Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

# Lista de Exercícios 4 – Estatística Matemática

R. Vila

1. Sejam $X_1$ e $X_2$ variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição geométrica de parâmetro $0 < p < 1$:

$$\mathbb{P}(X_i = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \ i = 1, 2.$$

   (a) Calcule $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$ e $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.

   (b) Determine a distribuição condicional de $X_1$ dada $X_1 + X_2$.

   **Dica.** Use a soma geométrica: $\sum_{r=0}^{n-1} p^r = (1-p^n)/(1-p)$, $0 < p < 1$.

   **Rpt.** (a) $p/(2-p)$ e $(1-p)/(2-p)$, respectivamente, (b) $X_1 | X_1 + X_2 = n \sim U_D[\{0, 1, \ldots, n\}]$.

2. Uma certa lâmpada tem uma vida, em horas, seguindo uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$. Um jogador acende a lâmpada e, enquanto a lâmpada ainda estiver acesa, lança um dado equilibrado de 15 em 15 segundos. Qual o número esperado de 3's lançados pelo jogador até a lâmpada se apagar?

   **Rpt.** Seja $X$ o número total de 3's lançados pelo jogador até a lâmpada se apagar. Logo, $\mathbb{E}(X) = 40$.

3. Sejam $X$ e $Y$ independentes tais que $X \sim \text{bin}(m, p)$ e $Y \sim \text{bin}(n, p)$. Obtenha a distribuição condicional de $X$ dada $X + Y$. Qual o nome desta distribuição?

   **Dica.** Use a identidade de Vandermonde: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$, $m, n, r = 0, 1, \ldots$.

   **Rpt.** $X | X + Y = r \sim \text{Hgeo}(m, m+n, r)$.

4. Sejam $X$ e $Y$ independentes tais que $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Obtenha a distribuição condicional de $X$ dada $X + Y$. Qual o nome desta distribuição?

   **Dica.** Use a expansão binomial: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

   **Rpt.** $X | X + Y = n \sim \text{bin}\big(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\big)$.

5. Suponha que o vetor $(X,Y)$ possua distribuição normal bivariada com densidade

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$

   (a) Encontre as densidades marginais de $X$ e $Y$.

   (b) Obtenha a distribuição condicional de $X$ dada $Y$.

   **Rpt.** (a) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, (b) $X|Y = y \sim N\big(\mu_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\big)$.

6. Considere o seguinte experimento de 2 etapas: primeiro, escolhe-se um ponto $x$ de acordo com a distribuição uniforme em $(0,1)$; depois escolhe-se um ponto $y$ de acordo com a distribuição uniforme em $(-x,x)$. Se o vetor $(X,Y)$ representar o resultado do experimento,

   (a) qual será a densidade conjunta de $X$ e $Y$?

   (b) A densidade marginal de $Y$?

   (c) A densidade condicional de $X$ dada $Y$?

   **Rpt.** (a) $f(x,y) = \frac{1}{2x}\mathbb{1}_{\{-x<y<x,\,0<x<1\}}$, (b) $f_Y(y) = \frac{1}{2}\log\big(\frac{1}{|y|}\big)\mathbb{1}_{\{-1<y<1\}}$, (c) $f_{X|Y}(x|y) = \big[x\log\big(\frac{1}{|y|}\big)\big]^{-1}\mathbb{1}_{\{0<x<1,\,-1<y<1\}}$;

7. Observam-se duas lâmpadas durante suas vidas úteis. Suponha as vidas independentes e exponenciais de parâmetro $\lambda$. Sejam $X$ o tempo de queima da primeira lâmpada a queimar e $Y$ o tempo de queima da segunda a queimar $(X \leqslant Y)$.

   (a) Qual a distribuição condicional de $X$ dada $Y$?

   (b) Qual a distribuição de $Y$ dada $X$?

   **Rpt.** (a) $\mathbb{P}(X \leqslant x|Y=y) = \begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda y}}, & 0 \leqslant x < y; \\ 1, & x \geqslant y, \end{cases}$ (b) $\mathbb{P}(Y \leqslant y|X=x) = \big[1-\mathrm{e}^{-\lambda(y-x)}\big]\mathbb{1}_{\{y \geqslant x\}}$.

8. Sejam $X$ e $Y$ o mínimo e o máximo de duas variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $\exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Verifique, de duas maneiras, que $Y - X|X \sim \exp(\lambda)$:

   (a) A partir da densidade conjunta de $X$ e $Y - X$.

   (b) Utilizando o princípio de substituição e o resultado do Exercício 7(b).

   **Rpt.** (a) Use o método do Jacobiano, (b) Aplicação direta do Exercício 7(b).

9. Verifique que, se $X$ é constante quase certamente, i.e., $\mathbb{P}(X = c) = 1$, então $\mathbb{P}(X = c|Y = y) = 1$. Deduza a propriedade: se $X = c$, para alguma constante $c$, então $\mathbb{E}(X|Y) = c$.

10. Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias tais que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ e $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Verifique que Cov$(X,Y)$ =Cov$(X, \mathbb{E}(Y|X))$.

11. Suponha que $X$ e $Y$ possuam densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{se } x^2 + y^2 \leqslant 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Obtenha a distribuição condicional de $Y$ dada $X$. Calcule $\mathbb{E}(Y|X)$.
   (b) $X$ e $Y$ são independentes? Por quê?
   (c) Verifique que $X$ e $Y$ são não correlacionadas.

   **Rpt.** (a) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{\{-\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2},\, -1<x<1\}}$; e $\mathbb{E}(Y|X) = 0$, (b) Não, (c) Aplique o Exercício 10.

12. Seja $Y$ uma variável aleatória discreta com $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/8$ e $\mathbb{P}(Y = 2) = 7/8$. Se $0 < p < 1$ e

$$X|Y = \begin{cases} 2Y, & \text{com probabilidade } p; \\ 3Y, & \text{com probabilidade } 1-p, \end{cases}$$

   determine $\mathbb{E}(X|Y)$.

   **Rpt.** $\mathbb{E}(X|Y) = (3-p)\,\mathbb{1}_{\{Y=1\}} + 2(3-p)\,\mathbb{1}_{\{Y=2\}}$.

13. Sejam $X \sim \exp(1)$ e $t > 0$ fixo. Encontre $\mathbb{E}(X|\max\{X,t\})$ e $\mathbb{E}(X|\min\{X,t\})$.

   **Rpt.** Sejam $U = \max\{X,t\}$ e $V = \min\{X,t\}$. Logo, $\mathbb{E}(X|U) = U\,\mathbb{1}_{\{U>t\}} + \frac{1-(t+1)\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathbb{1}_{\{U=t\}}$ e $\mathbb{E}(X|V) = V\,\mathbb{1}_{\{V<t\}} + (t+1)\,\mathbb{1}_{\{V=t\}}$.

14. Seja $(X,Y)$ um vetor aleatório bidimensional. Suponha que (i) $X \sim \exp(1/2)$ (ii) para cada $x > 0$, $Y|X = x \sim U[0,x^2]$.

   (a) Qual a distribuição de $Z = Y/X^2$?
   (b) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ e Cov$(X,Y)$.

   **Rpt.** (a) $\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ z, & 0 \leqslant z < 1; \\ 1, & z \geqslant 1, \end{cases}$ (b) $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(Y) = 4$ e Cov$(X,Y) = 16$.

15. Determine $\mathbb{E}(X|Y)$ e $\mathbb{E}(Y|X)$ no Exercício 6. Calcule Cov$(X,Y)$. As variáveis $X$ e $Y$ são independentes?

   **Rpt.** $\mathbb{E}(X|Y) = \left[\log\left(\frac{1}{|Y|}\right)\right]^{-1} \mathbb{1}_{\{-1<Y<1\}}$, $\mathbb{E}(Y|X) = 0$ e Cov$(X,Y) = 0$. As variáveis $X$ e $Y$ não são independentes.

16. (a) Verifique que, se $X$ e $Y$ são independentes, então

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_Y(x)]\,\mathrm{d}F_X(x).$$

   (b) Sejam $X$ e $Y$ independentes, $X$ exponencial de parâmetro $\lambda$ e $Y$ uniforme em $[0,\lambda]$, $\lambda > 0$. Obtenha $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X > Y)$ e $\mathbb{P}(X = Y)$.

   **Rpt.** (a) Use a Lei da Esperança Total, (b) $\mathbb{P}(X < Y) = (\lambda^2 + \mathrm{e}^{-\lambda^2} - 1)/\lambda^2$, $\mathbb{P}(X > Y) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda^2})/\lambda^2$ e $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

17. Seja $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y)$, onde $A$ é o triângulo com vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$. Encontre a densidade condicional $f_{Y|X}(y|x)$ e a esperança condicional $\mathbb{E}(Y|X=1)$.

    **Rpt.** $f_{Y|X}(y|x) = \frac{2}{2-x}\,\mathbb{1}_{\{0<y<\frac{2-x}{2},\,0<x<2\}}$ e $\mathbb{E}(Y|X=1) = 1/4$.

18. Seja $f_{X,Y}(x,y) = (x+y)\mathbb{1}_A(x,y)$, onde $A = [0,1]\times[0,1]$. Encontre $\mathbb{E}(X|Y=y)$, para cada $y \in \mathbb{R}$.

    **Rpt.** $\mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{3y+2}{6y+3}\,\mathbb{1}_{\{0<y<1\}}$.

19. Seja

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & x+2y \geqslant 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

    A funçaõ $F$ define uma função de distribuição no plano?

    **Rpt.** Não!, pois existe $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$ tal que $F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_1,a_2) < 0$.

20. Sejam $Y, Z$ variáveis aleatórias i.i.d, com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$. Denote $V = Y + Z$. Qual a densidade condicional de $Y$ dado $V$? Calcule $\mathbb{E}(Y|V)$.

    **Rpt.** $\mathbb{E}(Y|V) = \frac{V}{2}\,\mathbb{1}_{\{V>0\}}$.

21. O vetor $(X,Y)$ tem densidade conjunta $f$ dada por $f(x,y) = 1/4$ dentro do quadrado com vértices nos pontos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ no plano, e $f(x,y) = 0$ em outro caso. Encontre as densidades marginais de $X$ e $Y$, as duas densidades condicionais e verifique que $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(Y|X)$.

    **Rpt.** $f_X(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{\{-1<x<1\}}$, $f_Y(y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{\{-1<y<1\}}$, $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{\{-1<x,y<1\}}$ e $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{\{-1<x,y<1\}}$.

22. O vetor $(X,Y)$ tem densidade conjunta $f(x,y) = \frac{4}{3}[xy + (x^2/2)]$ se $0 < x < 1$, $0 < y < 2$, e $f(x,y) = 0$ em outro caso. Encontre $\mathbb{P}(Y < 1|X < 1/2)$.

    **Rpt.** $2/7$.

> **Definição.** Dizemos que a variável aleatória $X$ tem a distribuição de Cauchy com parâmetro $c > 0$, se sua densidade é dada por
>
> $$f_X(x) = \frac{c}{\pi(c^2+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

23. Considere o vetor bivariado $(X,Y)$ de Cauchy com densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{c}{2\pi}\,(c^2+x^2+y^2)^{-3/2}, \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ c > 0.$$

    (a) Verifique que as densidades marginais de $X$ e $Y$ têm distribuição de Cauchy com parâmetro $c > 0$.

(b) Determine $\mathbb{E}(X|Y)$ e $\mathbb{E}(Y|X)$.

(c) A propriedade básica $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}(X)$ não vale nesse caso. Existe alguma contradição?

**Rpt.** (a) Segue por critérios de integração, (b) $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(Y|X) = 0$, (c) Quebra de integrabilidade.

24. Seja $X$ uma variável aleatória com densidade $f_X(x) = 3x^2\,\mathbb{1}_{\{0<x<1\}}$. A densidade condicional de $Y$ dado $X = x$ é $f_{Y|X}(y|x) = (3y^2/x^3)\,\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$. Determine $\mathbb{E}(X|Y)$.

**Rpt.** $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{Y-1}{\log(Y)}\,\mathbb{1}_{\{0<Y<1\}}$.

25. Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathrm{e}^{-y}(1-\mathrm{e}^{-x})\,\mathbb{1}_{\{0<x\leqslant y,\, y\geqslant 0\}} + \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-y})\,\mathbb{1}_{\{0<y\leqslant x,\, x\geqslant 0\}}.$$

(a) Obtenha $\mathbb{E}(X|Y=y)$ para $y > 0$.

(b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y)$ e Var$(X|Y)$.

**Rpt.** (a) $\mathbb{E}(X|Y=y) = (\frac{y}{2}+1)\,\mathbb{1}_{\{y>0\}}$,

(b) $\mathbb{E}(X|Y) = (\frac{Y}{2}+1)\,\mathbb{1}_{\{Y>0\}}$ e Var$(X|Y) = (\frac{Y^2}{12}+1)\,\mathbb{1}_{\{Y>0\}}$.

26. As variáveis aleatórias $X$ e $Y$ têm segundo momento finito. Obtenha $\rho_{X,Y}$ no caso de $\mathbb{E}(X|Y) = 10 - Y$ e $\mathbb{E}(Y|X) = 7 - \frac{1}{4}X$.

**Rpt.** Aplicando o Exercício 10 temos que $\rho_{X,Y} = -1/2$.