Universidade de Brasília

Delineamento e Análise de Experimentos

Professora Juliana Betini Fachini Gomes
e-mail: jfachini@unb.br

Brasília - 2023

Experimentos Fatorias de dois níveis

- Vários casos especiais do exeprimento fatorial geral são importantes porque são amplamente utilizados em trabalhos de pesquisa;

- O caso mais importante é o de k fatores, cada um com apenas dois níveis;

- Esses níveis podem ser quantitativos, como dois valores de temperatura, pressão ou tempo; ou eles podem ser qualitativos, como duas máquinas, dois operadores, níveis "alto" e "baixo" de um fator, ou talvez a presença e ausência de um fator;

- Uma réplica completa desse experimento é composta por $2 \times 2 \times \ldots 2 \times = 2^k$ observações e é chamado de planejamento fatorial 2^k.

- Os experimentos fatoriais 2^k são, particularmente, úteis nos estágios iniciais do trabalho experimental. Quando existem muitos fatores a serem investigados;
- Então, esses experimentos são amplamente utilizados em triagem de fator.
- Como existem apenas dois níveis para cada fator, assumimos que a resposta é aproximadamente linear ao longo do intervalo dos níveis de fatores escolhidos.

Experimento 2^k

Exemplo

- Considere uma investigação sobre o efeito da concentração do reagente e a quantidade do catalisador na conversão (rendimento) em um processo químico;
- O objetivo do experimento era determinar se os ajustes para qualquer um desses dois fatores aumentariam o rendimento;
- Seja a concentração do reagente o fator A e os dois níveis de interesse serão 15 e 25 por cento;

Exemplo

- O catalisador é o fator B, com o nível alto denotando o uso de 2 libras do catalisador e o nível baixo denotando o uso de apenas 1 libra;
- O experimento é repetido três vezes, portanto, há 12 execuções;
- A ordem em que as execuções são feitas é aleatória, então este é um experimento inteiramente casualizado.

Exemplo

Tabela 1: Dados do Experimento

Fator			Repetição			
A	B	Tratamento	I	II	III	Total
-	-	A baixo, B baixo	28	25	27	80
+	-	A alto, B baixo	36	32	32	100
-	+	A baixo, B alto	18	19	23	60
+	+	A alto, B alto	31	30	29	90

Experimento 2^k

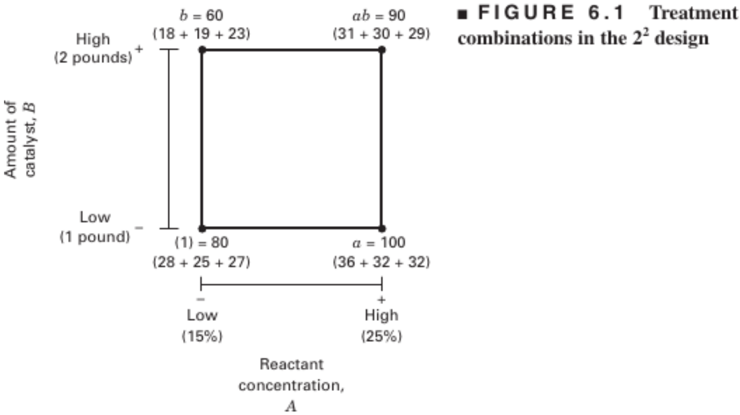

Figure: Livro Douglas C. Montgomery (2009)

Experimento 2^k

- Em experimentos fatoriais 2^k usa-se a seguinte notação:
    - o alto nível de qualquer fator na combinação de tratamento é indicado pela letra minúscula correspondente;
    - o baixo nível de um fator na combinação de tratamento é denotado pela ausência da letra correspondente.
- O efeito médio de um fator é definido como a mudança na resposta produzida por uma mudança no nível desse fator em média sobre os níveis do outro fator.
- Os símbolos (1), a, b e ab representam o total de resposta em todas as n réplicas tomadas na combinação de tratamento.

EXPERIMENTO 2^k

- O efeito do fator A no nível baixo de B é $[a - (1)]/n$;
- E o efeito do fator A no nível alto de B é $[ab - b]/n$;
- A média dessas duas quantidades produz o efeito principal do fator A:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2n}\{[ab - b] + [a - (1)]\} \qquad (1) \\ &= \frac{1}{2n}[ab + a - b - (1)] \end{aligned}$$

Experimento 2^k

- Alternativamente, o efeito principal do fator A poderia ser obtido por:

$$
\begin{aligned}
A &= \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-} \\
&= \frac{ab + a}{2n} - \frac{b + (1)}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}[ab + a - b - (1)]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Experimento 2^k

- O efeito do fator B no nível baixo de A é $[b - (1)]/n$;
- E o efeito do fator B no nível alto de A é $[ab - a]/n$;
- A média dessas duas quantidades produz o efeito principal do fator B:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2n}\{[ab - a] + [b - (1)]\} \\
&= \frac{1}{2n}[ab + b - a - (1)]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Experimento 2^k

- O efeito da interação AB é definido como a diferença média entre o efeito de A no alto nível de B e o efeito de A no baixo nível de B:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2n}\{[ab - b] - [a - (1)]\} \\ &= \frac{1}{2n}[ab + (1) - a - b] \end{aligned} \tag{4}$$

Exercício

1. Considere os dados do experimentos que estão na Tabela 1 e calcule:

    a) O efeito principal do fator A.

    b) O efeito principal do fator B.

    c) O efeito principal do fator AB.

    d) Interprete os resultados encontrados nos itens anteriores.

EXPERIMENTO 2^k

- Em experimentos 2^k é sempre importante examinar a magnitude e a direção dos efeitos dos fatores para determinar quais variáveis provavelmente serão importantes;
- A análise de variância geralmente pode ser usada para confirmar essa interpretação (testes t podem ser usados também);
- A magnitude e a direção do efeito devem sempre ser consideradas junto com a ANOVA, porque a ANOVA sozinha não transmite essa informação.

Relembrando

- Um contraste de interesse pode ser escrito em termos das médias de tratamentos:

$$C = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.},$$

- E a soma de quadrados do contraste é definida por:

$$SQ_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2},$$

- Ou seja, a soma dos quadrados para qualquer contraste é igual ao quadrado do contraste dividido pelo número de observações em cada total no contraste vezes a soma dos quadrados dos coeficientes do contraste.

Experimento 2^k

- Observe da equação (1) que um contraste foi usado na estimação de A:

$$Contraste_A = ab + a - b - (1). \tag{5}$$

- Esse contraste é conhecido como o efeito total de A;

- Logo, a soma de quadrados de A é definida por:

$$SQ_A = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{4n}. \tag{6}$$

Experimento 2^k

- Observe da equação (3) que um contraste também foi usado na estimação de B:

$$Contraste_B = ab + b - a - (1). \tag{7}$$

- Esse contraste é conhecido como o efeito total de B;

- Logo, a soma de quadrados de B é definida por:

$$SQ_B = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{4n}. \tag{8}$$

EXPERIMENTO 2^k

- Observe da equação (4) que um contraste também foi usado na estimação de AB:

$$Contraste_{AB} = ab + (1) - a - b. \tag{9}$$

- Esse contraste é conhecido como o efeito total de AB;
- Logo, a soma de quadrados de AB é definida por:

$$SQ_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n}. \tag{10}$$

Experimento 2^k

- A soma de quadrado total é definida por:

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{4n},$$

em geral, a SQ_T tem $4n-1$ graus de liberdade.

- E por subtração, a soma de quadrado do resíduo é dada por:

$$SQ_{Res} = SQ_T - (SQ_A + SQ_B + SQ_{AB}),$$

com $4(n-1)$ graus de liberdade.

Exercício

2. Considere os dados do experimentos que estão na Tabela 1 e calcule:

   a) $SQ_A, SQ_B, SQ_{AB}, SQ_T$ e SQ_{Res}.

   b) Os respectivos graus de liberdade.

   c) Construa a Tabela ANOVA.

   d) Interprete os resultados encontrados nos itens anteriores.

EXPERIMENTO 2^k

- Muitas vezes é conveniente anotar as combinações de tratamento na ordem $(1), a, b, ab$;
- Essa ordem é conhecida como ordem padrão ou ordem de Yates;
- Usando essa ordem padrão, vemos que os coeficientes de contraste usados nas estimativas dos efeitos são:

TABELA 2: Ordem padrão ou ordem de Yates

Efeito	(1)	a	b	ab
A	-1	+1	-1	+1
B	-1	-1	+1	+1
AB	+1	-1	-1	+1

- Observe na Tabela 2 que os contrastes para os efeitos A, B e AB são ortogonais. Assim, o experimento 2^2 é um experimento ortogonal e todos 2^k também são ortogonais.

EXPERIMENTO 2^k

- Para experimento 2^k é fácil e intuitivo expressar os resultados em termos de um modelo de regressão;
- O modelo de regressão para o experimento da Tabela 1 é dado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon,$$

em que x_1 é uma variável codificada que representa a

concentração do reagente, x_2 é uma variável codificada que representa a quantidade de catalisador, e $\beta_{'s}$ são os respectivos coeficientes de regressão.

Experimento 2^k

- As variáveis codificadas são definidas por:

$$x_1 = \frac{Conc - (Conc_{baixo} + Conc_{alto})/2}{(Conc_{alto} - Conc_{baixo})/2}$$

e

$$x_2 = \frac{Catal - (Catal_{baixo} + Catal_{alto})/2}{(Catal_{alto} - Catal_{baixo})/2}$$

- Quando as variáveis naturais têm apenas dois níveis, essa codificação produzirá a notação familiar ± 1 para os níveis das variáveis codificadas.

Experimento 2^k

- Observe que os coeficientes de regressão são metade das estimativas de efeito do fator correspondente;
- O coeficiente de regressão é a metade da estimativa de efeito porque um coeficiente de regressão mede o efeito de uma unidade de mudança em x na média de y, e a estimativa de efeito é baseada em uma mudança de duas unidades (de -1 a 1).