Distribuição e Esperança Condicional

Cálculo de Probabilidade 2

Tailine J. S. Nonato

Conteúdo

Função de Distribuição Condicional

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Onde $B \leq \Omega$ e $P(B) > 0$. A probabilidade condicional de A dado B é definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Quando B é fixado, $P(.|B)$ é uma probabilidade sobre $\mathcal{A}$.

Se X é uma variável aleatória discreta, define-se a função de distribuição acumulada de X como:

$F_{X|B}(x) = P(X \leq x|B)$

$F_{X|B}(x) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)}$

Onde:

$X \in \{X_1, ...\}$

$B_i = (X = x_i)$

E a função de distribuição marginal de X é dada por:

$F_X(x) = P(X \leq x)$

$F_X(x) = \sum_{i \geq x_i} P(X \neq x_i|B_i) * P(B_i)$

$F_X(x) = \sum_{i \geq x_i} P(X = x_i) * F_{X|B_i}(x)$

Esperança Condicional

Se X é uma variável aleatória discreta, a esperança condicional de X dado B é definida como:

$$E(X|B) = \sum_i x_i * P(X = x_i|B)$$

Se X é uma variável aleatória contínua, a esperança condicional de X dado B é definida como:

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x * dF_{X|B}(x)$$

Se $F(X|B)'\exists$

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f_{X|B}(x)dx$$

A esperença condicional conta com algumas propriedades, sendo elas:

i. $E(X|B) = E(X)$ se X é independente de B

ii. $E(aX + bY|B) = aE(X|B) + bE(Y|B)$

iii. $E(E(X|B)) = E(X)$

iv. $E(XY|B) = E(X|B)E(Y|B)$ se X e Y são independentes de B

v. $E(X|B) = E(X|C)\forall C \in \mathcal{A}$ tal que $P(C) > 0$

Exemplos

Exemplo 1

Uma certa lâmpada tem vida em horas, tendo distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$. Uma pessoa acende a lâmpada e, enquanto a lâmpada estiver acesa, um dado honesto é jogado a cada 15 segundos.

A. Qual o número esperado de "3"s lançados até a lâmpada se apagar?

B. Qual o número esperado de lançamentos do dado até a lâmpada se apagar?

C. Qual o número esperado de "3"s lançados até a lâmpada se apagar, dado que a lâmpada se apagou após 10 horas?

D. Qual o número esperado de lançamentos do dado até a lâmpada se apagar, dado que a lâmpada se apagou após 10 horas?

E. Qual o número esperado de "3"s lançados até a lâmpada se apagar, dado que a lâmpada se apagou após 10 horas e o primeiro lançamento do dado foi um "3"?

Resposta A

Dividindo a resolução em passos, tem-se que:

1. Estabelecendo os objetos:

   $X =$ tempo de vida da lâmpada

   $X \sim Exp(1)$

   $N = nmerodelanamentosatalmpadaseapagar$

   $Y = nmerode"3"slanadosnosNlanamentos$

2. Conectando informações:

   $N \sim Geom(1 - e^{-X})$

   $Y|N \sim Bin(N, 1/6)$

3. Calculando a esperança:

   $E(Y) = E(E(Y|N))$

   $E(Y|N) = N * 1/6$

   $E(Y) = E(N) * 1/6$

4. Calculando a esperança de N:

Considerando $\alpha = 15$ segundos ou $\alpha = 1/240$ horas, tem-se uma progressão geométrica com razão $e^{-\alpha}$, logo $P(X > n\alpha) = e^{-n\alpha}$. Então:

   $E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$

Por ser uma progressão geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$ converge em $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$, logo:

   $E(N) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$

5. Substituindo os valores:

   $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} * 1/6$

   $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-1/240}} * 1/6$

```
ey = 1/(1 - exp(-1/240)) * 1/6
```

   $E(Y) \approx 40.083$

Resposta B

Utilizando as informações calculadas no item anterior, o número esperado de lançamentos do dado até a lâmpada se apagar é:

$$E(N) \approx 240.5$$

Resposta C

Para calcular o número esperado de "3"s lançados até a lâmpada se apagar, dado que a lâmpada se apagou após 10 horas, tem-se que:

1. Estabelecendo os objetos:

   $X = 10$ horas

   $X \sim Exp(1)$

   $N = nmerodelanamentosatalmpadaseapagar$

   $Y = nmerode"3"slanadosnosNlanamentos$

2. Conectando informações:

Utilizando a fórmula de Bayes, tem-se que:

$$E(Y|X = 10) = E(E(Y|N, X = 10))$$

...