Delineamento e Análise de Experimentos

Professora Juliana Betini Fachini Gomes
e-mail: jfachini@unb.br

Brasília - 2023

Experimentos Fatorias

- O caso mais simples de experimentos fatoriais envolvem apenas dois fatores: fator A com a níveis e fator B com b níveis;
- Totalizando ab combinações de tratatmentos;
- Cada replicação do experimento contém todas as combinações de tratamento ab. No geral, existem n réplicas.

- Seja y_{ijk} a resposta observada quando o fator A está no i-ésimo nível ($i = 1, 2, \ldots, a$) e o fator B está no j-ésimo nível ($j = 1, 2, \ldots, b$) para a k-ésima repetição ($k = 1, 2, \ldots, n$);

- As abn observações são selecionadas aleatoriamente segundo um experimento inteiramente casualizado.

O modelo de efeitos é definido por:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \tag{1}$$

em que $i = 1, 2, ..., a; j = 1, 2, ..., b; k = 1, 2, ..., n$; μ é a média geral, τ_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A; β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B; $(\tau\beta)_{ij}$ é o efeito da interação entre τ_i e β_j e ε_{ijk} é o componente de erro aleatório.

$\rightarrow$ Ambos os fatores são assumidos ser fixos, o efeito de cada tratamento é um desvio da média geral, então $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ e $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$;

$\rightarrow$ Similarmente os efeitos da interação são fixos e são definidos como $\sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0$.

As hipótese de interesse são definidas por:

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0, \\ H_1 : \exists \tau_i \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_b = 0, \\ H_1 : \exists \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0, \quad \text{para todo } i, j \\ H_1 : \exists (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

O que fazer quando existe um fator de incômodo?

Nessa situação é indicado utilizar Experimentos em Blocos!!!

O modelo com dois fatores em blocos é definido por:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \varepsilon_{ijk}, \tag{2}$$

em que $i = 1, 2, ..., a; j = 1, 2, ..., b; k = 1, 2, ..., n$; μ é a média geral, τ_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A; β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B; $(\tau\beta)_{ij}$ é o efeito da interação entre τ_i e β_j, δ_k é o efeito do k-ésimo bloco e ε_{ijk} é o componente de erro aleatório.

- Dentro do bloco, a ordem em que as combinações de tratamento são executados é completamente aleatório.

- O modelo (2) assume que a interação entre blocos e tratamentos é insignificante;

- Essa suposição foi assumida anteriormente na análise de experimentos em blocos casualizados.

ANOVA

TABELA 1: Tabela de Análise de Variância para dois fatores em Blocos casualizados

Fonte de Variação	SQ	g.l.	QM	E[QM]	F
Bloco	SQ_{Bloco}	$n-1$	QM_{Bloco}	$\sigma^2 + ab\sigma_\delta^2$	
Fator A	SQ_A	a - 1	QM_A	$\sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$	$\frac{QM_A}{QM_{Res}}$
Fator B	SQ_B	b - 1	QM_B	$\sigma^2 + \frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}$	$\frac{QM_B}{QM_{Res}}$
Interação AB	SQ_{AB}	(a - 1)(b-1)	QM_{AB}	$\sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{QM_{AB}}{QM_{Res}}$
Resíduo	SQ_{Res}	(ab - 1)(n-1)	QM_{Res}	σ^2	
Total	SQ_T	$abn-1$			

ANOVA

- As somas de quadrados são definidas por:

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abn}$$

$$SQ_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abn}$$

$$SQ_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abn}$$

$$SQ_{AB} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abn} - SQ_A - SQ_B$$

ANOVA

$$SQ_{Bloco} = \frac{1}{ab}\sum_{k=1}^{n} y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SQ_{Res} = SQ_T - (SQ_A + SQ_B + SQ_{AB} + SQ_{Bloco})$$

Comparações de médias

- Caso seja verificado pela ANOVA a diferença entre as médias de tratamentos;
- Pode-se utilizar todas as técnicas de comparações múltiplas estudadas anteriormente;
- Porém, deve-se realizar as modificações necessárias em relação ao número de repetições e número de graus de liberdade.

Diagnóstico do Modelo

- Verificar se os pressupostos:
  - Normalidade;
  - Independência;
  - Homogeneidade;
  - Aditividade entre bloco e efeito dos fatores;

são válidos utilizando as técnicas estudadas anteriormente.

Comos escolher o tamanho da amostra?

Tamanho da amostra

- A probabilidade do erro tipo II do modelo de efeitos fixos é definida por:

$$\begin{aligned} \beta &= P\{\text{não rejeitar} H_0 | H_0 \text{é falsa}\} \\ &= P\{F_0 < F_{\text{crítico}} | H_0 \text{é falsa}\} \end{aligned} \quad (3)$$

Tamanho da amostra

- Para avaliar a probabilidade do erro tipo II, definida na equação (3), é preciso conhecer a distribuição da estatística do teste F_0 se a hipótese nula for falsa;
- Porém, em experimentos fatorias temos mais tem um teste F de interesse:

Caso 1 Teste F para fator A;
Caso 2 Teste F para fator B;
Caso 3 Teste F para interação AB;

Tamanho da amostra - Caso 1

- O parâmetro de não centralidade da distribuição F pode ser obtido ao calcular:

$$E\left[\frac{SQ_A}{\sigma^2}\right],$$

- E esse parâmetro será igual a:

$$\delta_A = \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{\sigma^2}, \tag{4}$$

- É possível observar que sob H_0, a equação (4) é igual a 0.

Tamanho da amostra - Caso 2

- O parâmetro de não centralidade da distribuição F pode ser obtido ao calcular:

$$E\left[\frac{SQ_B}{\sigma^2}\right],$$

- E esse parâmetro será igual a:

$$\delta_B = \frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{\sigma^2}, \tag{5}$$

- É possível observar que sob H_0, a equação (5) é igual a 0.

Tamanho da amostra - Caso 3

- O parâmetro de não centralidade da distribuição F pode ser obtido ao calcular:

$$E\left[\frac{SQ_{AB}}{\sigma^2}\right],$$

- E esse parâmetro será igual a:

$$\delta_{AB} = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{\sigma^2}, \tag{6}$$

- É possível observar que sob H_0, a equação (6) é igual a 0.

É possível experimento fatorial com dois fatores de incômodo?

Nessa situação é indicado utilizar Experimentos em Quadro Latino!!!

- Em Experimentos em Quadro Latino temos duas restrições de aleatorização (linha e coluna), cada uma com p níveis;

- Em Experimentos Fatoriais temos $abc...m$ combinações de tratamentos;

- Então, para poder executar um Experimentos Fatorial em Quadro Latino é preciso que $p = abc...m$;

- Considere uma modificação do experimento de detecção de alvo por radar;
- Os fatores neste experimento são o tipo de filtro (dois níveis) e a desordem do solo (três níveis), e operadores são considerados como blocos.
- Suponha agora que, devido ao tempo de configuração necessário, apenas seis operações podem ser feitas por dia.
- Assim, os dias tornam-se uma segunda restrição de aleatorização, resultando no experimento em quadrado latino 6×6.

FIGURE: Tabela 3 - Dados do nível de intensidade na detecção do alvo em Quadrado Latino

Radar Detection Experiment Run in a 6 × 6 Latin Square

	Operator					
Day	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	$A(f_1g_1 = 90)$	$B(f_1g_2 = 106)$	$C(f_1g_3 = 108)$	$D(f_2g_1 = 81)$	$F(f_2g_3 = 90)$	$E(f_2g_2 = 88)$
2	$C(f_1g_3 = 114)$	$A(f_1g_1 = 96)$	$B(f_1g_2 = 105)$	$F(f_2g_3 = 83)$	$E(f_2g_2 = 86)$	$D(f_2g_1 = 84)$
3	$B(f_1g_2 = 102)$	$E(f_2g_2 = 90)$	$G(f_2g_3 = 95)$	$A(f_1g_1 = 92)$	$D(f_2g_1 = 85)$	$C(f_1g_3 = 104)$
4	$E(f_2g_2 = 87)$	$D(f_2g_1 = 84)$	$A(f_1g_1 = 100)$	$B(f_1g_2 = 96)$	$C(f_1g_3 = 110)$	$F(f_2g_3 = 91)$
5	$F(f_2g_3 = 93)$	$C(f_1g_3 = 112)$	$D(f_2g_1 = 92)$	$E(f_2g_2 = 80)$	$A(f_1g_1 = 90)$	$B(f_1g_2 = 98)$
6	$D(f_2g_1 = 86)$	$F(f_2g_3 = 91)$	$E(f_2g_2 = 97)$	$C(f_1g_3 = 98)$	$B(f_1g_2 = 100)$	$A(f_1g_1 = 92)$

- Na Tabela 3 as letras minúsculas f_j e g_k são usadas para representar a combinação dos tratamentos. Em que f_j representa o j-ésimo nível de tipo de filtro e g_k representa o k-ésimo nível de agrupamento de solo.

O modelo estatístico para esse experimento é definido por:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + (\tau\beta)_{jk} + \theta_l + \varepsilon_{ijkl}, \tag{7}$$

em que $i = 1, 2, ..., p, j = 1, 2, ..., a$; $k = 1, 2, ..., b$; $l = 1, 2, ..., p$; μ é a média geral, α_i é o efeito da i-ésima linha, τ_j é o efeito do j-ésimo nível do fator A; β_k é o efeito do k-ésimo nível do fator B; $(\tau\beta)_{jk}$ é o efeito da interação entre τ_j e β_k, θ_l é o efeito da l-ésima coluna e ε_{ijk} é o componente de erro aleatório.