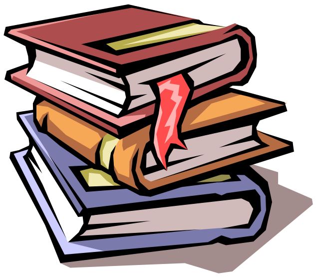
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC
LUYỆN THI VÀO LỚP 10

Tài liệu sưu tầm, ngày 31 tháng 5 năm 2021

HÌNH HỌC

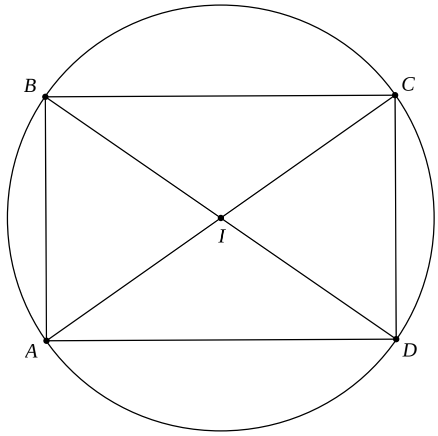
Bài 1. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ biết $AB = 8$ cm và $BC = 6$ cm.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD.

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$ và I đồng thời là trung điểm của AC và BD.

Do đó, $IA = IB = IC = ID = \dfrac{AC}{2}$.



Như vậy, đường tròn $(I;IA)$ là đường tròn ngoại tiếp của $ABCD$.

Tam giác ABC vuông tại B nên theo định lý Py-ta-go ta có:

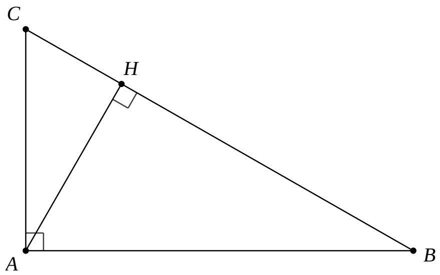
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow AC = 10$ cm.

$\Rightarrow IA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm.

Vậy $(I;5cm)$ là đường tròn ngoại tiếp của hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $BC = 20$ cm, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{3}$. Tính HB, HC.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH nên ta có

$BH.BC = AB^2$ và $CH.BC = AC^2$.

Do vậy

$$\frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{BH}{CH} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{16}{9}$$

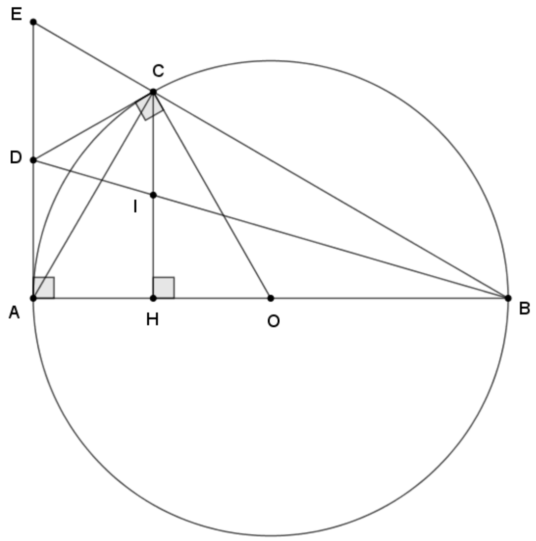
$$\Leftrightarrow \frac{BH}{16} = \frac{CH}{9} = \frac{BH+CH}{16+9} = \frac{BC}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{4}{5}.16 = 12,8 \text{ (cm)};\ CH = \frac{4}{5}.9 = 7,2 \text{ (cm)}$$

Vậy $BH = 12,8$ cm và $CH = 7,2$ cm.

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Lấy điểm C nằm trên đường tròn $(C \neq A, C \neq B)$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại D. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB. I là giao điểm của BD và CH. Chứng minh rằng $CI = HI$.

Lời giải



Gọi $BC \cap AD = \{E\}$

Xét (O) có:

$\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Ta có $\widehat{ECD} + \widehat{ACD} = 90°$, $\widehat{DAC} + \widehat{DEC} = 90°$ $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DCE}$ $\Rightarrow \Delta DEC$ cân ở D.

$\Rightarrow DE = DC$

Mà $DA = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow DE = DA = DC$

Xét ΔBED có $IC \,//\, ED$.

$\Rightarrow \dfrac{IC}{DE} = \dfrac{BI}{BD}$ (định lý Ta-lét)

Xét ΔBAD có $HI \,//\, AD$

$\Rightarrow \dfrac{HI}{AD} = \dfrac{BI}{BD}$ (định lý Ta-lét)

$\Rightarrow \dfrac{HI}{AD} = \dfrac{IC}{DE}$

Mà $AD = DE$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow IH = IC$

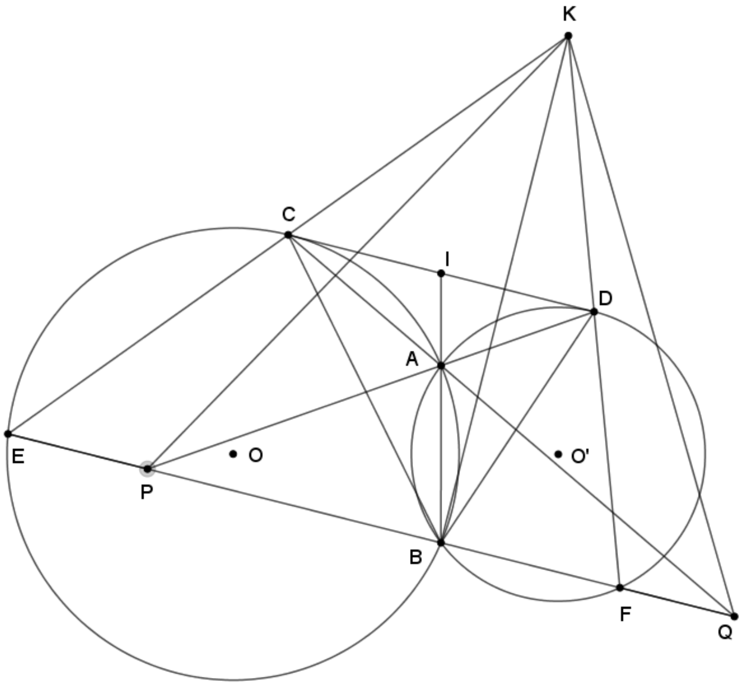
$\Rightarrow I$ là trung điểm HI .

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ tiếp tuyến chung CD của hai đường tròn (C thuộc (O), D thuộc (O')). Lấy hai điểm E, F lần lượt thuộc các đường tròn (O) và (O') sao cho ba điểm $E;B;$F thẳng hàng (B nằm giữa E và F, $E \neq B, F \neq B$) và EF song song với CD. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AD với EF và CA với EF. K là giao điểm của hai đường thẳng EC và FD. Chứng minh rằng:

a) $\Delta KCD = \Delta BCD$.

b) $KP = KQ$.

Lời giải



a. Ta có $FE\,//\,CD\ \Rightarrow \widehat{KDC}=\widehat{KFE}$ (hai góc đồng vị) $\Rightarrow \widehat{KDC}=\widehat{DFB}$

Xét (O') có CD là tiếp tuyến

$\widehat{CDB}=\widehat{DFB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây chắn $\overset\frown{BD}$)

$\Rightarrow \widehat{KDC}=\widehat{CDB}\left(=\widehat{DFB}\right)$.

Xét (O) có CD là tiếp tuyến.

$\widehat{BCD}=\widehat{BEC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây chắn $\overset\frown{BC}$)

Có: $FE\,//\,CD \Rightarrow \widehat{KCD}=\widehat{KEF}$ (hai góc đồng vị)$\Rightarrow \widehat{KCD}=\widehat{BEC}$

$\Rightarrow \widehat{KCD}=\widehat{BCD}$

Xét ΔKCD và ΔBCD có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{KCD}=\widehat{BCD}\\ CD\text{ chung}\\ \widehat{KDC}=\widehat{BDC}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta KCD=\Delta BCD\left(g-c-g\right)$$

b. Có: $\Delta KCD=\Delta BCD\Rightarrow\begin{cases}KC=BC\\ \widehat{KCD}=\widehat{BCD}\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta KCB$ cân tại C và CD là tia phân giác của $\widehat{KCB}$

$\Rightarrow CD\perp BK$

Ta có $CD // EF \Rightarrow BK \perp EF$.

Gọi $AB \cap CD = \{I\}$.

Ta có

$$\Delta ICB \backsim \Delta IAC\left(g-g\right) \Rightarrow \frac{IC}{IA}=\frac{IB}{IC} \Leftrightarrow IC^2 = IA.IB$$

$$\Delta IDA \backsim \Delta IBD\left(g-g\right) \Rightarrow \frac{ID}{IB}=\frac{IA}{ID} \Leftrightarrow ID^2 = IA.IB$$

$\Rightarrow IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID \Rightarrow$ I là trung điểm CD.

Xét ΔADI có $PB // ID$ $\Rightarrow \frac{AB}{AI}=\frac{BP}{ID}$ (định lý Ta-lét)

Xét ΔACI có $QB // IC$ $\Rightarrow \frac{AB}{AI}=\frac{BQ}{CI}$ (định lý Ta-lét)

$\Rightarrow \frac{BP}{ID}=\frac{BQ}{CI}$

Mà $CI = DI$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow BP = BQ$

Xét ΔKQP có KB vừa là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta KQP$ cân tại K $\Rightarrow KQ = KP$.

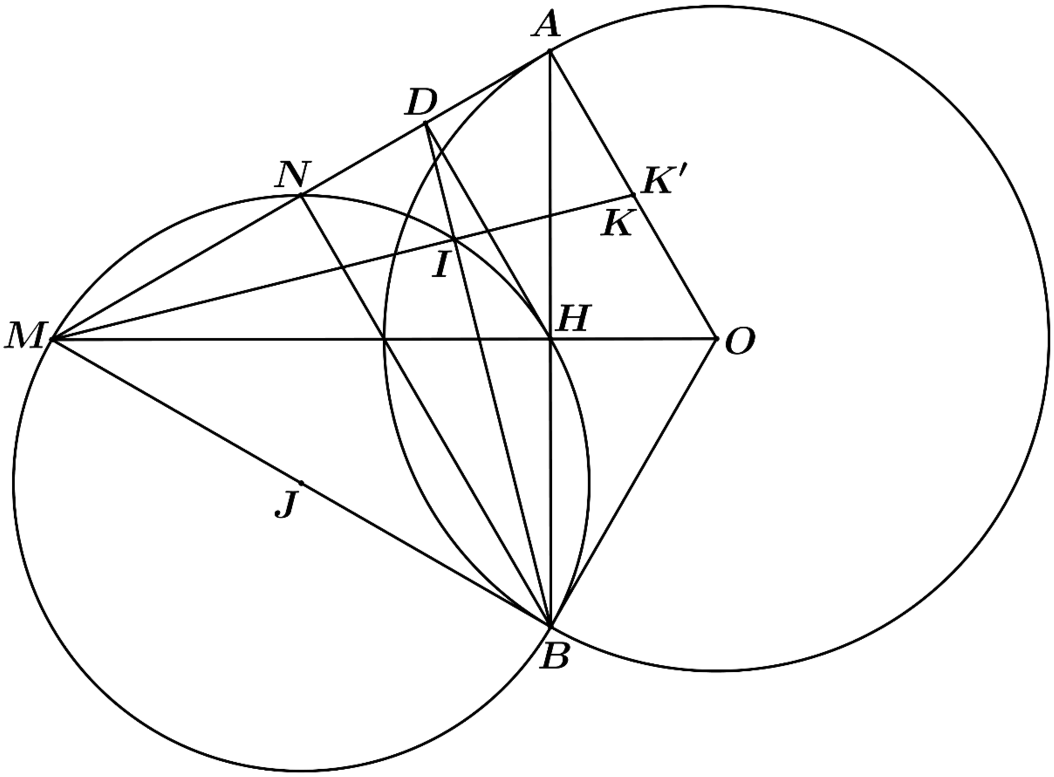
Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$. Điểm M ở ngoài đường tròn sao cho $OM = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Nối OM cắt AB tại H, hạ $HD \perp MA$ tại D, điểm C thuộc cung nhỏ AB. Tiếp tuyến tại C của đường tròn $(O;R)$ cắt MA, MB lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $OH.OM = OA^2$.

c) Đường tròn đường kính MB cắt BD tại I, gọi K là trung điểm của OA. Chứng minh ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Do MA, MB là tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O) nên $MA \perp OA$ và $MB \perp OB$

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác $MAOB$ là tứ giác nội tiếp

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $MA = MB$ và MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ $\Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M, có MO là phân giác $\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại H $\Rightarrow \Delta MAO$ vuông tại A và có đường cao là AH

$\Rightarrow OH.OM = OA^2$

c) ΔMAO vuông tại $A \Rightarrow \sin\widehat{OMA} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OMA} = 30^\circ$

MO là tia phân giác của $\widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ$, mà ΔMAB cân ΔMAB là tam giác đều

Lại có: $MA = OM.\cos\widehat{OMA} = 2R.\cos 30^\circ = R\sqrt{3}$

Gọi N là giao của đường tròn đường kính MB với $MA \Rightarrow \widehat{MNB} = 90^\circ$ hay $BN \perp MA$

ΔMAB đều $\Rightarrow N$ là trung điểm của $MA \Rightarrow AN = \dfrac{MA}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$HD \perp MA$, $BN \perp MA \Rightarrow HD // BN$, mà H là trung điểm của AB (do MO là đường trung trực của AB) $\Rightarrow D$ là trung điểm của $AN \Rightarrow DN = \dfrac{AN}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} : 2 = \dfrac{R\sqrt{3}}{4}$

ΔBMN vuông tại N có $\widehat{AMB}=60°$, $MB=R\sqrt{3}$

$\Rightarrow BN=MB.\sin\widehat{AMN}=R\sqrt{3}.\sin 60°=\dfrac{3R}{2}$

ΔBND vuông tại $N\Rightarrow \tan\widehat{NBD}=\dfrac{DN}{BN}=\dfrac{R\sqrt{3}}{4}:\dfrac{3R}{2}=\dfrac{R\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{2}{3R}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Gọi K' là giao điểm của MI và $OA\Rightarrow \widehat{AMK'}=\widehat{NBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NI}$)

$\Rightarrow \tan\widehat{AMK'}=\tan\widehat{NBD}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\Delta MAK'$ vuông tại $A\Rightarrow AK'=MA.\tan\widehat{AMK'}=R\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{R}{2}\Rightarrow AK'=\dfrac{1}{2}OA$

$\Rightarrow K'$ là trung điểm của $OA\Rightarrow K'$ trùng với K

Vậy ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Chú ý: Nội dung giả thiết "Tiếp tuyến tại C của đường tròn $(O;R)$ cắt MA, MB lần lượt tại E, F " chỉ nhằm mục đích gây nhiễu.

Bài 6.

1. Cho đoạn thẳng $HK=5cm$. Vẽ đường tròn tâm H, bán kính $2cm$ và đường tròn tâm K, bán kính $3cm$.

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn trên.

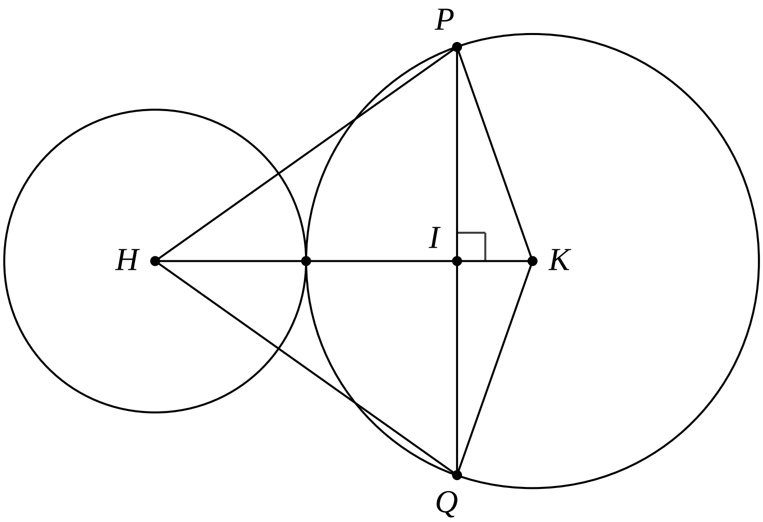
b) Trên đoạn thẳng HK lấy điểm I sao cho $IK=1cm$. Vẽ đường thẳng đi qua I và vuông góc với HK, đường thẳng này cắt đường tròn (K) tại hai điểm P,Q. Tính diện tích tứ giác $HPKQ$.

2. Một bể cá làm bằng kính dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là $500dm^3$ và chiều cao là $5dm$ (bỏ qua chiều dày của kính làm bể cá).

a) Tính diện tích đáy của bể cá trên.

b) Đáy của bể cá trên có thể có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu? Tại sao?

Lời giải



a) Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của hai đường tròn (H), (K) nói trên. Ta có

$$R_1 + R_2 = 2 + 3 = 5 = HK.$$

Suy ra hai đường tròn (H), (K) nói trên tiếp xúc nhau.

b) Vì $IK \perp PQ$ nên tam giác PIK vuông tại I có

$PI = \sqrt{PK^2 - IK^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Vì tam giác ΔPKQ cân tại K $(KP = KQ = R)$ và $IK \perp PQ$ nên I là trung điểm PQ.

Suy ra $PQ = 2PI = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Vì $PQ \perp HK \Rightarrow S_{HPKQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5 = 10\sqrt{2}\ (cm^2)$

2.

a) Tính diện tích đáy của bể cá trên.

$V_{hop} = S_{day} \cdot h \Rightarrow S_{day} = \frac{V_{hop}}{h} = \frac{500}{5} = 100\left(dm^2\right).$

b) Đáy của bể cá trên có thể có chu vị nhỏ nhất bằng bao nhiêu? Tại sao?

Gọi a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của bể cá. Ta có

$P_{day} = 2(a+b) \geq 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{S_{day}} = 4\sqrt{100} = 40(dm)$ (Theo bất đẳng thức Cauchy).

Vậy chu vi đáy của bể cá nhỏ nhất bằng $40dm$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 10(dm)$.

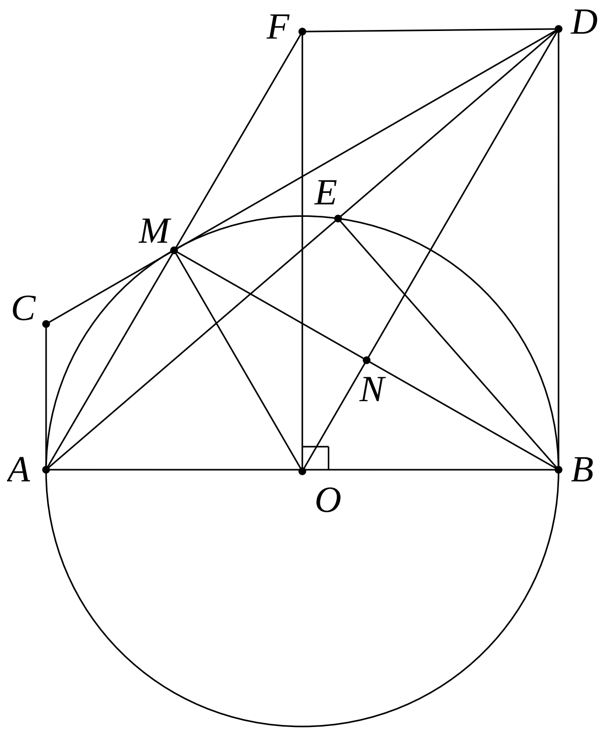
Bài 7. Cho Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Điểm M nằm trên $(O;R)$ với $MA < MB$ $(M \neq A,\ M \neq B)$. Tiếp tuyến tại M của $(O;R)$ cắt các tiếp tuyến tại A và B của $(O;R)$ lần lượt tại C, D.

a) Chứng minh tứ giác $ACDB$ là hình thang vuông.

b) Biết AD cắt $(O;R)$ tại E khác A, OD cắt MB tại N. Chứng minh $DE.DA = DN.DO$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt đường thẳng AM tại F. Chứng minh $OFDB$ là hình chữ nhật.

Lời giải



a) Vì AC, BD là các tiếp tuyến của $(O;R)$ nên $AC \perp AB$; $BD \perp AB$ (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow AC \,//\, BD$ (tính chất từ vuông góc đến song song).

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACDB$ là hình thang.

Mà $\widehat{CAB} = 90^0$ ($AC \perp AB$) nên tứ giác $ACBD$ là hình thang vuông.

b) Ta có DB, DM là các tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow OD$ là phân giác của $\widehat{MOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$OB = OM = R \Rightarrow \Delta OBM$ cân tại O có OD là phân giác của $\widehat{MOB}$ nên OD là đường trung trực của $BM \Rightarrow DO \perp BM$ tại N .

Xét ΔBOD vuông tại B có: $BN \perp DO$ (cmt).

$\Rightarrow BD^2 = DN.DO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)

$\widehat{AEB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $BE\perp AD$.

Xét ΔBAD vuông tại B có: $BE\perp AD$ (cmt)

$\Rightarrow BD^2=DE.DA$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) ta có $DE.DA=DN.DO$ (cùng bằng BD^2).

c) $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow BM\perp AF$ tại M.

Ta có $BM\perp AF$; $BM\perp OD$ (cmt)

$\Rightarrow AF\ //\ OD$ (cùng vuông góc với BM).

$\Rightarrow \widehat{FAO}=\widehat{DOB}$ (hai góc đồng vị).

Xét ΔAOF và ΔOBD có:

$\widehat{FAO}=\widehat{DOB}$ (cmt)

$OA=OB=R$

$\widehat{FOA}=\widehat{DBO}=90^0$

$\Rightarrow \Delta AOF=\Delta OBD\,(\text{g}-\text{c}-\text{g})$.

$\Rightarrow FO=BD$ (hai cạnh tương ứng).

Xét tứ giác $OFBD$ có:

$FO\ //\ BD$ (vì cùng $\perp AB$)

$FO=BD$ (cmt)

Suy ra tứ giác $OFBD$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

Mà $\widehat{FOB}=90^0$ (Vì $FO\perp AB$).

Suy ra tứ giác $OFBD$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật).

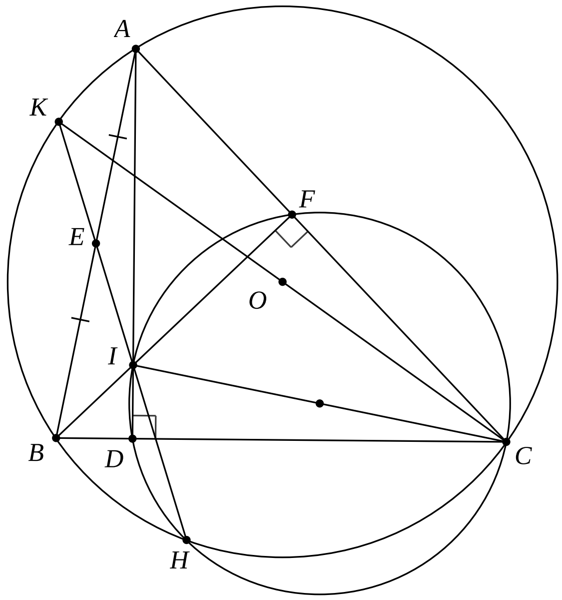
Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $BC<2R$. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB<AC$. Các đường cao AD và BF của tam giác ABC cắt nhau tại I.

1) Chứng minh tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn và xác định tâm của đường tròn đó.

2) Chứng minh: $CD.CB=CF.CA$

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF cắt $(O;R)$ tại điểm H (H khác C). Vẽ đường kính CK của $(O;R)$ và gọi E là trung điểm của AB. Chứng minh $AKBI$ là hình bình hành và 3 điểm K, E, H thẳng hàng.

Lời giải



1) Ta có: AD đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AD \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = 90^0$

$\Rightarrow A, B, D$ nằm trên đường tròn đường kính AB.

Có: AD đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow BF \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{BFA} = 90°$

$\Rightarrow B, F, A$ nằm trên đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow$ các điểm A, B, D, F, A cùng thuộc đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB, hay tâm đường tròn là trung điểm AB

2) **Cách 1:**

Xét tam giác CDF và tam giác CAB có :

$\widehat{ACB}$ chung

$\widehat{CDF} = \widehat{CAB}$ (vì tứ giác ABDF nội tiếp và $\widehat{CDF}$ là góc ngoài tại đỉnh D)

$\Rightarrow \ \Delta CDF \ \# \ \Delta CAB(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow CD.CB = CF.CA$$

Cách 2:

Xét ΔADC và ΔBFC có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADC}=\widehat{BFC}=90^\circ\\ \widehat{ACB}\text{ chung}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ADC\ \#\ \ BFC\ \text{(g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CF}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow CD.CB=CF.CA$$

3) *) Ta có: $BF\perp AC$ (gt);

$KA\perp AC$ (do $\widehat{KAC}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow AK \parallel BF \ \Rightarrow AK // BI$ (3)

Tương tự ta có: $AD\perp BC$ (gt)

$KB\perp BC$ (do $\widehat{KBC}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow AD // KB \Rightarrow AI // KB$

Mà: $AK // BI$ (cmt)

$\Rightarrow AKBI$ là hình bình hành/

*) Vì: $AKBI$ là hình bình hành $\Rightarrow AB$ cắt KI tại trung điểm mỗi đường

Mà E là trung điểm của AB

$\Rightarrow E$ là trung điểm của KI

$\Rightarrow$ K; I; E thẳng hàng (1)

+) Xét (O) có góc $\widehat{KHC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow KH\perp CH$

$\Rightarrow$ ta có: $\widehat{IFC}+\widehat{IDC}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $FIDC$ nội tiếp đường tròn đường kính IC , mà H cùng thuộc đường tròn này.

$\Rightarrow IH\perp CH$ mà $KH\perp CH$ (cmt)

$\Rightarrow K$; I ; H thẳng hàng (2)

Từ (1) ; (2) : $\Rightarrow$ K ; E ; H thẳng hàng .

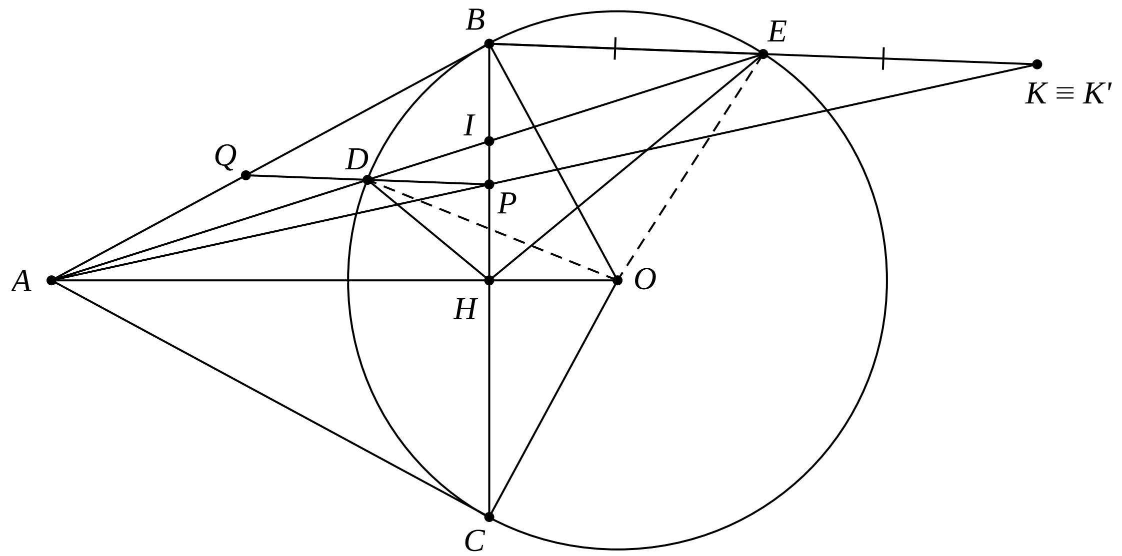
Bài 9. Từ điểm A ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B , C là tiếp điểm) và một cát tuyến ADE nằm giữa hai tia AO và AB . Gọi giao của BC với AO, DE lần lượt là H, I . Qua D kẻ đường thẳng song song với BE cắt BC, AB lần lượt ở P và Q. Gọi K là điểm đối xứng của B qua E .

a) Chứng minh: $AH.AO=AD.AE$.

b) Chứng minh: tứ giác $DHOE$ nội tiếp và $AE.ID=AD.IE$.

c) Chứng minh: 3 điểm A, P, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $AB = AC$ (AB, AC là tiếp tuyến của (O)), $OB = OC$ (bán kính)

Nên OA là trung trực của BC

Xét ΔABO có $\widehat{ABO} = 90°$ (AB là tiếp tuyến của (O)),

$BH \perp OA$ (OA là trung trực của BC)

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (1)

Xét ΔABD và ΔAEB có

$\widehat{ABD} = \widehat{AEB}\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BD}\right)$

$\widehat{BAD}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABD$ # $\Delta AEB\,(gg)$

$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH.AO = AD.AE\left(= AB^2\right)$

b) Xét ΔAHD và ΔAEO có

$\frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$ (cmt)

$\widehat{HAD}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHD$ đồng dạng $\Delta AEO(cgc)$

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}.$

Do đó tứ giác $OEDH$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có ΔODE cân tại O (do $OD = OE$) $\Rightarrow \widehat{EDO} = \widehat{AEO}$

mà $\widehat{AHD} = \widehat{AEO}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EDO} = \widehat{AHD}$

Lại có tứ giác $OEDH$ là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{EDO} = \widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{EHO}$

$\Rightarrow 90^0 - \widehat{AHD} = 90^0 - \widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{BHA} - \widehat{AHD} = \widehat{BHO} - \widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BHE}$

Nên HB là tia phân giác của ΔDHE ,mà $HA \perp HB$ (cmt) nên HA là phân giác ngoài của $\Delta DHE \Rightarrow \dfrac{HD}{HE} = \dfrac{ID}{IE} = \dfrac{AD}{AE}(3)$

$\Rightarrow AE.ID = AD.IE.$

c) Xét ΔDIP có $DP//BE(gt) \Rightarrow \dfrac{DP}{BE} = \dfrac{ID}{IE}(4)$ (Hệ quả Ta lét)

Xét ΔABE có $DQ//BE(gt) \Rightarrow \dfrac{DQ}{BE} = \dfrac{AD}{AE}(5)$ (Hệ quả Ta lét)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \dfrac{DP}{BE} = \dfrac{DQ}{BE} \Rightarrow DP = DQ.$

Gọi K' là giao điểm của AP và BE. Xét $\Delta AEK'$ có $DP//EK'(gt) \Rightarrow \dfrac{DP}{EK'} = \dfrac{AD}{AE}(6)$

Từ (5), (6) $\Rightarrow \dfrac{DQ}{BE} = \dfrac{DP}{EK'}$ mà $DP = DQ(cmt) \Rightarrow BE = EK'$

Mặt khác $BE = EK(gt) \Rightarrow EK = EK' \Rightarrow K' \equiv K.$

Vậy A, P, K thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD của tam giác và đường kính AK của đường tròn (O). Hạ BE, CF cùng vuông góc với AK.

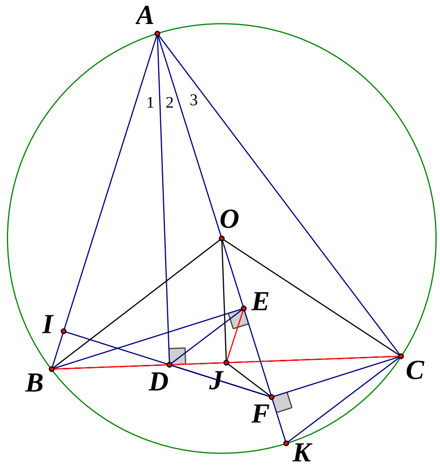
a) Chứng minh: $ABDE$, $ACFD$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$

c) Chứng minh: $DF \perp AB$

d) Cho BC cố định và điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Lời giải



a) Chứng minh: $ABDE$, $ACFD$ là các tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $ABDE$ có:

$\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90°$ (giả thiết). Mà D, E là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AB.

$\Rightarrow ABDE$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự: tứ giác $ACFD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác $ABDE$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DEF}$ (cùng bù với $\widehat{AEB}$)

Tứ giác $ACFD$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{ACB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Xét ΔABC và ΔDEF có:

$\widehat{ABD} = \widehat{DEF}$ (cmt)

$\widehat{DFE} = \widehat{ACB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEF \, (g.g)$

c) Chứng minh: $DF \perp AB$

Xét (O), đường kính AD có $C \in (O) \Rightarrow \widehat{ACK} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{ABC} = 90°$ (tam giác ABD vuông tại D)

$\widehat{A_3} + \widehat{AKC} = 90°$ (tam giác AKC vuông tại C)

Xét (O) có: $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (2 góc nội tiếp chắn cung KC)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_3} + \widehat{A_2}$

$\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{DAC}$

Mà: $\widehat{DFE} = \widehat{ACB}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{AFI} + \widehat{IAK} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 90°$ hay $DF \perp AB$

d) Cho BC cố định và điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Gọi J là trung điểm của BC $\Rightarrow OJ \perp BC$
Ta thấy: tứ giác $OBJE$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{JEF} = \widehat{OBC}$ (cùng bù với góc OEJ)

Ta thấy: tứ giác $OJFC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{JFO} = \widehat{OCB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OJ)

Mà: $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (tam giác OBC là tam giác cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{JEF} = \widehat{JFO}$ hay tam giác JEF cân tại J

$\Rightarrow JE = JF$

Chứng minh tương tự: $JE = JD$

Hay: $JE = JD = JF$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm trung điểm J của đoạn thẳng BC cố định.

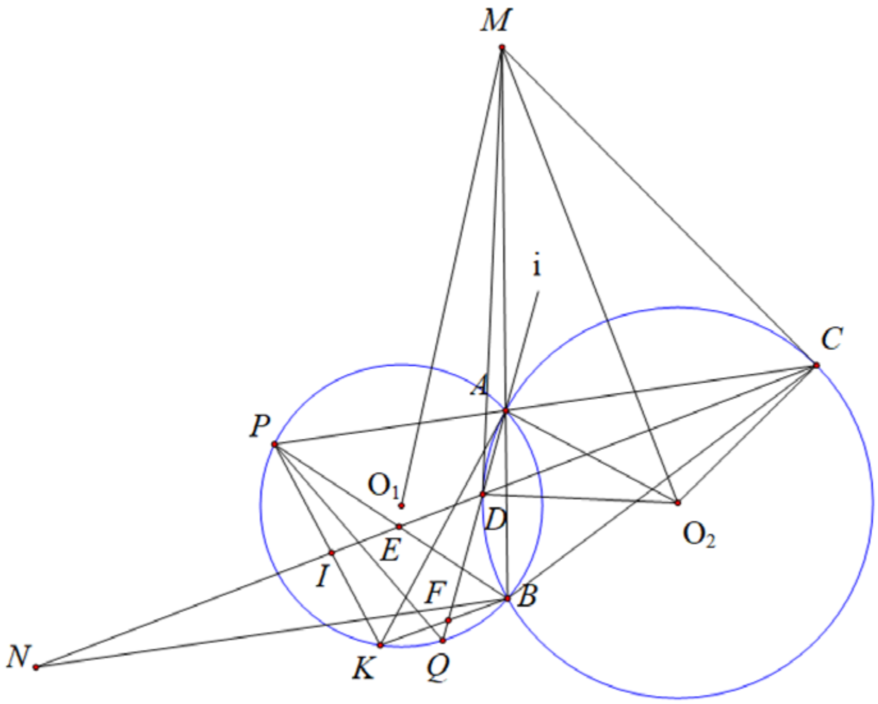
Bài 11. Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M. Qua điểm M kẻ các tiếp tuyến MD, MC với đường tròn (O_2) (D, C là các tiếp điểm, D nằm trong đường tròn (O_1). Đường thẳng CA cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai là P, đường thẳng AD cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai là Q; tiếp tuyến đường tròn (O_2) tại A cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai là K; giao điềm của các đường thẳng CD, BP là E; giao điểm của các đường thẳng BK, AD là F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{CP}{DQ} = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CA}{DA}$

c) Chứng minh rằng đường thẳng CD đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Lời giải



a) Xét (O_1) : $\widehat{EBF}=\widehat{PBK}=\widehat{PAK}$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung PK) (1)

Gọi tia Ai là tiếp tuyến đường tròn (O_2) tại A, cắt (O_1) tại $K \Rightarrow \widehat{PAK}=\widehat{iAC}$ (đối đỉnh) (2)

Xét (O_2) $\widehat{iAC}=\widehat{ADC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn cung AC) (3)

$\widehat{ADC}=\widehat{EDF}$ (đối đỉnh) (4)

Từ $(1),(2),(3),(4) \Rightarrow \widehat{EBF}=\widehat{EDF}$

Vậy tứ giác $EDBF$ có 2 đỉnh kề nhau nhìn cạnh đối diện với hai góc bằng nhau

$\Rightarrow E,D,B,F$ cùng nằm trên một đường tròn.

b)Do $D\in AQ, A\in CP \Rightarrow \widehat{DQB}=\widehat{AQB}=\widehat{APB}=\widehat{CPB}$ (Cùng chắn cung AB)

Tứ giác $ACBD$ nội tiếp $(O_2) \Rightarrow \widehat{QDB}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{QDB}=\widehat{PCB}$

$\Rightarrow \triangle DQB$ đồng dạng $\triangle CPB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CP}{QD}=\dfrac{CB}{BD}$ (1)

Tương tự có :

$\Delta MAD \backsim \Delta MDB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MD}=\dfrac{AD}{DB}$

$\Delta MAC \backsim \Delta MCB$ (g.g)$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC}=\dfrac{AC}{CB}$

Mà $MC = MD$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CA}{CB} \Rightarrow \dfrac{CB}{BD}=\dfrac{CA}{DA}\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{CP}{DQ}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{CA}{DA}$

c, Kẻ $Qx // CP$, $Qx \cap CD=\{N\}, CD \cap QP=\{I\}$

Có $AC // NQ \Rightarrow \dfrac{DA}{DQ}=\dfrac{AC}{NQ}$

$CP // NQ \Rightarrow \dfrac{IQ}{IP}=\dfrac{NQ}{PC}$

$\dfrac{DA}{DQ}.\dfrac{IQ}{IP}.\dfrac{CP}{CA}=\dfrac{AC}{NQ}.\dfrac{NQ}{PC}.\dfrac{CP}{AC}=1$

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DQ}.\dfrac{IQ}{IP}.\dfrac{CP}{CA}=1\,(1)$

Mà $\dfrac{CP}{DQ}=\dfrac{CA}{DA}$ (cmt)$\Rightarrow \dfrac{CP}{CA}=\dfrac{DQ}{DA}$

Do đó từ $(1)\Rightarrow \dfrac{DA}{DQ}.\dfrac{IQ}{IP}.\dfrac{CP}{CA}=1 \Rightarrow \dfrac{IQ}{IP}=1 \Rightarrow IQ=IP$.

Mà $I \in PQ$ nên I là trung điểm của đoạn thẳng PQ .

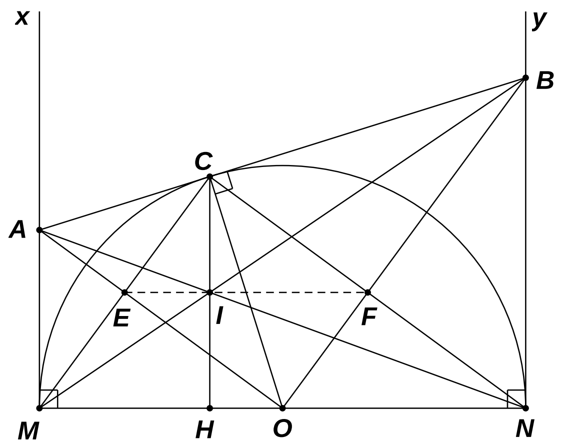
Bài 11. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính MN với $(C \neq M; C \neq N)$ và $CM < CN$. Trên nửa mặt phẳng bờ MN chứa điểm C kẻ các tiếp tuyến Mx, Ny với (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt Mx, Ny lần lượt tại A, B.

1) Chứng minh rằng: Tứ giác $AOCM$ nội tiếp.

2) Cho $OB = 2R$. Tính độ dài đoạn thẳng BN theo R và số đo góc NBC

3) Goi I là giao điểm của AN với BM, E là giao điểm của OA với CM và F là giao điểm của OB với CN. Chứng minh : $CI \perp MN$ và E, I, F thẳng hàng

Lời giải



a) Có AM, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) $\Rightarrow AM \perp OM$, $AC \perp OC$

Xét tứ giác $ACOM$ có $\widehat{AMO} = \widehat{ACO} = 90° \Rightarrow \widehat{AMO} + \widehat{ACO} = 180°$

Suy ra tứ giác $ACOM$ nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng $180°$)

b) Tam giác ONB vuông tại N

$\Rightarrow BN^2 = OB^2 - ON^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow BN = R\sqrt{3}$ (đơn vị độ dài)

+) $\sin\widehat{OBN} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OBN} = 30°$

$\Rightarrow \widehat{NBC} = 2.\widehat{OBN} = 2.30° = 60°$ (Vì BO là tia phân giác của $\widehat{NBC}$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)).

c) Do $AM // BN$ và AM cắt BN tại I

$\Rightarrow \dfrac{AM}{BN} = \dfrac{AI}{IN}$ (Hệ quả định lý Ta-let)

Mà $AM = AC$, $BN = BC$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AI}{IN}$

+) Xét tam giác ABN có

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AI}{IN}$ (cmt)

$\Rightarrow CI // BN$ (Định lý Ta-let đảo)

Lại có $BN \perp MN$

$\Rightarrow CI \perp MN$ (từ vuông góc đến song song)

+) Có $\left.\begin{array}{l} AM = AC \\ OM = OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA$ là đường trung trực của MC

$\Rightarrow OA \perp MC$ tại E và E là trung điểm của MC

+) Tương tự chứng minh: F là trung điểm của NC

+) Tam giác CMN có E, F lần lượt là trung điểm của MC, NC

$\Rightarrow FE$ là đường trung bình của tam giác CMN

$\Rightarrow FE // \mathrm{MN}\ (1)$

+) Gọi H là giao điểm của CI và MN

+) Xét tam giác ANB có $CI // \mathrm{BN}(\perp \mathrm{MN})$

$\Rightarrow \dfrac{CI}{BN} = \dfrac{AI}{AN} (2)$

+) Xét tam giác MNB có $\mathrm{HI} // BN(\perp MN)$

$\Rightarrow \dfrac{HI}{BN} = \dfrac{MI}{MB} (3)$

+) Xét tam giác AMI có $\mathrm{AM} // BN(\perp MN)$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{IN} = \dfrac{MI}{IB} \Rightarrow \dfrac{AI}{AI+IN} = \dfrac{MI}{MI+IB} \Rightarrow \dfrac{AI}{AN} = \dfrac{MI}{MB} (4)$

Từ (2), (3), (4) suy ra $\Rightarrow \dfrac{CI}{BN} = \dfrac{HI}{BN} \Rightarrow CI = IH$

+) Tam giác CMH có E, I lần lượt là trung điểm của CM, CH

$\Rightarrow EI$ là đường trung bình của tam giác CMH

$\Rightarrow EI // \mathrm{MH}$

$\Rightarrow EI // \mathrm{MN}$

Mà $FE // MN (1)$

Vậy E, I, F thẳng hàng

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$ có điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

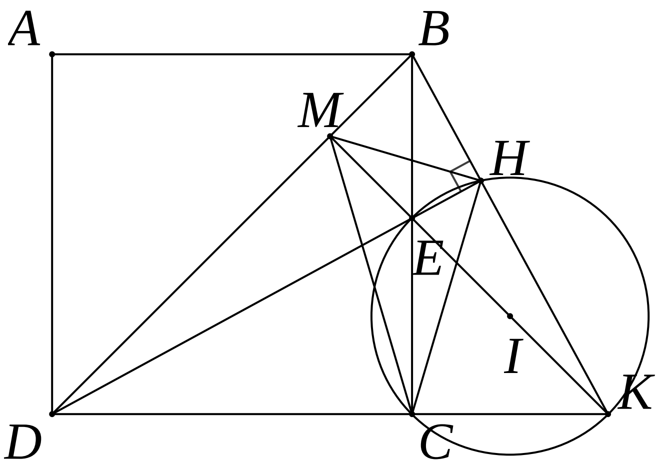
a) Chứng minh rằng tứ giác $HECK$ nội tiếp được một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Chứng minh $KH.KB = KC.KD$

c) Gọi M là giao điểm của KE với BD. Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp ΔHCM.

d) Với vị trí nào của E trên cạnh BC để $HI \,//\, BC$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{EHK} = 90^\circ\left(DE \perp BK\right)$

$\widehat{ECK} = 90^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông)

Xét tứ giác $EHCK$ có:

$\widehat{EHK} + \widehat{ECK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $EHCK$ nội tiếp một đường tròn đường kính EK.

Suy ra trung điểm I của EK là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHKC$.

b) +) Xét ΔKCB và ΔKHD, có :

$\widehat{KCB} = \widehat{KHD} = 90^0$ và $\widehat{BKC} = \widehat{DKH}$

$\Rightarrow \Delta KCB \backsim \Delta KHD(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{KH}{KC} = \dfrac{KD}{KB} \Rightarrow KB.KH = KC.KD.$

c)

+) Xét ΔBDK có:

$BC \perp DK$ ($ABCD$ là hình chữ nhật) .

$DH \perp BK$

BC cắt DH tại E

Suy ra $KM \perp BD \Rightarrow \widehat{KMB} = 90^\circ$

Mà $\widehat{BCK} = 90^\circ$

Suy ra $BMCK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BK (hai đỉnh liên tiếp M, C cùng nhìn cạnh đối diện BK dưới hai góc bằng 90°).

$\Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{MKB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM).

+) Xét đường tròn tâm I ta có: $\widehat{ECH} = \widehat{EKH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EH).

Suy ra $\widehat{MCE} = \widehat{ECH}$

$\Rightarrow CE$ là tia phân giác góc MCH.

+) Tứ giác $BMEH$ có $\widehat{BME} + \widehat{BHE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMEH$ nội tiếp đường tròn đường kính BE.

$\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MHE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ME)

+) Xét đường tròn tâm I ta có:

$\widehat{EHC} = \widehat{EKC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMCK$ có: $\widehat{MBC} = \widehat{MKC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Suy ra $\widehat{MHE} = \widehat{EHC}$ $\Rightarrow$ HE là tia phân giác của góc MHC

$\Rightarrow$ E là giao điểm của hai đường phân giác trong của ΔMHC.

$\Rightarrow$ E là tâm đường tròn nội tiếp ΔMHC

d)

<u>Cách 1:</u> Để $HI \,//\, BC$ thì H là trung điểm của BK (vì I là trung điểm của EK). Khi đó DH vừa là đường cao, đường trung tuyến của ΔDBK nên ΔDBK cân tại D .

Do đó: $DK = DB$. Như vậy trên tia DC lấy điểm K sao cho $DK = DB$. Điểm E là giao điểm của BC và trung trực của cạnh BK .

<u>Cách 2:</u> Để $HI \,//\, BC$ thì H là trung điểm của BK (vì I là trung điểm của EK). Khi đó DH vừa là đường cao, đường trung tuyến của ΔDBK nên ΔDBK cân tại D .

Do đó: $DK = DB$.

Ta có $DB = \sqrt{2}BC$

$CK = DK - DC = DB - BC = \sqrt{2}BC - BC = \left(\sqrt{2} - 1\right)BC$

+) Xét ΔMEB vuông tại M có $\widehat{MBE} = 45^\circ$ (tính chất hình vuông)

$\Rightarrow \Delta MEB$ vuông cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MEB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CEK} = \widehat{MEB} = 45^\circ$ (đối đỉnh)

Suy ra ΔCEK vuông cân tại C

$\Rightarrow CE = CK = \left(\sqrt{2} - 1\right)BC$

Vậy nếu điểm E nằm trên đoạn BC sao cho $CE = \left(\sqrt{2} - 1\right)BC$ thì $HI \,//\, BC$

Bài 13. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. Qua A vẽ cát tuyến AEF (E nằm giữa A và F; E và B nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là AO). Gọi D là trung điểm của dây EF .

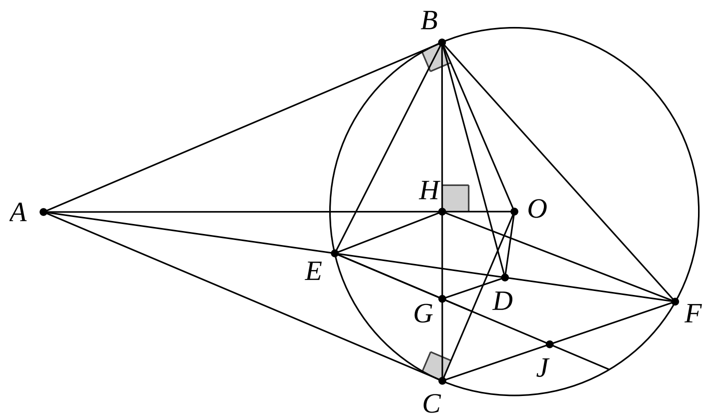
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ và tứ giác $ABOD$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AC^2 = AF.AE$.

c) Chứng minh $AH.AO = AF.AE$, từ đó chứng minh $\widehat{EHF} = 2\widehat{EBF}$.

d) Đường thẳng qua E vuông góc với OC cắt BC và CF thứ tự tại G và J. Chứng minh $GE = GJ$.

Lời giải



a)+) Vì AB và AC là các tiếp tuyến tại A và B của $(O) \Rightarrow \begin{cases} AB \perp OB \\ AC \perp OC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABO} = 90° \\ \widehat{ACO} = 90° \end{cases}$.

Tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$. Mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

Suy ra $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

+) Xét (O) có D là trung điểm của dây EF không đi qua tâm

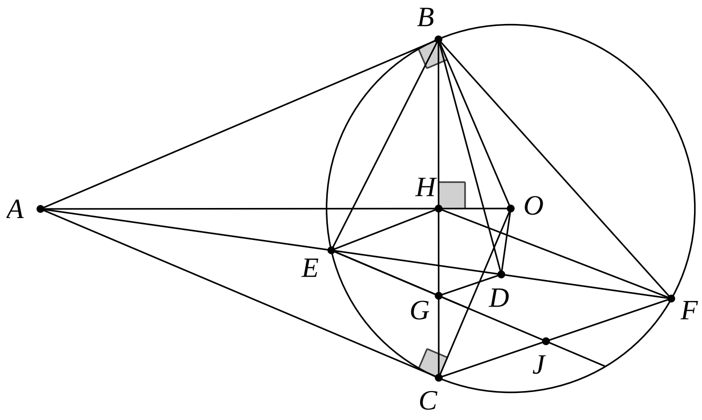
$\Rightarrow OD \perp EF$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow \widehat{ADO} = 90°$.

+) Tứ giác $ABOD$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ADO} = 180°$. Mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

$\Rightarrow ABOD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét (O) có $\widehat{ABE} = \widehat{BFE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BE}$).



Xét ΔABE và ΔAFB có :

Chung $\widehat{BAF}$

$\widehat{ABE} = \widehat{BFE}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta AFB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AF.AE \ (1)$

c)+) Vì AB và AC là hai tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau ở A

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Lại có $OB = OC$ (cùng bằng bán kính (O))

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của BC

$\Rightarrow AO \perp BC$.

+) Xét ΔABO có $BH \perp AO$

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông). (2)

Từ (1) và (2) ta có $AH.AO = AF.AE$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AF} = \dfrac{AE}{AO}$.

+) Xét ΔAHE và ΔAFO có :

Chung $\widehat{OAF}$

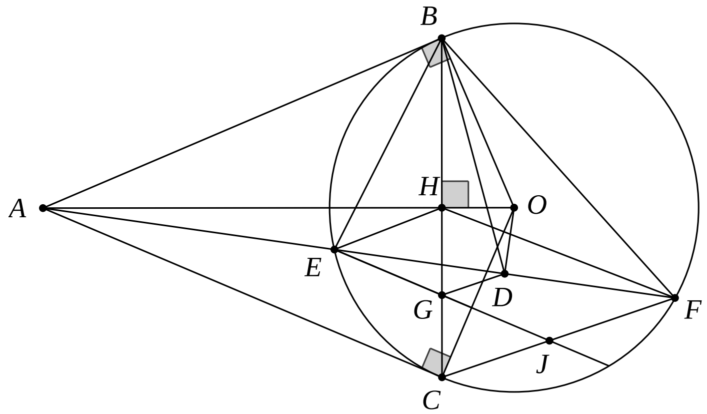
$\dfrac{AH}{AF} = \dfrac{AE}{AO}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AHE \backsim \Delta AFO$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AFO}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow HEFO$ là tứ giác nội tiếp (vì có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

$\Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{EOF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EF}$)



Mà $\widehat{EOF} = 2\widehat{EBF}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{EHF} = 2\widehat{EBF}$.

d) +) Ta có $EG//AC$ (vì cùng vuông góc với OC)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{EGB}$ (hai góc đồng vị) (3)

+) Do $ABOC$ và $ABOD$ là các tứ giác nội tiếp.

Suy ra 5 điểm A, B, O, C, D cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{EDB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) (4)

Từ (3) và $(4) \Rightarrow \widehat{EGB} = \widehat{EDB}$.

+) Xét tứ giác $EGDB$ có $\widehat{EGB} = \widehat{EDB}$

$\Rightarrow EGDB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EDG} = \widehat{EBG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EG}$)

Mà $\widehat{EBG} = \widehat{EFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$ của (O))

$\Rightarrow \widehat{EDG} = \widehat{EFC}$

$\Rightarrow DG//FJ$.

+) Xét ΔEJF có D là trung điểm của EF

và $DG//FJ$

$\Rightarrow G$ là trung điểm của EJ

$\Rightarrow GE = GJ$.

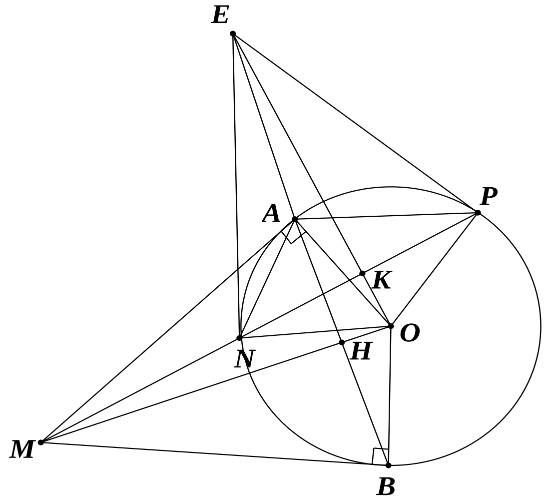
Bài 14. Cho đường tròn (O). Từ điểm M cố định nằm ngoài (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với A, B là tiếp điểm. Một điểm N di động trên cung nhỏ AB ($N \neq A, N \neq B$). Nối M với N, đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là P. Gọi K là trung điểm của NP.

a) Chứng minh rằng $MAOB$ và $MBOK$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Gọi H là giao điểm của AB và OM. Chứng minh rằng $MA^2 = MH.MO = MN.MP$.

c) Đường thẳng AB, OK cắt nhau tại E. Chứng minh rằng EN, EP là tiếp tuyến của (O).

Lời giải



a) Chứng minh rằng $MAOB$ và $MBOK$ là các tứ giác nội tiếp.

Ta có MA, MB là tiếp tuyến với đường tròn (O) với A, B là tiếp điểm

$\Rightarrow MA \perp OA$, $MB \perp OB$ $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90°$

Xét tứ giác $MAOB$ có: $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng $180°$).

Xét đường tròn (O) có: K là trung điểm của $NP \Rightarrow OK \perp NP$ (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \widehat{OKM} = 90°$.

Xét tứ giác $MBOK$ có: $\widehat{MBO} + \widehat{MKO} = 90° + 90° = 180°$.

$\Rightarrow$ tứ giác $MBOK$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng $180°$).

b) Gọi H là giao điểm của AB và OM. Chứng minh rằng

$MA^2 = MH.MO = MN.MP$.

Có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OA = OB(= R)$

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của AB.

$\Rightarrow OM \perp AB$ tại H.

Xét tam giác OAM vuông tại A có: $AH \perp OM$

$MA^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông). (1)

Xét ΔMAN và ΔMPA có:

$\widehat{AMP}$ chung

$\widehat{MAN} = \widehat{MPA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$)

$\Rightarrow \Delta MAN \sim \Delta MPA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MP} = \dfrac{MN}{MA}$

$\Rightarrow MA^2 = MP.MN$; (2)

Từ (1) và (2) ta có: $MA^2 = MH.MO = MN.MP$

c) Đường thẳng AB, OK cắt nhau tại E. Chứng minh rằng EN, EP là tiếp tuyến của (O).

Xét ΔOMK và ΔOEH có:

$\widehat{MOE}$ chung

$\widehat{MKO} = \widehat{MHE} \left(= 90^\circ\right)$

$\Rightarrow \Delta OMK \sim \Delta OEH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OM}{OE} = \dfrac{OK}{OH}$

$\Rightarrow OE.OK = OM.OH$

Xét tam giác OAM vuông tại M có: $AH \perp OM$ có:

$OM.OH = OA^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$\Rightarrow OE.OK = OA^2$

Mà $OA = OP\left(= R\right)$

$\Rightarrow OE.OK = OP^2$

$\Rightarrow \widehat{OPE} = \widehat{ONE} = 90^\circ$

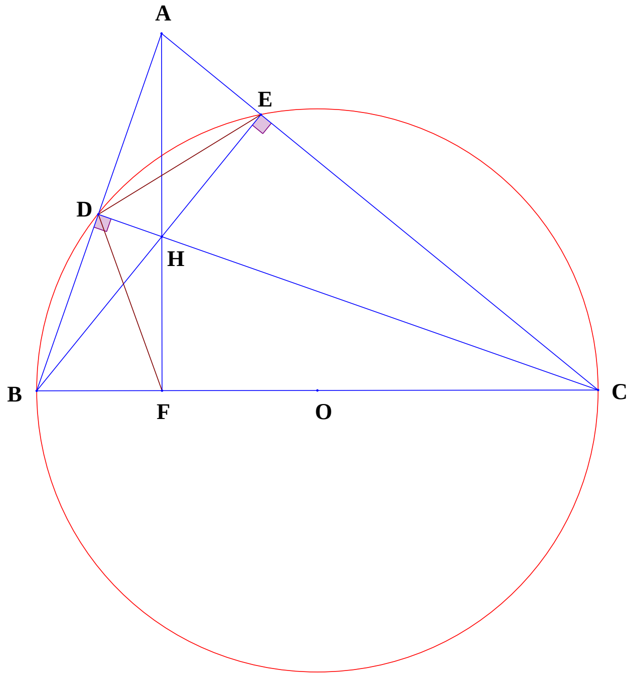
$\Rightarrow$ EN, EP là tiếp tuyến của $\left(O\right)$

Bài 15. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, vẽ đường tròn tâm $\left(O\right)$ đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Gọi H là giao điểm của BE và CD.

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi F là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

Lời giải



a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\widehat{BDC}=\widehat{BEC}=90^\circ$ (các góc nội tiếp cùng chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{BDC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ADH}=90^\circ$

$\widehat{BEC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH}=90^0$

Khi đó: $\widehat{ADH}+\widehat{AEH}=180^\circ$

Vậy $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

Xét ΔABC có:

$BE \perp AC$ (gt)

$CD \perp AB$ (gt)

Suy ra H là trực tâm của ΔABC.

Do đó AH là đường cao của ΔABC.

Nên $AF \perp BC$ tại F

Xét tứ giác $BDHF$ có:

$\widehat{BDH}=90^\circ$

$\widehat{BFH}=90^\circ$ ($AF \perp BC$ tại F)

Nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HBF}=\widehat{FDH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{HF}$) (1)

Ta có $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EAH}=\widehat{EDH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{EH}$) (2)

Xét ΔAEH và ΔBFH có:

$\widehat{AHE}=\widehat{BHF}$ (đối đỉnh)

$\widehat{E}=\widehat{F}=90^\circ$

Suy ra $\widehat{EAH}=\widehat{FBH}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\widehat{EDH}=\widehat{FDH}$

$\Rightarrow DH$ là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

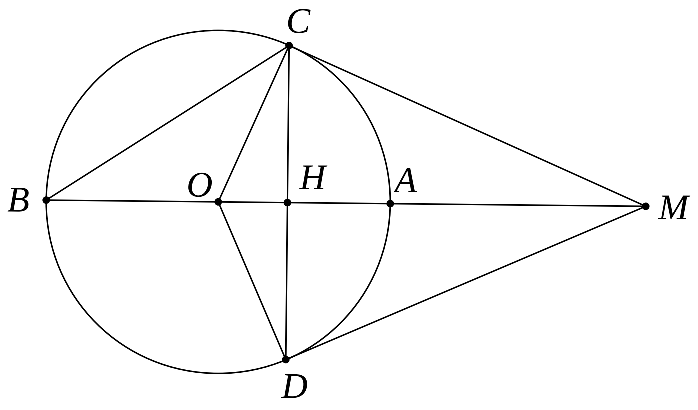
Bài 16. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ tiếp tuyến MC, MD với (O)(C, D là các tiếp điểm). MO cắt (O) lần lượt tại A và B (A nằm giữa O và M). Chứng minh:

a) Tứ giác $MCOD$ nội tiếp.

b) MO cắt CD tại H. Chứng minh $MO \perp CD$.

c) $MC^2=MH.MO=MA.MB$.

Lời giải



a) Tứ giác $MCOD$ nội tiếp.

Do MC, MD là các tiếp tuyến của (O) tại C, D nên ta có $OC \perp CM$; $OD \perp DM$.

$\Rightarrow \widehat{OCM} = 90°$; $\widehat{ODM} = 90^o$.

Tứ giác $MCOD$ có $\widehat{OCM} + \widehat{ODM} = 180^o$ mà hai góc ở vị trí đối nhau $\Rightarrow MCOD$ nội tiếp.

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $MC = MD$

$\Rightarrow M$ nằm trên đường trung trực của CD.

Mà $OC = OD \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của CD.

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của CD.

$\Rightarrow OM \perp CD$.

c) ΔOMC vuông tại C có đường cao CH nên $CM^2 = MH.MO$ (1)

ΔMAC và ΔMCB có chung $\widehat{CMB}$ và $\widehat{MCA} = \widehat{MBC}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CA}\right)$.

$\Rightarrow \Delta MCA \backsim \Delta MBC$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA.MB$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MC^2 = MH.MO = MA.MB$.

Bài 17. *(3,5 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD

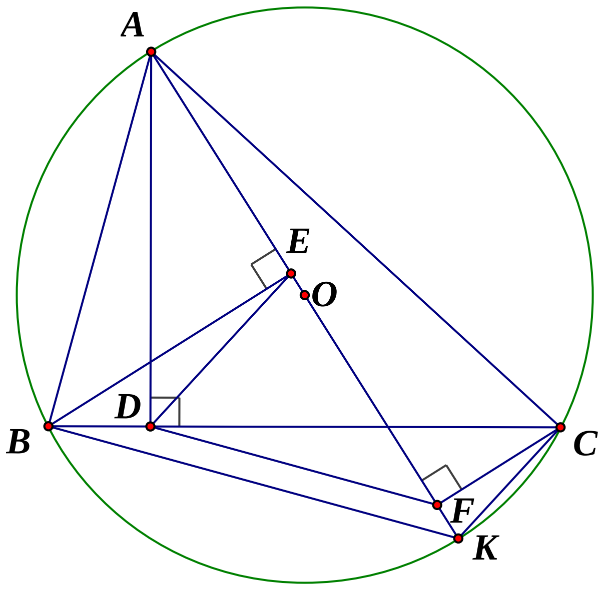
của tam giác và đường kính AK của đường tròn (O). Hạ BE, CF cùng vuông góc với AK.

a) Chứng minh: $ABDE$ và $ACFD$ là các tứ giác nội tiếp.
b) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF .

c) Chứng minh: DF vuông góc với AB.

d) Cho BC cố định và điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Lời giải



a) * $AD \perp BC, BE \perp AK, CF \perp AK$ lần lượt tại

$D, E, F \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC} = \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90°$

* Xét tứ giác $ABDE$ có:

$\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90°$ (chứng minh trên)

Mà D, E là hai đỉnh kề nhau

Nên tứ giác $ABDE$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiện nhận biết).

* Xét tứ giác $ACFD$ có:

$\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90°$ (chứng minh trên)

Mà D, F là hai đỉnh kề nhau

Nên tứ giác $ACFD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm của AC.

b) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACFD$ có:

$\widehat{ACD} = \widehat{DFA}$(Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{DFE}$

$\widehat{FAC} = \widehat{FDC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$)$\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{KAC}$

* Tứ giác $ABDE$ là tứ giác nội tiếp (chứng minh trên)

Nên $\widehat{BAE} = \widehat{EDC}$

* Ta có:

$\widehat{BAC} = \widehat{BAE} + \widehat{FAC}$

$\widehat{EDF} = \widehat{EDC} + \widehat{CDF}$

Mà $\widehat{FAC} = \widehat{DCF}$; $\widehat{BAE} = \widehat{EDC}$ (chứng minh trên)

Nên $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

Xét ΔABC và ΔDEF có:

$\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

$\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ đồng dạng ΔDEF (g – g)

c) Nối BK.

Xét đường tròn (O) đường kính AK có:

+ $\widehat{ABK}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

Nên $\widehat{ABK} = 90° \Rightarrow KB \perp AB$

+ $\widehat{KBC} = \widehat{KAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC)

Mà $\widehat{FDC} = \widehat{KAC}$ (chứng minh trên)

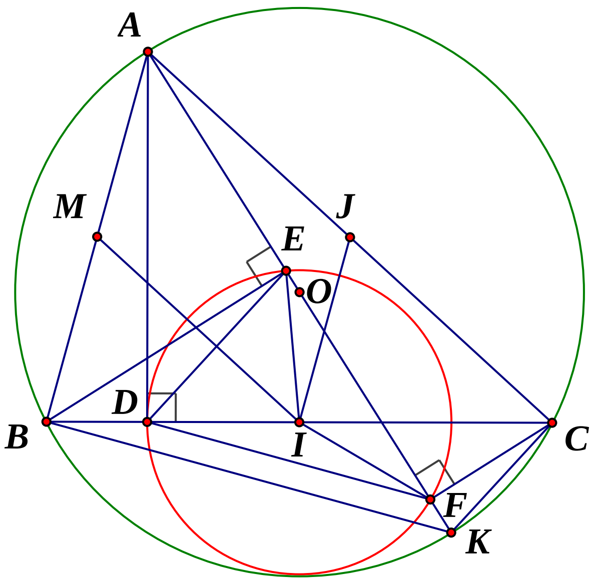
$\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{FDC}$

Mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $BK // DF$.

Mặt khác $KB \perp AB$

Do đó $DF \perp AB$.

d)



Gọi I là trung điểm của dây BC cố định $\Rightarrow$ Điểm I cố định.

Gọi J là trung điểm của dây AC.

$\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của ΔABC nên $IJ // AB$.

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp DF \\ IJ // AB \end{array}\right\} \Rightarrow IJ \perp DF$$

* J là trung điểm của dây AC

Tứ giác $ACFD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm của AC.

$\Rightarrow J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACFD$.

* Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACFD$ có:

J là tâm

DF là dây

$IJ \perp DF$

$\Rightarrow IJ$ vuông góc với DF tại trung điểm của DF.

Hay IJ là đường trung trực của $DF \Rightarrow ID = IF\ (1)$

* Nối CK.

Trong đường tròn (O), $\widehat{ACK}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{ACK} = 90°$.

Nên $CK \perp AC$.

Tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\widehat{BAE} = \widehat{EDC}$.

Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{BAK} = \widehat{BCK}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$)

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DCK}$

Mà hai góc ở vị trí so le trong nên $DE // CK$

* Ta có

$$\left.\begin{matrix} DE // CK \\ CK \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow DE \perp AC$$

* Gọi là M trung điểm của AB.

I là trung điểm của dây BC

$\Rightarrow IM$ là đường trung bình của tam giác ABC.

$\Rightarrow IM // AC$

Mà $DE \perp AC$

Nên $DE \perp IM$.

* M là trung điểm của dây AB

Tứ giác $ABDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm của AB.

$\Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$.

* Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$ có:

M là tâm

DE là dây

$DE \perp IM$.

$\Rightarrow IM$ vuông góc với DE tại trung điểm của DE.

Hay IM là đường trung trực của $DE \Rightarrow ID = IE\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có $ID = IE = IF$

Nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Bài 18. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B và C là tiếp điểm). Qua điểm A kẻ cát tuyến ANM với đường tròn (O) (M nằm giữa A và N). Gọi E là trung điểm của MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn (O) .

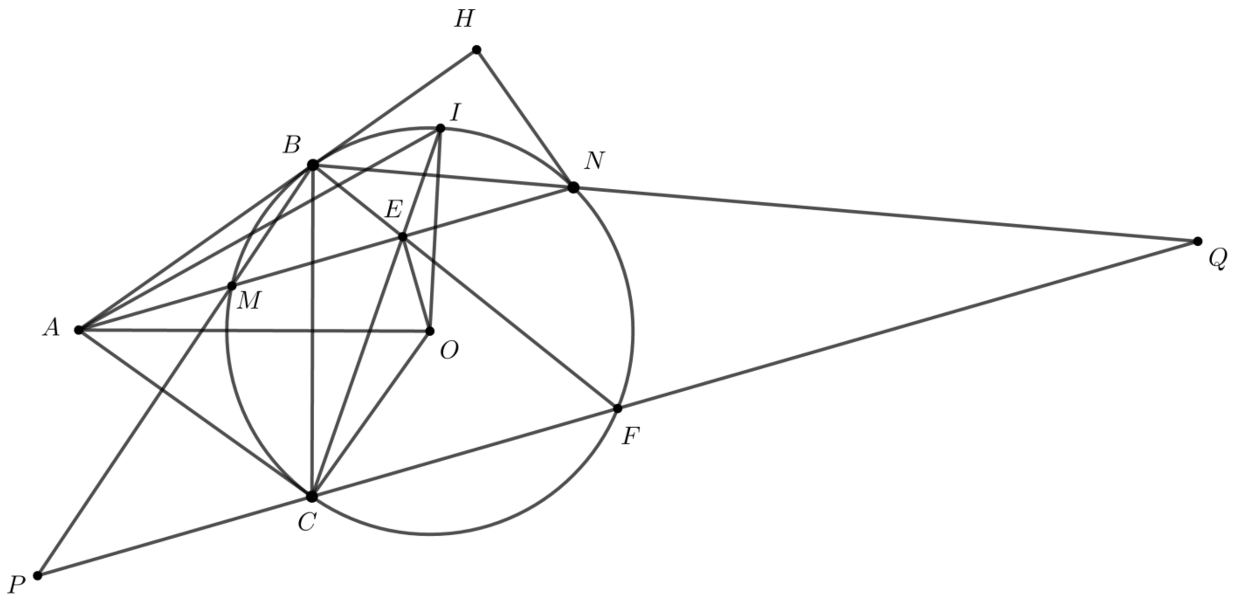
1) Chứng minh các điểm A, B, O, C, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $\widehat{AEC} = \widehat{BIC}$

3) Gọi F là giao điểm thứ hai của BE và đường tròn (O) . Đường thẳng BM cắt đường thẳng CF tại P . Đường thẳng BN cắt đường thẳng CF tại Q. Chứng minh $FP = FQ$.

4) Xác định vị trí của cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Lời giải



1)Vì AB, AC là tiếp tuyến của (O) nên :

$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$ (1)

E là trung điểm của MN

$\Rightarrow OE \perp MN$

$\Rightarrow \widehat{AEO} = 90°$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra các điểm $A, B, \text{E}, \text{O}, \text{C}$ cùng thuộc đường tròn đường kính OA(vì cùng nhìn cạnh OA dưới góc $90°$).

2) Ta có $\widehat{\text{BIC}} = \widehat{\text{ABC}}$ (cùng chắn cung BC của (O, R))

$\widehat{\text{AEC}} = \widehat{\text{ABC}}$ (cùng chắn cung AC của đường tròn đường kính AO)

Suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{BIC}$.

3) Ta có : $\widehat{BEA} = \widehat{BCA}$(cùng chắn cung AB của đường tròn đường kính AO)

$\widehat{BFC} = \widehat{BCA}$ (cùng bằng $\frac{1}{2} Sd\,\overset{\frown}{BC}$)

Suy ra : $\widehat{BFC} = \widehat{BEA}$

$\Rightarrow ME // CF$

Áp dụng hệ quả định lý Talet ta được: $\dfrac{EM}{FP}=\dfrac{BE}{BF}$

Tương tự $\dfrac{EN}{FQ}=\dfrac{BE}{BF}\Rightarrow\dfrac{EN}{FQ}=\dfrac{EM}{FP}$

Mà $EM=EN\Rightarrow FP=FQ$

4) Ta có:

$\widehat{BIC}=\widehat{AEC}(cmt)$

mà 2 góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow BI//AN\,(dhnb)$

Suy ra khoảng cách từ B,I đến AN bằng nhau

Suy ra $S_{AIN}=S_{ABN}$

Kẻ $NH\perp AB$ ta có $S_{\Delta ABN}=\dfrac{1}{2}AB.NH$

$S_{\Delta AIN}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow S_{ABN}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow NH$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có: $NH\le BN;BN\le 2R\Rightarrow NH\le 2R$

Dấu "=" xảy ra khi NH là đường kính của (O)

(H trùng với B, N trùng với K, K là giao điểm thứ hai của đường thẳng BO với đường tròn (O)).

Vậy S_{AIN} đạt giá trị lớn nhất khi cát tuyến AMN ở vị trí mà N trùng với K, ở đó K là giao điểm thứ hai của đường thẳng BO với đường tròn (O).

Bài 19. Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB=2R$. Gọi Ax là tia tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm M bất kì $(M\ne A)$, MB cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là K. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với MO tại I, AI cắt nửa đường tròn tại $C(C\ne A)$.

a) Chứng minh: Tứ giác $AIKM$ là tứ giác nội tiếp.
b) Chứng minh: ΔAKC đồng dạng với ΔMOB.
c) Qua C kẻ CH vuông góc với AB $(H\in AB)$, CH cắt MB tại N.

Chứng minh $\widehat{IKB}=\widehat{ACH}$ và $IN//$ AB.

d) Đường thẳng qua H và song song với AC cắt BI tại P. Chứng minh $NP\perp AC$.

Lời giải:

a) Chứng minh: Tứ giác $AIKM$ là tứ giác nội tiếp.

Xét (O) có $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$

Có $\widehat{AIM} = 90^\circ$ ($AI \perp MO$)

Xét tứ giác $AIKM$ có: $\widehat{AKM} = \widehat{AIM} = 90^\circ$

Mà K và I là hai đỉnh kề nhau $\Rightarrow$ $AIKM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: ΔAKC đồng dạng với ΔMOB.

Vì tứ giác $AIKM$ nội tiếp nên $\widehat{IAK} = \widehat{IMK}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

Xét (O) có $\widehat{KCA} = \widehat{KBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

hay $\widehat{KCA} = \widehat{MBO}$

Xét ΔAKC và ΔMOB có:

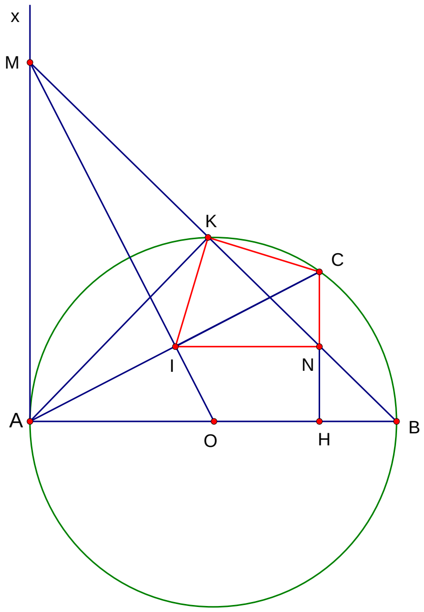
$\widehat{IAK} = \widehat{IMK}$ (cmt)

$\widehat{KCA} = \widehat{MBO}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MOB \backsim \Delta AKC$ (g.g).

c) Qua C kẻ CH vuông góc với AB $(H \in AB)$, CH cắt MB tại N.

Chứng minh $\widehat{IKB} = \widehat{ACH}$ và $IN // AB$.



Chứng minh $CH//MA$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ACH}$ (hai góc so le trong). (1)

Tứ giác $AIKM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAI} = \widehat{IKB}$ hay $\widehat{MAC} = \widehat{IKB}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{IKB} = \widehat{ACH}$

Tứ giác $IKCN$ có:

$\widehat{IKN} = \widehat{ICN}$

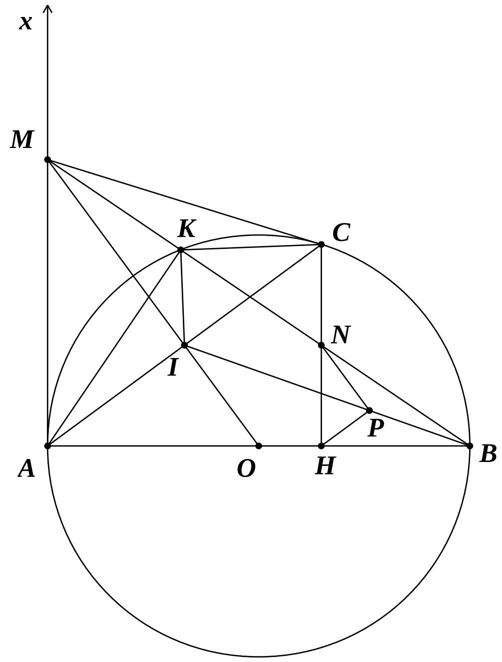
Mà K và C là hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $IKCN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KCI} = \widehat{KNI}$, mà $\widehat{KCA} = \widehat{KBA}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{KBA}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow IN// AB$

d) Đường thẳng qua H và song song với AC cắt BI tại P. Chứng minh $NP \perp AC$.



Áp dụng định lý Talet vào tam giác BAI và BAM có $PH//AI$; $MA//NH$

ta có: $\frac{BP}{PI}=\frac{BH}{HA};\frac{BH}{HA}=\frac{BN}{NM}$.

Suy ra $\frac{BP}{PI}=\frac{BN}{NM}$

Vì $\frac{BP}{PI}=\frac{BN}{NM}$. Theo định lý Talet đảo thì $PN//MI$

Mà $MI\perp AC$

Suy ra $PN\perp AC$.

Bài 20. Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. M là một điểm chuyển động trên cung nhỏ AC. Gọi I là giao điểm của BM và CD. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt tia DC tại K.

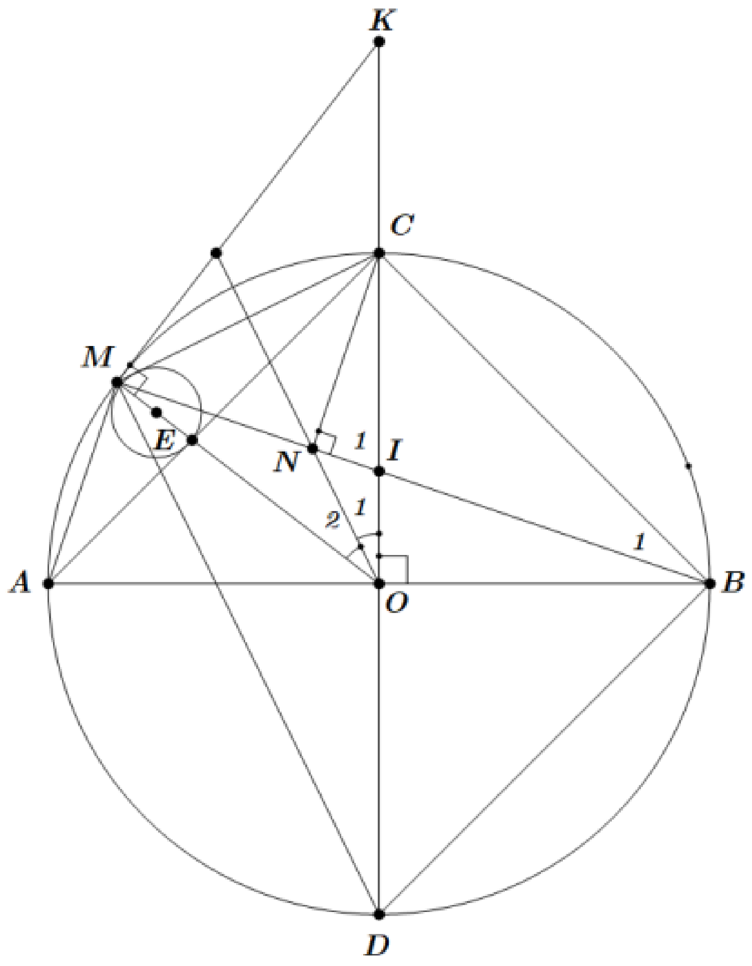
a) Chứng minh : Tứ giác $AMIO$ nội tiếp.

b) Chứng minh : $\widehat{MKD}=2\widehat{MBA}$.

c) Tia phân giác của $\widehat{MOK}$ cắt BM tại N. Chứng minh : $CN\perp MB$.

d) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ AC để bán kính đường tròn nội tiếp ΔAMC đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $AB \perp CD$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{COA} = 90°$ $\Rightarrow \widehat{IOA} = 90°$.

Xét đường tròn (O) : $\widehat{AMB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMI} = 90°$.

Xét tứ giác AMIO có : $\widehat{AMI} + \widehat{IOA} = 90° + 90° = 180°$

mà hai góc $\widehat{AMI}$ và $\widehat{IOA}$ ở vị trí đối nhau.

Suy ra, tứ giác $AMIO$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

b) Ta có MK là tiếp tuyến của (O) tại M (giả thiết) $\Rightarrow OM \perp MK$ tại M

$\Rightarrow \widehat{OMK} = 90^0$

Xét ΔOMK vuông tại M

$\Rightarrow \widehat{MKO} + \widehat{MOK} = 90°$

mà $\widehat{MOA} + \widehat{MOK} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{MKO} = \widehat{MOA}$ (1).

Mặt khác $\widehat{MOA} = 2\widehat{MBA}$ (2) (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AM}$ của (O)).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{MKO} = 2\widehat{MBA}$ hay $\widehat{MKD} = 2\widehat{MBA}$.

c) Xét (O), ta có:

$\widehat{MBC}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{MC}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{MC}$)

$\widehat{CON}=\frac{1}{2}\widehat{MOC}$ (giả thiết) $=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{MC}$ ($\widehat{MOC}$ là góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{MC}$)

$\Rightarrow \widehat{MBC}=\widehat{CON}$.

Xét tứ giác $BCNO$ có $\widehat{B_1}=\widehat{O_1}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCNO$ nội tiếp (vì có hai đỉnh kề nhau B và O cùng nhìn cạnh NC dưới một góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{CNB}=\widehat{COB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$)

mà $\widehat{COB}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{CNB}=90^0$ hay $CN\perp BM$ tại N (điều phải chứng minh).

d) Gọi E là tâm đường tròn nội tiếp ΔAMC.

Xét (O), ta có $\widehat{BMC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\frac{1}{2}.90^\circ=45^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$).

$\Rightarrow \widehat{AMC}=\widehat{AMB}+\widehat{BMC}=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

Xét ΔAMC có $\widehat{MAC}+\widehat{AMC}+\widehat{ACM}=180^0$

$\Rightarrow \widehat{MAC}+\widehat{ACM}=180^0-135^0=45^0$.

Ta có: $\widehat{EAC}=\frac{1}{2}\widehat{MAC}$ (AE là tia phân giác $\widehat{MAC}$)

$\widehat{ACE}=\frac{1}{2}\widehat{ACM}$ (CE là tia phân giác $\widehat{ACM}$)

$\Rightarrow \widehat{EAC}+\widehat{ACE}=\frac{1}{2}\left(\widehat{MAC}+\widehat{ACM}\right)=\frac{1}{2}.45^\circ=22,5^\circ$.

Xét ΔACE có $\widehat{AEC}+\widehat{EAC}+\widehat{ACE}=180^\circ \Rightarrow \widehat{AEC}=180^\circ-\left(\widehat{EAC}+\widehat{ACE}\right)=157,5^\circ$.

Mà A, C cố định nên điểm E thuộc cung chứa góc $157,5^\circ$ dựng trên đoạn thẳng AC (phần nửa mặt phẳng chứa điểm M).

Để bán kính đường tròn nội tiếp của ΔAMC đạt giá trị lớn nhất thì E phải là điểm chính giữa của cung chứa góc $157,5^\circ$ dựng trên đoạn thẳng AC.

Do đó M là điểm chính giữa trên cung nhỏ AC.

Vậy M là điểm chính giữa trên cung nhỏ AC thì bán kính đường tròn nội tiếp ΔAMC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 21. Cho $(O;R)$ và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB và AC của (O) (B, C là các tiếp điểm). Lấy $M \in (O)$ sao cho $BM\,//\,AC$. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và (O). Tia BN cắt đường thẳng AC tại I.

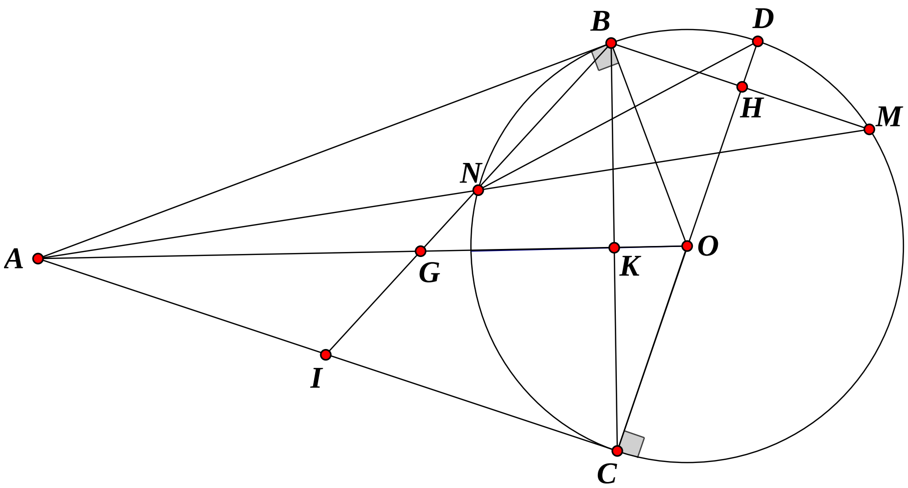
a. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b. Chứng minh $IA^2 = IN.IB$.

c. Kẻ đường kính CD của (O). Chứng minh tia ND là tia phân giác của $\widehat{BNM}$.

d. Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và BI. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo R.

Lời giải



a. Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ABO} = 90°$ (tính chất tiếp tuyến)

AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ACO} = 90°$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$, mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác $ABOC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

b. Vì $BM\,//\,AC \Rightarrow \widehat{NAI} = \widehat{NMB}$ (cặp góc so le trong)

mà $\widehat{BMN} = \widehat{ABN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng bằng chắn cung BN)

$\Rightarrow \widehat{IAN} = \widehat{ABN}$

Xét ΔIAN và ΔIBA có

$\widehat{AIN}$ chung

$\widehat{IAN} = \widehat{ABN}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta IAN \backsim \Delta IBA$ (góc - góc)

$\Rightarrow \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{IN}{IA}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow IA^2 = IN.IB$ (điều phải chứng minh)

c. Có $\begin{cases} AC \perp CD\left(cmt\right) \\ BM\,//\,AC\left(gt\right) \end{cases} \Rightarrow BM \perp CD$ (từ vuông góc đến song song)

Gọi H là giao điểm của CD và BM.

Xét $\left(O\right)$ có:

BM là dây cung

CD là đường kính

$CD \perp BM$ tại H (cách dựng)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của BM (quan hệ vuông góc đường kính và dây cung)

Và D là điểm chính giữa cung BM

$\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DM}$

Khi đó $\widehat{BND} = \widehat{DNM}$ (hệ quả góc nội tiếp)

$\Rightarrow ND$ là tia phân giác của $\widehat{BNM}$.

d.

Xét hai tam giác ΔICN và ΔIBC có:

$\widehat{NIC}$ chung

$\widehat{ICN} = \widehat{IBC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung NC)

$\Rightarrow \Delta ICN \backsim \Delta IBC$ (góc - góc) $\Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{IN}{IC} \Rightarrow IC^2 = IB.IN$

Mặt khác ta đã chứng minh được $IA^2 = IB.IN$ suy ra $IA = IC$

Mà $I \in AC \Rightarrow I$ là trung điểm của AC

Gọi K là giao điểm của AO và BC.

Vì AB và AC là 2 tiếp tuyến của $\left(O\right)$ tại B và C (giả thiết)

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow A$ thuộc trung trực của BC (1)

Lại có $OB = OC = R$ (B, C là các tiếp điểm)

$\Rightarrow O$ là trung trực của BC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow K$ là trung điểm của BC.

Xét tam giác ABC có:

BI là trung tuyến ứng với cạnh AC (do I là trung điểm của AC)

AK là trung tuyến ứng với cạnh BC (do K là trung điểm của BC)

BI giao với AK tại G

$\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC (tính chất 3 đường đồng quy)

$\Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AK$ (tính chất trọng tâm)

+ Xét tam giác ABO vuông tại B có $AO \perp BK$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AK.AO = AB^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) $\Rightarrow AK = \dfrac{AB^2}{AO}$

Mà

$$\begin{cases} AB^2 = AO^2 - OB^2 = (3R)^2 - R^2 = 8R^2 \\ OA = 3R(gt) \end{cases} \Rightarrow AK = \frac{8R^2}{3R} = \frac{8R}{3}$$

$\Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}.\dfrac{8R}{3} = \dfrac{16R}{9}$ đơn vị độ dài)

Bài 22. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MNP ($MN < MP$) đến (O) ($A, B, N, P \in (O)$). Kẻ $OK \perp NP$ tại K

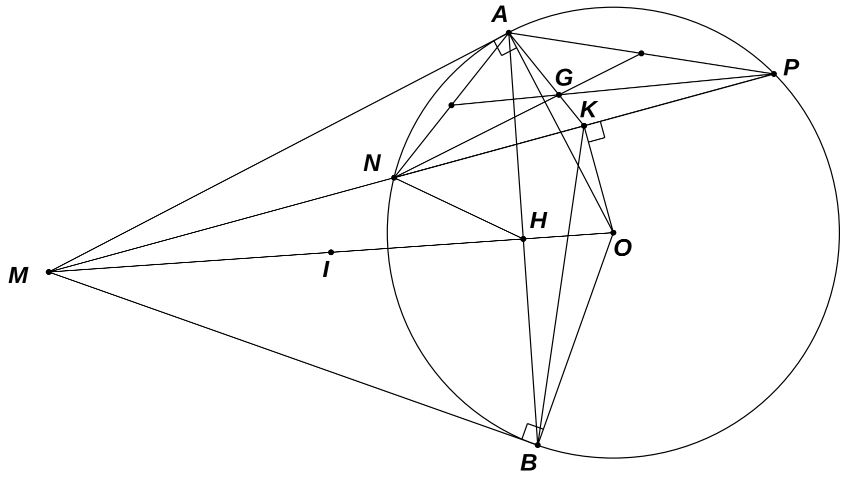
a) Chứng minh các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh KM là tia phân giác góc $\widehat{AKB}$.

c) Chứng minh $MN.MP = MA^2$. Gọi H là giao điểm của OM với AB, chứng minh bốn điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn.

d) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Chứng minh các điểm M , A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

MA là tiếp tuyến của (O) tại M nên ΔMAO vuông tại A.

Gọi I là trung điểm của cạnh OM

Suy ra $IA = IM = IO$ $\quad (1)$

Tương tự ta có $IM = IB = IO$ $\quad (2)$

PN là dây của (O); $OK \perp NP$ tại $K\left(K \neq O\right)$ suy ra $\widehat{OKN} = 90^0$.

Xét ΔMKO vuông tại K.

Gọi I là trung điểm của cạnh OM .

Suy ra $IA = IM = IO$ $\quad (3)$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $IA = IM = IO = IB = IK \Rightarrow 5$ điểm M, O, A, K, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh KM là tia phân giác góc $\widehat{AKB}$.

Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Xét đường tròn (I) có dây $MA = MB$ (chứng minh trên) nên $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$

Xét tứ giác $MAKB$ có bốn đỉnh M, A, K, B cùng thuộc một đường tròn, do đó tứ giác $MAKB$ nội tiếp được trong một đường tròn

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{AKM} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{MA} \\ \widehat{BKM} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{MB} \\ \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{BKM} \Rightarrow KM \text{ là tia phân giác } \widehat{AKB}$$

c) Chứng minh $MN.MP = MA^2$. Gọi H là giao điểm của OM với AB, chứng minh bốn điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Xét ΔMNA và ΔMAP có

$\widehat{AMN}$ chung

$\widehat{MAN} = \widehat{MPA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$ của đường tròn (O))

$\Rightarrow \Delta MNA \backsim \Delta MAP\,(g.g) \Rightarrow \frac{MN}{MA} = \frac{MA}{MP} \Rightarrow MN.MP = MA^2\ (4)$ (điều phải chứng minh).

Xét ΔMAO vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow MA^2 = MH.MO\ (5)$ (hệ thức liên hệ trong tam giác vuông)

Từ (4) và (5) ta có: $MN.MP = MH.MO \Rightarrow \frac{MN}{MO} = \frac{MH}{MP}$

Xét ΔMNH và ΔMOP có $\widehat{M}$ chung, $\frac{MN}{MO} = \frac{MH}{MP} \Rightarrow \Delta MNH \backsim \Delta MOP\,(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{MNH} = \widehat{MOP}$ (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác $NHOP$ có $\widehat{MNH} = \widehat{MOP}$ mà 2 góc ở vị trí góc ngoài tứ giác bằng góc trong của đỉnh đối diện $\Rightarrow$ tứ giác $NHOP$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

d) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Gọi G là trọng tâm ΔANP $\Rightarrow \frac{AG}{AK} = \frac{2}{3}$

Gọi T là trọng tâm ΔAMO

Ta có $\frac{AT}{AI} = \frac{AG}{AK} = \frac{2}{3} \Rightarrow TG // IK \Rightarrow \frac{TG}{IK} = \frac{2}{3} \Rightarrow TG = \frac{2}{3} IK = \frac{2}{3} IO$

Mà T, I, O cố định $\Rightarrow G$ luôn thuộc đường tròn $\left(\mathrm{I}; \frac{2}{3} IO\right)$ khi cát tuyến MNP thay đổi

Bài 23. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định không đi qua O. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho ΔABC nhọn và $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

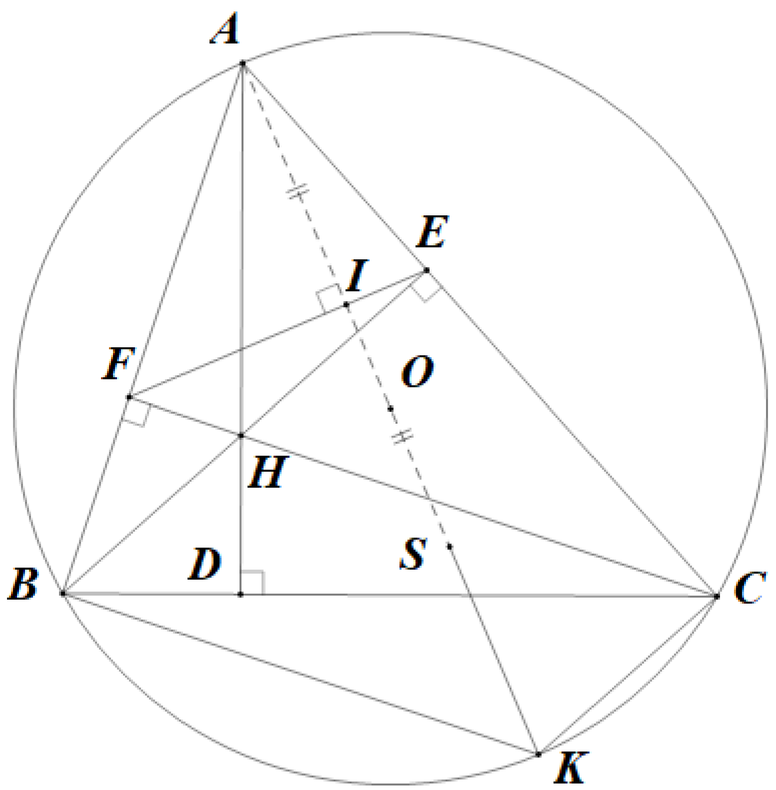
1) Chứng minh tứ giác: $BFEC$ nội tiếp.

2) Kẻ đường kính AK của (O). Chứng minh: $AB.AC = AD.AK$.

3) Tính độ dài cung nhỏ BC và diện tích hình quạt tròn BOC (ứng với cung nhỏ BC) trong trường hợp $R = 3$ cm và $\widehat{BAC} = 60°$, lấy $\pi \approx 3{,}14$ (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

4) Gọi S là điểm đối xứng với A qua EF. Chứng minh ba điểm A; O; S thẳng hàng.

Lời giải



1) Xét tứ giác $BFEC$ có:

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$ nên F, E nằm trên đường tròn đường kính BC (Quỹ tích cung chứa góc)

$\Rightarrow BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

2) Chứng minh: $AB.AC = AD.AK$.

Xét (O) có $\widehat{AKB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB) nên $\widehat{AKB} = \widehat{ACD}$

Xét ΔABK và ΔADC

Có: $\widehat{ABK}=\widehat{ADC}=90^\circ$

$\widehat{AKB}=\widehat{ACD}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABK \backsim \Delta ADC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AK}{AC}\Rightarrow AB\cdot AC=AD\cdot AK$

3) $\widehat{BAC}=60^o \Rightarrow \widehat{BOC}=120^\circ$ (tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BC)

Độ dài cung nhỏ BC là: $l=\dfrac{\pi Rn^\circ}{180^\circ}=\dfrac{3,14\cdot 3\cdot 120^\circ}{180^\circ}=6,28$ (cm)

Diện tích hình quạt tròn BOC là: $S=\dfrac{\pi R^2 n}{360}=\dfrac{3,14\cdot 3^2\cdot 120}{360}=9,42$ (cm^2)

4) Chứng minh ba điểm $A;O;S$ thẳng hàng.

Gọi I là giao điểm của AK và EF

Ta có: $\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$, $\widehat{KAC}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CK}$ $\Rightarrow \widehat{ABC}+\widehat{KAC}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AK}=\dfrac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$

Mà $\widehat{ABC}=\widehat{FEA}$ (vì cùng bù với $\widehat{FEC}$)

Từ đó suy ra: $\widehat{FEA}+\widehat{KAC}=90^\circ$ hay $\widehat{IEA}+\widehat{IAE}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AIE}=90^\circ$

$\Rightarrow AK\perp EF$ tại I hay $\Rightarrow AO\perp EF$ (1)

Mặt khác S là điểm đối xứng với A qua EF

$\Rightarrow EF$ là đường trung trực của đoạn thẳng $AS \Rightarrow EF\perp AS$ (2)

Từ (1) và (2) AO, AS cùng thuộc một đường thẳng hay A; O; S thẳng hàng.

Bài 24. Cho (O) và một dây BC cố định không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy một điểm A bất kì. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN tới (O) (M, N là các tiếp điểm). MN cắt các đường AO và BC lần lượt ở H và K. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: Bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn.

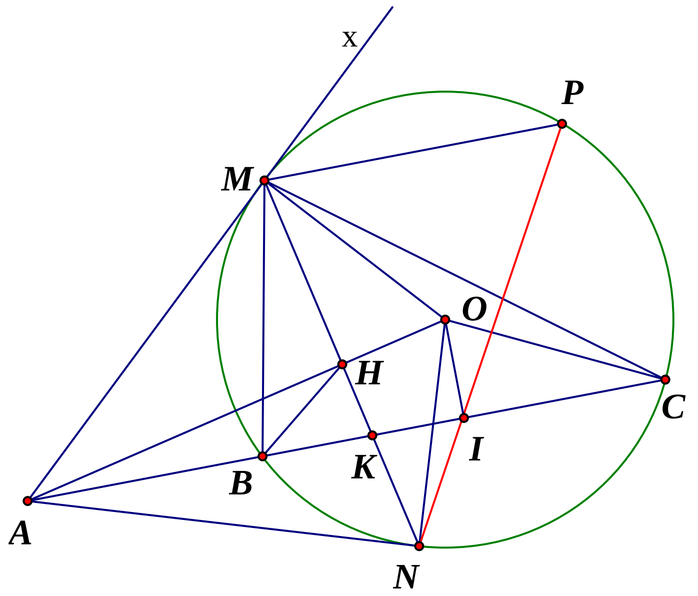
b) Chứng minh: Tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

c) Vẽ dây $MP//\mathrm{BC}$. Chứng minh: N, I, P thẳng hàng.

d) Khi A chuyển động trên tia đối của tia BC, chứng minh trọng tâm ΔMBC chạy trên một đường tròn cố định.

.

Lời giải



a) Chứng minh: Bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn.

Xét tứ giác $AMON$ có: $\widehat{AMO}=90^\circ$, $\widehat{ANO}=90^\circ$ (vì AM, AN là tiếp tuyến của (O) và M, N là các tiếp điểm)

$\Rightarrow \widehat{AMO}+\widehat{ANO}=180^\circ$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $AMON$ nội tiếp một đường tròn (DHNB tứ giác nội tiếp)

Vậy bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh: Tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

+ Xét ΔAMB và ΔACM có: $\widehat{A}$ chung, $\widehat{AMB}=\widehat{ACM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MB)

$\Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta ACM\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AC}{AM} \Rightarrow AM^2=AB.AC$

Mà $AM^2=AH.AO$ (hệ thức lượng trong ΔAMO vuông tại O, đường cao AH)

$\Rightarrow AB.AC=AH.AO \Rightarrow \dfrac{AB}{AH}=\dfrac{AO}{AC}$

+ Xét ΔAHB và ΔACO có: $\widehat{CAO}$ chung; $\dfrac{AB}{AH}=\dfrac{AO}{AC}\,(cmt)$

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta ACO\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AHB}=\widehat{ACO}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AHB}+\widehat{BHO}=180^\circ\,(kb) \Rightarrow \widehat{BCO}+\widehat{BHO}=180^\circ$

Mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $BHOC$ nội tiếp một đường tròn.

c) Vẽ dây $MP//\text{BC}$. Chứng minh: N, I, P thẳng hàng.

+ Xét tứ giác $AOIN$ có : $\widehat{AIO}=90^\circ$ (vì $OI\perp BC$ - Quan hệ đường kính dây cung)

$\widehat{ANO}=90^\circ$ (vì AN là tiếp tuyến của (O) và N là tiếp điểm)

$\Rightarrow \widehat{AIO}+\widehat{ANO}=180^\circ$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $AOIN$ nội tiếp một đường tròn (DHNB tứ giác nội tiếp) hay bốn điểm A, I, O, N cùng thuộc một đường tròn.

Mà bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn

Nên năm điểm A, M, O, N, I cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{MNI}=\widehat{MAI}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MI)

Mà $\widehat{xMP}=\widehat{MAI}$ (hai góc đồng vị của $MP//\text{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{MNI}=\widehat{xMP}$

Mà $\widehat{MNP}=\widehat{xMP}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MP)

$\Rightarrow \widehat{MNI}\equiv\widehat{MNP}$ hay ba điểm N, I, P thẳng hàng.

d) Khi A chuyển động trên tia đối của tia BC, chứng minh trọng tâm ΔMBC chạy trên một đường tròn cố định.

+) Trên cạnh MI lấy điểm G sao cho $IG=\frac{1}{3}MI$, khi đó, G là trọng tâm của ΔMBC

+) Lấy $F\in IC$ sao cho $IF=\frac{1}{3}IC$ suy ra điểm F cố định.

Lấy $E\in IB$ sao cho $IE=\frac{1}{3}IB$ suy ra điểm E cố định

+) Ta có $\frac{IG}{IM}=\frac{FI}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow GF//MC$ (ĐL Talet đảo)

và $\frac{IG}{IM}=\frac{EI}{IB}=\frac{1}{3}\Rightarrow GE//MB$

$\Rightarrow \widehat{EGF}=\widehat{BMC}$ không đổi.

Khi đó điểm G luôn nhìn cạnh FE cố định dưới một góc không đổi nên G thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta G\text{EF}$

Vậy A chuyển động trên tia đối của tia BC, trọng tâm G của ΔMBC luôn chạy trên đường tròn cố định là đường đường tròn ngoại tiếp $\Delta G\text{EF}$.

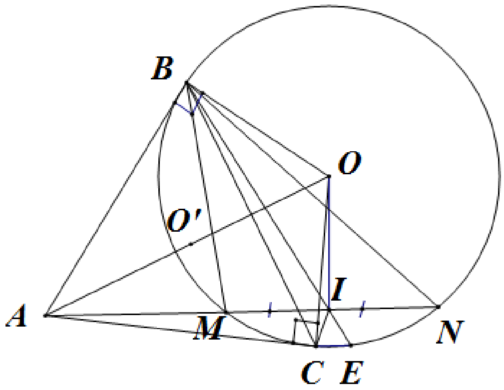
Bài 25. Cho đường tròn $(O;R)$, dây MN $(MN<2R)$. Trên tia đối của tia MN lấy điểm A. Từ A kẻ tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm).

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn. Chỉ rõ tâm O' và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$.

b) Chứng minh $AB^2 = AC^2 = AM.AN$

c) Gọi I là trung điểm của MN. Kẻ BI cắt (O) tại E. Chứng minh $EC // AN$.

Lời giải



a) Xét (O) có: $AB \perp OB$, $AC \perp OC$ (AB, AC là tiếp tuyến).

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} = 90^0 \left(AB \perp OB\right)$; $\widehat{ACO} = 90°\left(AC \perp OC\right)$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABOC$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng $180°$)

Tâm O' là trung điểm của AO và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ là $\dfrac{AO}{2}$.

b) Xét (O) có: AB, AC là tiếp tuyến cắt nhau tại A

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 \;\; (1)$

Xét (O) có $\widehat{ABM} = \widehat{ANB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung bằng nhau).

Xét ΔABM và ΔANB có $\widehat{ABM} = \widehat{ANB}$ (chứng minh trên); $\widehat{BAN}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ANB$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AM}{AB}$ (tính chất).

$\Rightarrow AB^2 = AM.AN \;\; (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AB^2 = AC^2 = AM.AN$ (điều phải chứng minh).

Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 = MH \cdot MO = ME \cdot MD$ (điều phải chứng minh).

$\Rightarrow \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{ME}{MO}$ (tính chất tỉ lệ thức).

$\widehat{HME}$ chung

$\dfrac{MH}{MD} = \dfrac{ME}{MO}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{ODM}$ (hai góc tương ứng).

c) Xét (O) có I là trung điểm của dây MN $(MN < 2R)$

$\Rightarrow OI \perp MN$ (liên hệ đường kính và dây).

$\Rightarrow \widehat{OIA} = 90°$

$\Rightarrow I \in (O')$

Xét (O') có $\widehat{ACB} = \widehat{AIB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB). (3)

Xét (O) có $\widehat{ACB} = \widehat{CEB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung bằng nhau). (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{CEB} = \widehat{AIB}$

Mà hai góc trên ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow EC//$ AN (dhnb hai đường thẳng song song).

Bài 26. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ đường kính AK. Ba đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên AK.

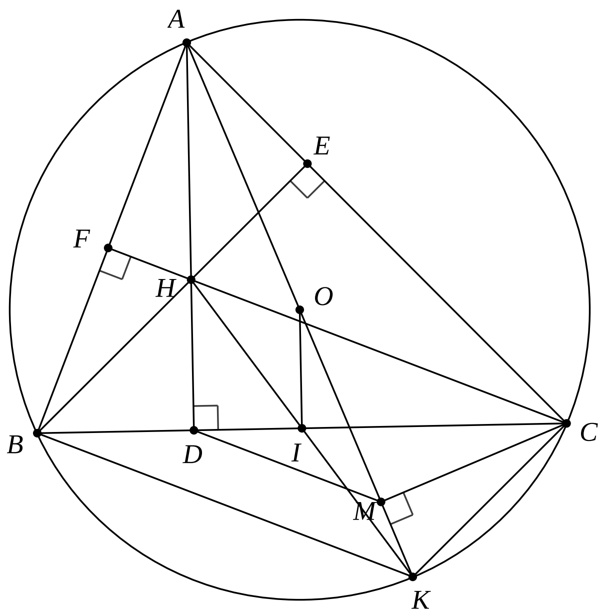
a) Chứng minh: tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Chứng minh: ΔABD đồng dạng ΔAKC và $AB.AC = 2R.AD$.

c) Chứng minh MD song song với BK

d) Giả sử BC là dây cố định của đường tròn (O) còn A di động trên cung lớn BC . Tìm vị trí của điểm A để diện tích ΔAEH lớn nhất.

Lời giải



a) Xét ΔABC có AD, BE, CF là các đường cao

$\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEB} = 90° \Rightarrow \widehat{AEH} = 90°$

$\Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFC} = 90° \Rightarrow \widehat{AFH} = 90°$

Xét tứ giác $AEHF$ có:

$\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180°$

Mà $\widehat{AEH}$; $\widehat{AFH}$ là 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

b) xét (O) có:

$\widehat{ACK} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Xét ΔABD và ΔAKC có:

$\widehat{ADB} = \widehat{ACK} \left(= 90°\right)$

$\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AKC \left(g - g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AD}{AC} \Leftrightarrow AB.AC = AD.AK \Leftrightarrow AB.AC = 2R.AD$.

c) Xét (O) có:

$\widehat{ACB} = \widehat{AKB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Ta có $MC \perp AK \Rightarrow \widehat{CMA} = 90°$

Xét tứ giác $ACMD$ có:

$\widehat{AMC} = \widehat{ADC}\ (= 90°)$

Mà M, D là hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACMD$ có:

$\widehat{AMD} = \widehat{ACD}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AKB}$

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow MD \parallel BK$.

d) Gọi I là trung điểm của BC

Ta có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ CK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel CK$

$\begin{cases} CH \perp AB \\ BK \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel BK$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCK$ là hình bình hành. I là trung điểm $BC \Rightarrow$ I là trung điểm HK

Ta có I là trung điểm HK, O là trung điểm AK $\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔAHK

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}AH$

Mà OI không đổi $\Rightarrow AH$ không đổi

$S_{\Delta AHE} = \frac{1}{2}AE.EH \le \frac{AE^2 + EH^2}{4} \Rightarrow S_{\Delta AHE} \le \frac{AH^2}{4}$

$\Rightarrow$ diện tích S_{AHE} lớn nhất khi $AE = EH$ $\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{ACB} = 45°$

Vậy A thuộc cung lớn BC sao cho $\widehat{ACB} = 45°$ thì diện tích ΔAHE đạt giá trị lớn nhất.

Bài 27. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O).Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B và C là các tiếp điểm).

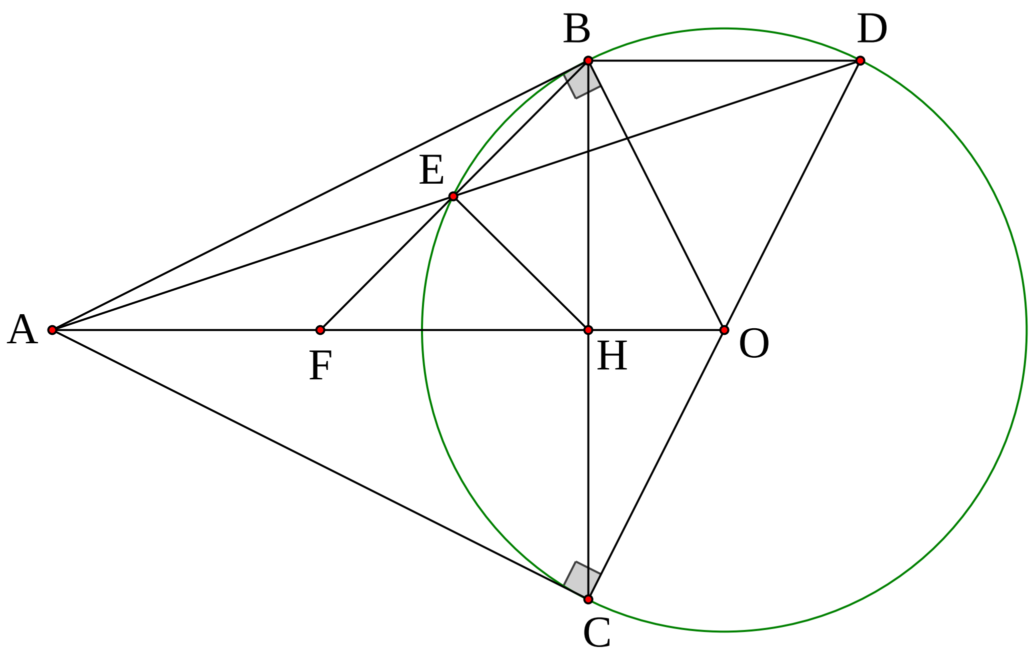
a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

b) Đường thẳng CO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E; đường thẳng BE cắt AO tại F; H là giao điểm của AO và BC.

Chứng minh: $AE.AD = AH.AO = AB^2$ và HE vuông góc với BF.

c) Chứng minh: $\dfrac{HC^2}{AF^2 - EF^2} - \dfrac{DE}{AE} = 1$

Lời giải



a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn

Ta có: $\widehat{AOB} = 90°$ (Vì AB là tiếp tuyến tại B của (O))

$\widehat{AOC} = 90°$ (Vì AC là tiếp tuyến tại C của (O))

Suy ra: $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 90° + 90° = 180°$

Lại có: $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AOC}$ là hai góc đối nhau trong tứ giác $ABOC$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO.

b)

+) Xét tam giác AOB $\left(\widehat{ABO} = 90°\right)$ có:

$BH \perp AO$ (2 tiếp tuyến AB, AC cắt nhau tại A)

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (1)

+) Xét ΔAEB và ΔABD có:

$\widehat{BAE}$: góc chung

$\widehat{BDA} = \widehat{ABE}$ ($\widehat{BDA}$ là góc nội tiếp và $\widehat{ABE}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, hai góc này cùng chắn cung BE)

Suy ra $\Delta AEB \backsim \Delta ABD\left(g-g\right)$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AD}$

$\Rightarrow AB^2 = AE.AD\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $AE.AD = AH.AO = AB^2$.

+) Ta có : $AE.AD = AH.AO \Rightarrow \frac{AE}{AO}=\frac{AH}{AD}$

Xét ΔAEH và ΔAOD có:

$\widehat{EAH}$: góc chung.

$\frac{AE}{AO}=\frac{AH}{AD}$

Suy ra $\Delta AEH \backsim \Delta AOD\left(c-g-c\right)$

$\Rightarrow \widehat{AEH}=\widehat{AOD}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AEH}+\widehat{DEH}=180^\circ$ (kề bù)

$\widehat{AOD}+\widehat{AOC}=180^\circ$ (kề bù)

Suy ra $\widehat{DEH}=\widehat{HOC}$ $\quad\left(3\right)$

+) Ta có: $\widehat{BED}=\widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) $\left(4\right)$

+) Lại có: $OB = OC; AB = AC$

OA là đường trung trực của BC

$\Rightarrow OH \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{HOC}+\widehat{HCO}=90^\circ\ \left(5\right)$

Từ $\left(3\right),\left(4\right),\left(5\right)$ suy ra

$\Rightarrow HE \perp BF$

c) Chứng minh: $\frac{HC^2}{AF^2-EF^2}-\frac{DE}{AE}=1$

+) Xét ΔBHF vuông tại H có $HE \perp BF$

$\Rightarrow HF^2 = FE.FB$. $\left(6\right)$

+) Ta có $\widehat{BAH}+\widehat{ABH}=90^\circ$ (ΔAHB vuông tại H)

$\widehat{BDC}+\widehat{BCD}=90^\circ$ (ΔDBC vuông tại B)

Mà $\widehat{BDC}=\widehat{ABC}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BC)

$\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{BCD}$

Lại có $\widehat{BCD}=\widehat{BED}$

$\widehat{BED}=\widehat{AEF}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{BAF}$

Xét ΔAFB và ΔEFA có:

$\widehat{EFA}$ góc chung

$\widehat{AEF} = \widehat{BAF}$

Suy ra $\Delta AFB \backsim \Delta EFA(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{FE} = \dfrac{FB}{AF} \Rightarrow AF^2 = FE.FB\ (7)$

Từ (6), $(7) \Rightarrow HF = AF$

Chứng minh $HC^2 = HB^2 = BE.BF$

$\Rightarrow AF^2 - EF^2 = HF^2 - EF^2 = HE^2 = EB.EF$

$\Rightarrow \dfrac{HC^2}{AF^2 - EF^2} = \dfrac{BE.BF}{BE.EF} = \dfrac{BF}{EF}$

+) Ta có: $\left.\begin{matrix} DB \perp BC \\ AH \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow DB\ //\ AH$

$\Rightarrow \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{BE}{EF}$ (Định lý Ta let)

$\Rightarrow \dfrac{HC^2}{AF^2 - EF^2} - \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{BF}{EF} - \dfrac{BE}{EF} = \dfrac{BF - BE}{EF} = \dfrac{EF}{EF} = 1$

Bài 28. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm M thuộc cung nhỏ BD sao cho $\widehat{BOM} = 30°$. Gọi N là giao điểm của CM và OB. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt OB, OD kéo dài lần lượt tại E và F. Đường thẳng qua N và vuông góc với AB cắt EF tại P.

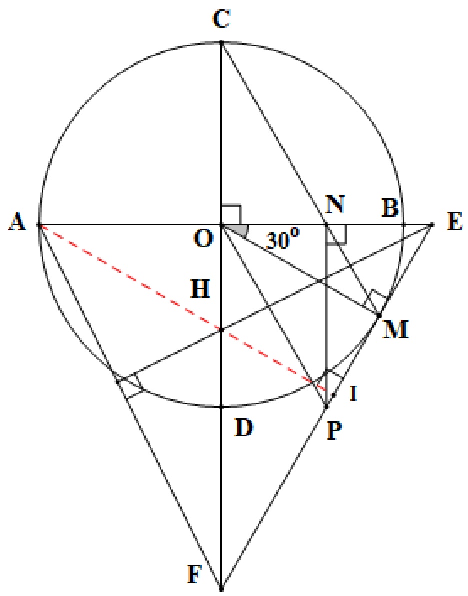
a) Chứng minh: $OMNP$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ΔEMN là tam giác đều.

c) Chứng minh $CN = OP$.

d) Gọi H là trực tâm của ΔAEF. Hỏi 3 điểm A, H, P có thẳng hàng không? Vì sao?

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ONP} = 90°$ (vì $NP \perp AB$)

$\widehat{OMP} = 90°$ (EF là tiếp tuyến của (O))

Xét tứ giác $OPMN$ có $\widehat{ONP} = \widehat{OMP} (= 90°)$

$\Rightarrow$ M, N là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh OP dưới hai góc bằng nhau

$\Rightarrow$ $OPMN$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

b) Vì ΔOEM vuông tại M nên $\widehat{OEM} + \widehat{EOM} = 90°$. Do đó $\widehat{OEM} = 60°$

sđ $\overparen{BM} = \widehat{BOM} = 30°$

$\widehat{ENM}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên:

$$\widehat{ENM} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overparen{BM} + sđ\,\overparen{CO}\right) = \frac{1}{2}(60° + 90°) = 60°$$

ΔEMN có $\widehat{ENM} = \widehat{OEM} = 60°$ nên ΔEMN là tam giác cân có một góc bằng $60°$

$\Rightarrow$ ΔEMN là tam giác đều.

c) Vì $OPMN$ là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$\widehat{ENM} = \widehat{OPM}$ (góc ngoài tại đỉnh N bằng góc trong đối diện đỉnh đó).

Mà $\widehat{ENM} = \widehat{EMN}$ (ΔEMN đều)

$\Rightarrow$ $\widehat{EMN} = \widehat{OPM}$.

Hai góc ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow CM // OP$ $\Rightarrow CN // OP$ (1)

Lại có: $\Rightarrow CO // NP$ (cùng vuông góc với OB) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $COPN$ là hình bình hành

$\Rightarrow CN = OP$ (đpcm)

c) Gọi I là chân đường cao kẻ từ A đến EF khi đó $H \in AI$.
Giả sử A, H, P thẳng hàng thì $P \equiv I$ hay $AP \perp EF$.

Suy ra $AP // OM$.

Có $MN // OP$ (cmt) nên $\widehat{EOP} = \widehat{ENM} = 60°$ (đồng vị)

Do đó ΔOPE là tam giác đều (vì $\widehat{EOP} = \widehat{OEP} = 60°$).

OM là đường cao của ΔOPE

Suy ra OM là trung tuyến $\Rightarrow$ M là trung điểm của EP.

Xét ΔAEP có $OM // AP$; M là trung điểm của EP nên O là trung điểm của AE

hay $OA = OE$ (vô lí).

Vậy A, H, P không thẳng hàng.

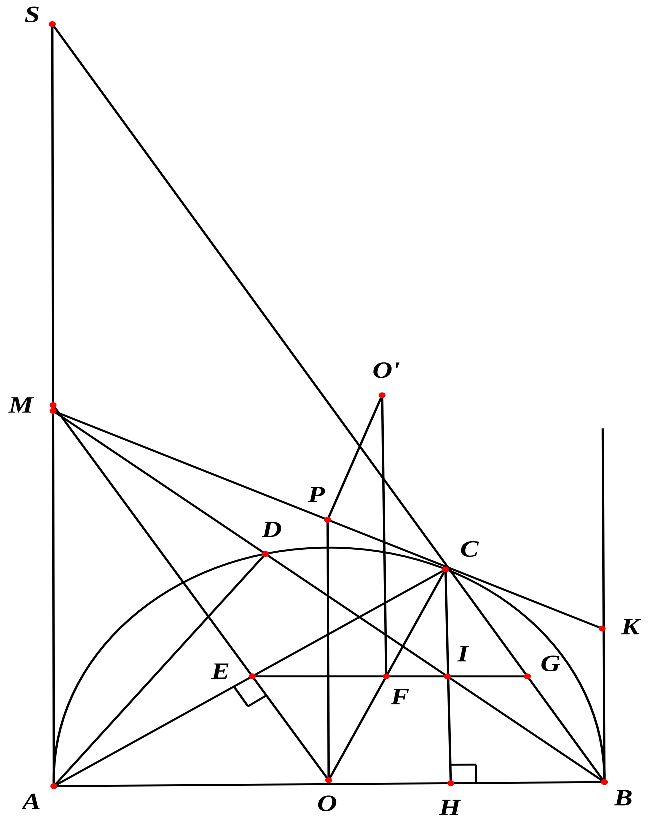
Bài 29. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C khác A và B; $CA > CB$). Kẻ d là tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (O). Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại E. Tia OE cắt d tại M. Đoạn thẳng MB cắt (O) tại điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh tứ giác $AMDE$ nội tiếp.

b) Kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là giao điểm của CH và MB. Đường thẳng BC cắt d tại S. Chứng minh $MA = MS = MC$ và IE vuông góc với AM.

c) Đường thẳng EI cắt CB tại G. Tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) cắt đường thẳng CM tại K. Chứng minh khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MEG đến MK không đổi.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMDE$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{ADB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow \widehat{ADM}=90^\circ$

Và $OM\perp AC$ tại E nên $\widehat{MEA}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADM}=\widehat{MEA}=90^\circ$, suy ra hai đỉnh D và E cùng nhìn cạnh AM dưới một góc 90°.

Vậy tứ giác $AMDE$ nội tiếp.

b)

* Chứng minh $MA=MS=MC$

<u>Cách 1</u>

Ta có $OE\perp AC$ tại E nên E là trung điểm của AC

Suy ra OE là đường trung trực của AC, hay OM là đường trung trực của AC

$\Rightarrow MA=MC\ (*)$

$\Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{MCA}\ (1)$

Ta lại có $\widehat{ACB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{SCA}=90^\circ$

$$\widehat{MCS}+\widehat{MCA}=\widehat{SCA}=90^\circ\ (2)$$

$$\widehat{MSC}+\widehat{MAC}=90^\circ\ (\Delta SAC \text{ vuông tại } C)(3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MCS}=\widehat{MSC}\Rightarrow \Delta MSC$ cân tại M $\Rightarrow MS=MC\ (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $MA = MS = MC$

Cách 2

Ta có $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow AC \perp BS$

Mà $AC \perp OM$ (giả thiết) nên suy ra $OM // BS$

Xét ΔABS có $\begin{cases} OM // BS \\ AO = OB \end{cases} \Rightarrow AM = MS\ (4)$

$\widehat{ACB} = 90° \Rightarrow \widehat{SCA} = 90°$

Xét ΔASC vuông tại C có CM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AS

$\Rightarrow CM = \frac{1}{2}AS\ (5)$

Từ (4) và (5) suy ra $MA = MS = MC$.

* Chứng minh IE vuông góc với AM.

Ta có : $CH \perp AB$ (giả thiết)

$SA \perp AB$ (do d là tiếp tuyến tại A của nửa (O))

$\Rightarrow CH // SA$

Xét ΔBSM có $CI // SM$ suy ra $\frac{CI}{SM} = \frac{BI}{BM}\ (6)$

Xét ΔBAM có $HI // AM$ suy ra $\frac{HI}{AM} = \frac{BI}{BM}\ (7)$

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{CI}{SM} = \frac{HI}{AM}$

Mà $SM = AM$ (chứng minh trên) nên $CI = HI$

Xét ΔCAH có $\begin{cases} CI = HI \\ CE = EA \end{cases} \Rightarrow IE // AH$

Mà $AH \perp AM$ nên $IE \perp AM$ (điều phải chứng minh).

c) Chứng minh khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MEG đến MK không đổi..

Gọi P là trung điểm của MK.

Xét ΔMAO và ΔMCO có:

$MA = MC$ (chứng minh trên)

MO: cạnh chung

$AO = CO\ (= R)$

$\Rightarrow \Delta MAO = \Delta MCO$ (c – c – c)

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MCO}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{MAO} = 90°$ nên $\widehat{MCO} = 90°$

$\Rightarrow MC \perp OC$ hay $MK \perp OC$ tại C

$\Rightarrow MK$ là tiếp tuyến của nửa (O) tại C.

Mà BK là tiếp tuyến của nửa (O) tại B nên $\Rightarrow KB = KC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \Delta KBC$ cân tại K.

Vì IE // AB (chứng minh trên) nên EG // AB

Xét ΔCAB có $\begin{cases} CE = EA \\ EG \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow CG = GB \Rightarrow G$ là trung điểm của CB.

$\Rightarrow \Delta KBC$ cân tại K có KG là đường trung tuyến nên KG cũng là đường cao.

$\Rightarrow KG \perp BC \Rightarrow \widehat{KGC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{GKC} + \widehat{KCG} = 90°$ hay $\widehat{GKM} + \widehat{KCB} = 90°$ (8)

Ta lại có: $\widehat{ACB} = 90° \Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{CAB} = 90°$ (9)

Mà $\widehat{KCB} = \widehat{CAB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CB}$) (10)

Từ (8), (9) và $(10) \Rightarrow \widehat{GKM} = \widehat{CBA}$ (11)

Mặt khác: EG // $AB \Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{CGE}$ (hai góc đồng vị) (12)

OM //BS (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{CGE} = \widehat{GEO}$ (hai góc so le trong) (13)

Từ (11), (12) và (13) suy ra $\widehat{GKM} = \widehat{GEO} \Rightarrow$ tứ giác $MEGK$ nội tiếp.

Gọi F là giao điểm của CO và EG

Xét ΔCAO có EF // $AO \Rightarrow \dfrac{EF}{AO} = \dfrac{CF}{CO}$ (14)

Xét ΔCOB có FG // $OB \Rightarrow \dfrac{CF}{CO} = \dfrac{FG}{OB}$ (15)

Từ (14) và $(15) \Rightarrow \dfrac{EF}{AO} = \dfrac{FG}{OB}$

Mà $AO = OB$ nên $EF = FG \Rightarrow F$ là trung điểm của EG.

Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMEG.

$\Rightarrow$ tứ giác $MEGK$ nội tiếp (O')

$\Rightarrow O'M = O'E = O'G = O'K$

$\Rightarrow \Delta O'MK$ cân tại $O' \Rightarrow O'P$ là đường trung tuyến cũng là đường cao .

$\Rightarrow O'P \perp MK$ ($O'P$ là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMEG đến MK)

Mà $OC \perp MK$ nên $\Rightarrow O'P // OC \Rightarrow O'P // OF$ (16)

Và $\Delta O'EG$ cân tại $O' \Rightarrow O'F$ là đường trung tuyến cũng là đường cao $\Rightarrow O'F \perp EG$ (17)

Ta lại có $\begin{cases} MA \perp AB \\ KB \perp AB \end{cases} \Rightarrow MA // KB \Rightarrow$ tứ giác $ABKM$ là hình thang.

Xét hình thang $ABKM$ có $\begin{cases} AO = BO \\ MP = PK \end{cases} \Rightarrow OP$ là đường trung bình của hình thang $ABKM$

$\Rightarrow OP // AM$, mà $IE \perp AM$ (chứng minh trên) nên $\Rightarrow OP \perp IE$ hay $OP \perp EG$ (18)

Từ (17) và $(18) \Rightarrow O'F // OP$ (19)

Từ (16) và (19) suy ra tứ giác $O'POF$ là hình bình hành $\Rightarrow O'P = OF$

Xét ΔCAO có $\begin{cases} EF // AO \\ CE = EA \end{cases} \Rightarrow CF = OF \Rightarrow CF = OF = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{R}{2}$

Suy ra $O'P = \dfrac{R}{2}$ (không đổi)

Vậy khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMEG đến MK không đổi.

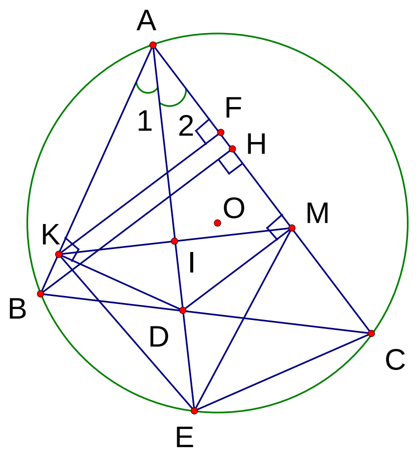
Bài 30. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D, cắt (O) tại E. Vẽ DK vuông góc với AB tại K và DM vuông góc với AC tại M .

a) Chứng minh tứ giác $AKDM$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AD.AE = AB.AC$.

c) Chứng minh $MK = AD.\sin\widehat{BAC}$.

Lời giải



a) Có $DK \perp AB$ (gt)$\Rightarrow \widehat{AKD} = 90^0$

$DM \perp AC$ (gt)$\Rightarrow \widehat{AMD} = 90^0$

Xét tứ giác $AKDM$ có:

$\widehat{AKD} + \widehat{AMD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện

$\Rightarrow$ tứ giác $AKDM$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

b) Xét (O) có $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AC}$) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{AEC}$

Xét ΔABD và ΔAEC có

$\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$ (vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}$)

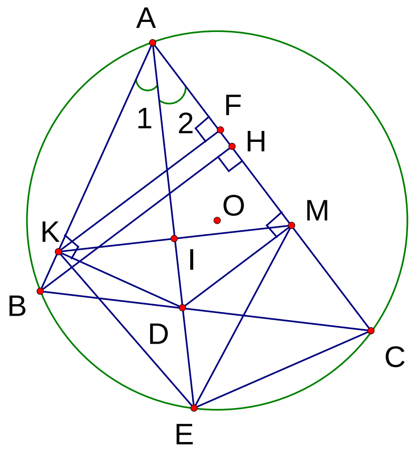
$\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (cmt)

$\Rightarrow$ $\Delta ABD \sim \Delta AEC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AB.\,AC = AE.\,AD$.

c)



Kẻ $KF \perp AC$ tại F.

Vì tứ giác $AKDM$ nội tiếp (câu a) $\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{AMK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{AK}$)

$\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{KMF}$

Xét ΔAKD và ΔKFM có

$\widehat{AKD} = \widehat{KFM} = 90^0$

$\widehat{ADK} = \widehat{KMF}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AKD \sim \Delta KFM$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{KF} = \dfrac{AD}{KM}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow MK = AD.\dfrac{KF}{AK}$

Xét ΔAKF có $\widehat{AFK} = 90^0$ (cách vẽ): $\sin \widehat{KAF} = \dfrac{KF}{AK}$ (tỉ số lượng giác)

$\Rightarrow MK = AD.\sin \widehat{KAF} = AD.\sin \widehat{BAC}$.

Bài 31. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng (d) qua A cắt đường tròn $(O;R)$ tại B và C ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng qua B, song song với AM cắt MN tại E.

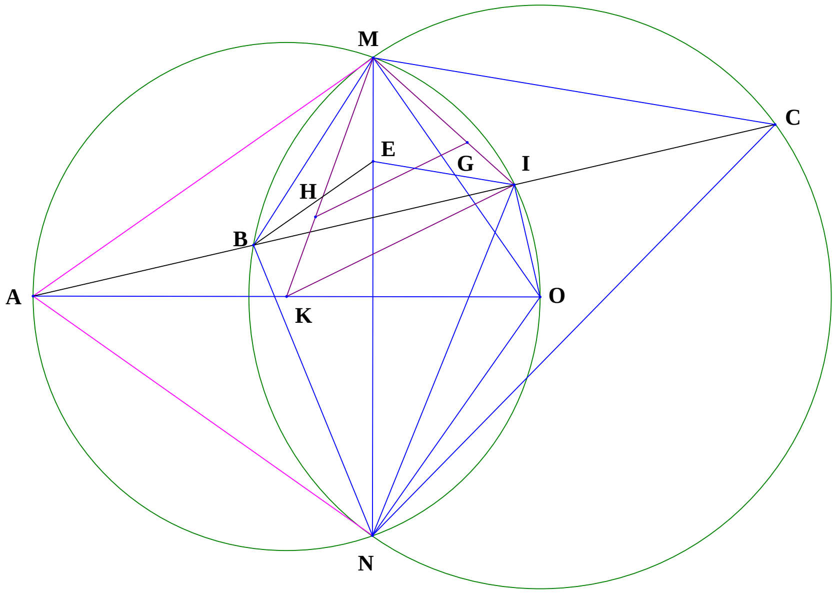
a) Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AB.AC = AM^2$.

c) Chứng minh $IE \,//\, MC$.

d) Chứng minh rằng khi đường thẳng (d) quay quanh điểm A thì trọng tâm G của tam giác MBC thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Ta có: hai tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn $(O;R)$ (M, N là các tiếp điểm).

$\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$

Xét đường tròn $(O;R)$ có: $IB = IC$ và BC là dây không đi qua tâm.

Suy ra $OI \perp BC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

Do đó $\widehat{AIO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$.

Vậy A, M, O, I, N thuộc một đường tròn có đường kính OA.

b) Xét ΔABN và ΔANC có:

$\widehat{NAC}$ chung

$\widehat{BNA} = \widehat{ACN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset{\frown}{BN}$ của đường tròn (O))

Nên ΔABN đồng dạng với ΔANC (g – g).

Suy ra: $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN}$.

$\Rightarrow AB.AC = AN^2$

Ta có: hai tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn $(O;R)$ (M, N là các tiếp điểm)

$\Rightarrow AM = AN$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó: $AB.AC = AM^2$.

Vậy $AB.AC = AM^2$.

c) Ta có: A, M, O, I, N thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AIN}$

Mà $\widehat{AMN} = \widehat{BEN}$ (vì $BE \;//\; AM$)

Suy ra $\widehat{AIN} = \widehat{BEN}$

Nên tứ giác $EBNI$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{BNE}$

Hơn nữa $\widehat{BNE} = \widehat{BCM}$ (cùng chắn cung $\overset\frown{BM}$ của đường tròn (O))

Do đó $\widehat{BIE} = \widehat{BCM}$.

Vậy $IE \;//\; MC$.

d) Gọi G là trọng tâm của ΔMBC , K là trung điểm của OA.

Vẽ $GH \;//\; IK$ ($H \in KM$).

Khi đó: K cố định và $\dfrac{MH}{MK} = \dfrac{GH}{IK} = \dfrac{MG}{MI} = \dfrac{2}{3}$.

Vì K là trung điểm của OA và A , M , O , I , N thuộc một đường tròn có đường kính OA

Nên $IK = OK$.

Suy ra: $MH = \dfrac{2}{3}MK$; $GH = \dfrac{2}{3}IK = \dfrac{2}{3}OK = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{3}OA$.

Vì $\dfrac{MH}{MK} = \dfrac{2}{3}$ và MK cố định nên H cố định.

Hơn nữa OA không đổi nên $G \in \left(H; \dfrac{1}{3}OA \right)$.

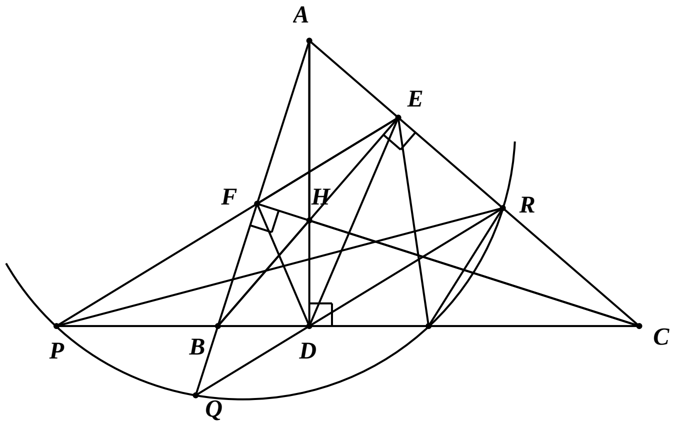
Bài 32. Cho ΔABC nhọn có $AB < AC$, các đường cao AD , BE , CF . Đường thẳng qua D song song với EF cắt các đường thẳng AB , AC lần lượt tại Q , R .

a) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác DER cân và $\dfrac{FB}{CE} = \dfrac{BD}{RD}$.

c) Đường thẳng BC cắt đường thẳng EF tại P . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua trung điểm của BC .

Lời giải



a) Do AD, BE là các đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow AD \perp BC, BE \perp AC$.

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90°$.

Xét tứ giác $ABDE$ có: $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} (= 90°)$ mà 2 góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh

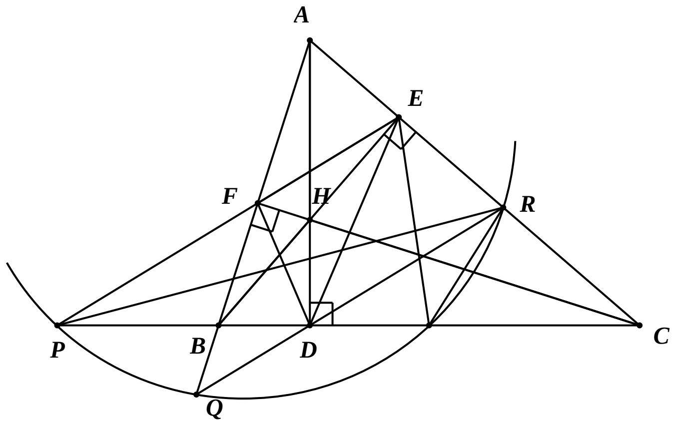
$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh tương tự ta có $BFEC$, $AFDC$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $AFDC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (tính chất góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

Theo câu a) ta có $ABDE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DER} = \widehat{ABC}$ (tính chất góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (2)

Lại có $DR // EF \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{DRE}$ (2 góc đồng vị) (3)



Từ (1), (2) và (3) ta có: $\widehat{DER} = \widehat{DRE} \Rightarrow \Delta DER$ cân tại D.

Ta có $AFDC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACB}$ (tính chất góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện)

Do $\begin{cases} \widehat{DEC} = \widehat{FBD}\,(cmt) \\ \widehat{BFD} = \widehat{ECD}\,(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta BFD \backsim \Delta ECD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{FB}{CE} = \dfrac{BD}{ED}$, do $DE = DR$ (ΔDER cân)$\Rightarrow \dfrac{FB}{CE} = \dfrac{BD}{DR}$

c) Gọi M là trung điểm của BC

$\Rightarrow MB = MC = ME$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) (thiếu điểm M trên hình vẽ, nói GVSB vẽ lại)

$\Rightarrow \Delta EMB$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{EMC} = 2\widehat{EBM}$ (tính chất góc ngoài tại đỉnh M của tam giác EBM) (4)

Mặt khác $AFDC$, $BFEC$, $ABDE$ là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{EBC}$, $\widehat{CFD} = \widehat{DAC} = \widehat{EBC}$

Suy ra: $\widehat{CFD} + \widehat{CFE} = 2\widehat{EBM}$ $\qquad(5)$ IM

Từ(4), (5) ta có: $\widehat{EMC} = \widehat{EFD} \Rightarrow DMEF$ là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow \widehat{PFD} = \widehat{EMD}$.

Chứng minh tương tự ý b) ta có ΔDFQ cân tại D.

Xét ΔFDP và ΔMDE

$\begin{cases} \widehat{PFD} = \widehat{EMD}\,(cmt) \\ \widehat{FDP} = \widehat{EDM}\left(= \widehat{BAC}\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta FDP \backsim \Delta MDE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DF}{DP} = \dfrac{DM}{DE} \Rightarrow \dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DM}{DR}$

$\Rightarrow \Delta DPQ \backsim \Delta DRM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DPQ} = \widehat{DRM} \Rightarrow PQMR$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔPQR đi qua trung điểm của BC.

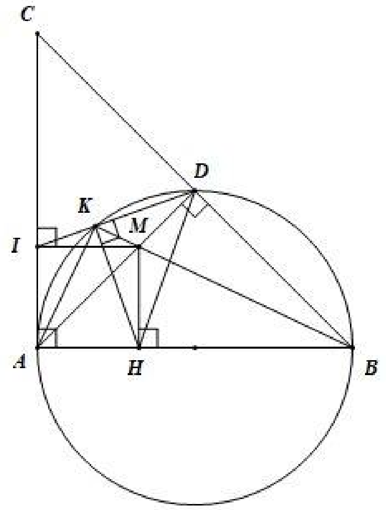
Bài 33. Cho ΔABC vuông cân tại A, đường tròn đường kính AB cắt cạnh BC tại D(D khác B). Gọi M là một điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AD. Kẻ $MH \perp AB$ tại H, $MI \perp AC$ tại I và $HK \perp ID$ tại K.

a) Chứng minh tứ giác $BDMH$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$.

c) Chứng minh tứ giác $AIKM$ nội tiếp và ba điểm B, M, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có: $MH \perp AB \Rightarrow \widehat{MHB} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BDMH$, ta có:

$\widehat{BDM} = \widehat{BHM} = 90^\circ$

Khi đó: Tứ giác $BDMH$ nội tiếp được đường tròn đường kính BM

b) $MI \perp AC \Rightarrow \widehat{MIA} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AHMI$, ta có: $\widehat{MIA} = \widehat{MHA} = 90^\circ$

Khi đó tứ giác $AHMI$ nội tiếp đường tròn đường kính AM (1)

Ta có: $HK \perp ID \Rightarrow \widehat{HKI} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AHKI$, ta có: $\widehat{IAH} = \widehat{IKH} = 90^\circ$

Khi đó tứ giác $AHKI$ nội tiếp đường tròn (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, I, K, M, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính AM

Xét đường tròn đường kính AM, ta có: $\widehat{KIM} = \widehat{KAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KM}$)

Xét đường tròn đường kính AB, ta có: $\widehat{KBD} = \widehat{KAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KD}$)

Vậy: $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$.

c) Ta có A, I, K, M, H cùng thuộc đường tròn đường kính AM

Vậy tứ giác $AIKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AM

Khi đó: $\widehat{AKM} = 90^\circ \Rightarrow KM \perp AK$

Mà: $\widehat{AKB} = 90^\circ \Rightarrow KB \perp AK$

Vậy ba điểm B, M, K thẳng hàng.

Bài 34. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ đường kính CD vuông góc AB. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC, AM cắt CD tại E. Qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt đường thẳng BM tại N.

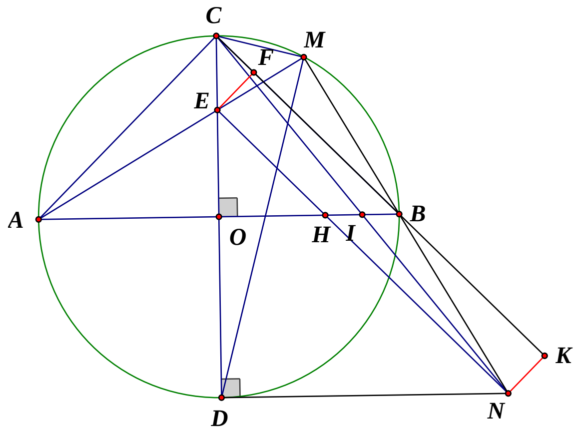
1) Chứng minh bốn điểm M, N, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh $EN//CB$;

3) Chứng minh tích $AM.BN$ không đổi khi M chuyển động trên cung nhỏ BC.

4) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



1) Xét $(O;R)$ có AB là đường kính, $M\in(O)\Rightarrow\widehat{AMB}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vì DN là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D nên $\widehat{CDN}=90°$.

+) Xét tứ giác $EMND$ có: $\widehat{EMN}+\widehat{EDN}=90°+90°=180°$. Mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $EMND$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

2) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EMND$ có: $\widehat{DEN}=\widehat{DMN}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DN}$)

Xét $(O;R)$ có: $\widehat{DMN}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DB}=\frac{1}{2}.90°=45°$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DB}$).

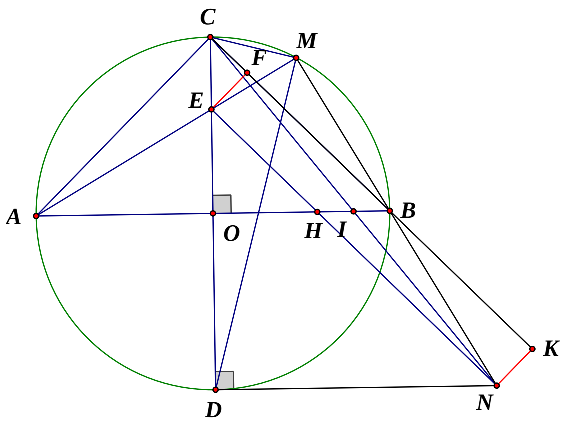
$\Rightarrow\widehat{DEN}=45°$

ΔOCB là tam giác vuông cân tại O $\Rightarrow\widehat{OCB}=45°$.

Ta có: $\widehat{OCB}=\widehat{DEN}\,(=45°)$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow DN//CB$.

3) Cách 1: Gọi H là giao điểm của EN và AB



+) Xét $(O;R)$ có: $\widehat{CMA}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}.90^\circ=45^\circ$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{CA}$).

+) ΔOEH là tam giác vuông tại O (gt)

Lại có: $\widehat{OEH}=45^\circ(cmt)\Rightarrow \widehat{OHE}=45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BHN}=\widehat{OHE}=45^\circ$ (2 góc đối đỉnh)

+) Xét $(O;R)$ có: $\widehat{CAM}=\widehat{CBM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$).

+) $CB//EN\,(cmt)\Rightarrow \widehat{CBM}=\widehat{HNB}$ (2 góc đồng vị).

$\Rightarrow \widehat{HNB}=\widehat{CAM}$

+) Xét ΔAMC và ΔNHB có:

$\widehat{CMA}=\widehat{BHN}$ (cmt)

$\widehat{HNB}=\widehat{CAM}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AMC\sim\Delta NHB$

$\Rightarrow \frac{AM}{NH}=\frac{AC}{NB}\Rightarrow AM.NB=NH.AC\ (1)$

Gọi giao điểm của CN và AB là I

Xét ΔCDN có:

O là trung điểm CD

$OI//DN$ (cùng vuông góc với DN)

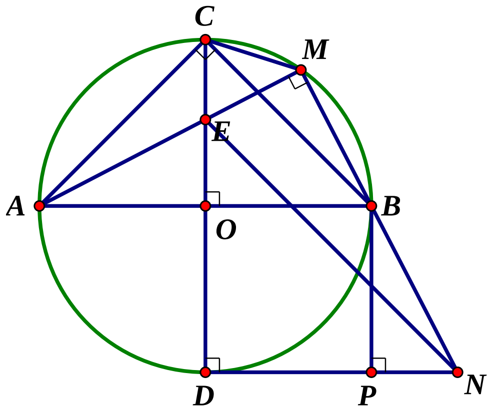
$\Rightarrow I$ là trung điểm của CN .

Dễ dàng chứng minh được $\Delta ICB=\Delta INH\,(g.c.g)$

$\Rightarrow CB=NH\ (2)$

Thay (2) vào (1) ta có: $AM.NB = AC.CB$ không đổi khi M di chuyển trên cung nhỏ BC.

Bổ sung cách 2:



Gọi P là hình chiếu vuông góc của B trên DN.

Góc $\widehat{DNM}$ là góc có đỉnh ở ngoài đường tròn (O) nên $\widehat{DNM} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{DM}$ − sđ $\overset{\frown}{DB}$).

Mà: sđ $\overset{\frown}{DB}$ = sđ $\overset{\frown}{DA} = 90°$.

Nên: $\widehat{DNM} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{DM}$ − sđ $\overset{\frown}{DA}$) $= \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AM}$.

Lại có: $\widehat{ABM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AM}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AM}$.

Suy ra: $\widehat{DNM} = \widehat{ABM}$ hay $\widehat{PNB} = \widehat{ABM}$.

Xét hai tam giác ΔABM và ΔBNP có:

$\widehat{AMB} = \widehat{BPN}$

$\widehat{ABM} = \widehat{PNB}$

Suy ra: $\Delta ABM \sim \Delta BNP$ $(g-g)$ nên $\frac{AM}{BP} = \frac{AB}{BN} \Leftrightarrow AM.BN = AB.BP$

Nhận thấy: $OBPD$ là hình vuông nên $BP = OD = R$.

Do đó: $AM.BN = AB.BP = 2R.R = 2R^2$.

4) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

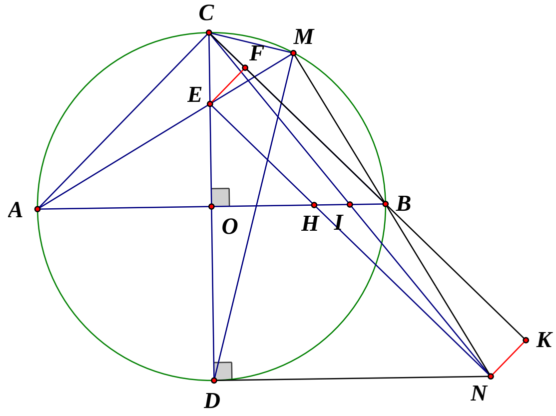
Kẻ $NK \perp BC$ tại K, $EF \perp BC$ tại F.

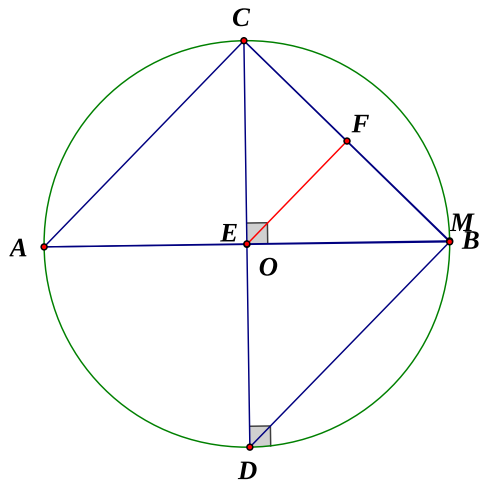
$S_{NBC} = \frac{1}{2} NK.BC$

Do BC không đổi nên S_{NBC} max $\Leftrightarrow NK$ max

Mà $ENKF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow NK$ max $\Leftrightarrow EF$ max

$\Leftrightarrow E \equiv 0 \Leftrightarrow M \equiv B$

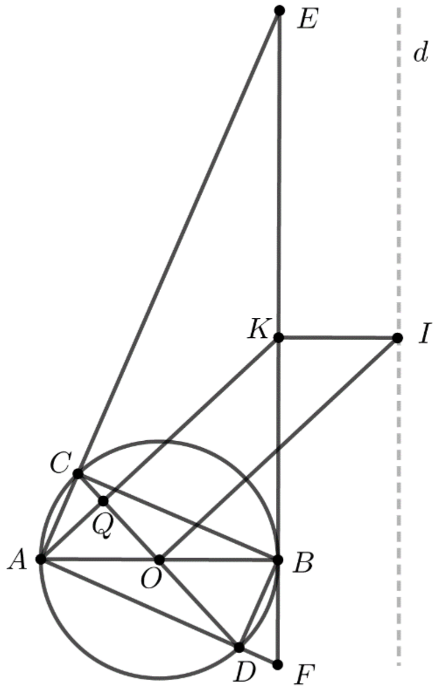




Bài 35. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB cố định và CD là một đường kính thay đổi không trùng với AB. Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại E và F.

1) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật
2) Chứng minh $BE.BF = 4R^2$, tứ giác $CEFD$ nội tiếp được đường tròn.
3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEFD$. Chứng minh rằng I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Lời giải



1) Tứ giác $ACBD$ có hai đường chéo AB, CD cắt nhau tại O và O là trung điểm mỗi đường, nên $ACBD$ là hình bình hành

Mà $\widehat{CAD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn đường kính CD)

Suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật.

2) +) Trong tam giác AEF vuông tại A, đường cao AB, ta có:

$BE.BF = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$

+) Ta có: $\widehat{CEB} + \widehat{CAB} = 90°$ (vì ΔEAB vuông tại B) (1)

Ta có: $\widehat{CDA} + \widehat{ACD} = 90°$ mà $\widehat{ACD} = \widehat{CAB}$ (vì ΔOAC cân tại O)

Suy ra $\widehat{CDA} + \widehat{CAB} = 90°$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CEB} = \widehat{CDA}$.

Ta có: $\widehat{CDB} + \widehat{CDA} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Leftrightarrow \widehat{CDB} + \widehat{CEB} = 180°$ (vì $\widehat{CEB} = \widehat{CDA}$)

Do đó tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi K là trung điểm của EF.

Ta có: ΔFEA vuông tại A và có trung tuyến $AK \Rightarrow AK = KF$

$\Rightarrow \Delta AKF$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KAD} = \widehat{KFA}$ (3)

Ta có: $\widehat{CDA} = \widehat{DBF}$ $\left(= \frac{1}{2}\text{Sđ}\,\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\text{Sđ}\,\overset{\frown}{BD}\right)$ (4)

Tam giác BDF vuông tại D $\Rightarrow \widehat{DBF} + \widehat{KFA} = 90°$

$\Leftrightarrow \widehat{CDA} + \widehat{KAD} = 90°$ (do (3) và (4))

$\Rightarrow \widehat{AQD} = 90° \Rightarrow AK \perp CD$ tại Q

Mà $IO \perp CD$ (do IO là đường trung trực CD)

Nên $AK//IO$ $\quad(5)$

Ta có: $AO \perp EF$ (gt), $IK \perp EF$ (vì IK là đường trung trực đoạn EF)

$\Rightarrow AO//IK$ $\quad(6)$

Từ (5) và (6) suy ra $AOKI$ là hình bình hành $\Rightarrow IO = AO = R$

Hay I luôn cách đường thẳng EF một khoảng là R.

Vậy điểm I luôn nằm trên đường thẳng cố định $d//EF$ sao cho d cách EF một khoảng đúng bằng R.

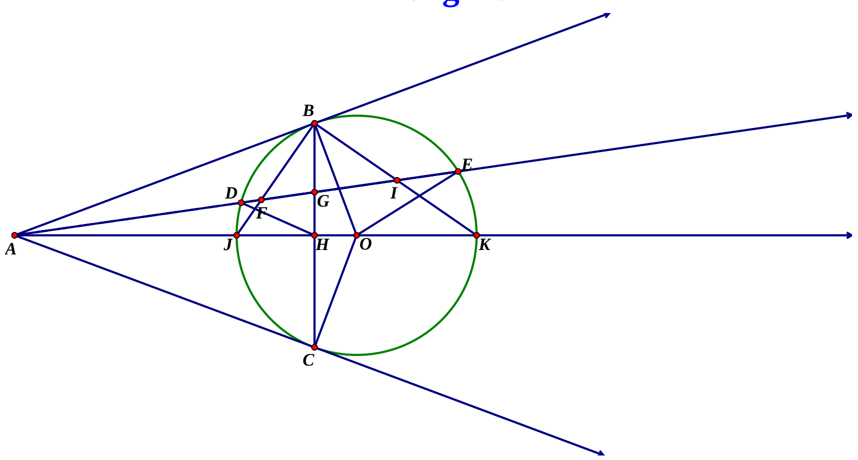
Bài 36. Cho đường tròn tâm (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tia AO cắt đường tròn tại hai điểm J và K (J nằm giữa A và K) và cắt BC tại H. Một tia Ax nằm giữa hai tia AB và AO cắt đường tròn tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Chứng minh $\widehat{AHD} = \widehat{AEO}$.

c) Tia Ax cắt BJ, BC, BK thứ tự tại F, G, I. Chứng minh $FG.IA = FA.GI$.

Lời giải:



a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Vì AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{AHD} = \widehat{AEO}$.

Xét ΔADB và ΔAEB có : $\widehat{BAD}$ chung; $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (cùng chắn cung BD)

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ABE\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AB^2 = AD.AE \qquad (1)$$

Mặt khác, ΔABO vuông tại B có BH là đường cao nên $AB^2 = AH.AO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD.AE = AH.AO \left(= AB^2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AH} = \dfrac{AO}{AE}$

Xét ΔADH và ΔAOE có $\widehat{DAH}$ chung; $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{AO}{AE}$

$\Rightarrow \Delta ADH \backsim \Delta AOE\,(c.g.c)$

Suy ra $\widehat{AHD} = \widehat{AEO}$ (Hai góc tương ứng)

c) Chứng minh $FG.IA = FA.GI$.

Xét đường tròn tâm (O), ta có:

$\widehat{ABF} = \widehat{BKJ}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BJ}$)

Mà $\widehat{JBH} = \widehat{BKJ}$ (Cùng phụ $\widehat{BJK}$) nên $\widehat{ABJ} = \widehat{GBJ}$ $\Rightarrow BF$ là đường phân giác của tam giác ΔABG $\Rightarrow \dfrac{BG}{AB} = \dfrac{FG}{FA}$ (3)

Mặt khác, $\widehat{KBJ} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BJ \perp BK$ $\Rightarrow BK$ là tia phân giác ngoài của ΔABG $\Rightarrow \dfrac{BG}{BA} = \dfrac{GI}{IA}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{FG}{FA} = \dfrac{GI}{IA} \Rightarrow FG.IA = FA.IG$.

Bài 37. (THCS CẦU GIẤY)Cho $(O;R)$, đường thẳng d cố định không qua O và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B. Từ một điểm C trên d (A nằm giữa C và B) kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (N cùng phía với O so với d). Gọi H là trung điểm AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

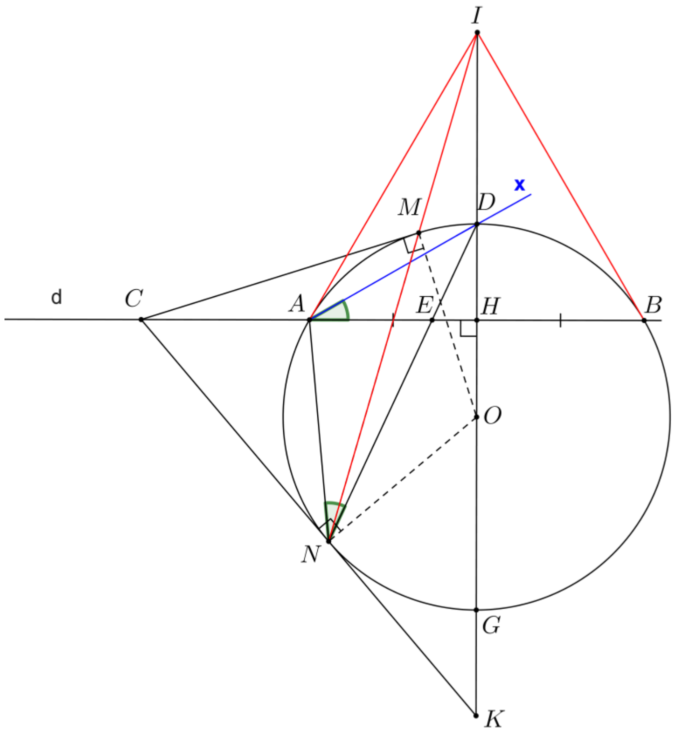
a) Chứng minh bốn điểm C, H, O, N thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $KN.KC = KH.KO$.

c) Đường thẳng ND cắt AB tại E. Chứng minh AD là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác AEN.

d) Chứng minh rằng khi C thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện bài toán thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Ta có: H trung điểm của dây AB (không qua O) (gt) $\Rightarrow \widehat{CHO}=90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

CN tiếp tuyến của (O) tại N (gt) $\Rightarrow CN\perp ON$ tại N 9 t/c của tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{CNO}=90^0$

Tứ giác $CNOH$ có $\widehat{CNO}+\widehat{CHO}=90^0+90^0=180^0$

Nên tứ giác $CNOH$ nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^o)

Vậy bốn điểm C,H,O,N thuộc một đường tròn.

b) ΔKNO và có: $\widehat{K}$ chung, $\widehat{KNO}=\widehat{KHC}\,(=90^0)$

Có: $\widehat{KNO}=90^0$ (kề bù với $\widehat{CNO}$); $\widehat{KHC}=\widehat{CHO}=90^0$

Xét ΔKNO và ΔKHC, có:

$\widehat{OKN}$ chung, $\widehat{KNO}=\widehat{KHC}=90^0(cmt)$

$\Rightarrow \Delta KNO \backsim \Delta KHC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KN}{KH}=\frac{KO}{KC}\Rightarrow KN.KC=KH.KO.$$

c)

H trung điểm AB nên D là điểm chính giữa cung AB

Xét $(O;R)$, có: H là trung điểm của dây cung AB không đi qua tâm O, OH cắt (O) tại D $\Rightarrow D$ là điểm chính giữa của cung nhỏ AB $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AD}=$ sđ $\overset{\frown}{BD}$

$\Rightarrow \widehat{DAB}=\widehat{ANE}$ (các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau)

Trên nửa mặt phẳng bờ AN chứa E, kẻ tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn ngoài tiếp ΔANE.

Khi đó có $\widehat{EAx} = \widehat{ANE}$, đồng thời có Ax và AN thuộc 2 mặt phẳng đối nhau bờ AE.

Từ đó suy ra $Ax \equiv AD$

Vậy AD là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔANE.

d) Tiếp tuyến tại A và B cắt nhau ở I. Do A, B và (O) cố định nên suy ra I cố định. Ta chứng minh I, M, N thẳng hàng.

Ta có: $OM^2 = OH.OI (= OA^2)$

Có AI là tiếp tuyến của (O) tại A (gt) $\Rightarrow \widehat{OAI} = 90^0 \Rightarrow \Delta OAI$ là vuông tại A.

Xét ΔOAI vuông tại A, đường cao AH, có:

$OA^2 = OH.OI$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Mà $OA = OM = R \Rightarrow OM^2 = OH.OI \Rightarrow \dfrac{OM}{OI} = \dfrac{OH}{OM}$

Xét ΔOHM và ΔOMI có: $\dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OM}{OI}$ ($OM^2 = OH.OI$) và $\widehat{MOI}$ chung

$\Rightarrow \Delta OHM \backsim \Delta OMI$ $(g.g)$ $OHM \Rightarrow \widehat{OMI} = \widehat{OHM}$ (hai góc tương ứng)

Tứ giác $MNOH$ nội tiếp đường tròn đường kính OC $\Rightarrow \widehat{MHI} = \widehat{ONM}$ (cùng bù với $\widehat{MHO}$).

Mà $\widehat{ONM} = \widehat{OMN}$ ($ON = OM$) và $\widehat{MHI} + \widehat{MHO} = 180^o$.

$\Rightarrow \widehat{OMI} + \widehat{OMN} = 180^0$. Suy ra I, M, N thẳng hàng. Do đó MN luôn đi qua điểm I cố định.

Bài 38. Cho đường tròn $(O;R)$, kẻ đường kính AD. Lấy điểm C thuộc $(O;R)$ sao cho $CD = R$. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt AD tại H và cắt đường tròn (O) tại B.

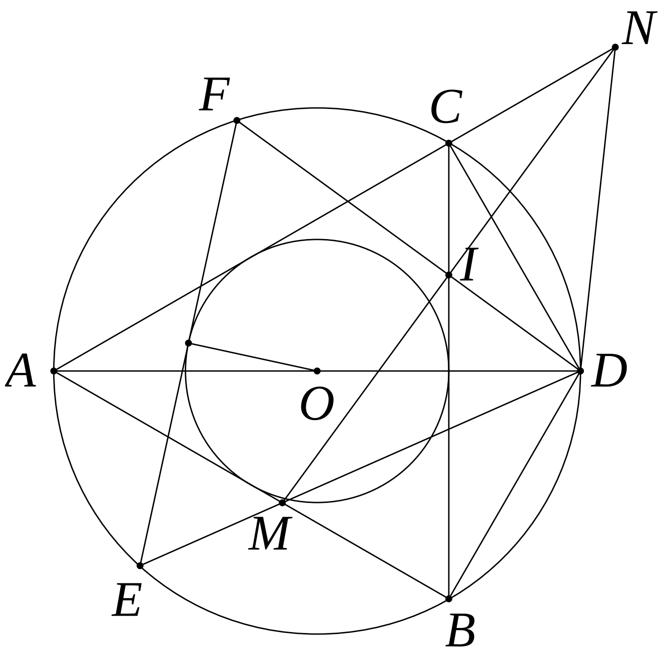
1. Chứng minh $CH^2 = AH.DH$ và $\widehat{CDA} = 60°$

2. Lấy điểm M bất kì thuộc cạnh AB $(M \neq A, B)$. Trên tia đối của tia CA lấy N sao cho $BM = CN$, chứng minh: $\Delta BMD = \Delta CND$ và tứ giác $AMDN$ nội tiếp.

3. MN cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của MN.

4. Tia DM cắt (O) tại E và tia DI cắt (O) tại F. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên AB $(M \neq A \text{ và } B)$ thì EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải



1. Xét ΔACD có AD là đường kính $\Rightarrow \widehat{ACD} = 90°$ $\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACD có CH là đường cao ta có: $CH^2 = AH.HD$

Xét ΔOCD có $OD = OC = CD = R \Rightarrow \Delta OCD$ đều $\Rightarrow \widehat{ODC} = 60°$

Do đó $\widehat{ODA} = 60°$

2.

$\widehat{ABD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ACD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{NCD} = 90°$

Ta có $AD \perp CB$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm của CB (theo mối liên hệ giữa đường kính và dây cung)

ΔCDB có CH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta CDB$ cân tại $D \Rightarrow CD = BD$

Xét ΔBMD và ΔCND có $\begin{cases} BM = CN\,(gt) \\ \widehat{ABD} = \widehat{NCD} = 90° \Rightarrow \Delta BMD = \Delta CND\,(c.g.c); \\ CD = BD\,(cmt) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{CND}$ (2 góc tương ứng); $MD = ND$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow \Delta MDN$ cân tại D

Xét tứ giác $AMDN$ có $\widehat{BMD} = \widehat{CND}$ mà 2 góc này ở vị trí góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện của tứ giác nên tứ giác $AMDN$ nội tiếp (theo dấu hiệu nhận biết)

3. Xét tứ giác nội tiếp $AMDN$ có

$\widehat{DAN}=\widehat{NMD}\ (1)$ (cùng nhìn cạnh ND)

$\widehat{MAD}=\widehat{MND}\ (2)$ (cùng nhìn cạnh MD)

Ta có ΔCAB có $AH\perp CB$ (giả thiết) $\Rightarrow H$ là trung điểm của CB (theo mối liên hệ giữa đường kính và dây cung) $\Rightarrow \Delta CAB$ cân tại A (do AH vừa là đường cao đồng thời là trung tuyến)
$\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{HAC}\Rightarrow \widehat{DAN}=\widehat{MAD}\ (3)$

Mặt khác $\widehat{MAD}=\widehat{HBD}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$) (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có $\widehat{DAN}=\widehat{NMD}=\widehat{MAD}=\widehat{MND}=\widehat{HBD}\Rightarrow \widehat{NMD}=\widehat{HBD}\ (5)$

Xét tứ giác $IDBM$ có $\widehat{NMD}=\widehat{HBD}$ mà 2 góc ở vị trí cùng nhìn cạnh $ID\Rightarrow$ tứ giác $IDBM$ nội tiếp

Theo tính chất của tứ giác nội tiếp ta có $\widehat{MBD}+\widehat{MID}=180°$ mà $\widehat{MBD}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MID}=90°\Rightarrow ID\perp MI\Rightarrow ID\perp MN$

Mặt khác ΔMDN cân tại D $\Rightarrow ID$ là đường cao đồng thời là đường trung tuyến.

Vậy I là trung điểm của đoạn MN

4. Ta có $AMDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MDN}+\widehat{MAN}=180°$

Mà $\widehat{DAC}=30°\Rightarrow \widehat{BAC}=60°\Rightarrow \widehat{MAN}=60°$

Do đó $\widehat{MDN}=120°$, mà DI là tia phân giác $\widehat{MDN}\Rightarrow \widehat{EDF}=60°\Rightarrow EF=BC$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ tâm O đến dây EF bằng khoảng cách từ tâm O đến dây BC và bằng $\dfrac{R}{2}$.

Do đó EF luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính $\dfrac{R}{2}$

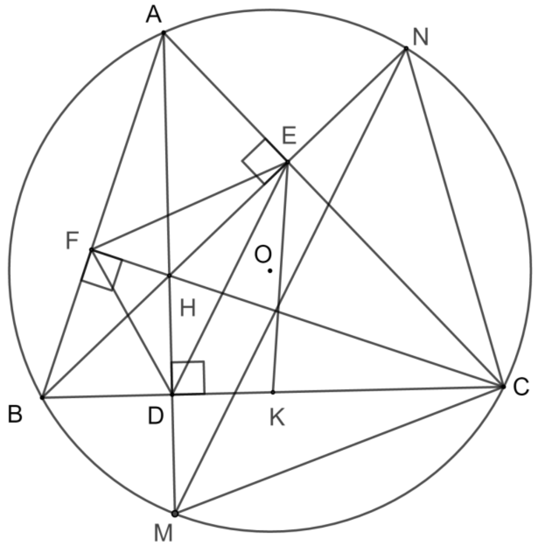
Bài 39. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác $DCEH$ nội tiếp và $AD.AH=AE.AC$.

2) Tia AD và BE cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Chứng minh H và M đối xứng với nhau qua BC và ΔCMN cân.

3) Gọi K là trung điểm BC. Chứng minh bốn điểm D, E, F, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



1) Chứng minh tứ giác $DCEH$ nội tiếp và $AD.AH = AE.AC$

Xét ΔABC có $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADC} = 90°$ hay $\widehat{HDC} = 90°$.

$BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90°$ hay $\widehat{HEC} = 90°$.

$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFA} = 90°$ hay $\widehat{HFA} = 90°$.

Xét tứ giác $DCEH$ có $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow DCEH$ là tứ giác nội tiếp.

Xét ΔADC vuông tại D và ΔAHE vuông tại E có:

$\widehat{DAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta AEH$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AH}$

$\Rightarrow AD.AH = AE.AC$

2) Tia AD và BE cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Chứng minh H và M đối xứng với nhau qua BC và ΔCMN cân.

Xét (O) có $\widehat{BAM} = \widehat{BCM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCM}$ (1).

Xét ΔABD vuông tại D có $\widehat{BAD} + \widehat{ABD} = 90°$ (2).

Xét ΔCBF vuông tại F có $\widehat{BCF} + \widehat{CBF} = 90° \Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{BCH} = 90°$ (3).

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{BCH} \Rightarrow CB$ là phân giác của $\widehat{HCM}$.

Xét ΔHCM có CB là phân giác của $\widehat{HCM}$

$HM \perp BC$ tại D

$\Rightarrow \Delta HCM$ cân tại C

$\Rightarrow CB$ đồng thời là trung trực của HM

$\Rightarrow H$ đối xứng với M qua BC.

* Chứng minh tương tự có:

$\widehat{ABN} = \widehat{ACN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$)

$\widehat{ABN}=\widehat{ACF}$ (cùng phụ $\widehat{BAE}$)

$\Rightarrow \widehat{ACN}=\widehat{ACF}$

$\Rightarrow CA$ là phân giác của $\widehat{FCN}$

Xét ΔHCN có CA là phân giác của $\widehat{FCN}$

$CA\perp HN$ tại E

$\Rightarrow \Delta HCN$ cân tại C

$\Rightarrow CH=CN$

Mà $CH=CM$ (ΔHCM cân tại C)

$\Rightarrow CM=CN$

$\Rightarrow \Delta CMN$ cân tại C.

3) Gọi K là trung điểm BC. Chứng minh bốn điểm D, E, F, K cùng thuộc một đường tròn.

Xét ΔBEC vuông tại E có:

+) EK là trung tuyến ứng với cạnh BC

$\Rightarrow EK=BK$

$\Rightarrow \Delta KBE$ cân tại K

$\Rightarrow \widehat{KBE}=\widehat{KEB}$.

+) $\widehat{EKC}$ là góc ngoài tam giác tại đỉnh K

$\Rightarrow \widehat{EKC}=\widehat{KBE}+\widehat{KEB}$

$\Rightarrow \widehat{EKC}=2\widehat{KBE}$.

Xét tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{AEH}+\widehat{AFH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EFH}=\widehat{HAE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$) $\quad (4)$.

Xét tứ giác $AEDB$ có: $\widehat{AEB}=\widehat{ADB}=90^\circ$

Mà 2 góc này có đỉnh D, E kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới một góc 90°

$\Rightarrow AEDB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DAE}=\widehat{EBD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DE}$)hay $\widehat{HAE}=\widehat{HBD}$ $\quad (5)$.

Xét tứ giác $BDHF$ nội tiếp có: $\widehat{BFH}+\widehat{BDH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow BDHF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HBD}=\widehat{DFH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HD}$) $\quad (6)$.

Từ $(4)(5)(6)\Rightarrow \widehat{EFH}=\widehat{DFH}$

Mà $\widehat{EFH}+\widehat{DFH}=\widehat{DFE}$

$\Rightarrow \widehat{DFE}=2\widehat{DFH}=2\widehat{HBD}$ hay $\widehat{DFE}=2\widehat{KBE}$

Mà $\widehat{EKC}=2\widehat{KBE}$

$\Rightarrow \widehat{DFE}=\widehat{EKC}$.

Xét tứ giác $DFEK$ có $\widehat{DFE}=\widehat{EKC}$

$\Rightarrow DFEK$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong đỉnh đối).

$\Rightarrow D$, E, F, K cùng thuộc một đường tròn.

Bài 40. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác điểm M. Kẻ MH vuông góc với BC (H thuộc BC).

a) Chứng minh $BOMH$ là tứ giác nội tiếp.

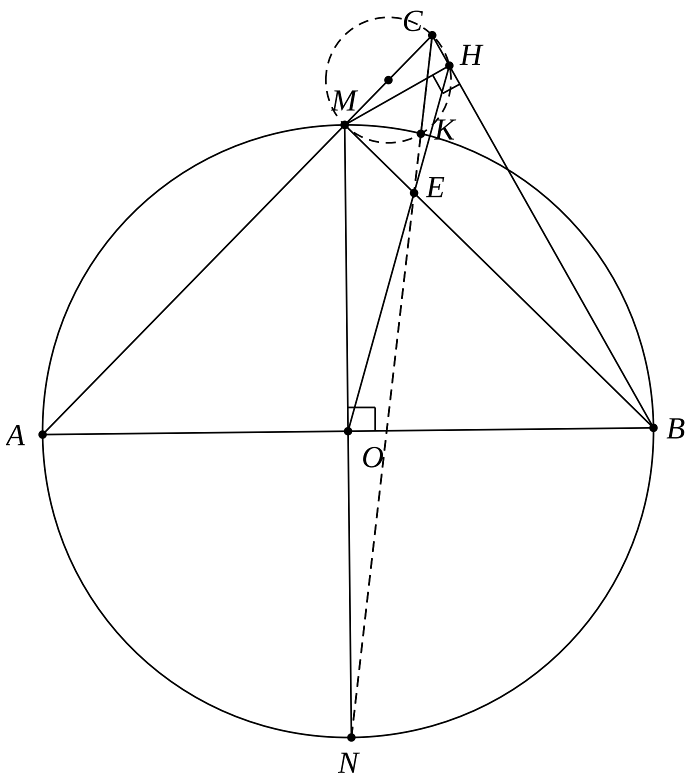
b) MB cắt OH tại E. Chứng minh HO là tia phân giác của góc MHB.

c) Chứng minh: $ME.MH = BE.HC$

d) Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp ΔMHC là K.

Chứng minh ba điểm $C;K;E$ thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh $BOMH$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $AB \perp CD$ tại O nên $\widehat{MOA} = \widehat{MOB} = \widehat{NOA} = \widehat{NOB} = 90°$.

Ta có $MH \perp BC$ tại H nên $\widehat{MHC} = \widehat{MHB} = 90°$.

Xét tứ giác $BOMH$ có: $\widehat{MHB} + \widehat{MOB} = 90° + 90° = 180°$.

Mà hai góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BOMH$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

b) MB cắt OH tại E. Chứng minh HO là tia phân giác của góc $\widehat{MHB}$.

Xét ΔMOB có $OM = OB = R$, $\widehat{MOB} = 90°$ nên ΔMOB vuông cân tại O nên

$\widehat{OBM} = \widehat{OMB}$; (1)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BOMH$ có: $\widehat{OBM}=\widehat{OHM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OM}$). và $\widehat{OMB}=\widehat{OHB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OB}$); (2)

Từ (1) và (2) có: $\widehat{OHM}=\widehat{OHB}$.

$\Rightarrow HO$ là tia phân giác của $\widehat{MHB}$.

c) Chứng minh: $ME.MH=BE.HC$

Xét tam giác ΔMHB có HO là phân giác của $\widehat{MHB}$; HO cắt MB tại E nên ta có:

$$\frac{ME}{BE}=\frac{MH}{HB} \qquad (3)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔBMC vuông tại M có MH là đường cao, ta có:

$$HM^2=HC.HB\Rightarrow\frac{HM}{HB}=\frac{HC}{HM} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{ME}{BE}=\frac{HC}{HM}$ $(5)\Rightarrow ME.HM=BE.HC$ (điều phải chứng minh).

d) Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp ΔMHC là K.

Chứng minh ba điểm $C;K;E$ thẳng hàng.

Vì $\widehat{MHC}=90^\circ$ (chứng minh trên) nên đường tròn ngoại tiếp ΔMHC có đường kính là MC.

$\Rightarrow\widehat{MKC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

MN là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{MKN}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow\widehat{MKN}+\widehat{MKC}=180^\circ$.

$\Rightarrow$ Ba điểm C, K, N thẳng hàng $(*)$.

Có $\widehat{BMC}$ kề bù với $\widehat{AMB}$.

Mà $\widehat{AMB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow\widehat{BMC}=90^\circ$.

Xét ΔMHC và ΔBMC có:

$\widehat{MCB}$ chung

$\widehat{BMC}=\widehat{MHC}\left(=90^\circ\right)$

$\Rightarrow\Delta MHC\backsim\Delta BMC$ (g.g).

$\Rightarrow\frac{HC}{HM}=\frac{MC}{BM}$ mà $MB=BN$ (do ΔMBN cân tại B).

$\Rightarrow\frac{HC}{HM}=\frac{MC}{BN}$, kết hợp $\frac{ME}{BE}=\frac{HC}{HM}$ (theo (5)).

$\Rightarrow\frac{MC}{BN}=\frac{ME}{BE}$.

Mà $\widehat{EBN}=\widehat{EMC}=90^\circ$.

$\Rightarrow\Delta MCE\backsim\Delta BNE$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{BEN}$ (hai góc tương ứng) mà $\widehat{MEC} + \widehat{BEC} = 180°$ (do ba điểm M, E, B thẳng hàng).

$\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BEN} = 180°$.

$\Rightarrow$ Ba điểm C, E, N thẳng hàng $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra bốn điểm C, K, E, N thẳng hàng.

$\Rightarrow$ Ba điểm C, K, E thẳng hàng (điều phải chứng minh).

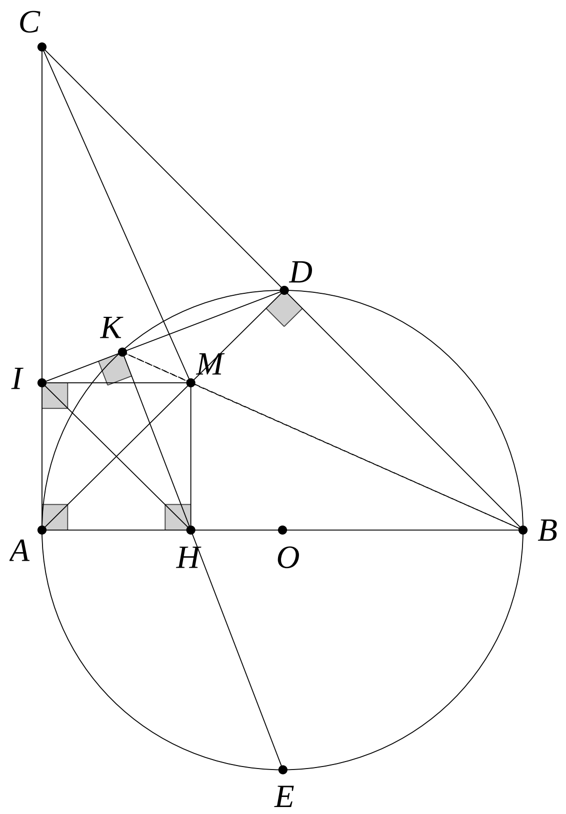
Bài 41. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Đường tròn đường kính AB cắt BC tại D (D khác B). Lấy điểm M bất kì trên AD. Kẻ MH, MI lần lượt vuông góc với AB, AC $(H \in AB,\ I \in AC)$.

1) Chứng minh tứ giác $MDCI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$.

3) Kẻ $HK \perp ID$ $(K \in ID)$. Chứng minh K, M, B thẳng hàng và đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên AD.

Lời giải



1) Xét (O) có $\widehat{ADB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AD \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{MDC} = 90°$.

Lại có $\widehat{MIC} = 90°$ (vì $MI \perp AC$).

Xét tứ giác $MDCI$ có $\widehat{MDI} + \widehat{MIC} = 180°$

$\Rightarrow MDIC$ là tứ giác nội tiếp.

2) ΔABC vuông cân tại A có AD là đường cao
suy ra AD đồng thời là đường trung trực.

$\Rightarrow MB = MC \Rightarrow \Delta MBC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MCB}$ (1)

Vì $MDIC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{MCD}$ (2) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MD}$)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$.

3) Tứ giác $AIMH$ có $\widehat{AIM} = \widehat{AHM} = \widehat{IAH} = 90° \Rightarrow AIMH$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{IMH} = 90°$
.

Ta có $\widehat{IAH} = \widehat{IKH} = \widehat{IMH} = 90° \Rightarrow$ năm điểm A, I, K, M, H cùng thuộc đường tròn đường kính IH.

$\Rightarrow AIKM$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AIK} + \widehat{AMK} = 180°$ (3)

Ta có $\widehat{AIK} = \widehat{AIM} + \widehat{MID} = 90° + \widehat{MID}$

$\widehat{AMB} = \widehat{ADB} + \widehat{MBC} = 90° + \widehat{MBC}$ (góc ngoài của ΔMBD)

Mà $\widehat{MID} = \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{AMB}$ (4)

Từ (3) và $(4) \Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AMK} = 180° \Rightarrow \widehat{BMK} = 180°$

$\Rightarrow K$, M, B thẳng hàng.

Vì $AIKM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90°$

Vì K, M, B thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AKB} = 90° \Rightarrow K \in (O)$.

Gọi E là giao điểm KH và (O).

Vì $AIMH$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{AIH} = 45°$

mà $AIKH$ là tứ giác nội tiếp $\widehat{AIH} = \widehat{AKH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AH}$)

$\Rightarrow \widehat{AKE} = 45° \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AE} = 90° \Rightarrow E$ cố định.

Do đó HK luôn đi qua điểm E cố định khi M di động trên AD.

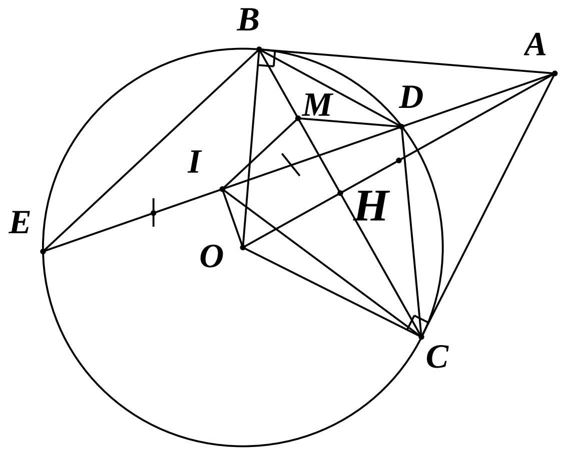
Bài 42. Từ điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, dựng các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE, H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A ; B ; I ; O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $AC^2 = AD.AE = AH.AO$

c) Qua I kẻ đường thẳng song song với BE, cắt BC tại M. Chứng minh rằng $DM \perp BO$.

Lời giải



a) Có AB ; AC lần lượt là tia tiếp tuyến tại B và C của (O) (gt)

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp OB \\ AC \perp OC \end{cases}$ (t.c tiếp tuyến) $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABO} = 90° \\ \widehat{ACO} = 90° \end{cases}$

Xét (O) có I là trung điểm của dây DE $(O \notin DE)$ $\Rightarrow OI \perp DE$ tại I $\Rightarrow \widehat{DIO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIO} = 90^0$

Có $\widehat{AIO} = \widehat{ABO} = 90^0$ (cmt)

$\Rightarrow$ $I;B$ cùng thuộc đường tròn đường kính OA (cung chứa góc 90^0)

$\Rightarrow$ $I;B$; O ; A cùng thuộc đường tròn (sự xác định đường tròn)

b) Có AB ; AC lần lượt là tia tiếp tuyến tại B và C của (O) (gt)

$\Rightarrow$ $AB = AC$ (t.c 2 tiếp tuyến giao nhau)

Có $B;C \in (O)$ (gt) $\Rightarrow OB = OC$ (tính chất điểm thuộc đường tròn)

$\left.\begin{matrix} AB = AC(cmt) \\ OB = OC(cmt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ AO là trung trực đoạn BC (tập hợp điểm cách đều 2 mút đoạn)

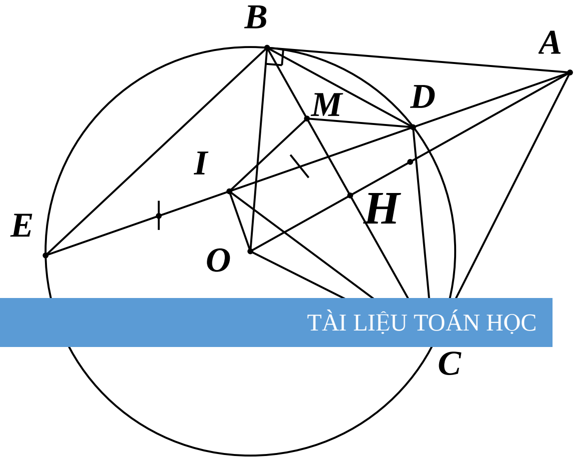
Mà $\{H\} = AO \cap BC$ $(gt) \Rightarrow AO \perp BC$ tại H (tính chất trung trực)

Xét $\Delta ABO\left(\widehat{B} = 90°\right)$ có $BH \perp OA$ tại H (cmt) $\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (Hệ thức lượng)

Có AB là tia tiếp tuyến tại B của (O) (gt)

$\Rightarrow$ $\widehat{ABD} = \widehat{BED}$ (góc giữa tiếp tuyến với dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{BD}$)

c) Có $\widehat{ACO} = 90°$ (cmt)



$\Rightarrow\ C \in$ đường tròn đ.kính AO (cung chứa góc $90°$)

Xét đường tròn đkính AO có : $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Có $MI // BE\ (gt) \Rightarrow\ \widehat{BED} = \widehat{MID}$ (tính chất hai đường thẳng song song)

Xét (O) có $\widehat{BED} = \widehat{BCD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$), mà $\widehat{BED} = \widehat{MID}$ (cmt)

$\Rightarrow\ \widehat{MID} = \widehat{BCD}\ \Rightarrow\ \widehat{MID} = \widehat{MCD}$

Xét tứ giác $IMDC$ có : $\widehat{MID} = \widehat{MCD}$, mà hai đỉnh $M;I$ kề nhau cùng nhìn DC

$\Rightarrow\ MDCI$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MDCI$ có : $\widehat{DIC} = \widehat{MDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

$\Rightarrow\ \widehat{AIC} = \widehat{MDC}$, mà $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{MDC}$ (bắc cầu)

$\Rightarrow AB // MD$ (dhnb) , mà $AB \perp OB$ (cmt)

$\Rightarrow\ MD \perp OB$ (quan hệ từ vuông góc và song song).

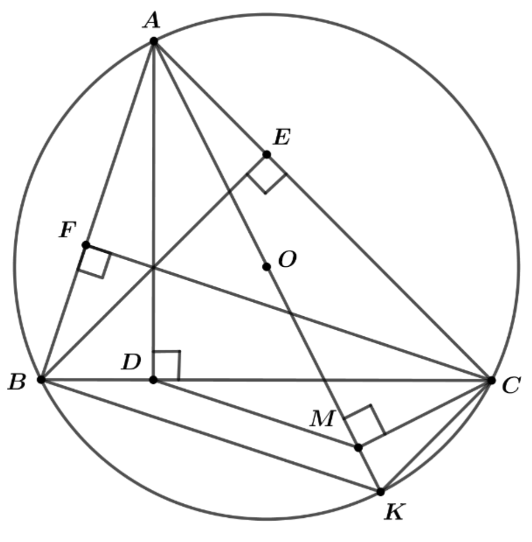
Bài 43. Cho ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O,R). Vẽ các đường cao AD, BE, CF của ΔABC.

a) Chứng minh: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh: ΔABD đồng dạng với ΔAKC và $AB.AC = 2.AD.R$.

c) Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên AK. Chứng minh: $MD // BK$.

Lời giải



a) Vì BE là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow\ BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90°$.

Vì CF là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFB} = 90°$.

Xét tứ giác $BFEC$ có: $\widehat{BEC} = \widehat{CFB} = 90° (cmt)$.

Mà $E; F$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC.

Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Vì AK là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{ACK} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Có AD là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90°$.

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ hay $\widehat{ABD} = \widehat{AKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Xét ΔABD và ΔAKC có:

$$\begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90° (cmt) \\ \widehat{ABD} = \widehat{AKC} (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AKC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AB.AC = AD.AK.$$

Mà AK là đường kính của (O) nên $AK = 2R$

Suy ra, $AB.AC = 2.AD.R$ (đpcm).

c) Vì AD là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADC} = 90°$.

M là hình chiếu của C lên $AK \Rightarrow CM \perp AK \Rightarrow \widehat{AMC} = 90°$.

Xét tứ giác $ADMC$ có: $\widehat{ADC} = \widehat{AMC} = 90° (cmt)$

Mà $D; M$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC.

Suy ra, tứ giác $ADMC$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC). (1)

Xét (O) có: $\widehat{KBC} = \widehat{KAC}$ hay $\widehat{KBC} = \widehat{MAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{KBC}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị

Suy ra, $DM // BK$ (đpcm).

Bài 44. Cho đường tròn $(O; R)$, dây MN $(MN < 2R)$. Trên tia đối của tia MN lấy điểm A. Từ A kẻ tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm).

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

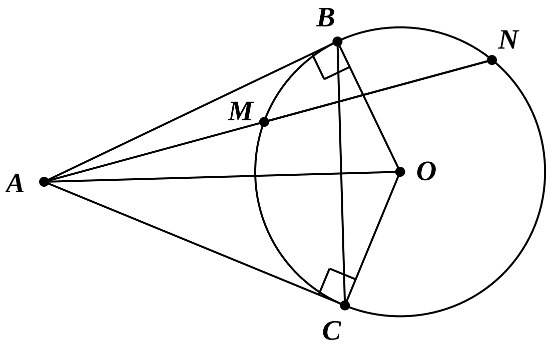
b) Chứng minh $AB^2 = AC^2 = AM.AN$

c) Gọi I là trung điểm của MN. Kẻ BI cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh $EC // AN$.

d) Gọi H là giao điểm OA và BC. Chứng minh HB là tia phân giác của góc MHN.

Lời giải

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.



AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C (GT)

$\Rightarrow$ $AB \perp BO$ tại B ; $AC \perp CO$ tại C (t/c của tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$

Xét tứ giác $ABOC$ có

$\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180°$ (chứng minh trên)

Mà $\widehat{ABO}, \widehat{ACO}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABOC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn (định nghĩa).

b) Chứng minh $AB^2 = AM.AN$

AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C (GT)

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow AB^2 = AC^2$; (1)

Xét (O): $\widehat{ABM}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BM}$

$\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BM}$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ANB}$ (tính chất)

Xét ΔABM và ΔANB có :

$\widehat{BAN}$ chung

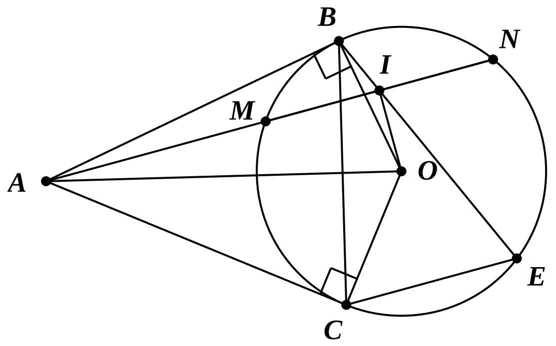
$\widehat{ABM} = \widehat{ANB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ANB\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AN}{AB} \Rightarrow AB^2 = AM.AN$; (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB^2 = AC^2 = AM.AN$

c) Chứng minh $EC // AN$ **.**



Xét (O): I là trung điểm của dây MN không đi qua tâm O(GT)

$\Rightarrow OI \perp MN$ tại I (Quan hệ giữa đường kính và dây cung) $\widehat{AIO} = 90°$

Xét tứ giác $AIOC$ có: $\widehat{AIO} + \widehat{ACO} = 90° + 90° = 180°$ (cmt)

Mà $\widehat{AIO}, \widehat{ACO}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AIOC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

Mà bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Năm điểm A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

Xét đường tròn đi qua 5 điểm A, B, I, O, C có

$\widehat{BIA}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$

$\widehat{BCA}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow \widehat{BIA} = \widehat{BCA}$ (tính chất); (3)

Xét (O): $\widehat{BCA}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BC}$

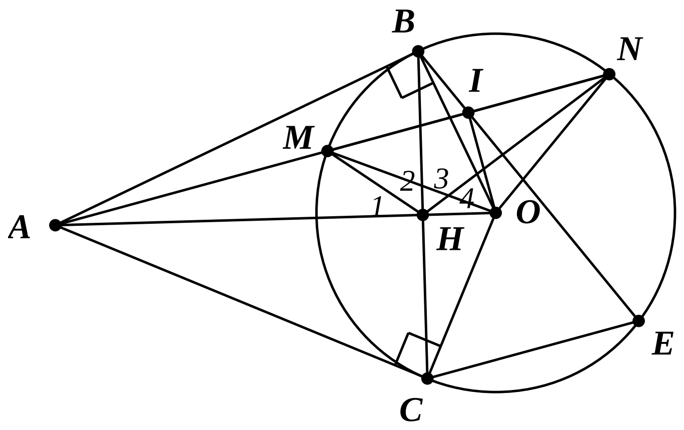
$\widehat{BEC}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BEC}$ (tính chất) ; (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BIA}$ (tính chất bắc cầu)

Mà hai góc $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BIA}$ nằm ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EC // AN$.

4) Chứng minh HB là tia phân giác của góc MHN.



$AB = AC$ (cmt), $OB = OC = R \Rightarrow$ AO là đường trung trực của BC

$\Rightarrow AO \perp BC$ tại H.

Xét ΔABO vuông tại B, có BH là đường cao

$AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng)

Mà $AB^2 = AM.AN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AM.AN = AH.AO \Rightarrow \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AO}{AN}$

Xét ΔAMH và ΔAON có

$\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AO}{AN}$ (cmt); $\widehat{MAH}$ chung $\Rightarrow \Delta AMH \backsim \Delta AON$ $(g.g)$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{ANO}$ (hai góc tương ứng)

Xét tứ giác $MHON$, có: $\widehat{H_1} = \widehat{ANO}$ (cmt). Mà $\widehat{H_1}$ và $\widehat{ANO}$ nằm ở vị trí đối nhau của tứ giác $MHON$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MHON$ nội tiếp

$\widehat{H_4} = \widehat{OMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{ON}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MHON$) (5)

$OM = ON = R \Rightarrow \Delta MON$ cân tại O (dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ANO}$ (tính chất) ; (6)

Mà $\widehat{ANO} = \widehat{H_1}$ (chứng minh trên) ; (7)

Từ (5), (6) và (7) $\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_4}$

Mà $\widehat{H_1}+\widehat{H_2}=90^0;\widehat{H_3}+\widehat{H_4}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{H_2}=\widehat{H_3}\Rightarrow HB$ là tia phân giác của $\widehat{MHN}$

Bài 45. Cho đường tròn tâm O và một dây cung AB không đi qua tâm. Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ, cắt dây AB tại D. Gọi M là một điểm bất kì trên cung lớn AB, QM cắt AB tại I, PM cắt AB tại C.

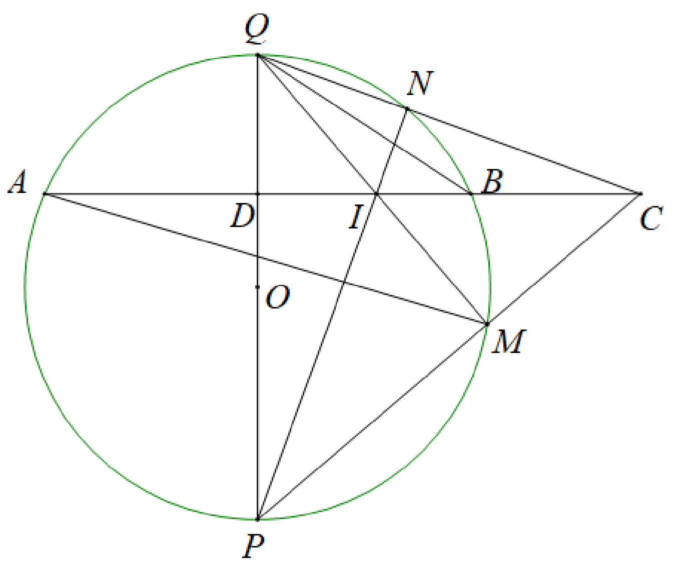
a) Chứng minh tứ giác $DIMP$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $CM.CP=CI.CD$.

c) Gọi N là giao điểm của đường tròn tâm O và đoạn thẳng CQ. Chứng minh PN, QI, AB đồng qui.

d) Xác định vị trí của điểm M trên cung lớn AB để tích $IM.IQ$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



1) Chứng minh tứ giác $DIMP$ là tứ giác nội tiếp

+ Xét (O); ta có:

P là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}\Rightarrow OP\perp AB$ hay $PD\perp AB\Rightarrow \widehat{PDI}=90^\circ$

PQ là đường kính và $M\in(O)\Rightarrow \widehat{PMI}=90^\circ$

+ Xét tứ giác $DIMP$ có:

$\widehat{PDI}+\widehat{PMI}=90^\circ+90^\circ=180^\circ\Rightarrow$ tứ giác $DIMP$ nội tiếp.

1) Chứng minh $CM.CP = CI.CD$.

Xét ΔCIM và ΔCPD có:

$\widehat{MCI}$ chung

$\widehat{CMI} = \widehat{CDP} = 90°$

$\Rightarrow \Delta CIM \backsim \Delta CPD(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CI}{CP} \Rightarrow CM.CP = CD.CI$ (đpcm).

2) Gọi N là giao điểm của đường tròn tâm O và đoạn thẳng CQ. Chứng minh PN, QI, AB đồng qui.

+ Xét ΔCPQ có QM, CD là các đường cao và $QM \cap \text{CD} = \{I\}$

$\Rightarrow I$ là trực tâm của $\Delta CPQ \Rightarrow PI \perp QC$ (1)

+ Xét (O); ta có:

PQ là đường kính và $N \in (O) \Rightarrow \widehat{PNQ} = 90° \Rightarrow PN \perp QC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: P, I, N thẳng hàng hay PN, QI, AB đồng qui

3) Xác định vị trí của điểm M trên cung lớn AB để tích $IM.IQ$ đạt giá trị lớn nhất.

+ Xét ΔQBI và ΔAMI có:

$\widehat{QBI} = \widehat{IMA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{QA}$)

$\widehat{BQI} = \widehat{IAM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$)

$\Rightarrow \Delta QBI \sim \Delta AMI(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{IQ}{IA} = \dfrac{IB}{IM} \Rightarrow IQ.IM = IA.IB$

+ Áp dụng định lí Cô – si; ta có:

$2IA.IB \le IA^2 + IB^2 \Rightarrow 4IA.IB \le (IA + IB)^2 \Rightarrow IA.IB \le \dfrac{(IA+IB)^2}{4} = \dfrac{AB^2}{4}$ không đổi

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $IA = IB \Rightarrow I \equiv D \Rightarrow M \equiv P$

Vậy $M \equiv P$ thì tích $IM.IQ$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 46. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M thuộc đoạn OA sao cho $AM = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại M. Gọi K là điểm bất kì trên cung lớn $CD(K \neq B; K \neq C; K \neq D)$. Gọi giao điểm của AK với CD là E.

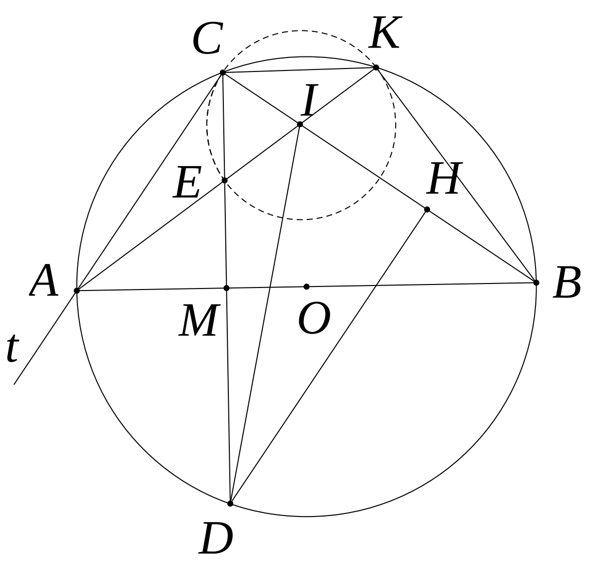
a) Chứng minh tứ giác $KEMB$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{AKC}$ và $AC^2 = AE.AK$.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KEC. Chứng minh 3 điểm $C; I; B$ thẳng hàng.

d) Tìm vị trí của K trên cung lớn $CD(K \neq B; K \neq C; K \neq D)$ để độ dài đoạn thẳng DI nhỏ nhất.

Lời giải



a) Vì BE là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$.

Vì CF là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFB} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $BFEC$ có: $\widehat{BEC} = \widehat{CFB} = 90^\circ (cmt)$.

Mà $E; F$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC.

Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Vì AK là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{ACK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Có AD là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$.

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ABC}=\widehat{AKC}$ hay $\widehat{ABD}=\widehat{AKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Xét ΔABD và ΔAKC có:

$$\begin{cases}\widehat{ADB}=\widehat{ACK}=90^\circ(cmt)\\ \widehat{ABD}=\widehat{AKC}(cmt)\end{cases}\Rightarrow \Delta ABD\backsim\Delta AKC(g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AK}=\frac{AD}{AC}\Leftrightarrow AB.AC=AD.AK.$$

Mà AK là đường kính của (O) nên $AK=2R$

Suy ra, $AB.AC=2.AD.R$ (đpcm).

c) Vì AD là đường cao của $\Delta ABC\Rightarrow AD\perp BC\Rightarrow \widehat{ADC}=90^\circ$.

M là hình chiếu của C lên $AK\Rightarrow CM\perp AK\Rightarrow \widehat{AMC}=90^\circ$.

Xét tứ giác $ADMC$ có: $\widehat{ADC}=\widehat{AMC}=90^\circ(cmt)$

Mà $D;M$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC.

Suy ra, tứ giác $ADMC$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MDC}=\widehat{MAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).
(1)

Xét (O) có: $\widehat{KBC}=\widehat{KAC}$ hay $\widehat{KBC}=\widehat{MAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC)
(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MDC}=\widehat{KBC}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị

Suy ra, $DM\ //\ BK$ (đpcm).

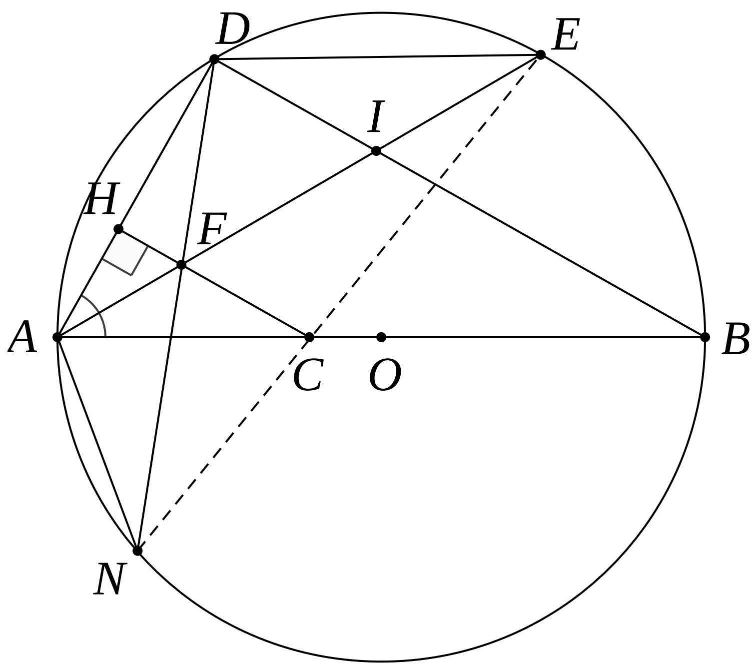
Bài 47. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm D trên đường tròn (O) $(D\neq A;B)$. Lấy điểm C trên đường kính AB, kẻ $CH\perp AD$ tại H. Đường phân giác trong của $\widehat{DAB}$ cắt CH tại F, cắt BD tại I và cắt đường tròn tại E. Đường thẳng DF cắt đường tròn (O) tại điểm N. Chứng minh:

1) $ED^2=EI.EA$.

2) Tứ giác AFCN nội tiếp được đường tròn.

3) Ba điểm C,N,E thẳng hàng.

Lời giải



1) $ED^2 = EI.EA$

Vì AE là phân giác của $\widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{EAB}$

Xét (O) có: $\widehat{BDE} = \widehat{EAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{EB}$)

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{DAE}$ (cùng bằng $\widehat{BAE}$) hay $\widehat{IDE} = \widehat{DAE}$

Xét ΔADE và ΔDIE có:

$\widehat{DEA}$ chung

$\widehat{DAE} = \widehat{IDE}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta DIE$ $(g-g)$.

$\Rightarrow \dfrac{DE}{EI} = \dfrac{EA}{DE} \Rightarrow ED^2 = EI.EA$.

2). Tứ giác AFCN nội tiếp được đường tròn.

Xét (O) có $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow BD \perp AD$ mà $CH \perp AD$ (gt)

Suy ra CH // $BD \Rightarrow \widehat{HCA} = \widehat{DBA}$ (hai góc đồng vị)

Xét (O) có $\widehat{DBA} = \widehat{AND}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$)

Do đó: $\widehat{HCA} = \widehat{AND}$ (cùng bằng $\widehat{DBA}$) hay $\widehat{ACF} = \widehat{ANF}$

Xét tứ giác AFCN có $\widehat{FCA} = \widehat{FNA}$ mà hai góc có hai đỉnh kề cùng nhìn đoạn thẳng AF

Suy ra tứ giác AFCN nội tiếp được đường tròn.

3). Ba điểm C, N, E thẳng hàng.

Xét (O) có $\widehat{DAE} = \widehat{DNE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DE}$)

Tứ giác AFCN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FAC}=\widehat{FNC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{FC}$)

Mà $\widehat{DAE}=\widehat{FAC}$ (AE là phân giác của $\widehat{DAB}$)

Suy ra $\widehat{DNE}=\widehat{FNC}$ hay $\widehat{DNE}=\widehat{DNC}$

Hay $NE;NC$ trùng nhau hay ba điểm C,N,E thẳng hàng.

Bài 48. Cho đường tròn tâm (O) và dây BC cố định không đi qua O. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB<AC$. Kẻ đường kính AK, E là hình chiếu của C trên AK. M là trung điểm của BC.

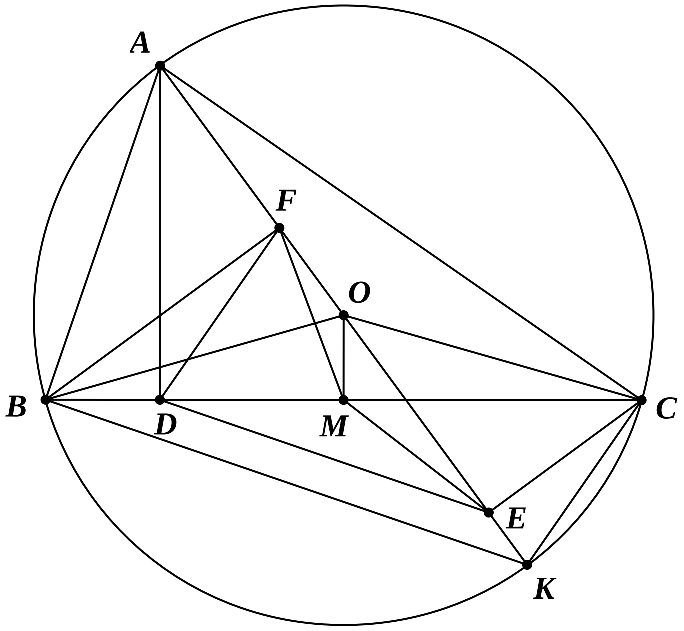
1) Chứng minh rằng C, E, O, M cùng thuộc một đường tròn.

2) $AD\perp BC$ tại D. Chứng minh rằng $AD.AK=AB.AC$.

3) Chứng minh rằng $DE//BK$ và ΔMDE cân.

4) F là hình chiếu của B trên AK. Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là 1 điểm cố định.

Lời giải



1) ΔOBC cân tại O, M là trung điểm của BC nên OM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao. Suy ra $OM\perp BC\Rightarrow \widehat{OMC}=90^o$

Theo bài ra, E là hình chiếu của C trên AK nên $CE\perp AK$

$\Rightarrow CE\perp EO\Rightarrow \widehat{OEC}=90^o$.

Tứ giác $CEMO$ có: $\widehat{OMC}=\widehat{OEC}=90^o$ $\Rightarrow CEMO$ nội tiếp.

Do đó C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn.

2) Xét ΔDBA và ΔCKA có

+) $\widehat{ADB}=\widehat{ACK}=90°$

+) $\widehat{ABD}=\widehat{AKC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Nên $\Delta DBA\sim\Delta CKA$.

Do đó ta có: $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AK}$.

Hay $AD.AK=AB.AC$ (đpcm).

3) Theo bài ra $\begin{cases} AD\perp BC \\ AE\perp EC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\widehat{ADC}=90^o \\ \widehat{AEC}=90^o\end{cases}$ nên tứ giác $ADEC$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{CAE}=\widehat{CDE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE) (1)

Ta lại có, $\widehat{CBK}=\widehat{CAE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CK) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBK}=\widehat{CDE}$.

(3)

Suy ra $DE//BK$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

Tứ giác $CEMO$ nội tiếp nên $\widehat{EMC}=\widehat{EOC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$).

(4)

Có: $\widehat{KBC}=\dfrac{1}{2}\widehat{KOC}$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{KC}$ của (O)).

(5)

Từ (3); (4) và (5) suy ra: $\widehat{EMC}=2.\widehat{CDE}$.

ΔMDE có $\widehat{EMC}=\widehat{MDE}+\widehat{MED}$ (góc ngoài của tam giác) mà $\widehat{EMC}=2.\widehat{MDE}$

Nên: $\widehat{MDE}=\widehat{MED}$. Do đó, ΔMDE cân tại M .

4) Dễ thấy tứ giác $OMBF$ nội tiếp nên $\widehat{OBM}=\widehat{MFO}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MO}$).

Lại có: Tứ giác $OMEC$ nội tiếp nên $\widehat{MEO}=\widehat{MCO}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MO}$).

Mà $\widehat{OBM}=\widehat{OCM}$ (ΔOCB cân tại O).

Do đó $\widehat{MFO}=\widehat{MEO}$ $\Rightarrow\Delta EMF$ cân tại $M\Rightarrow ME=MF$.

Mà $ME=MD$ (Tam giác MDE cân tại M).

Suy ra: $MD=ME=MF$.

Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF .

Mà M là trung điểm của BC nên M là điểm cố định. Vậy Khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

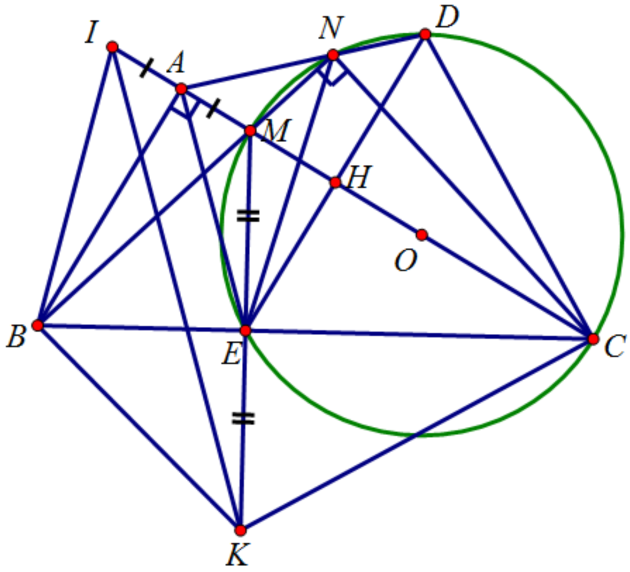
Bài 49. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $(AB<AC)$. Lấy điểm M thuộc cạnh AC. Vẽ đường tròn (O) đường kính MC cắt BC tại E, BM cắt (O) tại N, AN cắt (O) tại D, ED cắt AC tại H.

1)Chứng minh tứ giác $BANC$ nội tiếp.

2)Chứng minh $MH.HC=EH^2$ và M cách đều ba cạnh của tam giác ANE.

3)Lấy I đối xứng với M qua A, lấy điểm K đối xứng với M qua E. Tìm vị trí của M để đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải



1) Tứ giác $BANC$ có :

$\widehat{BAC}=90^\circ$ (do tam giác ABC vuông ở A)

$\widehat{BNC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Do đó $BANC$ là tứ giác nội tiếp.

2)Ta có $\widehat{MEC}=90^\circ$ nên $BAME$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{ABE}=\widehat{EMC}$.

Mặt khác $BANC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{DNC}$.

Suy ra $\widehat{EMC}=\widehat{DNC}$, nên $\widehat{ECM}=\widehat{DCM}$, hay M là điểm chính giữa cung ED.
Do đó $ED\perp CM$.
Tam giác MEC vuông ở E và có EH là đường cao.
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $EH^2=HC.HM$.
+ Ta chứng minh M là giao của các đường phân giác trong của tam giác ANE.
Vì $BANC$ nội tiếp nên $\widehat{ANB}=\widehat{ACB}$; mà $MNCE$ nội tiếp nên $\widehat{MNE}=\widehat{MCE}$.
Suy ra $\widehat{ANB}=\widehat{BNE}$, hay BN là phân giác của góc ANB.
Vì $BAME$ nội tiếp nên $\widehat{ABM}=\widehat{AEM}$, mà $\widehat{ABN}=\widehat{ACN}$ và $\widehat{MEN}=\widehat{MCN}$
Suy ra $\widehat{AEM}=\widehat{NEM}$ hay EM là phân giác trong góc AEN.
Vậy M là giao điểm của các đường phân giác trong của tam giác ANE, tức là M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ANE nên cách đều các cạnh của tam giác này.

3)Từ giả thiết ta suy ra tam giác IBM cân ở B nên $\widehat{BIM}=\widehat{BMI}$ và $\Delta BMC=\Delta BKC$.

Suy ra $\widehat{BIC}+\widehat{BKC}=\widehat{BMI}+\widehat{BMC}=180^\circ$, hay $BICK$ là tứ giác nội tiếp.
Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK là đường tròn luôn đi qua hai điểm B, C cố định.
Do đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK nhỏ nhất khi và chỉ khi BC là đường kính.

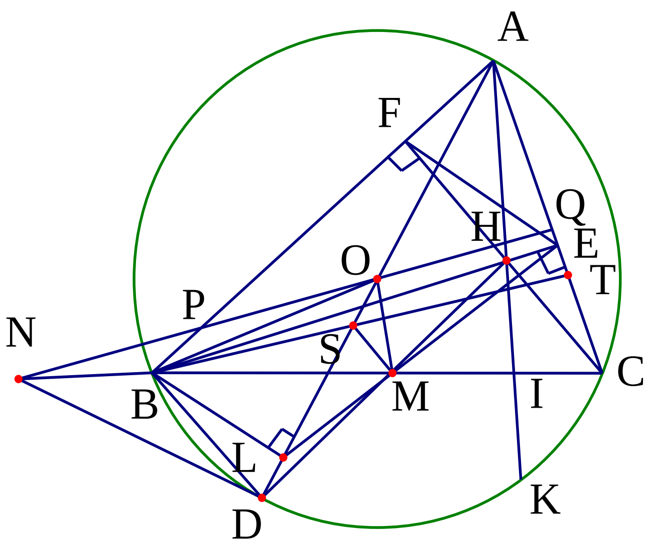
Khi đó $\widehat{BIM}=\widehat{BKC}=90°$. Suy ra $I\equiv M\equiv A$.

Bài 50. Cho tam giác $ABC\left(AB>AC\right)$ nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O;\ R\right)$, hai đường cao BE và CF của tam giác cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp được đường tròn.

2) Tia AH cắt BC tại I và cắt đường tròn $\left(O\right)$ ở K, kẻ đường kính AD. Gọi M là giao điểm của BC và HD, L là hình chiếu của B trên AD. Chứng minh $\widehat{LMB}=2\widehat{CBE}$ và ba điểm $E,\ M,\ L$ thẳng hàng.

3) Tiếp tuyến tại D của đường tròn $\left(O\right)$ cắt đường thẳng BC tại N, tia NO cắt $AB,\ AC$ theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh O là trung điểm của PQ.



1) Xét tứ giác $BCEF$ có: $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^0$

Mà E,F là hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh BC nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

2) Chứng minh $\widehat{LMB}=2\widehat{CBE}$ và ba điểm $E,\ M,\ L$ thẳng hàng.

Ta có:

$\begin{matrix} BH\perp AC, CD\perp AC\Rightarrow BH//CD \\ CH\perp AB, BD\perp AB\Rightarrow CH//BD \end{matrix}$ nên tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

Suy ra M là trung điểm của HD mà O là trung điểm của AD nên OM là đường trung bình của tam giác AHD. Do đó OM //AH mà $AH\perp BC\Rightarrow OM\perp BC$.

Xét tứ giác $BMOL$ có $\widehat{BLO}=\widehat{BMO}=90^0$ mà 2 góc ở 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BO nên tứ giác $BMOL$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{LMB} = \widehat{LOB}$ (cùng chắn cung LB).

Mà $\widehat{LOB} = 2\widehat{BCD}$, mà $\widehat{BCD} = \widehat{CBE}$ (do $BDCH$ là hình bình hành).

$\Rightarrow \widehat{LMB} = 2\widehat{CBE}$

Ta có tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp của đường tròn tâm M đường kính BC .

$\widehat{CME} = 2\widehat{CBE}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{LMB} = \widehat{CME}$ mà $\widehat{LMB} + \widehat{LMC} = 180^0$ $\Rightarrow \widehat{CME} + \widehat{LMC} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{LME} = 180^0$. Do đó L, M, E thẳng hàng.

3)

Qua B kẻ đường thẳng song song với PQ cắt AD tại S, AC tại T .

$\Rightarrow \widehat{CNQ} = \widehat{SBM}$ (đồng vị)

Ta có $\widehat{NDO} = \widehat{NMO} = 90^0$ nên tứ giác $OMDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CNQ} = \widehat{MDS}$

$\Rightarrow \widehat{MDS} = \widehat{SBM}$ suy ra tứ giác $SMDB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{SDB} = \widehat{SMB}$ $\Rightarrow \widehat{SMB} = \widehat{TCB} \Rightarrow MS//CT$

Xét tam giác BCT có $SM // CT$, M là trung điểm của BC .

Suy ra S là trung điểm của BT .

Xét tam giác ABT có $PQ//BT$.

Theo hệ quả Ta-let: $\dfrac{PO}{BS} = \dfrac{AO}{SA} = \dfrac{OQ}{ST}$ mà $SB = ST \Rightarrow OP = OQ$

Từ đó O là trung điểm của PQ .

Bài 51. Một hình trụ có chiều cao bằng hai lần đường kính đáy. Biết đường kính đáy dài 4 cm. Tính thể tích của hình trụ đó.

Lời giải

Một hình trụ có chiều cao bằng hai lần đường kính đáy. Biết đường kính đáy dài 4 cm. Tính thể tích của hình trụ đó.

Bán kính đáy của hình trụ là $r = 4:2 = 2\ (\text{cm})$.

Chiều cao của hình trụ là $h = 4.2 = 8\ (\text{cm})$.

Do đó thể tích hình trụ là $V = \pi r^2 h = \pi.2^2.8 = 32\pi\ (\text{cm}^3)$.

Bài 52. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Một điểm M di động trên cung nhỏ BC, AM cắt CD tại N và tia CM cắt AB tại S .

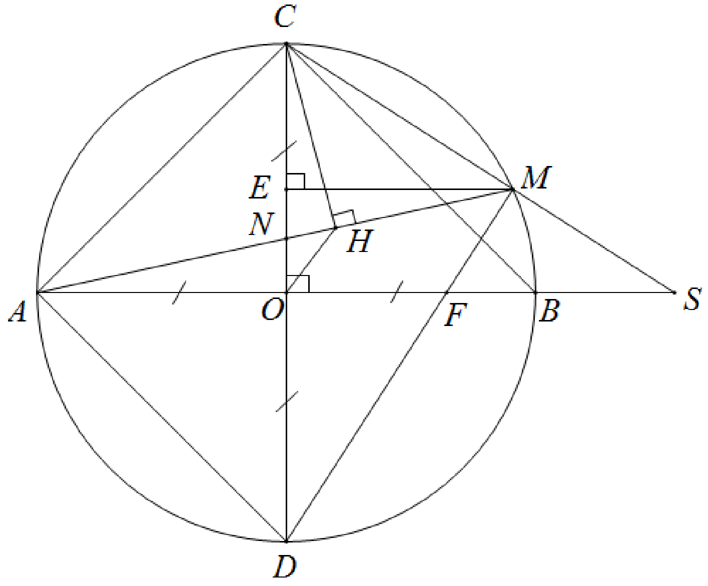
1) Chứng minh $SM.SC = SA.SB$.

2) Kẻ CH vuông góc với AM tại H. Chứng minh tứ giác $AOHC$ nội tiếp đường tròn.

3) Gọi E là hình chiếu của M trên CD. Chứng minh $OH//DM$ và H là tâm đường tròn nội tiếp ΔMOE.

4) Gọi giao điểm của DM và AB là F. Chứng minh diện tích tứ giác $ANFD$ không đổi, từ đó suy ra vị trí của điểm M để diện tích ΔMNF lớn nhất.

Lời giải



1)Chứng minh $SM.SC = SA.SB$

Xét ΔSCB và ΔSAM, ta có:

$\hat{S}$ là góc chung.

$\widehat{SCB} = \widehat{SAM}$ (Cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$)

Vậy $\Delta SCB \backsim \Delta SAM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{SC}{SA} = \dfrac{SB}{SM}$

$\Leftrightarrow SM.SC = SA.SB$ (đpcm)

2) Kẻ CH vuông góc với AM tại H. Chứng minh tứ giác $AOHC$ nội tiếp đường tròn.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vì } CH \perp AM \text{ tại } H \Rightarrow \widehat{CHA} = 90^\circ \\ AB \perp CD \text{ tại } O \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$Tứ giác $AOHC$ nội tiếp đường tròn. (Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau)

3) Gọi E là hình chiếu của M trên CD. Chứng minh $OH//DM$ và H là tâm đường tròn nội tiếp ΔMOE.

<u>* Chứng minh $OH//DM$</u>

Xét (O), có $\widehat{CAM} = \widehat{CDM}$ (Cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AOHC$, có $\widehat{CAH} = \widehat{COH}$ (Cùng chắn $\overset{\frown}{CH}$)

$\Rightarrow \widehat{COH} = \widehat{CDM} \ \left(= \widehat{CAH}\right)$

$\Rightarrow OH // DM$ (Cặp góc đồng vị bằng nhau)

<u>* Chứng minh</u> H là tâm đường tròn nội tiếp ΔMOE.

Ta có: $\widehat{COH} = \widehat{CDM}$

Mà $\widehat{CDM} = \widehat{OMD}$ (ΔODM cân tại O)

$\widehat{OMD} = \widehat{HOM}$ (Cặp góc so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{COH} = \widehat{HOM} \Rightarrow OH$ là đường phân giác của tam giác ΔMOE (1)

Mặt khác: $ME \perp CD$ tại E

$AB \perp CD$ tại O

$\Rightarrow ME // AB$

$\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{EMH}$

Ta lại có $\widehat{OAM} = \widehat{OMH}$ (ΔOAM cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{EMH} = \widehat{OMH} \Rightarrow MH$ là đường phân giác của tam giác ΔMOE (2)

Từ (1) và (2) suy ra Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MOE.

4) Gọi giao điểm của DM và AB là F. Chứng minh diện tích tứ giác $ANFD$ không đổi, từ đó suy ra vị trí của điểm M để diện tích ΔMNF lớn nhất.

Xét ΔAND và ΔFDA, ta có:

$\widehat{FAD} = \widehat{ADN} \left(= 45°\right)$ (ΔOAD vuông cân tại O)

$\widehat{NAD} = \widehat{AFD} \left(\widehat{NAD} = \widehat{DCM} = \widehat{MFB} = \widehat{AFD}\right)$

Vậy $\Delta AND \backsim \Delta FDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{FA} = \dfrac{ND}{AD}$

$\Leftrightarrow ND.AF = AD^2 = 2R^2$

$\Rightarrow S_{ANFD} = R^2$ không đổi

Mà $S_{AMD} = S_{ANFD} + S_{MNF}$

Do đó S_{MNF} lớn nhất $\Leftrightarrow$ S_{AMD} lớn nhất $\Leftrightarrow$ điểm M nằm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

Bài 53. Cho đường tròn $(O;R)$, điểm M cố định nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MCD bất kì không đi qua (O) (C nằm giữa M và D). Gọi K là trung điểm của CD.

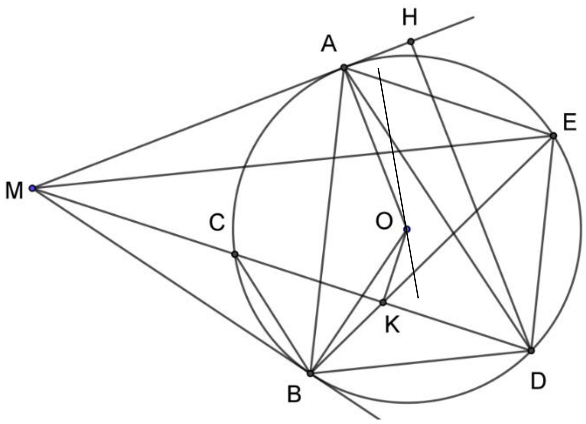
a) Chứng minh 5 điểm: M, A, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MC.MD$ không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến MCD.

c) Gọi E là giao điểm của tia BK với đường tròn (O). Chứng minh AE song song với MK.

d) Tìm vị trí của cát tuyến MCD để diện tích tam giác MDE đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Xét tứ giác $MAOB$ có: $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180°$ và hai góc đó ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ nội tiếp (1).

Xét (O) có OK là đường kính đi qua trung điểm K của dây CD không đi qua tâm O

$\Rightarrow \widehat{OKM} = 90°$ (Định lý đường kính và dây cung)

Xét tứ giác $MAOK$ có: $\widehat{MAO} + \widehat{OKM} = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAOK$ nội tiếp (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ 5 điểm M, A, O, K, B cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Xét (O) có $\widehat{CBM} = \widehat{MDB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{CB}$)

Xét ΔMBC và ΔMDB có:

$\widehat{BMC} = \widehat{DMB}$ (góc chung) và $\widehat{CBM} = \widehat{MDB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MBC \backsim \Delta MDB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{MB}{MD}$

$\Rightarrow MC.MD = MB^2$

Do M cố định , đường tròn (O) cố định nên MB không đổi

$\Rightarrow MC.MD = MB^2$ không đổi.

c) Vì 5 điểm M , A , O , K , B cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow$ Tứ giác $MAKB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BAM}$.

Mà: $\widehat{BAM} = \widehat{BEA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{AB}$).

Do đó: $\widehat{BKM} = \widehat{BEA}$, hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AE // MK$.

d) Do $AE // MD$ $\Rightarrow S_{\Delta MDE} = S_{\Delta MAD}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên tia MA.

$S_{\Delta MAD} = \dfrac{1}{2}.DH.MA$.

Do MA không đổi nên $S_{\Delta MAD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow DH$ lớn nhất.

Mà: $DH \le DA$ (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc), lại có DA là dây cung của đường tròn (O)

$\Rightarrow DA \le 2R$.

Suy ra $DH \le 2R$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow DA$ là đường kính của (O) hay D là điểm đối xứng với A qua O.

Vậy để $S_{\Delta MDE}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ Cát tuyến MCD đi qua điểm đối xứng với A qua tâm O.

Bài 54. Tính thể tích của hình nón biết rằng diện tích đáy là $50,24cm^2$,chiều cao $6cm$.

Lời giải

Vì hình nón có diện tích đáy là $50,24cm^2$ nên ta có : $\pi R^2 = 50,24$.

Thể tích hình nón cần tìm là :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}.50,24.6 = 100,48 (cm^3)$$

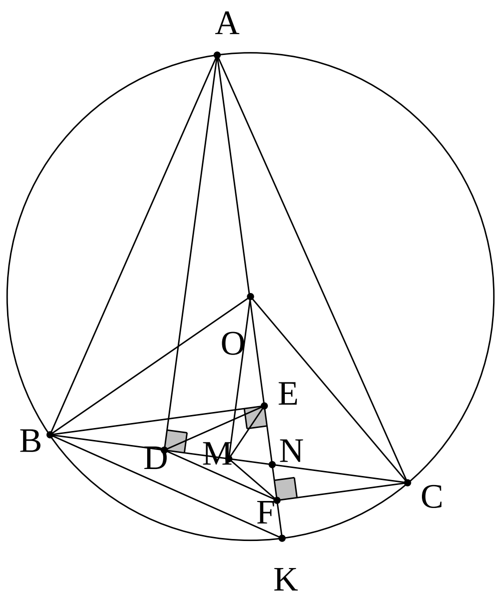
Bài 55. Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK.

a) Chứng minh tứ giác $ABDE$ và tứ giác $ACFD$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $DF // BK$.

c) Cho BC cố định , A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm cố định.

Lời giải



a) Xét tứ giác $ABDE$ có :

$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (vì $AD \perp BC$).

$\widehat{AEB} = 90^\circ$ (vì $BE \perp AK$).

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEB}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDE$ có hai đỉnh D , E kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDE$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $ACFD$ có:

$\widehat{ADC} = 90^\circ$ (vì $AD \perp BC$).

$\widehat{AFC} = 90^\circ$ (vì $CF \perp AK$).

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AFC}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACFD$ có hai đỉnh D , F kề nhau cùng nhìn cạnh AC dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACFD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét đường tròn (O) có : $\widehat{CBK} = \widehat{CAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CK}$).

Vì tứ giác $ACFD$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{CAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CF}$)

$\Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{CBK}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong .

$\Rightarrow DF \,//\, BK$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của AK và BC .

Vì M là trung điểm của $BC \Rightarrow OM \perp BC$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung).

$\Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OMC} = \widehat{OFC}\ (= 90^\circ)$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMFC$ có hai đỉnh $M; F$ cùng nhìn cạnh OC dưới một góc vuông .

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMFC$ là tứ giác nội tiếp .

$\Rightarrow \widehat{MFN} = \widehat{OCN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OM}$).

Xét ΔMFN và ΔOCN có :

$\widehat{MFN} = \widehat{OCN}$ (cmt).

$\widehat{MNF} = \widehat{ONC}$ (hai góc đối đỉnh).

$\Rightarrow \Delta MFN \backsim \Delta OCN$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{MF}{OC} = \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{FN}{CN}$.

Lại có : $\Delta DNF \backsim \Delta ANC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{FN}{CN} = \dfrac{DN}{AN} = \dfrac{DF}{AC}$

Suy ra hai cặp tam giác trên đồng dạng theo cùng một tỉ lệ

$\Rightarrow \Delta DMF \backsim \Delta AOC \Rightarrow \dfrac{DM}{AO} = \dfrac{MF}{OC}$

Mà $OA = OC \Rightarrow DM = MF$.

Xét tứ giác $MEOB$ có: $\widehat{OEB} = \widehat{OMB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ tứ giác $MEOB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{MEN}$

Mà $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (do tam giác OBC cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{MEN}$

Mà $\widehat{OCB} = \widehat{MFN}$ (do tứ giác $OMFC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{MFN}$

$\Rightarrow \Delta MEF$ cân tại M $\Rightarrow ME = MF$.

Lại có : $MD = MF$

$\Rightarrow MD = ME = MF$

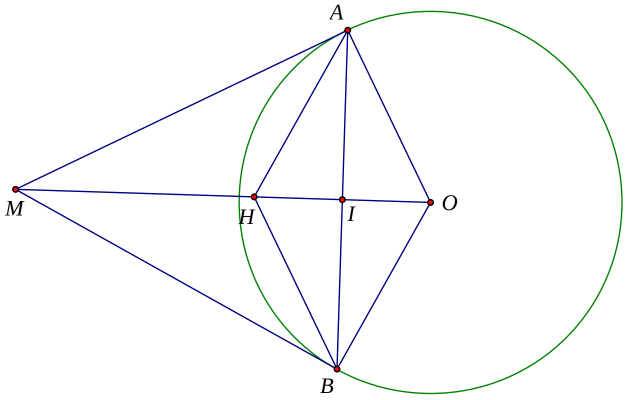
$\Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm M là trung điểm của BC cố định.

Bài 56. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d (M khác A). Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn (B là tiếp điểm, B khác A).

1) Chứng minh tứ giác $OAMB$ nội tiếp.
2) Gọi I là giao điểm của AB và OM . Chứng minh rằng $OI.OM = R^2$.
3) Gọi H là trực tâm của tam giác MAB .Tính chu vi tứ giác $OAHB$ theo R .
4) Khi điểm M chuyển động trên đường thẳng d thì điểm H chuyển động trên đường nào?

Lời giải



1) Tứ giác $OAMB$ có: $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^0$ mà hai góc này là hai góc đối nên tứ giác $OAMB$ nội tiếp.

2) Đường thẳng d tiếp xúc đường tròn (O) tại A $\Rightarrow \widehat{MAO} = 90^o$.

Suy ra tam giác OAM vuông tại A .

Ta có $OA = OB = R$ và $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó OM là đường trung trực của AB $\Rightarrow OM$ vuông góc với AB tại I .

$\Rightarrow AI$ là đường cao của tam giác vuông OAM .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OI.OM = OA^2$.

Mà $OA = R \Rightarrow OI.OM = R^2$.

3) Ta có $AH // OB$ (vì cùng vuông góc với BM) , $BH // OA$ (vì cùng vuông góc với MA).

Suy ra tứ giác $OAHB$ là hình bình hành.

Mà $OH \perp AB$

$\Rightarrow OAHB$ là hình thoi.

$\Rightarrow OA = AB = BH = HO = R$

Do đó chu vi tứ giác $OAHB$ là $4R$.

4) Ta có $AH = AO = R$.

$\Rightarrow H$ luôn cách A một khoảng cố định bằng R.

Do đó điểm H luôn chuyển động trên đường tròn $(A;\ R)$ khi M chuyển động trên d.

Bài 57. Cho đường tròn $(O;\ R)$, đường kính AB. Gọi M làm một điểm thuộc đường tròn sao cho $MA > MB$. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) ở điểm E. Vẽ MP vuông góc với AB ($P \in AB$), MQ vuông góc với AE ($Q \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $AEMO$ nội tiếp.

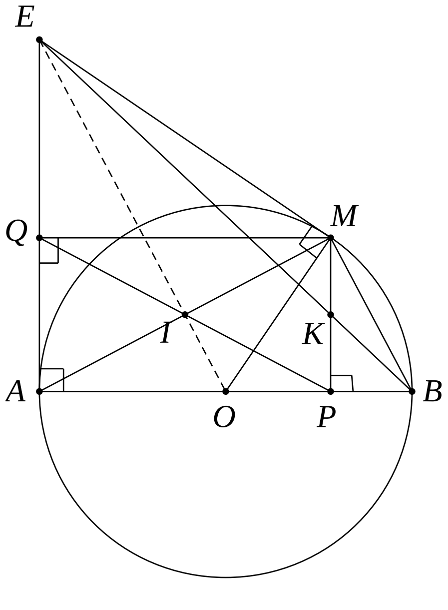
b)Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh tứ giác $AQMP$ là hình chữ nhật, từ đó chứng minh ba điểm O, I, E thẳng hàng.

c) Gọi giao điểm của EB và MP là K.

1. Chứng minh K là trung điểm của MP.

2. Tìm vị trí của điểm M trên (O) để hình chữ nhật $APMQ$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải



a) Vì $EA \perp AB$ tại A $\Rightarrow \widehat{EAB} = 90°$.

Vì $EM \perp MO$ tại M $\Rightarrow \widehat{EMO} = 90°$.

$\Rightarrow \widehat{EAO} + \widehat{EMO} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEMO$ nội tiếp đường tròn.

b) Vì $MP \perp AB$ ($P \in AB$) $\Rightarrow \widehat{MPA} = 90°$

$MQ \perp AE$ $(Q \in AB) \Rightarrow \widehat{MQA} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AQMP$ có $\widehat{EAB} = \widehat{MQA} = \widehat{MPA} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQMP$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$Hai đường chéo PQ và AM cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (tính chất hình chữ nhật).

Mà I là trung điểm của PQ.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AM.

Vì AE, EM là hai tiếp tuyến từ E tới (O) nên $AE = EM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow$ E thuộc đường trung trực của AM.

Mà $AO = OM$ $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của AM.

$\Rightarrow$ OE là đường trung trực của AM.

$\Rightarrow OE$ đi qua trung điểm I của AM.

$\Rightarrow$Ba điểm O, I, E thẳng hàng.

c)1. Vì AE, EM là hai tiếp tuyến từ E tới (O)

$\Rightarrow OE$ là tia phân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $\widehat{OBM} = \frac{1}{2}\widehat{AOM}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AM của đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{OBM}$.

Xét ΔAEO và ΔPMB có:

$\widehat{EAO} = \widehat{MPB}(=90^\circ)$

$\widehat{AOE} = \widehat{OBM}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AEO \backsim \Delta PMB$ (g . g)

$\Rightarrow \frac{OA}{PB} = \frac{EA}{MP}$ (hai cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow MP = \frac{BP \cdot EA}{OA}$

$\Rightarrow MP = 2EA.\frac{BP}{AB}$ $\quad (1)$

Ta có $KP \perp AB$, mà $EA \perp AB$ nên $KP // EA$

Xét tam giác ABE có $KP // EA$ $\Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{PK}{EA}$ (hệ quả của định lí Talet) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MP = 2EA.\frac{PK}{EA} = 2PK$.

Mà K thuộc MP.

Vậy K là trung điểm của MP.

2. Đặt $AP = x$ (điều kiện $x > 0$). $\Rightarrow PB = 2R - x$

$\widehat{AMB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ΔAMB vuông tại M có đường cao MP , ta có:

$MP^2=AP.PB=x(2R-x)\ \Rightarrow MP=\sqrt{x(2R-x)}$

$S_{AQMP}=AP.MP=x\sqrt{x(2R-x)}=x\sqrt{3}.\sqrt{\frac{x}{3}(2R-x)}$

Vì $AP>0$, $MP>0$, $PB>0$ nên $x\sqrt{3}>0$, $\sqrt{\frac{x}{3}}>0$ $\sqrt{2R-x}>0$

Áp dụng bđt Cô-si cho hai số dương $\sqrt{\frac{x}{3}}$ và $\sqrt{2R-x}$ có

$\sqrt{\frac{x}{3}(2R-x)}\le\frac{1}{2}\left[\frac{x}{3}+(2R-x)\right]=R-\frac{x}{3}$

$\Rightarrow x\sqrt{3}.\sqrt{\frac{x}{3}(2R-x)}\le x\sqrt{3}\left(R-\frac{x}{3}\right)$ (1).

$\Rightarrow x\sqrt{3}.\sqrt{\frac{x}{3}(2R-x)}\le 3\sqrt{3}.\frac{x}{3}\left(R-\frac{x}{3}\right)$.

Vì vế trái dương và $x>0$ $\Rightarrow \sqrt{R-\frac{x}{3}}>0$

Áp dụng Cô-si cho 2 số dương $\sqrt{\frac{x}{3}}$ và $\sqrt{R-\frac{x}{3}}$ có :

$\sqrt{\frac{x}{3}\left(R-\frac{x}{3}\right)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}+R-\frac{x}{3}\right)=\frac{R}{2}$

$\Rightarrow\frac{x}{3}\left(R-\frac{x}{3}\right)\le\frac{R^2}{4}$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}\cdot\frac{x}{3}\left(R-\frac{x}{3}\right)\le\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{AQMP}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = 2R - x \\ \dfrac{x}{3} = R - \dfrac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3R}{2} \Leftrightarrow AP = \dfrac{3R}{2}$$

Diện tích hình chữ nhật $AQMP$ lớn nhất khi M là giao điểm của đường tròn tâm O với đường trung trực của đoạn thẳng OB.

Bài 58. Cho $(O;R)$ cố định, dây AB cố định không đi qua tâm O. Qua trung điểm I của dây AB, kẻ đường kính PQ vuông góc với AB (P thuộc cung nhỏ AB). E là điểm bất kì trên cung nhỏ QB (E không trùng với B và Q). QE cắt AB tại M; PE cắt AB tại D.

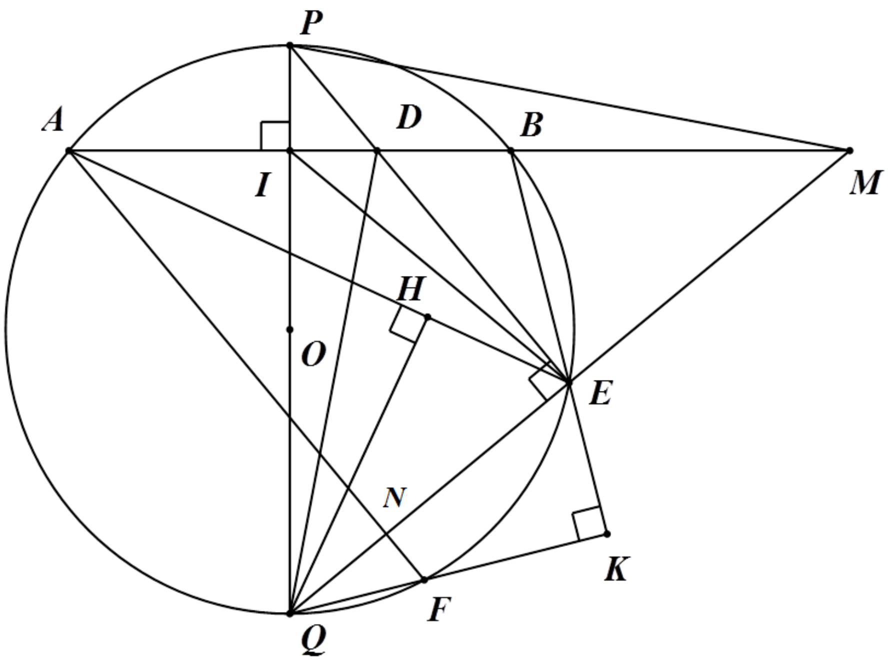
1) Chứng minh 4 điểm P, I, M, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $\widehat{IQD} = \widehat{IMP}$.

3) a) Kẻ tia $Ax // PE$, Ax cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh $BE \perp QF$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ Q xuống AE. Chứng minh chu vi tam giác EHB luôn lớn hơn độ dài đoạn thẳng AB khi điểm E thay đổi trên cung nhỏ QB.

Lời giải



1)

Ta có $\widehat{PIM} = 90°$ nên ba điểm P, I, M cùng thuộc đường tròn đường kính PM.

(1)

Ta lại có $\widehat{PEQ}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)). Suy ra $\widehat{PEM}=90^\circ$. Suy ra ba điểm P, E, M cùng thuộc đường tròn đường kính PM. (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm P, I, M, E cùng thuộc đường tròn đường kính PM.

2)

Tứ giác $IDEQ$ có $\widehat{QID}+\widehat{QED}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên tứ giác $IDEQ$ nội tiếp được một đường tròn.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IDEQ$ có $\widehat{IQD}=\widehat{IED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ID). Mặt khác $\widehat{IED}=\widehat{IEP}=\widehat{IMP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IP trong đường tròn đường kính PM).

Suy ra $\widehat{IQD}=\widehat{IMP}$.

3)

a) **Cách 1:**

Gọi K là giao điểm của BE và QF.

Xét (O) có: $\widehat{APE}=\widehat{ABE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$), $\widehat{PAF}=\widehat{PQF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$).

Mà $\widehat{APE}+\widehat{PAF}=180^\circ$ (do $PE\,//\,AF$)

$\Rightarrow \widehat{ABE}+\widehat{PQF}=180^\circ$ hay $\widehat{IBE}+\widehat{IQK}=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $QIBK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BIQ}+\widehat{BKQ}=180^\circ$.

Mà $\widehat{BIQ}=90^\circ$ suy ra $\widehat{BKQ}=90^\circ \Rightarrow BE\perp QF$.

Cách 2:

Gọi K là giao điểm của BE và QF và gọi N là giao điểm của Ax và QM.

Vì tứ giác $BPQE$ nội tiếp đường tròn (P, E, B, Q cùng thuộc (O))

nên $\widehat{QEK} = \widehat{BPQ}$. (3) (cùng bù $\widehat{QEB}$)

Ta có $\widehat{BPQ} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{QB}$.

Ta có $\widehat{AFQ} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{QA}$.

Vì $PQ \perp AB$ nên Q là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$, suy ra sđ $\overset{\frown}{QB}$ = sđ $\overset{\frown}{QA}$.

Suy ra $\widehat{QPB} = \widehat{AFQ}$. (4)

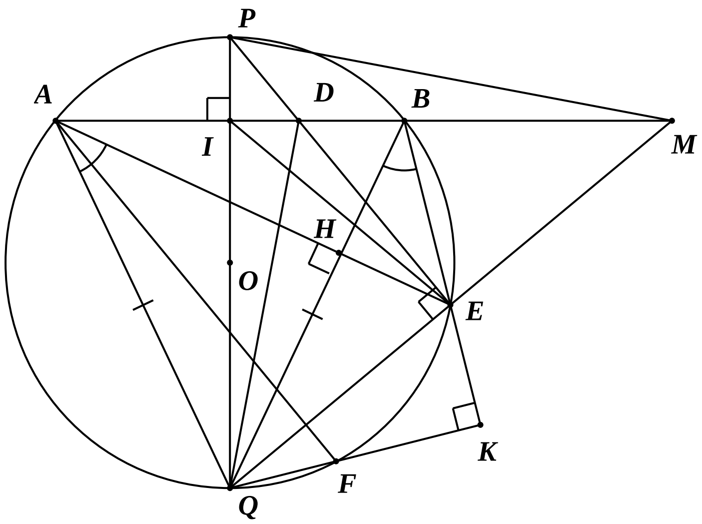
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{QEK} = \widehat{AFQ}$. Suy ra tứ giác $KENF$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{ENF} + \widehat{EKF} = 180°$. (5)

Kẻ tia $Ax // PE$ mà $PE \perp QE$ nên $Ax \perp QE$ hay $\widehat{ENF} = 90°$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{EKF} = 90°$ hay $BE \perp QF$.

b)



Trên AE lấy điểm G sao cho $AG = BE$.

Xét ΔAQG và ΔBQE có

$AQ = BQ$ (Q là điểm chính giữa cung AB nên $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ}$)

$\widehat{QAG} = \widehat{QBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QE của đường tròn (O))

$AG = BE$ (theo cách vẽ)

Do đó $\Delta AQG = \Delta BQE$ (c . g . c).

Suy ra $QG = QE$ (hai cạnh tương ứng).

Suy ra ΔEQG cân tại Q. Mà QH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến. Suy ra $HG = HE$.

Suy ra $P_{BHE} = BH + HE + BE = BH + HG + GA = BH + AH > AB$ (theo bất đẳng thức tam giác).

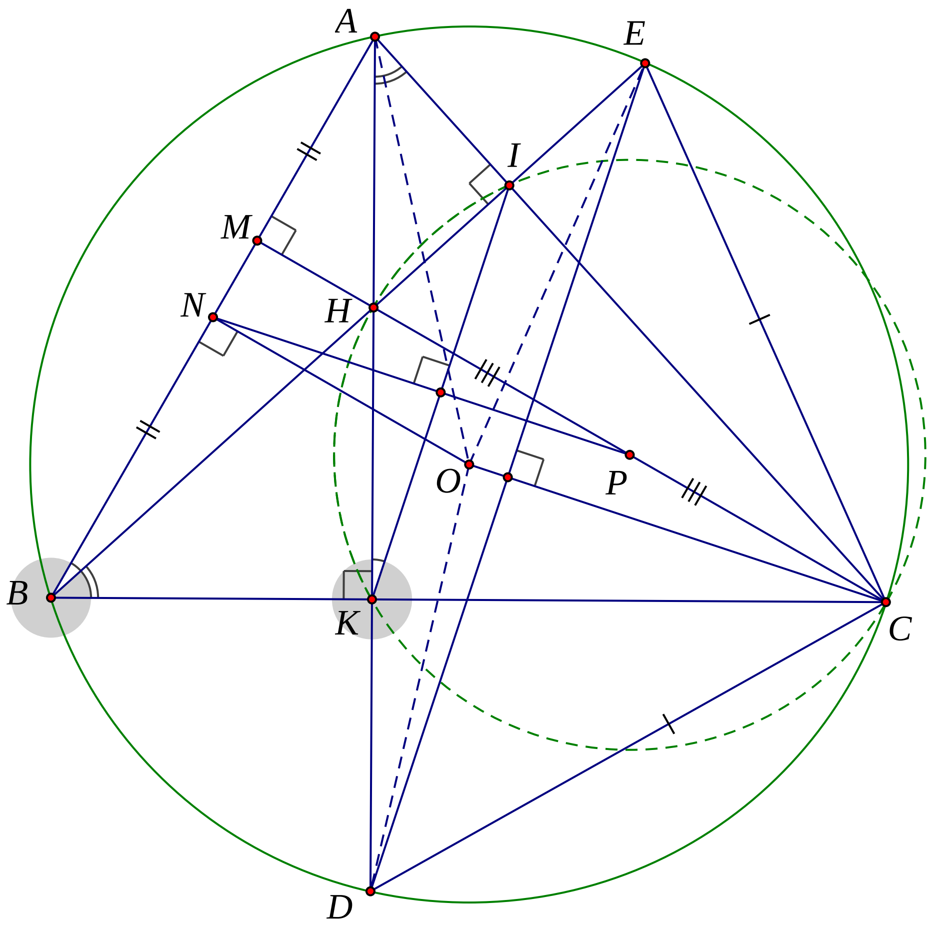
Bài 59. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp $(O;R)$. Các đường cao AK, BI của tam giác ABC cắt nhau tại H. Các đường thẳng AK và BI cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai là D và E. Chứng minh rằng:

1) Chứng minh tứ giác ABKI nội tiếp.

2) Chứng minh $IK // DE$ và $OC \perp IK$.

3) Cho đường tròn (O) và dây AB cố định. Chứng minh rằng khi điểm C di chuyển trên cung lớn AB thì độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CIK luôn không đổi.

Lời giải



1) Chứng minh tứ giác $ABKI$ nội tiếp.

Xét ΔABC có đường cao AK và BI (giả thiết)

$\Rightarrow AK \perp BC$ tại K và $BI \perp AC$ tại I

$\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{AKC} = 90^o$ và $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = 90^o$

Xét tứ giác $ABKI$ có: $\widehat{AKB} = \widehat{AIB} = 90^o$ (Chứng minh trên)

$\Rightarrow$ K và I là hai đỉnh liền kề cùng nhìn cạnh AB dưới một góc bằng nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABKI$ nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết) (đpcm).

2) Chứng minh $IK // DE$ và $OC \perp IK$.

Tứ giác $ABKI$ nội tiếp (Chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{ABI}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AI của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABKI$)

hay $\widehat{AKI} = \widehat{ABE}$ (Do $I \in BE$)

(1)

Ta có : $\widehat{ADE} = \widehat{ABE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AE của đường tròn (O)) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{ADE}$.

Mà $\widehat{AKI}$ và $\widehat{ADE}$ là cặp góc đồng vị nên suy ra $IK // DE$ (đpcm).

Tứ giác $ABKI$ nội tiếp (Chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{KAI} = \widehat{KBI}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ KI của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABKI$) hay $\widehat{DAC} = \widehat{CBE}$ (Do $I \in AC, K \in AD, I \in BE, K \in BC$)

Đường tròn (O) có: $\widehat{DAC} = \widehat{CBE}$ (Chứng minh trên). Mà $\widehat{DAC}$ và $\widehat{CBE}$ là hai góc nội tiếp lần lượt chắn cung nhỏ DC và cung nhỏ EC

$\Rightarrow \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{CE}$ ($\overset{\frown}{DC}, \overset{\frown}{CE}$ là các cung nhỏ) (Hệ quả) $\Rightarrow DC = EC$ (Định lý) (3)

Ta có: $OD = OE$ (Bán kính của (O)) (4)

Từ (3) và (4) suy ra OC là đường trung trực của đoạn DE $\Rightarrow OC \perp DE$ (Tính chất)

Mà $IK // DE$ (Chứng minh trên)

$\Rightarrow OC \perp IK$ (Quan hệ từ vuông góc đến song song) (đpcm).

3) Chứng minh độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CIK luôn không đổi.

Gọi N là trung điểm của AB, P là trung điểm của HC, đường thẳng CH cắt AB tại M

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABKI$ có: $\widehat{AKB} = 90^o$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow$ AB là đường kính

$\Rightarrow$ N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABKI$ (Do N là trung điểm của AB)

Ta có: $\widehat{BIC} = \widehat{AKC} = 90^o$ (Chứng minh trên)

hay $\widehat{HIC} = \widehat{HKC} = 90^o$ (Do $H \in BI, H \in AK$)

Xét tứ giác $HKCI$ có: $\widehat{HIC} + \widehat{HKC} = 90^o + 90^o = 180^o$. Mà $\widehat{HIC}$ và $\widehat{HKC}$ ở vị trí đối nhau nên tứ giác $HKCI$ nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết)

Mà $\widehat{HIC} = 90^o$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow$ HC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HKCI$

$\Rightarrow$ P là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HKCI$ (Do P là trung điểm của HC) và PC là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CIK.

Tam giác ABC có : AK và BI là đường cao và AK cắt BI tại H (giả thiết) nên suy ra CM cũng là đường cao của ΔABC (Tính chất) $\Rightarrow CM \perp AB$ hay $CP \perp AB$ (Do $P \in CM$)(5)

Xét đường tròn (O) có dây AB và N là trung điểm của AB nên suy ra $ON \perp AB$ tại N (Quan hệ đường kính và dây cung)
(6)

Từ (5) và (6) suy ra $CP // ON$ (Quan hệ từ vuông góc đến song song)

Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABKI$ và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HKCI$ cắt nhau tại K và I. Mà N và P lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABKI$ và tứ giác $HKCI$ (Chứng minh trên)

$\Rightarrow NP \perp IK$ (Tính chất đường nối tâm)
(7)

Ta có: $IK \perp OC$ (Chứng minh trên)
(8)

Từ (7) và (8) suy ra $NP // OC$ (Quan hệ từ vuông góc đến song song)

Xét tứ giác NOCP có:

$CP // ON$ (Chứng minh trên)

$NP // OC$ (Chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Tứ giác NOCP là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow ON = PC$ (Tính chất)

Xét ONA vuông tại N (Do $ON \perp AB$ tại N), áp dụng đinh lý Pytago ta có:

$OA^2 = AN^2 + NO^2 \Rightarrow NO^2 = OA^2 - AN^2$

Mặt khác: $OA = R, AN = \dfrac{AB}{2}$ (Do N là trung điểm của AB)

$\Rightarrow NO^2 = R^2 - \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow ON = \sqrt{R^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$ (Do $R > \dfrac{AB}{2}$)

Mà $ON = PC$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow PC = \sqrt{R^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$

Vì (O) cố định và AB cố định nên R và AB không đổi $\Rightarrow$ PC có giá trị không đổi .

Mặt khác PC là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác CIK (Chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CIK luôn không đổi và có giá trị bằng $\sqrt{R^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$ (đpcm).

Bài 60. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định ở ngoài (O). Vẽ qua A cát tuyến ABC (B nằm giữa A và C), AM, AN là các tiếp tuyến với (O) ($M, N \in (O)$ và M thuộc nửa mặt phẳng bờ AC có chứa O, gọi H là trung điểm BC.

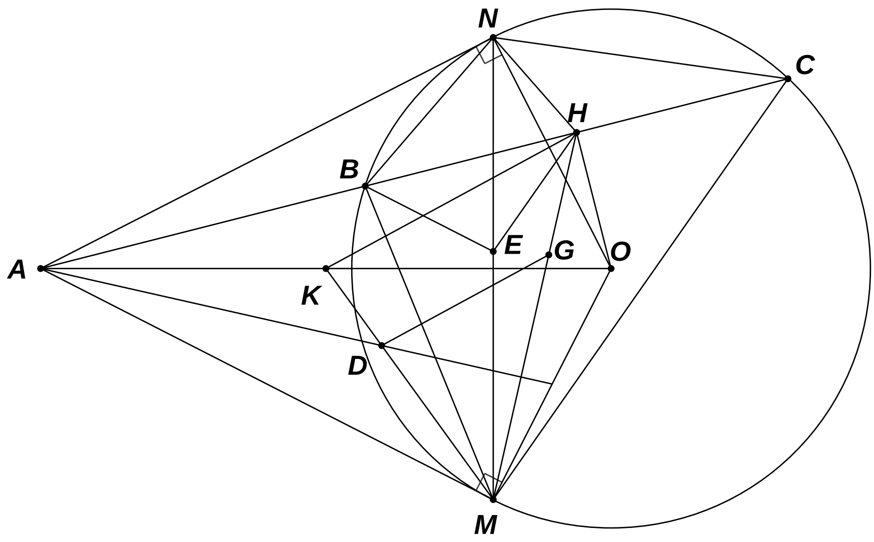
a) Chứng minh: $AM^2 = AB.AC$

b) Chứng minh 5 điểm A, M, N, O, H cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng qua B song song với AM cắt MN ở E. Chứng minh $EH // MC$

d) Khi cát tuyến ABC quay quanh A thì trọng tâm G của tam giác MBC chạy trên đường nào?

Lời giải



a) Xét ΔCMA và ΔMBA

Có $\widehat{MAC}$ chung

và $\widehat{BMA} = \widehat{ACM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BM}$

$\Rightarrow \Delta MBA \backsim \Delta CMA (g.g)$

$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB.AC$

b) Vì AM, AN là các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn (O) (gt)

nên $\widehat{ANO} = \widehat{AMO} = 90°$

Lại có H là trung điểm dây BC của đường tròn (O)

$\Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow \widehat{OHA} = 90°$

$\Rightarrow A$, M, N, O, H cùng thuộc một đường tròn đường kính AO.

c) A, M, N, O, H cùng thuộc một đường tròn đường kính AO.

$\widehat{HAM}=\widehat{MNH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắc cung $\overset{\frown}{MH}$)

Vì $BE//AM \Rightarrow \widehat{HBE}=\widehat{HAM}$

$\Rightarrow \widehat{HBE}=\widehat{ENH}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BEHN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BHE}=\widehat{BNE}$

Mà trong (O) ta có $\widehat{BNE}=\widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$)

Nên $\widehat{BHE}=\widehat{BCM} \Rightarrow EH // MC$

d) Gọi K là trung điểm AO và D là trọng tâm tam giác $MAO \Rightarrow K$, D cố định

Vì D và G lần lượt là trọng tâm tam giác MAO và tam giác MBC

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MK}=\dfrac{MG}{MH}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow GD//HK \Rightarrow DG=\dfrac{2}{3}HK=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}AO=\dfrac{1}{3}AO$ không đổi

$\Rightarrow$Khi cát tuyến ABC quay quanh A thì trọng tâm G của tam giác MBC chạy trên đường đường tròn tâm D bán kính $\dfrac{AO}{3}$

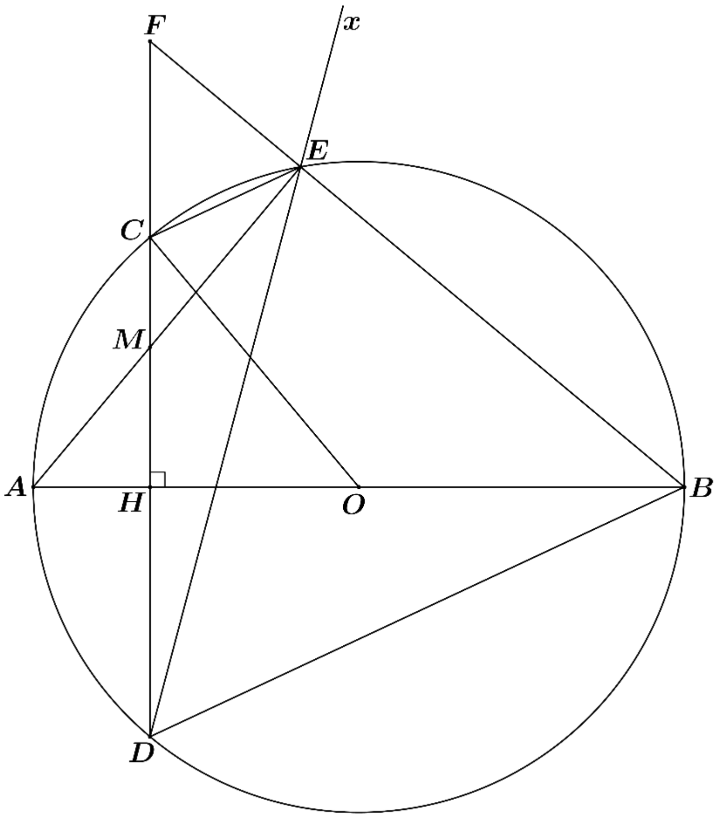
Bài 61. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định. Gọi H là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng OA (điểm H khác điểm O và điểm A). Vẽ dây CD vuông góc với AB tại H. Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng CH. Nối AM cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Tia BE cắt tia DC tại F.

a) Chứng minh bốn điểm H, M, E, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ Ex là tia đối của tia ED. Chứng minh $\widehat{FEx}=\widehat{FEC}$ và $MC.FD=FC.MD$

c) Tìm vị trí của điểm H trên đoạn thẳng OA để diện tích ΔOCH lớn nhất.

Lời giải



a) Xét (O):

$\widehat{AEB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{MEB}=90^\circ$

$CH\perp AB\Rightarrow \widehat{MHB}=90^\circ$

Xét tứ giác $BEMH$: $\widehat{MEB}+\widehat{MHB}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEMH$ là tứ giác nội tiếp hay bốn điểm H, M, E, B cùng thuộc một đường tròn.

b) $AB\perp CD$ tại $H\Rightarrow H$ là trung điểm của CD hay AB là đường trung trực của CD

$\Rightarrow AC=AD\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}\Rightarrow \widehat{AEC}=\widehat{AED}\Rightarrow EM$ là tia phân giác của $\widehat{CED}\Rightarrow \dfrac{CE}{ED}=\dfrac{MC}{MD}$

Lại có: $\widehat{AEB}=90^\circ\Rightarrow \widehat{AEF}=90^\circ\Rightarrow \widehat{AEC}+\widehat{FEC}=90^\circ$ và $\widehat{AED}+\widehat{FEx}=90^\circ$

Mà $\widehat{AEC}=\widehat{AED}\Rightarrow \widehat{FEx}=\widehat{FEC}\Rightarrow EF$ là tia phân giác góc ngoài tại E của ΔCED

$\Rightarrow \dfrac{CE}{ED}=\dfrac{FC}{FD}\Rightarrow \dfrac{MC}{MD}=\dfrac{FC}{FD}\Rightarrow MC.FD=FC.MD$

Vậy $\widehat{FEx}=\widehat{FEC}$ và $MC.FD=FC.MD$

c) ΔOCH vuông tại $H\Rightarrow HC^2+HO^2=OC^2=R^2$

Với hai số a, b ta có: $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow ab\le \dfrac{a^2+b^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Áp dụng ta có: Diện tích ΔOCH là $S_{\Delta OCH}=\dfrac{1}{2}\cdot HC\cdot HO\le \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{HC^2+HO^2}{2}=\dfrac{R^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $HC = HO = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Vậy diện tích ΔOCH lớn nhất khi $OH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Bài 21. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB. Gọi I là trung điểm của EF.

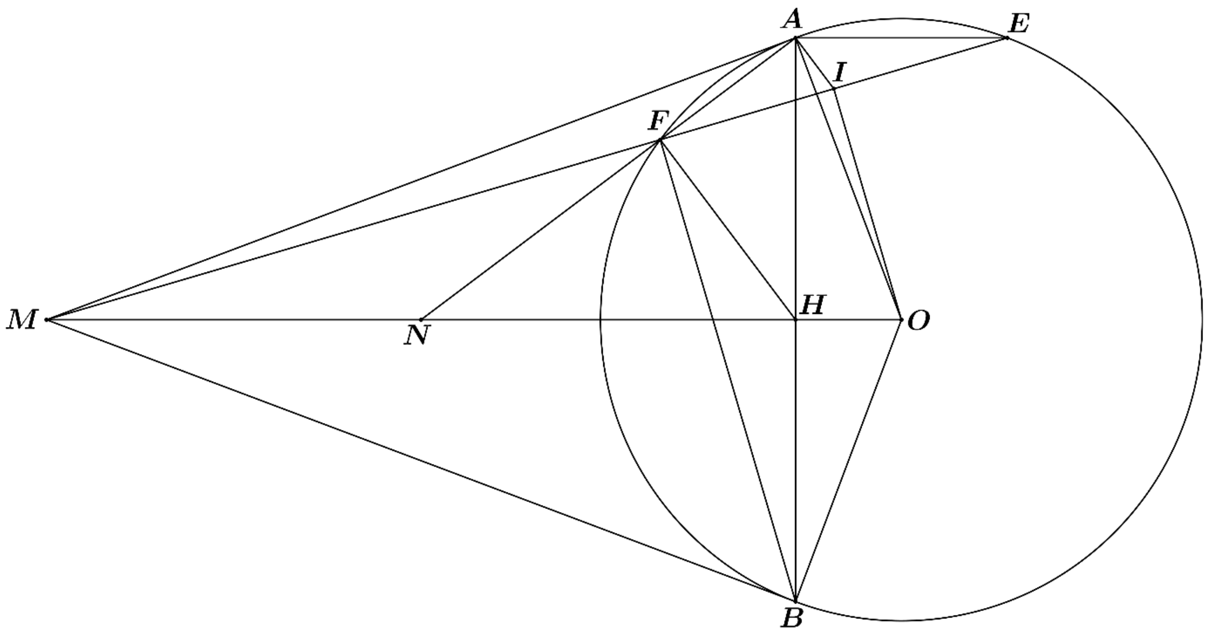
a) Chứng minh năm điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh ΔOIA đồng dạng với ΔMAE.

c) Chứng minh N là trung điểm của MH và $MN^2 = AN.NF$.

d) Chứng minh rằng $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.

Lời giải



a) Do MA, MB là tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O) nên $MA \perp OA$ và $MB \perp OB$

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ là tứ giác nội tiếp (1).

Do I là trung điểm của $EF \Rightarrow OI \perp EF \Rightarrow \widehat{MIO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MIO} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAIO$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ năm điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Tứ giác $MAIO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AOI} = \widehat{AME}$ và $\widehat{OME} = \widehat{OAI}$

Mà $AE \,//\, MO \Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{OME} \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{MEA}$

Xét ΔOIA và ΔMAE có: $\widehat{AOI} = \widehat{AME}$; $\widehat{OAI} = \widehat{MEA} \Rightarrow \Delta OIA \sim \Delta MAE$ (góc-góc)

c) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$MA = MB$ và MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ $\Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M, có MO là phân giác $\Rightarrow MO$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow MO \perp AB$ tại H $\Rightarrow \widehat{MHB} = 90°$.

Lại có: $\widehat{FBA} = \widehat{MEA} \Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{OME}$ hay $\widehat{FBH} = \widehat{FMH} \Rightarrow$ Tứ giác $BMFH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MHB} = 90°$ và $\widehat{FHM} = \widehat{FBM}$, mà $\widehat{FBM} = \widehat{FAB} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{FB} \Rightarrow \widehat{FHM} = \widehat{FAB}$

$\Rightarrow \widehat{FHM} + \widehat{FNH} = \widehat{FAB} + \widehat{FNH} = 90°$ (do $MO \perp AB$ tại H) $\Rightarrow \widehat{NFH} = 90°$.

Ta có: $\widehat{MFN} + \widehat{NFB} = \widehat{MFB} = 90°$ và $\widehat{NFB} + \widehat{BFH} = \widehat{NFH} = 90°$ $\Rightarrow \widehat{MFN} = \widehat{BFH}$.

Xét ΔMFH và ΔBFA có: $\widehat{FMH} = \widehat{FBH}$; $\widehat{FHM} = \widehat{FAB}$ $\Rightarrow \Delta MFH \sim \Delta BFA$

$\Rightarrow \frac{MF}{BF} = \frac{MH}{BA}$.

Xét ΔMFN và ΔBFH có: $\widehat{MFN} = \widehat{BFH}$; $\widehat{FMH} = \widehat{FBH}$ $\Rightarrow \Delta MFH \sim \Delta BFH$

$\Rightarrow \frac{MF}{BF} = \frac{MN}{BH}$.

$\Rightarrow \frac{MN}{BH} = \frac{MH}{BA} \Rightarrow \frac{MN}{MH} = \frac{BH}{BA}$, mà H là trung điểm của BA (do MO là trung trực của AB)

$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{MH} = \frac{1}{2} \Rightarrow N$ là trung điểm của MH.

ΔAHN vuông tại H có đường cao $HF \Rightarrow NH^2 = AN.NF$.

N là trung điểm của MH $\Rightarrow MN = NH \Rightarrow MN^2 = AN.NF$.

d) ΔAHN vuông tại H có đường cao $HF \Rightarrow HA^2 = AF.AN$ và $HF^2 = AF.NF$.

Mà $HB = HA \Rightarrow HB^2 = AF.AN \Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} = \frac{AN}{NF} = \frac{AF + NF}{NF} = \frac{AF}{NF} + 1$.

$AE // MN \Rightarrow \frac{AF}{NF} = \frac{EF}{MF} \Rightarrow \frac{AF}{NF} + 1 = \frac{EF}{MF} + 1 \Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} = \frac{EF}{MF} + 1 \Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$.

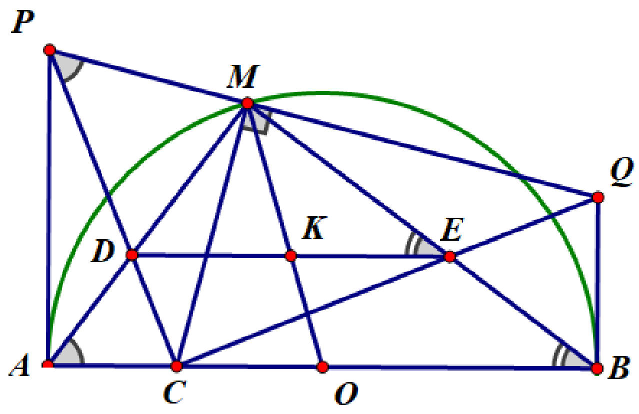
Bài 62. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, C là một điểm nằm trên đoạn OA (C khác A, C khác O). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến $Ax; By$ với nửa đường tròn. M là một điểm nằm trên nửa đường tròn (M khác A, M khác B) đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt tia $Ax; By$ lần lượt tại P, Q

a) Chứng minh tứ giác $APMC$ nội tiếp

b) Chứng minh ΔAMB đồng dạng với ΔCPQ

c) Gọi D là giao điểm của CP và AM. E là giao điểm của CQ và BM. Chứng minh OM đi qua trung điểm của DE.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác APMC nội tiếp.

+) Ta có : PQ $\perp$ MC tại M (gt) $\Rightarrow \widehat{PMC} = 90^0$

+) PA $\perp$ AB (t/c tiếp tuyến của đường tròn) $\Rightarrow \widehat{PAC} = 90^0$

+) Xét tứ giác PMCA có : $\widehat{PMC} + \widehat{PAC} = 180^0 \Rightarrow PMCA$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính PC (vì tứ giác có hai góc đối có tổng bằng 180^0).

b) Chứng minh ΔMAB đồng dạng ΔCPQ.

+) Xét đường tròn đường kính PC có $\widehat{CPM} = \widehat{MAC} = \frac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{MC} \Rightarrow \widehat{CPQ} = \widehat{MAB}$

+) Ta có : MQ $\perp$ MC tại M (gt) $\Rightarrow \widehat{CMQ} = 90^0$

+) BA $\perp$ BQ (t/c tiếp tuyến của đường tròn) $\Rightarrow \widehat{QBC} = 90^0$

+) Xét tứ giác MQBC có : $\widehat{CMQ} + \widehat{QBC} = 180^0 \Rightarrow MQBC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính QC (vì tứ giác có 2 góc đối có tổng bằng 180^0).

$\Rightarrow \widehat{MQC} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{MC} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{CQP}$

Xét ΔMAB và ΔCPQ có $\widehat{MAB} = \widehat{CPQ}$ và $\widehat{MBA} = \widehat{CQP}$

$\Rightarrow \Delta MAB$ đồng dạng ΔCPQ (g.g).

c) Gọi D là giao điểm của CP và AM, E là giao điểm của CQ và BM.

CMR: OD đi qua trung điểm của DE.

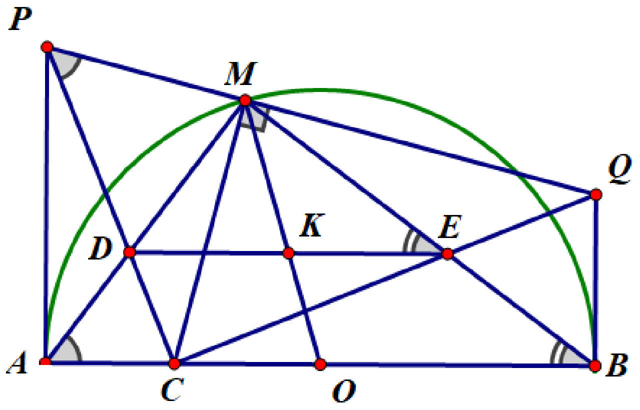
Gọi K là giao điểm của OM và DE

Ta có $\widehat{DME} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DCE} = 90^0$ (ΔMAB đồng dạng ΔCPQ) .

Xét tứ giác : MDCE có $\widehat{DME} = \widehat{DCE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DME} + \widehat{DCE} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác MDCE nội tiếp đường tròn đường kính DE (vì tứ giác có 2 góc đối có tổng bằng 180^0).

$\widehat{MED}=\widehat{MCD}=\frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{MD}\quad\Rightarrow\widehat{MED}=\widehat{MCP}$ (1)

Xét đường tròn đường kính PC có $\widehat{MAP}=\widehat{MCP}=\text{sd}\overset{\frown}{AM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) (2)



Xét đường tròn đường kính AB có $\widehat{MAP}=\widehat{MBA}=\frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AM}$ (3)

$Tu\,(1),(2),(3)\Rightarrow\widehat{MED}=\widehat{MBA}$

Mà 2 góc ở vị trí đồng vị nên $\Rightarrow DE\ //$ AB.

+) Xét ΔMKD và ΔMOA có $\widehat{DMK}=\widehat{AMO}$ (chung) và $\widehat{MKD}=\widehat{MOA}$ (đồng vị).

$\Rightarrow\Delta MKD$ đồng dạng ΔMOA (g.g).

$\Rightarrow\frac{MD}{MA}=\frac{MK}{MO}=\frac{DK}{AO}$ (4)

+ Tương tự ΔMEK đồng dạng ΔMBO (g.g).

$\Rightarrow\frac{ME}{MB}=\frac{MK}{MO}=\frac{KE}{OB}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow\frac{DK}{OA}=\frac{KE}{OB}$ Mà OA = OB = R $\Rightarrow DK=KE$ hay OM đi qua trung điểm DE.

Bài 63. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến $AM;\ AN$ với (O), $M;\ N$ là tiếp điểm và cát tuyến APQ $(AP<AQ)$ và M nằm trên cung nhỏ PQ. Gọi D là trung điểm của PQ. Gọi T là giao điểm của MD với (O).

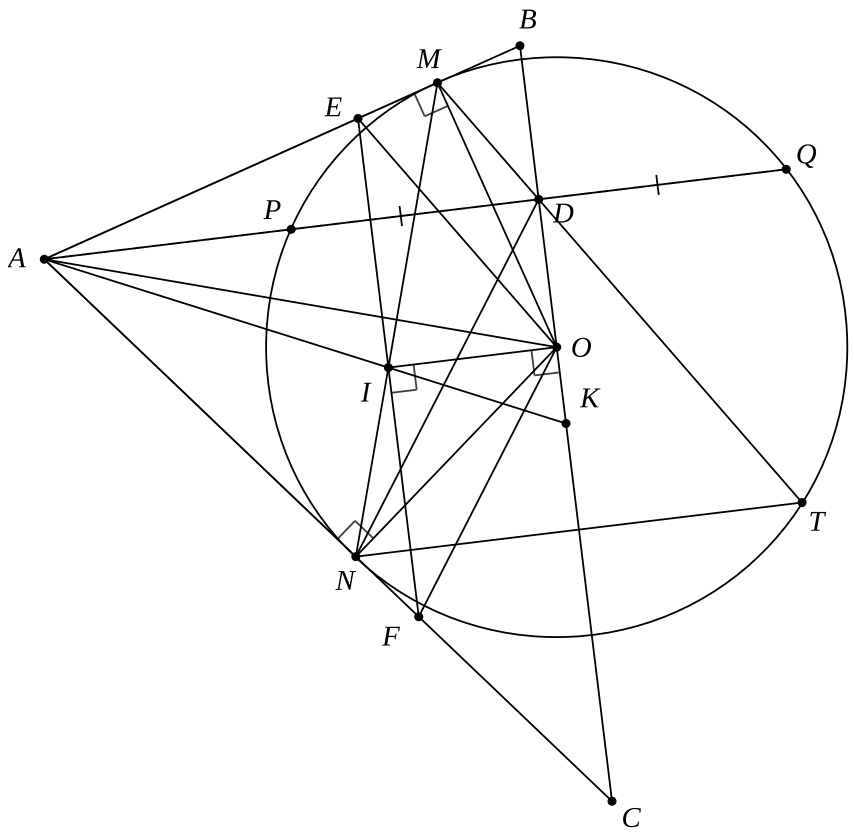
a) Chứng minh 4 điểm $A;\ M;\ O;\ N$ cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $NT\,//\,PQ$.

c) Đường thẳng OD cắt tiếp tuyến $AM;\ AN$ lần lượt tại B và C qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt

AM; AN tại lần lượt tại E và F. Chứng minh ΔOEF cân và AI đi qua trung điểm K của BC.

Lời giải



a, Xét (O) có AM, AN là các tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90°$

Xét tứ giác $AMON$ có: $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ Tứ giác $AMON$ nội tiếp

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn.

b, Vì D là trung điểm của PQ nên $OD \perp PQ \Rightarrow \widehat{ADO} = 90°$

Xét tứ giác $ADON$ có: $\widehat{ADO} + \widehat{ANO} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADON$ nội tiếp.

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, D, O, N cùng thuộc một đường tròn.

Mà bốn điểm A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn (ý a)

Suy ra: năm điểm A, M, N, D, O cùng thuộc mộtđường tròn.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANDM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{ANM}$

Lại có $\widehat{ANM} = \widehat{NTM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sd$\overset{\frown}{MN}$)

Suy ra: $\widehat{MTN} = \widehat{ADM}$

Mặt khác hai góc này ở vị trí đồng vị

Suy ra: $NT//PQ$

c, Xét tứ giác $MEIO$ có: $\widehat{OME} + \widehat{OIE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MEIO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OMI} \Rightarrow \widehat{OEF} = \widehat{OMN}$ (1)

Xét tứ giác $NIOF$ có: $\widehat{OIF} = \widehat{ONF} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $NIOF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OFI} = \widehat{ONI} \Rightarrow \widehat{OFE} = \widehat{ONM}$ (2)

Xét ΔOMN có: $OM = ON = R$

$\Rightarrow \Delta OMN$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ONM}$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\widehat{OEF} = \widehat{OFE}$

Xét ΔOEF có: $\widehat{OEF} = \widehat{OFE}$

$\Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O

Gọi K là giao điểm của AI và BC

Vì ΔOEF cân tại O nên OI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $EF \Rightarrow IE = IF$

Ta có: $\begin{cases} OI \perp BC \\ OI \perp EF \end{cases}$

$\Rightarrow BC//EF$

$\Rightarrow \begin{cases} IE//BK \\ IF//CK \end{cases}$

Xét ΔABK có $IE//BK$ nên áp dụng hệ quả của định lí Ta-let ta có: $\dfrac{IE}{BK} = \dfrac{AI}{AK}$ (3)

Xét ΔACK có $IF//CK$ nên áp dụng hệ quả của định lí Ta-let ta có: $\dfrac{IF}{CK} = \dfrac{AI}{AK}$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $\dfrac{IE}{BK} = \dfrac{IF}{CK}$

Mà $IE = IF\left(cmt\right)$

Suy ra: $BK = CK \Rightarrow K$ là trung điểm của BC

Lại có A, I, K thẳng hàng

Suy ra AI đi qua trung điểm K của BC

Bài 64. Cho đường tròn $(O;R)$ và A điểm nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN đến đường tròn $(O;R)$ (với B, C là hai tiếp điểm, $AM < AN$, MN không đi qua O). Gọi I là trung điểm của MN, CI cắt đường tròn $(O;R)$ tại K, BC cắt OI tại E.

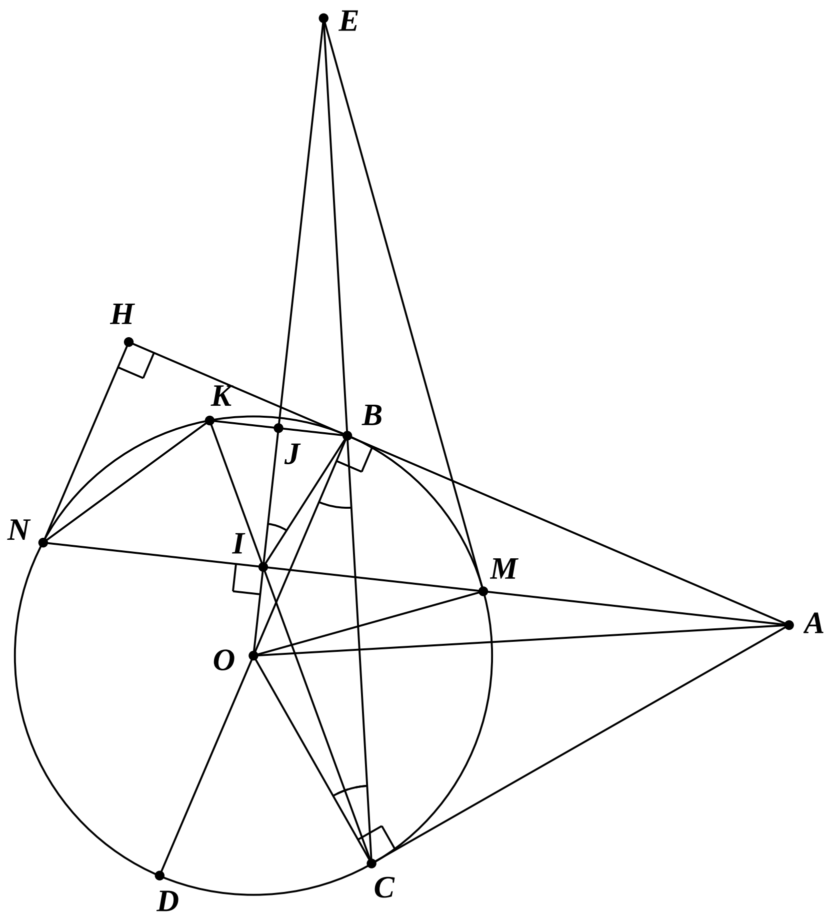
1) Chứng minh rằng bốn điểm B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng: $OI.OE = R^2$

3) Chứng minh EM là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$

4) Cát tuyến AMN ở vị trí nào thì diện tích tam giác AKN lớn nhất?

Lời giải



a) + Vì AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$

Mà hai góc $\widehat{ABO}; \widehat{ACO}$ ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO (1)

+ Vì I là trung điểm của MN $\Rightarrow OI \perp MN$ (đường kính và dây cung) $\Rightarrow \widehat{AIO} = 90°$

Xét tứ giác $AIOC$ có $\widehat{AIO} = \widehat{ACO} = 90°$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AIO} + \widehat{ACO} = 180°$

Mà hai góc $\widehat{AIO}; \widehat{ACO}$ ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $AIOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, B, I, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow$ bốn điểm B, I, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính AO

b) + Vì bốn điểm B, I, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow$ tứ giác $BIOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow \widehat{BIO} + \widehat{BCO} = 180°$ (tính chất)

Mà $\widehat{BIO} + \widehat{BIE} = 180°$ (3)

$\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{BCO}$

Lại có, ΔOBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{BCO} = \widehat{CBO}$ (tính chất)

$\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{CBO}$ (4)

Mặt khác $\widehat{CBO} + \widehat{OBE} = 180°$ (hai góc kề bù) (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{OBE}$

+ Xét hai tam giác OIB và OBE có:

$\widehat{IOB}$ chung

$\widehat{OIB} = \widehat{OBE}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta OIB \sim \Delta OBE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OI}{OB} = \dfrac{OB}{OE}$ (các cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow OI.OE = OB^2$ hay $OI.OE = R^2$

c) + Ta có: $OI.OE = R^2$ (cmt)

Mà $M \in (O) \Rightarrow OM = R \Rightarrow OI.OE = OM^2 \Rightarrow \dfrac{OI}{OM} = \dfrac{OM}{OE}$

+ Xét hai tam giác OIM và OME có:

$\dfrac{OI}{OM} = \dfrac{OM}{OE}$ (cmt)

$\widehat{IOM}$ chung

$\Rightarrow \Delta OIM \sim \Delta OME$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OIM} = \widehat{OME}$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\widehat{OIM}=90^\circ$ (cm) $\Rightarrow \widehat{OME}=90^\circ \Rightarrow OM\perp EM$

Vậy EM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) + Vì năm điểm A, B, I, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính AO (cmt)

$\Rightarrow \widehat{AOC}=\widehat{AIC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

+ Lại có, $\widehat{AOC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $\widehat{BOC}=\text{sd}\overset{\frown}{BC}$ (góc ở tâm chắn cung BC) $\Rightarrow \widehat{AIC}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$

Mặt khác, $\widehat{BKC}=\frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{BC}$ (góc nội tiếp chắn cung BC)

$\Rightarrow \widehat{AIC}=\widehat{BKC}$

Mà hai góc $\widehat{AIC};\widehat{BKC}$ ở vị trí đồng vị $\Rightarrow KB//MN$

+ Vì $KB//MN$ (cmt) $\Rightarrow S_{\Delta AKN}=S_{\Delta ABN}$

Do đó ta cần tìm vị trí điểm N để diện tích ΔABN đạt giá trị lớn nhất.

+ Gọi H là hình chiếu của N lên AB $\Rightarrow S_{\Delta ABN}=\frac{1}{2}NH.AB$

Do AB cố định nên $(S_{\Delta ABN})$max khi $NH_{\max}$

+ Xét ΔNBH vuông tại H có $NH\le NB$ (tính chất đường xiên và hình chiếu)

+ Kéo dài BO cắt đường tròn (O) tại điểm $D\Rightarrow DB$ là đường kính của (O)

Mà NB là một dây cung của (O) $\Rightarrow NB\le DB\Rightarrow NH\le NB\le DB$

$\Rightarrow NH_{\max}=DB$.

Khi đó điểm N trùng với điểm D

Vậy khi ba điểm B,O,N thẳng hàng thì diện tích tam giác AKN lớn nhất.

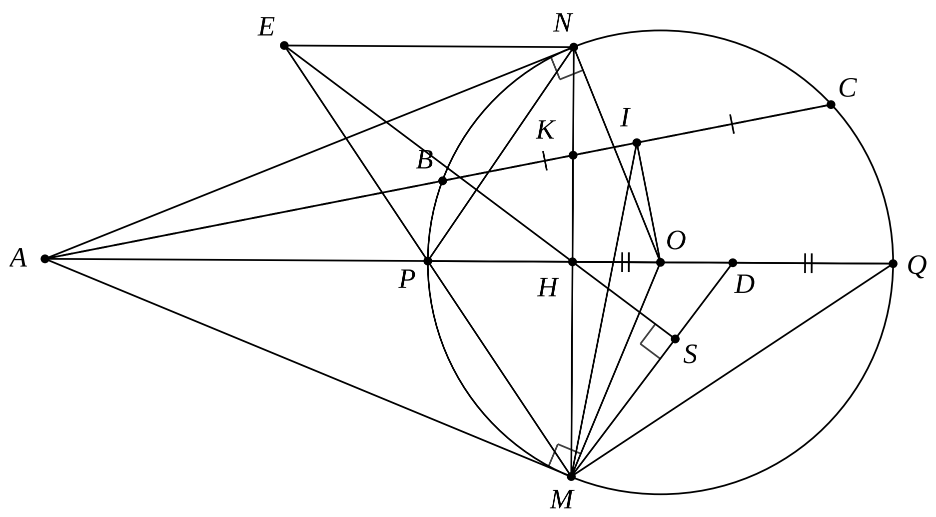
Bài 65. Cho $(O;R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ các tiếp tuyến AM,AN với (O) (M,N là tiếp điểm). Trên nửa mặt phẳng bờ AO có chứa N vẽ cát tuyến ABC của (O) sao cho $AB<AC$, gọi I là trung điểm của BC, MN cắt AC tại K.

a) Chứng minh $AMOI$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh OA vuông góc với MN tại H và $AK.AI=AM^2$

c) AO cắt (O) tại hai điểm P,Q $(AP < AQ)$. Gọi D là trung điểm của HQ. Đường thẳng qua H và vuông góc với MD cắt MP tại E. Chứng minh $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ và P là trung điểm của ME.

Lời giải



1. Chứng minh $AMOI$ là tứ giác nội tiếp.

Xét (O):

Có I là trung điểm của dây BC $\Rightarrow OI \perp BC$ tại $I \Rightarrow \widehat{AIO} = 90^\circ$ ($A, I \in BC$)

Vì AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại tiếp điểm $M \Rightarrow AM \perp OM \Rightarrow \widehat{AMO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AMOI$ có: $\widehat{AMO} + \widehat{AIO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{AMO}, \widehat{AIO}$ là hai góc đối diện nhau

$\Rightarrow AMOI$ là tứ giác nội tiếp được đường tròn đường kính AO

2. Chứng minh OA vuông góc với MN tại H và $AK.AI = AM^2$

Cách 1:

Gọi H là giao điểm của AO và MN

Có $AM = AN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OM = ON$ (hai bán kính)

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của MN $\Rightarrow AO \perp MN$ tại H

Vì I là trung điểm của BC (gt) $OI \perp BC$ tại $I \Rightarrow \widehat{AIO} = 90^\circ$ ($A, I \in BC$)

$\Rightarrow \Delta AIO$ nội tiếp đường tròn đường kính AO

Xét đường tròn đường kính AO có :

$\widehat{AMN}$ là góc nội tiếp chắn cung AN, $\widehat{AIM}$ là góc nội tiếp chắn cung AM

mà $AM = AN \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AIM}$ (hệ quả góc nội tiếp) hay $\widehat{AMK} = \widehat{AIM}$

Xét ΔAMK và ΔAIM có

$$\begin{cases} \widehat{AMK} = \widehat{AIM} \ (cmt) \\ \widehat{MAI} : chung \end{cases} \Rightarrow \Delta AMK \backsim \Delta AIM \ (g.g) \Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{AK}{AM} \Rightarrow AK.AI = AM^2$$

Cách 2 :
Có $AM = AN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OM = ON$ (hai bán kính)

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của MN $\Rightarrow AO \perp MN = \{H\}$ $\Rightarrow \widehat{AHK} = 90°$

Xét ΔAHK và ΔAIO có :

$$\left.\begin{matrix} \widehat{IAO} \text{ chung} \\ \widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90° \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta AHK \backsim AIO(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AH.AO = AK.AI$$

ΔAOM vuông tại $M, MH \perp AO \Rightarrow AH.AO = AM^2$

$\Rightarrow AK.AI = AM^2$

3. AO cắt (O) tại hai điểm P, Q $(AP < AQ)$. Gọi D là trung điểm của HQ. Đường thẳng qua H và vuông góc với MD cắt MP tại E. Chứng minh $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ và P là trung điểm của ME.

* Xét ΔQDM và ΔMHE có:

$\widehat{MQD} = \widehat{EMH}$ (cùng phụ với $\widehat{MPQ}$)

$\widehat{QMD} = \widehat{MEH}$ (cùng phụ với $\widehat{DMP}$)

$\Rightarrow \Delta MHE \backsim \Delta QDM \ (g.g)$

* Vì $\Delta MHE \backsim \Delta QDM \Rightarrow \dfrac{MH}{QD} = \dfrac{HE}{DM} \Rightarrow \dfrac{HN}{DH} = \dfrac{HE}{DM}$ (vì $QD = DH$; $MH = HN$)

Ta lại có $\begin{cases} \widehat{MDH} + \widehat{DMH} = 90° \\ \widehat{MHS} + \widehat{DMH} = 90° \\ \widehat{MHS} = \widehat{EHN} \end{cases} \Rightarrow \widehat{MDH} = \widehat{EHN}$

Xét ΔHNE và ΔDHM có

$\begin{cases} \dfrac{HN}{DH} = \dfrac{HE}{DM} & (cmt) \\ \widehat{EHN} = \widehat{MDH} & (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta HNE \backsim \Delta DHM \ \ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{HNE} = \widehat{DHM} = 90^\circ$

$\Rightarrow HN \perp NE$ hay $MN \perp NE$, Mà $MN \perp HP \ \ (H, P \in AO) \Rightarrow PH \,//\, NE$

Xét ΔMNE có:

$PH \,//\, NE$, H là trung điểm của $MN \Rightarrow P$ là trung điểm của $ME \,(P \in ME)$

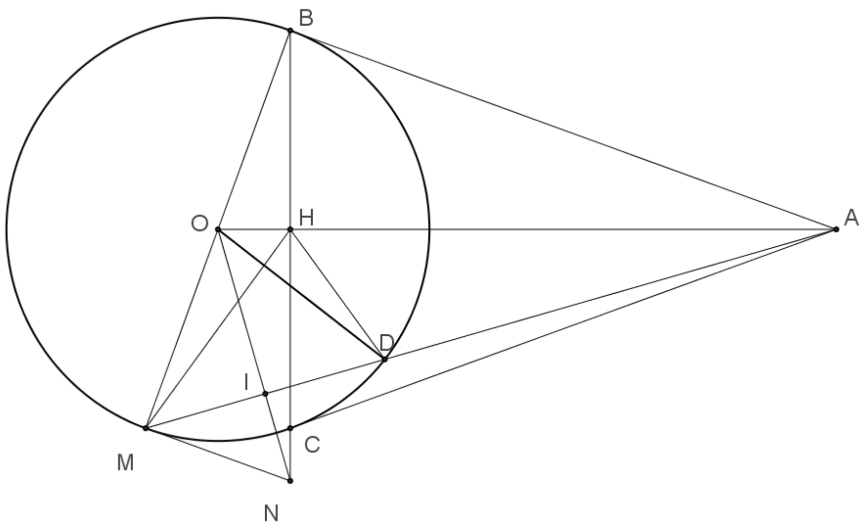
Bài 66. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B , C là các tiếp điểm), gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

b) Cho $AB = 10$ cm, $AH = 8$ cm. Tính bán kính R và các tỉ số lượng giác của góc $\widehat{BAO}$.

c) Vẽ đường kính BM, tiếp tuyến tại M của (O) cắt đường thẳng BC ở N. Chứng minh rằng ON vuông góc với đường thẳng AM .

Lời giải



a) Do AB, AC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $OB \perp BA$, $OC \perp CA$ hay $\widehat{OBA} = 90^o$, $\widehat{OCA} = 90^o$

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{OBA} + \widehat{OCA} = 180^o \Rightarrow$ tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

b) Do $OB = OC = R$, $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow AO \perp BC$ tại H.

ΔOBA vuông tại B có $BH \perp AO$ nên ta có: $BA^2 = AO.AH \Rightarrow AO = \dfrac{BA^2}{AH} = \dfrac{100}{8} = 12,5$ (cm)

$OH = OA - AH = 12,5 - 8 = 4,5$ (cm)

ΔOBA vuông tại B có $BH \perp AO$ nên ta có:

$OB^2 = OH.OA = 4,5.12,5 = 56,25 \Rightarrow OB = \sqrt{56,25} = 7,5$ (cm)

$\sin \widehat{BAO} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{7,5}{12,5} = \dfrac{3}{5}$.

$\cos \widehat{BAO} = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{10}{12,5} = \dfrac{4}{5}$.

$\tan \widehat{BAO} = \dfrac{OB}{BA} = \dfrac{7,5}{10} = \dfrac{3}{4}$.

$\cot \widehat{BAO} = \dfrac{BA}{OB} = \dfrac{10}{7,5} = \dfrac{4}{3}$.

c) AM cắt ON tại I, AM cắt (O) tại D

Tứ giác $MNHO$ có $\widehat{OHN} + \widehat{OMN} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác $MNOH$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{HNO} = \widehat{HMO}$ (1)

Lại có: $AB^2 = AO.AH$; $AB^2 = AD.AM$ (do $\Delta ABD \backsim \Delta AMB$ (g.g))

$\Rightarrow AO.AH = AD.AM$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{AO}{AD} = \dfrac{AM}{AH} \\ \widehat{OAM}\ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOM \backsim \Delta ADH\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{AHD}$$

$\Rightarrow DHOM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HOM} = \widehat{ADH}$; $\widehat{ODM} = \widehat{OHM}$

Mà $\widehat{OMD} = \widehat{ODM}\,(do\ OD = OM)$; $\widehat{AHD} = \widehat{OMD}$

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{OHM}\left(= \widehat{OMD} = \widehat{ODM}\right)$

Mà $\widehat{HOM} = \widehat{ADH}$

$\Rightarrow \Delta ADH \backsim \Delta MOH\,(g.g) \Rightarrow \widehat{HMO} = \widehat{HAD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{HNO}$ hay $\widehat{HAI} = \widehat{HNI}$

$\Rightarrow AHIN$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{AHN} = 90^o \Rightarrow AM \perp ON$.

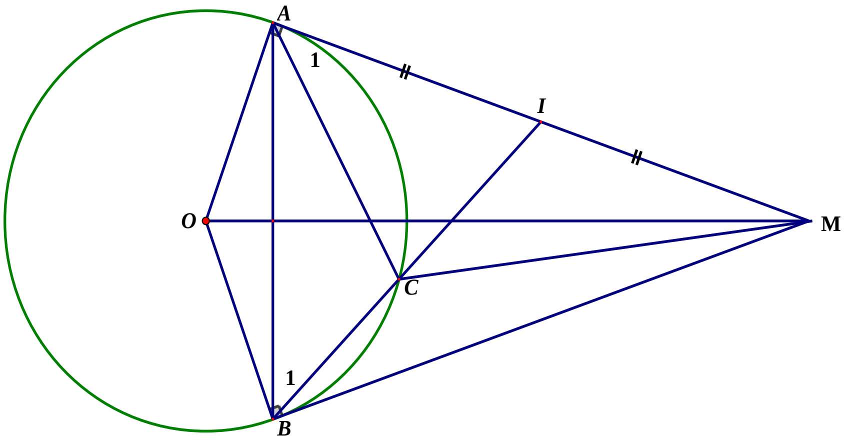
Bài 67. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M ở ngoài (O). Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của MA, BI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C.

a) Chứng minh tứ giác $OAMB$ nội tiếp

b) Chứng minh $IA^2 = IB.IC$.

c) Chứng minh $\widehat{CMA} = \widehat{IBM}$.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác OAMB nội tiếp.

Đường tròn (O; R) có : MA là tiếp tuyến, A là tiếp điểm (gt).

$\Rightarrow MA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OAM} = 90^0$.

MB là tiếp tuyến, B là tiếp điểm (gt).

$\Rightarrow MB \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OBM} = 90^0$.

Tứ giác OAMB có : $\widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

Suy ra tứ giác OAMB nội tiếp đường tròn (Dấu hiệu nhận biết) .

b) Chứng minh $IA^2 = IB.IC$.

Nối A với B, A với C.

Đường tròn (O; R) có : $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (Tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) .

Xét ΔIAC và ΔIBA có :

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (Chứng minh trên) .

$\widehat{AIB}$ là góc chung .

$\Rightarrow \Delta IAC \# \Delta IBA$ (g - g) $\Rightarrow \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{IC}{IA}$ (Tính chất 2 tam giác đồng dạng) .

$\Rightarrow IA^2 = IB.IC$

c) Chứng minh $\widehat{CMA} = \widehat{IBM}$

Có: I là trung điểm của MA (gt) $\Rightarrow$ IA = IM

Mà $IA^2 = IB.IC$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow IM^2 = IB.IC \Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IC}{IM}$

Xét ΔIMB và ΔICM có :

$\dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IC}{IM}$ (Chứng minh trên) .

$\widehat{BIM}$ là góc chung.

$\Rightarrow \Delta IMB \backsim \Delta ICM$ (c -g-c)

$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{IBM}$ (Tính chất 2 tam giác đồng dạng) .

$\Rightarrow \widehat{CMA} = \widehat{IBM}$.

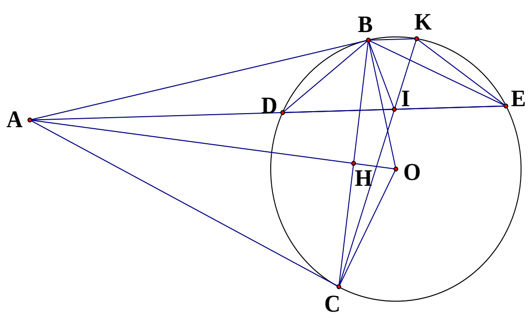
Bài 68. Từ điểm A ở ngoài đường trịn (O, R) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC và một cát tuyến ADE không đi qua tâm (O) (B, C là các tiếp điểm và $AD < AE$).

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp được đường trịn, xc định tâm và bán kính của đường trịn đó ?

b)Gọi H là giao điểm của OA và BC . Chứng minh $AH.AO = AD.AE = AB^2$

c) Gọi I là trung điểm của DE . Qua B vẽ dây $BK // DE$. Chứng minh ba điểm K, I, C thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp được đường tròn, xác định tâm và bán kính của đường tròn đó?

Xét tứ giác $ABOC$ có: $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^\circ$ (gt) nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường tâm là trung điểm đoạn AO bán kính $R=\frac{AO}{2}$.

b) Chứng minh $AH.AO = AD.AE = AB^2$

Ta có: $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$OA = OB = R$

Nên OA là đường trung trực của BC

Do đó: $OA \perp BC$ tại H

Xét tam giác ΔABO vuông tại B đường cao BH có: $AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng)(1)

+ Xét tam giác ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{A}$ chung; $\widehat{ABD}=\widehat{AED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$)

Nên $\Delta ABD \# \Delta AEB$ (g.g)

Do đó: $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE.AD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AH.AO = AD.AE = AB^2$.

c) Chứng minh ba điểm K, I, C thẳng hàng.

Ta có: $BK // DE \Rightarrow \overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{KE}$

Do đó: $\widehat{BDE}=\widehat{KED}$

Xét tứ giác $BKED$ có: $BK // DE$, $\widehat{BDE}=\widehat{KED}$

Nên tứ giác $BKED$ là hình thang cân

$\Rightarrow DB = KE$ (tính chất hình thang cn)

Ta có $\Delta BDI = \Delta KEI$ (c.g.c)

Do đó: $BI = KI$; $\widehat{DIB}=\widehat{KIE}$

Vậy ΔIBK cân tại I nên $\widehat{IBK}=\widehat{IKB}$

Ta có I là trung điểm của DE nên có $OI \perp DE$ tại I

Dễ dàng chứng minh được tứ giác $ABIO$ nội tiếp.

Do đó: $\widehat{AIB}=\widehat{AOB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

Mặt khác tứ giác $AIOC$ nội tiếp nên $\widehat{AIC}=\widehat{AOC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

Mà $\widehat{AOB}=\widehat{AOC}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Vậy $\widehat{AIB}=\widehat{AIC}$

Mặt khác có: $\widehat{AIB}+\widehat{BIK}+\widehat{KIE}=180^\circ$ mà $\widehat{AIB}=\widehat{AIC}$; $\widehat{DIB}=\widehat{KIE}$

Do đó: $\widehat{AIC}+\widehat{BIK}+\widehat{DIB}=180^\circ \Leftrightarrow \widehat{CIK}=180^\circ$

Vậy ba điểm K, I, C thẳng hàng.

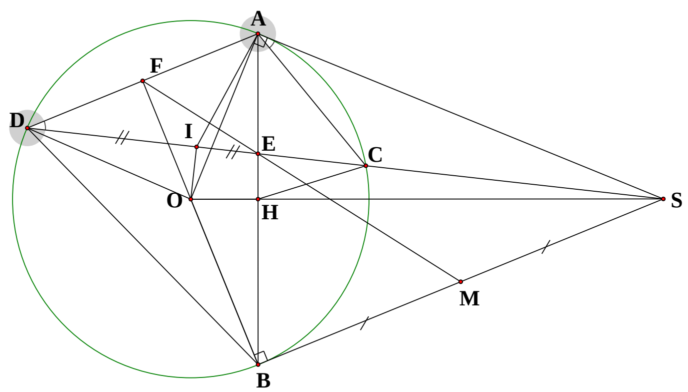
Bài 69. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến SA,SB ($A;B$ là hai tiếp điểm).Vẽ dây AD song song với SB, đoạn SD cắt (O) tại C. Gọi I là trung điểm của CD.

a) Chứng minh: 5 điểm S,A,I,O,B cùng nằm trên một đường tròn và $SA^2=SC.SD$.

b) Gọi H là giao điểm của AB và SO. Chứng minh : Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

c) M là trung điểm của SB; E là giao điểm của SD và AB.Tia ME cắt AD tại F.Chứng minh: Ba điểm $B;O;F$ thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét tứ giác $SAOB$ có: $\widehat{SAO}=\widehat{SBO}=90^\circ \Rightarrow SAOB$ nội tiếp đường tròn đường kính SO (1).

Vì I là trung điểm của $CD \Rightarrow OI\perp CD \Rightarrow \widehat{OIC}=90^\circ$.

Tứ giác $SAIO$ có $\widehat{OIA}=\widehat{OAS}=90^\circ \Rightarrow SAIO$ nội tiếp đường tròn đường kính SO (2)
,

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm S,A,I,O,B cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có: $\widehat{ADC}=\widehat{SAC}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{SAC}$.

Xét ΔSAC và ΔSDA có:

$\hat{S}$ chung

$\widehat{ADC}=\widehat{SAC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta SAC \backsim \Delta SDA$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{SA}{SD}=\dfrac{SC}{SA}$

$\Rightarrow SA^2=SC.SD$

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAO, đường cao AH, ta có:

$$SA^2=SH.SO.$$

Mà $SA^2=SC.SD$

$\Rightarrow SC.SD=SH.SO$

$\Rightarrow \dfrac{SC}{SO}=\dfrac{SH}{SD}$

Xét ΔSCH và ΔSOD có:

$\hat{S}$ chung

$\Rightarrow \dfrac{SC}{SO}=\dfrac{SH}{SD}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta SCH \backsim \Delta SOD$ (c– g – c)

$\Rightarrow \widehat{SHC}=\widehat{SDO}$.

Mà $\widehat{SHC}+\widehat{CHO}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{SDO}+\widehat{CHO}=180^\circ$

$\Rightarrow$tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

c) Vì $AD // SB \Rightarrow \dfrac{DF}{MS}=\dfrac{FE}{EM}$ $\quad(3)$

Vì $AD // SB \Rightarrow \dfrac{AF}{MB}=\dfrac{FE}{EM}$ $\quad(4)$

Từ $(3),(4) \Rightarrow \dfrac{DF}{MS}=\dfrac{AF}{MB}$

Mà $BM=MS$ (Vì M là trung điểm của SB) $\Rightarrow FD=FA$

$\Rightarrow OF\perp AD$ $\quad(5)$

Vì $AD // SB \Rightarrow \widehat{DAB}=\widehat{ABS}$ (so le trong).

Mà $\widehat{ADB}=\widehat{ABS}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

$\Rightarrow \widehat{ADB}=\widehat{BAD}$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B.

Mà $FD=FA \Rightarrow BF\perp AD$ $\quad(6)$

Từ $(5),(6) \Rightarrow$ Ba điểm $B;O;F$ thẳng hàng.

Bài 70. Cho Từ 1 điểm A ở ngoài đường tròn tâm O, vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC với (O) (B,C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

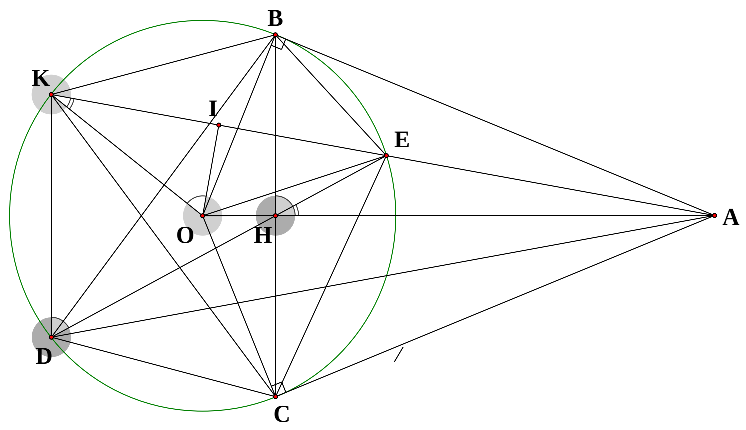
a) Chứng minh: Tứ giác $OBAC$ nội tiếp và H là trung điểm của BC.

b) Trên cung lớn BC của (O) lấy điểm D. Qua H vẽ dây cung DE của (O).

Chứng minh: $BD.BE = CD.CE$.

c) Tia AE cắt (O) tại K. Chứng minh tứ giác $BKDC$ là hình thang cân.

Lời giải



a) Xét tứ giác $OBAC$ có: $\widehat{OBA} + \widehat{OCA} = 90° + 90° = 180°$
$\Rightarrow$tứ giác $OBAC$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bù nhau).

Ta có: $OB = OC$ (bán kính) và $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow OA$ là trung trực của BC.

$\Rightarrow OA \perp BC$ tại H và H là trung điểm của BC.

b) Ta có : $\widehat{HBD} = \widehat{HEC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)
Xét ΔHBD và ΔHEC có:

$\widehat{HBD} = \widehat{HEC}$ (chứng minh trên)

$\widehat{DHB} = \widehat{CHE}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta HBD \backsim \Delta HEC$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{HE} = \frac{HD}{HC} = \frac{BD}{EC} \qquad (1)$$

Ta có : $\widehat{HDC} = \widehat{HBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)
Xét ΔHDC và ΔHBE có:

$\widehat{HDC} = \widehat{HBE}$ (chứng minh trên)

$\widehat{DHC} = \widehat{BHE}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta HDC \backsim \Delta HBE$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{HC}{HE} = \dfrac{HD}{HB} = \dfrac{DC}{BE}$ (2)

Từ (1), $(2) \Rightarrow \dfrac{BE}{CE} = \dfrac{CD}{BD} \Rightarrow BD.BE = CD.CE$.

c) Gọi I là trung điểm của $KE \Rightarrow OI \perp KE$.

$\Rightarrow \widehat{KOI} = \dfrac{1}{2}\widehat{KOE}$

Ta có: $\widehat{KDE} = \dfrac{1}{2}\widehat{KOE}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{KE}$)

$\Rightarrow \widehat{KOI} = \widehat{KDE}$ (3).

Xét ΔABE và ΔAKB có:

$\widehat{ABE} = \widehat{AKB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

$\widehat{A}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta AKB$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AK.AE$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta ABO : AB^2 = AH.AO$

$AK.AE = AH.AO \Rightarrow \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AE}{AO}$

Xét ΔAHE và ΔAKO có:

$\dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AE}{AO}$ (chứng minh trên)

$\widehat{A}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHE \backsim \Delta AKO$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AKO}$

Mà $\begin{cases} \widehat{AHE} + \widehat{BHE} = 90^\circ \\ \widehat{AKO} + \widehat{KOI} = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{KOI}$ (4)

Từ (3), $(4) \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{KDE}$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow KD // BC$

$\Rightarrow BKDC$ là hình thang.

Mà $BKDC$ nội tiếp trong $(O) \Rightarrow BKDC$ là hình thang cân.

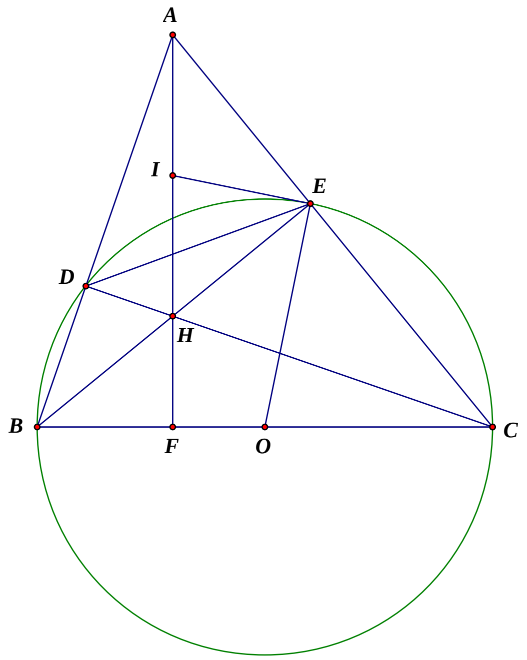
Bài 71. Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB tại D, cắt AC tại E. Gọi H là giao của BE và CD. Gọi F là giao của AH và BC.

a/ Chứng minh: $AD.AB = AE.AC$

b/ Chứng minh : (DEF) đi qua trung điểm O của BC và trung điểm I của AH.

c/ Nếu $BC = 12cm$ và tam giác ABC có góc $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài OI.

Lời giải



a/ Chứng minh : $AD.AB = AE.AC$

Xét ΔADE và ΔACB có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BDE}$)

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow AD.AB = AE.AC$

b/ Chứng minh: (DEF) đi qua trung điểm O của BC và trung điểm I của AH

+ Vì I là trung điểm của AH, $\Delta AEH : \hat{E} = 90^o$ ($\widehat{BEC} = 90^o$)

$\Rightarrow IA = IE \Rightarrow \Delta AIE$ cân tại $I \Rightarrow$ $\widehat{IAE} = \widehat{IEA}$ (3)

+ Tương tự: $OC = OE \Rightarrow \Delta COE$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OEC}$ (4)_

+ Có ΔACF vuông tại $F \rightarrow \widehat{IAE} + \widehat{OCE} = 90^0$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{IEA} + \widehat{OEC} = 90^0 \rightarrow \Rightarrow$ tứ giác $IEOF$ nội tiếp

+ Tương tự có tứ giác $IDFO$ nội tiếp

Do đó 5 điểm I, D, F, O, E nằm trên một đường tròn.

Vậy (DEF) đi qua trung điểm O của BC và trung điểm I của AH

c/ Tính độ dài OI

+ ΔAEH và ΔBEC có:

$\widehat{AEH}=\widehat{BEC}=90^o$

$\widehat{EAH}=\widehat{EBC}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)

$\Rightarrow \Delta AEH\backsim \Delta BEC(g.g)\Rightarrow \dfrac{AH}{BC}=\dfrac{AE}{BE}\Rightarrow AH=BC\cdot \dfrac{AE}{BE}$

ΔABE vuông tại $E\Rightarrow$ $\cot BAE=\dfrac{AE}{BE}\Rightarrow$ $\cot BAC=\dfrac{AE}{BE}$

$\to AH\ =\ BC.\cot BAC\ =\ 12.cot60^{\circ}=4\sqrt{3}$ (cm)

+ $EI=\dfrac{1}{2}AH=2\sqrt{3}$ (cm) , $OE=\dfrac{1}{2}BC=6$ (cm)

$+OI=\sqrt{EI^2+OE^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+6^2}=4\sqrt{3}$ (cm).

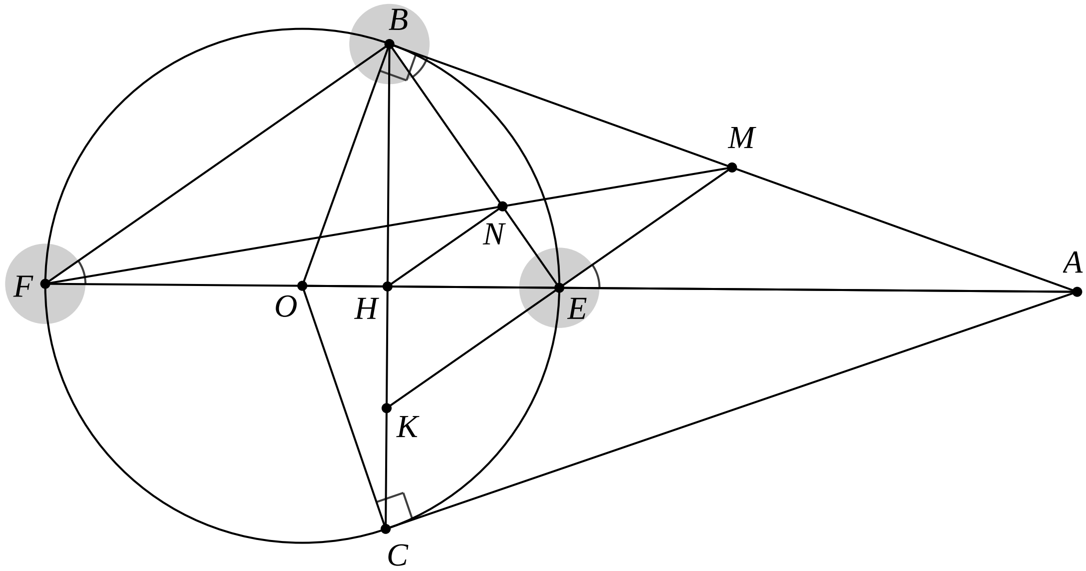
Bài 72. Cho $\left(O;R\right)$ và từ A nằm ngoài $\left(O\right)$ vẽ các tiếp tuyến AB, AC với $\left(O\right)$. Tia AO cắt $\left(O\right)$ tại E, F (Điểm E nằm giữa 2 điểm A và F).

a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $OA\perp BC$ tại H.

b) Vẽ qua E đường thẳng song song BF cắt AB, AC lần lượt tại M, K. Chứng minh: $AE^2=AM.AB$.

c) Chứng minh: E là trung điểm MK và $NH\,//\,MK$.

Lời giải



a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $OA \perp BC$ tại H.

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ABOC$ nội tiếp

Xét (O) có AB, AC là tiếp tuyến $\Rightarrow AB = AC$

Mà $OB = OC$

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$ tại H

b) Vẽ qua E đường thẳng song song BF cắt AB, BC lần lượt tại M, K. Chứng minh: $AE^2 = AM.AB$

Có $MK \,//\, BF \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AFB}$

Xét (O) có: $\widehat{ABE} = \widehat{EFB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AEM}\left(=\widehat{EFB}\right)$

Xét ΔAEM và ΔABE có: $\widehat{ABE} = \widehat{AEM}$ và $\widehat{BAE}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEM \,\#\, \Delta ABE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AE} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AE^2 = AM.AB$

c) Gọi N là giao điểm của BE và MF. Chứng minh: E là trung điểm MK và $NH \,//\, MK$.

Xét (O) có: $OE \perp BC \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Xét (O) đường kính FE có: $\widehat{EBF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow$ $BE \perp BF$

Má $MK // BF$

$\Rightarrow BE \perp MK$

Xét ΔBMK có: $\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ và $BE \perp MK \Rightarrow \Delta BMK$ cân tại B

Mà $BE \perp MK \Rightarrow ME = KE \Rightarrow \dfrac{ME}{BF} = \dfrac{KE}{BF}$ (1)

Xét ΔNBF có: $ME // BF \Rightarrow \dfrac{ME}{BF} = \dfrac{EN}{BN}$ (2) (hệ quả định lý Ta lét)

Xét ΔHBF có: $KE // BF \Rightarrow \dfrac{KE}{BF} = \dfrac{EH}{FH}$ (3) (hệ quả định lý Ta lét)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{EH}{FH} = \dfrac{EN}{BN}$

Xét ΔEBF có: $\dfrac{EH}{FH} = \dfrac{EN}{BN} \Rightarrow NH // MK$ (định lý Ta lét đảo).

Bài 73. Cho đường tròn $(O;\ R)$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B,C là hai tiếp điểm của đường tròn (O)).

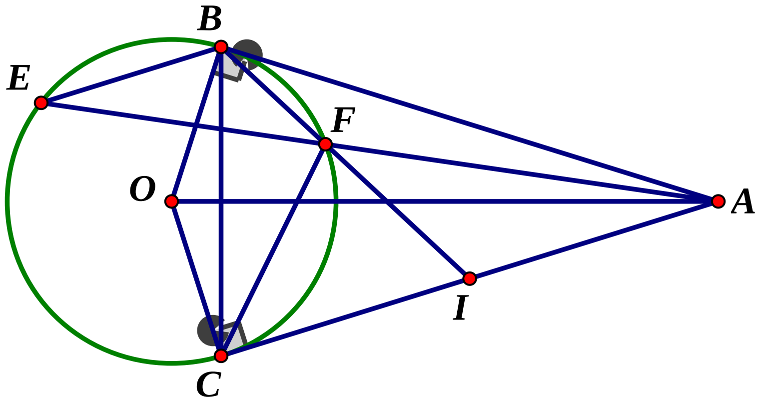
a) Chứng minh: tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ dây BE song song với AC, AE cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là F.

Chứng minh: $AB^2 = AF.AE$.

c) BF cắt AC tại I. Chứng minh: $AF.AE = 4IF.IB$.

Lời giải



a) Xét tứ giác $ABOC$ có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$ (Do AB, AC lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O). Vậy tứ giác ABOC là tứ giác nội tiếp

b) Xét ΔABF và ΔAEB có:

$\widehat{FAB}$ là góc chung

$\widehat{ABF} = \widehat{BEA}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, cùng chắn cung BF)

Suy ra: $\Delta ABF \backsim \Delta AEB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AF}{AB} \Rightarrow AB^2 = AF.AE$

c) Xét ΔIBC và ΔICF có:

$\widehat{BIC}$ là góc chung

$\widehat{IBC} = \widehat{FCI}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, cùng chắn cung CF)

Suy ra: $\Delta IBC \backsim \Delta ICF(g.g) \Rightarrow \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{IC}{IF} \Rightarrow IC^2 = IB.IF$ (1)

Xét ΔAIF và ΔBIA có:

$\widehat{BIA}$ là góc chung

$\widehat{FAI} = \widehat{ABF} = \widehat{FEB}$

Suy ra: $\Delta AIF \backsim \Delta BIA(g.g) \Rightarrow \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{IF}{IA} \Rightarrow IA^2 = IB.IF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IC^2 = \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow IB.FI = \dfrac{FA.AE}{4} \Rightarrow FA.AE = 4IB.FI$.

suy ra $IC^2 = \dfrac{AB^2}{4}$.

Bài 74. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O,R) sao cho $OM > 2R$; vẽ hai tiếp tuyến MA, MB

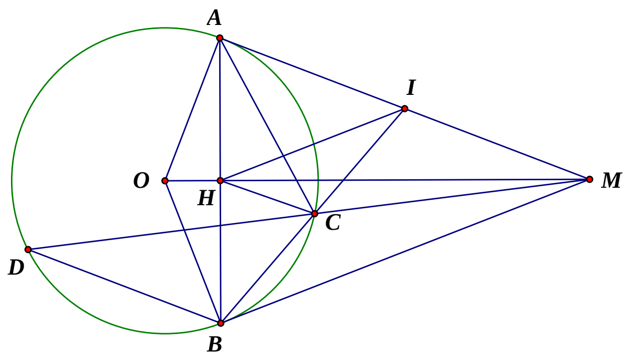
(A, B là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của AM, BI cắt (O) tại C; tia MC cắt (O) tại D.

a) Chứng minh: $OM \perp AB$ tại H và $AI^2 = IB.IC$.

b) Chứng minh: $BD // AM$

c) Chứng minh: Tứ giác $AHCI$ nội tiếp và tia CA là tia phân giác của góc $\widehat{ICD}$.

Lời giải



a) Chứng minh $OM \perp AB$ tại H và $AI^2 = IB.IC$.

Ta có: $MA = MB$ (tính chất hai đường tiếp tuyến cắt nhau)

$OA = OB = R$

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow$ $OM \perp AB$ tại H.

+ Xét ΔIAC và ΔIBA có:

$\widehat{IAC} = \widehat{IBA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{AC}$)

$\widehat{AIC}$ chung

$$\Rightarrow \Delta IAC \backsim \Delta IBA \ (g-g) \Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{IC}{AI}$$

$$\Rightarrow AI^2 = IB.IC$$

b) Chứng minh $BD // AM$

+ Vì I là trung điểm của AM nên $AI = IM$.

$$IM^2 = IB.IC\left(= IA^2\right) \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{IC}{IM}$$

+ Xét ΔIMC và ΔIBM có $\widehat{BIM}$ chung; $\dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IC}{IM}$

$$\Rightarrow \Delta IMC \backsim \Delta IBM \ (c-g-c)$$

$\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{IBM}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{IBM} = \widehat{BDC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{BDC}$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow BD // AM$

c) Chứng minh: Tứ giác $AHCI$ nội tiếp và tia CA là tia phân giác của góc $\widehat{ICD}$

Vì $\Delta IAC \backsim \Delta IBA$ (cm phần a) $\Rightarrow \widehat{ICA} = \widehat{IAB}$ (1)

Xét ΔAHM vuông tại H có I là trung điểm của AM. Khi đó $IA = IH$. Suy ra ΔIAH cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IAB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ICA} = \widehat{IHA}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHCI$ có hai đỉnh liên tiếp H và C cùng nhìn cạnh AI dưới các góc bằng nhau nên là tứ giác nội tiếp

Ta có $BD // AM \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{IAB}$

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

Và $\widehat{IAB} = \widehat{IHA}$ (ΔAIH cân)

Và $\widehat{ACI} = \widehat{IHA} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ACI}$

$\Rightarrow CA$ là tia phân giác $\widehat{ICD}$.

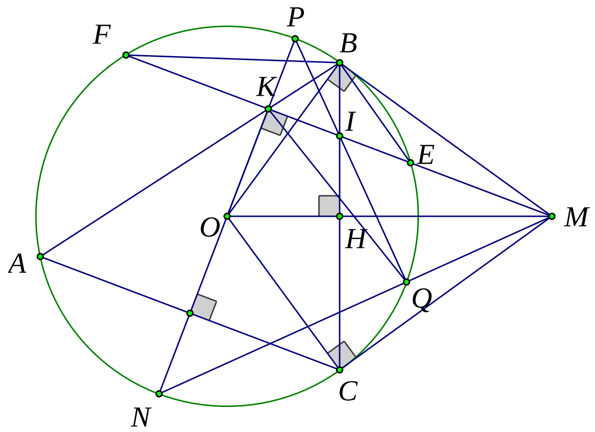
Bài 75. (Đề 108) Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$), nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Gọi H là giao điểm của OM và BC. Từ M kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt (O) tại E và F (E thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại I, cắt AB tại K.

a) Chứng minh: $MO \perp BC$ và $ME.MF = MH.MO$.

b) Chứng minh rằng tứ giác $MBKC$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra năm điểm M, B, K, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng OK cắt (O) tại N và P (N thuộc cung nhỏ AC). Đường thẳng PI cắt (O) tại Q (Q khác P). Chứng minh ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có: $OB = OC = R$ và $MB = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên OM là đường trung trực của BC

$\Rightarrow OM \perp BC$ tại H.

+ Xét ΔMEB và ΔMBF có:

Góc $\widehat{EMB}$ chung, góc $\widehat{MBE} = \widehat{MFB}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

$$\Rightarrow \Delta MEB \backsim \Delta MBF\left(g-g\right) \Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{MB}{MF} \Rightarrow ME.MF = MB^2 \ (1)$$

Trong tam giác vuông MBO có BH là đường cao, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $MH.MO = MB^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $ME.MF = MH.MO$

b) Ta có: $\widehat{MKB} = \widehat{BAC}$ (hai góc đồng vị, $AC // KM$)

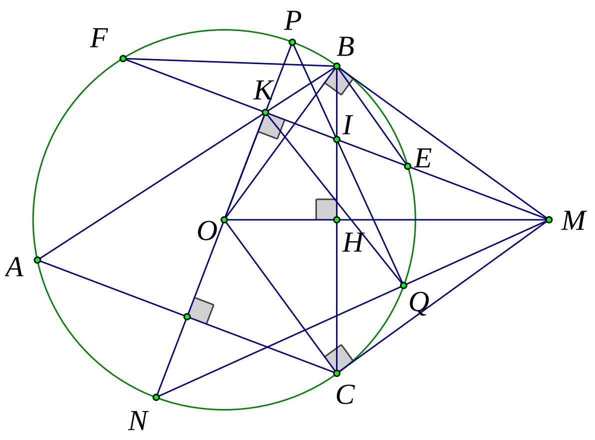
$\widehat{MCB} = \widehat{BAC}$ $\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC}\right)$(góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{MCB}$. Tứ giác $MBKC$ có hai đỉnh liên tiếp K, C cùng nhìn cạnh MB dưới các góc bằng nhau $\Rightarrow$ Tứ giác MBKC nội tiếp

+ Xét tứ giác $MBOC$ có $\widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác $MBOC$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow M,\ B,\ K,\ O,\ C$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Ta có:



Xét ΔIKB và ΔICM có:

$$\begin{cases}\widehat{IKB}=\widehat{ICM}\,(cmt)\\ \widehat{KIB}=\widehat{CIM}\,(d.d)\end{cases}\Rightarrow \Delta IKB \backsim \Delta ICM\,(g-g)\Rightarrow \frac{IK}{IC}=\frac{IB}{IM}\Rightarrow IB.IC=IK.IM\ \ (1)$$

Xét ΔIPB và ΔICQ có:

$$\begin{cases}\widehat{PIB}=\widehat{CIQ}\,(d.d)\\ \widehat{IPB}=\widehat{ICQ}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BQ}\right)\end{cases}\Rightarrow \Delta IPB \backsim \Delta ICQ\,(g-g)\ \Rightarrow \frac{IP}{IC}=\frac{IB}{IQ}\Rightarrow IB.IC=IQ.IP\ (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $IM.IK=IP.IQ$

Xét ΔIPK và ΔIMQ có: $\begin{cases}\widehat{KIP}=\widehat{QIM}\,(d.d)\\ \dfrac{IK}{IP}=\dfrac{IQ}{IM}\,(cmt)\end{cases}\Rightarrow \Delta KIP \backsim \Delta QIM\,(c-g-c)\Rightarrow \widehat{IPK}=\widehat{IMQ}$

(hai góc tương ứng)

Xét tứ giác $MQKP$ có $\widehat{QPK}=\widehat{KMQ}\,(cmt)$ mà đây là hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh $KQ\Rightarrow$ tứ giác $MQKP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MQP}=\widehat{MKP}$

Lại có: $\widehat{MKP}=\widehat{MKO}=\widehat{MBO}=90^0\ \ \Rightarrow \widehat{MQP}=90^0$

Mà: $\widehat{NQP}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{NQM}=\widehat{NQP}+\widehat{PQM}=180^0$

$\Rightarrow N,\ Q,\ M$ thẳng hàng.

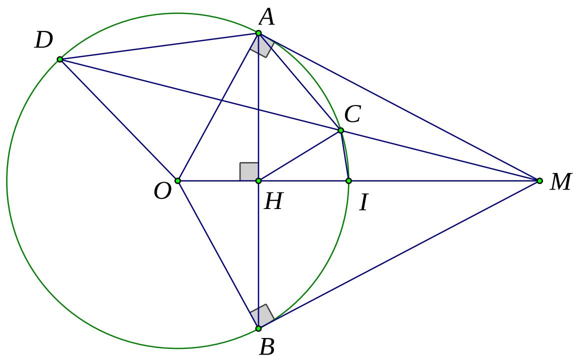
Bài 76. (ĐỀ 109) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D) của đường tròn tâm O. Đoạn thẳng OM cắt AB và (O) theo thứ tự tại H và I. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MAOB$ là tứ giác nội tiếp và $MC.MD = OM^2 - R^2$

b) Bốn điểm O, H, C, D thuộc một đường tròn.

c) CI là tia phân giác của $\widehat{HCM}$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90°$ (tính chất tiếp tuyến) nên $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^o$

Mà đây là hai góc đối nhau của tứ giác $MAOB \Rightarrow MAOB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO.

+ Xét ΔMCA và ΔMAD có:

$\widehat{M}$ chung,

$\widehat{MAC} = \widehat{MDA}\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AC}\right)$ (tính chất góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta MCA \backsim \Delta MAD\,(g-g)$

$\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MA}{MD} \Rightarrow MC.MD = MA^2$

Trong tam giác vuông MAO có : $MA^2 = OM^2 - OA^2 = OM^2 - R^2$

Nên $MC.MD = OM^2 - R^2$

b) Ta có: $OA = OB = R$ và $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên OM là đường trung trực của AB

$\Rightarrow OM \perp$ AB tại H.

Trong tam giác MOA vuông tại A có AH là đường cao nên $MA^2 = MH.MO$

Mà $MC.MD = MA^2$

$\Rightarrow MC.MD = MH.MO \Rightarrow \dfrac{MC}{MH} = \dfrac{MO}{MD}$

Xét ΔMCH và ΔMDO có :

$\widehat{M}$ chung,

$\dfrac{MC}{MH} = \dfrac{MO}{MD}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MCH \backsim \Delta MDO\left(c - g - c\right)$

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

Mà $\widehat{OHC} + \widehat{MHC} = 180° \Rightarrow \widehat{OHC} + \widehat{ODC} = 180°$

Nên $OHCD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Bốn điểm O, H, C, D thuộc một đường tròn.

c) Ta có: $\widehat{MAI} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset\frown{AI}$; $\widehat{IAB} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset\frown{BI}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Mà $\overset\frown{AI} = \overset\frown{BI}$ (do I là điểm chính giữa của $\overset\frown{AB}$) nên AI là tia phân giác của $\widehat{MAH}$

$\Rightarrow \dfrac{IH}{IM} = \dfrac{AH}{AM}$ (1)

$\Delta MHC \backsim \Delta MDO$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{CH}{CM} = \dfrac{OD}{OM}$

$OD = OA = R$ nên $\dfrac{CH}{CM} = \dfrac{OA}{OM}$ (2)

Xét ΔAMH và ΔOMA có :

$\widehat{AHM}=\widehat{OAM}=90^\circ$

$\widehat{M}$ chung

$\Rightarrow \Delta AMH \backsim \Delta OMA(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OM}=\dfrac{AH}{AM}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{IH}{IM}=\dfrac{CH}{CM}$.

Suy ra CI là tia phân giác của $\widehat{HCM}$.

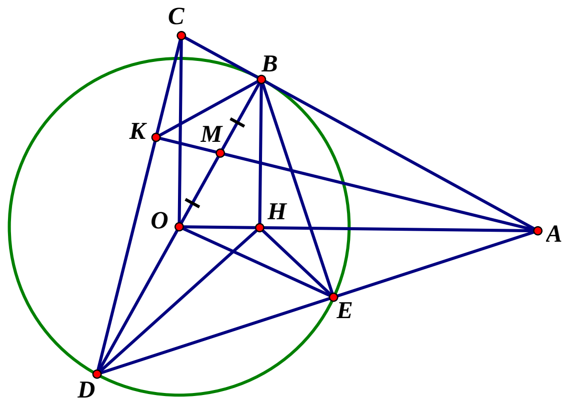
Bài 77. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O. Từ A vẽ tiếp tuyến AB của đường tròn (O) (B là tiếp điểm). Vẽ BH vuông góc với AO tại H, vẽ BD là đường kính của đường tròn (O), tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Từ điểm O vẽ đường thẳng vuông góc với AO cắt tia AB tại C.

a) Chứng minh: $BC.BA=OH.OA$.

b) Chứng minh: tứ giác $OHED$ nội tiếp.

c) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BO, tia AM cắt đường thẳng CD tại K. Chứng minh: $AK\perp CD$.

Lời giải



a) Chứng minh: $BC.BA=OH.OA$.

Theo giả thiết, từ điểm O vẽ đường thẳng vuông góc với AO cắt tia AB tại C nên ΔOAC vuông tại O.

Lại có: AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) với B là tiếp điểm nên $OB\perp AB$ tại B.

$\Rightarrow \Delta OAC$ vuông tại O có OB là đường cao.

$\Rightarrow BC.BA = OB^2$ (1).

Mặt khác, ΔOAB vuông tại B có BH là đường cao$\Rightarrow OH.OA = OB^2$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow BC.BA = OH.OA$.

b) Chứng minh: tứ giác $OHED$ nội tiếp.

Do BD là đường kính của đường tròn (O) và điểm E thuộc đường tròn (O) nên $\widehat{BED} = 90°$.

$\Rightarrow BE \perp AD$.

$\Rightarrow \Delta DAB$ vuông tại B có BE là đường cao.

$\Rightarrow AE.AD = AB^2$. (3)

Mà ΔOAB vuông tại B có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH.AO$. (4)

Từ (3) và $(4) \Rightarrow AE.AD = AO.AH \Leftrightarrow \dfrac{AE}{AO} = \dfrac{AH}{AD}$.

Xét ΔAEH và ΔAOD có:

$\widehat{OAD}$ chung

$\dfrac{AE}{AO} = \dfrac{AH}{AD}$

$\Rightarrow \Delta AEH \backsim \Delta AOD$ (c – g – c).

$\Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{AEH}$.

Lại có: $\widehat{DEH} + \widehat{AEH} = 180° \Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{DEH} = 180°$. Mà $\widehat{AOD}$, $\widehat{DEH}$ ở vị trí hai góc đối diện của tứ giác $OHED$.

$\Rightarrow$Tứ giác $OHED$ nội tiếp.

c) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BO, tia AM cắt đường thẳng CD tại K. Chứng minh: $AK \perp CD$.

Ta có $BC.BA = OB^2$ (chứng minh ở câu a))

$\Rightarrow OB.OB = BC \cdot BA$.

Mà $OB = 2BM$ (M là trungđiểm OB); $OB = \dfrac{1}{2}BD$ (BD là đường kính đường tròn (O)).

$\Rightarrow BC \cdot BA = \dfrac{1}{2}BD.2BM \Rightarrow BD.BM = BC \cdot BA \Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BA}{BD}$.

Xét ΔBMA và ΔBCD có:

$\widehat{CBD} = \widehat{MBA} = 90°$

$\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BA}{BD}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BMA \backsim \Delta BCD$ (c – g – c).

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BDC}$ hay $\widehat{BAK} = \widehat{BDK}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABKD$ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa 2 đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{ABD} = 90°$

$\Rightarrow AK \perp CD$.

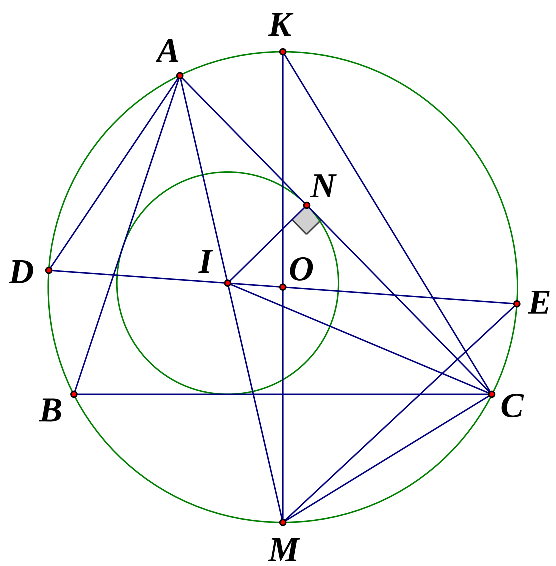
Bài 78. (Đề 111) Cho ΔABC ($AB < AC$) nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ đường tròn $(I;r)$ nội tiếp ΔABC. Vẽ dây AM của (O) qua I. Đường thẳng OI cắt (O) lần lượt tại D và E (I nằm giữa O và D).

a) Chứng minh: $IA.IM = ID.IE$ và $MI = MC$.

b) Chứng minh: $MC = 2R.\sin\widehat{MAC}$.

c) Chứngminh: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Lời giải



a) Chứng minh: $IA.IM = ID.IE$ và $MI = MC$.

Xét ΔIEM và ΔIAD có

$\widehat{DIA} = \widehat{EIM}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{DAI} = \widehat{IEM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DM}$)

$\Rightarrow \Delta IEM \backsim \Delta IAD$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{IE}{IM} = \dfrac{IA}{ID}$.

$\Rightarrow IA.\,IM = ID.IE$.

* Chứng minh $MI = MC$

Ta có: $\widehat{IAB} = \widehat{BCM}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BM}$).

Lại có: I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ΔABC.

$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IAC}$ và $\widehat{ICA} = \widehat{ICB}$.

Do đó: $\widehat{MIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \widehat{IAB} + \widehat{ICB} = \widehat{BCM} + \widehat{ICB} = \widehat{ICM}$.

$\Rightarrow \Delta MCI$ cân tại M.

$\Rightarrow MI = MC$.

b) Chứng minh: $MC = 2R.\sin\widehat{MAC}$.

Vẽ đường kính MK của đường tròn $(O;R) \Rightarrow \widehat{KCM} = 90°$.

Trong ΔKCM vuông tại C: $\sin\widehat{MKC} = \dfrac{MC}{KM} \Rightarrow MC = 2R\sin\widehat{MKC}$.

Lại có: $\widehat{MKC} = \widehat{MAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MC}$).

$\Rightarrow MC = 2R\sin\widehat{MAC}$.

c) Chứng minh: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Theo chứng minh ở câu a), ta có:

$IA.\,IM = ID.IE \Rightarrow IA.\,IM = (OD - IO).(OE + IO)$

$\Rightarrow IA.\,IM = (R - IO).(R + IO)$

$\Rightarrow IA.\,IM = R^2 - IO^2$

$\Rightarrow IO^2 = R^2 - IA.\,IM \;(1)$

Vẽ $IN \perp AC$ tại N.

ΔAIN vuông tại N có: $IN = IA.\sin\widehat{MAC} \Rightarrow IA = \dfrac{IN}{\sin\widehat{MAC}}$.

$IM = MC = 2R\sin\widehat{MAC}$ (theo chứng minh ở câu b)).

Do đó: $IA.IM = \dfrac{IN}{\sin\widehat{MAC}}.2R\sin\widehat{MAC} = 2R.IN = 2Rr\;(2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow IO^2 = R^2 - 2Rr$.

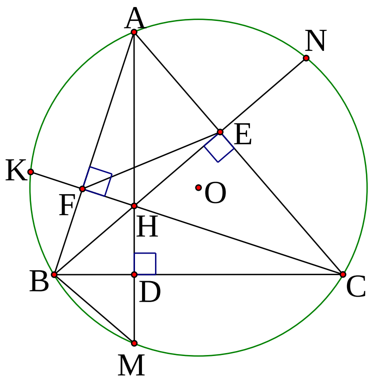
Bài 79. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $BFEC$, $EHDC$ là các tứ giác nội tiếp.

b) AD cắt (O) tại M. Chứng minh M và H đối xứng nhau qua BC.

c) BE cắt (O) tại N, CF cắt (O) tại K. Chứng minh $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CK}{CF}=4$

Lời giải.



a) Chứng minh $BFEC,\ EHDC$ là các tứ giác nội tiếp.

* Xét tứ giác $BFEC$ có: $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^\circ$ (gt) nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

* Xét tứ giác $EHDC$ có: $\widehat{HEC}=\widehat{HDC}=90^\circ$ (gt) nên tứ giác $EHDC$ nội tiếp đường tròn đường kính HC.

b) Chứng minh M và H đối xứng nhau qua BC

* Dễ dàng chứng minh được tứ giác $ABDE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EAD}=\widehat{EBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DE}$ của đường tròn đường kính AB) (1)

Mặt khác trong đường tròn tâm (O) có: $\widehat{EAD}=\widehat{CBM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MC}$) (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{EBD}=\widehat{MBD}$ Hay BD là phân giác của góc $\widehat{MBH}$

Xét ΔBMH có: BD là phân giác của góc $\widehat{MAH}$; BD lại là đường cao

Nên ΔBMH cân tại B

Do đó: BD là đường trung trực của HM

Hay BC là đường trung trực của HM

Do đó: M và H đối xứng nhau qua BC

c) Chứng minh $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CK}{CF}=4$

Ta có: $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC}=\frac{HD}{AD}$; $\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}.AC.HE}{\frac{1}{2}.AC.BE}=\frac{HE}{BE}$; $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}.AB.HF}{\frac{1}{2}.AB.CF}=\frac{HF}{CF}$

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=1$$

Chứng minh tương tự ta có: $KF=FH$; $HE=EN$

Do đó: $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1\Leftrightarrow\frac{MD}{AD}+\frac{NE}{BE}+\frac{KF}{CF}=1\Leftrightarrow\frac{MD}{AD}+1+\frac{NE}{BE}+1+\frac{KF}{CF}+1=1+3$

$$\Leftrightarrow\frac{MD+AD}{AD}+\frac{NE+BE}{BE}+\frac{KF+CF}{CF}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CK}{CF}=4\text{ (đpcm).}$$

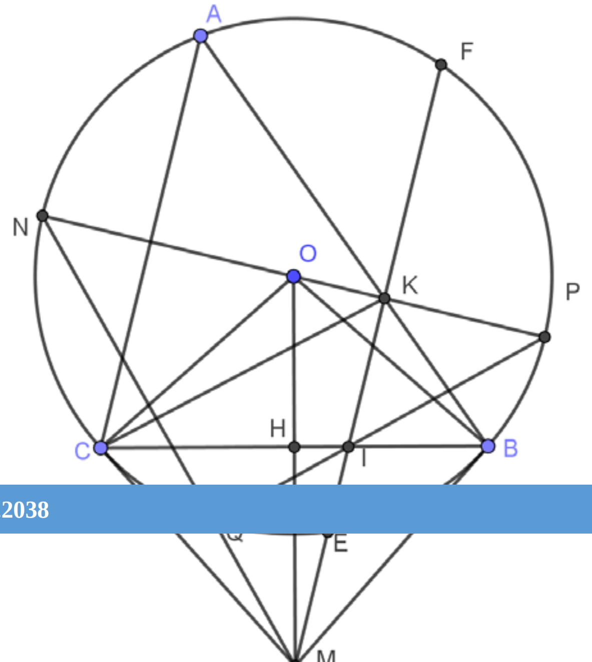
Bài 80. Cho tam giác ABC nhọn $(AB>AC)$, nội tiếp đường tròn $(O;\,R)$. Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Gọi H là giao điểm của OM và BC. Từ M kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt (O) tại E và F (E thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại I, cắt AB tại K.

a) Chứng minh: $MO\perp BC$ và $ME.MF=MH.MO$.

b) Chứng minh rằng tứ giác $MBKC$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra năm điểm M, B, K, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng OK cắt (O) tại N và P (N thuộc cung nhỏ AC). Đường thẳng PI cắt (O) tại Q ($Q\neq P$). Chứng minh ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

Lời giải



a) +) Vì $MB = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OB = OC$ (cùng bằng bán kính)

Suy ra OM là đường trung trực của BC

Nên $OM \perp BC$

+) Xét ΔMEB và ΔMFB có:

$\widehat{BME}$ là góc chung

$\widehat{EBM} = \widehat{BFE}$ (cùng chắn cung EB)

Suy ra: $\Delta MEB \backsim \Delta MBF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MB}{MF} \Rightarrow MB^2 = ME.MF$ (2)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OBM đường cao BH có: $MB^2 = MH.MO$ (1)

Từ (1) và (2) ta suy ra $MH.MO = ME.MF$

b) $\widehat{MKB} = \widehat{BAC}\left(do\ MF//AC\right); \widehat{MCB} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung BC)

$\Rightarrow \widehat{MKB} = M\widehat{CB}$ cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa đường thẳng MB và cùng nhìn MB

Suy ra tứ giác $MBKC$ là tứ giác nội tiếp

Lại có, tứ giác $MBOC$ nội tiếp vì: $\widehat{MBO} = \widehat{MCO} = 90^0$

Vậy năm điểm M, B, K, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Xét ΔKIB và ΔCIM có:

$\widehat{KIB} = \widehat{CIM}$ (đối đỉnh)

$\widehat{BKI} = \widehat{ICM}$ (cùng chắn cung BM)

Suy ra: $\Delta KIB \backsim \Delta CIM$ (g.g)$\Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IC}{IK} \Rightarrow IB.IC = IM.IK(*)$

Xét ΔIBP và ΔICQ có:

$\widehat{PIB} = \widehat{CIQ}$ (đối đỉnh)

$\widehat{IBP} = \widehat{QCB}$ (cùng chắn cung QB)

Suy ra: $\Delta IBP \backsim \Delta IQC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IP}{IC} = \frac{IB}{IQ} \Rightarrow IB.IC = IP.IQ(**)$

Từ (*) và (**) ta có: $IM.IK = IP.IQ \Rightarrow \frac{IM}{IP} = \frac{IQ}{IK}$

Xét ΔIMQ và ΔIPK có $\frac{IM}{IP} = \frac{IQ}{IK}$ và $\widehat{MIQ} = \widehat{PIK}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\Delta IMQ \backsim \Delta IPK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MKP} = \widehat{MQP}$

Mà $\widehat{MKP} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{MKO}$) $\Rightarrow \widehat{MQP} = 90^0$

Hơn nữa $\widehat{NQP} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{NQM} = 180°$

Vậy N, Q, M thẳng hàng.

Bài 81. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ với $OA < 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến AD, AE với (O) (D, E *là các tiếp điểm*). Gọi H là giao điểm của DE và AO. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ DE (M khác D, khác E, $MD < ME$). Tia AM cắt đường tròn $(O;R)$ tại N. Đoạn thẳng AO cắt cung nhỏ DE tại K.

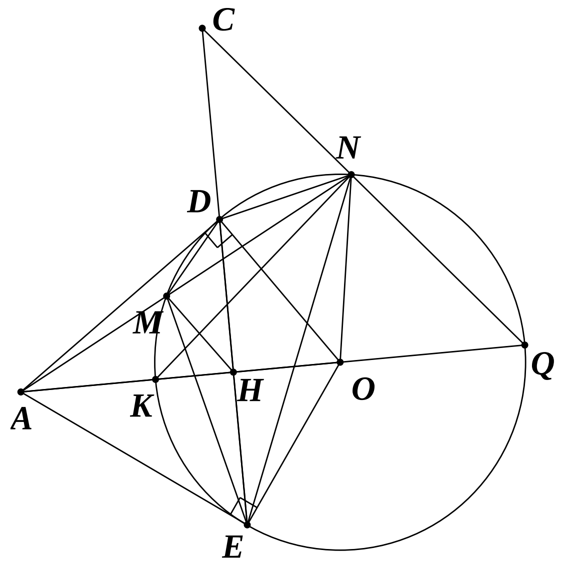
a) Chứng minh $AO \perp DE$ và $AD^2 = AM.AN$

b) Chứng minh NK là tia phân giác của góc $\widehat{DNE}$ và tứ giác $MHON$ nội tiếp.

c) Kẻ đường kính KQ của đường tròn $(O;R)$. Tia QN cắt tia ED tại C.

Chứng minh: $MD.CE = ME.CD$.

Lời giải



a) Chứng minh $AO \perp DE$ và $AD^2 = AM.AN$.

+) Ta có:

$AD = AE$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

và $OD = OE\left(= R\right)$

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của đoạn DE.

$\Rightarrow AO \perp DE$

+) ΔADM và ΔAND, có:

$\widehat{DAN}$ chung

$\widehat{ADM} = \widehat{AND}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung MD)

$\Rightarrow$ $\Delta ADM \backsim \Delta AND$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow AD^2 = AM.AN$

b) Chứng minh NK là tia phân giác của góc $\widehat{DNE}$ và tứ giác $MHON$ nội tiếp.

Ta có AO là đường trung trực của đoạn DE (cmt)

$\Rightarrow KD = KE\left(K \in AO\right)$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{KD}$ = sđ $\overset{\frown}{KE}$

$\Rightarrow$ $\widehat{DNK} = \widehat{ENK}$ (hệ quả góc nội tiếp) $\Rightarrow NK$ là phân giác của $\widehat{DNE}$.

* Xét ΔADO vuông tại D, đường cao DH :

$AD^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

mà $AD^2 = AM.AN$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AH.AO = AM.AN \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AN}{AO}$

Mà $\widehat{NAO}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHM \backsim \Delta ANO$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{ANO}$

Lại có: $\widehat{AHM} + \widehat{MHO} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{ANO} + \widehat{MHO} = 180°$ hay $\widehat{MNO} + \widehat{MHO} = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MHON$ nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng $180°$).

c) Chứng minh: $MD.CE = ME.CD$.

Ta có:

$\Delta ADM \backsim \Delta AND$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{MD}{DN} = \dfrac{AM}{AD}$

ΔAME và ΔAEN có:

$\widehat{NAE}$ chung

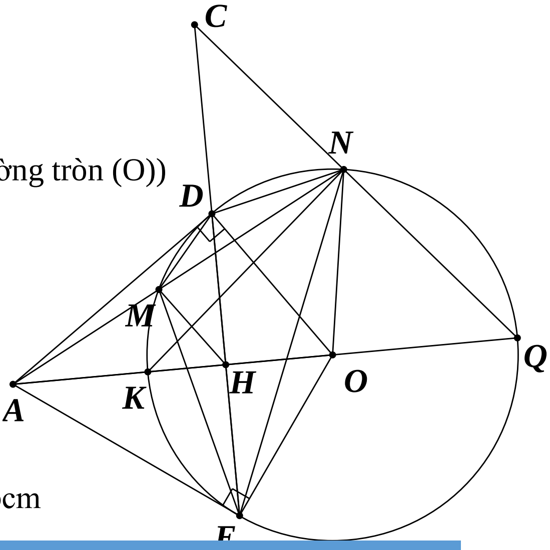
$\widehat{AEM} = \widehat{ANE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung ME)

$\Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta AEN$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{ME}{EN} = \dfrac{AM}{AE}$

Mà $AD = AE$ (cmt)

Do đó $\dfrac{MD}{DN} = \dfrac{ME}{NE} \Rightarrow \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{ND}{NE}$ $\quad (1)$



Mặt khác, ta có: $\widehat{QNK} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow CN \perp NK$

$\Rightarrow CN$ là phân giác ngoài tại đỉnh N của ΔDNE

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{ND}{NE}$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{CD}{CE} \Rightarrow MD.CE = ME.CD$ (đpcm

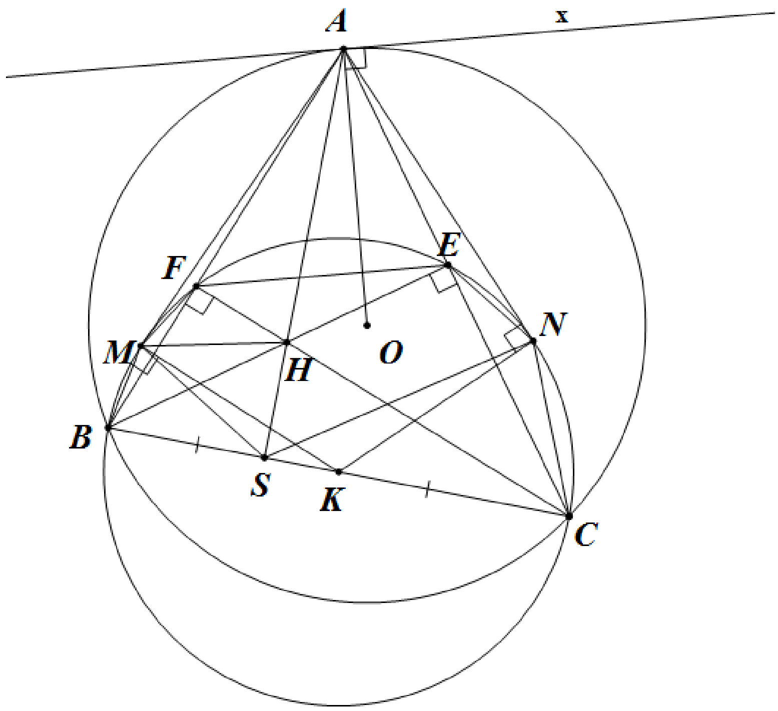
Bài 82. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ đường tròn tâm K đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại điểm F và E. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh: $AF.AB = AE.AC$ và $AH \perp BC$ tại S.

b) Chứng minh: $OA \perp EF$.

c) Từ A vẽ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (K) (với M, N là hai tiếp điểm; N thuộc cung EC). Chứng minh: ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh: $AF.AB = AE.AC$ và $AH \perp BC$ tại S.

+ Xét ΔAEB và ΔAFC có:

$\widehat{BAC}$ chung

$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90°$

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AF.AB = AE.AC$.

+ Ta có: $\widehat{BEC} = 90°; \widehat{BFC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)

$\Rightarrow BE \perp AC; CF \perp AB$

ΔABC có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔABC

$\Rightarrow AH$ là đường cao thứ ba của ΔABC hay $AH \perp BC$ tại S.

b) Chứng minh: $OA \perp EF$

Xét ΔAEF và ΔABC có:

$\widehat{BAC}$ chung

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (2 góc tương ứng)

Mà: $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp chắn cung AC)

$\widehat{AEF} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ $\quad (1)$

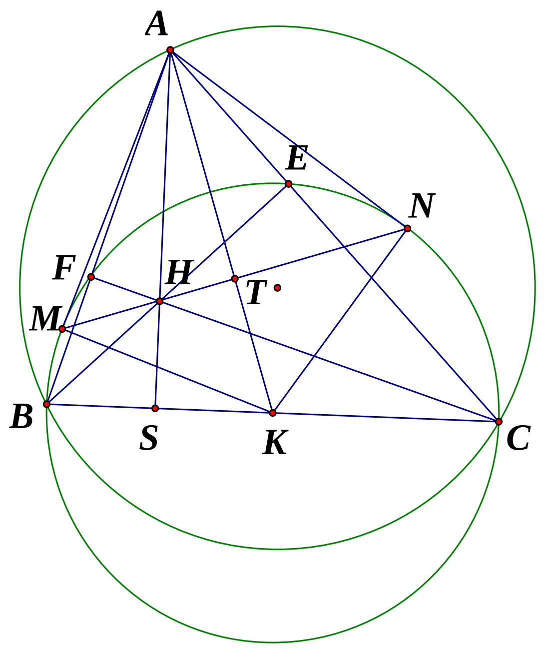
Qua A kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tâm O (A là tiếp điểm)

Ta có: $\widehat{xAC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp chắn cung AC) $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{xAC}$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong nên $EF // Ax$

Lại có $Ax \perp AO$ (vì Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O)

$\Rightarrow EF \perp AO$



c) Gọi T là giao điểm của AK và MN. Do AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) nên $MT \perp AK\,(1)$

Xét ΔAFH và ΔASB có :

$\widehat{BAS}$ chung

$\widehat{AFH} = \widehat{ASB} = 90°$

$\Rightarrow \Delta AFH \backsim \Delta ASB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AS} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AF.AB = AH.AS$

ΔAMF và ΔABM có :

$\widehat{MAB}$ chung

$\widehat{AMF} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \Delta AMF \backsim \Delta ABM$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB.AF$

$\Rightarrow AH.AS = AM^2 \left(= AB.AF\right)$

Mà $AM^2 = AT.AK \Rightarrow AH.AS = AT.AK \Rightarrow \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AT}{AS}, \widehat{A}$ chung nên

$\Delta AHT \backsim \Delta AKS\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{ATH} = \widehat{ASK} = 90^0 \Rightarrow HT \perp AK\left(2\right)$

Từ $\left(1\right) \& \left(2\right) \Rightarrow M, H, T$ thẳng hàng, suy ra M, H, N thẳng hàng.

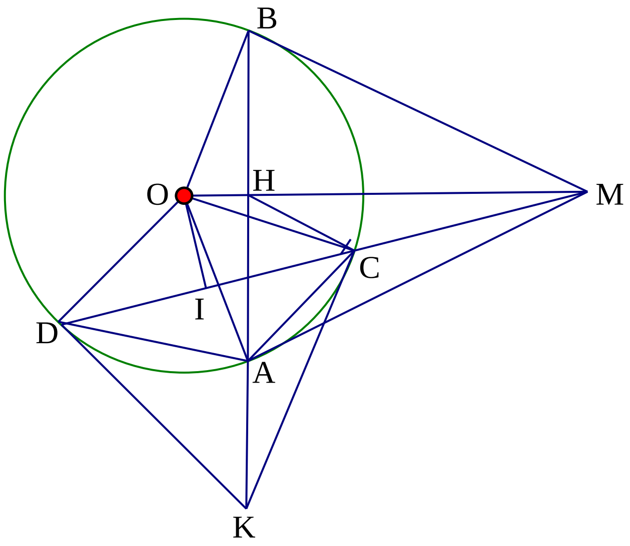
Bài 83. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn $\left(O\right)$ vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D) và hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn $\left(O\right)$ (A , B là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của CD , H là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh rằng 5 điểm M, A, I, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

c) Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn $\left(O\right)$. Chứng minh ba điểm A, B, K thẳng hàng .

Lời giải



a) Ta có:

$\widehat{MAO}=90^o$ (Do MA là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)

$\widehat{MBO}=90^o$ (Do MB là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)

$\widehat{MIO}=\widehat{MIC}=90^o$ (Do I là trung điểm của dây CD nên $OI\perp CD$ tại I)

$\Rightarrow$ 5 điểm M, A, I, O, B cùng nằm trên một đường tròn đường kính OM .

b) Xét ΔMAC và ΔMDA có:

$\widehat{AMC}=\widehat{DMA}$ (góc chung)

$\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung CD)

Do đó $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g)

Suy ra $\frac{MA}{MD}=\frac{MC}{MA}$

$\Rightarrow MA^2=MC.MD$ (1)

Ta lại có $\Delta MAH \backsim \Delta MOA$ (g.g)

Suy ra $\frac{MA}{MO}=\frac{MH}{MA}$

$\Rightarrow MA^2=MO.MH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MC.MD=MH.MO$

Có $MC.MD=MH.MO\Rightarrow\frac{MC}{MO}=\frac{MH}{MD}$

Xét ΔMCH và ΔMOD có:

$\widehat{M}$ chung

$\frac{MC}{MO}=\frac{MH}{MD}$

Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD(c.g.c)$ (g.g)

Suy ra $\widehat{MCH}=\widehat{MOD}$

Suy ra tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

c) Ta có: tứ giác $CODK$ nội tiếp đường tròn đường kính OK

Mà tứ giác $CHOD$ cũng nội tiếp

$\Rightarrow$ 5 điểm C,H,O,D,K cùng nằm trên đường tròn đường kính OK

$\Rightarrow \widehat{KHO} = 90^o$

$\Rightarrow KH \perp OM$ tại H

Mà $AB \perp OM$ tại H

Suy ra 2 đường thẳng KH và AB trùng nhau.

$\Rightarrow$ 3 điểm A, B, K thẳng hàng.

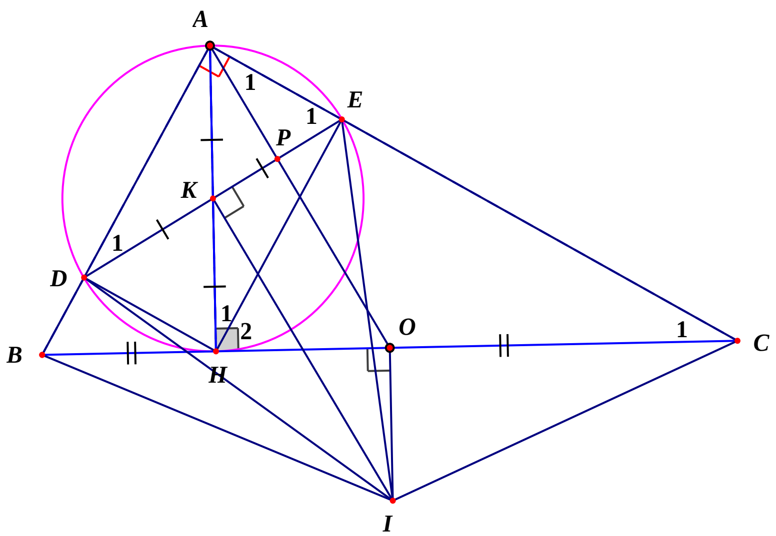
Bài 84. Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Gọi K là trung điểm AH. Vẽ đường tròn tâm K đường kính AH cắt AB và AC lần lượt tại D, E.

a) Chứng minh $ADHE$ là hình chữ nhật và $AD.AB = AC.AE$

b) Gọi O là trung điểm BC. Chứng minh AO vuông góc với DE.

c) Giả sử $AB = 15\,cm$, $AC = 20\,cm$. Trung trực của DE và trung trực của BC cắt nhau tại I. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDEC$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



a) Tứ giác $ADHE$ có:

$\widehat{ADH} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\left(K;\dfrac{AH}{2}\right)$)

$\widehat{AEH} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\left(K;\dfrac{AH}{2}\right)$)

$\widehat{DAE} = 90°$ (vì ΔABC vuông tại A)

Suy ra tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.

Xét ΔADH và ΔAHB có :

$\widehat{DAH}=\widehat{HAB}$ (góc chung)

$\widehat{ADH}=\widehat{AHB}=90^\circ$

Do đó $\Delta ADH \backsim \Delta AHB$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{AD}{AH}$

$\Rightarrow AH^2=AD.AB\ (1)$

Chứng minh tương tự, ta có $\Delta AEH \backsim \Delta AHC$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AE}{AH}$

$\Rightarrow AH^2=AC.AE\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AD.AB=AC.AE$.

b) Gọi P là giao điểm AC và DE.

Ta có:

$\widehat{D_1}=\widehat{H_1}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AE của đường tròn tâm K)

$\widehat{C_1}=\widehat{H_1}$ (cùng phụ với $\widehat{H_2}$)

$\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{C_1}\ (3)$

Vì O là trung điểm của BC nên AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC của ΔABC vuông tại A

Suy ra $AO=OC=\dfrac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O.

$\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{C_1}$ (hai góc ở đáy) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{D_1}=\widehat{A_1}$

Ta lại có $\widehat{D_1}+\widehat{E_1}=90^\circ$ (vì ΔADE vuông tại A)

$\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{E_1}=90^\circ$

Xét ΔAPE, có:

$\widehat{A_1}+\widehat{E_1}+\widehat{APE}=180^\circ$ (định lí tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow \widehat{APE}=180^\circ-\left(\widehat{A_1}+\widehat{E_1}\right)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

$\Rightarrow AO\perp DE$ tại P.

c) Vì tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật nên trung điểm K của đường chéo AH cũng là trung điểm của DE.

Đường trung trực của DE và đường trung trực của BC cắt nhau tại I.

Suy ra:

IK là đường trung trực của DE suy ra $ID = IE\left(5\right)$

OI là đường trung trực của BC suy ra $IB = IC\left(6\right)$

Ta có: (vì cùng vuông góc với BC).

Mà $K \in AH$ nên suy ra $AK\,//\,OI$

Ta lại có: $KI\,//\,AO$ (vì cùng vuông góc với DE).

Suy ra tứ giác $AKIO$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AO = KI$ và $AK = OI$ (vì là các cạnh đối trong hình bình hành)

Vì tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật , K là giao điểm của 2 đường chéo AH và DE nên $KA = KE$

$\Rightarrow KE = OI$

$\Rightarrow \Delta EKI = \Delta IOC$ (c.g.c)

$\Rightarrow IE = IC$ (2 cạnh tương ứng) $\left(7\right)$

Từ $\left(5\right)$, $\left(6\right)$ và $\left(7\right)$ suy ra $IB = ID = IE = IC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn tâm I , bán kính IC .

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác ABC vuông tại A, ta tính được

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ (cm)

$\Rightarrow OC = BC : 2 = 25 : 2 = 12,5$ (cm)

Vì tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH nên suy ra:

$AB.AC = AH.BC$

$\Rightarrow AH = \left(AB.AC\right) : BC = \left(15.20\right) : 25 = 12$ (cm)

Vì K là trung điểm AH nên $AK = AH : 2 = 12 : 2 = 6$

$\Rightarrow$ $OI = AK = 6$

Ta có ΔIOC vuông tại O nên suy ra:

$IC^2 = OI^2 + OC^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow IC^2 = 6^2 + \left(12,5\right)^2 = 36 + 156,25 = 192,25$

$\Rightarrow IC = \sqrt{192,25} \approx 13,87$ (cm)

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDEC$ là 13,87 cm

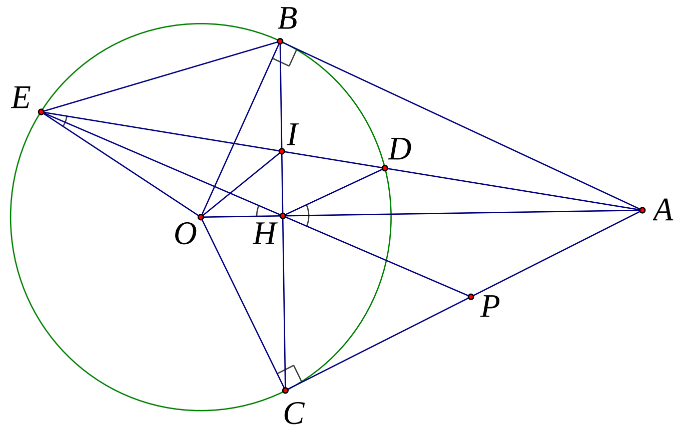
Bài 85. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn $\left(O\right)$ vẽ cát tuyến ADE không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn tâm $\left(O\right)$ (Với B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại H , DE cắt đoạn BH tại I . Chứng minh:

a) $OA \perp BC$ tại H và $AB^2 = AD.AE$

b) Tứ giác $DEOH$ nội tiếp.

c) $AD.IE = AE.ID$

Lời giải



a) $OA \perp BC$ tại H và $AB^2 = AD.AE$

Ta có: AB và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại A (gt)

$\Rightarrow AB = AC$ (t/c)

mà $OB = OC = R$

Suy ra AO là đường trung trực của BC.

Suy ra $AO \perp BC$.

+) Xét Δ ABD và Δ AEB có

$\widehat{ABD} = \widehat{BED}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BD)

$\widehat{BAD}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE.$

b) Xét tam giác ABC vuông tại B có:

$AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

mà $AB^2 = AD.AE.$ (cmt)

$\Rightarrow AD.AE = AO.AH$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AO} = \dfrac{AH}{AE}$

$\Rightarrow \Delta ADH \backsim \Delta AOE$ (c- g- c)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OHDE$ nội tiếp (góc ngoài bằng góc đối trong)

c) $AD.IE = AE.ID$

+) Xét tam giác ABC vuông tại B có đường cao BH :

$OB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

mà $OE = OB = R$

$\Rightarrow OE^2 = OH.OA$

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OH}{OE}$

$\Rightarrow \Delta AEO \backsim \Delta EOH$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{OEA}$ (góc tương ứng)

mà $\widehat{OEA} = \widehat{AHD}$ (tứ giác $OHDE$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{AHD}$

Lại có $\widehat{OHE} + \widehat{EHI} = \widehat{AHD} + \widehat{DHI} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{DHI}$

$\Rightarrow$ DI là tia phân giác của $\widehat{EHD}$

$\Rightarrow \dfrac{HE}{HD} = \dfrac{IE}{ID}$ (tính chất đường phân giác của tam giác) (1)

+) Ta có $\widehat{EHO} = \widehat{AHD}$ (cmt)

mà $\widehat{EHO} = \widehat{AHP}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AHP}$

$\Rightarrow HA$ là tia phân giác của $\widehat{DHP}$ hay HA là đường phân giác ngoài tại đỉnh H của tam giác EHD

$\Rightarrow \dfrac{HE}{HD} = \dfrac{AE}{AD}$ (tính chất đường phân giác của tam giác) (2)

Từ (1) và (2): $\dfrac{IE}{ID} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AD.IE = AE.ID$ (đpcm)

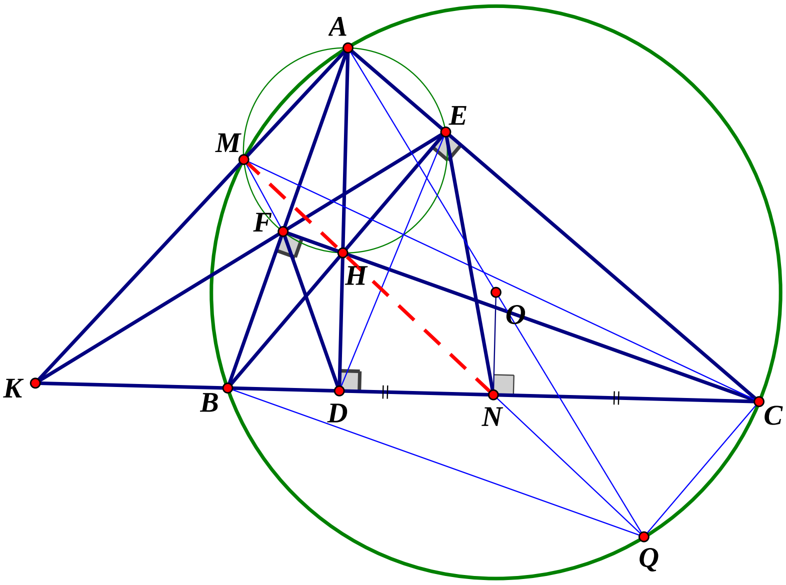
Bài 86. Cho ΔABC nhọn (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tia EF cắt tia CB tại K.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp và KF.KE = KB.KC

b) Đường thẳng KA cắt (O) tại M. Chứng minh tứ giác AEFM nội tiếp.

c) Gọi N là trung điểm của BC. Chứng minh M, H, N thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp và KF.KE = KB.KC (1đ)

Xét tứ giác $BFEC$:

$\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90°$ (BE, CF là 2 đường cao của ΔABC)

$\Rightarrow F,E$ cùng thuộc đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEDC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

$\Rightarrow \widehat{KFB}=\widehat{KCE}$ (góc ngoài = góc đối trong)

$\Rightarrow$ $\Delta KFB \sim \Delta KCE$ (g-g)

$\Rightarrow KF.KE=KB.KC$

b) Chứng minh tứ giác AEFM nội tiếp (1đ)

Ta có: Tứ giác $AMBC$ nội tiếp (O)

$\Rightarrow \widehat{KMB}=\widehat{KCA}$ (góc ngoài = góc đối trong)

Xét ΔKMB và ΔKCA có: $\widehat{KMB}=\widehat{KCA}$

$\widehat{MKB}$: chung.

Do đó: $\Delta KMB \backsim \Delta KCA$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{KM}{KC}=\dfrac{KB}{KA} \Rightarrow$ KM.$KA=KB.KC$.

Mà: $KF.KE=KB.KC \Rightarrow KF.KE=KM.KA$

$\Rightarrow$ $\Delta KFM \backsim \Delta KAE$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{KFM}=\widehat{KAE}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $AEFM$ nội tiếp (góc ngoài = góc đối trong)

c) Chứng minh M, H, N thẳng hàng (0,75đ)

Kẻ đường kính AQ của (O)

Xét (O)

$\widehat{ABQ}=\widehat{ACQ}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AK)

$\Rightarrow AB\perp BQ; AC\perp CQ$

Mà: $AB\perp CH; AC\perp BH \Rightarrow CH//BQ; BH//CQ$

$\Rightarrow BHCQ$ là hình bình hành $\Rightarrow N$ là trung điểm của HQ $\Rightarrow H,N,Q$ thẳng hàng (1)

$AEFM$ nội tiếp (cmt) và $AEHF$ nội tiếp $\Rightarrow A,E,H,F,M$ cùng thuộc 1 đường tròn.

$\Rightarrow AEHM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AMH}=\widehat{AEH}=90^0$

mà $\widehat{AMH}$ là góc nội tiếp của (O) $\Rightarrow \widehat{AMH}$ chắn nửa (O) $\Rightarrow M,H,$Q thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M,H,N,$Q thẳng hàng$\Rightarrow M,H,N$ thẳng hàng

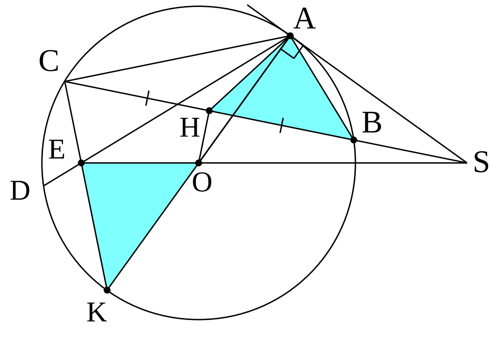
Bài 87. Từ điểm S ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến SA (A là tiếp điểm) và cát tuyến SBC đến đường tròn (O) (A thuộc cung nhỏ BC). Gọi H là trung điểm của BC.

a) Chứng minh : $SA^2=SB.SC$ và tứ giác $SAHO$ nội tiếp đường tròn.

b) Kẻ đường kính AK của (O). Tia SO cắt CK tại E. Chứng minh : $EK.BH=AB.OK$

Tia AE cắt (O) tại D. Chứng minh ba điểm $B,\ O,\ D$ thẳng hàng.

Lời giải



Lời giải

a) Xét ΔCAS và ΔABS có:

$\widehat{ASB}$ chung

$\widehat{ACS} = \widehat{BAS}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây)

$\Rightarrow \Delta CAS \sim \Delta ABS(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AS}{BS} = \dfrac{CS}{AS} \Rightarrow AS^2 = BS.CS$

H là trung điểm của BC

$\Rightarrow OH \perp BC$

Xét tứ giác ASOH có:

$\widehat{OHS} = 90°(OH \perp BC)$

$\widehat{OAS} = 90°(AO \perp AS)$

$\Rightarrow$ Tứ giác ASOH nội tiếp đường tròn

b) Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{ABC} = \widehat{CKS}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CA}$)

Xét đường tròn đường kính OS có:

$\widehat{AHS} = \widehat{AOS}$ (cùng chắn cung nhỏ AS)

Mà $\widehat{EOK} = \widehat{AOS}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{AHS} = \widehat{EOK}$

Xét ΔAHB và ΔEOK có:

$\widehat{ABH} = \widehat{EKO}$

$\widehat{AHB} = \widehat{EOK}$

$\Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta EOK$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{EK} = \dfrac{HB}{OK} \Rightarrow EK.HB = AB.OK$

c) VÌ $\Delta AHB \sim \Delta EOK$ (Cmt)

$\Rightarrow \dfrac{EK}{AB} = \dfrac{2OK}{2BH} - \dfrac{AK}{BC}$

$\Delta KEA \sim \Delta BAC$ (vì $\widehat{AKE} = \widehat{ABC}$ và $\dfrac{EK}{AB} = \dfrac{AK}{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{ACB}(1)$

Mà $\widehat{BAK} = \widehat{BCK}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{KAE} + \widehat{BAK} = \widehat{ACB} + \widehat{BCK} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ACK} = 90°$

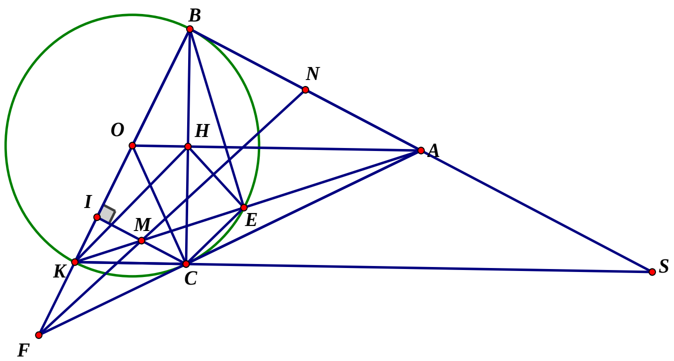
$\widehat{BAD}$ là góc nội tiếp của (O) chắn cung BD và $\widehat{BAD} = 90°$ nên BD là đường kính của (O)

Vậy 3 điểm B, O, D thẳng hàng

Bài 88. Từ điểm A nằm ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm), gọi H là giao điểm của OA và BC. Kẻ đường kính BK của (O), AK cắt (O) tại E

a) Chứng minh: tứ giác $OBAC$ nội tiếp và $AB^2 = AE.AK$
b) Chứng minh: tứ giác $OHEK$ nội tiếp và $CE \perp HE$.
c) Tia BK và tia AC cắt nhau tại F, kẻ $CI \perp BK$ $(I \in BK)$, AK và CI cắt nhau tại M. Gọi N là trung điểm của AB. Chứng minh: ba điểm F, M, N thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh: tứ giác $OBAC$ nội tiếp

Vì AB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AB \perp OB \Rightarrow \widehat{OBA} = 90°$

Vì AC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AC \perp OC \Rightarrow \widehat{OCA} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{OBA} + \widehat{OCA} = 180°$

Vậy tứ giác $OBAC$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng $180°$)

Ta có: $\widehat{BEK} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa (O))

$\Rightarrow BE \perp AK$

Xét $\triangle ABK$ vuông tại B, có đường cao BE

$AE.AK = AB^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

b) Xét $\triangle ABO$ vuông tại B, có đường cao BH

$AH.AO = AB^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow AH.AO = AE.AK (= AB^2)$

Xét $\triangle AHE$ và $\triangle AKO$ có:

$\widehat{OAK}$ chung

$\frac{AH}{AK} = \frac{AE}{AO}$ (vì $AH.AO = AE.AK$)

$\Rightarrow \Delta AHE \sim \Delta HKO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AKO}$

Vậy tứ giác $OHEK$ nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc đối trong)

Chứng minh: $CE \perp HE$

$\widehat{AHE} + \widehat{EHC} = 90°(OA \perp BC)$

Mà $\widehat{AHE} = \widehat{EKB}(cmt)$

$\widehat{EKB} = \widehat{ECB}$ (góc nội tiếp chắn cung BE của (O))

$\Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{EHC} = 90°$

$\Rightarrow \Delta EHC$ vuông tại $E \Rightarrow CE \perp HE$

c) Chứng minh 3 điểm F, M, N thẳng hàng

Gọi S là giao điểm của KC và BA

$\widehat{BCK} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa (O))

$\Rightarrow BC \perp SK$

$\Rightarrow \Delta BKS$ có O là trung điểm của $BK, OA \parallel KS$ (cùng $\perp BC$)

$\Rightarrow A$ là trung điểm $BS \Rightarrow AB = AS$

$IM \parallel AB(\perp BK) \Rightarrow \frac{IM}{BA} = \frac{KM}{KA}$ (hệ quả Talet trong ΔKBA)

$CM \parallel AB(\perp BK) \Rightarrow \frac{CM}{AS} = \frac{KM}{KA}$ (hệ quả Talet trong ΔKSA)

$\Rightarrow \frac{IM}{BA} = \frac{CM}{AS} (= \frac{KM}{KA})$

Mà $BA = AS (cmt)$

Nên $IM = CM \Rightarrow M$ là trung điểm của IC

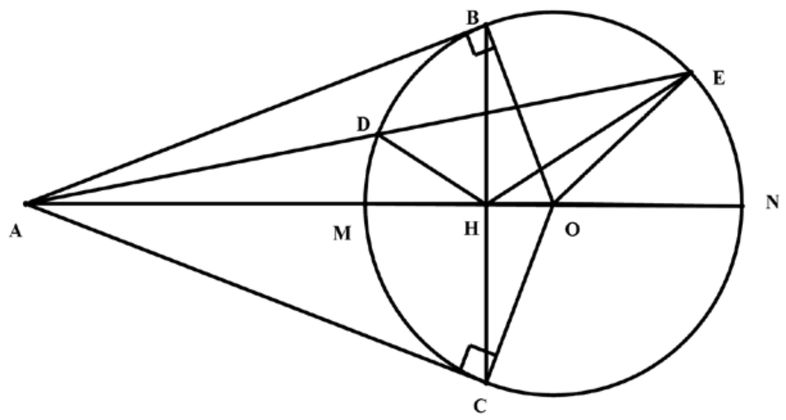
Bài 89. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của (O) (D, E thuộc (O); D nằm giữa A và E; tia AD nằm giữa hai tia AB và AO.

a) Chứng minh $AB^2 = AD.AE$.

b) Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh tứ giác $DEOH$ nội tiếp.

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa A và O). Chứng minh rằng $EH.AD = MH.AN$.

Lời giải



a) Chứng minh $AB^2 = AD.AE$.

Xét ΔABD và ΔAEB có $\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \widehat{ABD} = \widehat{AEB} \left(\text{chắn } \overset{\frown}{BD}\right) \end{cases}$.

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g – g)

Suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AD.AE$.

b) Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh tứ giác $DEOH$ nội tiếp.

Xét ΔAHB và ΔABO có $\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \widehat{AHB} = \widehat{ABO} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta ABO$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AB}=\dfrac{AB}{AO} \Leftrightarrow AH.AO=AB^2$ hay $AH.AO=AD.AE \Rightarrow \dfrac{AH}{AE}=\dfrac{AD}{AO}$.

Xét ΔAHD và ΔAEO có $\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \dfrac{AH}{AE}=\dfrac{AD}{AO} \end{cases} \Rightarrow \Delta AHD \backsim \Delta AEO$ (c – g – c).

$\Rightarrow \widehat{ADH}=\widehat{AOE}$. Do đó tứ giác $DEOH$ nội tiếp (Tứ giác có góc trong bằng góc đối ngoài).

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa A và O). Chứng minh rằng $EH.AD=MH.AN$.

Ta có $\widehat{DEM}=\dfrac{1}{2}\widehat{DOM}=\dfrac{1}{2}\widehat{DEH}$.

Suy ra EM là phân giác của $\Delta EAH \Rightarrow \dfrac{EH}{AE}=\dfrac{MH}{AM}$ (1)

$\Delta AEM \backsim \Delta AND$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AN}=\dfrac{AM}{AD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EH}{AE}.\dfrac{AE}{AN}=\dfrac{MH}{AM}.\dfrac{AM}{AD} \Leftrightarrow EH.AD=MH.AN$.

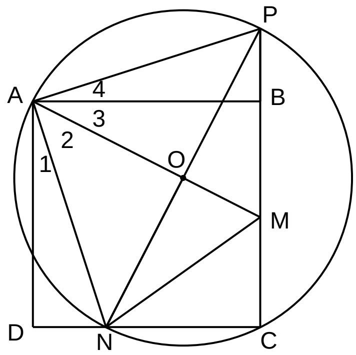
Bài 90. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 6 cm. Điểm N nằm trên cạnh CD sao cho $DN=2\text{ cm}$, P là điểm nằm trên tia đối của tia BC sao cho $BP=DN$.

a) Chứng minh $\Delta ABP=\Delta ADN$ và tứ giác $ANCP$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$.

c) Trên cạnh BC, lấy điểm M sao cho $\widehat{MAN}=45°$. Chứng minh $MP=MN$ và tính diện tích của ΔAMN.

Lời giải



a) Chứng minh $\Delta ABP = \Delta ADN$ và tứ giác $ANCP$ nội tiếp đường tròn.

Xét ΔABP và ΔADN, có: $\begin{cases} AB = AD\,(\text{gt}) \\ \widehat{ABP} = \widehat{ADN} = 90^\circ \\ BP = DN\,(= 2\text{ cm}) \end{cases} \Rightarrow \Delta ABP = \Delta ADN$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{AND}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow$ Tứ giác $ANCP$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$.

Tứ giác ANCP nội tiếp, ta có $\widehat{NCP} = 90^\circ$.

$\Rightarrow NP$ là đường kính của đường tròn (O) và $\widehat{NAP} = 90^\circ$.

$\Rightarrow NP = \sqrt{AN^2 + AP^2} = \sqrt{2}AN$ $\quad (1)$

ΔADN vuông tại D, nên $AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $NP = \sqrt{2}.2\sqrt{10} = 4\sqrt{5}\,(\text{cm})$.

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$ là $2\sqrt{5}\,(\text{cm})$

Độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác ANCP là: $C = 2\pi R = 2\pi.2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}\pi\,(\text{cm})$.

c) Trên cạnh BC, lấy điểm M sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Chứng minh $MP = MN$ và tính diện tích của ΔAMN.

Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 45^\circ$.

Mà $\widehat{A_1}=\widehat{A_4}$ nên $\widehat{A_4}+\widehat{A_3}=45^\circ \Rightarrow \widehat{MAP}=45^\circ$.

Xét ΔMAN và ΔMAP, có: $\begin{cases} AM \text{ chung} \\ \widehat{MAN}=\widehat{MAP}\left(=45^\circ\right) \\ AN=AP \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta MAN=\Delta MAP$ (c – g – c) $\Rightarrow MN=MP$.

Ta có $\begin{cases} AN=AP \\ MN=MP \Rightarrow AM\perp NP \text{ tại } O. \\ ON=OP \end{cases}$

Xét ΔPOM và ΔPCN có $\begin{cases} \widehat{P} \text{ chung} \\ \widehat{POM}=\widehat{PCN}\left(=90^\circ\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta POM \backsim \Delta PCN$ (g – g).

$\Rightarrow PM.PC=PO.PN \Rightarrow PM=\dfrac{PO.PN}{PC}=\dfrac{2\sqrt{5}.4\sqrt{5}}{8}=5\left(\text{cm}\right)\Rightarrow BM=3\left(\text{cm}\right)$.

$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\left(\text{cm}\right)$.

$S_{ANM}=\dfrac{1}{2}.AM.NO=\dfrac{1}{2}.3\sqrt{5}.2\sqrt{5}=15\left(\text{cm}^2\right)$.

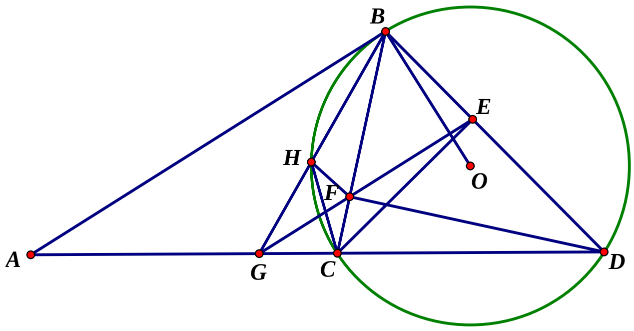
Bài 91. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $\left(O;R\right)$. Kẻ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD (C nằm giữa A và D) của đường tròn $\left(O\right)$.

a) Chứng minh: $AB^2=AC.AD$.

b) Gọi CE,DF lần lượt là hai đường cao của tam giác BCD. Chứng minh EF song song AB.

c) Tia EF cắt AD tại G. BG cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại H. Chứng minh $\widehat{HFG}=\widehat{HBD}$.

Lời giải



a) Chứng minh: $AB^2=AC.AD$

Xét ΔABC và ΔADB có:

$\widehat{A}$ chung; $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta ADB\ (g-g) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

$\Rightarrow\ AB^2 = AC.AD$

b) Chứng minh $EF\ //\ AB$

Xét tứ giác $CFED$ có:

$\widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^0$

$\Rightarrow E, F$ thuộc đường tròn đường kính CD.

$\Rightarrow$Tứ giác $CFED$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{BDC}$ (góc ngoài = góc đối trong)

Mà $\widehat{BDC} = \widehat{ABF}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{ABF}$ mà 2 góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow EF\ //\ AB$

c) Chứng minh $\widehat{HFG} = \widehat{HBD}$

Ta có: $\widehat{HCF} = \widehat{GBA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{HB}$)

mà $\widehat{GBA} = \widehat{HGF}$ (2 góc so le trong do $EF\ //\ AB$)$\Rightarrow \widehat{HCF} = \widehat{HGF}$

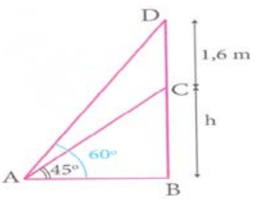
$\Rightarrow$Tứ giác HGCF nội tiếp (2 đỉnh kề nhìn 1 cạnh dưới 2 góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{HFG} = \widehat{HCG}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HG}$)

Mà $\widehat{HCG} = \widehat{HBD}$ (tứ giác BHCD nội tiếp, góc ngoài = góc đối trong)

$\Rightarrow \widehat{HFG} = \widehat{HBD}$

Bài 92. Một bức tượng cao $1,6$ mét được đặt trên một cái bệ. Tại một điểm A trên mặt đất bạn Hào nhìn thấy nóc tượng và nóc bệ với các góc nâng lần lượt là $60°$ và $45°$. Tính chiều cao của cái bệ.



Lời giải

Vì tam giác ABC vuông tại B

$DB = AB\tan 60°(1)$

Xét tam giác ABC vuông tại B

$BC = AB\tan 45°(2)$

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow BD - BC = AB(\tan 60° - \tan 45°)$

$\Rightarrow DC = AB(\tan 60° - \tan 45°)$

$1,6 = AB(\tan 60° - \tan 45°)$

$\Rightarrow AB = \dfrac{1,6}{\tan 60° - \tan 45°}$

$\Rightarrow AB \approx 2m$

$BC = AB\tan 45° = 2\tan 45° = 2m$

Chiều cao của cái bệ 2 mét