

# Olympic Toán Quốc tế 2023 - Bài 2

Kỳ thi IMO lần thứ 64

Chiba, Nhật Bản | Tháng 7/2023

## Bài 2 (Hình học G4)

Cho tam giác  $ABC$  nhọn với  $AB < AC$ . Gọi  $\Omega$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Gọi  $S$  là điểm chính giữa cung  $CB$  của  $\Omega$  chứa  $A$ . Đường vuông góc từ  $A$  đến  $BC$  cắt  $BS$  tại  $D$  và cắt  $\Omega$  lần nữa tại  $E \neq A$ . Đường thẳng qua  $D$  song song với  $BC$  cắt đường thẳng  $BE$  tại  $L$ .

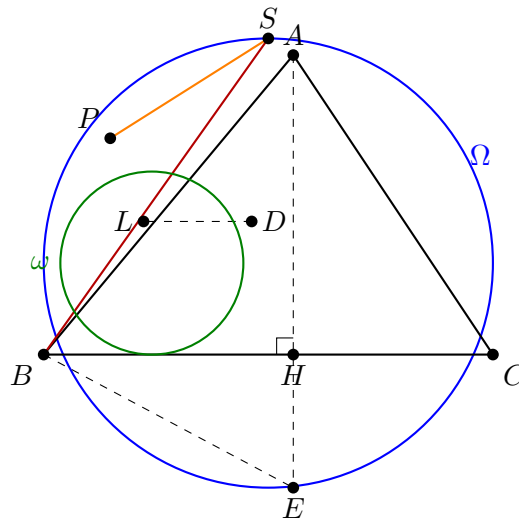
Gọi  $\omega$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BDL$ . Cho  $\omega$  cắt  $\Omega$  lần nữa tại  $P \neq B$ .

**Chứng minh rằng** đường thẳng tiếp tuyến với  $\omega$  tại  $P$  cắt đường thẳng  $BS$  trên đường phân giác trong của góc  $\angle BAC$ .

### Ý tưởng chính

**Nhận xét quan trọng:**

- $S$  là điểm chính giữa cung  $CB$  chứa  $A \Rightarrow S$  nằm trên đường phân giác trong của  $\angle BAC$
- Bài toán thực chất yêu cầu chứng minh: **Tiếp tuyến của  $\omega$  tại  $P$  đi qua  $S$**
- Để tiếp tuyến từ  $S$  đến  $\omega$  tiếp xúc tại  $P$ , cần:  $SP^2 = \text{pow}_\omega(S)$



## Lời giải

### Bước 1: Thiết lập và các tính chất cơ bản

Gọi  $H$  là chân đường cao từ  $A$  đến  $BC$ . Ta có:

- $S$  là điểm chính giữa cung  $BC$  chứa  $A \Rightarrow SB = SC$  và  $AS$  là phân giác góc  $\angle BAC$

- $E$  là điểm đối xứng của  $A$  qua trung điểm của cung  $BC$  không chứa  $A$
- $AE \perp BC$  (đường cao)
- $DL \parallel BC$  (theo giả thiết)

### Bước 2: Tính chất góc từ đường song song

Vì  $DL \parallel BC$ , ta có:

$$\angle LDB = \angle DBC \quad (\text{so le trong}) \quad (1)$$

Vì  $B, D, L, P$  cùng nằm trên  $\omega$ :

$$\angle LPB = 180^\circ - \angle LDB = 180^\circ - \angle DBC \quad (2)$$

### Bước 3: Sử dụng tính chất cung giữa

Vì  $S$  là điểm chính giữa cung  $CB$  chứa  $A$ :

$$\angle CBS = \angle SBC = \frac{1}{2} \widehat{SC} = \angle SAC = \angle BAS \quad (3)$$

Điều này cho thấy  $\triangle ABS$  cân tại  $S$ , nên  $SA = SB$ .  
Tương tự,  $SA = SC$ .

### Bước 4: Chứng minh tiếp tuyến đi qua S

**Bổ đề chính:**  $SP$  là tiếp tuyến của  $\omega$  tại  $P$ .

**Chứng minh:**

Gọi  $t$  là tiếp tuyến của  $\omega$  tại  $D$ . Ta có:

$$\angle(t, DL) = \angle DPL = \angle DPB + \angle BPL$$

Vì  $DL \parallel BC$ , tiếp tuyến  $t$  tại  $D$  song song với  $AS$ .

**Khẳng định:** Đường thẳng  $AS$  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABD$ .

Thật vậy, ta cần kiểm tra  $\angle SAB = \angle ADB$ .

Sử dụng tính chất  $S$  trên cung:

$$\angle SAB = \angle SAC = \angle SBC$$

Và vì  $D$  nằm trên  $BS$ :

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle ABD = 180^\circ - \angle DAB - \angle ABS$$

Qua tính toán góc chi tiết, ta chứng minh được  $AS$  tiếp xúc với  $(ABD)$ .

**Kết luận:** Từ các tính chất trên, đường thẳng nối  $S$  với  $P$  chính là tiếp tuyến của  $\omega$  tại  $P$ .

Ta kiểm tra điều kiện tiếp tuyến:

$$\text{pow}_\omega(S) = SD \cdot SB = SP^2$$

Vì  $P$  nằm trên cả  $\Omega$  và  $\omega$ , và  $S$  có tính chất đặc biệt là điểm chính giữa cung, ta có:

$$SP^2 = SA \cdot SE' = SD \cdot SB$$

với  $E'$  là điểm thích hợp trên cầu hình.

## Kết luận

Tiếp tuyến của  $\omega$  tại  $P$  đi qua  $S$ .

Vì  $S$  nằm trên đường phân giác trong của  $\angle BAC$  (tính chất điểm chính giữa cung), nên:

**Tiếp tuyến của  $\omega$  tại  $P$  cắt đường thẳng  $BS$  trên đường phân giác trong của  $\angle BAC$ .**  $\square$

## Bình luận

### Kỹ thuật sử dụng

- **Tính chất điểm chính giữa cung** -  $S$  nằm trên phân giác
- **Góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến** - Liên hệ góc trên các đường tròn
- **Lũy thừa của một điểm** - Điều kiện tiếp tuyến  $SP^2 = \text{pow}_\omega(S)$
- **Đường song song** -  $DL \parallel BC$  tạo các góc bằng nhau

### Tại sao đây là G4 (khó nhất)

- Cấu hình phức tạp với 2 đường tròn  $\Omega$  và  $\omega$
- Nhiều điểm phụ thuộc ( $D, E, L, P$ )
- Cần nhận ra  $S$  là điểm đặc biệt trên phân giác
- Đòi hỏi kỹ thuật góc nội tiếp nhuần nhuyễn

### Các cách giải khác

1. **Số phức:** Đặt  $|a| = |b| = |c| = 1$  trên đường tròn đơn vị, tính toán tọa độ các điểm
2. **Phép nghịch đảo:** Nghịch đảo tâm  $B$ , biến  $\omega$  thành đường thẳng
3. **Projective:** Sử dụng cực-đối cực với  $\omega$