Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Lista de Exercícios 2 – Estatística Matemática

R. Vila

1. Verifique que $|X|$ é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, desde que X também seja.

2. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e sejam E e $F \subset \Omega$ com $E \in \mathscr{F}$ mas $F \notin \mathscr{F}$.

   (a) A função indicadora de E, $\mathbb{1}_E$, é variável aleatória?

   (b) A função indicadora de F, $\mathbb{1}_F$, é variável aleatória?

   Rpt. (a) Sim, (b) Não.

3. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, verifique se:

   (a) $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ é variável aleatória.

   (b) $X = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ é variável aleatória.

   Rpt. (a) Sim, (b) Sim.

4. Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade com $\Omega = (0, 2]$, $\mathscr{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ a σ-álgebra de Borel em Ω e $\mathbb{P}$ uma probabilidade arbitrária. Defina a função X como segue:

$$X(\omega) = \omega \mathbb{1}_A(\omega) + (\omega - 1)\mathbb{1}_{A^c}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega;$$

   com $A = \{\omega \in \Omega : 0 < \omega \leqslant 1\}$. Verifique que X é variável aleatória.

5. Verifique que uma variável aleatória X é discreta em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, se, e somente se, existir uma partição de eventos $A_1, A_2, \ldots$ em Ω e constantes $a_1, a_2, \ldots$, reais e distintas, tais que $X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i}$.

6. Para cada uma das expressões abaixo, verifique se são função de probabilidade. Caso não sejam, indique se uma multiplicação por alguma constante poderia torná-las função de probabilidade.

   (a) $p(x) = (\frac{1}{2})^x$, $x = 1, 2, \ldots$

   (b) $p(x) = \frac{|x|}{20}$, $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.

(c) $p(x) = \frac{x}{20}$, $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

(d) $p(x) = \frac{x-1}{2^x}$, $x = 2, 3, \dots$

Rpt. (a) Sim, (b) Sim, (c) Não. Tome a constante $20/15$, (d) Sim.

7. Obtenha o valor (ou valores) de c, para que as expressões abaixo sejam funções densidade.

(a) $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 < x < c; \\ 0, & x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant c. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1; \\ -cx, & -1 < x \leqslant 0; \\ c\mathrm{e}^{-6x}, & x > 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} cx^2, & -c < x < c; \\ 0, & x \leqslant -c \text{ ou } x \geqslant c. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} cx^2\mathrm{e}^{-x^3}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = (c+1)f_1(x) - cf_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, onde f_1 e f_2 são densidades.

Rpt. (a) $c = (4\pi n + \pi)/2$ com $n \in \mathbb{N}$, (b) $c = 3/2$, (c) $c = (3/2)^{1/4}$, (d) $c = 3$, (e) $c \in \mathbb{R}$.

8. Verifique se a função abaixo é função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \sin \pi(x-1), & 1 \leqslant x < 2; \\ 1 - \mathrm{e}^{-(x-2)}, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Rpt. Não.

9. Seja X uma variável aleatória contínua com densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{|x-\alpha|}{\beta}\right), & \alpha - \beta < x < \alpha + \beta; \\ 0, & x \leqslant \alpha - \beta \text{ ou } x \geqslant \alpha + \beta, \end{cases}$$

com $-\infty < \alpha < \beta$ e $\beta > 0$.

(a) Obtenha a função de distribuição de X.

(b) Determine q tal que $\mathbb{P}(X > q) = 0,25$.

Rpt. (a) $F(y) = \begin{cases} 0, & y < \alpha - \beta; \\ \frac{1}{\beta}\left[\frac{\beta}{2} + (y-\alpha) + \frac{(y-\alpha)^2}{2\beta}\right], & \alpha - \beta \leqslant y < \alpha; \\ \frac{1}{\beta}\left[\frac{\beta}{2} + (y-\alpha) - \frac{(y-\alpha)^2}{2\beta}\right], & \alpha \leqslant y < \alpha + \beta; \\ 1, & y \geqslant \alpha + \beta, \end{cases}$ (b) $q = \alpha + (1 - \sqrt{0.5})\beta \approx \alpha + 0,29\beta$.

10. Para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, seja X com função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \frac{\alpha x}{2}, & 0 < x \leqslant 1; \\ \frac{\alpha - 1 + x}{2}, & 1 < x \leqslant 2; \\ \frac{\alpha + 1 + (1-\alpha)(x-2)}{2}, & 2 < x \leqslant 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

(a) Verifique que $F(x)$ satisfaz as propriedades de função distribuição.

(b) A variável X é contínua? Caso positivo, encontre sua densidade.

Rpt. (a) Faça o gráfico e observe as propriedades, (b) Sim, $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2}, & 0 < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & 1 < x < 2; \\ \frac{1-\alpha}{2}, & 2 < x < 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

11. Uma variável aleatória contínua X tem a seguinte densidade:

$$f(x) = \begin{cases} c, & -1 \leqslant x < 0; \\ 2/3, & 0 \leqslant x < 1; \\ 2c, & 1 \leqslant x < 3/2; \\ 0, & x < -1 \text{ ou } x \geqslant 3/2. \end{cases}$$

(a) Determine o valor de c.

(b) Determine a função de distribuição F_X.

(c) Calcule $\mathbb{P}(X > -1/2 | X \leqslant 1/2)$.

(d) Qual valor de b tal que $\mathbb{P}(X > b) = \mathbb{P}(X \leqslant b)$?

Rpt. (a) $c = 1/6$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{x+1}{6}, & -1 \leqslant x < 0; \\ \frac{1}{6} + \frac{2x}{3}, & 0 \leqslant x < 1; \\ \frac{5}{6} + \frac{2(x-1)}{6}, & 1 \leqslant x < 3/2; \\ 1, & x \geqslant 3/2, \end{cases}$ (c) $5/6$, (d) $b = 1/2$.

12. Suponha que a variável aleatória Z_{μ,σ^2} tenha distribuição normal com valor esperado $\mu \in \mathbb{R}$ e variância $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Seja $W \in \{\alpha\sigma, -\alpha\sigma\}$, com $\alpha > 0$, a variável com distribuição de Bernoulli de parâmetro $p = 1/2$ e assuma que W é independente de Z_{μ,σ^2}. Obtenha a função de distribuição de $X = Z_{\mu,\sigma^2} + W$.

Rpt. $F_X(x) = \frac{1}{2} F_{Z_{\alpha\sigma-\mu,\sigma^2}}(x) + \frac{1}{2} F_{Z_{\alpha\sigma+\mu,\sigma^2}}(x)$.

13. Considere a variável $X \sim \exp(1/5)$. Defina a variável aleatória Y como segue

$$Y = \begin{cases} 0, & X < d; \\ X - d, & d \leqslant X < C + d; \\ C, & X \geqslant C + d, \end{cases}$$

onde $C, d > 0$ são constantes.

(a) Obtenha a função de distribuição F_Y.

(b) Decomponha F_Y nas partes discreta e absolutamente contínua.

Rpt. (a) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-(y+d)/5}, & 0 \leqslant y < C; \\ 1, & y \geqslant C. \end{cases}$

(b) $F_Y(y) = (1 - \mathrm{e}^{-d/5})F_{d1}(y) + \mathrm{e}^{-(C+d)/5}F_{d2}(y) + \mathrm{e}^{-d/5}(1 - \mathrm{e}^{-C/5})F_c(y)$, onde

$$F_{d1}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 1, & y \geqslant 0, \end{cases} \quad F_{d2}(y) = \begin{cases} 0, & y < C; \\ 1, & y \geqslant C \end{cases} \quad \text{e} \quad F_c(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ \frac{\mathrm{e}^{-d/5}(1-\mathrm{e}^{-y/5})}{\mathrm{e}^{-d/5}(1-\mathrm{e}^{-C/5})}, & 0 < y < C; \\ 1, & y \geqslant C. \end{cases}$$

14. Seja $X \sim U(-2, 2)$. Definimos a variável Y como segue

$$Y = \begin{cases} 0, & X < 0; \\ X, & 0 \leqslant X < 1; \\ 1, & X \geqslant 1. \end{cases}$$

(a) Obtenha a função de distribuição F_Y.

(b) Decomponha F_Y nas partes discreta e absolutamente contínua.

Rpt. (a) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \frac{y+2}{4}, & 0 \leqslant y < 1; \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$

(b) $F_Y(y) = \frac{2}{4}F_{d_1}(y) + \frac{1}{4}F_{d_2}(y) + \frac{1}{4}F_c(y)$, onde $F_{d_1}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 1, & y \geqslant 0 \end{cases}$, $F_{d_2}(y) = \begin{cases} 0, & y < 1; \\ 1, & y \geqslant 1 \end{cases}$ e $F_c(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ y, & 0 < y < 1; \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$

15. A função de distribuição da variável aleatória X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ p + (1-p)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}), & x \geqslant 0, \end{cases}$$

onde $p \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$. Decomponha F nas partes discreta e absolutamente contínua.

Rpt. $F(x) = pF_B(x) + (1-p)F_E(x)$, onde $B \sim \text{Bernoulli}(0)$ e $E \sim \exp(\lambda)$.

16. Considere a variável $X \sim N(0, 1)$. Defina a variável aleatória $Y = \max\{0, X\}$.

(a) Obtenha a função de distribuição F_Y.

(b) Decomponha F_Y nas partes discreta e absolutamente contínua.

Rpt. (a) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \Phi(y), & y \geqslant 0, \end{cases}$ onde $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x$.

(b) $F_Y(y) = \frac{1}{2}F_d(y) + \frac{1}{2}F_c(y)$, onde $F_d(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 1, & y \geqslant 0 \end{cases}$ e $F_c(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ 2\Phi(y) - 1, & y > 0. \end{cases}$

17. Seja X a variável aleatória com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^3, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}; \\ \frac{8x+7}{32}, & \frac{1}{2} \leqslant x < 2; \\ 1 - \frac{4}{x^5}, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Decomponha F nas partes discreta e absolutamente contínua.

Rpt. $F(x) = \frac{7}{32}F_{d1}(x) + \frac{5}{32}F_{d2}(x) + \frac{20}{32}F_c(x)$, onde

$$F_{d1}(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}; \\ 1, & x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \quad F_{d2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \frac{8x^3}{5}, & 0 < x < \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5}(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \leqslant x < 2; \\ 1 - \frac{32}{5x^5}, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

18. Seja X a variável aleatória com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right), & 0 \leqslant x < 1; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right), & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Decomponha F nas partes discreta e absolutamente contínua.

Rpt. $F(x) = \frac{1}{4}F_{d1}(x) + \frac{1}{4}F_{d2}(x) + \frac{1}{2}F_c(x)$, onde

$$F_{d1}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases} \quad F_{d2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

19. Seja X a variável aleatória com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{x}{5}, & 1 \leqslant x < 1.5; \\ \ln(x), & 1.5 \leqslant x < 2.25; \\ 1, & x \geqslant 2.25. \end{cases}$$

Decomponha F nas partes discreta e absolutamente contínua.

Rpt.

$$F(x) = \frac{1}{5}F_{d1}(x) + \left[\ln(1.5) - \frac{1.5}{5}\right]F_{d2}(x) + [1 - \ln(2.25)]F_{d3}(x) + \left[\frac{1.5-1}{5} + \ln(2.25) - \ln(1.5)\right]F_c(x),$$

onde

$$F_{d1}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases} \quad F_{d2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1.5; \\ 1, & x \geqslant 1.5, \end{cases} \quad F_{d3}(x) = \begin{cases} 0, & x < 2.25; \\ 1, & x \geqslant 2.25 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ \frac{x-1}{5[\frac{1.5-1}{5}+\ln(2.25)-\ln(1.5)]}, & 1 < x < 1.5; \\ \frac{\frac{1.5-1}{5}+\ln(x)-\ln(1.5)}{\frac{1.5-1}{5}+\ln(2.25)-\ln(1.5)}, & 1.5 \leqslant x < 2.25; \\ 1, & x \geqslant 2.25. \end{cases}$$

20. Determine a densidade de $Y = (b-a)X + a$, onde $b > a$ e $X \sim U[0,1]$. Faça o gráfico da função de distribuição de Y.

    Rpt. $Y \sim U[a, b]$.

21. Se X tem densidade $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|/2}/4$, $x \in \mathbb{R}$, qual a distribuição de $Y = |X|$?

    Rpt. $Y \sim \exp(1/2)$.

22. Verifique que a função

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x-y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    não é função de distribuição de um vetor aleatório.

    Rpt. Como feito em aula, veja que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 < X \leqslant 1, 0 < Y \leqslant 1) &= F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2} - 2(1 - \mathrm{e}^{-1}) < 0. \end{aligned}$$

23. Verifique que a seguinte função é função de distribuição de algum (X, Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-x})(1 - \mathrm{e}^{-y}), & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

    Rpt. Para $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$, use a seguinte fórmula:

$$\mathbb{P}(a_1 < X \leqslant b_1, a_2 < Y \leqslant b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

24. Ache a densidade conjunta e as distribuições marginais das variáveis aleatórias X e Y cuja função de distribuição conjunta está no Exercício 23. As variáveis X e Y são independentes?

    Rpt. $f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ As variáveis X e Y são independentes.

25. Uma urna contém três bolas numeradas 1,2 e 3. Duas bolas são tiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola tirada e Y o número da segunda.

    (a) Descreva a distribuição conjunta de X e Y.

    (b) Calcule $\mathbb{P}(X < Y)$.

    Rpt. (a) $p(x,y) = 1/6$, $\forall x \neq y$, e $p(x,y) = 0$, $\forall x = y$, (b) $\mathbb{P}(X < Y) = 1/2$.

26. Determine as distribuições marginais das variáveis aleatórias discretas X e Y definidas no Exercício 25. As variáveis X e Y são independentes?

    Rpt. As variáveis X e Y não são independentes.

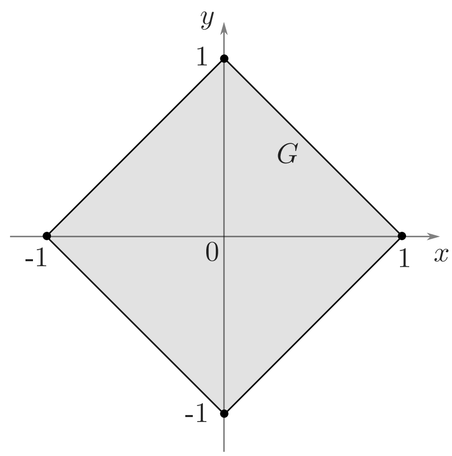
27. Verifique que, se a variável aleatória X é independente de si mesma, então X é constante com probabilidade 1.

    Rpt. Verifique que $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$, onde $x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 1\}$.

28. Suponhamos que os tempos que dois estudantes demoram para resolverem um problema sejam independentes e exponenciais com parâmetro $\lambda > 0$. Calcule a probabilidade do primeiro estudante demorar pelo menos duas vezes o tempo do segundo para resolver o problema.

    Rpt. $1/3$.

29. Um ponto é selecionado, ao acaso (isto é, conforme uma distribuição uniforme), do seguinte rombo G:



    Sejam X e Y as coordenadas do ponto selecionado.

    (a) Qual a densidade conjunta de X e Y?

    (b) Obtenha a densidade marginal de X.

    (c) X e Y são independentes?

    Rpt. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(G)}, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G, \end{cases}$ (b) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \text{ ou } x > 1; \\ x+1, & -1 < x \leqslant 0; \\ 1-x, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ (c) Não.