Lista 1 - Eduardo

Cálculo de Probabilidade 2

Tailine J. S. Nonato

Exercício 1

Um programa de TV dura 1 hora, e um telespectador impaciente vai mudar de canal a qualquer momento durante o programa (Isso significa que o instante em que ele mudará de canal é uma variável aleatória $X \sim U[0,1]$). Então considere as seguintes questões:

a. Qual a probabilidade dele assistir a maior parte do programa?

b. Se ele assistiu a maior parte do programa, qual a probabilidade dele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos?

Solução

a. A probabilidade dele assistir a maior parte do programa é dada por $P[X \leq 0.5] = 0.5$. Porque a variável aleatória X é uniforme, então a probabilidade de ele assistir a maior parte do programa pode ser calculada como a área do retângulo formado pelo intervalo $[0,1]$ e a reta $y = 0.5$, logo $P[X \leq 0.5]$. Utilizando a função de distribuição acumulada da variável aleatória X, temos que $F_X(x) = x$, para $x \in [0,1]$. Portanto, $P[X \leq 0.5] = F_X(0.5) = 0.5$.

b. Dado que ele assistiu 50% ou mais do programa, a probabilidade dele ter assistido 50min ou mais do programa é $P[X \geq 0.9 | X \geq 0.5] = \frac{P[X \geq 0.9 \cap X \geq 0.5]}{P[X \geq 0.5]} = \frac{P[X \geq 0.9]}{P[X \geq 0.5]} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$. Portanto, a probabilidade dele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos é 0.2.

Exercício 2

Considere as variáveis aleatórias X e Y onde X é discreta e Y é contínua com distribuição conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^{x-1}}{3}, & \text{se } x = 1,2,3 \text{ e } y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $F_Y(y|X=2)$ e $FX(x|Y=1/2)$.

Solução

Para calcular $F_Y(y|X=2)$, vamos utilizar a definição de densidade condicional:

$f_Y(y|X=2) = \frac{f(2,y)}{f_X(2)}$

Calculando $f_X(2)$

$f_X(2) = \int_0^1 f(2,y)dy$

$f_X(2) = \int_0^1 \frac{2y}{3}dy$

$f_X(2) = \frac{1}{3}$

Calculando $f(2,y)$

$f(2,y) = \frac{2y}{3}$

Portanto,

$F_Y(y|X=2) = \frac{2y}{3} \cdot 3$

$F_Y(y|X=2) = 2y$

Para calcular $FX(x|Y=1/2)$, vamos utilizar a definição de densidade condicional:

$f_X(x|Y=1/2) = \frac{f(x,1/2)}{f_Y(1/2)}$

Calculando $f_Y(1/2)$

$f_Y(1/2) = \sum_{x=1}^{3} f(x,1/2)$

$f_Y(1/2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

$f_Y(1/2) = \frac{11}{24}$

Calculando $f(x, 1/2)$, com $x = 1, 2, 3$

$f(1, 1/2) = \frac{1}{6}$

$f(2, 1/2) = \frac{1}{4}$

$f(3, 1/2) = \frac{3}{8}$

Portanto,

$f_X(x|Y = 1/2) = \frac{f(x,1/2)}{11/24}$

Solução alternativa (em sala)

$F_Y(y|X = 2) = \frac{P(Y \leq y, X=2)}{P(X=2)}$

Obtendo as distribuições marginais em X:

$P(X = 1)$

$P(X = 1) = \int_0^1 f(1, y)dy$

$P(X = 1) = \int_0^1 \frac{1*y^{1-1}}{3}dy$

$P(X = 1) = \int_0^1 \frac{1}{3}dy$

$P(X = 1) = \frac{1}{3}$

$P(X = 2)$

$P(X = 2) = \int_0^1 f(2, y)dy$

$P(X = 2) = \int_0^1 \frac{2*y^{2-1}}{3}dy$

$P(X = 2) = \int_0^1 \frac{2y}{3}dy$

$P(X = 2) = \frac{1}{3}$

$P(X = 3)$

$P(X = 3) = \int_0^1 f(3, y)dy$

$P(X = 3) = \int_0^1 \frac{3*y^{3-1}}{3}dy$

$P(X = 3) = \int_0^1 y^2 dy$

$P(X = 3) = \frac{1}{3}$

Agora, calculando $P(X = 2, Y \leq y)$

$P(X = 2, Y \leq y) = \int_0^y f(2, t)dt$

$P(X = 2, Y \leq y) = \int_0^y \frac{2t^{2-1}}{3} dt$

$P(X = 2, Y \leq y) = 2/3 \cdot \int_0^y t dt$

$P(X = 2, Y \leq y) = 2/3 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^y$

$P(X = 2, Y \leq y) = \frac{y^2}{3}$

Portanto,

$$F_Y(y|X = 2) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ y^2, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

Se fosse solicitado para calcular $E(Y|X = 2)$, teríamos que:

$E(Y|X = 2) = \int_0^1 y \cdot dF(y|X = 2)$

$E(Y|X = 2) = \int_0^1 y \cdot 2y dy$

$E(Y|X = 2) = 2 \int_0^1 y^2 dy$

$E(Y|X = 2) = 2 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^1$

$E(Y|X = 2) = \frac{2}{3}$

Agora calculando $F_X(x|Y = 1/2)$

$F_X(x|Y = 1/2) = \frac{P(X \leq x, Y = 1/2)}{P(Y = 1/2)}$

Calcular $P(Y = 1/2)$ é incorreto porque Y é contínua. Logo, a resposta correta é:

$F_X(x|Y = 1/2) = \sum_{k=1}^{min(x,3)} f(k|y = 1/2)$

$F_X(x|Y = 1/2) = \sum_{k=1}^{min(x,3)} \frac{f(x,1/2)}{f_Y(1/2)}$

Logo,

$$F_X(x|Y = 1/2) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 4/11, & 1 \leq x < 2 \\ 8/11, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Assim, pode-se verificar a função de densidade conjunta como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^{x-1}}{3}, & \text{se } x = 1, 2, 3 \text{ e } y \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E

$f(k, 1/2) = \frac{k(1/2)}{3}$ para k = 1,2,3

$f_Y(1/2) = \frac{(1/2)^0}{3} = \frac{1}{3}$

Exercício 3

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica dada por $P[X_1 = k] = P[X_2 = k] = p(1-p)$ onde $k = 1, 2, ...,$ e $\theta < p < 1$. Então, calcule:

- a. $P[X_1 = X_2]$ e $P[X_1 < X_2]$;
- b. Calcule a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2$;

Solução

a. Para calcular $P[X_1 = X_2]$, vamos utilizar a definição de independência:

$P[X_1 = X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X_1 = k] \cdot P[X_2 = k]$

$P[X_1 = X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p) \cdot p(1-p)$

$P[X_1 = X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} p^2(1-p)^2$

$P[X_1 = X_2] = p^2(1-p)^2 \sum_{k=1}^{\infty} 1$

$P[X_1 = X_2] = p^2(1-p)^2$

Para calcular $P[X_1 < X_2]$, vamos utilizar a definição de independência:

$P[X_1 < X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X_1 = k] \cdot P[X_2 > k]$

$P[X_1 < X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p) \cdot (1-p)^k$

$P[X_1 < X_2] = p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$

$P[X_1 < X_2] = p(1-p) \cdot \frac{1-p}{1-(1-p)}$

$P[X_1 < X_2] = p(1-p) \cdot \frac{1-p}{p}$

$P[X_1 < X_2] = (1-p)^2$

b. Para calcular a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2$, vamos utilizar a definição de distribuição condicional:

$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{P[X_1 = k, X_1 + X_2 = n]}{P[X_1 + X_2 = n]}$

$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{P[X_1 = k, X_2 = n-k]}{P[X_1 + X_2 = n]}$

$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{P[X_1 = k] \cdot P[X_2 = n-k]}{P[X_1 + X_2 = n]}$

$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{p(1-p) \cdot p(1-p)}{P[X_1 + X_2 = n]}$

$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{p^2(1-p)^2}{P[X_1 + X_2 = n]}$

Calculando $P[X_1 + X_2 = n]$

$P[X_1 + X_2 = n] = \sum_{k=1}^{n-1} P[X_1 = k] \cdot P[X_2 = n-k]$

$P[X_1 + X_2 = n] = \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p) \cdot p(1-p)$

$P[X_1 + X_2 = n] = p^2(1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1$

$P[X_1 + X_2 = n] = p^2(1-p)^2 \cdot (n-1)$

Portanto,

$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{p^2(1-p)^2}{p^2(1-p)^2 \cdot (n-1)}$

$P[X_1 = k | X_1 + X_2 = n] = \frac{1}{n-1}$

Exercício 4

Uma certa lâmpada tem uma vida em horas, tendo distribuição exponencial de parâmetro 1. Um jogador acende a lâmpada e, enquanto a lâmpada ainda estiver acesa, lança um dado equilibrado de 15 em 15 segundos. Qual o número esperado de 3's lançados pelo jogador até a lâmpada se apagar?

Solução

Dividindo a resolução em passos, tem-se que:

1. Estabelecendo os objetos:

   $X =$ tempo de vida da lâmpada

   $X \sim Exp(1)$

   $N =$ número de lançamentos até a lâmpada se apagar

   $Y =$ número de "3"s lançados nos N lançamentos

2. Conectando informações:

   $N \sim Geom(1 - e^{-X})$

   $Y|N \sim Bin(N, 1/6)$

3. Calculando a esperança:

   $E(Y) = E(E(Y|N))$

   $E(Y|N) = N * 1/6$

   $E(Y) = E(N) * 1/6$

4. Calculando a esperança de N:

Considerando $\alpha = 15$ segundos ou $\alpha = 1/240$ horas, tem-se uma progressão geométrica com razão $e^{-\alpha}$, logo $P(X > n\alpha) = e^{-n\alpha}$. Então:

   $E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$

Por ser uma progressão geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$ converge em $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$, logo:

   $E(N) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$

5. Substituindo os valores:

$E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} * 1/6$

$E(Y) = \frac{1}{1-e^{-1/240}} * 1/6$

```
ey = 1/(1 - exp(-1/240)) * 1/6
```

$E(Y) \approx 40.083$

Exercício 5

Seja X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim Binom(m, p)$ e $Y \sim Binom(n, p)$.

Obtenha a distribuição condicional de X dada $X + Y$. Como se chama essa distribuição?

Solução

Para calcular a distribuição condicional de X dado $X + Y$, vamos utilizar a definição de distribuição condicional:

$P[X = k|X + Y = n] = \frac{P[X=k, X+Y=n]}{P[X+Y=n]}$

$P[X = k|X + Y = n] = \frac{P[X=k, Y=n-k]}{P[X+Y=n]}$

$P[X = k|X + Y = n] = \frac{P[X=k] \cdot P[Y=n-k]}{P[X+Y=n]}$

$P[X = k|X + Y = n] = \frac{p(k) \cdot p(n-k)}{P[X+Y=n]}$

Calculando $P[X + Y = n]$

$P[X + Y = n] = \sum_{k=0}^{n} P[X = k] \cdot P[Y = n - k]$

$P[X + Y = n] = \sum_{k=0}^{n} p(k) \cdot p(n - k)$

$P[X + Y = n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} p^k (1 - p)^{m-k} \cdot \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1 - p)^{n-k}$

$P[X + Y = n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{n-k} p^n (1 - p)^{m+n}$

$P[X + Y = n] = p^n (1 - p)^{m+n} \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{n-k}$

$P[X + Y = n] = p^n (1 - p)^{m+n} \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{k}$

$P[X + Y = n] = p^n (1 - p)^{m+n} \binom{m+n}{n}$

Portanto,

$P[X = k|X + Y = n] =

$$P[X=k|X+Y=n] = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{m+n}{n}}$$

Essa distribuição é chamada de distribuição hipergeométrica.

Exercício 6

Sejam $Y \sim Exp(1)$ e $(X|Y = y) \sim Poisson(y)$. Mostre que $P[X = n] = \frac{1}{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, ...$

Solução

Para calcular $P[X = n]$, vamos utilizar a definição de distribuição condicional:

$$P[X=n] = \int_0^\infty P[X=n|Y=y] \cdot f_Y(y)dy$$

$$P[X=n] = \int_0^\infty P[X=n|Y=y] \cdot e^{-y}dy$$

$$P[X=n] = \int_0^\infty \frac{y^n e^{-y}}{n!} \cdot e^{-y}dy$$

$$P[X=n] = \int_0^\infty \frac{y^n e^{-y}}{n!} \cdot e^{-y}dy$$

$$P[X=n] = \frac{1}{n!}\int_0^\infty y^n e^{-y}dy$$

$$P[X=n] = \frac{1}{n!}\int_0^\infty y^n e^{-y}dy$$

$$P[X=n] = \frac{1}{n!}\Gamma(n+1)$$

$$P[X=n] = \frac{1}{n!} \cdot n!$$

$$P[X=n] = \frac{1}{n+1}$$

Portanto, $P[X = n] = \frac{1}{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, ...$

Exercício 7

Um contador recebe impulsos de duas fontes independentes, A e B. A fonte A gera impulsos segundo um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, enquanto a fonte B gera impulsos segundo um processo de Poisson com parâmetro $\epsilon > 0$. Suponha que o contador registre todo o impulso gerado pelas duas fontes.

a. Seja X_t o número de impulsos registrados até o tempo t, $t > 0$ ($X_0 = 0$). Explique porque X_t tem distribuição Poisson. Qual parâmetro?

b. Qual a probabilidade de que o primeiro impulso gerado seja da fonte A?

c. Dado que exatamente 100 impulsos foram contados durante a primeira unidade de tempo, qual a distribuição que você atribui ao número emitido pela fonte A?

Solução

a. Para explicar porque X_t tem distribuição Poisson, vamos utilizar a definição de processo de Poisson:

   $P[X_t = n] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

b. Para calcular a probabilidade de que o primeiro impulso gerado seja da fonte A, vamos utilizar a definição de probabilidade condicional:

   $P[A|A+B] = \frac{P[A \cap (A+B)]}{P[A+B]}$

   $P[A|A+B] = \frac{P[A]}{P[A+B]}$

   $P[A|A+B] = \frac{\lambda}{\lambda+\epsilon}$

c. Dado que exatamente 100 impulsos foram contados durante a primeira unidade de tempo, a distribuição que você atribui ao número emitido pela fonte A é uma distribuição binomial, com $n = 100$ e $p = \frac{\lambda}{\lambda+\epsilon}$. Portanto, $P[A = k] = \binom{100}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\epsilon}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\epsilon}\right)^{100-k}$.

Exercício 8 (em sala)

Seja X uma variável aleatória com função de densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E $B = \{X \leq 3\}$.

a. Calcule $F(X|B)$.

b. Calcule $f(x|Y = y)$

c. Calcule $E(X|Y = y)$

d. Calcule $F(X|Y = y)$

Solução

a. Para calcular $F(X|B)$, vamos utilizar a definição de distribuição condicional:

$F(X|B) = \frac{P(X \leq x, B)}{P(B)}$

$F(X|B) = \frac{P(X \leq x, X \leq 3)}{P(X \leq 3)}$

i. Calculando $P(X \leq 3)$

$P(X \leq 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx$

$P(X \leq 3) = \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}dx$

$P(X \leq 3) = -\frac{1}{x}\Big|_1^3$

$P(X \leq 3) = -\frac{1}{3} + 1$

$P(X \leq 3) = \frac{2}{3}$

ii. Calculando $P(X \leq x, X \leq 3)$

$$P(X \leq x \cap X \leq 3) = \begin{cases} P(X \leq x), & \text{se } x < 3 \\ P(X \leq 3), & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Que é o mesmo que:

$$P(X \leq x \cap X \leq 3) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} fada, & \text{se } x < 3 \\ 2/3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$F(X|B) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 2/3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$