Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Lista de Exercícios 3 – Estatística Matemática

R. Vila

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $[\theta - 0.5, \theta + 0.5]$, $\theta \in \mathbb{R}$. Verifique que a distribuição de $X - Y$ não depende de θ, encontrando sua densidade.

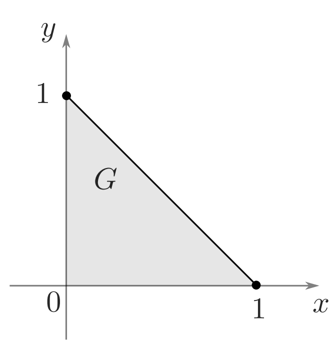
   Rpt. $f_{X-Y}(z) = \begin{cases} 1+z, & -1 \leqslant z < 0; \\ 1-z, & 0 \leqslant z < 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2. Seja X uma variável aleatória cuja função de distribuição F é contínua e invertível na reta. Verifique que a distribuição de $Y = F(X)$ é $U[0,1]$.

3. Sejam $X \sim \text{Poisson}(\alpha_1)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\alpha_2)$ variáveis aleatórias independentes. Verifique que $X + Y \sim \text{Poisson}(\alpha_1 + \alpha_2)$.

4. Sejam $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ variáveis aleatórias independentes. Verifique que $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

5. Seja G o seguinte triângulo:



   Suponha que X e Y tenham densidade conjunta $f(x, y) = c\mathbb{1}_G(x, y)$.

   (a) Determine o valor da constante c.

(b) Calcule a distribuição de X, a de Y e a de $Z = X + Y$.

(c) X e Y são independentes? Porque?

Rpt. (a) c=2, (b) $f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ z^2, & 0 \leqslant z < 1; \\ 1, & z \geqslant 1, \end{cases}$ (c) X e Y não são independentes.

6. Se X e Y são as coordenadas de um ponto selecionado, ao acaso, do círculo unitário $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, qual a distribuição da variável aleatória $Z = X^2 + Y^2$?

   Rpt. $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ z, & 0 \leqslant z < 1; \\ 1, & z \geqslant 1. \end{cases}$

7. Sejam $X \sim \text{Poisson}(5)$ e $Y \sim U[0, 1]$ variáveis aleatórias independentes. Ache a densidade de $Z = X + Y$.

   Rpt. $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \frac{e^{-5} 5^{\lfloor z \rfloor}}{\lfloor z \rfloor !}, & z \geqslant 0. \end{cases}$

8. Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ variáveis aleatórias independentes. Verifique que $U = (X + Y)/\sqrt{2}$ e $V = (X - Y)/\sqrt{2}$ também são independentes e $N(0, 1)$.

9. Sejam $X \sim U[0, 1]$ e $Y \sim U[0, 1]$ variáveis aleatórias independentes.

   (a) Ache a densidade conjunta de $W = X + Y$ e $Z = X - Y$.

   (b) As variáveis W e Z são independentes?

   Rpt. (a) $f_{W,Z}(w, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (w, z) \in G; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ onde

   $G = \{(w, z) : 0 < w < 1, -w < z < w \ \text{ ou } \ 1 < w < 2, w - 2 < z < 2 - w\}$.

   (b) As variáveis W e Z não são independentes.

10. Suponha que $X \sim U[0, 1]$. Calcule a densidade de $Y = X^4$ e a de $Z = 1/X$. As variáveis Y e Z possuem densidade conjunta? Por quê?

    Rpt. Veja que $f_{Y,Z}(y, z) = 0, \ \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2$.

11. Seja X uma variável aleatória possuindo densidade $f(x)$. Ache a densidade de $Y = |X|$.

    Rpt. $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y), & y > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

12. Sejam $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\lambda)$ variáveis aleatórias independentes. Verifique que $Z = X/(X + Y) \sim U[0, 1]$.

13. Se X possui densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi/2 < x < \pi/2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a densidade de $Y = \cos(X)$?

Rpt. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}[f(-\arccos(x)) + f(\arccos(x))], & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

14. Se X a variável aleatória com a densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a densidade de $Y = \sin(X)$?

Rpt. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

15. Sejam $X \sim U[0,1]$ e $Y \sim U[0,1]$ variáveis aleatórias independentes, e sejam $R = \sqrt{2\log(1/(1-X))}$ e $\Theta = \pi(2Y - 1)$.

(a) Verifique que $\Theta \sim U[-\pi, \pi]$ e que R tem distribuição de Rayleigh com densidade

$$f(r) = \begin{cases} r\mathrm{e}^{-r^2/2}, & r > 0; \\ 0, & r \leqslant 0. \end{cases}$$

(b) Verifique que $Z = R\cos(\theta)$ e $W = R\sin(\theta)$ são independentes com distribuição comum $N(0,1)$.

16. Sejam $X \sim \text{Gama}(\alpha_1, 1)$ e $Y \sim \text{Gama}(\alpha_2, 1)$ variáveis aleatórias independentes, com $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$. Verifique que $X + Y$ e X/Y são independentes e ache as suas distribuições.

Rpt. Se $U = X + Y$ e $V = X/Y$, veja que $U \sim \text{Gama}(\alpha_1 + \alpha_2, 1)$ e V tem densidade dada por:

$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)} v^{\alpha_1 - 1}(v+1)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}, & v > 0; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ onde $\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$.

17. Seja (X, Y) o vetor aleatório com distribuição uniforme sobre o triângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$; isto é, (X, Y) tem função de densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a densidade de $Z = X + Y$.

Rpt. $f_z(z) = \begin{cases} z, & 0 \leqslant z \leqslant 1; \\ 2 - z, & 1 \leqslant z \leqslant 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

18. Suponha que o vetor aleatório (X, Y) tem função de densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leqslant y \leqslant x < \infty; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine a densidade conjunta de $W = X + Y$ e $Z = X - Y$.

(b) Determine as densidades marginais de W e Z.

Rpt. (a) $f_{W,Z}(w,z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(w+z)/2}, & 0 \leqslant z \leqslant w < \infty; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(b) $f_W(w) = \begin{cases} e^{-w/2}(1 - e^{-w/2}), & w \geqslant 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ e $f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z \geqslant 0; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$

19. A variável aleatória X tem distribuição de Weibull se possui densidade

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Determine $\mathbb{E}(X)$.

Rpt. $\mathbb{E}(X) = \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})/\lambda^{1/\alpha}$.

20. Sejam $X \sim U[0,1]$ e $Y \sim U[0,1]$ variáveis aleatórias independentes. Calcule $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{E}(W)$, onde $Z = \min\{X, Y\}$ e $W = \max\{X, Y\}$.

Rpt. $\mathbb{E}(Z) = 1/3$ e $\mathbb{E}(W) = 2/3$.

21. Um jogador vai lançando uma moeda honesta. Ele para depois de lançar ou duas caras sucessivas ou duas coroas sucessivas. Seja X o número de lançamentos.

(a) Encontre a distribuição de X.

(b) Determine $\mathbb{E}(X)$.

Rpt. (a) $p_X(k) = 1/2^{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$, (b) $\mathbb{E}(X) = 3$.

22. Uma urna contém 3 bolas numeradas $1, 2, 3$. Uma pessoa tira uma bola e a devolve, tira outra e a devolve, continuando até tirar uma bola pela segunda vez. Seja X o número total de retiradas necessárias para obter essa repetição.

(a) Encontre a distribuição de X.

(b) Determine $\mathbb{E}(X)$.

Rpt. (a) $p_X(2) = 3/9$, $p_X(3) = 4/9$, $p_X(4) = 2/9$, (b) $\mathbb{E}(X) = 26/9$.

23. Suponha que a variável aleatória X tenha a seguinte densidade triangular:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 1 - x, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & x < -1 \text{ ou } x > 1. \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Rpt. $\mathbb{E}(X) = 0$ e $\mathrm{Var}(X) = 1/6$.

24. Encontre as variâncias de Z e W no Exercício 20.

Rpt. $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(W) = 1/18$.

25. Através de experimentos estatísticos, determina-se que a duração de um certo tipo de chamada telefônica satisfaz a relação $\mathbb{P}(T > t) = a\mathrm{e}^{-\lambda t} + (1-a)\mathrm{e}^{-\xi t}$, $t \geqslant 0$, com $0 \leqslant a \leqslant 1$, $\lambda > 0$, $\xi > 0$. Encontre a média e a variância de T.

Rpt. $\mathbb{E}(X) = (\frac{a}{\lambda} + \frac{1-a}{\xi})$ e $\mathrm{Var}(X) = 2[\frac{a}{\lambda^2} + \frac{1-a}{\xi^2}] - [\frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{(1-a)^2}{\xi^2}] - 2(\frac{a}{\lambda})(\frac{1-a}{\xi})$.

> **Observação.** Seja X uma variável aleatória seguindo uma distribuição binomial(n,p). Então X tem a mesma distribuição que $X_1 + \cdots + X_n$, onde as X_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas que assumem apenas os valores 0 e 1.

26. Calcule a esperança e a variância da variável aleatória X, com

   (a) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, onde $\lambda > 0$.
   (b) $X \sim \mathrm{binomial}(n,p)$, onde $p \in (0,1)$.
   (c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$.
   (d) $X \sim \mathrm{Gama}(\alpha, \beta)$, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.
   (e) $X \sim U[a,b]$, onde $a < b$.

Rpt. (a) $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$,

(b) $\mathbb{E}(X) = np$ e $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$,

(c) $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$,

(d) $\mathbb{E}(X) = \alpha/\beta$ e $\mathrm{Var}(X) = \alpha/\beta^2$,

(e) $\mathbb{E}(X) = (a+b)/2$ e $\mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$.

27. Sejam $X \in \{0,1\}$ e $Y \in \{0,1\}$ duas variáveis aleatórias dicotômicas. Se $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, então X e Y são independentes?

Rpt. Sim.

> **Observação.** Em geral, a resposta do Exercício 27 é válida, também, para variáveis aleatórias X e Y da forma: $X \in \{a,b\}$ e $Y \in \{c,d\}$; pois $\frac{X-a}{b-a} \in \{0,1\}$ e $\frac{Y-c}{d-c} \in \{0,1\}$.

28. Seja $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p), Y = 1 - X$ e $Z = XY$.

   (a) Encontre as seguintes funções de probabilidade conjunta: $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ e $\mathbb{P}(X = x, Z = z)$, para cada x, y, z.
   (b) X e Y são independentes?
   (c) X e Z são independentes?

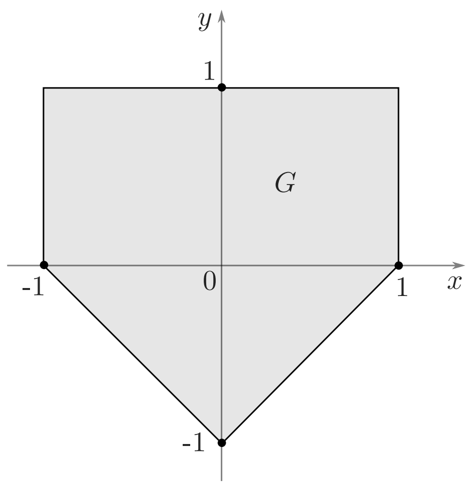
Rpt. (a)

$X \setminus Y$	0	1
0	0	$1-p$
1	p	0

$X \setminus Z$	0
0	$1-p$
1	p

(b) Não, (c) Sim.

29. Seja (X, Y) uniformemente distribuído na região G dada na seguinte figura:



(a) Encontre as densidades marginais de X e Y.

(b) Ache Cov(X, Y).

Rpt. (a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2+x}{3}, & -1 < x \leqslant 0; \\ \frac{2-x}{3}, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2(y+1)}{3}, & -1 < y \leqslant 0; \\ \frac{2}{3}, & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$

(b) Cov$(X, Y) = 0$.

30. Sejam $X \sim U[0,1]$ e $Y \sim U[0,1]$ variáveis aleatórias independentes, e sejam $X_{(1)} = \min\{X, Y\}$, $X_{(n)} = \max\{X, Y\}$. Determine o coeficiente de correlação $\rho_{X_{(1)}, X_{(n)}}$.

Rpt. $\rho_{X_{(1)}, X_{(n)}} = 1/2$.

31. Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $U[0,1]$. Determine a esperança e a variância de $W = (X+Y)Z$.

Rpt. $\mathbb{E}(W) = 1/2$ e Var$(W) = 5/36$.

32. Seja ρ o coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias X e Y. Se $Z = aX + b$ e $W = cY + d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, calcule $\rho_{Z,W}$.

Rpt. $\rho_{Z,W} = \rho$.

33. Sejam U, T e X três variáveis aleatórias (absolutamente) contínuas e não negativas. Denote por G_U e f_T às correspondentes funções de distribuição acumulada e de densidade para U e T. Para X defina a função real F_X como segue:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \displaystyle\int_0^{\frac{G_U(x)}{1-G_U(x)}} f_T(t)\,\mathrm{d}t, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

(a) Verifique que F_X é a função de distribuição acumulada de X.

(b) Se além do mais, $\mathbb{E}(T) < \infty$, $\mathbb{E}(U^p) < \infty$, $\forall p > 0$, e existe $a > 0$ tal que $G_U(a) > 0$, verifique que $\mathbb{E}(X^p) < \infty$.

Rpt. (b) Use a Desigualdade de Markov.