Prova 2

Técnicas Computacionais em Estatística

Prof. Saulo

October 6, 2025

Exercício 1 (3.5 pts)

Considere o conjunto de dados de ar condicionado (`aircondit`) disponível no pacote `boot` do R. São 12 observações dos tempos (em horas) entre falhas do equipamento de ar condicionado:

```
3, 5, 7, 18, 43, 85, 91, 98, 100, 130, 230, 487.
```

Suponha que os tempos entre falhas sigam um modelo Birnbaum-Saunders BS(α, β). Escreva um algoritmo para obter o viés e o erro padrão Jackknife de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.

Resolução

Algoritmo

1. Calcular estimativas:

1.1 Definir função `est.par(values)` que retorna as estimativas $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.
1.2 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \leftarrow$ est.par(hours)

2. Jackknife (para $i = 1, \dots, n$):

- hours$_{(-i)} \leftarrow$ amostra sem o i-ésimo elemento
- $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i) \leftarrow$ est.par(hours$_{(-i)}$)

3. Calcular as médias:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\alpha}_i, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_i$$

4. Viés (bias):

$$\text{bias}_\alpha = (n-1)(\bar{\alpha} - \hat{\alpha}), \quad \text{bias}_\beta = (n-1)(\bar{\beta} - \hat{\beta})$$

5. Erro padrão (erro-padrão):

$$\text{se}_\alpha = \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\alpha}_i - \bar{\alpha})^2}, \quad \text{se}_\beta = \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}_i - \bar{\beta})^2}$$

Exercício 2 (3.5 pts)

Escreva um algoritmo que implemente um amostrador Metropolis-Hastings para gerar números pseudo-aleatórios de uma distribuição Cauchy padrão com $N = 10000$, usando $\mathcal{N}(x_t, \sigma^2 = 3^2)$ como função candidata. Obtenha a forma simplificada da probabilidade de aceitação.

Resolução

A densidade da distribuição Cauchy padrão é:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Como a candidata é simétrica, a razão de aceitação é:

$$\alpha(x_t, y) = \min\left\{\frac{f(y)}{f(x_t)}, 1\right\} = \min\left\{\frac{1+x_t^2}{1+y^2}, 1\right\}$$

Algoritmo

1. Inicialize: $x_0 \leftarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
2. Para $t = 1, \ldots, N-1$:
    - Gerar $y \leftarrow \mathcal{N}(x_{t-1}, \sigma^2)$
    - Calcular $\alpha = \min\left\{\frac{1+x_{t-1}^2}{1+y^2}, 1\right\}$
    - Gerar $u \sim \text{Unif}(0, 1)$
    - Se $u \leq \alpha$, então $x_t \leftarrow y$, senão $x_t \leftarrow x_{t-1}$

Exercício 3 (3.0 pts)

Queremos gerar amostras de:

$$\pi(x) = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2}, \quad x \in [-3\pi, 3\pi]$$

Assumindo $Y_t = X_{t-1} + \epsilon_t$ com $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ e $\sigma = 6$, elabore um algoritmo Metropolis-Hastings.

Resolução

A razão de aceitação:

$$\alpha(x_t, y) = \min\left\{\frac{\sin^2(y)/y^2}{\sin^2(x_t)/x_t^2}, 1\right\} = \min\left\{\left(\frac{x_t \sin(y)}{y \sin(x_t)}\right)^2 \cdot \mathbb{I}_{[-3\pi, 3\pi]}(y),\ 1\right\}$$

Observação: $x_0 \neq 0$, pois $\pi(x)$ não é definida em 0. Podemos iniciar com $x_0 \sim \text{Unif}(-3\pi, 3\pi)$.

Algoritmo

1. Inicialização: $x_0 \leftarrow \text{Unif}(-3\pi, 3\pi)$
2. Para $t = 1, \dots, N-1$:

    - Gerar $y \leftarrow \mathcal{N}(x_{t-1}, \sigma^2)$
    - Se $|y| \leq 3\pi$, então:

$$\alpha = \min\left\{\left(\frac{x_{t-1}\sin(y)}{y\sin(x_{t-1})}\right)^2, 1\right\}$$

senão $\alpha = 0$

- Gerar $u \sim \text{Unif}(0, 1)$
- Se $u \leq \alpha$, $x_t \leftarrow y$; caso contrário, $x_t \leftarrow x_{t-1}$