Projeto - Resolução Lista 5

Inferência Bayesiana | 1º/2024

Tailine J. S. Nonato

July 14, 2024

Conteúdo

Resolução das questões 5 e 6 da Lista 5

Questão 5

Para $i = 1, ..., n$, considere observações independentes $s_i|\lambda_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i t_i)$, onde os tempos de observação t_i são fixos. Suponha que $\lambda_i|\beta \sim \text{iid Gama}(\alpha_0, \beta)$ e que $\beta \sim \text{Gama}(a, b)$.

(i) Calcule a distribuição condicional de $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)|D, \beta$.

(ii) Considere a implementação de amostragem por importância amostral:

(ii.a) no modelo reduzido $p(s_1, ..., s_n; \beta) = p(s_1, ..., s_n|\beta)p(\beta)$, obtido após integrar $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ com distribuição de proposta $p^*(\beta)$ e pesos de importância $w_i \propto \frac{p(\beta_i|D)}{p^*(\beta_i)}$.

(ii.b) no modelo completo $p(s_1, ..., s_n; \lambda_1, ..., \lambda_n; \beta) = p(s_1, ..., s_n|\lambda_1, ..., \lambda_n)p(\lambda_1, ..., \lambda_n|\beta)p(\beta)$, com distribuição de proposta $p^*(\lambda_1, ..., \lambda_n; \beta) = p^*(\beta)p(\lambda_1, \lambda_n|D, \beta)$.

Mostre que no caso (b) os pesos de importância são idênticos ao caso (a) e use esse resultado para aproximar $E(\lambda_i|D)$ e $\text{Var}(\lambda_i|D)$ por importância amostral para os dados sobre falhas em linhas de bombeamento disponíveis nas notas de aula (ou em Gaver e O'Muircheartaigh,1987, Technometrics, Vol. 29, pags. 1-15) usando $\alpha_0 = 0.166$, $a = 0.1$ e $b = 0.01$.

Resolução

(i) Distribuição condicional de $\lambda_i|D,\beta$:

- Tem-se que:

$s_i|\lambda_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i t_i)$

$\lambda_i|\beta \sim \text{iid Gamma}(\alpha_0, \beta)$

$\beta \sim \text{Gamma}(a, b)$

- Assim, a priori conjunta é:

$f(\lambda_i|\beta) = \frac{\beta^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\lambda_i^{\alpha_0-1}e^{-\beta\lambda_i}$

- A posteriori pode ser obtida por:

$f(\lambda_i|s_i,\beta) \propto P(s_i|\lambda_i)f(\lambda_i|\beta)$

$f(\lambda_i|s_i,\beta) \propto \left(\frac{(\lambda_i t_i)^{s_i}e^{-\lambda_i t_i}}{s_i!}\right)\left(\frac{\beta^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\lambda_i^{\alpha_0-1}e^{-\beta\lambda_i}\right)$

$f(\lambda_i|s_i,\beta) \propto \lambda_i^{s_i+\alpha_0-1}e^{-\lambda_i(t_i+\beta)}$

- Logo, a distribuição condicional de $\lambda_i|s_i,\beta$ é:

$\lambda_i|s_i,\beta \sim \text{Gamma}(s_i+\alpha_0, t_i+\beta)$

- E a distribuição condicional de $\lambda|D,\beta$ é:

$\lambda_i|D,\beta \sim \text{Gamma}(s_i+\alpha_0, t_i+\beta)$

(ii) Implementação de amostragem por importância amostral

(a) Modelo Reduzido

- A marginal $p(s_1,\dots,s_n|\beta)$ pode ser obtida por:

$p(s_i|\beta) = \int_0^\infty p(s_i|\lambda_i)p(\lambda_i|\beta)d\lambda_i$

$p(s_i|\beta) = \int_0^\infty \frac{(\lambda_i t_i)^{s_i}e^{-\lambda_i t_i}}{s_i!}\frac{\beta^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\lambda_i^{\alpha_0-1}e^{-\beta\lambda_i}d\lambda_i$

$p(s_i|\beta) = \frac{\Gamma(s_i+\alpha_0)}{s_i!\Gamma(\alpha_0)}\frac{\beta^{\alpha_0}t_i^{s_i}}{(t_i+\beta)^{s_i+\alpha_0}}$

- Logo,

$p(s_1,\dots,s_n|\beta) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(s_i+\alpha_0)}{s_i!\Gamma(\alpha_0)}\frac{\beta^{\alpha_0}t_i^{s_i}}{(t_i+\beta)^{s_i+\alpha_0}}$

- Como visto anteriormente, a priori de β é:

$\beta \sim \text{Gamma}(a, b)$

- Logo, a posteriori de β pode ser obtida por:

$p(\beta|D) \propto p(s_1, \ldots, s_n|\beta)p(\beta)$

$p(\beta|D) \propto \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(s_i+\alpha_0)}{s_i!\Gamma(\alpha_0)} \frac{\beta^{\alpha_0} t_i^{s_i}}{(t_i+\beta)^{s_i+\alpha_0}}\right) \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\beta^{a-1}e^{-b\beta}\right)$

- Assim, a posteriori de β é:

$\beta|D \sim \text{Gamma}\left(a + \sum_{i=1}^{n} s_i + \alpha_0, b + \sum_{i=1}^{n} t_i\right)$

- Para a implementação de amostragem por importância amostral, a distribuição proposta $p^*(\beta)$ é dada por:

$p^*(\beta) = p(\beta)$

- E os pesos de importância:

$w_i \propto \frac{p(\beta_i|D)}{p^*(\beta_i)}$

(b) Modelo Completo

- A priori é dada por:

$p(\lambda|\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \lambda_i^{\alpha_0-1} e^{-\beta\lambda_i}$

- Logo, a priori conjunta é:

$p(\lambda, \beta|D) \propto p(s_1, \ldots, s_n|\lambda)p(\lambda|\beta)p(\beta)$

- A distribuição de proposta então é:

$p^*(\lambda, \beta) = p^*(\beta)p(\lambda|D, \beta)$

- É possível observar que a distribuição de proposta é a mesma que a distribuição de proposta do modelo reduzido, ou seja, $p^*(\lambda, \beta) = p^*(\beta)p(\lambda|D, \beta)$
- E os pesos de importância são idênticos ao caso (a), ou seja,

$w_i \propto \frac{p(\beta_i|D)}{p^*(\beta_i)}$

- Utilizando os dados sobre falhas em linhas de bombeamento disponíveis em Gaver e O'Muircheartaigh,1987,Technometrics, Vol. 29, podemos aproximar $E(\lambda_i|D)$ e $\text{Var}(\lambda_i|D)$ por importância amostral utilizando o R:

```r
if(!require(pacman)) install.packages("pacman")
pacman::p_load(MCMCpack)
```

```r
alpha0 <- 0.166
a <- 0.1
b <- 0.01

s <- c(5,1,5,14,3,19,1,1,4,22)
t <- c(94.32,15.72,62.88,125.76,5.24,31.44,1.04,1.04,2.09,10.48)
n <- length(s)

N <- 10000

beta_prop <- rgamma(N, shape = 2, rate = 2)

log_pesos <- sapply(beta_prop, function(beta) {
  log_priori <- dgamma(beta, shape = a, rate = b, log = TRUE)
  log_veros <- sum(sapply(1:n, function(i) {
    lgamma(s[i] + alpha0) - lgamma(alpha0) - lgamma(s[i] + 1) +
    alpha0 * log(beta) + s[i] * log(t[i]) - (s[i] + alpha0) * log(t[i] + beta)
  }))
  log_priori + log_veros
})

max_log_pesos <- max(log_pesos)
pesos <- exp(log_pesos - max_log_pesos)
pesos <- pesos / sum(pesos)

beta_post <- sample(beta_prop, size = N, replace = TRUE, prob = pesos)

lambda_amost <- matrix(NA, nrow = N, ncol = n)
for (i in 1:n) {
  lambda_amost[, i] <- rgamma(N, shape = s[i] + alpha0, rate = t[i] + beta_post)
}

lambda_medias <- colMeans(lambda_amost)
lambda_medias
```

```
[1] 0.05493910 0.07278602 0.08177664 0.11165332 0.56826435 0.60402222
[7] 0.87407291 0.88925177 1.74714877 2.05724347
```

```r
lambda_vars <- apply(lambda_amost, 2, var)
lambda_vars
```

```
[1] 0.0005923767 0.0045342404 0.0013122612 0.0008870180 0.1026491574
[6] 0.0187243015 0.6659104261 0.6950204254 0.7509472184 0.1976020513
```

Questão 6

Obtenha as aproximações do Exercício 5 usando o amostrador de Gibbs.

Resolução

- Com as mesmas informações anteriores aplica-se o amostrador de Gibbs utilizando o R da seguinte forma:

```r
burn_in <- 1000

beta <- 1

lambda_amost <- matrix(NA, nrow = N, ncol = n)
beta_amost <- numeric(N)

# lambda_i \sim Gamma(s_i + alpha0, t_i + beta)
set.seed(2024)
for (j in 1:N) {
  for (i in 1:n) {
    lambda_amost[j, i] <- rgamma(1, shape = s[i] + alpha0, rate = t[i] + beta)
  }
  beta <- rgamma(1, shape = a + n * alpha0, rate = b + sum(lambda_amost[j, ]))
  beta_amost[j] <- beta
}

lambda_amost <- lambda_amost[-(1:burn_in), ]
beta_amost <- beta_amost[-(1:burn_in)]

lambda_means <- colMeans(lambda_amost)
lambda_means
```

```
[1] 0.05478653 0.07331666 0.08166418 0.11269467 0.58575320 0.60712301
[7] 0.93059213 0.91968287 1.80363182 2.07016189
```

```r
lambda_vars <- apply(lambda_amost, 2, var)
lambda_vars
```

```
[1] 0.0005996861 0.0046782790 0.0013069464 0.0008626045 0.1084715550
[6] 0.0198719921 0.7536270407 0.7462907407 0.7901877207 0.1966670827
```