

# LISTA 2

## ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Tailine J. S. Nonato

2023-03-30

### Descrição da atividade

Exercícios 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 e 2.6 do Cap.2 (pag.20) de Cryer & Chan (2008)

### Exercício 2.1

Suppose  $E(X) = 2$ ,  $Var(X) = 9$ ,  $E(Y) = 0$ ,  $Var(Y) = 4$ , and  $Corr(X, Y) = 0.25$ . Find:

- a.  $Var(X + Y)$
- b.  $Cov(X, X + Y)$
- c.  $Corr(X + Y, X - Y)$

### Respostas

#### Item A

$$(I) \quad Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$$

Para encontrar  $Cov(X, Y)$ , tem-se:

$$Cov(X, Y) = Corr(X, Y) \cdot \sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}$$

$$Cov(X, Y) = 0.25 \cdot \sqrt{9 \cdot 4}$$

$$Cov(X, Y) = 0.25 \cdot 6$$

$$Cov(X, Y) = 1.5$$

Substituindo em (I), tem-se:

$$Var(X + Y) = 9 + 4 + 2(1.5)$$

$$Var(X + Y) = 9 + 4 + 3$$

$$Var(X + Y) = 16$$

**Item B**

$$Cov(X, X + Y) = Cov(X, X) + Cov(X, Y)$$

$$Cov(X, X + Y) = Var(X) + Cov(X, Y)$$

$$Cov(X, X + Y) = 9 + 1.5$$

$$Cov(X, X + Y) = 10.5$$

**Item C**

Tem-se que:

$$(I) \text{ } Corr(X + Y, X - Y) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y) \cdot Var(X-Y)}}$$

Assim:

i. Pelo *Item A*,

$$Var(X + Y) = 16$$

ii. Calcula-se a variância de  $X - Y$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2 \cdot Cov(X, Y)$$

$$Var(X - Y) = 9 + 4 - 3$$

$$Var(X - Y) = 10$$

iii. Calcula-se a covariância de  $X + Y$  e  $X - Y$ :

$$Cov(X + Y, X - Y) = Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(X, Y) - Cov(Y, Y)$$

$$Cov(X + Y, X - Y) = Cov(X, X) - Cov(Y, Y)$$

$$Cov(X + Y, X - Y) = Var(X) - Var(Y)$$

$$Cov(X + Y, X - Y) = 9 - 4$$

$$Cov(X + Y, X - Y) = 5$$

Por fim, é possível substituir em (I) de tal forma que:

$$Corr(X + Y, X - Y) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y) \cdot Var(X-Y)}}$$

$$Corr(X + Y, X - Y) = \frac{5}{\sqrt{16 \cdot 10}}$$

$$Corr(X + Y, X - Y) = \frac{5}{\sqrt{160}}$$

$$Corr(X + Y, X - Y) \approx 0.396$$

## Exercício 2.2

If  $X$  and  $Y$  are dependent but  $Var(X) = Var(Y)$ , find  $Cov(X + Y, X - Y)$ .

## Respostas

Em passos similares na resolução do *Item C, (iii) no Exercício 2.1*, tem-se que:

$$Cov(X + Y, X - Y) = Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(X, Y) - Cov(Y, Y)$$

$$Cov(X + Y, X - Y) = Cov(X, X) - Cov(Y, Y)$$

$$Cov(X + Y, X - Y) = Var(X) - Var(Y)$$

Agora, como  $Var(X) = Var(Y)$ , então:

$$Cov(X + Y, X - Y) = 0$$

## Exercício 2.4

Let  $e_t$  be a zero mean white noise process. Suppose that the observed process is  $Y_t = e_t + \theta e_{t-1}$ , where  $\theta$  is either 3 or  $1/3$ .

- Find the autocorrelation function for  $Y_t$  both when  $\theta = 3$  and when  $\theta = 1/3$ .
- You should have discovered that the time series is stationary regardless of the value of  $\theta$  and that the autocorrelation functions are the same for  $\theta = 3$  and  $\theta = 1/3$ . For simplicity, suppose that the process mean is known to be zero and the variance of  $Y_t$  is known to be 1. You observe the series  $Y_t$  for  $t = 1, 2, \dots, n$  and suppose that you can produce good estimates of the autocorrelations  $\rho_k$ . Do you think that you could determine which value of  $\theta$  is correct (3 or  $1/3$ ) based on the estimate of  $\rho_k$ ? Why or why not?

## Respostas

### Item A

Sendo  $t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , a autocovariância será dada pelo sistema:

(I)

$$\gamma_{t,s} = \begin{cases} \text{Var}(Y_t) & \text{for } |t - s| = 0 \\ \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) & \text{for } |t - s| = 1 \\ \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) & \text{for } |t - s| > 1 \end{cases}$$

i. Calculando  $\text{Var}(Y_t)$ , tem-se que:

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(e_t + \theta e_{t-1})$$

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(e_t) + \theta^2 \text{Var}(e_{t-1})$$

$$\text{Var}(Y_t) = (1 + \theta^2) \sigma_e^2$$

ii. Calculando  $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1})$ , tem-se que:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \text{Cov}(e_t + \theta e_{t-1}, e_{t-1} + \theta e_{t-2})$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \theta \text{Var}(e_{t-1})$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \theta \sigma_e^2$$

iii. Por fim, calculando  $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k})$ , tem-se que para  $k > 1$ :

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \text{Cov}(e_t + \theta e_{t-1}, e_{t-k} + \theta e_{t-k-1})$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = 0$$

Logo, substituindo no sistema (I), tem-se que:

$$\gamma_{t,s} = \begin{cases} (1 + \theta^2) \sigma_e^2 & \text{for } |t - s| = 0 \\ \theta \sigma_e^2 & \text{for } |t - s| = 1 \\ 0 & \text{for } |t - s| > 1 \end{cases}$$

Assim, como a função de autocorrelação é dada por:

(II)

$$\text{Corr}(Y_t, Y_s) = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_s)}{\sqrt{\text{Var}(Y_t + Y_s) \cdot \text{Var}(Y_t - Y_s)}}$$

Tem-se que:

$$\rho_{t,s} = \begin{cases} 1 & \text{for } |t-s| = 0 \\ \theta/(1+\theta^2) & \text{for } |t-s| = 1 \\ 0 & \text{for } |t-s| > 1 \end{cases}$$

Substituindo as informações em (II), para ambos  $\theta = 3$  e  $\theta = 1/3$ , a equação  $\theta/(1+\theta^2) = 0.3$ , assim, sem diferenciação de casos:

$$\rho_{t,s} = \begin{cases} 1 & \text{for } |t-s| = 0 \\ 0.3 & \text{for } |t-s| = 1 \\ 0 & \text{for } |t-s| > 1 \end{cases}$$

### Item B

Como a autocorrelação é a mesma para  $\theta = 3$  e  $\theta = 1/3$ , usar a estimação de  $\rho_k$  não traz informação suficiente para determinar qual dos valores de  $\theta$  seria o correto.

### Exercício 2.5

Suppose  $Y_t = 5 + 2t + X_t$ , where  $X_t$  is a zero-mean stationary series with autocovariance function  $\gamma_k$ .

- Find the mean function for  $Y_t$ .
- Find the autocovariance function for  $Y_t$ .
- Is  $Y_t$  stationary? Why or why not?

### Respostas

#### Item A

$$\mu_t = E(Y_t)$$

$$\mu_t = E(5 + 2t + X_t)$$

$$\mu_t = 5 + 2t + E(X_t)$$

Como dito no enunciado,  $X_t$  tem média zero, então:

$$\mu_t = 5 + 2t$$

**Item B**

Seja  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(5 + 2t + X_t, 5 + 2(t-k) + X_{t-k})$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k})$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_k$$

Conclui-se assim que a autocovariância de  $Y_t$  é a mesma que a de  $X_t$ .

**Item C**

Por ter um termo que depende do tempo, “ $2t$ ”,  $Y_t$  não é estacionária, já que esse termo faz com que a média não seja constante. E como visto em sala, a série é estacionária se  $E(Y_t) = \mu$  para todo  $t$ .

**Exercício 2.6**

Let  $X_t$  be a stationary time series, and define

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{for } t \text{ odd} \\ X_t + 3 & \text{for } t \text{ even} \end{cases}$$

- Show that  $Cov(Y_t, Y_{t-k})$  is free of  $t$  for all lags  $k$ .
- Is  $Y_t$  stationary?

**Respostas****Item A**

- Se  $t$  par e  $k$  par:

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t + 3, X_{t-k} + 3)$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k})$$

- Se  $t$  par e  $k$  ímpar:

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t + 3, X_{t-k})$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k})$$

iii. Se  $t$  ímpar e  $k$  par:

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k})$$

iv. Se  $t$  ímpar e  $k$  ímpar:

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k} + 3)$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(X_t, X_{t-k})$$

$X_t$  é estacionária, logo  $Cov(X_t, X_{t-k})$  não depende de  $t$ . Assim, como disposto acima  $Cov(Y_t, Y_{t-k})$  também não depende de  $t$ .

### Item B

Apesar de no item anterior ser possível mostrar que  $Cov(Y_t, Y_{t-k})$  não depende de  $t$ , o mesmo não ocorre com a média de  $Y_t$ .

Dado que  $X_t$  é estacionária, a média  $\bar{X}$  é constante de tal forma que:

$$E(Y_t) = \begin{cases} \bar{X} & \text{se } t \text{ par} \\ \bar{X} + 3 & \text{se } t \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim,  $E(Y_t)$  não é constante para todo  $t$ , logo  $Y_t$  não é estacionária.