

Delineamento e Análise de Experimentos

Professora Juliana Betini Fachini Gomes
e-mail: jfachini@unb.br

Brasília - 2023

Experimentos Fatoriais de dois níveis

- Vários casos especiais do experimento fatorial geral são importantes porque são amplamente utilizados em trabalhos de pesquisa;
- O caso mais importante é o de k fatores, cada um com apenas dois níveis;
- Esses níveis podem ser quantitativos, como dois valores de temperatura, pressão ou tempo; ou eles podem ser qualitativos, como duas máquinas, dois operadores, níveis "alto" e "baixo" de um fator, ou talvez a presença e ausência de um fator;
- Uma réplica completa desse experimento é composta por $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ observações e é chamado de planejamento fatorial 2^k .

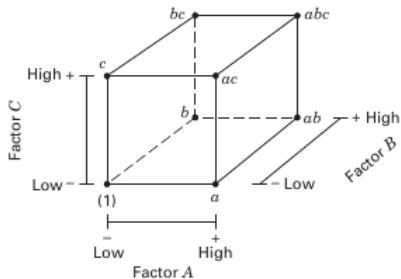
- Os experimentos fatoriais 2^k são, particularmente, úteis nos estágios iniciais do trabalho experimental. Quando existem muitos fatores a serem investigados;
- Então, esses experimentos são amplamente utilizados em triagem de fator.
- Como existem apenas dois níveis para cada fator, assumimos que a resposta é aproximadamente linear ao longo do intervalo dos níveis de fator escolhidos.

Experimento 2^k

EXPERIMENTO 2^k

- Porém, outro caso especial dentre os experimentos fatoriais 2^k , é o experimento 2^3 ;
- Nesses experimentos têm-se oito tratamentos que são combinações dos fatores A , B , e C e podem ser representados geometricamente como um cubo (Figura 1);
- Em que " + " representa o nível alto e " - " o nível baixo do fator.

EXPERIMENTO 2^3



(a) Geometric view

FIGURE: 1 Livro Douglas C. Montgomery (2009)

EXPERIMENTO 2^3

- Os símbolos (1), a , b , ab , ac , bc e abc representam o total de resposta em todas as n réplicas tomadas na combinação de tratamento.
 - o alto nível de qualquer fator na combinação de tratamento é indicado pela letra minúscula correspondente;
 - o baixo nível de um fator na combinação de tratamento é denotado pela ausência da letra correspondente.
- O efeito médio de um fator é definido como a mudança na resposta produzida por uma mudança no nível desse fator em média sobre os níveis do outro fator.

EXPERIMENTO 2^3

- Existem três diferentes notações para representar o experimento 2^3 , como mostra o quadro abaixo:

Run	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Labels	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	—	—	—	(1)	0	0	0
2	+	—	—	<i>a</i>	1	0	0
3	—	+	—	<i>b</i>	0	1	0
4	+	+	—	<i>ab</i>	1	1	0
5	—	—	+	<i>c</i>	0	0	1
6	+	—	+	<i>ac</i>	1	0	1
7	—	+	+	<i>bc</i>	0	1	1
8	+	+	+	<i>abc</i>	1	1	1

EXPERIMENTO 2³

- Agora, vamos construir as estimativas dos efeitos principais;
- Considere o efeito principal do fator A:
 - O efeito do fator A quando B e C estão no nível baixo é $[a - (1)]/n$;
 - O efeito do fator A quando B está no nível alto e C no nível baixo é $[ab - b]/n$;
 - O efeito do fator A quando C está no nível alto e B no nível baixo é $[ac - c]/n$;
 - O efeito do fator A quando B e C estão no nível alto é $[abc - bc]/n$;
- A média dessas quantidades produz o efeito principal do fator A:

$$A = \frac{1}{4n}[a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc] \quad (1)$$

EXPERIMENTO 2³

- Alternativamente, o efeito principal do fator A poderia ser obtido por:

$$\begin{aligned} A &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} & (2) \\ &= \frac{a + ab + ac + abc}{4n} - \frac{(1) + b + c + bc}{4n} \\ &= \frac{1}{4n} [a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc] \end{aligned}$$

EXPERIMENTO 2^3

- A equação (4) também pode ser desenvolvida como um contraste entre as quatro combinações de tratamento;
- Uma forma alternativa geral, no caso de experimentos fatoriais 2^k , para determinar contrastes para os efeitos $AB...K$, é dada por:

$$\text{Contraste}_{AB...K} = (a \pm 1)(b \pm 1)...(k \pm 1) \quad (3)$$

EXPERIMENTO 2^3

- O $Constrate_A$, para experimento 2^3 , pode ser construido por:

$$\begin{aligned}Contraste_A &= (a - 1)(b + 1)(c + 1) \\ &= a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc\end{aligned}$$

EXPERIMENTO 2^3

1. Considere o experimento 2^3 e encontre:
 - A. Os $Constrate_B$ e $Constrate_C$;
 - B. Os $Constrate_{AB}$, $Constrate_{AC}$ e $Constrate_{BC}$;
 - C. O $Constrate_{ABC}$;
2. Considere os contrastes obtidos no item 1 e obtenha os efeitos principais dos fatores B , C , AB , AC , BC e ABC .

EXPERIMENTO 2³

- O efeito do fator A é dado por:

$$A = \frac{1}{4n}[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]$$

- O efeito do fator B é dado por:

$$B = \frac{1}{4n}[b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac] \quad (4)$$

- O efeito do fator C é dado por:

$$C = \frac{1}{4n}[c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] \quad (5)$$

EXPERIMENTO 2³

- O efeito do fator AB é dado por:

$$AB = \frac{1}{4n}[(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc] \quad (6)$$

- O efeito do fator AC é dado por:

$$AC = \frac{1}{4n}[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc] \quad (7)$$

- O efeito do fator BC é dado por:

$$BC = \frac{1}{4n}[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc] \quad (8)$$

EXPERIMENTO 2^3

- Em experimentos 2^3 é sempre importante examinar a magnitude e a direção dos efeitos dos fatores para determinar quais variáveis provavelmente serão importantes;
- A análise de variância geralmente pode ser usada para confirmar essa interpretação (testes t podem ser usados também);
- A magnitude e a direção do efeito devem sempre ser consideradas junto com a ANOVA, porque a ANOVA sozinha não transmite essa informação.

RELEMBRANDO

- Um contraste de interesse pode ser escrito em termos das médias de tratamentos:

$$C = \sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.},$$

- E a soma de quadrados do contraste é definida por:

$$SQ_C = \frac{(\sum_{i=1}^a c_i \bar{y}_{i.})^2}{n \sum_{i=1}^a c_i^2},$$

- Ou seja, a soma dos quadrados para qualquer contraste é igual ao quadrado do contraste dividido pelo número de observações em cada total no contraste vezes a soma dos quadrados dos coeficientes do contraste.

EXPERIMENTO 2^3

- Em experimentos 2^3 a soma de quadrados para qualquer efeito é definida por:

$$SQ = \frac{(\text{Constrate})^2}{8n}. \quad (9)$$

EXPERIMENTO 2^k

- A soma de quadrado total é definida por:

$$SQ_T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n y_{ijkl}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{8n},$$

em geral, a SQ_T em $8n - 1$ graus de liberdade.

- E por subtração, a soma de quadrado do resíduo é dada por:

$$SQ_{Res} = SQ_T - (SQ_A + SQ_B + SQ_C + SQ_{AB} + SQ_{AC} + SQ_{BC} + SQ_{ABC}),$$

com $8(n - 1)$ graus de liberdade.

EXERCÍCIO

- Um experimento fatorial 2^3 foi realizado para desenvolver um processo de ataque de nitreto em uma ferramenta de gravação de plasma.
- Os fatores são o espaço entre os eletrodos, o fluxo de gás (C_2F_6 é usado como gás reagente), e a potência de RF aplicado ao cátodo.
- Cada fator é executado em dois níveis, e o experimento é repetido duas vezes.
- A variável de resposta é o taxa de corrosão para nitreto de silício ($\text{\AA}/m$). Os dados da taxa de gravação estão no quadro abaixo:

EXERCÍCIO

Run	Coded Factors			Etch Rate		Total	Factor Levels		
	A	B	C	Replicate 1	Replicate 2		Low (−1)		High (+1)
1	−1	−1	−1	550	604	(1) = 1154	A (Gap, cm)	0.80	1.20
2	1	−1	−1	669	650	<i>a</i> = 1319	B (C ₂ F ₆ flow, SCCM)	125	200
3	−1	1	−1	633	601	<i>b</i> = 1234	C (Power, W)	275	325
4	1	1	−1	642	635	<i>ab</i> = 1277			
5	−1	−1	1	1037	1052	<i>c</i> = 2089			
6	1	−1	1	749	868	<i>ac</i> = 1617			
7	−1	1	1	1075	1063	<i>bc</i> = 2138			
8	1	1	1	729	860	<i>abc</i> = 1589			

EXERCÍCIO

1. Considere os dados do experimentos e calcule:
 - A) Os efeitos principais dos fatores A, B, C, AB, AC, BC e ABC .
 - B) $SQ_A, SQ_B, SQ_C, SQ_{AB}, SQ_{AC}, SQ_{BC}, SQ_{ABC}, SQ_T$ e SQ_{Res} .
 - C) Os respectivos graus de liberdade.
 - D) Construa a Tabela ANOVA.
 - E) Interprete os resultados encontrados nos itens anteriores.

EXPERIMENTO 2^k GERAL

- Os métodos de análise estudados podem ser generalizados para os experimentos fatoriais 2^k , com k fatores e cada um com dois níveis;
- Os contrastes para os efeitos $AB...K$ são encontrados por:

$$\text{Contraste}_{AB...K} = (a \pm 1)(b \pm 1)...(k \pm 1) \quad (10)$$

- Os efeitos principais podem ser estimados por:

$$AB...K = \frac{2}{n2^k} (\text{Contraste}_{AB...K}) \quad (11)$$

- E as somas de quadrados são calculadas por:

$$SS_{AB...K} = \frac{1}{n2^k} (\text{Contraste}_{AB...K})^2 \quad (12)$$

EXPERIMENTO 2^k GERAL

- A análise estatística para os experimentos fatoriais 2^k pode ser resumida nas seguintes etapas:
 1. Estimação dos efeitos principais de cada fator;
 2. Ajuste do modelo completo;
 3. Realização dos testes estatísticos;
 4. Refinamento do modelo;
 5. Análise dos resíduos;
 6. Interpretação dos resultados.