UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
PROFESSOR: EDUARDO A. SILVA

CÁLCULO DE PROBABILIDADE 2

ESPERANÇA CONDICIONAL

Questão 1. Um programa de TV dura 1 hora, e um telespectador impaciente vai mudar de canal a qualquer momento durante o programa (Isso significa que o instante em que ele mudará de canal é uma variável aleatória $X \sim U[0,1]$.) Então considere a seguintes questões:

a) Qual a probabilidade dele assistir a maior parte do programa?

b) Se ele assistiu a maior parte do programa qual a probabilidade dele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos?

Questão 2. Considere as variáveis aleatórias X e Y onde X é discreta e Y é contínua com distribuição conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^{x-1}}{3}, & \text{se } x = 1,2,3 \text{ e } y \in [0,1], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $F_Y(y|X=2)$ e $F_X(x|Y=1/2)$.

Questão 3. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica dada por,

$$\mathbb{P}[X_1 = k] = \mathbb{P}[X_2 = k] = p(1-p)^k, \ = 1, 2, \ldots,$$

onde $0 < p < 1$. Então, calcule

a) $\mathbb{P}[X_1 = X_2]$ e $\mathbb{P}[X_1 < X_2]$;

b) Calcule a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2$;

Questão 4. Uma certa lâmpada tem uma vida em *horas*, tendo distribuição exponencial de parâmetro 1. Um jogador acende a lâmpada e, enquanto a lâmpada ainda estiver acesa, lança um dado equilibrado de 15 em 15 *segundos*. Qual o número esperado de $3'^s$ lançados pelo jogador até a lampada se apagar?

Questão 5. Seja X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim \text{Binom}(m,p)$ e $Y \sim \text{Binom}(n,p)$. Obtenha a distribuição condicional de X dada $X+Y$. Como se chama essa distribuição?

Questão 6. Sejam $Y \sim \text{Exp}(1)$ e $(X|Y=y) \sim \text{Poisson}(y)$. Mostre que

$$\mathbb{P}[X = n] = 1/2^{n+1}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Questão 7. Um contador recebe impulsos de duas fontes independentes, A, e B. A fonte A gera impulsos segundo um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, enquanto a fonte B gera impulsos segundo um processo de Poisson com parâmetro $\xi > 0$. Suponha que o contador registre todo o impulso gerado pelas duas fontes.

a) Seja X_t o número de impulsos registrados até o tempo t, $t > 0$ $(X_0 = 0)$. Explique porque $\{X_t\}$ tem distribuição Poisson. Qual parâmetro?

b) Qual a probabilidade de que o primeiro impulso gerado seja da fonte A?

c) Dado que exatamente 100 impulsos foram contados durante a primeira unidade de tempo, qual a distribuição que você atribui ao número emitido pela fonte A?