Probabilidade Condicional

Cálculo de Probabilidade 2

Tailine J. S. Nonato

Conteúdo

Probabilidade condicional é a probabilidade de um evento ocorrer, dado que outro evento já ocorreu. A probabilidade condicional é denotada por P(A|B), que é a probabilidade de A ocorrer dado que B já ocorreu. A fórmula para calcular a probabilidade condicional é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Existem algumas propriedades, são elas:

i. Se A e B são eventos independentes, então a probabilidade condicional de A dado B é igual à probabilidade de A, ou seja, P(A|B) = P(A).

ii. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, não podem ocorrer simultaneamente, então a probabilidade condicional de A dado B é igual a zero, ou seja, P(A|B) = 0.

iii. Se A e B são eventos complementares, então a probabilidade condicional de A dado B é igual a 1 menos a probabilidade de A, ou seja, P(A|B) = 1 - P(A).

Importante também descrever a propriedade multiplicativa, que é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

Exemplos

Exemplo 1

Considere uma urna “A” tem 5 bolas brancas e 7 bolas pretas. A urna “B” tem 3 bolas brancas e 12 bolas pretas. Joga-se uma moeda honesta, se der coroa retira-se uma bola da urna B, se der cara retira-se uma bola da urna A.

A. Suponha que a bola retirada foi branca. Qual a probabilidade de ter sido retirada da urna B?

B. Suponha que a bola retirada foi preta. Qual a probabilidade de ter sido retirada da urna A?

Resposta A

A probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna B, dado que a bola retirada foi branca, pode ser calculada usando a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(B|Branca) = P(Branca|B) * \frac{P(B)}{P(Branca)}$$

Onde: $P(B|Branca)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna B, dado que a bola retirada foi branca. $P(Branca|B)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola branca da urna B. $P(B)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna B. $P(Branca)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola branca.

$P(Branca|B) = 3/15$ porque a urna B tem 3 bolas brancas e 15 bolas no total. $P(B) = 1/2$ porque a moeda é honesta e tem 2 lados. $P(Branca) = (3/15) * (1/2) + (5/12) * (1/2)$ porque a probabilidade de retirar uma bola branca da urna B é 3/15 e a probabilidade de retirar uma bola branca da urna A é 5/12.

Substituindo, temos:

$$P(B|Branca) = (3/15) * \frac{(15/35)}{(8/35)}$$

$$P(B|Branca) = 0.2 * \frac{0.4286}{0.2286}$$

$$P(B|Branca) = 0.2 * 1.875$$

$$P(B|Branca) = 0.375$$

Resposta B

A probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna A, dado que a bola retirada foi preta, pode ser calculada usando a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(A|Preta) = P(Preta|A) * P(A)/P(Preta)$$

Onde: $P(A|Preta)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna A, dado que a bola retirada foi preta. $P(Preta|A)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola preta da urna A. $P(A)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola da urna A. $P(Preta)$ é a probabilidade de ter sido retirada uma bola preta.

$P(Preta|A) = 7/12$ porque a urna A tem 7 bolas pretas e 12 bolas no total. $P(A) = 1/2$ porque a moeda é honesta e tem 2 lados. $P(Preta) = (7/12) * (1/2) + (12/15) * (1/2)$ porque a probabilidade de retirar uma bola preta da urna A é 7/12 e a probabilidade de retirar uma bola preta da urna B é 12/15.

Substituindo, temos:

$$P(A|Preta) = (7/12) * \frac{(12/35)}{(17/35)}$$

$$P(A|Preta) = 0.5833 * \frac{0.3429}{0.4857}$$

$$P(A|Preta) = 0.5833 * 0.7059$$

$$P(A|Preta) = 0.4118$$

Exemplo 2

Urna de Poya: Uma urna tem 7 bolas brancas e 5 bolas pretas. Cada vez que uma bola é retirada, sua cor é anotada e ela é recolocada na urna com mais 2 outras bolas da mesma cor.

A. Qual é a probabilide de que as primeiras 2 bolas retiradas sejam pretas e as 2 seguintes sejam brancas?

Resposta A

A probabilidade pode ser calculada a partir da propriedade multiplicativa:

$$P(P_1; P_2; B_3; B_4) = P(P_1) * P(P_2|P_1) * P(B_3|P_1; P_2) * P(B_4|P_1; P_2; B_3)$$

Tem-se que:

$$P(P_1) = 5/12$$

$P(P_2|P_1) = 7/14$

$P(B_3|P_1; P_2) = 7/16$

$P(B_4|P_1; P_2; B_3) = 9/18$

Substituindo, temos:

$P(P_1; P_2; B_3; B_4) = (5/12) * (7/14) * (7/16) * (9/18)$

$P(P_1; P_2; B_3; B_4) = 0.2083$

Exemplo 3

Uma questão de Verdadeiro ou Falso foi aplicada para 2 pessoas em um jogo de perguntas. Ambos sabem a resposta correta de forma independente com probabilidade p.

A. Qual das seguintes estratégias é mais eficaz para ganhar o jogo: i. escolher 1 pessoa para responder a pergunta ou ii. ambos pensam e dão a resposta em comum se estiverem de acordo ou decidem na moeda se discordarem?

Resposta A

Descrevendo os eventos, tem -se que:

$A =$ Ambos concordam e acertam a resposta

$B =$ Ambos concordam e erram a resposta

$C =$ Discordam

$D =$ Ambos acertam a resposta

Na opção i, $P(G)$ será a probabilidade da (uma) pessoa escolhida acertar, logo:

$P(G) = p$

Na opção ii, $P(G)$ será a probabilidade de G dado A, B e C, logo:

$P(G) = P(A)P(G|A) + P(B)P(G|B) + P(C)P(G|C)$

$P(G) = p^2 \cdot 1 + 0 + p(1-p) + (1-p)p \cdot (1/2)$

$P(G) = p^2 + 2p(1-p) \cdot 1/2$

$P(G) = p^2 + p(1-p)$

$$P(G) = p$$

Logo, é possível observar que as duas opções são equivalentes, tendo a mesma probabilidade de acerto.