Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Lista de Exercícios 1 – Estatística Matemática

R. Vila

1. Se $\Omega = \{C, R\} \times \{C, R\}$, determine o conjunto potência $\mathcal{P}(\Omega)$.

2. Se $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra, verifique que

   (a) Se $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F}$ então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$ and $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$.

   (b) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

   (c) $A, B \in \mathscr{F}$ então $A \cap B^c \in \mathscr{F}$.

3. Seja I um conjunto de índices. Verifique que: se $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$ é uma família de σ-álgebras, então $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ é uma σ-álgebra.

4. Considere $\Omega = \{a, b, c\}$ e as coleções $\mathscr{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ e $\mathscr{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{c\}, \{a, b\}\}$. As coleções $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são σ-álgebras? $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ é uma σ-álgebra?

   Rpt. (a) Sim, (b) Não.

5. Sejam $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A =$"o resultado é um número par" e $B = A - \{6\}$. Encontre as σ-álgebras $\sigma(\{A\})$ e $\sigma(\{A, B\})$, e as compare.

6. Obtenha a σ-álgebra gerada pela classe $\mathscr{C} = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ se:

   (a) $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

   (b) $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$.

7. Obtenha a σ-álgebra de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gerada por:

   (a) $\mathscr{C}_1 = \{\{2\}\}$.

   (b) $\mathscr{C}_2 = \{\{1, 2\}\}$.

   (c) $\mathscr{C}_3 = \{\{1, 2, 3\}\}$.

   (d) $\mathscr{C}_4 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

   (e) $\mathscr{C}_5 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

8. Construa a menor σ-álgebra em $[0,1]$, contendo o subconjunto $[1/4,3/4]$.

9. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios. Verifique que:

   (a) $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geqslant 1-\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k^c)$.

   (b) Se $\mathbb{P}(A_k) \geqslant 1-\varepsilon$ para $k=1,\ldots,n$ e $\varepsilon>0$, então $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geqslant 1-n\varepsilon$.

   (c) $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \geqslant 1-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k^c)$.

   Rpt. (a) Use a sub-aditividade de $\mathbb{P}$, (b) Use o Item (a), (c) Use a sub-aditividade de $\mathbb{P}$.

10. Verifique as seguintes propriedades:

    (a) Se $\mathbb{P}(A_n)=0$ para $n=1,2,\ldots$, então $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)=0$.

    (b) Se $\mathbb{P}(A_n)=1$ para $n=1,2,\ldots$, então $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)=1$.

    Rpt. Para (a) e (b) use a sub-aditividade de $\mathbb{P}$.

11. Um casal é escolhido ao acaso e o número de filhos e filhas perguntado. Considerando o evento $A=$"um casal não tem filhos" e $\mathbb{P}(\{\omega\})=1/2^{x+y+2}$ para todo $\omega=(x,y)\in\Omega$, determine $\mathbb{P}(A)$.

    Rpt. $1/2$.

12. Uma moeda é lançada n vezes, $n\geqslant 2$. Qual é a probabilidade de que, nestes n lançamentos, não apareçam 2 caras seguidas?

    Rpt. $\frac{\binom{n}{2}+2}{2^n}$.

Notação de conjuntos Seja $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$. Denotamos

I) $A_n \uparrow A \overset{\text{def.}}{\iff} A_n \subset A_{n+1}\ \forall n\geqslant 1$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$.

II) $A_n \downarrow A \overset{\text{def.}}{\iff} A_{n+1} \subset A_{n}\ \forall n\geqslant 1$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$.

III) $\limsup_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def.}}{\coloneqq} \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.

IV) $\liminf_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def.}}{\coloneqq} \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

V) $A_n \to A \overset{\text{def.}}{\iff} \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$.

13. Seja $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$. Verifique que

    (a) Se $A_n\uparrow A$ então $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(A_n)\leqslant\mathbb{P}(A_{n+1})\ \forall n\geqslant 1$.

    (b) Se $A_n\downarrow A$ então $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(A_n)\geqslant\mathbb{P}(A_{n+1})\ \forall n\geqslant 1$.

    (c) Se $A_n\to A$ então $A\in\mathscr{F}$ e $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(A)$.

    (d) Se $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)<\infty$ então $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big)=0$.

Rpt. (a) Escreva A_n e A como união disjunta de eventos e aplique a σ-aditividade de $\mathbb{P}$,

(b) Use o Item (a),

(c) Use os Itens (a) e (b),

(d) Use a sub-aditividade de $\mathbb{P}$ e o fato de que $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)=0$.

14. Se $A, B, C \in \mathscr{F}$, verifique que

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).$$

15. Verifique que a aplicação $A\mapsto\mathbb{P}(A|B)$ é uma medida de probabilidade.

16. Certo experimento consiste em lançar um dado equilibrado 2 vezes, independentemente. Dado que os dois números sejam diferentes, qual é a probabilidade de:

    (a) Pelo menos um dos números ser 6?

    (b) A soma dos números ser 8?

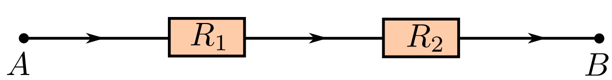
    Rpt. (a) $1/3$, (b) $2/15$.

17. Verifique que

    (a) Um evento A com $\mathbb{P}(A)=0$ é independente a qualquer outro evento B.

    (b) Um evento A com $\mathbb{P}(A)=1$ é independente a qualquer outro evento B.

18. Considere o circuito em série da figura abaixo, onde R_1 e R_2 são componentes eletrônicos idênticos que permitem a passagem de corrente elétrica, cuja probabilidade da corrente perpassar cada um é p. Determine a probabilidade da corrente sair de A e chegar a B.



    Rpt. p^2.

19. Sejam $A_1,\ldots,A_n$ eventos aleatórios independentes, com $\mathbb{P}(A_k)=p_k$, $k=1,\ldots,n$. Obtenha a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos, em termos das probabilidades p_k,

    (a) A ocorrência de nenhum dos A_k.

    (b) A ocorrência de pelo menos um dos A_k.

    (c) A ocorrência de exatamente um dos A_k.

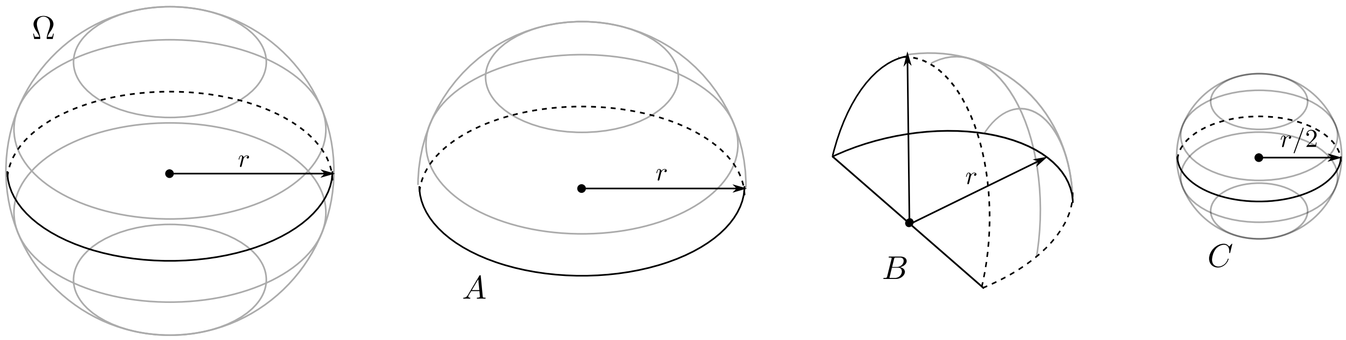
    (d) A ocorrência de exatamente dois dos A_k.

    (e) A ocorrência de todos os A_k.

    (f) A ocorrência de, no máximo, $n-1$ dos A_k.

    Rpt. (a) $\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$, (b) $1-\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$, (c) $\sum_{i=1}^{n}p_i\prod_{k\neq i}(1-p_k)$,
    (d) $\sum_{i<j}p_ip_j\prod_{k\neq i,j}(1-p_k)$, (e) $\prod_{k=1}^{n}p_k$, (f) $1-\prod_{k=1}^{n}p_k$.

20. Sejam A, B, C eventos definidos na figura abaixo



(a) Os eventos A e C são independentes?

(b) Os eventos A e B são independentes?

Rpt. (a) Sim, (b) Não.

21. Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ e $B_1, B_2, \dots, B_n$ eventos definidos em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Para $j = 1, 2, \dots, n$ suponha que B_j seja independente de $\bigcap_{i=1}^n A_i$ e que os B_j's sejam disjuntos 2 a 2. Os eventos $\bigcup_{j=1}^n B_j$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$ são independentes?

Rpt. Sim.

22. Seja $\Omega = \{abc, acb, cab, cba, bca, bac, aaa, bbb, ccc\}$ com $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/9$ para todo $\omega \in \Omega$, e o evento $A_k =$"k-ésima letra é: a", $k = 1, 2, 3$. Verifique que a família $\{A_1, A_2, A_3\}$ é 2 a 2 independente porém não independente (coletivamente).

23. Os coeficientes a e b da equação $ax^2 + bx + 1 = 0$ são, respectivamente, os resultados sucessivos de 2 lançamentos de um dado equilibrado. Determine a probabilidade das raízes dessa equação serem números reais.

Rpt. $19/36$.

24. Assuma que para cada cliente que solicita o cancelamento de um plano, a companhia responsável o faça com probabilidade q.

(a) Se 4 clientes solicitam o cancelamento, qual a probabilidade de que a companhia cancele o plano de exatamente 2 clientes?

(b) Qual a probabilidade de que sejam necessários exatamente 10 solicitações negadas para que o primeiro cancelamento seja efetuado?

Rpt. (a) $6q^2(1-q)^2$, (b) $(1-q)^{10}q$.

25. Numa população 10% das pessoas são infectadas por um determinado vírus. Um teste para detecção do vírus é eficiente em 95% dos casos nos quais os indivíduos são infectados, mas resulta em 4% de resultados positivos para os não infectados. Qual a probabilidade de que o teste de uma pessoa dessa população dê resultado positivo?

Rpt. 0.131.

26. Suponha que temos duas urnas: a primeira tem 4 bolas azuis e 6 bolas brancas, a outra tem 7 azuis e 3 brancas. Lançamos um dado honesto, se sair um número par, selecionamos ao acaso uma bola da primeira urna, se for um número ímpar da segunda. Qual a probabilidade de selecionar uma bola azul?

    Rpt. 0.55.

27. Considere uma urna que contem 1 bola vermelha, 4 bolas brancas e 3 azuis. Supondo que se efetuam extrações sem reposição de 2 bolas, determine a probabilidade de retirar 1 bola vermelha na segunda extração.

    Rpt. 0.125.

28. Um lote contém 15 peças, de onde 5 são defeituosas. Se um funcionário extrai uma amostra de 5 peças aleatoriamente:

    (a) Qual é a probabilidade de que a amostra não contenha peças defeituosas se a escolha foi realizada com reposição?

    (b) Qual é a probabilidade de que a amostra não contenha peças defeituosas, se a escolha foi realizada sem reposição?

    Rpt. (a) 0.1317, (b) 0.0839.

29. Suponha que a ocorrência de chuva (ou não) dependa das condições do tempo do dia anterior. Assumamos que, se (não) chova hoje, choverá amanhã com probabilidade (respectivamente q) p. Sabendo que choveu hoje, calcule a probabilidade de chover depois de amanhã.

    Rpt. (a) $p^2 + q(1 - p)$.