

# Prova 1

## Técnicas Computacionais em Estatística

Prof. Saulo

May 6, 2025

### PROVA 1

#### Exercício 1 (2.0 pts)

A função densidade de probabilidade da distribuição Laplace( $\mu, b$ ) é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right)$$

Escreva um algoritmo que utilize o método da transformação inversa para gerar  $n$  números pseudo-aleatórios da Laplace( $\mu, b$ ).

#### Resolução

A função de distribuição acumulada (CDF)  $F(x) = P(X \leq x)$  é obtida como:

Para  $x < \mu$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{\mu - t}{b}\right) dt = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x - \mu}{b}\right)$$

Para  $x \geq \mu$ :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{b}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x - \mu}{b}\right)$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x - \mu}{b}\right), & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x - \mu}{b}\right), & x \geq \mu \end{cases}$$

Para aplicar o método da transformação inversa:

- Se  $u < 0.5$ , então  $x = \mu + b \ln(2u)$
- Se  $u \geq 0.5$ , então  $x = \mu - b \ln[2(1 - u)]$

**Algoritmo:**

1. Estabeleça valores para os parâmetros  $\mu$ ,  $b$  e o tamanho da amostra  $n$ .
  2. Para cada  $i = 1, \dots, n$ :
    - Gere  $u_i \sim U(0, 1)$
    - Se  $u_i < 0.5$ , compute  $x_i = \mu + b \ln(2u_i)$
    - Se  $u_i \geq 0.5$ , compute  $x_i = \mu - b \ln[2(1 - u_i)]$
    - Armazene  $x_i$  como uma amostra da  $\text{Laplace}(\mu, b)$ .
- 

**Exercício 2 (2.0 pts)**

Deseja-se gerar números pseudo-aleatórios associados à densidade

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}, \quad |x| \leq 1$$

utilizando o método da aceitação-rejeição com função candidata  $g(x) = U(-1, 1)$ .

**Resolução**

A densidade candidata é

$$g(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [-1, 1]$$

Para encontrar  $M$  tal que  $f(x)/g(x) \leq M$ :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} \cdot 2 = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - x^2}$$

O máximo ocorre em  $x = 0$ :

$$M = \frac{4}{\pi}$$

A razão utilizada no critério de aceitação é:

$$\frac{f(y)}{Mg(y)} = \frac{\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2}}{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{1 - y^2}$$

**Algoritmo:**

1. Defina o tamanho da amostra  $n$ .
  2. Enquanto o número de amostras aceitas for menor que  $n$ , repita:
    - Gere  $y \sim U(-1, 1)$ .
    - Gere  $u \sim U(0, 1)$ .
    - Se  $u < \sqrt{1 - y^2}$ , aceite  $y$  e armazene-o.
    - Caso contrário, rejeite o valor e volte ao passo anterior.
- 

### Exercício 3 (2.0 pts)

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da distribuição Rayleigh( $\sigma$ ), com densidade:

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad x \geq 0, \sigma > 0$$

Escreva um algoritmo que utiliza o método de Newton-Raphson para estimar o parâmetro  $\sigma$  via máxima verossimilhança.

### Resolução

A função de log-verossimilhança é:

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^n \left[ \log(x_i) - 2 \log(\sigma) - \frac{x_i^2}{2\sigma^2} \right]$$

Primeira derivada:

$$\ell'(\sigma) = -\frac{2n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Segunda derivada:

$$\ell''(\sigma) = \frac{2n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

### Algoritmo de Newton-Raphson:

1. Escolha um valor inicial  $\sigma^{(0)} > 0$  e uma tolerância  $\varepsilon$ .
2. Para  $t = 0, 1, 2, \dots$ , repita até convergência:
  - Calcule  $\ell'(\sigma^{(t)})$  e  $\ell''(\sigma^{(t)})$
  - Atualize:  $\sigma^{(t+1)} = \sigma^{(t)} - \frac{\ell'(\sigma^{(t)})}{\ell''(\sigma^{(t)})}$

- Verifique o critério de parada:  $\left| \frac{\sigma^{(t+1)} - \sigma^{(t)}}{\sigma^{(t)}} \right| < \varepsilon$
3. Retorne o valor estimado  $\hat{\sigma}$ .

#### Exercício 4 (1.0 pt)

Considere a integral definida por:

$$J(\beta) = \int_0^\infty \frac{(\ln t)^2}{1+t} e^{-\beta t} dt, \quad \beta > 0$$

Proponha um algoritmo para estimar essa integral usando Monte Carlo.

#### Resolução

A densidade da distribuição Exponencial( $\beta$ ) é:

$$f(t) = \beta e^{-\beta t}, \quad t > 0$$

Logo,

$$J(\beta) = \mathbb{E}_f \left[ \frac{(\ln T)^2}{1+T} \right], \quad T \sim \text{Exponencial}(\beta)$$

#### Algoritmo:

1. Defina  $h(t) = \frac{(\ln t)^2}{1+t}$
2. Gere  $n$  amostras  $t_i \sim \text{Exponencial}(\beta)$
3. Calcule a média amostral de  $h(t_i)$ :

$$\hat{J}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(t_i)$$

#### Exercício 5 (1.5 pts)

Descreva um algoritmo para estimar o poder de um teste estatístico utilizando o método de simulação de Monte Carlo, considerando uma hipótese alternativa fixa  $\theta = \theta_1$ .

### Algoritmo

1. Escolha o parâmetro sob a alternativa: defina  $\theta_1 \in \Theta$ .
2. Repita o processo  $m$  vezes (simulações):
  - Para cada simulação  $j = 1, \dots, m$ :
    - Gere uma amostra aleatória  $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$  sob  $\theta = \theta_1$ ;
    - Calcule a estatística de teste  $T_j$ ;
    - Compare com o valor crítico ao nível  $\alpha$ :
      - \* Se  $H_0$  for rejeitada, defina  $I_j = 1$ ; caso contrário,  $I_j = 0$ .
3. Estime o poder como:

$$\hat{\pi}(\theta_1) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I_j$$

---

### Exercício 6 (1.5 pts)

Seja  $\rho \in [-1, 1]$ , e  $X, \eta \sim N(0, 1)$  independentes. Defina:

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} \eta$$

O estimador da correlação entre  $X$  e  $Y$  é a correlação amostral:

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

**Proponha um algoritmo de Monte Carlo para estimar o viés de  $\hat{\rho}$  para diferentes valores de  $\rho \in [-1, 1]$ .**

### Algoritmo

1. Defina parâmetros da simulação: tamanho da amostra  $n$ ; número de simulações  $m$ ; e conjunto de valores de  $\rho \in [-1, 1]$ .
2. Para cada valor  $\rho_k$  do conjunto:
  - Inicialize um vetor para armazenar as estimativas  $\hat{\rho}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .
  - Para cada simulação  $j = 1, \dots, m$ :
    - Gere  $X^{(j)} \sim N(0, 1)$  (vetor de tamanho  $n$ )
    - Gere  $\eta^{(j)} \sim N(0, 1)$  (vetor de tamanho  $n$ )

- Calcule  $Y^{(j)} = \rho_k X^{(j)} + \sqrt{1 - \rho_k^2} \eta^{(j)}$
- Calcule  $\hat{\rho}^{(j)} = \text{cor}(X^{(j)}, Y^{(j)})$
- Estime o viés para  $\rho_k$ :

$$\text{viés}(\rho_k) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{\rho}^{(j)} - \rho_k$$