# Lista 1

**Técnicas Computacionais em Estatística**

Tailine J. S. Nonato

April 8, 2025

## Lista 1 - Geração de NPA's (Números Pseudo-Aleatórios)

```r
# preparação do ambiente
set.seed(345)
```

### Exercício 1

A distribuição Laplace padrão tem densidade $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Use o método da transformada inversa para gerar uma amostra aleatória de tamanho 1000 dessa distribuição. Plote um histograma.

#### Resolução

A função de distribuição acumulada (cdf) da distribuição Laplace padrão é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Para $u \leq \frac{1}{2}$:

$$u = \frac{1}{2}e^{x} \Rightarrow x = \log(2u)$$

Para $u > \frac{1}{2}$:

$$u = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \Rightarrow x = -\log(2(1-u))$$

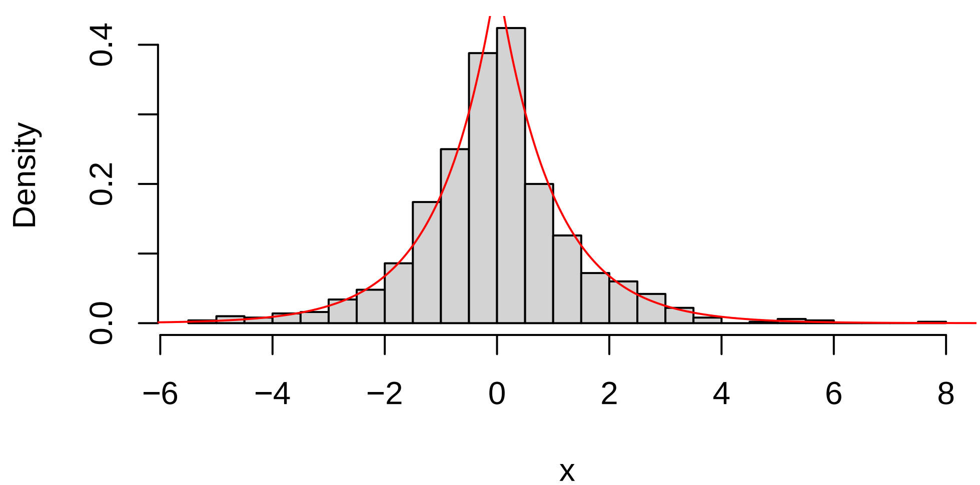
Logo, a inversa da cdf é dada por:

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \log(2u), & u \leq \frac{1}{2} \\ -\log(2(1-u)), & u > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim,

```
n <- 1000
u <- runif(n)
x <- ifelse(u <= 0.5, log(2*u), -log(2*(1 - u)))

t <- seq(-10, 10, 0.01)
hist(x, probability = TRUE, main = "", breaks = 30)
lines(t, 0.5 * exp(-abs(t)), col = "red")
```




### Exercício 2

Dada a densidade $f(x \mid \theta)$ e a densidade a priori $\pi(\theta)$, se observamos $x = x_1, \dots, x_n$, a distribuição a posteriori de $\theta$ é dada por:

$$\pi(\theta \mid x) = \pi(\theta \mid x_1, \dots, x_n) \propto \prod_i f(x_i \mid \theta)\pi(\theta),$$

onde $\prod_i f(x_i \mid \theta) = L(\theta \mid x_1, \dots, x_n)$ é a função de verossimilhança. Para estimar uma média normal, uma priori robusta é a Cauchy. Para $X_i \sim N(\theta, 1)$, $\theta \sim \mathrm{Ca}(0, 1)$, a distribuição a posteriori é:

$$\pi(\theta \mid x) \propto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\theta^2}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)^2/2}.$$

Seja $\theta_0 = 3$, $n = 10$, e gere $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta_0, 1)$. Use o algoritmo da Aceitação-Rejeição com uma candidata $\mathrm{Ca}(0, 1)$ para gerar uma amostra da distribuição a posteriori. Avalie quão bem o valor $\theta_0$ é recuperado. Estenda o código de maneira que $n = 10, 25, 50, 100$. Assuma que $M = L(\hat{\theta} \mid x_1, \dots, x_n)$, ou seja, $M$ é a função de verossimilhança avaliada no estimador de máxima verossimilhança.

### Resolução

Sendo f: densidade alvo (a qual se deseja simular) e g: densidade candidata ou instrumental, tem-se

$f$: $\pi(\theta \mid x)$, $\theta \sim \mathrm{Ca}(0, 1), com M = L(\hat{\theta} \mid x_1, \dots, x_n)$

$g$: $\mathrm{Ca}(0, 1)$, $\theta \sim \mathrm{Ca}(0, 1)$

## Exercício 3

Gere 200 observações aleatórias de uma distribuição normal multivariada de dimensão 3 com vetor de médias $\mu = (0, 1, 2)^\top$ e matriz de covariância:

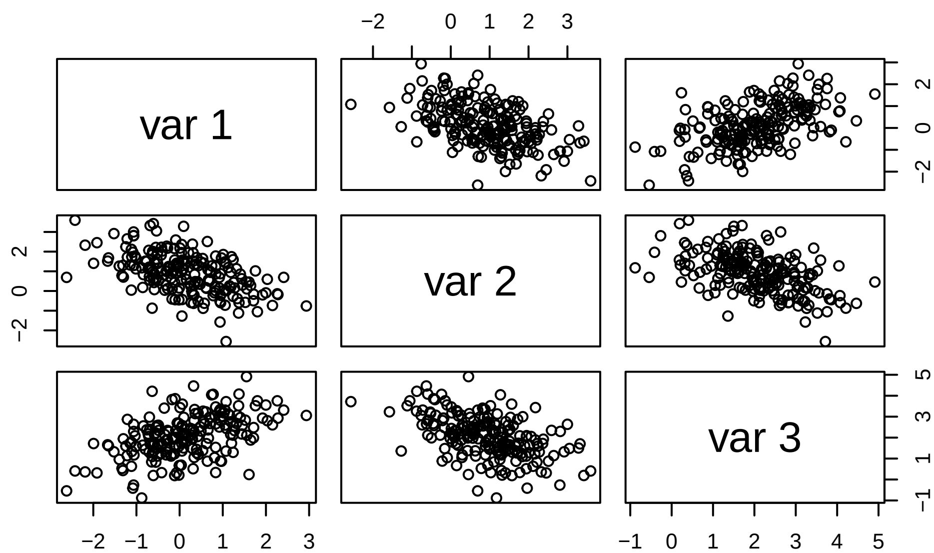
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Use o método de decomposição de Cholesky.

#### Resolução

```
rmvn.Choleski <- function(n, mu, Sigma) {
d <- length(mu)
Q <- chol(Sigma)
Z <- matrix(rnorm(n*d), nrow=n, ncol=d)
X <- Z %*% Q + matrix(mu, n, d, byrow=TRUE)
X}

Sigma <- matrix(c(1.0, -0.5, 0.5,
                  -0.5, 1.0, -0.5,
                  0.5, -0.5, 1.0), nrow = 3, byrow = TRUE)
mu <- c(0, 1, 2)
n <- 200
X <- rmvn.Choleski(n, mu, Sigma)
pairs(X)
```




### Exercício 4

Considere o artigo "Bivariate Birnbaum–Saunders distribution and associated inference" (Kundu et al., 2010), disponível em PDF, onde os autores apresentam uma formulação para a distribuição bivariada de Birnbaum–Saunders (BVBS). A geração de dados desta distribuição é descrita na equação (8) do artigo. Utilize a parametrização apresentada no artigo para simular 1.000 observações de um vetor aleatório bivariado $(T_1, T_2)$ com distribuição BVBS$(\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.8, \beta_1 = 1.0, \beta_2 = 2.0, \rho = 0.7)$. Apresente um gráfico de dispersão dos dados gerados.

### Resolução

```
alpha1 <- 0.5
alpha2 <- 0.8
beta1 <- 1
beta2 <- 2
rho <- 0.7
```

- Step 1: Generate independent $U_1$ and $U_2$ from N(0, 1).

```
U1 <- rnorm(1000, 0, 1)
U2 <- rnorm(1000, 0, 1)
```

- Step 2: Compute

$$Z_1 = \frac{\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho}}{2} * U1 + \frac{\sqrt{1+\rho} - \sqrt{1-\rho}}{2} * U2$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{1+\rho} - \sqrt{1-\rho}}{2} * U1 + \frac{\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho}}{2} * U2$$

```
Z1 <- (sqrt(1 + rho) + sqrt(1 - rho)) / 2 * U1 +
 (sqrt(1 + rho) - sqrt(1 - rho)) / 2 * U2
Z2 <- (sqrt(1 + rho) - sqrt(1 - rho)) / 2 * U1 +
(sqrt(1 + rho) + sqrt(1 - rho)) / 2 * U2
```

- Step 3: Obtain

$$T_i = \beta_i \left[ \frac{1}{2}\alpha_i Z_i + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\alpha_i Z_i\right)^2 + 1} \right]^2, \quad i = 1, 2$$

```r
T1 <- beta1 * (0.5 * alpha1 * Z1 + sqrt((0.5 * alpha1 * Z1)^2 + 1))^2
T2 <- beta2 * (0.5 * alpha2 * Z2 + sqrt((0.5 * alpha2 * Z2)^2 + 1))^2
```

- Gráfico de dispersão dos dados gerados:

```r
plot(T1, T2, xlab = "T1", ylab = "T2", main = "Gráfico de dispersão dos dados gerados")
```