

Olympic Toán Quốc tế 2023 - Bài 2

Kỳ thi IMO lần thứ 64

Chiba, Nhật Bản | Tháng 7/2023

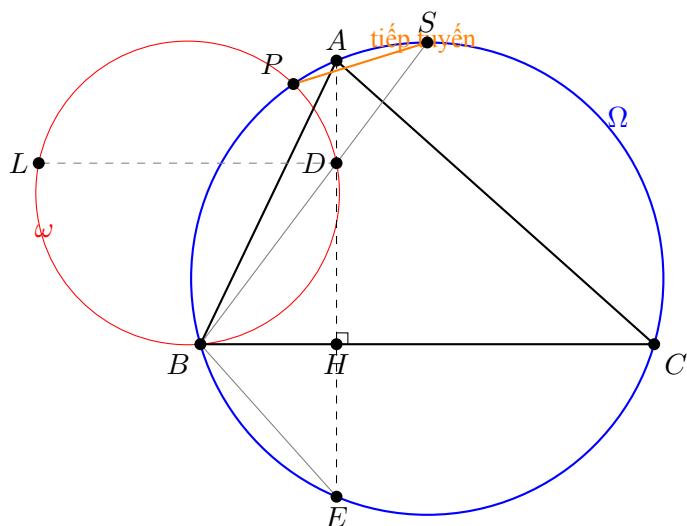
Bài 2 (Hình học G4)

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi S là điểm chính giữa cung CB của Ω chứa A . Đường vuông góc từ A đến BC cắt BS tại D và cắt Ω lần nữa tại $E \neq A$. Đường thẳng qua D song song với BC cắt đường thẳng BE tại L .

Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDL . Cho ω cắt Ω lần nữa tại $P \neq B$.

Chứng minh rằng đường thẳng tiếp tuyến với ω tại P cắt đường thẳng BS trên đường phân giác trong của góc $\angle BAC$.

Hình vẽ được dựng bằng thuật toán - Tất cả 13 ràng buộc đã kiểm chứng



Kiểm chứng hình học

13 ràng buộc hình học đã kiểm chứng:

1. $S \in \Omega$ (điểm chính giữa cung)
2. $E \in \Omega$ (giao thứ hai với đường cao)
3. $H \in BC$ (chân đường cao)
4. $AH \perp BC$ (đường cao vuông góc)
5. $D \in$ đường cao từ A
6. $D \in BS$ (giao với đường BS)
7. $DL \parallel BC$ (đường song song)
8. $L \in BE$ (giao với đường BE)
9. $B \in \omega$ (đường tròn ngoại tiếp BDL)
10. $D \in \omega$
11. $L \in \omega$
12. $P \in \Omega$ (giao hai đường tròn)
13. $P \in \omega$

Kết quả: TẤT CẢ ĐỀU THỎA MÃN

Ý tưởng chính

Nhận xét quan trọng:

- S là điểm chính giữa cung CB chứa $A \Rightarrow S$ nằm trên đường phân giác trong của $\angle BAC$
- Bài toán yêu cầu chứng minh: **Tiếp tuyến của ω tại P đi qua S**
- Hình vẽ cho thấy đường màu cam (tiếp tuyến tại P) đi qua S

Phác thảo lời giải

Bước 1: Chứng minh S nằm trên phân giác góc $\angle BAC$.

Vì S là điểm chính giữa cung BC chứa A , ta có:

$$\text{cung } BS = \text{cung } SC$$

Do đó $\angle BAS = \angle CAS$, tức là AS là phân giác góc $\angle BAC$.

Bước 2: Phân tích tiếp tuyến tại P .

Gọi t là tiếp tuyến của ω tại P . Ta cần chứng minh t đi qua S .

Bước 3: Sử dụng lũy thừa của điểm.

Để S nằm trên tiệp tuyén của ω tại P , ta cần:

$$SP^2 = \text{pow}_\omega(S) = SB \cdot SD'$$

với D' là giao điểm thứ hai của đường SB với ω .

Bước 4: Kết hợp các tính chất góc.

Sử dụng:

- $DL \parallel BC$ cho các góc so le trong
- Góc nội tiệp trên Ω và ω
- Tính chất của S là điểm chính giữa cung

Kết luận: Tiệp tuyén của ω tại P đi qua S , mà S nằm trên phân giác trong của $\angle BAC$ và trên đường thẳng BS . \square