

Lista 1 - Eduardo

Cálculo de Probabilidade 2

Tailine J. S. Nonato

Exercício 1

Um programa de TV dura 1 hora, e um telespectador impaciente vai mudar de canal a qualquer momento durante o programa (Isso significa que o instante em que ele mudará de canal é uma variável aleatória $X \sim U[0, 1]$). Então considere as seguintes questões:

- Qual a probabilidade dele assistir a maior parte do programa?
- Se ele assistiu a maior parte do programa, qual a probabilidade dele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos?

Solução

- A probabilidade dele assistir a maior parte do programa é dada por $P[X \leq 0.5] = 0.5$. Porque a variável aleatória X é uniforme, então a probabilidade de ele assistir a maior parte do programa pode ser calculada como a área do retângulo formado pelo intervalo $[0, 1]$ e a reta $y = 0.5$, logo $P[X \leq 0.5]$. Utilizando a função de distribuição acumulada da variável aleatória X , temos que $F_X(x) = x$, para $x \in [0, 1]$. Portanto, $P[X \leq 0.5] = F_X(0.5) = 0.5$.
- Se ele assistiu a maior parte do programa, então ele assistiu a primeira metade do programa. A probabilidade dele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos é dada por $P[X \geq 0.5 + 0.5] = P[X \geq 0.5] = 0.5$. Logo, a probabilidade dele assistir a maior parte do programa e desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos é dada por $P[X \leq 0.5] \cdot P[X \geq 0.5] = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.

Exercício 2

Considere as variáveis aleatórias X e Y onde X é discreta e Y é contínua com distribuição conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^{x-1}}{3}, & \text{se } x = 1, 2, 3 \text{ e } y \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $F_Y(y|X = 2)$ e $F_X(x|Y = 1/2)$.

Solução

Para calcular $F_Y(y|X = 2)$, vamos utilizar a definição de densidade condicional:

$$f_Y(y|X = 2) = \frac{f(2, y)}{f_X(2)}$$

Calculando $f_X(2)$

$$f_X(2) = \int_0^1 f(2, y) dy$$

$$f_X(2) = \int_0^1 \frac{2y}{3} dy$$

$$f_X(2) = \frac{1}{3}$$

Calculando $f(2, y)$

$$f(2, y) = \frac{2y}{3}$$

Portanto,

$$F_Y(y|X = 2) = \frac{2y}{3} \cdot 3$$

$$F_Y(y|X = 2) = 2y$$

Para calcular $F_X(x|Y = 1/2)$, vamos utilizar a definição de densidade condicional:

$$f_X(x|Y = 1/2) = \frac{f(x, 1/2)}{f_Y(1/2)}$$

Calculando $f_Y(1/2)$

$$f_Y(1/2) = \sum_{x=1}^3 f(x, 1/2)$$

$$f_Y(1/2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$$f_Y(1/2) = \frac{11}{24}$$

Calculando $f(x, 1/2)$, com $x = 1, 2, 3$

$$f(1, 1/2) = \frac{1}{6}$$

$$f(2, 1/2) = \frac{1}{4}$$

$$f(3, 1/2) = \frac{3}{8}$$

Portanto,

$$f_X(x|Y = 1/2) = \frac{f(x, 1/2)}{11/24}$$

Solução alternativa (em sala)

$$F_Y(y|X = 2) = \frac{P(Y \leq y, X=2)}{P(X=2)}$$

Obtendo as distribuições marginais em X :

$$P(X = 1)$$

$$P(X = 1) = \int_0^1 f(1, y) dy$$

$$P(X = 1) = \int_0^1 \frac{1*y^{1-1}}{3} dy$$

$$P(X = 1) = \int_0^1 \frac{1}{3} dy$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2)$$

$$P(X = 2) = \int_0^1 f(2, y) dy$$

$$P(X = 2) = \int_0^1 \frac{2*y^{2-1}}{3} dy$$

$$P(X = 2) = \int_0^1 \frac{2y}{3} dy$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 3)$$

$$P(X = 3) = \int_0^1 f(3, y) dy$$

$$P(X = 3) = \int_0^1 \frac{3*y^{3-1}}{3} dy$$

$$P(X = 3) = \int_0^1 y^2 dy$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{3}$$

Agora, calculando $P(X = 2, Y \leq y)$

$$P(X = 2, Y \leq y) = \int_0^y f(2, t) dt$$

$$P(X = 2, Y \leq y) = \int_0^y \frac{2t^{2-1}}{3} dt$$

$$P(X = 2, Y \leq y) = 2/3 \cdot \int_0^y t dt$$

$$P(X = 2, Y \leq y) = 2/3 \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^y$$

$$P(X = 2, Y \leq y) = \frac{y^2}{3}$$

Portanto,

$$F_Y(y|X = 2) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ y^2, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

Se fosse solicitado para calcular $E(Y|X = 2)$, teríamos que:

$$E(Y|X = 2) = \int_0^1 y \cdot dF(y|X = 2)$$

$$E(Y|X = 2) = \int_0^1 y \cdot 2y dy$$

$$E(Y|X = 2) = 2 \int_0^1 y^2 dy$$

$$E(Y|X = 2) = 2 \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^1$$

$$E(Y|X = 2) = \frac{2}{3}$$

Agora calculando $F_X(x|Y = 1/2)$

$$F_X(x|Y = 1/2) = \frac{P(X \leq x, Y = 1/2)}{P(Y = 1/2)}$$

Calcular $P(Y = 1/2)$ é incorreto porque Y é contínua. Logo, a resposta correta é:

$$F_X(x|Y = 1/2) = \sum_{k=1}^{\min(x, 3)} f(k|y = 1/2)$$

$$F_X(x|Y = 1/2) = \sum_{k=1}^{\min(x, 3)} \frac{f(x, 1/2)}{f_Y(1/2)}$$

Logo,

$$F_X(x|Y = 1/2) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 4/11, & 1 \leq x < 2 \\ 8/11, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Assim, pode-se verificar a função de densidade conjunta como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^{x-1}}{3}, & \text{se } x = 1, 2, 3 \text{ e } y \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E

$$f(k, 1/2) = \frac{k(1/2)}{3} \text{ para } k = 1, 2, 3$$

$$f_Y(1/2) = \frac{(1/2)^0}{3} = \frac{1}{3}$$

Exercício 3

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica dada por $P[X_1 = k] = P[X_2 = k] = p(1 - p)$ onde $k = 1, 2, \dots$, e $\theta < p < 1$. Então, calcule:

- a. $P[X_1 = X_2]$ e $P[X_1 < X_2]$;
- b. Calcule a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2$;

Solução

a. Para calcular $P[X_1 = X_2]$, vamos utilizar a definição de independência:

$$P[X_1 = X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X_1 = k] \cdot P[X_2 = k]$$

$$P[X_1 = X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} p(1 - p) \cdot p(1 - p)$$

$$P[X_1 = X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} p^2(1 - p)^2$$

$$P[X_1 = X_2] = p^2(1 - p)^2 \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

$$P[X_1 = X_2] = p^2(1 - p)^2$$

Para calcular $P[X_1 < X_2]$, vamos utilizar a definição de independência:

$$P[X_1 < X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X_1 = k] \cdot P[X_2 > k]$$

$$P[X_1 < X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p) \cdot (1-p)^k$$

$$P[X_1 < X_2] = p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$$

$$P[X_1 < X_2] = p(1-p) \cdot \frac{1-p}{1-(1-p)}$$

$$P[X_1 < X_2] = p(1-p) \cdot \frac{1-p}{p}$$

$$P[X_1 < X_2] = (1-p)^2$$

- b. Para calcular a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2$, vamos utilizar a definição de distribuição condicional:

$$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{P[X_1=k, X_1+X_2=n]}{P[X_1+X_2=n]}$$

$$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{P[X_1=k, X_2=n-k]}{P[X_1+X_2=n]}$$

$$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{P[X_1=k] \cdot P[X_2=n-k]}{P[X_1+X_2=n]}$$

$$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{p(1-p) \cdot p(1-p)}{P[X_1+X_2=n]}$$

$$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{p^2(1-p)^2}{P[X_1+X_2=n]}$$

Calculando $P[X_1 + X_2 = n]$

$$P[X_1 + X_2 = n] = \sum_{k=1}^{n-1} P[X_1 = k] \cdot P[X_2 = n - k]$$

$$P[X_1 + X_2 = n] = \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p) \cdot p(1-p)$$

$$P[X_1 + X_2 = n] = p^2(1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$P[X_1 + X_2 = n] = p^2(1-p)^2 \cdot (n-1)$$

Portanto,

$$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{p^2(1-p)^2}{p^2(1-p)^2 \cdot (n-1)}$$

$$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{1}{n-1}$$

Exercício 4

Uma certa lâmpada tem uma vida em horas, tendo distribuição exponencial de parâmetro 1. Um jogador acende a lâmpada e, enquanto a lâmpada ainda estiver acesa, lança um dado equilibrado de 15 em 15 segundos. Qual o número esperado de 3's lançados pelo jogador até a lâmpada se apagar?

Solução

Dividindo a resolução em passos, tem-se que:

1. Estabelecendo os objetos:

X = tempo de vida da lâmpada

$$X \sim \text{Exp}(1)$$

N = número de lançamentos até a lâmpada se apagar

Y = número de “3”s lançados nos N lançamentos

2. Conectando informações:

$$N \sim \text{Geom}(1 - e^{-X})$$

$$Y|N \sim \text{Bin}(N, 1/6)$$

3. Calculando a esperança:

$$E(Y) = E(E(Y|N))$$

$$E(Y|N) = N * 1/6$$

$$E(Y) = E(N) * 1/6$$

4. Calculando a esperança de N :

Considerando $\alpha = 15$ segundos ou $\alpha = 1/240$ horas, tem-se uma progressão geométrica com razão $e^{-\alpha}$, logo $P(X > n\alpha) = e^{-n\alpha}$. Então:

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$$

Por ser uma progressão geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$ converge em $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$, logo:

$$E(N) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$$

5. Substituindo os valores:

$$E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} * 1/6$$

$$E(Y) = \frac{1}{1-e^{-1/240}} * 1/6$$

$$ey = 1/(1 - \exp(-1/240)) * 1/6$$

$$E(Y) \approx 40.083$$

Exercício 5

Seja X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim Binom(m, p)$ e $Y \sim Binom(n, p)$.

Obtenha a distribuição condicional de X dada $X + Y$. Como se chama essa distribuição?

Exercício 6

Sejam $Y \sim Exp(1)$ e $(X|Y = y) \sim Poisson(y)$. Mostre que $P[X = n] = \frac{1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Exercício 7

Um contador recebe impulsos de duas fontes independentes, A e B. A fonte A gera impulsos segundo um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, enquanto a fonte B gera impulsos segundo um processo de Poisson com parâmetro $\epsilon > 0$. Suponha que o contador registre todo o impulso gerado pelas duas fontes.

- Seja X_t o número de impulsos registrados até o tempo t , $t > 0$ ($X_0 = 0$). Explique porque X_t tem distribuição Poisson. Qual parâmetro?
- Qual a probabilidade de que o primeiro impulso gerado seja da fonte A?
- Dado que exatamente 100 impulsos foram contados durante a primeira unidade de tempo, qual a distribuição que você atribui ao número emitido pela fonte A?

Exercício 8 (em sala)

Seja X uma variável aleatória com função de densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E $B = \{X \leq 3\}$.

- Calcule $F(X|B)$.
- Calcule $f(x|Y = y)$
- Calcule $E(X|Y = y)$
- Calcule $F(X|Y = y)$

Solução

- Para calcular $F(X|B)$, vamos utilizar a definição de distribuição condicional:

$$F(X|B) = \frac{P(X \leq x, B)}{P(B)}$$

$$F(X|B) = \frac{P(X \leq x, X \leq 3)}{P(X \leq 3)}$$

- Calculando $P(X \leq 3)$

$$P(X \leq 3) = \int_{-\infty}^3 f(x) dx$$

$$P(X \leq 3) = \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$$

$$P(X \leq 3) = -\frac{1}{x} \Big|_1^3$$

$$P(X \leq 3) = -\frac{1}{3} + 1$$

$$P(X \leq 3) = \frac{2}{3}$$

- Calculando $P(X \leq x, X \leq 3)$

$$P(X \leq x \cap X \leq 3) = \begin{cases} P(X \leq x), & \text{se } x < 3 \\ P(X \leq 3), & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Que é o mesmo que:

$$P(X \leq x \cap X \leq 3) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x fada, & \text{se } x < 3 \\ 2/3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$F(X|B) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 2/3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$