Lista 2 - Eduardo

Cálculo de Probabilidade 2

Tailine J. S. Nonato

Exercício 1

Seja X uma variável aleatória contínua dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Considere o evento $B = [X \leq 2]$, então:

a. calcule a função de distribuição condicional de X dado B, cuja fórmula é

$$\frac{F_X(x|B) = P([X \leq x] \cap [X \leq 2])}{P[X \leq 2]}$$

b. derivando a resposta obtida no item (a), calcule a função de densidade condicional de X dado B,

$$f(x|B) = \frac{d}{dx} F_X(x|B)$$

c. usando o item anterior, calcule a esperança condicional de X dado B,

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|B) dx.$$

Resposta

a. Para calcular $F_X(x|B)$,

$P([X \leq x] \cap [X \leq 2]) = P([X \leq x]) = F_X(x)$

e

$P[X \leq 2] = F_X(2)$

Logo,

$F_X(x|B) = \frac{F_X(x)}{F_X(2)}$

Substituindo,

$F_X(x|B) = \frac{\int_1^x \frac{2}{t^3} dt}{\int_1^2 \frac{2}{t^3} dt}$

$F_X(x|B) = \frac{2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1}\right)}{2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1}\right)}$

$F_X(x|B) = \frac{2/x^2 - 2}{1/2 - 2}$

$F_X(x|B) = \frac{2/x^2 - 2}{-3/2}$

b. Derivando a resposta obtida no item (a), temos

$f(x|B) = \frac{d}{dx} F_X(x|B)$

$f(x|B) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2/x^2 - 2}{-3/2}\right)$

$f(x|B) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{3x^2} + \frac{4}{3}\right)$

$f(x|B) = \frac{8}{3x^3}$

Exercício 2

Considere as variáveis aleatórias X e Y com densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x}e^{-y}y, \qquad \text{onde} \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

Então:

a. determine a densidade marginal f_Y;
b. determine a densidade condicional $f(x|Y = y)$;
c. calcule $P[0 < X < 1|Y = 2]$;
d. calcule a esperança condicional $E(X|Y)$.

Exercício 3

Considere as variáveis aleatórias X e Y com densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então:

a. determine as densidades marginais f_X e f_Y;

b. determine as densidades condicionais $f(x|Y=y)$ e $f(y|X=x)$;

c. calcule as esperanças condicionais $E(X|Y)$ e $E(Y|X)$.