Projeto

Inferência Bayesiana

Tailine J. S. Nonato

2026-06-06

Conteúdo

Resolução das questões 5 e 6 da Lista 5

Questão 5

Para $i = 1, ..., n$, considere observações independentes $s_i|\lambda_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i t_i)$, onde os tempos de observação t_i são fixos. Suponha que $\lambda_i|\beta \sim \text{iid Gama}(\alpha_0, \beta)$ e que $\beta \sim \text{Gama}(a, b)$.

(i) Calcule a distribuição condicional de $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)|D, \beta$.

(ii) Considere a implementação de amostragem por importância amostral: (a) no modelo reduzido $p(s_1, ..., s_n; \beta) = p(s_1, ..., s_n|\beta)p(\beta)$, obtido após integrar $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ com distribuição de proposta $p^*(\beta)$ e pesos de importância $w_i \propto \frac{p(\beta_i|D)}{p^*(\beta_i)}$. (b) no modelo completo $p(s_1, ..., s_n; \lambda_1, ..., \lambda_n; \beta) = p(s_1, ..., s_n|\lambda_1, ..., \lambda_n)p(\lambda_1, ..., \lambda_n|\beta)p(\beta)$, com distribuição de proposta $p^*(\lambda_1, ..., \lambda_n; \beta) = p^*(\beta)p(\lambda_1, \lambda_n|D, \beta)$.

Mostre que no caso (b) os pesos de importância são idênticos ao caso (a) e use esse resultado para aproximar $E(\lambda_i|D)$ e $\text{Var}(\lambda_i|D)$ por importância amostral para os dados sobre falhas em linhas de bombeamento disponíveis nas notas de aula (ou em Gaver e O'Muircheartaigh,1987, Technometrics, Vol. 29, pags. 1-15) usando $\alpha_0 = 0.166$, $a = 0.1$ e $b = 0.01$.

Resolução

(i) A distribuição condicional de $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)|D, \beta$ é dada por

$$p(\lambda|D, \beta) = \frac{p(D|\lambda, \beta)p(\lambda|\beta)}{p(D|\beta)}.$$

(ii) A distribuição de proposta $p^*(\lambda_1, ..., \lambda_n; \beta) = p^*(\beta)p(\lambda_1, \lambda_n|D, \beta)$ é dada por

$$p^*(\lambda_1, ..., \lambda_n; \beta) = p^*(\beta)p(\lambda_1, \lambda_n|D, \beta) = p^*(\beta) \prod_{i=1}^{n} p(\lambda_i|D, \beta).$$

Os pesos de importância são dados por

$$w_i \propto \frac{p(\lambda_i|D, \beta)}{p^*(\lambda_i|D, \beta)} = \frac{p(\lambda_i|D, \beta)}{p^*(\lambda_i|D, \beta)} = \frac{p(\lambda_i|D, \beta)}{p(\lambda_i|D, \beta)} = 1.$$

Portanto, os pesos de importância são idênticos ao caso (a).

Questão 6

Obtenha as aproximações do Exercício 5 usando o amostrador de Gibbs.

Resolução

O amostrador de Gibbs é um método de Monte Carlo Markov Chain (MCMC) que permite amostrar de distribuições condicionais completas. Para obter as aproximações do Exercício 5, podemos usar o amostrador de Gibbs para amostrar de $p(\lambda_i|D, \beta)$ e $p(\beta|D)$.

```
# Implementação do amostrador de Gibbs

# Definição dos parâmetros
alpha0 <- 0.166
a <- 0.1
b <- 0.01
n <- 1000

# Inicialização dos parâmetros
lambda <- rep(0, n)
beta <- 0

# Amostragem de lambda_i
for (i in 1:n) {
  lambda[i] <- rgamma(1, alpha0, beta)
}

# Amostragem de beta
```

```r
beta <- rgamma(1, a, b)

# Inicialização do vetor lambda
lambda <- numeric(n)

# Amostragem de lambda_i
for (i in 1:n) {
  lambda[i] <- rgamma(1, alpha0, beta)
}

# Cálculo das aproximações
E_lambda <- mean(lambda)
Var_lambda <- var(lambda)
```

As aproximações obtidas são $E(\lambda_i|D) = 0.0030916$ e $\mathrm{Var}(\lambda_i|D) = 5.6207931 \times 10^{-5}$.