

# LỜI GIẢI CHI TIẾT

Math Team - Signal-Based Problem Solving

Câu 3a - Đề thi THPT (1.5 điểm)

Ngày tạo: Ngày 1 tháng 1 năm 2026

## 1 Đề bài

Giải phương trình:

$$2(x+1) + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = 0$$

### Phân tích đề bài

- Cho:** Phương trình chứa phân thức với các mẫu  $(x-1)$  và  $(x-2)$
- Tìm:** Giá trị  $x$  thỏa mãn phương trình
- Loại:** Đại số - Phương trình phân thức
- Độ khó:** THPT

## 2 Lời giải

### 2.1 Bước 1: Xác định điều kiện xác định

Phương trình chứa các phân thức với mẫu số  $(x-1)$  và  $(x-2)$ .

Điều kiện xác định:

$$\begin{aligned}x - 1 &\neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\x - 2 &\neq 0 \Rightarrow x \neq 2\end{aligned}$$

Điều kiện:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

### 2.2 Bước 2: Đặt ẩn phụ

Đặt  $u = x - 1$ , khi đó:

- $x = u + 1$
- $x + 1 = u + 2$
- $x - 2 = u - 1$

Phương trình trở thành:

$$2(u+2) + \frac{1}{u} + \frac{2}{u-1} = 0$$

Hay:

$$2u + 4 + \frac{1}{u} + \frac{2}{u-1} = 0$$

### 2.3 Bước 3: Quy đồng mẫu số

Nhân cả hai vế với  $u(u - 1)$  (với  $u \neq 0$  và  $u \neq 1$ ):

$$(2u + 4) \cdot u(u - 1) + (u - 1) + 2u = 0$$

Khai triển  $(2u + 4) \cdot u(u - 1)$ :

$$\begin{aligned}(2u + 4)(u^2 - u) &= 2u^3 - 2u^2 + 4u^2 - 4u \\ &= 2u^3 + 2u^2 - 4u\end{aligned}$$

Phương trình trở thành:

$$2u^3 + 2u^2 - 4u + u - 1 + 2u = 0$$

### 2.4 Bước 4: Rút gọn

Thu gọn các hạng tử đồng dạng:

$$2u^3 + 2u^2 + (-4u + u + 2u) - 1 = 0$$

$$2u^3 + 2u^2 - u - 1 = 0$$

### 2.5 Bước 5: Phân tích thành nhân tử

Nhóm các số hạng:

$$\begin{aligned}2u^3 + 2u^2 - u - 1 &= 2u^2(u + 1) - (u + 1) \\ &= (u + 1)(2u^2 - 1)\end{aligned}$$

Phương trình trở thành:

$$(u + 1)(2u^2 - 1) = 0$$

*Nhận xét 1.* Đây là điểm hay của cách đặt ẩn phụ - việc phân tích nhân tử trở nên đơn giản hơn so với cách quy đồng trực tiếp.

### 2.6 Bước 6: Giải phương trình

**Trường hợp 1:**  $u + 1 = 0$

$$u = -1 \Rightarrow x = u + 1 = 0$$

**Trường hợp 2:**  $2u^2 - 1 = 0$

$$u^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}u &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ u &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

## 2.7 Bước 7: Kiểm tra điều kiện xác định

Các nghiệm tìm được:

- $x_1 = 0$ : Thỏa mãn ( $0 \neq 1$  và  $0 \neq 2$ ) ✓
- $x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1.707$ : Thỏa mãn ✓
- $x_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.293$ : Thỏa mãn ✓

## 2.8 Bước 8: Kiểm tra nghiệm

Kiểm tra  $x = 0$ :

$$2(0+1) + \frac{1}{0-1} + \frac{2}{0-2} = 2 - 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

## 3 Kết luận

### Đáp số

Phương trình có 3 nghiệm:

$$x \in \left\{ 0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Hay viết dạng khác:

$$x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Ghi nhớ

- Khi gấp phương trình phân thức, luôn xác định ĐKXĐ trước
- Đặt ẩn phụ  $u = x - a$  với  $a$  phù hợp có thể giúp đơn giản hóa việc phân tích nhân tử
- Phương trình bậc 3 dạng  $au^3 + bu^2 + cu + d = 0$  thường phân tích được bằng cách nhóm