LISTA 2

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Tailine J. S. Nonato

2023-04-01

Descrição da atividade

Exercícios 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 e 2.6 do Cap.2 (pag.20) de Cryer & Chan (2008)

Exercício 2.1

Suppose $E(X) = 2$, $Var(X) = 9$, $E(Y) = 0$, $Var(Y) = 4$, and $Corr(X, Y) = 0.25$. Find:

a. $Var(X + Y)$
b. $Cov(X, X + Y)$
c. $Corr(X + Y, X - Y)$

Respostas

Item A

(I) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X + Y)$

Para encontrar $Cov(X + Y)$, tem-se:

$$Cov(X + Y) = Corr(X, Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

$$Cov(X + Y) = 0.25 \cdot \sqrt{9 \cdot 4}$$

$$Cov(X + Y) = 1.5$$

Substituindo em (I), tem-se:

$$Var(X + Y) = 9 + 4 + 1.5$$

$Var(X+Y) = 14.5$

Item B

$Cov(X, X+Y) = Cov(X, X) + Cov(X, Y)$

$Cov(X, X+Y) = Var(X) + Cov(X, Y)$

$Cov(X, X+Y) = 9 + 1.5$

$Cov(X, X+Y) = 10.5$

Item C

Tem-se que:

(I) $Corr(X+Y, X-Y) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y) \cdot Var(X-Y)}}$

Assim:

i. Pelo *Item A*,

$Var(X+Y) = 14.5$

ii. Calcula-se a variância de $X - Y$

$Var(X-Y) = Var(x) + Var(Y) - Cov(X, Y)$

$Var(X-Y) = 9 + 4 - 1.5$

$Var(X-Y) = 11.5$

iii. Calcula-se a covariância de $X+Y$ e $X-Y$:

$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(X, Y) - Cov(Y, Y)$

$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X, X) - Cov(Y, Y)$

$Cov(X+Y, X-Y) = Var(X) - Var(Y)$

$Cov(X+Y, X-Y) = 9 - 4$

$Cov(X+Y, X-Y) = 5$

Por fim, é possível substituir em (I) de tal forma que:

$Corr(X+Y, X-Y) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y) \cdot Var(X-Y)}}$

$$Corr(X+Y, X-Y) = \frac{5}{\sqrt{14.5 \cdot 11.5}}$$

$$Corr(X+Y, X-Y) \approx 0.3872$$

Exercício 2.2

If X and Y are dependent but $Var(X) = Var(Y)$, find $Cov(X+Y, X-Y)$.

Respostas

Em passos similares na resolução do *Item C, (iii) no Exercício 2.1*, tem-se que:

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(X, Y) - Cov(Y, Y)$$

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X, X) - Cov(Y, Y)$$

$$Cov(X+Y, X-Y) = Var(X) - Var(Y)$$

Agora, como $Var(X) = Var(Y)$, então:

$$Cov(X+Y, X-Y) = 0$$

Exercício 2.4

Let e_t be a zero mean white noise process. Suppose that the observed process is $Y_t = e_t + \theta e_{t-1}$, where θ is either 3 or 1/3.

a. Find the autocorrelation function for Y_t both when $\theta = 3$ and when $\theta = 1/3$.

b. You should have discovered that the time series is stationary regardless of the value of θ and that the autocorrelation functions are the same for $\theta = 3$ and $\theta = 1/3$. For simplicity, suppose that the process mean is known to be zero and the variance of Y_t is known to be 1. You observe the series Y_t for $t = 1, 2, ..., n$ and suppose that you can produce good estimates of the autocorrelations ρ_k. Do you think that you could determine which value of θ is correct (3 or 1/3) based on the estimate of ρ_k? Why or why not?

Respostas

Item A

Sendo $t, s = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ e $k = \pm 1, \pm 2, ...$, a autocovariância será dada pelo sistema:

(I)

$$\gamma_{\text{t,s}} = \begin{cases} Var(Y_t) & \text{for} \quad |t-s| = 0 \\ Cov(Y_t, Y_{t-1}) & \text{for} \quad |t-s| = 1 \\ Cov(Y_t, Y_{t-k}) & \text{for} \quad |t-s| > 1 \end{cases}$$

i. Calculando $Var(Y_t)$, tem-se que:

$Var(Y_t) = Var(e_t + \theta e_{t-1})$

$Var(Y_t) = Var(e_t) + \theta^2 Var(e_{t-1})$

$Var(Y_t) = (1 + \theta^2)\sigma_e^2$

ii. Calculando $Cov(Y_t, Y_{t-1})$, tem-se que:

$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(e_t + \theta e_{t-1}, e_{t-1} + \theta e_{t-2})$

$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \theta Var(e_{t-1})$

$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \theta \sigma_e^2$

iii. Por fim, calculando $Cov(Y_t, Y_{t-k})$, tem-se que para $k > 1$:

$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(e_t + \theta e_{t-1}, e_{t-k} + \theta e_{t-k-1})$

$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$

Logo, substituindo no sistema (I), tem-se que:

$$\gamma_{\text{t,s}} = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma_e^2 & \text{for} \quad |t-s| = 0 \\ \theta \sigma_e^2 & \text{for} \quad |t-s| = 1 \\ 0 & \text{for} \quad |t-s| > 1 \end{cases}$$

Assim, como a função de autocorrelação é dada por:

(II)

$Corr(Y_t, Y_s) = \frac{Cov(Y_t, Y_s)}{\sqrt{Var(Y_t + Y_s) \cdot Var(Y_t - Y_s)}}$

Tem-se que:

$$\rho_{\text{t,s}} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |t-s| = 0 \\ \theta/(1+\theta^2) & \text{for} \quad |t-s| = 1 \\ 0 & \text{for} \quad |t-s| > 1 \end{cases}$$

Substituindo as informações em (II), para ambos $\theta = 3$ e $\theta = 1/3$, a equação $\theta/(1+\theta^2) = 0.3$, assim, sem diferenciação de casos:

$$\rho_{\text{t,s}} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |t-s| = 0 \\ 0.3 & \text{for} \quad |t-s| = 1 \\ 0 & \text{for} \quad |t-s| > 1 \end{cases}$$

Item B

Como a autocorrelação é a mesma para $\theta = 3$ e $\theta = 1/3$, usar a estimação de ρ_k não traz informação suficiente para determinar qual dos valores de θ seria o correto.

Exercício 2.5

Suppose $Y_t = 5 + 2t + X_t$, where X_t is a zero-mean stationary series with autocovariance function γ_k.

a. Find the mean function for Y_t.

b. Find the autocovariance function for Y_t.

c. Is Y_t stationary? Why or why not?

Respostas

Item A

$\mu_t = E(Y_t)$

$\mu_t = E(5 + 2t + X_t)$

$\mu_t = 5 + 2t + E(X_t)$

Como dito no enunciado, X_t tem média zero, então:

$\mu_t = 5 + 2t$

Item B

Sendo $t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ e $k = \pm 1, \pm 2, ...$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(5 + 2t + X_T, 5 + 2(t-k) + X_{t-k})$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k})$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_k$$

Conclui-se assim que a autovariância de Y_t é a mesma que a de X_t.

Item C

Por ter um termo que depende do tempo, "$2t$", Y_t não é estacionária, já que esse termo faz com que a média não seja constante. E como visto em sala, a série é estacionária se $E(Y_t) = \mu$ para todo t.

Exercício 2.6

Let X_t be a stationary time series, and define

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{for } t \text{ odd} \\ X_t + 3 & \text{for } t \text{ even} \end{cases}$$

a. Show that $Cov(Y_t, Y_t{-}k)$ is free of t for all lags k.
b. Is Y_t stationary?

Respostas

Item A

i. Se t par e k par:

$$Cov(Y_t, Y_{t_k}) = Cov(X_t + 3, X_{t_k} + 3)$$

$$Cov(Y_t, Y_{t_k}) = Cov(X_t, X_{t_k})$$

ii. Se t par e k ímpar:

$$Cov(Y_t, Y_{t_k}) = Cov(X_t + 3, X_{t_k})$$

$$Cov(Y_t, Y_{t_k}) = Cov(X_t, X_{t_k})$$

iii. Se t ímpar e k par:

$$Cov(Y_t, Y_{t_k}) = Cov(X_t, X_{t_k})$$

iv. Se t ímpar e k ímpar:

$$Cov(Y_t, Y_{t_k}) = Cov(X_t, X_{t_k} + 3)$$

$$Cov(Y_t, Y_{t_k}) = Cov(X_t, X_{t_k})$$

X_t é estacionária, logo $Cov(X_t, X_{t_k})$ não depende de t. Assim, como disposto acima $Cov(Y_t, Y_{t_k})$ também não depende de t.

Item B

Apesar de no item anterior ser possível mostrar que $Cov(Y_t, Y_{t_k})$ não depende de t, o mesmo não ocorre com a média de Y_t.

Dado que X_t é estacionária, a média $\overline{X}$ é constante de tal forma que:

$$E(Y_t) = \begin{cases} \overline{X} & \text{se } t \text{ par} \\ \overline{X} + 3 & \text{se } t \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim, $E(Y_t)$ não é constante para todo t, logo Y_t não é estacionária.