu a), suy ra IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tứ giác $BMEF$.

Tương tự chứng minh được IC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tứ giác $CNEF$.

Từ đó: $IB^2 = IE.IF$; $IC^2 = IE.IF \Rightarrow IB = IC$ hay I là trung điểm của BC.

Vậy d luôn đi qua điểm cố định là I.

Câu 4. *(1,5 điểm)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$\dfrac{b+c+5}{1+a}+\dfrac{c+a+4}{2+b}+\dfrac{a+b+3}{3+c}\geq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Đặt $x=a+1;\ y=b+2;\ z=c+3\ \left(x,y,z>0\right)$

Ta có $VT=\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{y}{x}.\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{\dfrac{z}{x}.\dfrac{x}{z}}+2\sqrt{\dfrac{y}{z}.\dfrac{z}{y}}=6$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$ suy ra $a=3$, $b=2$, $c=1$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng n^4+4^n là hợp số.

Lời giải

n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên n có dạng $n=2k$ hoặc $n=2k+1$, với $k\in\mathbb{N}^*$

- Với $n=2k$, ta có $n^4+4^n=\left(2k\right)^4+4^{2k}$ lớn hơn 2 và chia hết cho 2. Do đó n^4+4^n là hợp số.

- Với $n=2k+1$, ta có $n^4+4^n=n^4+4^{2k}.4=n^4+\left(2.4^k\right)^2=\left(n^2+2.4^k\right)^2-\left(2.n.2^k\right)^2$

$=\left(n^2+2.4^k-2.n.2^k\right)\left(n^2+2.4^k+2.n.2^k\right)=\left(\left(n-2^k\right)^2+4^k\right)\left(\left(n+2^k\right)^2+4^k\right)$

Mỗi thừa số đều lớn hơn hoặc bằng 2. Vậy n^4+4^n là hợp số.

ĐỀ THI CHỌN HSG CẨM THỦY (V2) NĂM HỌC 2011-2012

Câu 1:

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a. Rút gọn P.

b. Tính P khi $x=3+2\sqrt{2}$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2:

Giải phương trình:

a. $x^2-10x+27=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}$.

b. $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0$.

Câu 3:

a. Tìm các số nguyên $x;y$ thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$.

b. Cho $x>1$; $y>0$, chứng minh: $\dfrac{1}{(x-1)^3}+\left(\dfrac{x-1}{y}\right)^3+\dfrac{1}{y^3}\geq 3\left(\dfrac{3-2x}{x-1}+\dfrac{x}{y}\right)$.

c. Tìm số tự nhiên n để: $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố.

Câu 4:

Cho hình vuông $ABCD$, có độ dài cạnh bằng a. E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a. Chứng minh: $\dfrac{1}{AE^2}+\dfrac{1}{AF^2}$ không đổi.

b. Chứng minh: $\cos\widehat{AKE}=\sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{EFK}+\sin\widehat{EFK}.\cos\widehat{EKF}$.

c. Lấy điểm M là trung điểm đoạn AC. Trình bày cách dựng điểm N trên DM sao cho khoảng cách từ N đến AC bằng tổng khoảng cách từ N đến DC và AD.

Câu 5:

Cho $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng d đi qua A không cắt hình bình hành, ba điểm H, I, K lần lượt là hình chiếu của B, C, D trên đường thẳng d. Xác định vị trí đường thẳng d để tổng: $BH+CI+DK$ có giá trị lớn nhất.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………………………….……Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG CẨM THÙY (V2) NĂM HỌC 2011-2012

Câu 1:

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a. Rút gọn P.

b. Tính P khi $x=3+2\sqrt{2}$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a.

$$P=\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}+\frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}+\frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\frac{x(\sqrt{x}+2)+2(\sqrt{x}-1)+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}$$

b. $x=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$

$$P=\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$$

c. ĐK: $x>0;x\neq 1$.

$$P=\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Với $x\in\mathbb{Z}$, $x>0$, $x\neq 1$ ta có $P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\sqrt{x}-1\in\{1,2\}\Leftrightarrow x\in\{4,9\}$.

Câu 2:

Giải phương trình:

a. $x^2-10x+27=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}$.

b. $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0$.

Lời giải

a. ĐK: $4\le x\le 6$:

$VT=x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=5$

$VP=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}\le\sqrt{(1^2+1^2)((\sqrt{6-x})^2+(\sqrt{x-4})^2)}\Leftrightarrow VP\le 2$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}\Rightarrow 6-x=x-4\Leftrightarrow x=5$

$VT=VP\Leftrightarrow x=5$ (TMĐK).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=5$.

b. ĐK: $x \geq 0$.

Nhận thấy: $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho x, ta có:

$$x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0 \Leftrightarrow x-2-\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}=0 \Leftrightarrow (x+\frac{4}{x})-(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}})-2=0$$

Đặt $\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=t>0 \Rightarrow t^2=x+4+\frac{4}{x} \Leftrightarrow x+\frac{4}{x}=t^2-4$, từ đó ta có:

$$(t^2-4)-t-2=0 \Leftrightarrow t^2-t-6=0 \Leftrightarrow (t-3)(t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu ĐK của t $\Rightarrow t=3$. Ta có

$$\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=3 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{4,1\}$.

Câu 3:

a. Tìm các số nguyên $x;y$ thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$.

b. Cho $x>1;\ y>0$, chứng minh: $\frac{1}{(x-1)^3}+\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+\frac{1}{y^3} \geq 3\left(\frac{3-2x}{x-1}+\frac{x}{y}\right)$.

c. Tìm số tự nhiên n để: $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố.

Lời giải

a. $y^2+2xy-3x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2 \Leftrightarrow (x+y)^2=(x+1)(x+2)$ (*)

VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0. Ta có $\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

Vậy có 2 cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$(x;y)=(-1;1)$ hoặc $(x;y)=(-2;2)$.

b. $x>1;\ y>0 \Rightarrow x-1>0;\ y>0 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^3}>0;\ \frac{x-1}{y}>0;\ \frac{1}{y^3}>0$

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương:

$$\frac{1}{(x-1)^3}+1+1 \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^3}.1.1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} \geq \frac{3}{x-1}-2 \ \ (1)$$

$$\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{y}\right)^3.1.1}\Leftrightarrow\left(\frac{x-1}{y}\right)^3\geq\frac{3(x-1)}{y}-2\ (2)$$

$$\frac{1}{y^3}+1+1\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{y^3}.1.1}\Leftrightarrow\frac{1}{y^3}\geq\frac{3}{y}-2\ (3)$$

Từ (1); (2); (3), ta suy ra

$$\frac{1}{(x-1)^3}+\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+\frac{1}{y^3}\geq\frac{3}{x-1}-6+\frac{3(x-1)}{y}+\frac{3}{y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(x-1)^3}+\left(\frac{x-1}{y}\right)^3+\frac{1}{y^3}\geq\frac{3-6x+6}{x-1}+\frac{3x}{y}=3\left(\frac{3-2x}{x-1}+\frac{x}{y}\right).$$

c. Xét $n=0$ thì $A=1$ không phải nguyên tố; $n=1$ thì $A=3$ là nguyên tố.
Xét $n>1$:

$$A=n^{2012}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1$$

$$=n^2\left(\left(n^3\right)^{670}-1\right)+n.\left(\left(n^3\right)^{667}-1\right)+\left(n^2+n+1\right)$$

Mà $\left(n^3\right)^{670}-1$ chia hết cho n^3-1, suy ra $\left(n^3\right)^{670}-1$ chia hết cho n^2+n+1

Tương tự: $\left(n^3\right)^{667}-1$ chia hết cho n^2+n+1

Vậy A chia hết cho $n^2+n+1>1$ và $A>n^2+n+1$ nên A là hợp số.

Vậy số tự nhiên cần tìm là $n=1$.

Câu 4:

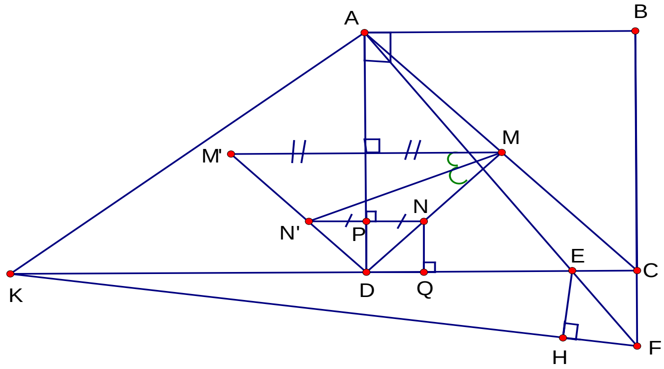
Cho hình vuông $ABCD$, có độ dài cạnh bằng a. E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a. Chứng minh: $\dfrac{1}{AE^2}+\dfrac{1}{AF^2}$ không đổi.

b. Chứng minh: $\cos\widehat{AKE}=\sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{EFK}+\sin\widehat{EFK}.\cos\widehat{EKF}$.

c. Lấy điểm M là trung điểm đoạn AC. Trình bày cách dựng điểm N trên DM sao cho khoảng cách từ N đến AC bằng tổng khoảng cách từ N đến DC và AD.

Lời giải



a. Cmđ: $\Delta ABF = \Delta ADK$ (g.c.g), suy ra $AF = AK$

Trong tam giác vuông KAE có AD là đường cao nên:

$$\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AD^2} \text{ hay } \frac{1}{AF^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2} \text{ (không đổi)}$$

b. $S_{KEF}=\frac{1}{2}KE.EF.\sin\widehat{AEK}=\frac{1}{2}KE.EF.\cos\widehat{AKE}$

Mặt khác: $S_{KEF}=\frac{1}{2}EH.KF=\frac{1}{2}EH.(KH+HF)$. Do đó

$$KE.EF.\cos\widehat{AKE}=EH.(KH+HF) \Leftrightarrow \cos\widehat{AKE}=\frac{EH.KH+EH.HF}{KE.EF}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{AKE}=\frac{EH}{\text{EF}}.\frac{KH}{EK}+\frac{EH}{KE}.\frac{HF}{\text{EF}}=\sin\widehat{\text{EF}K}.\cos\widehat{EKF}+\sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{\text{EF}K}$$

c. Giả sử đã dựng được điểm *N* thỏa mãn: $NP+NQ=MN$.

Lấy *N'* đối xứng *N*; *M'* đối xứng *M* qua *AD* suy ra tam giác $NN'M$ cân tại *N* $\Rightarrow$ *MN'* là phân giác của $\widehat{DMM'}$ $\Rightarrow$ Cách dựng điểm *N*:

- Dựng *M'* đối xứng *M* qua *AD*

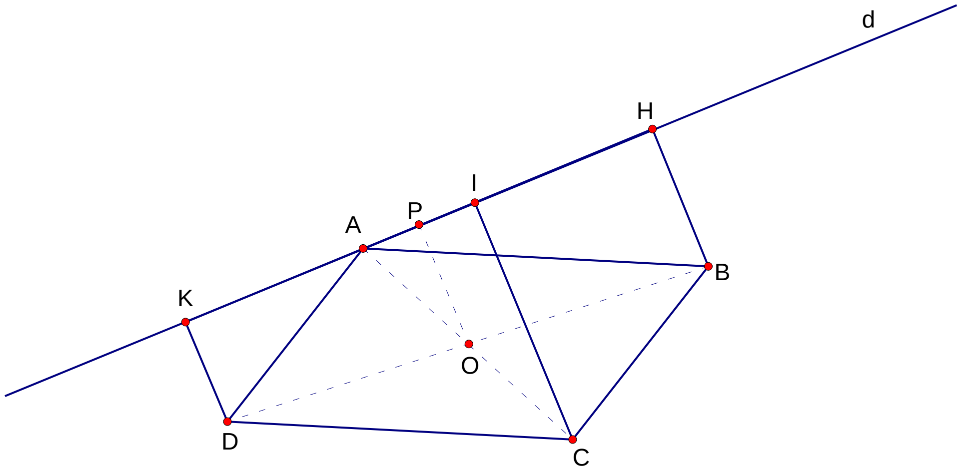
- Dựng phân giác $\widehat{DMM'}$ cắt *DM'* tại *N'*

- Dựng điểm *N* đối xứng *N'* qua *AD*

Câu 5:

Cho $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng *d* đi qua *A* không cắt hình bình hành, ba điểm *H*, *I*, *K* lần lượt là hình chiếu của *B*, *C*, *D* trên đường thẳng *d*. Xác định vị trí đường thẳng *d* để tổng: $BH+CI+DK$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải



Gọi O giao điểm 2 đường chéo hình bình hành, kẻ OP vuông góc d tại P

Ta có $BH + CI + DK = 4OP$ (OP lần lượt là đường trung bình của ΔACI và hình thang $KDBH$

Mà $OP \le AO$ nên $BH + CI + DK \le 4AO$. Vậy $Max\left(BH + CI + DK\right) = 4AO$

Dấu "=" xảy ra khi $P \equiv A$ hay d vuông góc AC.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐÀ NẴNG NĂM HỌC 2010-2011

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức: $M=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\dfrac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a>0,\ a\neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M>4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N=\dfrac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Cho các hàm số bậc nhất: $y=0,5x+3$, $y=6-x$ và $y=mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và (Δ_m).Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (Δ_m)cắt hai đường thẳng (d_1)và (d_2)lần lượt tại hai điểm Avà B sao cho điểm A có hoành độ âm còn điểm B có hoành độ dương?

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1\,;\,2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N; từ đó, suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}17x+2y=2011|xy|\\ x-2y=3xy\end{cases}$

b) Tìm tất cả các giá trị của x,y,z sao cho: $\sqrt{x}-\sqrt{y-z}+\sqrt{z-x}=\dfrac{1}{2}(y+3)$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn (C)với tâm Ovà đường kính ABcố định. Gọi M là điểm di động trên (C)sao cho M không trùng với các điểm Avà B. Lấy Clà điểm đối xứng của Oqua A. Đường thẳng vuông góc với ABtại Ccắt đường thẳng AM tại N. Đường thẳng BN cắt đường tròn(C) tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F.

a) Chứng minh rằng các điểm $A,\ E,\ F$ thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tích $AM.AN$ không đổi.

c) Chứng minh rằng Alà trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm ba chữ số tận cùng của tích của mười hai số nguyên dương đầu tiên.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH ĐÀ NẴNG NĂM HỌC 2010-2011

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức: $M = \dfrac{a+1}{\sqrt{a}} + \dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \dfrac{a^2 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} - a\sqrt{a}}$ với $a > 0,\ a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M > 4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \dfrac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải

a) Do $a > 0;\ a \neq 1$ nên: $\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \dfrac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \dfrac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ và

$$\frac{a^2 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} - a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1) - \sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$$

Do $a > 0;\ a \neq 1$ nên: $(\sqrt{a}-1)^2 > 0 \ \Leftrightarrow \ a + 1 > 2\sqrt{a}$

$$\Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$$

b) Ta có $0 < N = \dfrac{6}{M} < \dfrac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1

Mà $\mathrm{N} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2 = 3$

$\Leftrightarrow \ \sqrt{a} = 2 + \sqrt{3}$ *hay* $\sqrt{a} = 2 - \sqrt{3}$ (phù hợp)

Vậy N nguyên $\Leftrightarrow \ a = (2 \pm \sqrt{3})^2$

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Cho các hàm số bậc nhất: $y = 0,5x + 3$, $y = 6 - x$ và $y = mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng $(d_1), (d_2)$ và (Δ_m). Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (Δ_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại hai điểm A và B sao cho điểm A có hoành độ âm còn điểm B có hoành độ dương?

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1\,;\,2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N; từ đó, suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2}$.

Lời giải

a) Điều kiện để (Δ_m) là đồ thị hàm số bậc nhất là $m \neq 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (Δ_m) là:

$$0,5x + 3 = mx \ \Leftrightarrow \ (m - 0,5)x = 3$$

Điều kiên để phương trình này có nghiệm âm là $m - 0,5 < 0$ *hay* $m < 0,5$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_2) và (Δ_m) là:

$$6-x=mx \Leftrightarrow (m+1)x=6$$

Điều kiên để phương trình này có nghiệm dương là $m+1>0$ *hay* $m>-1$

Vậy điều kiện cần tìm là: $-1<m<0,5;\ m\neq 0$

b) Đặt $M=x_m$ và $n = y_N$ $\Rightarrow m.n\neq 0$ *và* $m\neq 1$ (*)

Nên đường thẳng qua ba điểm $M,\ I,\ N$ có dạng: $y=\text{ax}+b$

$\Rightarrow \begin{cases} 0=am+b \\ 2=a+b \\ n=b \end{cases}$ $\Rightarrow$ hệ thức liên hệ giữa m và n là $2m+n=mn$

Chia hai vế cho $m.n\neq 0$ ta được: $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}=1$ (**)

$$\Rightarrow 1=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)^2=\frac{1}{m^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{mn}=5\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)-\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right)^2$$

$\Rightarrow Q=\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\geq\dfrac{1}{5}$; dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{2}{m}=\dfrac{1}{n}$; kết hợp (**): $m = 5,\ n = 2,5$ (thỏa (*)

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\dfrac{1}{5}$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 17x+2y=2011|xy| \\ x-2y=3xy \end{cases}$

b) Tìm tất cả các giá trị của x,y,z sao cho: $\sqrt{x}-\sqrt{y-z}+\sqrt{z-x}=\dfrac{1}{2}(y+3)$.

Lời giải

a) Nếu $xy>0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{17}{y}+\dfrac{2}{x}=2011 \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{1007}{9} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{490}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{490} \\ y=\dfrac{9}{1007} \end{cases}$ (phù hợp)

Nếu $xy<0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{17}{y}+\dfrac{2}{x}=-2011 \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{-1004}{9} \\ \dfrac{1}{x}=-\dfrac{1031}{18} \end{cases} \Rightarrow xy>0$ (loại)

Nếu $xy=0$ thì (1) $\Leftrightarrow x=y=0$ (nhận).

KL: Hệ có đúng 2 nghiệm là $(0;0)$ và $\left(\dfrac{9}{490};\dfrac{9}{1007}\right)$

b) Điều kiện $x \geq 0;\ y-z \geq 0;\ z-x \geq 0 \Rightarrow y \geq z \geq x \geq 0$

$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-z} + 2\sqrt{z-x} = x + y - z + z - x + 3$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-z}-1)^2 + (\sqrt{z-x}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y-z} = 1 \\ \sqrt{z-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ z = 2 \end{cases}$$

Câu 4: *(3,0 điểm)*

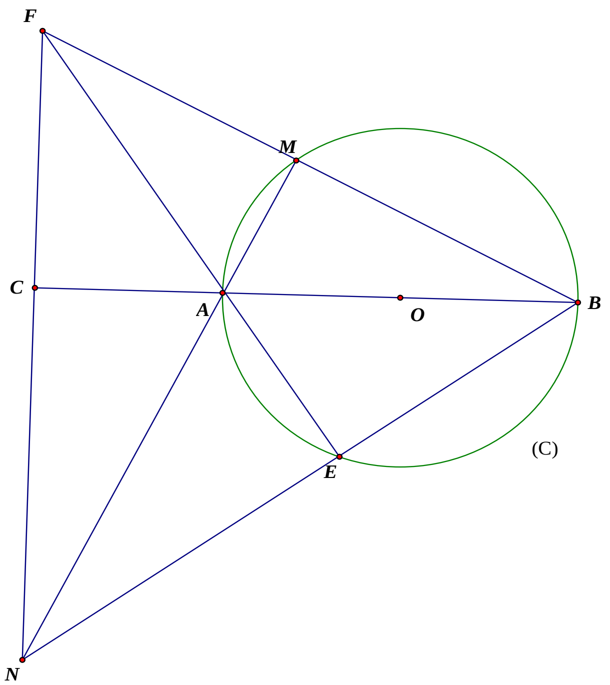
Cho đường tròn (C) với tâm O và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (C) sao cho M không trùng với các điểm A và B. Lấy C là điểm đối xứng của O qua A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N. Đường thẳng BN cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F.

a) Chứng minh rằng các điểm A, E, F thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tích $AM.AN$ không đổi.

c) Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh rằng các điểm A, E, F thẳng hàng.

$MN \perp BF$ và $BC \perp NF$

$\Rightarrow A$ là trực tâm của tam giác BNF

$\Rightarrow FA \perp NB$

Lại có $AE \perp NB$

Nên A, E, F thẳng hàng

Chứng minh rằng tích $AM.AN$ không đổi.

$\widehat{CAN}=\widehat{MAB}$, nên hai tam giác ACN và AMB đồng dạng.

Suy ra: $\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{AC}{AM}$

Hay $AM\cdot AN=AB\cdot AC=2R^2$ không đổi (với R là bán kính đường tròn (C))

c) Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất.

Ta có $BA=\dfrac{2}{3}BC$ nên A là trọng tâm tam giác BNF $\Leftrightarrow$ C là trung điểm NF (3)

Mặt khác: $\widehat{CAN}=\widehat{CFM}$, nên hai tam giác ΔCNA # ΔCBF

$\Rightarrow \dfrac{CN}{BC}=\dfrac{AC}{CF} \Rightarrow CN\cdot CF=BC\cdot AC=3R^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $NF=CN+CF\geq 2\sqrt{CN\cdot CF}=2R\sqrt{3}$ không đổi

Nên: NF ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $CN=CF$ $\Leftrightarrow$ C là trung điểm NF (4)

(3) và (4) cho ta: A là trọng tâm tam giác $BNF \Leftrightarrow NF$ ngắn nhất

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm ba chữ số tận cùng của tích của mười hai số nguyên dương đầu tiên.

Lời giải

Đặt: $S=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12$

$\Rightarrow \dfrac{S}{100}=3.4.5.6.7.8.11.12$ (1) là một số nguyên

$\Rightarrow$ hai chữ số tận cùng của S là 00

Mặt khác, trong suốt quá trình nhân liên tiếp các thừa số ở vế phải của (1), nếu chỉ để ý đến chữ số tận cùng, ta thấy $\dfrac{S}{100}$ có chữ số tận cùng là 6 (vì $3.4=12;\ 2.6=12;\ 2.7=14;\ 4.8=32;\ 2.9=18;\ 8.11=88;\ 8.12=96$)

Vậy ba chữ số tận cùng của S là 600

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2010-2011

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì n^2+n+2 không chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho n^2+17 là một số chính phương.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=x^2 \\ y+x=y^2 \end{cases}$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$.

Câu 4: *(4,5 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $BH.BE + CH.CF = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K\in(O)$.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2010-2011

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì n^2+n+2 không chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho n^2+17 là một số chính phương.

Lời giải

a) *) Nếu $n \vdots 3 \Rightarrow n^2+n \vdots 3$ nên $n^2+n+2 \not\vdots\, 3$ (1)

*) Nếu $n \not\vdots\, 3 \Rightarrow n^2+2 \vdots 3 \Rightarrow n^2+n+2 \not\vdots\, 3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \forall n \in Z$ thì $n^2+n+2 \not\vdots\, 3$

b) Đặt $m^2=n^2+17$ $\quad (m \in N)$

$\Rightarrow m^2-n^2=17 \Rightarrow (m-n)(m+n)=17=1.17=17.1$

Do $m+n>m-n \Rightarrow \begin{cases} m+n=17 \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=9 \\ n=8 \end{cases}$

Vậy với $n=8$ ta có $n^2+17=64+17=81=9^2$.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=x^2 \\ y+x=y^2 \end{cases}$

Lời giải

a) Giải phương trình $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$ (1).

Điều kiện: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{3}{2}$

(1) $\Leftrightarrow x^2+4x+5-2\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(\sqrt{2x+3}-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2x+3=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-1$ thỏa mãn điều kiện

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=x^2 \,(1) \\ 2y+x=y^2 \,(2) \end{cases}$

Trừ từng vế 2 phương trình ta có: $x^2-y^2=x-y$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=1-y \end{array}\right.$

Ta có:

*) $\begin{cases} x=y \\ x(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=0 \end{cases}$ hoặc $x=3$

Vậy $(x;\ y) = (0;0);\ (3;3)$

*) $\begin{cases} x=1-y \\ 2x+y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2-2y+y=(1-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y^2-y+1=0 \end{cases}$ (*)

Vì phương trình $y^2-y+1=0$ vô nghiệm nên hệ (*) vô nghiệm .

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(0;0);(3;3)$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$

Lời giải :

Ta có: $A=\dfrac{4x+3}{x^2+1}=-1+\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}$

$A=-1+\dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}\ge -1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Vậy $A_{\min}=-1$ khi $x=-2$

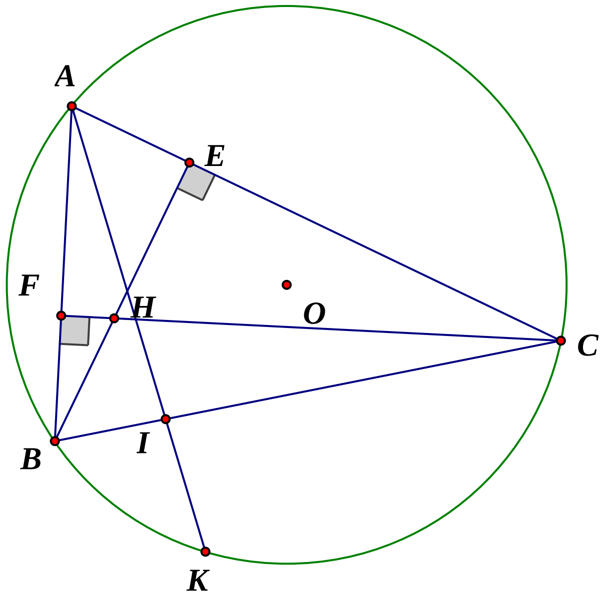
Câu 4: *(4,5 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng $BH.BE + CH.CF = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K\in(O)$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $BH.BE + CH.CF = BC^2$

Gọi I là giao điểm của AH và BC $\Rightarrow AI \perp BC$

Ta có: $\Delta BHI \# \Delta BCE(g,g) \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BI}{BE} \Rightarrow BH.BE = BC.BI$ (1)

Ta có: $\Delta CHI \# \Delta CBF\ (g,\ g) \Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CI}{CF} \Rightarrow CH.CF = BC.CI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH.BE + CH.CF = BC(BI + CI) = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K \in (O)$.

Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC suy ra $\widehat{HCB} = \widehat{KCB}$

Mà $\widehat{FAI} = \widehat{HCI}$ (do tứ giác AFIC nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{FAI} = \widehat{BCK}\ hay\ \widehat{BAK} = \widehat{BCK}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BACK$ nội tiếp đường tròn (O) ($\Rightarrow K \in (O)$.

Câu 5: *(2,5 điểm)*

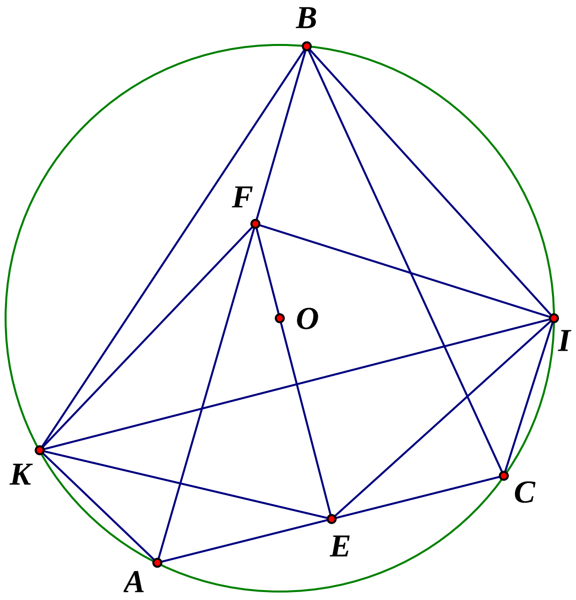
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

+ Khi $\widehat{BAC} = 90° \Rightarrow \widehat{BIC} = 90°$.

$\Rightarrow$ F trùng với B, E trùng với C lúc đó EF là đường kính.

$\Rightarrow$ EF đi qua điểm O cố định.



+ Khi $\widehat{BAC} < 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\widehat{BIC} > 90^\circ$.

Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.

$\Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{EAF}$ (cùng bù $\widehat{BIC}$)

$\widehat{EKF} = \widehat{EIF}$ (Do I và K đối xứng qua EF)

$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{EAF}$

$\Rightarrow AKFE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{KEF}$ (cung chắn $\overset{\frown}{KF}$) (1)

$\widehat{IEF} = \widehat{KEF}$ (Do I và K đối xứng qua EF) (2)

$\widehat{IEF} = \widehat{BIK}$ (cùng phụ $\widehat{KIE}$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{BIK}$

$\Rightarrow$ $AKBI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ $K \in (O)$

Mà EF là đường trung trực của KI $\Rightarrow$ $E,\ O,\ F$ thẳng hàng.

+ Khi $\widehat{BAC} > 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\widehat{BIC} < 90^\circ$ chứng minh tương tự.

Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH THANH HÓA NĂM 2010-2011

Bài 1. (5,0 *điểm*).

1) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ khi m thay đổi.

2) (a). Cho ba số hữu tỉ a, b, c thoả mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ là số hữu tỉ.

(b). Cho ba số hữu tỉ x, y, z đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$$ là số hữu tỉ.

Bài 2. (*5,0 điểm*).

a) Giải phương trình: $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x + \dfrac{1}{y}\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \\ x^3 + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y^3} = 4. \end{cases}$

Bài 3. (2,0 *điểm*).

Cho tam giác đều ABC, các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AC, AB, sao cho BD, CE cắt nhau tại P và diện tích tứ giác $ADPE$ bằng diện tích tam giác BPC. Tính $\widehat{BPE}$.

Bài 4. *(4,0 điểm).*

Cho đường tròn tâm O và dây cung AB cố định ($O \notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm AB). Đường tròn tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Đường tròn tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N ($N \neq P$).

a) Chứng minh rằng $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn ON luôn đi qua điểm cố định khi P di động.

Bài 5. (4,0 *điểm*).

a) Cho $a_1, a_2, ..., a_{45}$ là 45 số tự nhiên dương thoả mãn $a_1 < a_2 < .... < a_{45} \le 130$. Đặt $d_j = a_{j+1} - a_j$, $(j = 1, 2, ..., 44)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong 44 hiệu d_j xuất hiện ít nhất 10 lần.

b) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2011}{2}}$.

.... **HẾT** ....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH THANH HÓA NĂM 2010-2011

Bài 1. (5,*0 điểm*).

1) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm

x_1, x_2 với mọi *m*. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ khi *m* thay đổi.

2.a). Cho ba số hữu tỉ a, b, c thoả mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ là số hữu tỉ.

b). Cho ba số hữu tỉ x, y, z đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$$ là số hữu tỉ.

Lời giải

1) Ta có $\Delta' = (m-1)^2 \ge 0, \forall m$ nên phương trình có hai nghiệm với mọi *m*.

Theo định lí viet, ta có $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1x_2 = 2m - 1$ $x_1x_2 = 2m - 1$, suy ra $P = \dfrac{4m+1}{4m^2+2}$

$= 1 - \dfrac{(2m-1)^2}{4m^2+2} \le 1$. $Max\,P = 1$, khi $m = \dfrac{1}{2}$.

2.a) Từ giả thiết suy ra $2ab - 2bc - 2ca = 0$

Suy ra $A = \sqrt{(a+b-c)^2} = |a+b-c|$ là số hữu tỉ

2.b) Đặt $a=\frac{1}{x-y}, b=\frac{1}{y-z}, c=\frac{1}{x-z}$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

Áp dụng câu 2a) suy ra $B=\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}}$ là số hữu tỉ.

Bài 2. (*5,0 điểm*).

a) Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{10}{9}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y}\right)=4 \\ x^3+\frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y^3}=4. \end{cases}$

Lời giải

a) Đk: $x\neq\pm1$. Phương trình tương đương với

$$\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{10}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}-\frac{10}{9}=0.$$

Đặt $t=\frac{2x^2}{x^2-1}$, ta được phương trình $t^2-t-\frac{10}{9}=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{3}$ hoặc $t=\frac{-2}{3}$

Với $t=\frac{5}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{5}{3}$ (vô nghiệm)

Với $t=-\frac{2}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1}=-\frac{2}{3}$ suy ra $x=\pm\frac{1}{2}$.

b) Đk: $y\neq0$. Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+x+\frac{1}{y}=4 \\ x^3+\frac{1}{y^3}+\frac{x}{y}\left(x+\frac{1}{y}\right)=4. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=x+\frac{1}{y} \\ v=\frac{x}{y}, \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} u^2+u-2v=4 \\ u^3-2uv=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u^2-4u+4=0 \\ u^2+u-4=2v \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u=2 \\ v=1. \end{cases}$

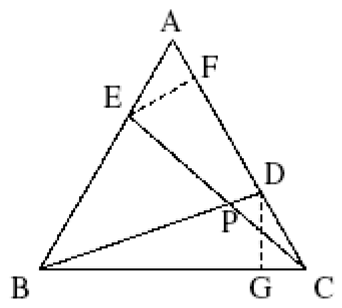
Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{x}{y}=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Bài 3. (2,*0 điểm*).

Cho tam giác đều ABC, các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AC, AB, sao cho BD, CE cắt nhau tại P và diện tích tứ giác ADPE bằng diện tích tam giác BPC. Tính $\widehat{BPE}$.

Lời giải

Kẻ $EF \perp AC$ tại F, $DG \perp BC$ tại G.



Theo giả thiết $S_{(ADPE)} = S_{(BPC)}$

$\Rightarrow S_{(ACE)} = S_{(BCD)}$.

Mà $AC = BC \Rightarrow EF = DG$ và $\widehat{A} = \widehat{C}$

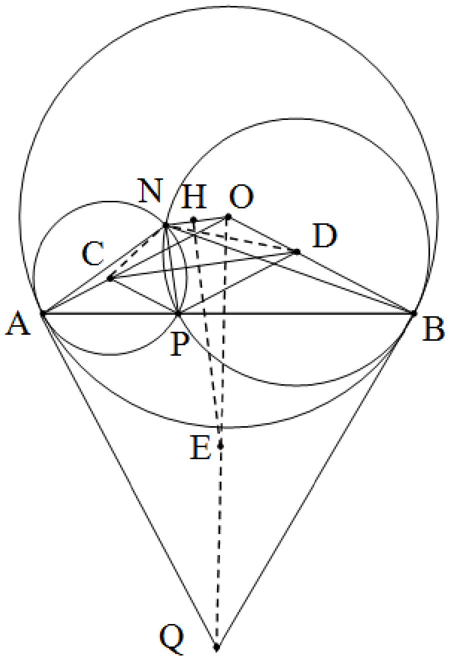
Suy ra $\Delta AEF = \Delta CDG \Rightarrow AE = CG$.

Do đó $\Delta AEC = \Delta CDB(c-g-c) \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{ECA}$

$\Rightarrow \widehat{BPE} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{PCD} + \widehat{PCB} = 60^0$

Bài 4. *(4,0 điểm).*

Cho đường tròn tâm O và dây cung AB cố định ($O \notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm AB). Đường tròn tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Đường tròn tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N ($N \neq P$).



a) Chứng minh rằng $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn ON luôn đi qua điểm cố định khi P di động.

Lời giải

a) Gọi Q là giao điểm của các tiếp tuyến chung của (O) với (C), (D) tại A, B tương ứng.

Suy ra $\widehat{ANP} = \widehat{QAP} = \widehat{QBP} = \widehat{BNP}$.

Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{ANP} + \widehat{BNP} = \widehat{QAP} + \widehat{QBP}$

$= 180^0 - \widehat{AQB}$, suy ra NAQB nội tiếp (1).

Dễ thấy tứ giác OAQB nội tiếp (2)

Từ (1) và (2)

suy ra 5 điểm O, N, A, Q, B

cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $\widehat{OCN} = 2\widehat{OAN} = 2\widehat{OBN} = \widehat{ODN}$,

suy ra bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi E là trung điểm OQ, suy ra E cố định và E là tâm đường tròn đi qua các điểm N, O, D, C.

Suy ra đường trung trực của ON luôn đi qua điểm E cố định.

Bài 5. (4,*0 điểm*).

a) Cho $a_1, a_2, ..., a_{45}$ là 45 số tự nhiên dương thoả mãn $a_1 < a_2 < .... < a_{45} \le 130$. Đặt $d_j = a_{j+1} - a_j$, $(j = 1, 2, ..., 44)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong 44 hiệu d_j xuất hiện ít nhất 10 lần.

b) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2011}{2}}$.

Lời giải

a) $d_1 + d_2 + ... + d_{44} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{45} - a_{44}) = a_{45} - a_1 \le 130 - 1 = 129$. (1)

Nếu mỗi hiệu d_j $(j = 1, 2, ..., 44)$ xuất hiện không quá 10 lần thì

$d_1 + d_2 + ... + d_{44} \ge 9(1+2+3+4) + 8.5 = 130$ mâu thuẫn với (1).

Vậy phải có ít nhất một hiệu d_j $(j = 1, ..., 44)$ xuất hiện không ít hơn 10 lần

b) Ta có $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$

Suy ra $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}$

Đặt $x = \sqrt{b^2+c^2}$, $y = \sqrt{c^2+a^2}$, $z = \sqrt{a^2+b^2}$, suy ra

$$VT \ge \frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$$

$$\ge \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x\right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y\right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z\right)\right]$$

$$\ge \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x\right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y\right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z\right)\right]$$

$$\ge \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2(y+z) - 3x\right) + \left(2(z+x) - 3y\right) + \left(2(x+y - 3z\right)\right]$$

Suy ra $VT \ge \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2011}{2}}$

……………..**HẾT**……………

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P tại $a=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Câu 2: *(1,5 điểm)*

Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=1$.

Câu 3: *(2,5 điểm)*

Cho x, y là các số dương.

a) Chứng minh: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tiếp tuyến Ax. Đường thẳng BM cắt Ax tại I; tia phân giác của $\widehat{IAM}$ cắt nửa đường tròn O tại E, cắt IB tại F; đường thẳng BE cắt AI tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $HF\perp BI$.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi ΔAMB đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R?

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….…Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P tại $a=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} a\ge 0 \\ \sqrt{a}\ne 1 \\ \sqrt{a}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a\ne 1 \end{cases}$

$$P=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}\left(a-1\right)}{a-1}.\frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

$$=\frac{4\sqrt{a}+4\sqrt{a}\left(a-1\right)}{\sqrt{a}}=\frac{4\sqrt{a}(1+a-1)}{\sqrt{a}}=4a$$

Vậy $P=4a$.

b) $a=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}.\left(\sqrt{3}-1\right)$

$$=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}.\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}$$

$$=\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{2}.$$

Vậy $a=\sqrt{2}$ do đó $P=4a=4\sqrt{2}$.

Câu 2: *(1,5 điểm)*

Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=1.$

Lời giải

Điều kiện $x\ge 1$

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}-\sqrt{x-1}=1$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|-\sqrt{x-1}=1$ (1)

Khi $\sqrt{x-1}\ge 1 \Leftrightarrow x-1\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 2$: Ta có

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}=1$. Phương trình vô nghiệm

Khi $0\le \sqrt{x-1}<1 \Leftrightarrow 0\le x-1<1 \Leftrightarrow 1\le x<2$: Ta có

$(1) \Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow 1-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3: *(2,5 điểm)*

Cho x, y là các số dương.

a) Chứng minh: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Lời giải

a) Vì $x>0, y>0$ nên $\frac{x}{y}>0$ và $\frac{y}{x}>0$

Áp dụng bất đẳng thức $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}=2$

Vậy $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{y}{x}\Leftrightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow x=y$ (vì $x>0, y>0$)

b) Đặt $a=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, ta có $M=a+\frac{1}{a}=\frac{3a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{1}{a}$

Vì $a=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ nên $\frac{3a}{4}\geq\frac{3}{2}$;

Ta có $\frac{a}{4}+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}}=2.\frac{1}{2}=1$

Do đó $M=a+\frac{1}{a}=\frac{3a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{1}{a}\geq\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$; $M=\frac{5}{2}\Leftrightarrow a=2\Leftrightarrow x=y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x=y$.

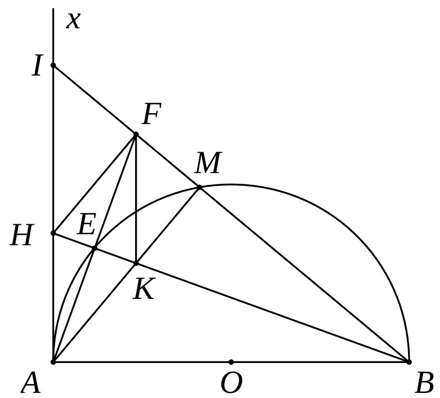
Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tiếp tuyến Ax. Đường thẳng BM cắt Ax tại I; tia phân giác của $\widehat{IAM}$ cắt nửa đường tròn O tại E, cắt IB tại F; đường thẳng BE cắt AI tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $HF\perp BI$.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi ΔAMB đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R?



Lời giải

a) Ta có M, E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB

nên $\widehat{FMK}=90^\circ$ và $\widehat{FEK}=90^\circ$.

Vậy 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên đường tròn đường kính FK.

b) Ta có ΔHAK cân tại A nên $AH=AK$ (1)

K là trực tâm của ΔAFB nên ta có $FK\perp AB$

Suy ra $FK\ //\ AH$ (2)

Do đó $\widehat{FAH} = \widehat{AFK}$ mà $\widehat{FAH} = \widehat{FAK}$ (gt) cho nên $\widehat{AFK} = \widehat{FAK}$

Suy ra $AK = KF$, kết hợp với (1) ta được $AH = KF$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $AKFH$ là hình bình hành nên $HF \,//\, AK$. Mà $AK \perp IB$ suy ra $HF \perp IB$.

c) Chu vi của $\Delta AMB = C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB$ lớn nhất khi chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất (vì AB không đổi).

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$, ta có $(MA+MB)^2 \le 2(MA^2+MB^2) = 2AB^2$

Nên $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất bằng $AB\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $MA = MB$ hay M nằm chính giữa cung AB.

Vậy khi M nằm chính giữa cung AB thì $C_{\Delta AMB}$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó

$$C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB = AB\sqrt{2} + AB = (1+\sqrt{2})AB = 2R(1+\sqrt{2})$$

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng: $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) - 5^y = 11879$.

Lời giải

Đặt $A = (2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)$, ta có $2^x.A$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên $2^x.A$ chia hết cho 5. Nhưng 2^x không chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5.

Nếu $y \ge 1$, ta có $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) - 5^y$ chia hết cho 5 mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y \ge 1$ không thỏa mãn, suy ra $y = 0$.

Khi đó, ta có $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) - 5^y = 11879$

$\Leftrightarrow (2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) - 1 = 11879$

$\Leftrightarrow (2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) = 11880$

$\Leftrightarrow (2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) = 9.10.11.12 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy $x = 3; y = 0$ là hai giá trị cần tìm.

……………..HẾT……………

PGD ĐÀO TẠO QUẬN BA ĐÌNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
Năm học 2016 – 2017
Môn: Toán – Lớp 9

Bài 1. (5 điểm) Cho biểu thức $A=\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}+\frac{x\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}}-4\right).\frac{1}{x-\sqrt{x}}-2$

a) Rút gọn A.
b) Tính giá trị biểu thức A khi $x=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

Bài 2.(5 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2-3x+4=2\sqrt{x-1}$.

b) Tìm số nguyên x sao cho $3x^3-5x^2+7x-6$ chia hết cho x^2+2.

Bài 3. (4 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, $M\neq A,B$. Gọi H là hình chiếu của M trên AB. E và F lần lượt là hình chiếu của H trên MA,MB.

a. Chứng minh $HA.HB=EA.EM+FB.FM$;

b. Tìm vị trí của điểm M để $\sqrt{EA.EH}+\sqrt{FB.FH}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4: (3 điểm):

Cho nửa đường trong (O) đường kính AB. Gọi Ax,By là các tia vuông góc với AB (Ax,By và nửa đường tròn cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M thuốc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn nó cắt tia By tại C ; tia BM cắt tia Ax tại D. Chứng minh rằng AC vuông góc với OD.

Bài 5.(4 điểm)

1) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+2b+3c=8$.

   Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=\frac{6}{a}+\frac{3}{b}+\frac{8}{c}$.

2) Tìm số thực x để biểu thức $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ là số nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho biểu thức $A=\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}+\frac{x\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}}-4\right).\frac{1}{x-\sqrt{x}}-2$

c) Rút gọn A.
d) Tính giá trị biểu thức A khi $x=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

GIẢI

a) Với $x>0, x\neq 1,$ ta có:

$A=\left(x+\sqrt{x}+1+x-\sqrt{x}+1-4\right).\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-2$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-2$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}-2$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

b) $x=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

$=\left(\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}\right)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}.\dfrac{2}{\sqrt{2}}=2.$

Thay $x=2$ vào A ta được $A=\sqrt{2}.$

Bài 2: (5 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2-3x+4=2\sqrt{x-1}$.

b) Tìm số nguyên x sao cho $3x^3-5x^2+7x-6$ chia hết cho x^2+2.

giải:

a. ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-3x+4=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0,\forall x \\ x\ge 1 \end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$

$x^2-3x+4=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x^2-2x+1-x+2+1=2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2-\left(x-1\right)+2=2\sqrt{x-1}$

Đặt $\sqrt{x-1}=t\left(t\ge 0\right)$

$\Leftrightarrow t^4-t^2-2t+2=0\Leftrightarrow t^2\left(t^2-1\right)-2\left(t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow t^2\left(t-1\right)\left(t+1\right)-2\left(t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t^2\left(t+1\right)-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t^3+t^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t^3-t^2+2t^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left[t^2\left(t-1\right)+2\left(t-1\right)\left(t+1\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(t-1\right)^2\left(t^2+2t+2\right)=0$

Thấy $t^2+2t+2=t^2+2t+1+1=(t+1)^2+1>0,\forall x$

$\Leftrightarrow t-1=0\Leftrightarrow t=1\leftrightarrow \sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$ (tm)

b.

$3x^3-5x^2+7x-6=3x^2-5x^2+6x-10+x+4$

$=3x\left(x^2+2\right)-5\left(x^2+2\right)+x+4=\left(x^2+2\right)(3x-5)+x+4$

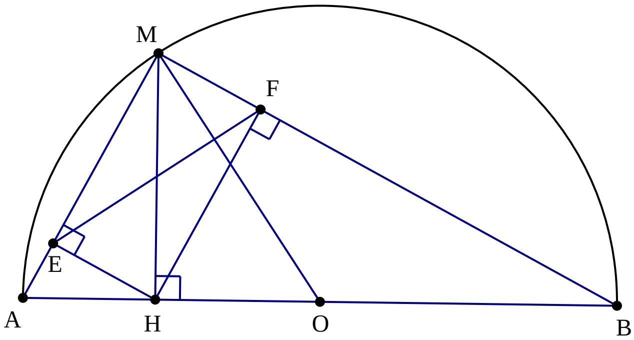
Để $3x^3-5x^2+7x-6$ chia hết cho x^2+2 thì $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, $M\neq A,B$. Gọi H là hình chiếu của M trên AB. E và F lần lượt là hình chiếu của H trên MA,MB.

a. Chứng minh $HA.HB=EA.EM+FB.FM$;

b. Tìm vị trí của điểm M để $\sqrt{EA.EH}+\sqrt{FB.FH}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải



a.Vì ΔAMB có MO là đường trung tuyến và $MO=\frac{1}{2}AB$ nên ΔAMB vuông tại M

Xét ΔAMB vuông tại M, đường cao MH, theo hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$MH^2=AH.HB$$

Xét ΔMHA vuông tại H, đường cao HE, theo hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$HE^2=AE.EM$$

Xét ΔMHB vuông tại H, đường cao HF, theo hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$HF^2=FM.FB$$

Xét tứ giác $MEHF$ có $\widehat{FME}=\widehat{MEH}=\widehat{MFH}=90^0$

Do đó tứ giác $MEHF$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow \widehat{EHF}=90^0$ và $\mathrm{EF}=MH$.

Xét ΔEHF vuông tại H, theo định lí Pi ta go ta có:

$$\mathrm{EF}^2=EH^2+HF^2$$

Hay $\mathrm{EF}^2=AE.EM+MF.FB$

Mà $MH^2=AH.HB$; $\mathrm{EF}=MH$

Do đó $HA.HB=EA.EM+FB.FM$.

b. Xét ΔAEH và ΔAMB có $\widehat{A}$ chung; $\widehat{AEH}=\widehat{AMB}=90^0$

Do đó $\Delta AEH \sim \Delta AMB\left(g.g\right)$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AEH}}{S_{\Delta AMB}}=\left(\frac{AH}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AE.EH}{\frac{1}{2}AM.MB}=\frac{AH^2}{AB^2}\Rightarrow \sqrt{AE.EH}=\frac{AH}{AB}.\sqrt{AM.MB}\left(1\right)$$

Xét ΔHFB và ΔAMB có $\widehat{B}$ chung; $\widehat{HFB}=\widehat{AMB}=90^0$.

Do đó $\Delta HFB \sim \Delta AMB\left(g.g\right)$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta HFB}}{S_{\Delta AMB}}=\left(\frac{HB}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}HF.FB}{\frac{1}{2}AM.MB}=\frac{HB^2}{AB^2}\Rightarrow \sqrt{HF.FB}=\frac{HB}{AB}.\sqrt{AM.MB}\left(2\right)$$

Lấy $\left(1\right)+\left(2\right)$ vế với vế ta được: $\sqrt{AE.EH}+\sqrt{HF.FB}=\sqrt{AM.MB}$

Áp dụng bất đẳng thức cô sy ta được :

$$AM.MB\le\frac{AM^2+MB^2}{2}=\frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{AM.MB}\le\frac{AB}{\sqrt{2}}$$

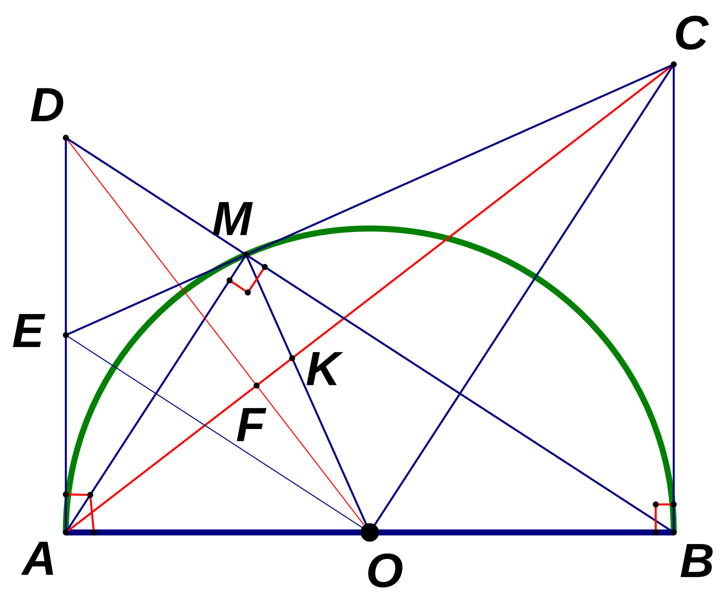
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow AM=MB \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB.

Vậy khi M là điểm chính giữa cung AB thì $\sqrt{EA.EH}+\sqrt{FB.FH}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4: (3 điểm):

Cho nửa đường trong $\left(O\right)$ đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M thuốc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn nó cắt tia By tại C ; tia BM cắt tia Ax tại D. Chứng minh rằng AC vuông góc với OD.

giải:



Ta có MC, MB là hai tiếp tuyến ngoài của đường tròn $\Rightarrow \widehat{MCO}=\widehat{BCO};\widehat{MOC}=\widehat{BOC}$

Tứ giác $BCMC$ nôi tiếp $\Rightarrow \widehat{MCO}=\widehat{MBO}$

+ Xét ΔMAD và ΔMCO có

$\widehat{AMD}=\widehat{CMO}=90^o$

$\widehat{MAD}=\widehat{MCO}\left(=\widehat{MBA}\right)$

$\Rightarrow \Delta MAD\#\ \Delta MCO\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MC}{MO}$

Có $\widehat{AMC}=\widehat{AMB}+\widehat{BMC}=90^0+\widehat{BMC}$

$\widehat{DMO}=\widehat{EMO}+\widehat{DME}=90^0+\widehat{DME}$ mà $\widehat{BMC}=\widehat{DME}$ (đối đỉnh)

Suy ra, $\widehat{AMC}=\widehat{DMO}$

+ Xét ΔMAC và ΔMDO có

$\widehat{AMC}=\widehat{DMO}$ (cmt) và $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MC}{MO}$

$\Rightarrow \Delta MAC\#\ \Delta MDO\left(c.g.c\right)\Rightarrow \widehat{MCA}=\widehat{MOD}$ hay $\widehat{MCK}=\widehat{MOF}$

+ Xét ΔKOF và ΔKCN có

$\widehat{MCK}=\widehat{MOF}$ và $\widehat{FKO}=\widehat{MKC}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \Delta KOF\#\ \Delta KCM\left(g.g\right)\Rightarrow \widehat{KOF}=\widehat{KMC}$ mà

$\widehat{KMC}=90^0\Rightarrow \widehat{KFO}=90^0\Rightarrow KF\perp FO\Leftrightarrow DO\perp AC$

Bài 5.

3) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+2b+3c=8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=\dfrac{6}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{8}{c}$.

4) Tìm số thực x để biểu thức $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ là số nguyên.

GIẢI

1) Ta có $M=\dfrac{6}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{8}{c}+\dfrac{3}{2}\left(a+2b+3c\right)-12$

$=\left(\dfrac{6}{a}+\dfrac{3}{2}a\right)+\left(\dfrac{3}{b}+3b\right)+\left(\dfrac{8}{c}+\dfrac{9}{2}c\right)-12$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm ta được:

$M\ge 2\sqrt{9}+2\sqrt{9}+2\sqrt{36}-12=12$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\\ c^2=\dfrac{16}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M=12$ khi $a=2,b=1,c=\dfrac{4}{3}$.

2) Đặt $M=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\ \ (x\ge 0)$

Ta có $M^3=2+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2=2+3.M.\sqrt[3]{1-x}\le 2+3M$ (Vì $\sqrt[3]{1-x}\le 1\ \ \forall x\ge 0$)

$\Rightarrow M^3-3M-2\le 0$

$\Leftrightarrow (M+1)(M^2-M-2)\le 0$

$\Leftrightarrow (M+1)^2(M-2)\le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M=-1 \\ M\le 2 \end{array}\right.$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \\ b=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \end{cases}\ (a\ge 1, b\le 1)$

+) Với $M=-1$, ta có $\begin{cases} a+b=-1 \\ a^3+b^3=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1-b \\ -(1+3b+3b^2+b^3)+b^3=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1-b \\ b^2+b+1=0 \end{cases}\Rightarrow$ hệ vô nghiệm

+) Với $M\le 2\Leftrightarrow a+b\le 2\Leftrightarrow (a+b)^3\le 8\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)\le 8$

$\Leftrightarrow ab(a+b)\le 2\Leftrightarrow ab(a+b)\le a^3+b^3\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b\ge 0 \end{array}\right.$

Nếu $a=b\Leftrightarrow 2a^3=2\Leftrightarrow a=1\Leftrightarrow x=0$

Nếu $a+b\ge 0\Rightarrow 0\le M\le 2$. Vì M nguyên nên $M=\{0;1;2\}$

- $M=0\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a^3+b^3=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 0=2 \end{cases}\Rightarrow$ hệ vô nghiệm
- $M=1\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ a^2-ab+b^2=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 1-2b+b^2-b+b^2+b^2=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 3b^2-3b-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \\ b=\dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \end{array}\right. \\ a=1-b \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \\ b=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \\ b=\dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} a = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \\ b = \dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x} = \dfrac{9+2\sqrt{21}}{9} \\ 1-\sqrt{x} = \dfrac{9-2\sqrt{21}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{28}{27}$ (TM)

- $M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-b \\ a^2-ab+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4b+b^2-2b+b^2+b^2=1 \\ a=2-b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ (TM)

Vậy với $x=0$ hoặc $x = \dfrac{28}{27}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

PGD ĐÀO TẠO QUẬN BA ĐÌNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
Năm học 2017 – 2018
Môn: Toán – Lớp 9

Bài 1 (4 điểm): Rút gọn các biểu thức sau:

$$A=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$B=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$$ (với $a\neq 0; b\neq 0; |a|>|b|$)

Bài 2: (4điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$
b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: a + b + c = 3

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}>\dfrac{2018}{2003}$

Bài 3 (4 điểm): Từ điểm A ở ngoài đường tròn tâm O, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O), (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho BN=2ON. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M, tính tỉ số $\dfrac{AM}{AO}$.

Bài 4: (4đ) Cho Δ ABC vuông tại A. Các tứ giác MNPQ và ADEF là các hình vuông sao cho: M thuộc cạnh AB; N,P thuộc cạnh BC; Q thuộc cạnh AC; D,E,F tương ứng thuộc cạnh AB, BC, CA. So sánh diện tích 2 hình vuông MNPQ và ADEF.

Bài 5 (4 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên x để $\sqrt{x+19}$; $\sqrt{2x+10}$; $\sqrt{3x+13}$; $\sqrt{4x+37}$ đều là số nguyên.
2. Trong một buổi gặp mặt có 294 người tham gia, những người tham gia, những người quen nhau bắt tay nhau. Biết nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cái bắt tay.

HƯỚNG DẪN

Bài 1:

$$A=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$A=\sqrt{(3+2\sqrt{5})^2}-\sqrt[3]{128+64\sqrt{5}}$$
$$A=\sqrt{(3+2\sqrt{5})^2}-\sqrt[3]{(2+2\sqrt{5})^3}$$
$$A=(3+2\sqrt{5})-(2+2\sqrt{5})$$
$$A=1$$

$$B=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$$ (với $a\neq 0; b\neq 0; |a|>|b|$)

$$B=\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}{\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}:\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$$

$$B=\frac{a^2+2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2-a^2+2a\sqrt{a^2-b^2}-a^2+b^2}{a^2-\left(a^2-b^2\right)}:\frac{\sqrt{a^2(a^2-b^2)}}{b^2}do|a|>|b|$$

$$B=\frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}.\frac{b^2}{|a|\sqrt{(a^2-b^2)}}$$

$$B=\frac{4a}{|a|}$$

B=4 nếu a>0

Hoặc B=-4 nếu a<0

Bài 2: (4đ)

a) $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

ĐKXĐ: $0\le x\le\sqrt{3}$

$$\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\sqrt{3}+x\right)=\sqrt{3}-x$$

$$\Leftrightarrow x^3+\sqrt{3}x^2=\sqrt{3}-x$$

$$\Leftrightarrow x^3+\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2.\frac{\sqrt{3}}{3}+3.x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-\left(\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow x+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3}-\frac{\sqrt{3}}{3}(tmdk)$$

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

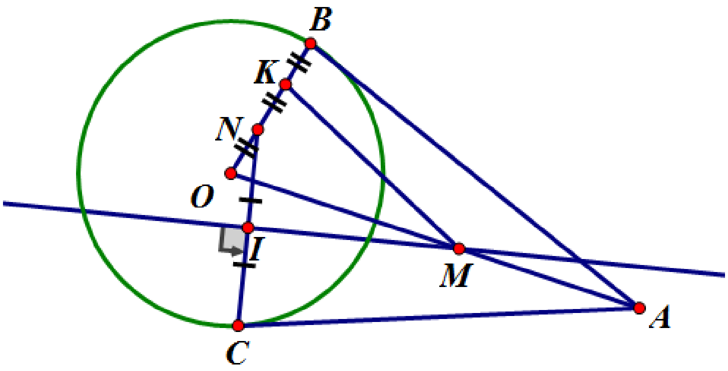
$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

CMTT: $\frac{b}{1+c^2}\geq b-\frac{bc}{2};\frac{c}{1+a^2}\geq c-\frac{ac}{2}$

Cộng vế tương ứng 3 BĐT trên ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}\geq 3-\frac{\frac{(a+b+c)^2}{3}}{2}=\frac{3}{2}>\frac{2018}{2003}(dpcm)$$

Bài 3:



Có OA là trung trực BC

MI là trung trực của NC

$\Rightarrow$ M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBNC

Gọi K là trung điểm của BN

$\Rightarrow$KM $\perp$ BN

Mà AB $\perp$ OB (do AB là tiếp tuyến của (o))

$\Rightarrow$KM // AB

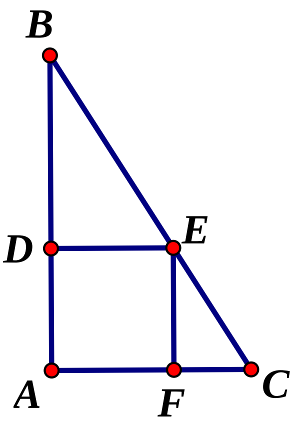
Xét ΔABO

Có KM // AB, áp dụng định lí talet ta có:

$\frac{AM}{AO}=\frac{BK}{BO}=\frac{1}{3}$

Vậy $\frac{AM}{AO}=\frac{1}{3}$

Bài 4: (4đ)



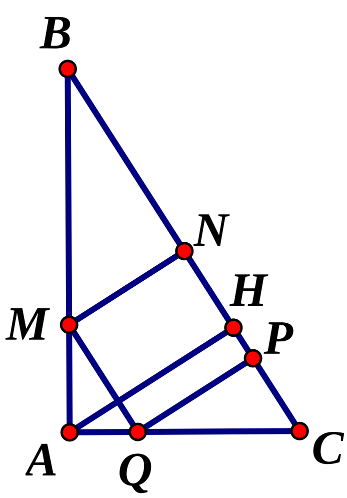
Ta chứng minh được: Δ BDE $\backsim$ Δ BAC (g-g) => $\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}}=\frac{DE^2}{AC^2}$

Δ EFC $\backsim$ Δ BAC (g-g) => $\frac{S_{EFC}}{S_{ABC}}=\frac{EF^2}{AB^2}$

Từ đó suy ra:

$$\frac{S_{BDE}+S_{EFC}}{S_{ABC}}=DE^2.\left(\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}\right)$$

$$hay:\frac{S_{ABC}-S_{ADEF}}{S_{ABC}}=S_{ADEF}.\frac{AB^2+AC^2}{AC^2.AB^2}=S_{ADEF}.\frac{BC^2}{4S^2{}_{ABC}}(1)$$



Ta chứng minh được Δ BMN ∽ Δ BCA => $\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{MN^2}{AC^2}$

Chứng minh tương tự: $\frac{S_{AMQ}}{S_{ABC}} = \frac{MQ^2}{BC^2}; \frac{S_{CPQ}}{S_{ABC}} = \frac{PQ^2}{AB^2}$

$$=> \frac{S_{BMN}+S_{AMQ}+S_{CPQ}}{S_{ABC}} = MN^2.\left(\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}\right)$$

$$hay: \frac{S_{ABC}-S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = S_{MNPQ}.\left(\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{BC^2}\right)(do\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}-S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = S_{MNPQ}.\frac{AH^2+BC^2}{4.S_{ABC}}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{ABC}-S_{ADEF}}{S_{ABC}-S_{MNPQ}} = \frac{S_{ADEF}}{S_{MNPQ}}.\frac{BC^2}{AH^2+BC^2} < \frac{S_{ADEF}}{S_{MNPQ}}$

⇨ $S_{ABC}.S_{MNPQ} < S_{ABC}.S_{ADEF}$

⇨ $S_{MNPQ} < S_{ADEF}$

Bài 5:

Điều kiện: $x \ge -\frac{13}{3}$

$$\begin{cases} a=\sqrt{x+19} \ge 0 \\ b=\sqrt{4x+37} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x+19 \\ b^2 = 4x+37 \end{cases}$$

$\Rightarrow 4a^2 - b^2 = 39$

$\Leftrightarrow (2a-b)(2a+b) = 39$

Do $a,b \in Z; a,b \ge 0; 2a-b \le 2a+b$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a-b=1 \\ 2a+b=39 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a-b=3 \\ 2a+b=13 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10 \\ b=19 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10^2 = x+19 \\ 19^2 = 4x+37 \end{cases} \\ \begin{cases} 4^2 = x+19 \\ 5^2 = 4x+37 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=81 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Với x=81 ta có

$\sqrt{x+19} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{2x+10} = \sqrt{172}$ không thỏa mãn

$\sqrt{3x+13} = \sqrt{256} = 16$

$\sqrt{4x+37} = \sqrt{361} = 19$

Với x= - 3 ta có

$\sqrt{x+19} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{2x+10} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{3x+13} = \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{4x+37} = \sqrt{25} = 5$

Vậy x= - 3 thì $\sqrt{x+19}$; $\sqrt{2x+10}$; $\sqrt{3x+13}$; $\sqrt{4x+37}$ đều là số nguyên

2. Trong 294 người tham gia ta gọi:

a là những người bị giới hạn số lần bắt tay;

b là những người không bị giới hạn số lần bắt tay.

Số người không bị giới hạn số lần bắt tay có tối thiểu là 6 nên $b \geq 6$

Số cái bắt tay từ người bị giới hạn số lần bắt tay tối đa là 6a

Vậy thì từ b cũng phải cho 6a cái bắt tay.

Vậy tổng số cái bắt tay là 6a. Vậy a phải lớn nhất nên b bé nhất bằng 6.

a+b=294 nên a=288. Số cái bắt tay nhiều nhất là 6a=6.288=1728 cái.

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2009-2010

Câu 1. (4,5 điểm):

a) Cho hàm số $f(x)=(x^3+12x-31)^{2010}$

Tính $f(a)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$

Câu 2. (4,5 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2=\sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2\\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4\end{cases}$

Câu 3. (3,0 điểm):

Cho $x;\ y;\ z$ là các số thực dương thoả mãn: $xyz=1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}$

Câu 4. (5,5 điểm):

Cho hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O ($D;E$ là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

a) $MI.BE=BI.AE$

b) Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2,5 điểm):

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Vẽ $NH\perp PD$ tại H. Xác định vị trí của điểm M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

- - - Hết - - -

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:...................

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2009-2010

Câu 1. (4,5 điểm):

a) Cho hàm số $f(x)=(x^3+12x-31)^{2010}$

Tính $f(a)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$

Lời giải

a) $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$\Rightarrow a^3=32+3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})}.(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$

$\Rightarrow a^3=32+3.(-4).a$

$\Rightarrow a^3=32-12a$

$\Rightarrow a^3+12a-32=0$

$\Rightarrow a^3+12a-31=1$

$\Rightarrow f(a)=1^{2010}=1$

b) $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$ (1)

$\Rightarrow 7(x+2y)\vdots 5 \quad \Rightarrow (x+2y)\vdots 5$

Đặt $x+2y=5t$ (2) $(t\in Z)$

(1) trở thành $x^2+xy+y^2=7t$ (3)

Từ (2) $\Rightarrow$ $x=5t-2y$ thay vào (3) ta được

$3y^2-15ty+25t^2-7t=0$ (*)

$\Delta=84t-75t^2$

Để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow 84t-75t^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 0\le t\le \dfrac{28}{25}$

Vì $t\in Z \Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$

Thay vào (*)

Với $t=0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow x_1=0$

Với $t=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2=3 \Rightarrow x_2=-1 \\ y_3=2 \Rightarrow x_3=1 \end{array}\right.$

Câu 2. (4,5 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2=\sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 \end{cases}$

Lời giải

a) ĐK: $x=0$ hoặc $x\geq 1$

Với $x=0$ thoã mãn phương trình

Với $x\geq 1$ Ta có $\sqrt{x^3-x^2}=\sqrt{x^2(x-1)}\leq \dfrac{1}{2}(x^2+x-1)$

$$\sqrt{x^2-x}=\sqrt{1(x^2-x)}\leq \frac{1}{2}(x^2-x+1)$$

$\Rightarrow \sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}\leq x^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x-1 \\ x^2-x=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x-1 \\ x^2=x+1 \end{cases} \Rightarrow x+1=x-1$ (Vô lý)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

b) $(I)\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \quad (1) \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 \quad (2) \end{cases}$ ĐK $x;y;z\neq 0$

Từ (1) $\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{xz}+\dfrac{2}{yz}=4$

Thế vào (2) ta được: $\dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{xz}+\dfrac{2}{yz}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{2}{xz}+\dfrac{2}{yz}=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{xz}+\dfrac{1}{z^2}\right)+\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{yz}+\dfrac{1}{z^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=0 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-z$

Thay vào hệ (I) ta được: $(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ (TM)

Câu 3. (3,0 điểm):

Cho $x;\ y;\ z$ là các số thực dương thoả mãn: $xyz=1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}$

Lời giải

Ta có $(x-y)^2\geq 0\quad \forall x;y$

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\geq xy$

Mà $x;\ y>0\ \Rightarrow x+y>0$

Ta có: $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$

$\Rightarrow x^3+y^3\geq\left(x+y\right)xy$

$\Rightarrow x^3+y^3+1=x^3+y^3+xyz\geq\left(x+y\right)xy+xyz$

$\Rightarrow x^3+y^3+1\geq xy\left(x+y+z\right)>0$

Tương tự: $y^3+z^3+1\geq yz\left(x+y+z\right)>0$

$z^3+x^3+1\geq zx\left(x+y+z\right)>0$

$\Rightarrow A\leq\dfrac{1}{xy(x+y+z)}+\dfrac{1}{yz(x+y+z)}+\dfrac{1}{xz(x+y+z)}$

$\Rightarrow A\leq\dfrac{x+y+z}{xyz(x+y+z)}$

$\Rightarrow A\leq\dfrac{1}{xyz}=1$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $1\Leftrightarrow x=y=z=1$

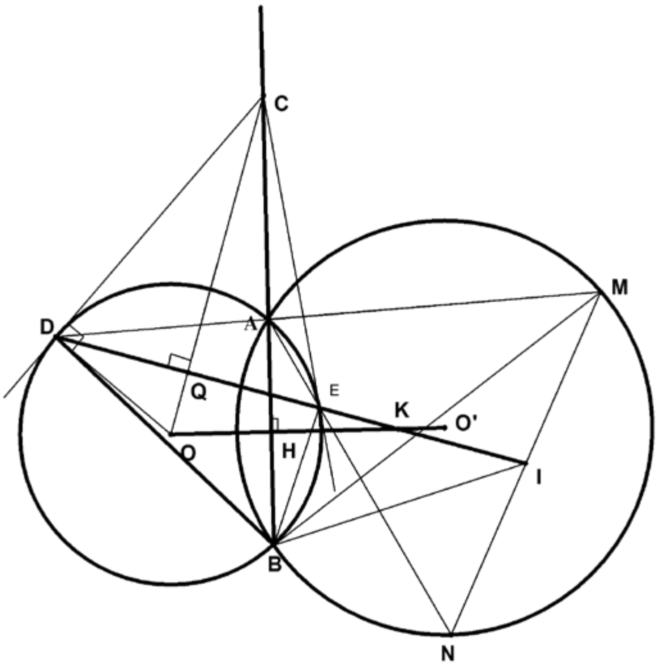
Câu 4. (5,5 điểm):

Cho hai đường tròn $\left(O;\ R\right)$ và $\left(O';\ R'\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O ($D;E$ là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

a) $MI.BE=BI.AE$

b) Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BDE} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn cung BE của đường tròn tâm O)

$\widehat{BAE} = \widehat{BMN}$ (cùng chắn cung BN của đường tròn tâm O')

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BMN}$

hay $\widehat{BDI} = \widehat{BMN}$ $\Rightarrow BDMI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{MBI}$ (cùng chắn cung MI)

mà $\widehat{MDI} = \widehat{ABE}$ (cùng chắn cung AE của đường tròn tâm O)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{MBI}$

mặt khác $\widehat{BMI} = \widehat{BAE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta DMBI \# \Delta DABE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MI}{AE} = \dfrac{BI}{BE} \Leftrightarrow MI.BE = BI.AE$

b) Gọi Q là giao điểm của CO và DE $\Rightarrow OC$^ DE tại Q

$\Rightarrow \Delta OCD$ vuông tại D có DQ là đường cao

$\Rightarrow OQ.OC = OD^2 = R^2$ (1)

Gọi K giao điểm của hai đường thẳng OO' và DE; H là giao điểm của AB và OO'

$\Rightarrow OO'$^ AB tại H.

Xét ΔKQO và ΔCHO có $\widehat{Q} = \widehat{H} = 90^0$; $\widehat{O}$ chung

$\Rightarrow \Delta KQO \# \Delta CHO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KO}{CO} = \dfrac{OQ}{OH} \Rightarrow OC.OQ = KO.OH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KO.OH = R^2 \Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$

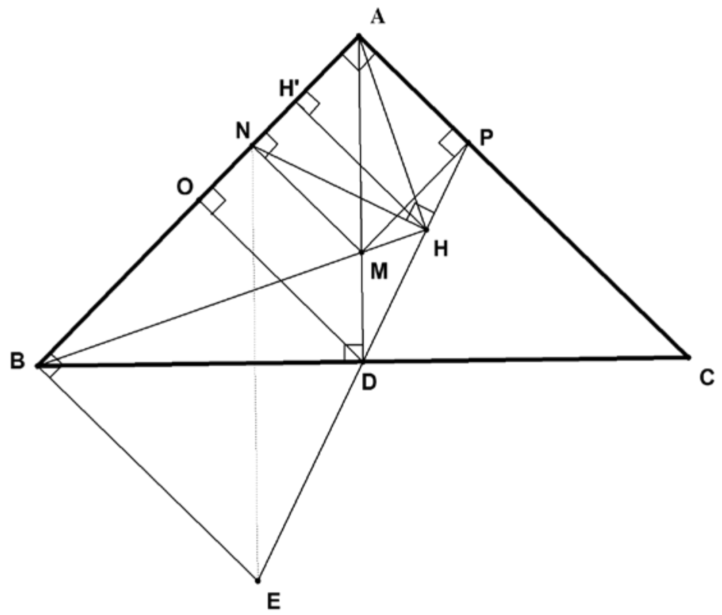
Vì OH cố định và R không đổi

$\Rightarrow OK$ không đổi $\Rightarrow K$ cố định.

Câu 5. (2,5 điểm):

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Vẽ $NH \perp PD$ tại H. Xác định vị trí của điểm M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

Lời giải



ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow AD$ là phân giác góc A và $AD \perp BC$ $\Rightarrow D \in (O;\ AB/2)$

Ta có $ANMP$ là hình vuông (hình chữ nhật có AM là phân giác)

$\Rightarrow$ tứ giác $ANMP$ nội tiếp đường tròn đường kính NP

mà $\widehat{NHP} = 90^0 \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính NP

$\Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AMN} = 45^0$ (1)

Kẻ $Bx \perp AB$ cắt đường thẳng PD tại E

$\Rightarrow$ tứ giác $BNHE$ nội tiếp đường tròn đường kính NE

Mặt khác $\Delta BED = \Delta CDP$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = PC$

mà $PC = BN \Rightarrow BN = BE$ $\Rightarrow \Delta BNE$ vuông cân tại B

$\Rightarrow \widehat{NEB} = 45^0$ mà $\widehat{NHB} = \widehat{NEB}$ (cùng chắn cung BN)

$\Rightarrow \widehat{NHB} = 45^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHB} = 90^0$ $\Rightarrow H \in (O;\ AB/2)$

gọi H' là hình chiếu của H trên AB

$\Rightarrow S_{AHB} = \dfrac{HH'.AB}{2} \Rightarrow S_{AHB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow HH'$ lớn nhất

mà $HH' \le OD = AB/2$ (do $H;\ D$ cùng thuộc đường tròn đường kính AB và $OD \perp AB$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv D \Leftrightarrow M \equiv D$.

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ THỌ NĂM HỌC 2009-2010

Câu 1 **(4đ)**

a) Chứng minh rằng $A=\left(2^{n}-1\right)\left(2^{n}+1\right)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên *n*.

b) Tìm số các số nguyên *n* sao cho $B=n^{2}-n+13$ là số chính phương.

Câu 2 **(5đ)**

a) Giải phương trình: $x^{2}-2x+3=2\sqrt{2x^{2}-4x+3}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{2}-y^{2}=1-xy \\ x^{2}+y^{2}=3xy+11 \end{cases}$

Câu 3 **(3đ)**

Cho ba số $x;y;z$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x+y+z=2010 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2010} \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(x^{2007}+y^{2007}\right)\left(y^{2009}+z^{2009}\right)\left(z^{2011}+x^{2011}\right)$.

Câu 4 **(6đ)**

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định, $AB=R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn (O;R) tại A ,$(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn (O;R) tại *B*. Hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M.

a) Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh OM // CD và 4 điểm $C;D;O;M$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đửơng thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N.

c) Tìm vị trí của P để tích $PM.PN$ lớn nhất? diện tích tam giác AMB lớn nhất?

Câu 5 **(2đ)**

Cho các số dương $x;y;z$ thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=670$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x^{2}-yz+2010}+\frac{y}{y^{2}-zx+2010}+\frac{z}{z^{2}-xy+2010}\geq\frac{1}{x+y+z}$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HSG TỈNH PHÚ THỌ NĂM HỌC 2009-2010

Câu 1 (4đ)

a) Chứng minh rằng $A=\left(2^n-1\right)\left(2^n+1\right)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n.

b) Tìm số các số nguyên n sao cho $B=n^2-n+13$ là số chính phương.

Lời giải

a) Theo giả thiết n là số tự nhiên nên $2^n-1; 2^n; 2^n+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp.

Vì tích của 3 số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3 nên $\left(2^n-1\right).2^n.\left(2^n+1\right)$ chia hết cho 3.

Mặt khác $\left(2^n;3\right)=1$ nên $\left(2^n-1\right)\left(2^n+1\right)$ chia hết cho 3.

Vậy A chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n

b) Ta thấy B là số chính phương $\Leftrightarrow$ 4B là số chính phương.

Đặt $4B=k^2$ $\left(k\in\mathbb{N}\right)$ thì $4B=4n^2-4n+52=k^2\Leftrightarrow\left(2n-1-k\right).\left(2n-1+k\right)=-51$

Vì $2n-1+k\geq 2n+1+k$ nên ta có các hệ:

a) $(1):\begin{cases}2n-1+k=1\\2n-1-k=-51\end{cases}$ b) $(2):\begin{cases}2n-1+k=3\\2n-1-k=-17\end{cases}$

c) $(3):\begin{cases}2n-1+k=51\\2n-1-k=-1\end{cases}$ d) $(4):\begin{cases}2n-1+k=17\\2n-1-k=-3\end{cases}$

Giải hệ (1) (2) (3) (4) ta tìm được $n=-12; n=-3; n=13; n=4$

Vậy các số nguyên cần tìm là $n\in\left\{-12;-3;4;13\right\}$.

Câu 2 (5đ)

a) Giải phương trình: $x^2-2x+3=2\sqrt{2x^2-4x+3}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-y^2=1-xy\\x^2+y^2=3xy+11\end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1\geq 1$ nên tập xác định của phương trình là R.

Phương trình đã cho tương đương với.

$2x^2-4x+3-4\sqrt{2x^2-4x+3}+3=0$.

Đặt $y=\sqrt{2x^2-4x+3}\geq 1$ thì phương trình đã cho trở thành.

$y^2-4y+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Với $y=1$ ta có $\sqrt{2x^2-4x+3}=1\Leftrightarrow 2x^2-4x+3=1\Leftrightarrow x=1$

Với $y=3$ ta có $\sqrt{2x^2-4x+3}=3\Leftrightarrow 2x^2-4x+3=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x=1, x=-1, x=3$.

b) Hệ đã cho tương đương với .

$$\begin{cases}11(x^2+xy-y^2)=11\\x^2-3xy+y^2=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\11(x^2+xy-y^2)=x^2-3xy+y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\(x+2y)(5x-3y)=0\end{cases}(*)$$

Từ hệ (*) ta suy ra.

$$\begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\x+2y=0\end{cases}(I)\text{ hoặc }\begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\(x+2y).(5x-3y)=0\end{cases}(II)$$

Giải hệ (I) ta tìm được $(x;y)=(2;-1);(-2;1)$

Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(2;-1);(-2;1)$

Câu 3 (3đ)

Cho ba số $x;y;z$ thỏa mãn.

$$\begin{cases}x+y+z=2010\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2010}\end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(x^{2007}+y^{2007}\right)\left(y^{2009}+z^{2009}\right)\left(z^{2011}+x^{2011}\right)$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $x;y;z$ khác 0 và.

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{z(x+y+z)}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz+yz+z^2}\right)=0\Leftrightarrow(x+y)(xz+yz+z^2+xy)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y)\left[z(z+x)+y(z+x)\right]=0\Leftrightarrow(x+y)(y+z)(z+x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=0\\z+y=0\\x+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-y\\y=-z\\z=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^{2007}=-y^{2007}\\y^{2009}=-z^{2009}\\z^{2011}=-x^{2011}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2007}+y^{2007}=0 \\ y^{2009}+z^{2009}=0 \Leftrightarrow P=0 \\ z^{2011}+x^{2011}=0 \end{array}\right.$$

Câu 4 (6đ)

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định, $AB=R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn (O;R) tại A ,$(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn (O;R) tại B. Hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M.

a) Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh OM // CD và 4 điểm $C;D;O;M$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đưởng thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N.

c) Tìm vị trí của P để tích $PM.PN$ lớn nhất ? diện tích tam giác AMB lớn nhất.

Lời giải

a) Nối CP; PD ta có ΔACP ; ΔOAB lần lượt cân tại $C;O$ nên $\widehat{CPA}=\widehat{CAP}=\widehat{OBP}$

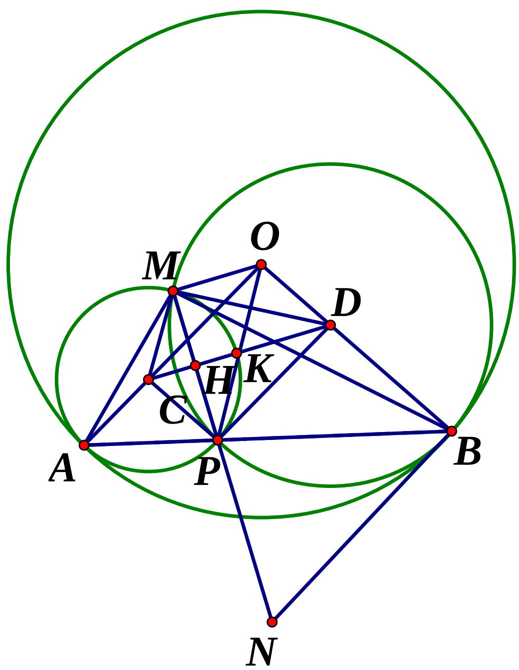
do đó $CP//OD(1)$.

Tương tự ΔDPB ; ΔOAB lần lượt cân tại D , O nên $\widehat{DPB}=\widehat{DBP}=\widehat{OAB}$ nên OD//CP (2) . Từ (1) và (2) suy ra $ODPC$ là hình bình hành.

Gọi CD cắt MP tại H cắt OP tại K thì K là trung điểm của OP.

Vì tứ giác $CDOM$ là hình bình hành nên $OC=DP$, $DP=DM=R_2$ nên tứ giác $CDOM$ là hình thang cân do đó 4 điểm $C;D;O;M$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét tam giác AOB có $OA^2+OB^2=2R^2=AB^2$ nên tam giác OAB vuông cân tại O. Vì 4 điểm $C;D;O;M$ cùng thuộc một đường tròn (kể cả $M\equiv O$) nên .



$\widehat{COB}=\widehat{CMD}$ (1)

Xét ΔMAB và ΔMCD có: $\widehat{MAB}=\widehat{MCD}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MP}$ của (C)).

$\widehat{MBD}=\widehat{MDC}$ (cùng bằng $\frac{1}{2} sd\ \overset{\frown}{MP}$ của (D)).

Nên $\Delta MAB \backsim \Delta MCD$ (g.g).

Vì $\Delta MAB \backsim \Delta MCD$ suy ra $\widehat{AMB}=\widehat{COD}$ hay $\widehat{AMB}=\widehat{AOB}=90^\circ$.

Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB.

Ta có $\widehat{ACP}=\widehat{BDP}=\widehat{AOB}=90^\circ$ nên

$\widehat{AMP}=\frac{1}{2}\widehat{ACP}=45^\circ$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm của (C)).

$\widehat{BMP}=\frac{1}{2}\widehat{BDP}=45^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D)).

Do đó MP là phân giác $\widehat{AMB}$.

Mà $\widehat{AMB}=\widehat{AOB}=90^\circ$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB.
Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N thì N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố định.

c) Xét ΔMAP và ΔBNP có $\widehat{MPA}=\widehat{BPN}$ (đối đỉnh); $\widehat{AMP}=\widehat{PBN}$ (góc nội tiếp cùng chắn 1 cung) nên $\Delta MAP \backsim \Delta BNP$ (g.g).

Do đó $\frac{PA}{PN}=\frac{PM}{PB}\Leftrightarrow PM.PN=PA.\text{PB}\le\left(\frac{PA+PB}{2}\right)^2=\frac{AB^2}{4}=\frac{R^2}{2}$ (không đổi).

Vậy $PM.PN$ lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi $PA=PB$ hay P là trung điểm dây AB.

Vì tam giác AMB vuông tại M nên .

$S_{AMB}=\frac{1}{2}AM.BM\le\frac{1}{4}\left(AM^2+BM^2\right)=\frac{AB^2}{4}=\frac{R^2}{2}$.

Diện tích tam giác AMB lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi $PA=PB$ hay P là trung điểm dây

AB

Câu 5 (2đ).

Cho các số dương $x;y;z$ thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=670$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x^2-yz+2010}+\frac{y}{y^2-zx+2010}+\frac{z}{z^2-xy+2010}\ge\frac{1}{x+y+z}$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức: Với mọi $a,b,c\in\mathbb{R}$ và $x,y,z>0$ ta có.

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\qquad(*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a,\text{b}\in\mathbb{R}$ và $x,y>0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\qquad(**)$$

$\Leftrightarrow\left(a^2y+b^2x\right)(x+y)\ge xy(a+b)^2$

$\Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$VT=\frac{x}{x^2-yz+2010}+\frac{y}{y^2-zx+2010}+\frac{z}{z^2-xy+2010}$$

$$=\frac{x^2}{x(x^2-yz+2010)}+\frac{y^2}{y(y^2-zx+2010)}+\frac{z^2}{z(z^2-xy+2010)}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz+2010(x+y+z)} (1)$$

Chú ý: $x(x^2-yz+2010)=x(x^2+xy+zx+1340)>0; y(y^2-zx+2010)>0$ và $z\left(z^2-xy+2010\right)>0$

Chứng minh được dễ dàng

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right)$$
$$=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right] \quad (2)$$

Do đó

$$x^3+y^3+z^3-3xyz+2010(x+y+z)$$
$$=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)+2010\right]=(x+y+z)^3 (3)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra

$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x+y+z}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{2010}}{3}$.

ĐỀ THI CHỌN HSG CAM LỘ - NĂM HỌC 2008-2009

Câu 1: *(1,0 điểm)*

Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^4 + 2009x^2 + 2008x + 2009$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Giải phương trình sau: $\frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9}$.

Câu 3: *(1,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng $\frac{a^4+b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$.

b) Cho hai số dương a,b và $a = 5 - b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Câu 4: *(2,0 điểm)*

a) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện :
$a^{2006} + b^{2006} = a^{2007} + b^{2007} = a^{2008} + b^{2008}$. Hãy tính tổng: $S = a^{2009} + b^{2009}$.

b) Chứng minh rằng : $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ là số nguyên.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm các số nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình sau: $xy - 2x - 3y + 1 = 0$.

Câu 6: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC > AB$, đường cao $AH\,(H \in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh hai tam giác BEC và ADC đồng dạng.

b) Chứng minh tam giác ABE cân.

c) Gọi M là trung điểm của BE và vẽ tia AM cắt BC tại G. Chứng minh rằng:
$\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG CAM LỘ - HÀ TĨNH NĂM HỌC 2008-2009

Câu 1: *(1,0 điểm)*

Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^4+2009x^2+2008x+2009$.

Lời giải

$$x^4+2009x^2+2008x+2009=\left(x^4+x^2+1\right)+2008\left(x^2+x+1\right)$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+2008\left(x^2+x+1\right)$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2009\right).$$

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Giải phương trình sau: $\dfrac{x+2}{13}+\dfrac{2x+45}{15}=\dfrac{3x+8}{37}+\dfrac{4x+69}{9}$.

Lời giải

$$\frac{x+2}{13}+\frac{2x+45}{15}=\frac{3x+8}{37}+\frac{4x+69}{9}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{x+2}{13}+1\right)+\left(\frac{2x+45}{15}-1\right)=\left(\frac{3x+8}{37}+1\right)+\left(\frac{4x+69}{9}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{x+15}{13}+\frac{2(x+15)}{15}=\frac{3(x+15)}{37}+\frac{4(x+15)}{9}$$
$$\Leftrightarrow(x+15)\left(\frac{1}{13}+\frac{2}{15}-\frac{3}{37}-\frac{4}{9}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-15$$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng $\dfrac{a^4+b^4}{2}\geq ab^3+a^3b-a^2b^2$.

b) Cho hai số dương a,b và $a=5-b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $P=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Lời giải

a)(1,0 điểm)

$$\frac{a^4+b^4}{2}\geq ab^3+a^3b-a^2b^2\Leftrightarrow a^4+b^4\geq 2ab^3+2a^3b-2a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4-2ab^3-2a^3b+2a^2b^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow(a^4-2a^3b+a^2b^2)+(b^4-2ab^3+a^2b^2)$$
$$\Leftrightarrow(a^2-ab)^2+(b^2-ab)^2\geq 0$$

b)(1,0 điểm)

$$P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{5}{ab}\Rightarrow P=\frac{20}{4ab}\geq\frac{20}{(a+b)^2}=\frac{4}{5}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{4}{5}$ khi $a=b=\dfrac{5}{2}$.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

a) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện :
$a^{2006}+b^{2006}=a^{2007}+b^{2007}=a^{2008}+b^{2008}$. Hãy tính tổng: $S=a^{2009}+b^{2009}$.

b) Chứng minh rằng : $A=\dfrac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ là số nguyên.

Lời giải

a) (1,0 điểm)

Ta có: $a^{2008}+b^{2008}=\left(a^{2007}+b^{2007}\right)(a+b)-ab\left(a^{2006}+b^{2006}\right)$

$\Leftrightarrow 1=a+b-ab \Leftrightarrow (1-a)(1-b)=0 \Rightarrow a=1, b=1$

Vậy $\mathrm{S}=1+1=2$

b) (1,0 điểm)

$$A=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$A=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=1\in\mathbb{Z}.$$

Câu 5: *(3,0 điểm)*

Tìm các số nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình sau: $xy-2x-3y+1=0$.

Lời giải

$xy-2x-3y+1=0 \Leftrightarrow xy-3y=2x-1 \Leftrightarrow y(x-3)=2x-1$

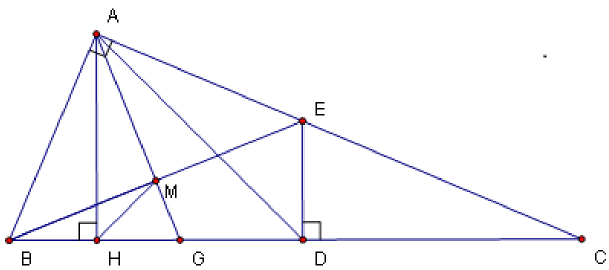
Ta thấy $x=3$ không thỏa mãn, với $x\neq 3$ thì $y=2+\dfrac{5}{x-3}$;

Để y nguyên thì $x-3$ phải là ước của 5;

Suy ra: $(x,y)=(4,7);(8,3)$.

Câu 6: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC>AB$, đường cao $AH\,(H\in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD=HA$. Đường vuông góc với với BC tại D cắt AC tại E.



a) Chứng minh hai tam giác BEC và ADC đồng dạng.

b) Chứng minh tam giác ABE cân.

c) Gọi M là trung điểm của BE và vẽ tia AM cắt BC tại G. Chứng minh rằng: $\dfrac{GB}{BC}=\dfrac{HD}{AH+HC}$

Lời giải

a) *(1 điểm)*

Xét ΔADC và ΔBEC có:

$\frac{CD}{CE}=\frac{CA}{CB}$ (vì $\Delta CDE \# \Delta CAB$)

$\widehat{C}$ chung

Suy ra: $\Delta ADC \# \Delta BEC$ (c-g-c).

b)(1 điểm)

Theo câu ta suy ra: $\widehat{BEC}=\widehat{ADC}$

Ta có: $\widehat{ADC}=\widehat{EDC}+\widehat{ADE}=135^\circ \Rightarrow \widehat{BEC}=135^\circ$

Suy ra: $\widehat{AEB}=45^\circ$

Do đó: ΔABE cân (tam giác vuông có một góc bằng 45°).

c) *(1 điểm)*

ΔABE cân tại E nên AM còn là phân giác của $\widehat{BAC}$

Suy ra: $\frac{GB}{GC}=\frac{AB}{AC}$, mà $\frac{AB}{AC}=\frac{ED}{DC}$ (do $\Delta ABC \# \Delta DEC$)

Mà $\frac{ED}{DC}=\frac{AH}{HC}$ (do $ED//AH$); Mặt khác : $\frac{AH}{HC}=\frac{HD}{HC}$

Do đó: $\frac{GB}{GC}=\frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC}=\frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC}=\frac{HD}{AH+HC}$

……………..HẾT……………

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN HẢI LĂNG NĂM HỌC 2008-2009
VÒNG II

Bài 1. *(2 điểm)*

Cho $a, b, c \in Q$; a, b, c đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ bằng bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2. *(2 điểm)*

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$ với $x < y < z$.

Bài 3. *(2 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Bài 4. *(2 điểm)*

Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

Bài 5. *(2 điểm)*

Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{BAC} = 20^0$. Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = 20^0$. Cho $AB = AC = b$, $BC = a$

a) Tính CE.

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

……………….HẾT…………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….….Số báo danh:………………….

LỜI GIẢI ĐỀ ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN HẢI LĂNG NĂM HỌC 2008-2009
VÒNG II

Bài 1. *(2 điểm)*

Cho $a, b, c \in Q$; a, b, c đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ bằng bình phương của một số hữu tỷ.

Lời giải

Ta có: $$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2-2\left(\frac{1}{a-b}.\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-c}.\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-a}.\frac{1}{a-b}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2-2\frac{c-a+b-c+a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2$$

Bài 2. *(2 điểm)*

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$ với $x < y < z$.

Lời giải

Ta có: $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500\,(*)$

$\Rightarrow 5^x(1+2.5^{y-x}+5^{z-x}) = 4500 = 2^2.3^3.5^3$

$\Rightarrow 5^x = 5^3$; $1+2.5^{y-x}+5^{z-x} = 36 = 1+35$

$\Rightarrow x = 3$; $5^{y-x}(2+5^{z-y}) = 5.7$

$\Rightarrow x = 3$; $y-3 = 1$; $2+5^{z-y} = 7 = 2+5$

$\Rightarrow x = 3$; $y = 4$; $z-y = 1$

$\Rightarrow x = 3$; $y = 4$; $z = 5$ thoả $(*)$

Bài 3. *(2 điểm)* Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A=\frac{x^2-4x+1}{x^2}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{x^2-4x+1}{x^2}=1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$

$$=-3+\left(4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=-3+\left(2-\frac{1}{x}\right)^2\ge -3$$

Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi $\Leftrightarrow 2-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Bài 4. *(2 điểm)* Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$. Ta có: $\overline{ab} \vdots 3$ và $\overline{a0b}+2a=9\overline{ab}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)\vdots 3\\ 100a+b+2a=9(10a+b)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)\vdots 3\\ 3a=2b\end{cases}$$

Từ $3a=2b \Rightarrow 2b\vdots 3$ mà $(2,3)=1 \Rightarrow b\vdots 3$ do $(a+b)\vdots 3 \Rightarrow a\vdots 3$ mà $3a\vdots 2 \Rightarrow a\vdots 2$

Ta có $a\vdots 3, a\vdots 2, (2,3)=1 \Rightarrow a\vdots 6, 1\le a\le 9 \Rightarrow a=6 \Rightarrow b=9$ Vậy $\overline{ab}=69$

Bài 5. *(2 điểm)* Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{BAC}=20^0$. Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC}=20^0$. Cho AB = AC = b, BC = a

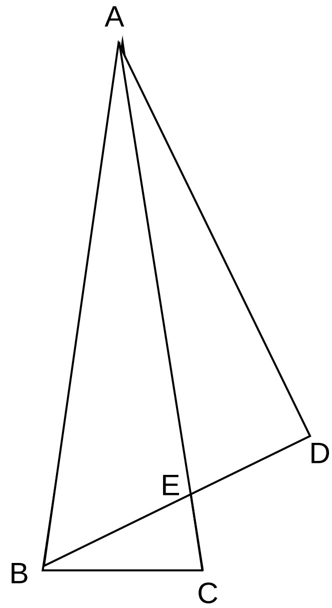
c) Tính CE.

d) Chứng minh rằng $a^3+b^3=3ab^2$.

Lời giải

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác BCE (hai tam giác cân có góc đỉnh bằng 20^0 và góc đáy bằng 80^0) nên $\frac{CE}{BC}=\frac{BC}{AB}$

Và BE = BC = a, suy ra $CE=\frac{a^2}{b}$



b) Dựng $AD\perp BE$, suy ra $BD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}b$

Ta có: $AE^2=ED^2+AD^2$, $AB^2=BD^2+AD^2$

do đó: $AB^2=BD^2+EA^2-DE^2$

Thay vào ta được: $b^2=\frac{b^2}{4}+\left(b-\frac{a^2}{b}\right)^2-\left(\frac{b}{2}-a\right)^2$

$$=\frac{b^2}{4}+b^2+\frac{a^4}{b^2}-2a^2-\frac{b^2}{4}-a^2+ab$$

$$\Leftrightarrow b^4=b^4+a^4-3a^2b^2+ab^3$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3=3ab^2$$

……………….HẾT…………….