Praktikum: “Numerik am Computer” FS 2018
Prof. M. Grote
R. Brügger, R. Croce, A. Heinimann, M. Nagy, G. Talarico Universität Basel

# Beilage zur Serie 1

## Problemstellung

Zu gegebenen $n+1$ Stützpunkten $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, suchen wir das eindeutig bestimmte Polynom $p$ von maximalem Grad $n$ durch diese Stützpunkte. Das heisst: $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ (vergleiche “Einführung in die Numerik”).
Das Polynom $p$ kann man auf verschiedene Weise darstellen. Diese Schreibweisen sehen im Allgemeinen folgendermassen aus:

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} w_j \, p_j(z).$$

Dabei sind $w_j \in \mathbb{R}$ die sogenannten Gewichte, $p_j$ bestimmte Polynome und $z \in \mathbb{R}$ die Stelle, an welcher wir das Interpolationspolynom auswerten wollen.
Damit alle Polynome von Grad kleiner oder gleich $n$ auf diese Weise dargestellt werden können, müssen die $\{p_j\}_{j=1}^{n}$ eine Basis vom Raum der Polynome von maximalem Grad $n$ sein (vergleiche “Lineare Algebra”).
Im Folgenden betrachten wir die Lagrange-Interpolation.

## Lagrange-Interpolation

Für die Lagrange-Interpolation ist

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j \, L_j(z),$$

wobei $L_j$ das $j$-te *Lagrange-Polynom* bezeichnet:

$$L_j(z) = \prod_{k \neq j} \frac{z - x_k}{x_j - x_k}.$$

Hier können die Gewichte $b_j$ durch die Bedingungen $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ bestimmt werden. Da aber $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol) gilt, gibt es eine grosse Vereinfachung, denn es gilt $b_j = y_j$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.
Die Auswertung des Integrationspolynoms ist jedoch schwieriger. Der Hauptteil des Programms ist eine geschachtelte `for`-Schleife. Die äussere Schleife ist für die Summe und die innere Schleife für das Produkt, welches bei jedem Summanden neu berechnet werden muss.
Der Hauptteil des Programms `lagrangeinterpol` könnte somit wie folgt aussehen:

```
p = 0;
for j = 0:n % berechne Summe über alle Lagrange-Polynome
    L = 1;
    for k = 0:n % berechne das Produkt eines einzelnen Lagrange-Polynoms
        if k~=j
            L = ...
        end
    end
    p = ...
end
```

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
https://tinyurl.com/UnibasFS18PraktikumII