Praktikum: "Numerik am Computer" FS 2018
Prof. M. Grote
R. Brügger, R. Croce, A. Heinimann, M. Nagy, G. Talarico Universität Basel

Serie 1

Polynominterpolation - Lagrange

zur 10. KW (05.03. – 11.03.2018)

Wichtig: Schreibe eine main-Datei, welche alle Funktionsaufrufe ausführt.

Aufgabe 1.1 (5 Punkte): (Lagrangesche Darstellung: $p(z) = \sum_{j=1}^{n} b_j\, L_j(z)$)

a) Schreibe zwei Matlab-Funktionen

`b = lagrangekoeff(y)` und `p = lagrangeinterpol(b, x, z)`.

Dabei soll die Funktion `lagrangekoeff(y)` mithilfe der Stützpunkte (x_i, y_i), $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ die zugehörigen Koeffizienten berechnen, während `lagrangeinterpol(b, x, z)` das Lagrange-Interpolationspolynom in z auswertet. Die Eingabe z soll auch als Vektor akzeptiert werden.

b) Teste deine Programme:

(i) Was sind die (Lagrangeschen) Koeffizenten des Interpolationspolynoms p durch die Stützpunkte $(-2, -14), (-1, 12), (1, 4)$ und $(2, 6)$? (Antwort: $b_0 = -14, b_1 = 12, b_2 = 4$ und $b_3 = 6$.)

(ii) Bestimme $p(3)$ und $p(-3)$. (Antwort: $p(3) = 36$, $p(-3) = -84$.)

Aufgabe 1.2 (5 Punkte): Wir stellen uns in dieser Aufgabe vor, dass es in MATLAB keine Funktion gibt, um den Sinus zu berechnen. Daher müssen wir unsere eigene Sinus-Funktion schreiben, wobei wir annehmen, dass wir zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in $[0, 2\pi]$ die Werte $y_i := \sin(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ kennen.

a) Schreibe drei MATLAB-Funktionen, die eine Approximation für den Sinus liefern. Dazu kannst du die Lagrange-Interpolation aus Aufgabe 1 verwenden. Die Funktionen sollen auch Vektoren als Eingabe akzeptieren.

(i) Die Funktion `p_1 = approx_sin_1(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	0	1	0	-1	0

benutzen.

(ii) Die Funktion `p_2 = approx_sin_2(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
y_i	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$

benutzen.

(iii) Die Funktion `p_3 = approx_sin_3(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
y_i	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$

benutzen.

b) Zeichne die drei Approximationen der Sinus-Kurve für $z \in [0, 2\pi]$ (Schrittweite $\pi/100$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Zeichne danach die Approximationen der Sinus-Kurve für $z \in [-\pi, 3\pi]$ (Schrittweite $\pi/100$) in ein Bild. Was fällt dir auf? Benutze `legend`, um dem Bild eine Legende hinzuzufügen und gib ihm mit `title` eine Überschrift. Speichere die Bilder als `Aufg_2_1.fig` und `Aufg_2_2.fig`.

c) Um unsere Approximation auch für $z \notin [0, 2\pi]$ sinnvoll gebrauchen zu können, nutzen wir die Periodizität der Sinus-Funktion aus: Modifiziere deine Funktionen aus Teil a) so, dass z auf ein $\tilde{z} \in [0, 2\pi]$ abgebildet wird mit $\sin(z) = \sin(\tilde{z})$, bevor die eigentliche Approximation berechnet wird. Dabei hilft der MATLAB-Befehl `mod`.

d) Zeichne, mit der Modifikation aus c), die drei Approximationen $p_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, für $z \in [-2\pi, 4\pi]$ (Schrittweite $\pi/100$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Zeichne auch den absoluten Fehler $|p_i(z) - \sin(z)|$, $i = 1, 2, 3$, in ein weiteres Bild. Benutze dafür zuerst wie gewohnt den Befehl `plot`, und dann den Befehl `semilogy`. Beschrifte alle drei Bilder wiederum mit einer Überschrift und einer Legende. Wie gut sind die drei Approximationen?

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
`https://tinyurl.com/UnibasFS18PraktikumII`