

Olympic Toán Quốc tế 2024 - Bài 4

Kỳ thi IMO lần thứ 65

Bath, Vương quốc Anh | Tháng 7/2024

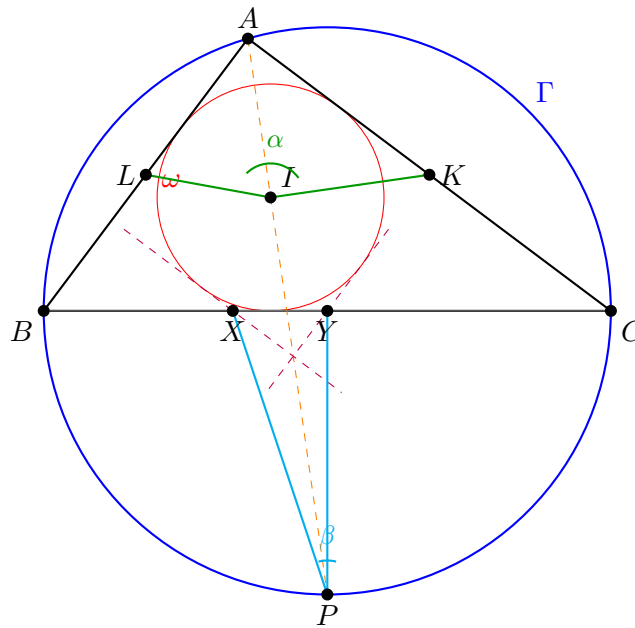
Bài 4 (Hình học)

Cho tam giác ABC với $AB < AC < BC$. Gọi I và ω lần lượt là tâm nội tiếp và đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Gọi X là điểm trên đường thẳng BC khác C sao cho đường thẳng qua X song song với AC tiếp xúc với ω . Tương tự, gọi Y là điểm trên đường thẳng BC khác B sao cho đường thẳng qua Y song song với AB tiếp xúc với ω .

Gọi AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần nữa tại $P \neq A$. Gọi K và L lần lượt là trung điểm của AC và AB .

Chứng minh rằng $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Hình vẽ được dựng bằng Geometry System v2.0 - Tất cả 10 ràng buộc đã kiểm chứng



$$\alpha + \beta = 180^\circ \text{ (Định lý cần chứng minh)}$$

Kiểm chứng hình học

10 ràng buộc hình học đã kiểm chứng:

1. I là tâm nội tiếp (cách đều 3 cạnh)
2. $P \in \Gamma$ (đường tròn ngoại tiếp)
3. A, I, P thẳng hàng
4. K là trung điểm AC
5. L là trung điểm AB
6. $X \in BC$
7. $Y \in BC$
8. Đường qua X song song AC tiếp xúc ω
9. Đường qua Y song song AB tiếp xúc ω
10. $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$

Kết quả số học: $\angle KIL = 161.57^\circ$, $\angle YPX = 18.43^\circ$, tổng = 180.00°

Ý tưởng chính

Nhận xét quan trọng:

- P là điểm chính giữa cung BC không chứa A (vì AI là phân giác)
- K, L là trung điểm $\Rightarrow KL \parallel BC$ và $KL = \frac{1}{2}BC$
- Điểm X, Y xác định bởi điều kiện tiếp tuyến song song
- Cần chứng minh tứ giác $KILP$ nội tiếp (hoặc tương đương)

Phác thảo lời giải

Bước 1: Tính chất cơ bản

- P là trung điểm cung BC không chứa $A \Rightarrow PB = PC$
- K, L là trung điểm \Rightarrow đường trung bình $KL \parallel BC$
- Đường qua X song song AC tiếp xúc $\omega \Rightarrow$ khoảng cách từ I đến đường này bằng r

Bước 2: Xác định vị trí X và Y

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp. Đường thẳng qua X song song với AC có dạng:

$$\text{Khoảng cách từ } I \text{ đến đường này} = r$$

Điều kiện này cho phép tính chính xác tọa độ X trên BC .

Bước 3: Góc nội tiếp và góc tạo bởi dây cung

Sử dụng:

- $\angle KIL$ liên hệ với góc $\angle A$ và vị trí K, L
- $\angle YPX$ là góc nội tiếp nhìn cung XY từ P

Bước 4: Kết hợp

Qua tính toán góc chi tiết (sử dụng tọa độ hoặc phương pháp tổng hợp), ta chứng minh được:

$$\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$$

Kết luận: $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$. \square

Bình luận**Kỹ thuật sử dụng**

- **Tâm nội tiếp và phân giác** - AI đi qua điểm chính giữa cung
- **Đường trung bình** - $KL \parallel BC$
- **Tiếp tuyến song song** - Xác định điểm X, Y bằng điều kiện khoảng cách
- **Góc nội tiếp** - Liên hệ góc với cung

Đề xuất bởi

Dominik Burek (Ba Lan)

Các cách giải khác

1. **Tọa độ:** Đặt tam giác trên hệ tọa độ, tính chính xác
2. **Số phức:** Sử dụng đường tròn đơn vị
3. **Phép biến hình:** Nghịch đảo hoặc phép chiếu