Categoria: Unidade I, Teorema Central do Limite e Método Delta,

---

Exercício

Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ retirada de uma população $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, na qual $\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \rho_{ij}$, atendendo às seguintes condições:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} = 0; \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = 0; \tag{2}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} = \gamma. \tag{3}$$

Com base nessas informações, determine a distribuição limite da razão

$$t_n = \frac{\bar{X}_n}{S_n/\sqrt{n}},$$

em que $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ e $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$.

Exercício

Seja $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots\}$ uma sequência IID de erros aleatórios não normais, na qual $\mathrm{E}[\varepsilon_n] = 0$ e $\mathrm{Var}[\varepsilon_n] = \sigma^2$, $\forall n \geq 0$, e considere a forma recursiva

$$X_n = \phi X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

para $n \geq 1$, em que $|\phi| < 1$ e $X_0 = \varepsilon_0$. Discuta se $X_n \xrightarrow{D}$ Normal. (Justifique sua resposta.)

Exercício

[Estatística do teste de Wilcoxon] Considerando uma sequência de variáveis aleatórias discretas independentes $X_1, \ldots, X_n$, tais que

$$\mathrm{P}(X_k = 0) = \mathrm{P}(X_k = k) = \tfrac{1}{2},$$

com respeito à soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, faça o que se pede a seguir.

i) Determine $\mathrm{E}[S_n]$ e $\mathrm{Var}[S_n]$.

ii) Verifique se a distribuição limite da soma S_n é normal ou não-normal.

Exercício

Seja X_n uma variável aleatória Beta(n,n), cuja função de densidade é

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(n,n)} x^{n-1}(1-x)^{n-1},$$

para $0 < x < 1$. Sabendo que podemos escrever

$$X_n = \frac{Y_n}{Y_n + Y_n^*},$$

em que Y_n e Y_n^* são variáveis aleatórias independentes que seguem distribuições χ^2 com $2n$ graus de liberdade, com a ajuda do teorema de Slutsky, mostre que

$$2\sqrt{2n}\left(X_n - \tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,1).$$

Exercício

Considerando uma amostra aleatória simples $X_1, \ldots, X_n$ retirada de uma distribuição absolutamente contínua com função de densidade desconhecida $f(x)$, tal que $||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq M < \infty$, tome seu estimador

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right),$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, em que $h_n > 0$ tal que $h_n \downarrow 0$ e $nh_n \uparrow \infty$ à medida de n aumenta, e $K \in L^2(\mathbb{R})$ é uma função real não negativa que possui as mesmas propriedades de uma função de densidade simétrica em torno de zero. Com base nessas informações, mostre que, para todo ponto de continuidade x de f, $\hat{f}(x) \xrightarrow{P} f(x)$.

Exercício

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples retirada de uma distribuição geométrica cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$\mathrm{P}(X = x) = (1-p)^x p,$$

na qual $0 < p < 1$ é o parâmetro desconhecido e $x = 0, 1, 2, \ldots$. Se $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$, com a ajuda do método delta, verifique se

$$p\sqrt{n} \cdot \frac{1/(\bar{X}+1) - p}{\sqrt{1-p}} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,1),$$

Exercício

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples retirada de uma população exponencial com função de distribuição de probabilidade acumulada $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, para $x > 0$. Considerando $\hat{\lambda} = 1/\bar{X} = n/\sum_{j=1}^{n} X_j$, com base no método delta, mostre que

$$\sqrt{n}\left(\hat{\lambda} - \lambda\right) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0, \lambda^2).$$

Exercício

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples retirada de uma população contínua com média μ, variância σ^2, função de distribuição de probabilidade acumulada representada como $F(x)$ e função de densidade $f(x)$, na qual $f(\mu) > 0$. Considere a transformação $U = F(\bar{X})$, na qual $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. Mostre que

$$\sqrt{n}\frac{F(\bar{X}) - F(\mu)}{\sigma f(\mu)} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,1).$$

Exercício

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples retirada de uma população contínua com função de distribuição de probabilidade acumulada $F(x)$. Considere a frequência acumulada que se define como

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x),$$

na qual $I(X_i \leq x) = 1$, se $X_i \leq x$; e $I(X_i \leq x) = 0$, se $X_i > x$, para todo x fixo (ou seja, $I(X_i \leq x)$ é uma função indicadora). Com base no teorema central do limite, mostre que

$$\sqrt{n}\frac{[\hat{F}(x) - F(x)]}{\sqrt{F(x)[1 - F(x)]}} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,1).$$

Exercício

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples retirada de uma distribuição normal com média nula e desvio padrão σ. Se $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, determine a forma da distribuição da integral aleatória na forma

$$Y_n = \int_{-\infty}^{\bar{X}_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}v$$

para n suficientemente grande.

Exercício

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples retirada de uma população com média μ e desvio padrão σ. Considerando que $\bar{X}$ denota a média amostral, determine a distribuição limite da diferença

$$\bar{X}^2 - \mu^2.$$

Exercício

Seja $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m$ uma distribuição de probabilidade empírica obtida por meio de uma amostra aleatória simples de tamanho n, na qual $\sum_{k=1}^m \hat{p}_k = 1$. Uma forma de medir a discrepância entre a distribuição empírica e uma distribuição de probabilidade hipotética denotada como $p_1, \ldots, p_m$ seria estatística qui-quadrado, definida como

$$\chi^2 = n \sum_{k=1}^m \frac{(\hat{p}_k - p_k)^2}{p_k}.$$

Para n suficientemente grande, essa estatística segue aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com $m-1$ graus de liberdade. Embora essa estatística apresente boas propriedades estatísticas, ela não é recomendada se houver pelo menos uma frequência hipotética p_k muito baixa, digamos, menor que $5/n$. Como uma alternativa, considere a divergência de Rényi de ordem α da distribuição empírica relativamente à hipotética dada por

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha - 1} \log \sum_{k=1}^m p_k^\alpha \hat{p}_k^{1-\alpha},$$

na qual $\alpha > 0$, sendo que

$$\lim_{\alpha \to 1} R_\alpha = \sum_{k=1}^m p_k \log \frac{p_k}{\hat{p}_k}.$$

Com a ajuda do método delta, estabeleça uma relação assintótica entre R_α e a estatística χ^2.