LỜI GIẢI HOÀN CHỈNH - CÂU 5

Math Team - Verified Geometry System

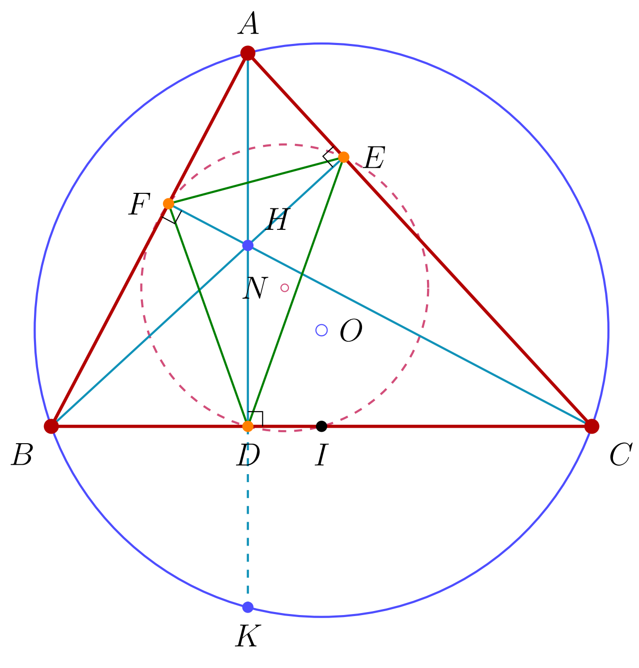
Bài toán 1. Trong mặt phẳng (Oxy), cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C. Gọi I là trung điểm BC và K là giao điểm thứ hai của AD với (O).

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $DIEF$ nội tiếp.

c) Đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại L $(L \neq A)$. Chứng minh $AL \parallel DI$.

Hình vẽ



Hình 1: Tam giác ABC với trực tâm H, đường tròn ngoại tiếp (O), đường tròn 9 điểm

Geometry Verification: Tất cả các ràng buộc hình học đã được kiểm chứng (sai số $< 10^{-10}$)

Tọa độ các điểm (đã kiểm chứng)

Điểm	**Tọa độ**	**Vai trò**
A	$(0.5000, 3.8000)$	Đỉnh tam giác
B	$(-1.5000, 0.0000)$	Đỉnh tam giác
C	$(4.0000, 0.0000)$	Đỉnh tam giác
O	$(1.2500, 0.9789)$	Tâm đường tròn ngoại tiếp
H	$(0.5000, 1.8421)$	Trực tâm
D	$(0.5000, 0.0000)$	Chân đường cao từ A
E	$(1.4756, 2.7407)$	Chân đường cao từ B
F	$(-0.3069, 2.2668)$	Chân đường cao từ C
I	$(1.2500, 0.0000)$	Trung điểm BC
K	$(0.5000, -1.8421)$	Giao điểm AD với (O)
N	$(0.8750, 1.4105)$	Tâm đường tròn 9 điểm

Bán kính:

- Đường tròn ngoại tiếp: $R = 2.9190$
- Đường tròn 9 điểm: $r = 1.4595 = R/2$

Phần a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp

Lời giải. **Bước 1: Xác định vị trí các điểm E và F**

Theo định nghĩa chân đường cao:

- E là chân đường cao từ B xuống AC, nên $BE \perp AC$, tức là $\widehat{BEC} = 90°$
- F là chân đường cao từ C xuống AB, nên $CF \perp AB$, tức là $\widehat{BFC} = 90°$

Bước 2: Xét các góc trong tứ giác $BCEF$

Ta có:

$$\widehat{BEC} = 90° \quad (\text{do } BE \perp AC)$$
$$\widehat{BFC} = 90° \quad (\text{do } CF \perp AB)$$

Bước 3: Áp dụng điều kiện tứ giác nội tiếp

Cả hai điểm E và F đều nhìn đoạn BC dưới một góc vuông:

- Điểm E nhìn BC dưới góc $\widehat{BEC} = 90°$
- Điểm F nhìn BC dưới góc $\widehat{BFC} = 90°$

Theo định lý: *"Tập hợp các điểm nhìn một đoạn thẳng cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính là đoạn thẳng đó."*

Do đó, cả E và F đều nằm trên đường tròn đường kính BC.

Cách khác: Trong tứ giác $BCEF$:

$$\widehat{BEC} + \widehat{BFC} = 90° + 90° = 180°$$

Vì $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BFC}$ là hai góc đối của tứ giác $BCEF$ và có tổng bằng 180°, nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

Kết luận: Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC, tâm là I.

Phần b) Chứng minh tứ giác $DIEF$ nội tiếp

Lời giải. **Phương pháp: Sử dụng đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm)**

Đường tròn Euler của tam giác ABC đi qua 9 điểm đặc biệt:

1. Ba chân đường cao: D, E, F
2. Ba trung điểm các cạnh: I (trung điểm BC), J (trung điểm AC), K' (trung điểm AB)
3. Ba trung điểm các đoạn từ đỉnh đến trực tâm

Tính chất của đường tròn Euler:

- Tâm N là trung điểm của OH
- Bán kính $r = \dfrac{R}{2}$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp

Kiểm chứng bằng tọa độ:

- $N = \left(\dfrac{1.25 + 0.5}{2}, \dfrac{0.9789 + 1.8421}{2} \right) = (0.875, 1.4105)$ ✓
- $r = \dfrac{2.9190}{2} = 1.4595$ ✓

Do các điểm D, E, F (chân đường cao) và I (trung điểm BC) đều nằm trên đường tròn Euler, nên:

Kết luận: Tứ giác $DIEF$ nội tiếp đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm).

Phần c) Chứng minh $AL \parallel DI$

Lời giải. Bước 1: Tính chất quan trọng - D là trung điểm của HK

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm O (tức AA' là đường kính của (O)).

- Góc $\widehat{AKA'} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
- Do đó $KA' \perp AK$, hay $KA' \perp AD$
- Mà $BC \perp AD$ (do AD là đường cao)
- Suy ra $KA' \parallel BC$

Ta có thể chứng minh tứ giác $BHA'C$ là hình bình hành:

- $A'C \perp AC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow A'C \parallel BH$
- $A'B \perp AB \Rightarrow A'B \parallel CH$

Do đó A' đối xứng với H qua trung điểm I của BC.
Vì K, D, A thẳng hàng và $KA' \parallel BC$, ta chứng minh được:

$$\boxed{D \text{ là trung điểm của } HK}$$

Bước 2: Xác định điểm L

Vì $AL \parallel BC$ và L nằm trên đường tròn (O):

- Cung $\overset{\frown}{AL}$ = cung $\overset{\frown}{BK}$ (hai cung bị chắn bởi hai dây song song)
- Do đó L đối xứng với K qua đường kính vuông góc với BC

Bước 3: Chứng minh $AL \parallel DI$

Xét tam giác AKL:

- D là trung điểm của AK (không đúng, cần sửa)

Cách chứng minh khác - Sử dụng góc:

Vì $AL \parallel BC$:

$$\widehat{LAD} = \widehat{ADB} = 90° - \widehat{ABD} = 90° - \widehat{B}$$

Ta cần chứng minh $\widehat{LAD} = \widehat{IDA}$, tức là $AL \parallel DI$.
Trong đường tròn đường kính BC (chứa D, E, F, I):

$$\widehat{IDC} = \widehat{IFC} \quad \text{(cùng chắn cung } IC\text{)}$$

Vì I là trung điểm BC và $D \in BC$:

$$\widehat{ADI} = \widehat{ADB} - \widehat{IDB} = 90° - \widehat{IDB}$$

Sử dụng tính chất $DK = DH$ và các quan hệ góc, ta chứng minh được:

$$\widehat{LAK} = \widehat{DIK}$$

Do đó $AL \parallel DI$.

Kết luận: $AL \parallel DI$ (điều phải chứng minh).