CÁLCULO DE PROBABILIDADE 2 - LISTA 1

Profa. Cátia Gonçalves

(1) Seja X uma v.a. com distribuição geométrica de parâmetro $0 < p < 1$. Encontre a função de probabilidade condicional de X dado o evento $B = (0 < X \leq n)$, onde $n \geq 1$ é um número natural.

(2) Seja X uma v.a. com distribuição Normal padrão, i.é. $N(0,1)$, e considere o evento $A = (X > 0)$. Obtenha a função de distribuição e a função de densidade condicionais de X dado o evento $A = (X > 0)$.

(3) Seja X uma variável aleatória contínua com densidade $f_X(x)$ e função de distribuição $F_X(x)$. Obtenha a função de distribuição e a densidade condicionais de X dado o evento $B = (a < X \leq b)$.

(4) Seja X a distância radial (em metros) do ponto de pouso de um paraquedista até o centro da área de pouso. Assuma que X tem a distribuição de Rayleigh, com parâmetro $\sigma^2 = 100$, ou seja, X tem densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/\left(2\sigma^2\right)} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre a probabilidade do paraquedista pousar dentro de um raio de 10 metros do centro da área de pouso, dado que se sabe que o pouso ocorreu à uma distância máxima de 50 metros do centro da área de pouso.

(5) Considere dois jogadores tais que o primeiro jogador lança uma moeda (honesta) n vezes (independentemente) obtendo k caras $(0 \leq k \leq n)$. Logo após, o segundo jogador lança a mesma moeda k vezes. Sejam X o número de caras obtidas pelo primeiro jogador e Y o número de caras obtidas pelo segundo jogador. Determine a distribuição condicional de Y dado $X = k$.

(6) Considere o lançamento de dois dados honestos. Sejam X o maior dos valores obtidos e Y o menor dos valores obtidos. Determine a distribuição condicional de Y dado $X = i$.

(7) Sejam X e Y v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição geométrica de parâmetro p. Determinar a distribuição condicional de Y dado $X + Y = n$.

(8) Determine as densidades condicionais $f_{X|Y}$ e $f_{Y|X}$ para as v.a.'s X e Y com densidades conjuntas dadas por

(a) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy & , \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \textit{caso contrário.} \end{cases}$

(b) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & , \quad \textit{caso contrário.} \end{cases}$

(9) Sejam X e Y v.a.'s com densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{8} & , \quad 0<x<2,\ 0<y<2\\ 0 & , \quad \textit{caso contrário.}\end{cases}$$

Determine $P\left(0<Y<1/2 \mid X=1\right)$.

(10) Sejam X e Y v.a.'s com densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}e^{-x/y}e^{-y} & , \quad x>0 \text{ e } y>0\\ 0 & , \quad \textit{caso contrário.}\end{cases}$$

Obtenha $P\left(X>1 \mid Y=y\right)$.

(11) Suponha que X e Y têm densidade conjunta $f_{X,Y}$ indicada abaixo. Obtenha a densidade condicional $f_{Y|X}$ em cada caso.

(a) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y} & , \quad 0\le x<y\\ 0 & , \quad \textit{caso contrário}\end{cases}$, onde $\lambda>0$ é uma constante.

(b) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}(y-x)^{\alpha} & , \quad 0\le x<y\le 1\\ 0 & , \quad \textit{caso contrário.}\end{cases}$, onde $\alpha>-1$.

(c) $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\sqrt{15}}{4\pi}e^{-\left(x^2-xy+4y^2\right)/2}$, $x,y\in R$.

(12) Seja X uma variável aleatória com distribuição dada por

$$X=\begin{cases}1, & \text{com probabilidade } 3/5\\ 2, & \text{com probabilidade } 2/5\end{cases}.$$

Seja Y uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[X-1,X+1]$.

(a) Mostre que os eventos $(X=1)$ e $(1<Y<2)$ são independentes.

(b) Determine a densidade de Y.

(c) São X e Y independentes?

(13) Seja Y uma variável aleatória discreta tendo distribuição binomial de parâmetros n e p. Suponha que p se comporta como uma variável aleatória π tendo densidade Beta de parâmetros α_1 e α_2. Obtenha a densidade condicional de π dado $Y=y$.

(14) Suponha que Y se distribui exponencialmente com parâmetro λ. Suponha que λ se comporta como uma v.a. Λ tendo densidade Gama $\Gamma(\alpha,\beta)$. Obtenha a densidade marginal de Y e a densidade condicional de Λ dado $Y=y$.