David Langweiler

Serie 1

Tutor: Christian Schulze

(Abgabe: am 6. März 2018 bis 10:00 Uhr im Fach)

Aufgabe 1.1

Bestimme mit der Lagrangeschen Interpolationsformel das Polynom p zweiten Grades, das in den Punkten $x = 1, 4, 9$ mit $1/\sqrt{x}$ übereinstimmt. Vergleiche die Approximation $p(2.25)$ mit dem exakten Wert $2/3$. Zeichne $p(x)$ und $1/\sqrt{x}$ für $x \in [1, 10]$.

Aufgabe 1.2

Bestimme das Polynom p zweiten Grades, das $p(-3) = 0$, $p(-1) = 1$ und $p(1) = 0$ erfüllt. Verwende dafür sowohl die Lagrangesche als auch die Newtonsche Interpolationsformel. Verifiziere, dass das Polynom in beiden Fällen dasselbe ist.

Aufgabe 1.3 (P)

Betrachte die folgende Wertetabelle für die Funktion $\log_2$ („Logarithmentafel“):

i	x_i	y_i
0	40	5.321928
1	42	5.392317
2	44	5.459432
3	46	5.523562
4	48	5.584963

Schreibe eine Matlab-Funktion `LogInterpol`, die mit der Newtonschen Interpolationsformel den interpolierten Wert $p(x)$ an einer beliebigen Stelle x berechnet. Vergleiche den interpolierten mit dem exakten Wert bei $x = 45.254834$. Zeichne $p(x)$ und $\log_2(x)$, zuerst für $x \in [40, 48]$ und dann für $x \in [1, 100]$. Zeichne auch die Fehlerfunktion $r(x) = \log_2(x) - p(x)$ für $x \in [40, 48]$.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite:
`https://tinyurl.com/NumerikFS2018`

Serie 01_A

Aufgabe 1.1

Bestimme mit der Lagrangeschen Interpolationsformel das Polynom p zweiten Grades, das in den Punkten $x = 1, 4, 9$ mit $1/\sqrt{x}$ übereinstimmt. Vergleiche die Approximation $p(2.25)$ mit dem exakten Wert $2/3$. Zeichne $p(x)$ und $1/\sqrt{x}$ für $x \in [1, 10]$.

gs: Polynom p zweiten Grades mit $\frac{1}{\sqrt{x}}$ an 1, 4, 9

gg: 1, 4, 9 Stützstellen für jeweils $\frac{1}{\sqrt{x}}$ als Stützwerte

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, L_i$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_n)}$$

Punkte $(1,1)$, $(4, 0{,}5)$, $(9, 0{,}\bar{3})$

$$L_i(1) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} = \frac{x^2-13x+36}{24}$$

$$L_i(4) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)} = \frac{x^2-10x+9}{-15}$$

$$L_i(9) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} = \frac{x^2-5x+4}{40}$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, L_i(x) = \frac{x^2-13x+36}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-10x+9}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \cdot 5x+4}{40}$$

$$= \frac{x^2-13x+36}{24} - \frac{x^2-10x+9}{30} + \frac{x^2-5x+4}{120} = \frac{(5-4+1)x^2}{120} - \frac{(13 \cdot 5 - 40 + 5)x}{120} + \frac{(36 \cdot 5 - 36 + 4)}{120}$$

$$= \frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{148}{120} = \underline{\underline{\frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{37}{30}}}$$

Vergleiche Approx. $p(2{,}25)$ mit exaktem Wert $2/3$

$$p(2{,}25) = \frac{1}{60} 2{,}25^2 - \frac{1}{4} 2{,}25 + \frac{37}{30} \doteq 0{,}75521$$

$$\frac{1}{\sqrt{2{,}25}} = 0{,}\bar{6}$$

Differenz: $0{,}75521 - 0{,}\bar{6} \doteq \underline{\underline{0{,}08854}}$

Aufgabe 1.2

Bestimme das Polynom p zweiten Grades, das $p(-3) = 0$, $p(-1) = 1$ und $p(1) = 0$ erfüllt. Verwende dafür sowohl die Lagrangesche als auch die Newtonsche Interpolationsformel. Verifiziere, dass das Polynom in beiden Fällen dasselbe ist.

gs: Polynom p zw. Grades Lagrange & Newton Interpol.

gg: $p(-3) = 0$, $p(-1) = 1$, $p(1) = 0$

Lag.

$$L_i(-3) = \frac{(x+1)(x-1)}{(-3+1)(-3-1)} = \frac{x^2-1}{8}$$

$$L_i(-1) = \frac{(x+3)(x-1)}{(-1+3)(-1-1)} = -\frac{x^2+2x-3}{4}$$

$$L_i(1) = \frac{(x+3)(x+1)}{(1+3)(1+1)} = \frac{x^2+4x+3}{8}$$

$$p(x) = -\frac{x^2+2x-3}{4} = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Newton'sche.

x	y		
-3	0 (c_1)		
		$\delta y[x_0,x_1] \Rightarrow \frac{1}{-1+3} = \frac{1}{2}$ (c_2)	
-1	1		$\delta y[x_0,x_1,x_2] \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{1+3} = -\frac{1}{4}$ (c_3)
		$\delta y[x_1,x_2] \Rightarrow \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$	
1	0		

$$p(x) = 0 + \frac{1}{2}(x+3) - \frac{1}{4}(x+3)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(x^2+4x+3) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Beide Interpolationsverfahren führen zum selben Polynom!

```
points = [40 5.321928; 42 5.392317; 44 5.459432; 46 5.523562; 48 5.584963]
range = size(points)

for i = 1:(range - 1)
    for j = 1:(range - i)
        points(j, 2+i) =  (points(j+1, 2+i-1) - points(j, 2+1-1))/(points(j+i, 1) -
points(j,1));
    end
end

cs = points(1,2:end);
xs = points(:,1)';

var = 45.254834;
disp("Innterpolation value of "+ num2str(var)+" "+ num2str(LogInterpol(var)))
disp("Exact value of "+ num2str(var)+" "+ num2str(log2(var)))

disp(points)

x = 40:48;
y = log2(x);

plot( x, y)
hold on

plot( x, arrayfun(@LogInterpol,x), "--r")
hold on

plot(x, log2(x) - arrayfun(@LogInterpol,x), ":b")

title("Plot Log Interpolation between 40-48")
xlabel("X-Axis")
ylabel("Y-Axis")
legend("log2(x)", "p(x)", "r(x)")



figure()
x = 1:100;
y = log2(x);
plot( x - 1, y, "--g")

hold on

plot( x, arrayfun(@LogInterpol,x), "--r")

title("Plot Log Interpolation between 1-100")
legend("log2(x)", "p(x)")

function y = LogInterpol(x)
    global xs cs;

    y = cs(1);
    for i = 2: size(cs')
        y = y + cs(i) * prod(x - xs(1:i-1));
```

```
    end
end
```

Aufgabe 1.3 (P)

Betrachte die folgende Wertetabelle für die Funktion $\log_2$ („Logarithmentafel“):

i	x_i	y_i
0	40	5.321928
1	42	5.392317
2	44	5.459432
3	46	5.523562
4	48	5.584963

Schreibe eine Matlab-Funktion `LogInterpol`, die mit der Newtonschen Interpolationsformel den interpolierten Wert $p(x)$ an einer beliebigen Stelle x berechnet. Vergleiche den interpolierten mit dem exakten Wert bei $x = 45.254834$. Zeichne $p(x)$ und $\log_2(x)$, zuerst für $x \in [40, 48]$ und dann für $x \in [1, 100]$. Zeichne auch die Fehlerfunktion $r(x) = \log_2(x) - p(x)$ für $x \in [40, 48]$.

↳ Pyramidenverfahren für c_i berechnen

↳ Reihe für $c_i(x - x_j)(x - x_{j+1}) \ldots$

↓

$p(x)$ bestimmt → x berechnen