Olympic Toán Quốc tế 2023 - Bài 1

Kỳ thi IMO lần thứ 64

Chiba, Nhật Bản | Tháng 7/2023

Bài 1

Tìm tất cả các số nguyên hợp số $n > 1$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $d_1, d_2, \ldots, d_k$ là tất cả các ước dương của n với

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n,$$

thì d_i chia hết $d_{i+1} + d_{i+2}$ với mọi $1 \leq i \leq k-2$.

Ý tưởng chính

Nhận xét quan trọng: Cấu trúc ước của lũy thừa nguyên tố p^a tạo thành cấp số nhân $\{1, p, p^2, \ldots, p^a\}$, làm cho điều kiện chia hết tự động thỏa mãn:

$$d_i = p^{i-1} \mid p^i + p^{i+1} = p^i(1+p) = d_{i+1}(1+p)$$

Với các số có ≥ 2 ước nguyên tố phân biệt, luôn tồn tại "điểm chuyển tiếp" mà tại đó điều kiện bị vi phạm.

Đáp án: $\boxed{n = p^a \text{ với } p \text{ là số nguyên tố và } a \geq 2}$

Tất cả các hợp số thỏa mãn điều kiện chính là các **lũy thừa nguyên tố** với số mũ ít nhất bằng 2.

Lời giải

Bước 1: Khảo sát các trường hợp nhỏ

n	Lũy thừa nguyên tố?	Các ước	Thỏa mãn?
$4 = 2^2$	Có	$1, 2, 4$	✓
$6 = 2 \cdot 3$	Không	$1, 2, 3, 6$	$\times$ $(2 \nmid 9)$
$8 = 2^3$	Có	$1, 2, 4, 8$	✓
$9 = 3^2$	Có	$1, 3, 9$	✓
$10 = 2 \cdot 5$	Không	$1, 2, 5, 10$	$\times$ $(2 \nmid 15)$
$12 = 2^2 \cdot 3$	Không	$1, 2, 3, 4, 6, 12$	$\times$ $(2 \nmid 7)$
$16 = 2^4$	Có	$1, 2, 4, 8, 16$	✓
$25 = 5^2$	Có	$1, 5, 25$	✓
$27 = 3^3$	Có	$1, 3, 9, 27$	✓

Dự đoán: Đáp án chính xác là các lũy thừa nguyên tố $n = p^a$ với $a \geq 2$.

Bước 2: Chứng minh lũy thừa nguyên tố thỏa mãn điều kiện

Định lý 1. *Với mọi số nguyên tố p và số nguyên $a \geq 2$, số $n = p^a$ thỏa mãn tính chất đã cho.*

Chứng minh. Các ước của $n = p^a$ chính xác là $\{1, p, p^2, \ldots, p^a\}$, nên $d_j = p^{j-1}$ với $j = 1, 2, \ldots, a+1$.

Với mọi $1 \leq i \leq a-1$, ta kiểm tra $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$:

$$d_{i+1} + d_{i+2} = p^i + p^{i+1} = p^i(1+p)$$

Vì $d_i = p^{i-1}$ chia hết $p^i = p \cdot p^{i-1}$, ta có:

$$d_i = p^{i-1} \mid p^i(1+p) = d_{i+1} + d_{i+2}$$

Do đó điều kiện đúng với mọi i hợp lệ. □

Bước 3: Chứng minh các số không phải lũy thừa nguyên tố không thỏa mãn

Định lý 2. *Nếu n có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt, thì n không thỏa mãn điều kiện.*

Chứng minh. Gọi $p < q$ là hai ước nguyên tố nhỏ nhất phân biệt của n. Dãy ước bắt đầu bằng:

$$d_1 = 1, \quad d_2 = p$$

Chìa khóa là phân tích điều gì xảy ra tại d_3 và d_4.

Trường hợp 1: $q < p^2$ (nên $d_3 = q$)

Khi đó $d_4 \geq \min(p^2, pq)$.

Nếu $d_4 = p^2$: Ta cần $p \mid d_3 + d_4 = q + p^2$, tức là $p \mid q$. Nhưng q là số nguyên tố và $q > p$, nên $p \nmid q$. **Mâu thuẫn.**

Nếu $d_4 = pq$: Ta cần $p \mid q + pq = q(1+p)$. Vì $\gcd(p, q) = 1$ và $p \nmid (1+p)$, điều này không thể xảy ra. **Mâu thuẫn.**

Trường hợp 2: $p^2 \leq q$ (nên $d_3 = p^2$ nếu $p^2 \mid n$)

Cuối cùng, q phải xuất hiện trong dãy ước. Gọi $d_j = p^m$ và $d_{j+1} = q$ với m nào đó.

Tại $i = j-1$: $d_i = p^{m-1}$, và ta cần $p^{m-1} \mid p^m + q$.

Vì $p^{m-1} \mid p^m$, ta cần $p^{m-1} \mid q$. Nhưng q là số nguyên tố và $q \neq p$. **Mâu thuẫn.**

Trong mọi trường hợp, các số không phải lũy thừa nguyên tố đều không thỏa mãn điều kiện. □

Kết luận

Tập hợp đầy đủ các hợp số thỏa mãn tính chất là:

$$\boxed{n = p^a \text{ với } p \text{ là số nguyên tố và } a \geq 2}$$

Ví dụ: $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49, 64, 81, 121, 125, \ldots$

Bình luận

Kỹ thuật sử dụng

- **Khảo sát trường hợp nhỏ** - Thử $n = 4, 6, 8, \ldots$ để nhận ra quy luật
- **Phân tích chuỗi chia hết** - Nghiên cứu cấu trúc $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$
- **Chứng minh phản chứng** - Chỉ ra các số không phải lũy thừa nguyên tố không thỏa mãn
- **Cấu trúc phân tích thừa số** - Ý tưởng chính về dãy ước hình học và không hình học

Tại sao đây là bài IMO P1

- Điểm khởi đầu dễ tiếp cận (trường hợp nhỏ)
- Đáp án gọn gàng (lũy thừa nguyên tố)
- Yêu cầu phân tích trường hợp cẩn thận nhưng không cần lý thuyết sâu
- Kiểm tra độ trưởng thành toán học hơn là kiến thức chuyên sâu

Mở rộng

Câu hỏi: Với những n nào thì $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2} + \cdots + d_{i+m}$ đúng với mọi i hợp lệ?

Dự đoán: Đáp án vẫn là lũy thừa nguyên tố, vì cấu trúc hình học của $\{1, p, p^2, \ldots\}$ làm cho mọi tổng đều chia hết cho các số hạng trước đó.