Universidade de Brasília
Professor: Eduardo A. Silva

Cálculo de Probabilidade 2

Esperança condicional

Questão 1. Calcule a função geradora de momentos das variáveis aleatórias: Binomial(n, p), Poisson(λ), Geométrica(p), Uniforme(a, b), Exponencial(λ), Gama(s, λ), Normal(μ, σ^2).

Questão 2. Usando o resultado obtido no item anterior calcule EX^{2024} onde $X \sim$ Normal$(0, 1)$. Encontre também EX^{2024} onde $X \sim$ Exp(λ)

Questão 3. Suponha X uma variável aleatória com função geradora de momentos $M(t) = \mathbb{E}^{tX}$. Então temos que, para todo $t > 0$,

$$[X \geq a] = [e^{tx} \geqslant e^{ta}].$$

Assim temos que

$$\mathbb{P}[X \geqslant a] = \mathbb{P}[e^{tX} \geqslant e^{ta}] \leqslant \mathbb{E}e^{tX}/e^{ta},$$

onde a última desigualdade acima decorre da desigualdade de Markov. Analogamente provamos para todo $t < 0$ que

$$\mathbb{P}[X \leqslant a] \leqslant \mathbb{E}e^{tX}/e^{ta}.$$

Desse modo temos as **cotas de Chernoff**:

$$\mathbb{P}[X \geqslant a] \leqslant M(t)e^{-ta}, \quad \forall t > 0$$

$$\mathbb{P}[X \leqslant a] \leqslant M(t)e^{-ta}, \quad \forall t < 0.$$

Como os limites de Chernoff são válidos para todo t, obtemos a melhor cota para $\mathbb{P}[X \geqslant a]$ quando usando o t que minimiza $M(t)e^{-ta}$.

Calcule os limites de Chernoff de ambas as variáveis aleatórias abaixo e em cada caso encontre t que otimiza as cotas de Chernoff.

a) Variável aleatória Normal$(0, 1)$;

b) Variável aleatória Poisson(λ).

Questão 4. Suponha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de v.a independentes assumindo os valores 1 e -1 ambos com probabilidade $1/2$. Denote por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Utilize as cotas de Chernoff para obter uma estimativa para $\mathbb{P}[S_n \geq a]$.

Questão 5. Calcule a função geradora de momentos das variáveis aleatórias: Binomial(n, p), Poisson(λ), Geométrica(p), Uniforme(a, b), Exponencial(λ), Gama(s, λ), Normal(μ, σ^2).

Questão 6. Seja Y uma variável aleatória uniforme no intervalo $(0, 1)$. Dado que $Y = p$ temos que a variável aleatória X tem distribuição binomial parâmetros (n, p). Mostre que X assume qualquer um dos valores $0, 1, \ldots, n$, com igual probabilidade $1/(n + 1)$.

Questão 7. Mostre que as seguintes funções **não** podem ser funções característica de nenhuma variável aleatória X,

a) $\varphi(t) = \cos(t^2)$;

b) $\varphi(t) = \dfrac{1 + \cos(t)}{2}$;

Questão 8. Mostre que as funções abaixo **são funções características** de variáveis aleatórias, e em cada caso identifique a variável aleatória em questão:

a) $\varphi(t) = \cos^2(t)$;

b) $\varphi(t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{e^{it}}{2} + \dfrac{e^{2it}}{6}$.

Questão 9. Seja X uma variável aleatória tal que $EX^n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Obtenha a função característica de X;

b) Determine a função característica de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ em que as X_i são independentes com mesma distribuição que X.

Questão 10. As variáveis X_1 e X_2 tem função geradora de momentos conjunta $M(t_1, t_2) = \mathbb{E}e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}$ em algum aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo a origem $(0, 0)$. Defina $K(t_1, t_2) = \log M(t_1, t_2)$ onde essa expressão estiver bem definida. Mostre que:

a) $\dfrac{\partial}{\partial t_i} K(t_1, t_2)\Big|_{t_1 = t_2 = 0} = \mathbb{E}X_i$;

b) $\dfrac{\partial}{\partial t_i^2} K(t, s)\Big|_{s=0} = \mathrm{Var} X_i$;

c) $\dfrac{\partial}{\partial t_1 \partial t_2} K(t_1, t_2)\Big|_{t_1 = 0, t_2 = 0} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Questão 11. Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias independentes com $X_j \sim N(\mu_j, 1)$, $j = 1, \ldots, n$. Defina $Y = X_1^2 + \ldots + X^{n2}$ e mostre que a função característica de Y é dada por:

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{(1 - 2it)^{n/2}} e^{it\theta/(1-2it)}.$$

onde $\theta = \mu_1^2 + \ldots + \mu_n^2$.