# Probabilidade Condicional

**Cálculo de Probabilidade 2**

Tailine J. S. Nonato

## Conteúdo 1

Probabilidade condicional é a probabilidade de um evento ocorrer, dado que outro evento já ocorreu. A probabilidade condicional é denotada por P(A|B), que é a probabilidade de A ocorrer dado que B já ocorreu. A fórmula para calcular a probabilidade condicional é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Existem algumas propriedades, são elas:

i. Se A e B são eventos independentes, então a probabilidade condicional de A dado B é igual à probabilidade de A, ou seja, P(A|B) = P(A).

ii. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, não podem ocorrer simultaneamente, então a probabilidade condicional de A dado B é igual a zero, ou seja, P(A|B) = 0.

iii. Se A e B são eventos complementares, então a probabilidade condicional de A dado B é igual a 1 menos a probabilidade de A, ou seja, P(A|B) = 1 - P(A).

Importante também descrever a propriedade multiplicativa, que é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

## Exemplos

### Exemplo 1

Considere uma urna "A" tem 5 bolas brancas e 7 bolas pretas. A urna "B" tem 3 bolas brancas e 12 bolas pretas. Joga-se uma moeda honesta, se der coroa retira-se uma bola da urna B, se der cara retira-se uma bola da urna A.

A. Suponha que a bola retirada foi branca. Qual a probabilidade de ter sido retirada da urna B?

B. Suponha que a bola retirada foi preta. Qual a probabilidade de ter sido retirada da urna A?

### Resposta A

A probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna B, dado que a bola retirada foi branca, pode ser calculada usando a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(B|Branca) = P(Branca|B) * \frac{P(B)}{P(Branca)}$$

Onde: $P(B|Branca)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna B, dado que a bola retirada foi branca. $P(Branca|B)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola branca da urna B. $P(B)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna B. $P(Branca)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola branca.

$P(Branca|B) = 3/15$ porque a urna B tem 3 bolas brancas e 15 bolas no total. $P(B) = 1/2$ porque a moeda é honesta e tem 2 lados. $P(Branca) = (3/15) * (1/2) + (5/12) * (1/2)$ porque a probabilidade de retirar uma bola branca da urna B é 3/15 e a probabilidade de retirar uma bola branca da urna A é 5/12.

Substituindo, temos:

$$P(B|Branca) = (3/15) * \frac{(15/35)}{(8/35)}$$

$$P(B|Branca) = 0.2 * \frac{0.4286}{0.2286}$$

$$P(B|Branca) = 0.2 * 1.875$$

$$P(B|Branca) = 0.375$$

### Resposta B

A probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna A, dado que a bola retirada foi preta, pode ser calculada usando a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(A|Preta) = P(Preta|A) * P(A)/P(Preta)$$

Onde: $P(A|Preta)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna A, dado que a bola retirada foi preta. $P(Preta|A)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola preta da urna A. $P(A)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna A. $P(Preta)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola preta.

$P(Preta|A) = 7/12$ porque a urna A tem 7 bolas pretas e 12 bolas no total. $P(A) = 1/2$ porque a moeda é honesta e tem 2 lados. $P(Preta) = (7/12) * (1/2) + (12/15) * (1/2)$ porque a probabilidade de retirar uma bola preta da urna A é 7/12 e a probabilidade de retirar uma bola preta da urna B é 12/15.

Substituindo, temos:

$$P(A|Preta) = (7/12) * \frac{(12/35)}{(17/35)}$$

$$P(A|Preta) = 0.5833 * \frac{0.3429}{0.4857}$$

$$P(A|Preta) = 0.5833 * 0.7059$$

$$P(A|Preta) = 0.4118$$

### Exemplo 2

Urna de Poya: Uma urna tem 7 bolas brancas e 5 bolas pretas. Cada vez que uma bola é retirada, sua cor é anotada e ela é recolocada na urna com mais 2 outras bolas da mesma cor.

A. Qual é a probabilide de que as primeiras 2 bolas retiradas sejam pretas e as 2 seguintes sejam brancas?

### Resposta A

A probabilidade pode ser calculada a partir da propriedade multiplicativa:

$$P(P_1; P_2; B_3; B_4) = P(P_1) * P(P_2|P_1) * P(B_3|P_1; P_2) * P(B_4|P_1; P_2; B_3)$$

Tem-se que:

$$P(P_1) = 5/12$$

$P(P_2|P_1) = 7/14$

$P(B_3|P_1; P_2) = 7/16$

$P(B_4|P_1; P_2; B_3) = 9/18$

Substituindo, temos:

$P(P_1; P_2; B_3; B_4) = (5/12) * (7/14) * (7/16) * (9/18)$

$P(P_1; P_2; B_3; B_4) = 0.2083$

## Exemplo 3

Uma questão de Verdadeiro ou Falso foi aplicada para 2 pessoas em um jogo de perguntas. Ambos sabem a resposta correta de forma independente com probabilidade $p$.

A. Qual das seguintes estratégias é mais eficaz para ganhar o jogo: i. escolher 1 pessoa para responder a pergunta ou ii. ambos pensam e dão a resposta em comum se estiverem de acordo ou decidem na moeda se discordarem?

## Resposta A

Descrevendo os eventos, tem -se que:

$A =$ Ambos concordam e acertam a resposta

$B =$ Ambos concordam e erram a resposta

$C =$ Discordam

$D =$ Ambos acertam a resposta

Na opção i, $P(G)$ será a probabilidade da (uma) pessoa escolhida acertar, logo:

$P(G) = p$

Na opção ii, $P(G)$ será a probabilidade de $G$ dado $A$, $B$ e $C$, logo:

$P(G) = P(A)P(G|A) + P(B)P(G|B) + P(C)P(G|C)$

$P(G) = p^2 \cdot 1 + 0 + p(1-p) + (1-p)p \cdot (1/2)$

$P(G) = p^2 + 2p(1-p) \cdot 1/2$

$P(G) = p^2 + p(1-p)$

$P(G) = p$

Logo, é possível observar que as duas opções são equivalentes, tendo a mesma probabilidade de acerto.

# Conteúdo 2

## Função de Distribuição Condicional

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Onde $B \leq \Omega$ e $P(B) > 0$. A probabilidade condicional de $A$ dado $B$ é definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Quando $B$ é fixado, $P(.|B)$ é uma probabilidade sobre $\mathcal{A}$.

Se $X$ é uma variável aleatória discreta, define-se a função de distribuição acumulada de $X$ como:

$F_{X|B}(x) = P(X \leq x|B)$

$F_{X|B}(x) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap B)}{P(B)}$

Onde:

$X \in \{X_1, ...\}$

$B_i = (X = x_i)$

E a função de distribuição marginal de $X$ é dada por:

$F_X(x) = P(X \leq x)$

$F_X(x) = \sum_{i \geq x_i} P(X \neq x_i|B_i) * P(B_i)$

$F_X(x) = \sum_{i \geq x_i} P(X = x_i) * F_{X|B_i}(x)$

## Esperança Condicional

Se $X$ é uma variável aleatória discreta, a esperança condicional de $X$ dado $B$ é definida como:

$$E(X|B) = \sum_i x_i * P(X = x_i|B)$$

Se $X$ é uma variável aleatória contínua, a esperança condicional de $X$ dado $B$ é definida como:

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x * dF_{X|B}(x)$$

Se $F(X|B)'\exists$

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f_{X|B}(x)dx$$

A esperença condicional conta com algumas propriedades, sendo elas:

i. $E(X|B) = E(X)$ se $X$ é independente de $B$

ii. $E(aX + bY|B) = aE(X|B) + bE(Y|B)$

iii. $E(E(X|B)) = E(X)$

iv. $E(XY|B) = E(X|B)E(Y|B)$ se $X$ e $Y$ são independentes de $B$

v. $E(X|B) = E(X|C)\forall C \in \mathcal{A}$ tal que $P(C) > 0$

## Exemplos

### Exemplo 1

Uma certa lâmpada tem vida em horas, tendo distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$. Uma pessoa acende a lâmpada e, enquanto a lâmpada estiver acesa, um dado honesto é jogado a cada 15 segundos.

A. Qual o número esperado de "3"s lançados até a lâmpada se apagar?

B. Qual o número esperado de lançamentos do dado até a lâmpada se apagar?

**Resposta A**

Dividindo a resolução em passos, tem-se que:

1. Estabelecendo os objetos:

   $X$ = tempo de vida da lâmpada

   $X \sim Exp(1)$

   $N$ = número de lançamentos até a lâmpada se apagar

   $Y$ = número de "3"s lançados nos N lançamentos

2. Conectando informações:

   $N \sim Geom(1 - e^{-X})$

   $Y|N \sim Bin(N, 1/6)$

3. Calculando a esperança:

   $E(Y) = E(E(Y|N))$

   $E(Y|N) = N * 1/6$

   $E(Y) = E(N) * 1/6$

4. Calculando a esperança de $N$:

Considerando $\alpha = 15$ segundos ou $\alpha = 1/240$ horas, tem-se uma progressão geométrica com razão $e^{-\alpha}$, logo $P(X > n\alpha) = e^{-n\alpha}$. Então:

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$$

Por ser uma progressão geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$ converge em $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$, logo:

$$E(N) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$$

5. Substituindo os valores:

   $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} * 1/6$

   $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-1/240}} * 1/6$

```
ey = 1/(1 - exp(-1/240)) * 1/6
```

$E(Y) \approx 40.083$

### Resposta B

Utilizando as informações calculadas no item anterior, o número esperado de lançamentos do dado até a lâmpada se apagar é:

$E(N) \approx 240.5$

---

## CheatSheet

Dado $X$ e $Y$ variáveis aleatórias:

### Esperança Condicional

- $X$ e $Y$ v.a.'s discretas

$$E(X|Y=y) = \sum_{n=1}^{\infty} x \cdot f(x|Y=y_n)dx$$

- $X$ e/ou $Y$ v.a.'s contínuas

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|Y=y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x|Y=y)$$

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y=y_n) \cdot E(X|Y=y_n)$$

### Função de Densidade de Probabilidade Condicional

$$f(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

#### Função de Densidade de Probabilidade Conjunta

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

### Função de Densidade de Probabilidade Marginal

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

## Função de Distribuição Acumulada Condicional

$$F(x|Y=y) = P(X \leq x|Y=y) = \int_{-\infty}^{x} f(x|Y=y)dx$$

### Função de Distribuição Acumulada Conjunta

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

### Função de Distribuição Acumulada Marginal

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)dy$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)dx$$