Lista 2 - Eduardo

Cálculo de Probabilidade 2

Tailine J. S. Nonato

Exercício 1

Seja X uma variável aleatória contínua dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Considere o evento $B = [X \leq 2]$, então:

a. calcule a função de distribuição condicional de X dado B, cuja fórmula é

$$\frac{F_X(x|B) = P([X \leq x] \cap [X \leq 2])}{P[X \leq 2]}$$

b. derivando a resposta obtida no item (a), calcule a função de densidade condicional de X dado B,

$$f(x|B) = \frac{d}{dx} F_X(x|B)$$

c. usando o item anterior, calcule a esperança condicional de X dado B,

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|B) dx.$$

Resposta

a. Para calcular $F_X(x|B)$,

$P([X \leq x] \cap [X \leq 2]) = P([X \leq x]) = F_X(x)$

e

$P[X \leq 2] = F_X(2)$

Logo,

$F_X(x|B) = \frac{F_X(x)}{F_X(2)}$

Substituindo, para $1 < x \leq 2$, temos

$F_X(x|B) = \frac{\int_1^x \frac{2}{t^3}\,dt}{\int_1^2 \frac{2}{t^3}\,dt}$

$F_X(x|B) = \frac{\left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^x}{\left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^2}$

$F_X(x|B) = \frac{-\frac{1}{x^2}+1}{-\frac{1}{2}+1}$

$F_X(x|B) = \frac{2-x^2}{2}$

Para $x \leq 1$, temos

$F_X(x|B) = 0$

Assim,

$$F_X(x|B) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ \frac{2-x^2}{2} & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

b. Derivando a resposta obtida no item (a), temos

$f(x|B) = \frac{d}{dx} F_X(x|B)$

Para $1 < x \leq 2$, temos

$f(x|B) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)$

$f(x|B) = \frac{-2x}{2}$

$f(x|B) = -x$

Para $x \leq 1$, temos

$f(x|B) = 0$

Assim,

$$f(x|B) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ -x & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

c. Usando o item anterior, temos

$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|B)dx$

$E(X|B) = \int_{1}^{2} x(-x)dx$

$E(X|B) = \int_{1}^{2} -x^2 dx$

$E(X|B) = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_1^2$

$E(X|B) = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3}$

$E(X|B) = -\frac{7}{3}$

Exercício 2

Considere as variáveis aleatórias X e Y com densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, \qquad \text{onde} \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

Então:

a. determine a densidade marginal f_Y;
b. determine a densidade condicional $f(x|Y=y)$;
c. calcule $P[0 < X < 1|Y=2]$;
d. calcule a esperança condicional $E(X|Y)$.

Solução

a. Para determinar a densidade marginal f_Y, temos

$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx$

Como x varia de 0 a ∞, temos

$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dx$

$f_Y(y) = \frac{e^{-y}}{y}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}}dx$

$f_Y(y) = \frac{e^{-y}}{y}\left[-ye^{-\frac{x}{y}}\right]_0^\infty$

$f_Y(y) = \frac{e^{-y}}{y}\left[-ye^{-\frac{\infty}{y}} + ye^0\right]$

$f_Y(y) = \frac{e^{-y}}{y}[0 + y]$

$f_Y(y) = e^{-y}$

b. Para determinar a densidade condicional $f(x|Y = y)$, temos

$f(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$f(x|Y = y) = \frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{e^{-y}}$

$f(x|Y = y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$

c. Para calcular $P[0 < X < 1|Y = 2]$, usamos a definicão de probabilidade condicional

$P[0 < X < 1|Y = 2] = \frac{P[0<X<1,Y=2]}{P[Y=2]}$

$P[0 < X < 1|Y = 2] = \frac{\int_0^1 f(x,2)dx}{f_Y(2)}$

$P[0 < X < 1|Y = 2] = \frac{\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}e^{-2}}{2}dx}{e^{-2}}$

$P[0 < X < 1|Y = 2] = \frac{\frac{e^{-2}}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}dx}{e^{-2}}$

$P[0 < X < 1|Y = 2] = \frac{\frac{e^{-2}}{2}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1}{e^{-2}}$

$P[0 < X < 1|Y = 2] = \frac{2}{2}(-e^{-\frac{1}{2}} + 1)$

$P[0 < X < 1|Y = 2] = -e^{-\frac{1}{2}} + 1$

d. Para calcular a esperança condicional $E(X|Y)$, temos

$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|Y = y)dx$

Como $0 < x < \infty$

$E(X|Y) = \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}dx$

$E(X|Y) = \frac{1}{y} \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{y}}dx$

$E(X|Y) = \frac{1}{y} \left[\frac{x^2}{2} \cdot -ye^{-\frac{x}{y}}\right]_0^{\infty}$

$E(X|Y) = \frac{1}{y} [0]$

$E(X|Y) = \frac{1}{y}$

Exercício 3

Considere as variáveis aleatórias X e Y com densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então:

a. determine as densidades marginais f_X e f_Y;

b. determine as densidades condicionais $f(x|Y = y)$ e $f(y|X = x)$;

c. calcule as esperanças condicionais $E(X|Y)$ e $E(Y|X)$.

Solução

a. Para $0 < x < y < 1$,

Para determinar f_X, tem-se que:

$f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$

$f_X = \int_{0}^{1} x + ydy$

$f_X = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1$

$f_X = [x + \frac{1}{2} - 0]$

$f_X = x + \frac{1}{2}$

Para determinar f_Y, tem-se que

$f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$f_Y = \int_0^1 x + ydx$

$f_Y = y + \frac{1}{2}$

b. Para $0 < x < y < 1$

$f(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_X}$

$f(x|Y = y) = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$

$f(x|Y = y) = \frac{x+y}{\frac{2x+1}{2}}$

.....