Lista 1 - Cátia

Cálculo de Probabilidade 2

Tailine J. S. Nonato

Exercício 1

Seja X uma v.a. com distribuição geométrica de parâmetro $0 < p < 1$. Encontre a função de probabilidade condicional de X dado o evento $B = (\theta < X \leq n)$, onde $n \geq 1$ é um número natural.

Gabarito

$$P(X = k|0 < X \leq n) = \begin{cases} \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^n} & \text{k=1,2,...,n} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solução

Estabelecendo os objetos, temos que o espaço de probabilidade é $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, P)$, onde $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = 2^\Omega$ e P é a probabilidade geométrica.

Seja X uma v.a. com distribuição geométrica de parâmetro $0 < p < 1$. A função de probabilidade de X é dada por:

$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, para $k = 1, 2, ...$

A função de probabilidade condicional de X dado o evento $B = (\theta < X \leq n)$ é dada por:

$P(X = k|0 < X \leq n) = \frac{P(X=k \cap B)}{P(B)}$

i. Calcula-se $P(X = k \cap B)$:

Como B é um evento do tipo $(\theta < X \leq n)$, a interseção de $X = k$ com B ocorre quando $k \leq n$ e é equivalente a $X = k$ ocorrer.

$P(X = k \cap B) = P(X = k)$

$P(X = k \cap B) = p(1-p)^{k-1}$

ii. Calcula-se $P(B)$:

$P(B) = P(\theta < X \leq n)$

$P(B) = P(X \leq n) - P(X \leq \theta)$

Assim, sabendo que $P(X \leq \theta) = 0$ e a função de distribuição de probabilidade acumulada da geométrica é $P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$, temos:

$P(B) = 1 - (1-p)^n$

iii. Substitindo:

$P(X = k|0 < X \leq n) = \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^n}$

E então

$$P(X = k|0 < X \leq n) = \begin{cases} \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^n} & \text{k=1,2,...,n} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 2

Seja X uma v.a. com distribuição Normal padrão, $N(0,1)$, e considere o evento $A = (X > 0)$. Obtenha a função de distribuição e a função de densidade condicionais de X dado o evento $A = (X > 0)$.

Gabarito

$$F_X(x|X > 0) = \begin{cases} 2F_X(x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_X(x|X > 0) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Solução

Estabelecendo os objetos, temos que o espaço de probabilidade é $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, P)$, onde $\Omega = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = 2^{\Omega}$ e P é a probabilidade normal padrão.

A função de densidade de probabilidade da normal padrão é dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

A função de distribuição de probabilidade da normal padrão é dada por $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Assim, a função de densidade condicional de X dado o evento $A = (X > 0)$ será dada por:

$$f(x|X > 0) = \frac{f(x)}{P(X>0)}$$

i. Calcula-se $P(X > 0)$:

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0)$$

$$P(X > 0) = 1 - F(0)$$

$$P(X > 0) = 1 - \int_{-\infty}^{0} f(t)dt$$

$$P(X > 0) = 1 - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Tirando as constantes de dentro da integral, temos:

$$P(X > 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Integrar de $-\infty$ até 0 é o mesmo que integrar de 0 até ∞ com o sinal negativo, logo:

$$P(X > 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Em termos de x:

** MISSING INFORMATION **

ii. Substituindo:

$$f(x|X > 0) = \frac{f(x)}{P(X>0)}$$

$$f(x|X > 0) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$$