

Delineamento e Análise de Experimentos

Professora Juliana Betini Fachini Gomes
e-mail: jfachini@unb.br

Brasília - 2023

ANOVA

- Para o modelo de efeitos (ANOVA):

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

em que μ é a média geral, τ_i é a média ou efeito dos tratamentos e ε_{ij} componente de erro aleatório.

- As hipótese de interesse são definidas por:

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0, & (\text{O efeito de tratamento é nulo}) \\ H_1 : \exists \tau_i \neq 0 \end{cases}$$

- Ou de forma equivalente:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a \\ H_1 : \exists \mu_i \neq \mu_j, \quad i \neq j, \end{cases}$$

em que $\mu_i = \mu + \tau_i$.

ANOVA

- Só é possível realizar a análise de variância se certas condições, ou seja, certas exigências do modelo matemático forem satisfeitas:
 - Os erros devem ter distribuição normal;
 - Os erros devem ser independentes;
 - Os erros deve ter a mesma variância, ou seja, deve existir homocedasticidade.
- Pode-se representar essas condições por:

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2). \quad (2)$$

ANOVA

TABLE: Tabela de Análise de Variância

Fonte de Variação	SQ	g.l.	QM	F
Tratamentos	SQ_{Trat}	$a - 1$	QM_{Trat}	QM_{Trat} / QM_{Res}
Resíduo	SQ_{Res}	$N - a$	QM_{Res}	
Total	SQ_T	$N - 1$		

em que $N = an$.

ANOVA

$$E(QM_{Res}) = E\left(\frac{SQ_{Res}}{N - a}\right) = \frac{1}{N - a} E\left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2\right] = \sigma^2$$

e

$$E(QM_{Trat}) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a - 1}$$

- Ou seja, $QM_{Res} = SQ_{Res}/(N - a)$ estima σ^2 ;
- E $QM_{Trat} = SQ_{Trat}/(a - 1)$ também estima σ^2 , caso não há diferença entre as médias dos tratamentos (o que implica em $\tau_i = 0$).

DIAGNÓSTICO

- É fundamental verificar a adequabilidade do modelo antes de tirar conclusões sobre o processo inferencial.
- Verificar as características do modelo.
- Para avaliar a adequabilidade do modelo serão usados:
 - Métodos gráficos
 - Testes estatísticos

COMPARAÇÕES DE MÉDIAS

- Ao rejeitar a hipótese nula: $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$ ou $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$
- A pergunta a ser feita é: Qual(is) efeito(s) de tratamento é(são) diferente(s) de zero?

COMPARAÇÕES DE MÉDIAS

Alguns teste podem ser utilizados para tal objetivo. São eles:

- Teste de Fisher;
- Teste de Tukey;
- Teste de Duncan;
- Teste de Scheffé.

TESTE DE FISHER

- Considere a hipótese $H_0 : \mu_i = \mu_j$, para $i \neq j$;
- A estatística do teste é definida por:

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}}{\sqrt{QM_{Res}(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}} \quad (3)$$

- Supondo uma hipótese alternativa bilateral ($H_1 : \mu_i \neq \mu_j$), o par de médias μ_i e μ_j terá diferença significativa se $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}| > t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{QM_{Res}(1/n_i + 1/n_j)}$.
- A quantidade

$$LSD = t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{QM_{Res}(1/n_i + 1/n_j)}, \quad (4)$$

é conhecida como diferença mínima significativa.

TESTE DE FISHER

- Ao usar o procedimento LSD de Fisher, simplesmente comparamos a diferença observada entre cada par de médias com o LSD correspondente;
- É possível observar que o procedimento LSD de Fisher controla a taxa de erro para cada comparação par a par individual, mas não controla a taxa de erro experimental.

TESTE DE TUKEY

- Suponha que, após rejeitar a hipótese nula de igualdade de tratamento na ANOVA, deseja-se testar todas as comparações de médias:

$$H_0 : \mu_i = \mu_j$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

para todo $i \neq j$.

- O procedimento de Tukey controla o erro experimental no nível selecionado. Este é um excelente procedimento de espionagem de dados quando o interesse está em pares de médias;

TESTE DE TUKEY

- O teste de Tukey considerar a seguinte estatística de intervalo estudentizado:

$$q = \frac{\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min}}{\sqrt{QM_{Res}/n}},$$

em que \bar{y}_{max} e \bar{y}_{min} são a maior e menor média, respectivamente, para o grupo de p amostras de médias.

- O valor de q deve ser comparado com valores de $q(p, f)$, em que $q()$ é o percentil da estatística de intervalo estudentizado;
- Em que f é o número de graus de liberdade associados ao QM_{Res} ;
- Para amostras de mesmo tamanho, o teste de Tukey declara duas médias significativamente diferentes se o valor absoluto de suas diferenças amostrais excedem:

$$T_{\alpha} = q_{\alpha}(a, f) \sqrt{\frac{QM_{Res}}{n}}. \quad (5)$$

TESTE DE TUKEY

- De forma equivalente, pode-se construir um conjunto de $100(1 - \alpha)\%$ intervalos de confiança para todos os pares de médias, ou seja:

$$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.} - q_{\alpha}(a, f) \sqrt{\frac{QM_{Res}}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.} + q_{\alpha}(a, f) \sqrt{\frac{QM_{Res}}{n}}$$

EXEMPLO

Uma engenheira está interessada em investigar a relação entre a configuração de potência de rádio frequência (RF) e a taxa de gravação para esta ferramenta. O objetivo de um experimento como este é modelar a relação entre a taxa de gravação e a potência de RF e especificar a configuração de potência que dará uma taxa de gravação desejada.

EXEMPLO

Ela está interessada em um determinado gás (C_2F_6) e uma abertura de 0,80cm para testar quatro níveis de potência de RF: 160, 180, 200 e 220 W. Ela decidiu testar cinco placas em cada nível de potência de RF.

Suponha que a engenheira execute o experimento de forma aleatória.

EXEMPLO

As observações que ela obteve sobre a taxa de gravação são mostradas na Tabela 1.

TABELA 1 : Dados de taxa de gravação (em A/min) do experimento de gravação com plasma

Potência	Observações					Total
	1	2	3	4	5	
160	575	542	530	539	570	2756
180	565	593	590	579	610	2937
200	600	651	610	637	629	3127
220	725	700	715	685	710	3535

CONTRASTES

- Considere o experimento da gravação de plasma. Como a hipótese nula foi rejeitada, sabemos que algumas configurações de energia produzem taxas de gravação diferentes das outras, mas quais realmente causam essa diferença?
- Podemos suspeitar no início do experimento que 200W e 220W produzem a mesma taxa de gravação, o que implica que gostaríamos de testar a hipótese:

$$H_0 : \mu_3 = \mu_4$$

$$H_1 : \mu_3 \neq \mu_4$$

ou equivalentemente:

$$H_0 : \mu_3 - \mu_4 = 0$$

$$H_1 : \mu_3 - \mu_4 \neq 0$$

CONTRASTES

- Ou, se tivéssemos suspeitado no início do experimento que a média dos níveis mais baixos de potência não diferia da média dos níveis mais altos de potência, então a hipótese teria sido:

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

$$H_1 : \mu_1 + \mu_2 \neq \mu_3 + \mu_4$$

ou

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \neq 0$$

CONTRASTES

- Muitos métodos de comparações múltiplas usam a ideia de um contraste.
- Em geral, um contraste é uma combinação linear dos parâmetros na forma:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^a c_i \mu_i,$$

em que a soma das constantes do contraste é igual a zero, isto é, $\sum_{i=1}^a c_i = 0$.

- Ambas as hipóteses acima podem ser expressas em termos dos contrastes:

$$H_0 : \sum_{i=1}^a c_i \mu_i = 0$$

$$H_1 : \sum_{i=1}^a c_i \mu_i \neq 0$$

Qual a estatística do Teste nesse caso?

CONTRASTES

- Qual a estatística do Teste nesse caso?
- Há dois caminhos: teste t e teste F

CONTRASTES

- Primeiro vamos usar o teste t ;
- Então, é preciso escrever o contraste de interesse em termos das médias de tratamento. Logo, tem-se que:

$$C = \sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i.$$

- A variância de C é:

$$V(C) = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2, \quad (6)$$

quando todos os tratamentos têm o mesmo tamanho.

CONTRASTES

- Sob a hipótese nula ser verdadeira, a estatística do teste é definida por:

$$\frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i. - 0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2}},$$

ou

$$\frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i.}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2}},$$

com distribuição $N(0, 1)$.

CONTRASTES

- Agora vamos substituir a variância desconhecida, σ^2 , por sua estimativa, o erro quadrático médio e a estatística é definida por:

$$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i}{\sqrt{\frac{QM_{Res}}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2}}, \quad (7)$$

- A hipótese nula será rejeitada se $|t_0| > t_{\alpha/2, N-a}$.

CONTRASTES

- A segunda abordagem usa o teste F ;
- Então, ao elevar ao quadrado uma variável aleatória t com ν graus de liberdade, tem-se uma variável aleatória F com 1 grau de liberdade do numerador e ν graus de liberdade do denominador. Portanto, tem-se que:

$$F_0 = t_0^2 = \frac{(\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i.)^2}{\frac{QM_{Res}}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2}. \quad (8)$$

- A hipótese nula será rejeitada se $F_0 > F_{\alpha,1,N-a}$.

CONTRASTES

- A estatística do teste (8) pode ser escrita como:

$$F_0 = \frac{QM_C}{QM_{Res}} = \frac{SQ_C/1}{QM_{Res}},$$

em que a soma de quadrados do contraste é:

$$SQ_C = \frac{(\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.})^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2}, \quad (9)$$

e possui 1 grau de liberdade.

CONTRASTES

- Em vez de realizar teste de hipótese para o contraste, também é possível construir um Intervalo de Confiança;
- Considere o contraste de interesse:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^a c_i \mu_i$$

- Ao substituir as médias dos tratamentos por seu respectivo estimador, tem-se que

$$C = \sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_i.$$

CONTRASTES

- Como

$$E\left(\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.}\right) = \sum_{i=1}^a c_i \mu_i \quad e \quad V(C) = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2$$

- O intervalo de confiança para o contraste $\sum_{i=1}^a c_i \mu_i$ é:

$$IC = \left(\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.} \pm t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{\frac{QM_{Res}}{n} \sum_{i=1}^a c_i^2} \right). \quad (10)$$

CONTRASTES

- Um caso especial de contraste é o contraste ortogonal;
- Dois contraste com coeficientes c_i e d_i são ortogonais se:

$$\sum_{i=1}^a c_i d_i = 0.$$

- Para a tratamentos, o conjunto de $a - 1$ contrastes ortogonais particiona a soma de quadrados de tratamentos em $a - 1$ componentes independentes com um único grau de liberdade para cada componente.
- Assim, os testes realizados com contrastes ortogonais são independentes.

COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO

- A medida R^2 é chamada de **Coeficiente de Determinação** e representa a proporção da variação total explicada pelo modelo ANOVA e é definida por:.

$$R^2 = \frac{SQ_{Modelo}}{SQ_T}$$

- Desde de que $0 \leq SQ_{Modelo} \leq SQ_T$, segue que

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

- Valores grandes de R^2 indicam que a variação total é mais reduzida/explicada pelo efeito de tratamento.

Qual o tamanho da amostra?

- Em qualquer problema de planejamento experimental, uma decisão crítica é a escolha do tamanho da amostra, isto é, determinar o número de réplicas a serem executadas;
- Geralmente, se o pesquisador está interessado na detecção de pequenos efeitos, são necessárias mais réplicas do que se o pesquisador estiver interessado em detecção de grandes efeitos.

TAMANHO DA AMOSTRA

- A probabilidade do erro tipo II do modelo de efeitos fixos para o caso de amostras de tamanhos iguais para cada tratamento, é definida por:

$$\begin{aligned}\beta &= P\{\text{n\~ao rejeitar } H_0 | H_0 \text{ \~e falsa}\} \\ &= P\{F_0 < F_{\text{cr\~itico}} | H_0 \text{ \~e falsa}\}\end{aligned}\tag{11}$$

TAMANHO DA AMOSTRA

- Para avaliar a probabilidade do erro tipo II, definida na equação (11), é preciso conhecer a distribuição da estatística do teste F_0 se a hipótese nula for falsa;
- Pode-se mostrar que, se H_0 for falsa, a estatística $F_0 = QM_{Trat}/QM_{Res}$ tem distribuição F não central com $a - 1$ e $N - a$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ ;
- Se $\delta = 0$, a distribuição F não central torna-se a distribuição F usual (central).

TAMANHO DA AMOSTRA

- O parâmetro de não centralidade da distribuição F pode ser obtido ao calcular:

$$E \left[\frac{SQ_{Trat}}{\sigma^2} \right],$$

- E esse parâmetro será igual a:

$$\delta = \frac{n \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{\sigma^2}, \quad (12)$$

- É possível observar que sob H_0 , a equação (12) é igual a 0.

TAMANHO DA AMOSTRA

- O pesquisador deve especificar os valores de τ e σ^2 ;
- A estimativa de σ^2 pode estar disponível a partir de uma experiência anterior, um experimento anterior ou uma estimativa de julgamento.
- Ao calcular δ , β e o poder do teste $(1 - \beta)$ para diferentes valores de n , é possível encontrar o tamanho da amostra.