Prova 1

Técnicas Computacionais em Estatística

Prof. Saulo

May 6, 2025

PROVA 1

Exercício 1 (2.0 pts)

A função densidade de probabilidade da distribuição Laplace(μ, b) é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$$

Escreva um algoritmo que utilize o método da transformação inversa para gerar n números pseudo-aleatórios da Laplace(μ, b).

Resolução

A função de distribuição acumulada (CDF) $F(x) = P(X \leq x)$ é obtida como:

Para $x < \mu$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{\mu - t}{b}\right) dt = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)$$

Para $x \geq \mu$:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right)$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right), & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right), & x \geq \mu \end{cases}$$

Para aplicar o método da transformação inversa:

- Se $u < 0.5$, então $x = \mu + b \ln(2u)$
- Se $u \geq 0.5$, então $x = \mu - b \ln[2(1-u)]$

Algoritmo:

1. Estabeleça valores para os parâmetros μ, b e o tamanho da amostra n.
2. Para cada $i = 1, \dots, n$:
   - Gere $u_i \sim U(0,1)$
   - Se $u_i < 0.5$, compute $x_i = \mu + b \ln(2u_i)$
   - Se $u_i \geq 0.5$, compute $x_i = \mu - b \ln[2(1-u_i)]$
   - Armazene x_i como uma amostra da Laplace(μ, b).

Exercício 2 (2.0 pts)

Deseja-se gerar números pseudo-aleatórios associados à densidade

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \quad |x| \leq 1$$

utilizando o método da aceitação-rejeição com função candidata $g(x) = U(-1,1)$.

Resolução

A densidade candidata é

$$g(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [-1,1]$$

Para encontrar M tal que $f(x)/g(x) \leq M$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \cdot 2 = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

O máximo ocorre em $x = 0$:

$$M = \frac{4}{\pi}$$

A razão utilizada no critério de aceitação é:

$$\frac{f(y)}{Mg(y)} = \frac{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{1-y^2}$$

Algoritmo:

1. Defina o tamanho da amostra n.
2. Enquanto o número de amostras aceitas for menor que n, repita:
   - Gere $y \sim U(-1, 1)$.
   - Gere $u \sim U(0, 1)$.
   - Se $u < \sqrt{1 - y^2}$, aceite y e armazene-o.
   - Caso contrário, rejeite o valor e volte ao passo anterior.

Exercício 3 (2.0 pts)

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Rayleigh(σ), com densidade:

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad x \geq 0,\ \sigma > 0$$

Escreva um algoritmo que utiliza o método de Newton-Raphson para estimar o parâmetro σ via máxima verossimilhança.

Resolução

A função de log-verossimilhança é:

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \left[\log(x_i) - 2\log(\sigma) - \frac{x_i^2}{2\sigma^2} \right]$$

Primeira derivada:

$$\ell'(\sigma) = -\frac{2n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Segunda derivada:

$$\ell''(\sigma) = \frac{2n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Algoritmo de Newton-Raphson:

1. Escolha um valor inicial $\sigma^{(0)} > 0$ e uma tolerância ε.
2. Para $t = 0, 1, 2, \ldots$, repita até convergência:
   - Calcule $\ell'(\sigma^{(t)})$ e $\ell''(\sigma^{(t)})$
   - Atualize: $\sigma^{(t+1)} = \sigma^{(t)} - \frac{\ell'(\sigma^{(t)})}{\ell''(\sigma^{(t)})}$

- Verifique o critério de parada: $\left|\frac{\sigma^{(t+1)}-\sigma^{(t)}}{\sigma^{(t)}}\right| < \varepsilon$

3. Retorne o valor estimado $\hat{\sigma}$.

Exercício 4 (1.0 pt)

Considere a integral definida por:

$$J(\beta) = \int_0^\infty \frac{(\ln t)^2}{1+t} e^{-\beta t} dt, \quad \beta > 0$$

Proponha um algoritmo para estimar essa integral usando Monte Carlo.

Resolução

A densidade da distribuição Exponencial(β) é:

$$f(t) = \beta e^{-\beta t}, \quad t > 0$$

Logo,

$$J(\beta) = \mathbb{E}_f \left[\frac{(\ln T)^2}{1+T} \right], \quad T \sim \text{Exponencial}(\beta)$$

Algoritmo:

1. Defina $h(t) = \frac{(\ln t)^2}{1+t}$
2. Gere n amostras $t_i \sim \text{Exponencial}(\beta)$
3. Calcule a média amostral de $h(t_i)$:

$$\hat{J}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(t_i)$$

Exercício 5 (1.5 pts)

Descreva um algoritmo para estimar o poder de um teste estatístico utilizando o método de simulação de Monte Carlo, considerando uma hipótese alternativa fixa $\theta = \theta_1$.

Algoritmo

1. Escolha o parâmetro sob a alternativa: defina $\theta_1 \in \Theta$.
2. Repita o processo m vezes (simulações):
   - Para cada simulação $j = 1, \dots, m$:
     - Gere uma amostra aleatória $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ sob $\theta = \theta_1$;
     - Calcule a estatística de teste T_j;
     - Compare com o valor crítico ao nível α:
       - Se H_0 for rejeitada, defina $I_j = 1$; caso contrário, $I_j = 0$.
3. Estime o poder como:

$$\hat{\pi}(\theta_1) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} I_j$$

Exercício 6 (1.5 pts)

Seja $\rho \in [-1, 1]$, e $X, \eta \sim N(0, 1)$ independentes. Defina:

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2}\, \eta$$

O estimador da correlação entre X e Y é a correlação amostral:

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Proponha um algoritmo de Monte Carlo para estimar o viés de $\hat{\rho}$ para diferentes valores de $\rho \in [-1, 1]$.

Algoritmo

1. Defina parâmetros da simulação: tamanho da amostra n; número de simulações m; e conjunto de valores de $\rho \in [-1, 1]$.
2. Para cada valor ρ_k do conjunto:
   - Inicialize um vetor para armazenar as estimativas $\hat{\rho}^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$.
   - Para cada simulação $j = 1, \dots, m$:
     - Gere $X^{(j)} \sim N(0, 1)$ (vetor de tamanho n)
     - Gere $\eta^{(j)} \sim N(0, 1)$ (vetor de tamanho n)

  - Calcule $Y^{(j)} = \rho_k X^{(j)} + \sqrt{1 - \rho_k^2}\,\eta^{(j)}$
  - Calcule $\hat{\rho}^{(j)} = \text{cor}(X^{(j)}, Y^{(j)})$
- Estime o viés para ρ_k:

$$\text{viés}(\rho_k) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \hat{\rho}^{(j)} - \rho_k$$