LISTA 3

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Tailine J. S. Nonato

2024-04-10

Descrição da atividade

Exercícios 4.1, 4.5, 4.15, 4.18 e 4.24 do Cap.4 (pp. 81-83) de Cryer & Chan (2008)

Exercício 4.1

Use first principles to find the autocorrelation function for the stationary process defined by $Y_i = 5 + e_i - \frac{1}{2} \cdot e_{i-1} + \frac{1}{4} \cdot e_{i-2}$.

Respostas

A autocorrelação é dada por $\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{Var(Y_t)}$. Logo, temos que:

i. Calculando $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_k$:

   $\gamma_k = Cov(5 + e_t - \frac{1}{2} \cdot e_{t-1} + \frac{1}{4} \cdot e_{t-2}, 5 + e_{t-k} - \frac{1}{2} \cdot e_{t-k-1} + \frac{1}{4} \cdot e_{t-k-2})$

   $\gamma_k = Cov(e_t, e_{t-k}) - \frac{1}{2} \cdot Cov(e_{t-1}, e_{t-k}) + \frac{1}{4} \cdot Cov(e_{t-2}, e_{t-k})$

- Se $k = 1$, então:

  $\gamma_1 = -\frac{1}{2} \cdot Var(e_{t-1}) - \frac{1}{8} \cdot Var(e_{t-2}) = -\frac{5}{8}\sigma^2$

- Se $k = 2$, então:

  $\gamma_2 = -\frac{1}{4} \cdot Var(e_{t-2}) = -\frac{1}{4}\sigma^2$

- Se $k > 2$, então:

  $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$

ii. Calculando $Var(Y_t) = \gamma_0$:

$\gamma_0 = Var(5 + e_t - \frac{1}{2}e_{t-1} + \frac{1}{4}e_{t-2})$

$\gamma_0 = Var(e_t) + \frac{1}{4}Var(e_{t-1}) + \frac{1}{16}Var(e_{t-2})$

$\gamma_0 = \sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2$

$\gamma_0 = \frac{21}{16}\sigma^2$

iii. Assim, a autocovariancia é dada por:

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{21}{16}\sigma^2, & \text{se } k = 0 \\ -\frac{5}{8}\sigma^2, & \text{se } k = 1 \\ -\frac{1}{4}\sigma^2, & \text{se } k = 2 \\ 0, & \text{se } k > 2 \end{cases}$$

iv. Agora, calculando a autocorrelação tem-se que:

$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ -\frac{10}{21}, & \text{se } k = 1 \\ -\frac{4}{21}, & \text{se } k = 2 \\ 0, & \text{se } k > 2 \end{cases}$$

Exercício 4.5

Calculate and sketch the autocorrelation functions for each of the following $AR(1)$ models. Plot for sufficient lags that the autocorrelation function has nearly died out.

a. $\phi_1 = 0.6$

b. $\phi_1 = -0.6$

c. $\phi_1 = 0.95$ (Do out to 20 lags.)

d. $\phi_1 = 0.3$

Respostas

A autocorrelação é dada por $\rho_k = \phi^k$. Para criar o gráfico, foi criada a função `ex45` que recebe o valor de ϕ e plota a autocorrelação para 20 lags. Antes de plotar, é necessário definir a função `rho` que calcula a autocorrelação para um determinado lag k.

Na função `ex45`, é criado um vetor `k` com os lags de 0 a 20 e, em seguida, é calculado a autocorrelação para cada lag utilizando a função `sapply`. Por fim, é plotado o gráfico da autocorrelação para os lags de 0 a 20.

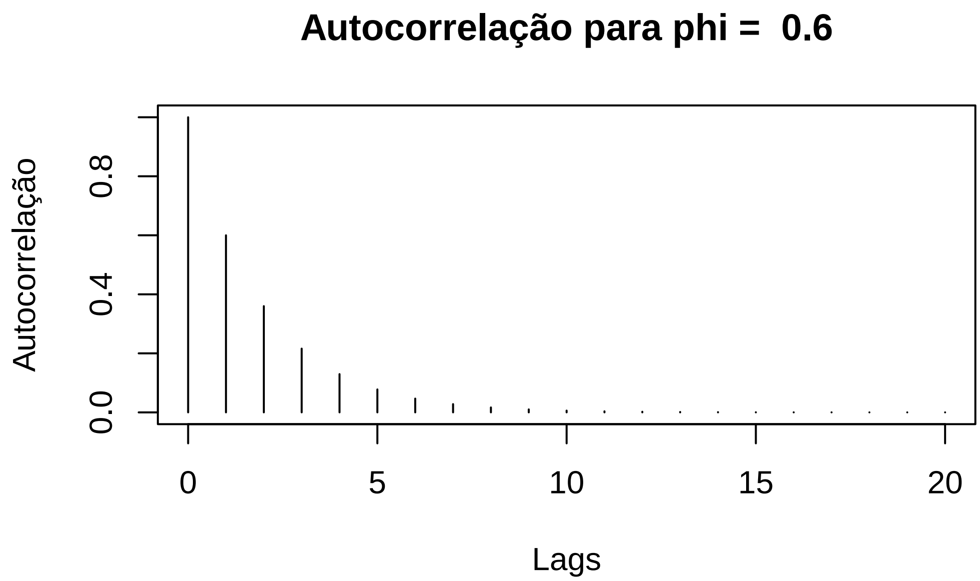
```r
rho <- function(phi, k){
  if(k == 0){return(1)}
  else {return(phi^k)}}

ex45 <- function(phi){
  k <- seq(0, 20, 1)
  y <- sapply(k, function(x) rho(phi, x))
  plot(k, y, type = "h",
       xlab = "Lags",
       ylab = "Autocorrelação",
       main = paste("Autocorrelação para phi = ",
       phi))}
```

i. Para $\phi_1 = 0.6$:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0.6^k, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

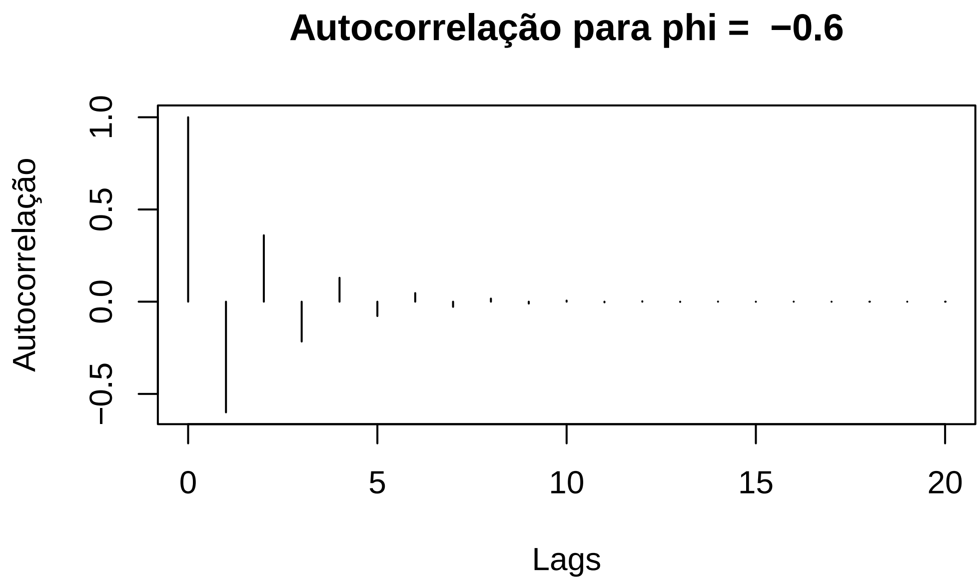
```r
ex45(0.6)
```



ii. Para $\phi_1 = -0.6$:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ (-0.6)^k, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

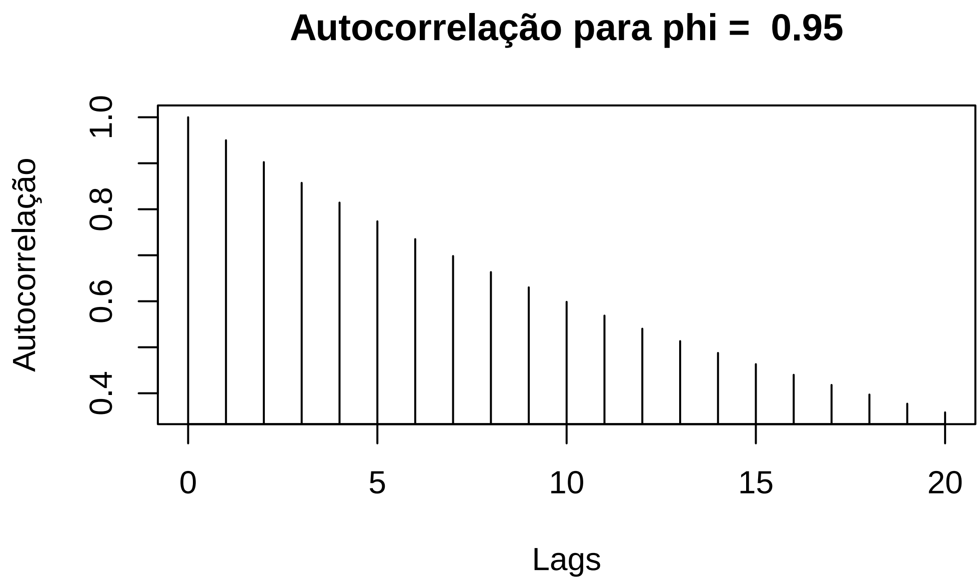
```
ex45(-0.6)
```



iii. Para $\phi_1 = 0.95$:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0.95^k, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

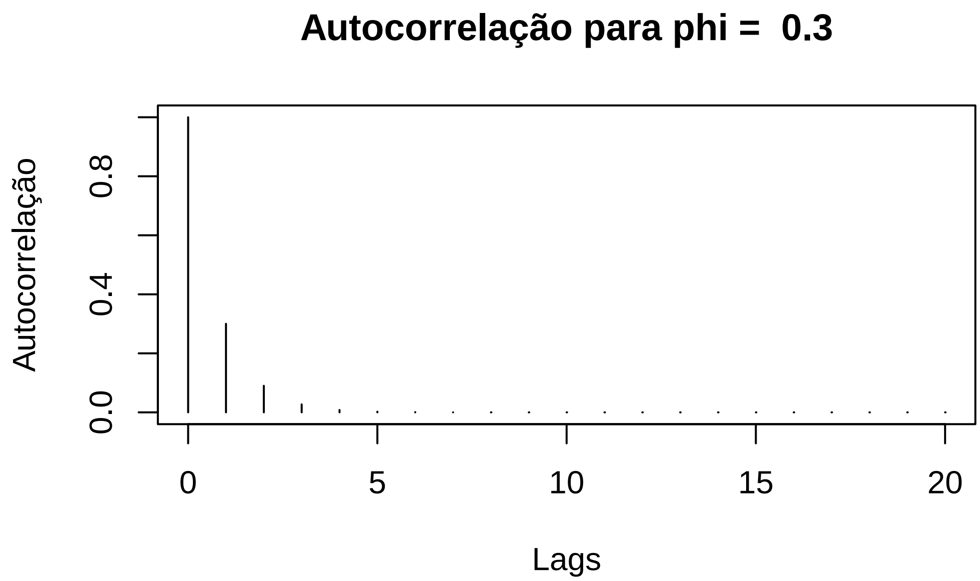
```
ex45(0.95)
```



iv. Para $\phi_1 = 0.3$:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0.3^k, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

```
ex45(0.3)
```



Exercício 4.15

Consider the $AR(1)$ model $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$. Show that if $|\phi| = 1$ the process cannot be stationary. (Hint: Take variances of both sides.)

Respostas

Se $|\phi| = 1$, então a equação do modelo $AR(1)$ se torna $Y_t = Y_{t-1} + e_t$. Para verificar se o processo é estacionário, é necessário verificar se a média e a variância são constantes ao longo do tempo.

i. Calculando a média:

$E(Y_t) = E(Y_{t-1} + e_t) = E(Y_{t-1}) + E(e_t)$

$E(Y_t) = E(Y_{t-1})$

$E(Y_t) = E(Y_{t-2})$

...

$E(Y_t) = E(Y_{t-k})$

ii. Calculando a variância:

$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1} + e_t)$

$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) + Var(e_t)$

$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) + \sigma^2$

$Var(Y_t) = Var(Y_{t-2}) + 2\sigma^2$

...

$Var(Y_t) = Var(Y_{t-k}) + k\sigma^2$

Como a média é constante ao longo do tempo, então o processo poderia ser dito estacionário. No entando, como a variância não é constante ao longo do tempo, então o processo não é estacionário.

Assim, se $|\phi| = 1$, o processo não é estacionário, já que a variância causa uma contradicão.

Exercício 4.18

Consider a process that satisfies the zero-mean, "stationary" $AR(1)$ equation $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$ with $-1 < \phi < 1$. Let c be any nonzero constant, and define $W_t = Y_t + c\phi^t$.

a. Show that $E(W_t) = c\phi^t$.

b. Show that W_t satisfies the "stationary" $AR(1)$ equation $W_t = \phi W_{t-1} + e_t$.

c. Is W_t stationary?

Respostas

Item A

Para calcular a média de W_t, temos que:

$E(W_t) = E(Y_t + c\phi^t)$

$E(W_t) = E(Y_t) + E(c\phi^t)$

Como $E(Y_t) = 0$, então:

$E(W_t) = 0 + c\phi^t$

$E(W_t) = c\phi^t$

Item B

Para verificar se W_t satisfaz a equação $AR(1)$, temos que:

$$\phi W_{t-1} + e_t = \phi(Y_{t-1} + c\phi^{t-1}) + e_t$$

$$\phi W_{t-1} + e_t = \phi Y_{t-1} + c\phi^t + e_t$$

$$\phi W_{t-1} + e_t = Y_t + c\phi^t$$

$$\phi W_{t-1} + e_t = W_t$$

Item C

Para verificar se W_t é estacionário, é necessário verificar se a média e a variância são constantes ao longo do tempo.

i. Calculando a média:

$$E(W_t) = c\phi^t$$

A média depende de t, logo não é constante ao longo do tempo, então o processo não é estacionário.

ii. Calculando a variância:

$$Var(W_t) = Var(Y_t + c\phi^t)$$

$$Var(W_t) = Var(Y_t) + Var(c\phi^t)$$

$$Var(W_t) = Var(Y_t) + 0$$

$$Var(W_t) = Var(Y_t)$$

Como a variância é constante ao longo do tempo, então o processo poderia ser dito estacionário. No entanto, observou-se que a média depende de t e essa informação já era suficiente para determinar que o processo não é estacionário.

Exercício 4.24

Let e_t be a zero-mean, unit-variance white noise process. Consider a process that begins at time $t = 0$ and is defined recursively as follows. Let $Y_0 = c_1 e_0$ and $Y_1 = c_2 Y_0 + e_1$. Then let $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$ for $t > 1$ as in an $AR(2)$ process.

a. Show that the process mean is zero.

b. For particular values of ϕ_1 and ϕ_2 within the stationarity region for an $AR(2)$ model, show how to choose c_1 and c_2 so that both $Var(Y_0) = Var(Y_1)$ and the lag 1 autocorrelation between Y_1 and Y_0 match that of a stationary $AR(2)$ process with parameters ϕ_1 and ϕ_2.

c. Once the process Y_t is generated, show how to transform it to a new process that has any desired mean and variance. (This exercise suggests a convenient method for simulating stationary $AR(2)$ processes.)

Respostas

Item A

Para calcular a média do processo, temos que:

$$E(Y_t) = E(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t)$$

$$E(Y_t) = \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2}) + E(e_t)$$

$$E(Y_t) = \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2})$$

$$E(Y_t) = \phi_1 \phi_1 E(Y_{t-2}) + \phi_2 E(Y_{t-2})$$

$$E(Y_t) = \phi_1 \phi_1 \phi_1 E(Y_{t-3}) + \phi_2 \phi_1 E(Y_{t-3})$$

...

$$E(Y_t) = \phi_1^t E(Y_0)$$

Como $E(Y_0) = 0$, então:

$$E(Y_t) = 0$$

Item B

Para escolher c_1 e c_2 de forma que $Var(Y_0) = Var(Y_1)$ e a autocorrelação entre Y_1 e Y_0 seja a mesma de um processo $AR(2)$ estacionário, temos que:

i. Calculando a variância:

$$Var(Y_0) = Var(c_1 e_0)$$

$$Var(Y_0) = c_1^2 Var(e_0)$$

$$Var(Y_0) = c_1^2$$

E

$$Var(Y_1) = Var(c_2 Y_0 + e_1)$$

$$Var(Y_1) = c_2^2 Var(Y_0) + Var(e_1)$$

$$Var(Y_1) = c_2^2 c_1^2 + 1$$

Para que $Var(Y_0) = Var(Y_1)$, então:

$$c_1^2 = c_2^2 c_1^2 + 1$$

$$1 = c_2^2 + \frac{1}{c_1^2}$$

$$c_2^2 = 1 - \frac{1}{c_1^2}$$

ii. Calculando a autocorrelação:

$$\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{Cov(Y_1, Y_0)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_0)}}$$

$$\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{Cov(c_2 Y_0 + e_1, c_1 e_0)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_0)}}$$

$$\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{c_2 c_1 Var(e_0)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_0)}}$$

$$\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{c_2 c_1}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_0)}}$$

$$\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{c_2 c_1}{\sqrt{(c_2^2 c_1^2 + 1)c_1^2}}$$

Para que a autocorrelação entre Y_1 e Y_0 seja a mesma de um processo $AR(2)$ estacionário, então:

$$\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{c_2 c_1}{\sqrt{(c_2^2 c_1^2 + 1)c_1^2}} = \frac{\phi_2}{\sqrt{1 + \phi_1^2}}$$

Dessa forma, é possível escolher:

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{1-\phi_2^2}}$$

$$c_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{c_1^2}}$$

Cabe verificar se estas constantes satisfazem $Var(Y_0) = Var(Y_1)$ e $\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{\phi_2}{\sqrt{1+\phi_1^2}}$.

$$Var(Y_0) = Var(c_1 e_0) = c_1^2 = \frac{1}{1-\phi_2^2} = 1$$

$$Var(Y_1) = Var(c_2 Y_0 + e_1) = c_2^2 Var(Y_0) + 1 = 1$$

$$\rho_{Y_1,Y_0} = \frac{c_2 c_1}{\sqrt{(c_2^2 c_1^2 + 1) c_1^2}} = \frac{\phi_2}{\sqrt{1+\phi_1^2}}$$

Item C

Para transformar o processo Y_t em um novo processo com qualquer média e qualquer variância, é posssível realizar uma padronização. Assim, o novo processo Z_t é dado por:

$$Z_t = \frac{Y_t - E(Y_t)}{\sqrt{Var(Y_t)}}$$

Dessa forma, o novo processo Z_t terá média zero e variância unitária. Para obter um processo com qualquer média e qualquer variância, basta multiplicar o processo Z_t pela raiz da variância desejada e somar a média desejada:

$$Z_t = \sigma Z_t + \mu$$

Assim, o novo processo Z_t terá média μ e variância σ^2.