Introdução à Análise de dados em FAE **(14.09.2021)**

ESTATÍSTICA BÁSICA

Professores: DILSON, ELIZA, SANDRO, E SHEILA *Name:* TAÍS DIAS IZIDORO

EXERCICIO 1

Ver capítulo 4 de V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013. Dedução do resultado acima.

Em geral: $u = f(x, y)$

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{(\bar{x},\bar{y})} \sigma_{xy}$$

Se a grandeza u é função de duas outras grandezas x e y e as variações de u são proporcionais às de x e y, a estimativa para o valor esperado de u é dada pelo valor da função f no ponto médio dos N pares (x_i, y_i) de medidas de x e y:

$$u = f(x,\, y)$$
$$\overline{u} = f(\overline{x},\, \overline{y})$$

Seja a matriz $2x2$ de covariância: $V = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$

E a matriz $2x1$ das derivadas parciais de u: $D_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\overline{x},\overline{y}} \quad D_u^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\overline{x},\overline{y}}$

A variância de u pode ser escrita como:

$$\sigma_u^2 = D_u^t V D_u$$

O que nos dá como resultado:

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy}$$

O erro associado a cada medida indireta de u é dado por:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy}}$$

E o erro da média é dado por:

$$\frac{\sigma_u}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy}}}{\sqrt{N}}$$

$$\boxed{\sigma_{\overline{u}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{\overline{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy}}}$$

E sendo então a variância para o $\overline{u}$:

$$\boxed{\sigma_{\overline{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{\overline{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy}}$$

EXERCICIO 2

Ver capítulo 4 de V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013. Dedução do resultado abaixo.

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

i) $u = x \pm y \longrightarrow \sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}}$

ii) $u = xy$ ou $u = x/y \longrightarrow \frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)}$

5

A composição de erros para adição ou subtração de duas grandezas não correlacionadas obedece ao teorema de Pitágoras. Dependendo do coeficiente de correlação r o erro é dado pelo módulo da diferença entre os vetores de módulos $\sigma_{\overline{x}} e \sigma_{\overline{y}}$, que fazem um ângulo α tal que $cos\alpha = \pm r$, ou seja, a composição dos erros para adição e subtração obedece a lei dos cossenos:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma_{\overline{u}}^2 \pm 2\sigma_{\overline{x}}\sigma_{\overline{y}} cos\theta$$

$$\boxed{\sigma_{\overline{u}}^2 = \sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma_{\overline{u}}^2 \pm 2r\sigma_{\overline{x}}\sigma_{\overline{y}}}$$

EXERCICIO 3

3.7.1 De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o desvio padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos seguintes intervalos?
a) (14, 18)
b) (12, 16)
c) (18, 20)

O intervalo de (14, 18) é da faixa $x \pm 2\sigma$, o que nos dá o nível de confiança de 95,5 %. Já o intervalo (12, 16) se encontra na faixa $x - 4\sigma$, se $x \pm 4\sigma = 100\%$, então como o intervalo se encontra somente na faixa "do lado esquerdo", o nível de confiança é de 50%. Já no intervalo (18,20) temos a faixa de $x + 2\sigma$, $x + 4\sigma$, se $x \pm 2\sigma = 95,5\%$, então somente a faixa "do lado direito"seria a metade, ou seja, 47,75%.

3.7.2 O conjunto representa cinco medidas da aceleração da gravidade g em m/s^2: $\{9.90; 9,68; 9,57; 9,72; 9,80\}$. Quais são a melhor estimativa e a respectiva incerteza para seu valor esperado, isto é, qual é a estimativa-padrão para a aceleração da gravidade?

Primeiramente calculamos o valor de $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{9,90 + 9,68 + 9,57 + 9,72 + 9,80}{5} = 9,73$$

Agora calculamos o desvio padrão das medidas de x, então dividimos pela raiz de N (número de medidas) para encontrar o valor do desvio padrão de $\overline{x}$:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(9,90 - 9,73)^2 + (9,68 - 9,73)^2 + (9,57 - 9,73)^2 + (9,72 - 9,73)^2 + (9,80 - 9,73)^2}{5}} = 0,11$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{0,11}{\sqrt{5}} = 0,05$$

Logo, a estimativa-padrão é $g = (9,73 \pm 0,05)\, m/s^2$.

3.7.3 O conjunto representa cinco medidas para a $f.e.m$ em volts (V) de uma pilha: $\{1,62; 1,71; 1,80; 1,76; 1,68\}$ Qual a estimativa-padrão para a $f.e.m$ da pilha?

Como no exercício anterior, vamos calcular o valor de $\overline{x} edepoisodesviopadrão, entãodividindopelaraizdonúmerode$

$$\overline{x} = \frac{1,62 + 1,71 + 1,80 + 1,76 + 1,68}{5} = 1,71$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{0,0081 + 0 + 0,0081 + 0,0025 + 0,009}{5}} = 0,06$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{0,06}{\sqrt{5}} = 0,03$$

Então a estimativa-padrão para a $f.e.m$ é: $f.e.m = (1,71 \pm 0,03)\, V$.

3.7.4 Após determinar a velocidade do som em várias baterias de medidas, a dispersão em cada uma das baterias caracterizada pelo desvio-padrão, foi da ordem de $\sigma_v = 10m/s$. Quantas medidas são necessárias, em uma bateria, para que a incerteza na estimativa-padrão da velocidade seja da ordem de $3m/s$?

Seja $\sigma_1 = 10, \sigma_2 = 3$, então:

$$\sigma_1 = x \times \sigma_2$$

$$x = 1\frac{10}{3}$$

$$x = 3,33$$

Então a razão entre as medidas deve ser de 3,33.

3.7.5 Três grupos de estudantes determinaram a carga do elétron, com nível de confiança de 68%, como: $\{e_1 = (1,72 \pm 0,04) \times 10^{-19}\, C, e_2 = (1,75 \pm 0,07) \times 10^{-19}\, C, e_3 = (1,62 \pm 0,03) \times 10^{-19}\, C\}$. Se o valor de referência para a carga do elétron é $1,602117733(49) \times 10^{-19}\, C$, quais das estimativas são satisfatórias?

Para haver compatibilidade entre as medidas: $|\overline{x} - x_{ref}| < 2\sigma_{\overline{x}}$, então:

1. $|1,72 - 1,60| = 0,12 > 2\sigma_{\overline{x}_1}$
2. $|1,75 - 1,60| = 0,15 > 2\sigma_{\overline{x}_2}$
3. $|1,62 - 1,60| = 0.02 < 2\sigma_{\overline{x}_3}$

Logo, somente a estimativa para e_3 é compatível.

3.7.6 Dois experimentos em Física de Altas Energias anunciam a descoberta de uma nova partícula. As massas apresentadas, com nível de confiança de 68%, são:$\{m_1 = (7,8 \pm 0,2) \times 10^{-27}\,kg, m_2 = (7,0 \pm 0,3) \times 10^{-27}\,kg\}$**. Podem esses valores representar a massa de uma mesma partícula?**

Para comparar duas medidas, antes de fazer o mesmo procedimento feito na questão anterior, devemos calcular o valor de σ **relativo aos dois erros, e isso é feito da seguinte maneira:**

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$
$$\sigma = \sqrt{0,2^2 + 0,3^2} = 0,36$$

Agora calculando a discrepância como: $|x_1 - x_2| < 2\sigma_{\overline{x}}$**.**

$$|7,8 - 7,0| = 0,08 > 2\sigma$$

Logo não podem representar a massa da mesma partícula ao nível de confiança de 68%.

3.7.7 As medidas da densidade de um líquido, em g/cms^3**, são:** $\{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9\}$
a) Qual a estimativa padrão para a densidade do líquido?
b) Se o valor de referência para a densidade do líquido é $1,8524(4)\,g/cm^3$**, analise a discrepância entre a estimativa e esse valor de referência.**

A estimativa padrão é calculada primeiramente encontrando o valor da média $\overline{x}$**, então encontrando o desvio padrão e dividindo pela raiz do número de medidas para encontrarmos o erro da média** $\sigma_{\overline{x}}$**:**

$$\overline{x} = \frac{1,9 + 1,9 + 1,9 + 2,0 + 1,9}{5} = 1,9$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{0 + 0 + 0,01 + 0,01 + 0}{5}} = 0,06$$
$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{0,06}{\sqrt{5}} = 0,03$$

A estimativa-padrão é então: $\overline{x} = (1,9 \pm 0,03)\,g/cm^3$**. Analisando agora a discrepância com o valor de referência:**

$$|1,85 - 1,9| = 0,05 < 2\sigma$$

Logo, a compatibilidade é aceita.

3.7.8 Ao se estudar uma reação nuclear, as energias no início (E_i) **e no final** (E_f) **do processo são:** $\{E_i = 75 \pm 3\,MeV,\ E_f = 60 \pm 9\,MeV\}$**. A discrepância é significativa?**

Primeiro calculamos o valor de σ **relativo aos erros das duas medidas:**

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$
$$\sigma = \sqrt{3^2 + 9^2} = 9,48$$
$$|75 - 60| = 5 < 2\sigma$$

A discrepância não é significativa.

3.7.9 Os dois únicos experimentos (D0 E CDF) que mediram a massa do quark top encontraram, respectivamente, os seguintes valores: $\{m_t(D0) = (179,0 \pm 5,1)\,Gev/C^2, m_t(CDF) = (176,1 \pm 6,6)\,GeV/c^2\}$**. Determine o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do top.**

Seguindo o mesmo método das questões anteriores:

$$\overline{x} = \frac{\frac{179{,}0}{5{,}1^2} + \frac{176{,}1}{6{,}6^2}}{\sqrt{\frac{1}{5{,}1^2} + \frac{1}{6{,}6^2}}} = 177,92$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5{,}1^2} + \frac{1}{6{,}6^2}}} = 4,04$$

Então o resultado combinado é: $\overline{m}_t = (177,92 \pm 4,04)\, GeV/c^2$**.**

3.7.10 Um estudante apresenta como estimativa-padrão da aceleração local da gravidade o resultado $(9,5 \pm 0,1)\, m/s^2$**. Se o valor de referência local** $9,78791660(15)\, m/s^2$**, analise esse resultado.**

$$|9,5 - 9,78| = 0,29 > 2\sigma$$

Não é compatível.

3.7.11 A partir de 40 medidas da $f.e.m$ **de uma pilha, um estudante determina que a média e o desvio padrão são, respectivamente,** $\overline{x} = 1,022\, V$, $\sigma_{x_1} = 0,01\, V$**. Em seguida, utilizando outro voltímetro,, obtém 10 novas medias e encontra uma média de** $\overline{x} = 1,018\, V$ **e a dispersão reduzida por um fator 2,5** ($\sigma_{x_2} = 0.004\, V$)**. Qual a estimativa para a** $f.e.m$ **da pilha resultante da combinação das duas amostras?**

$$\overline{x} = \frac{\frac{1.022}{0{,}01^2} + \frac{1{,}018}{0{,}004^2}}{\frac{1}{0{,}01^2} + \frac{1}{0{,}004^2}} = 1.01855$$

$$\sigma = \frac{1}{\frac{1}{0{,}01^2} + \frac{1}{0{,}004^2}} = 0.00001$$

A estimativa-padrão é então $f.e.m = (1.01855 \pm 0,00001)\, V$**.**

$\boxed{\text{EXERCICIO 4}}$

Eleger 5 partículas do Particle Data Group (PDG) e combinar o resultado para as suas masssas.

Selecionando as partículas: Strange mésons $K^{\pm}(massa = 493.667 \pm 0.0016\, MeV)$, $K^0(massa = 497.611 \pm 0.0013\, MeV)$**, Charmed mésons** $D^{\pm}(massa = 1869.65 \pm 0.05\, MeV)$, $D^0(massa = 1864.83 \pm 0.05\, MeV)$**, Charmed Strange méson** $D_S^{\pm}(massa = 1968.34 \pm 0.07\, MeV)$**. Primeiramente devemos combinar o valor das massas para obter** $\overline{m}$ **da seguinte forma:**

$$\overline{m} = \frac{\frac{493.677}{0.016^2} + \frac{497.611}{0.013^2} + \frac{1869.65}{0.05^2} + \frac{1864.83}{0.05^2} + \frac{1968.34}{0.07^2}}{\frac{1}{0.016^2} + \frac{1}{0.013^2} + \frac{1}{0.05^2} + \frac{1}{0.05^2} + \frac{1}{0.07^2}}$$

$$\overline{m} = 625.109119 = 625.11$$

Agora para os erros:

$$\sigma_{\overline{m}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{0.016^2} + \frac{1}{0.013^2} + \frac{1}{0.05^2} + \frac{1}{0.05^2} + \frac{1}{0.07^2}}}$$

$$\sigma_{\overline{m}} = 0.009610 = 0.01$$

Logo, o valor esperado para a massa das 5 partículas combinadas é:

$$\boxed{m = 625.11 \pm 0.01\, MeV}$$

$\boxed{\text{EXERCICIO 5}}$

V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013. Dedução de:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Seja uma amostra de N pares de medidas (x_i, y_i) das grandezas x e y, onde as incertezas σ_i nas medidas y_i de y são distintas, para as quais deseja-se ajustar uma reta $y(x) = ax + b$, o método dos mínimos quadrados consiste na minimização da soma dos quadrados dos resíduos, que são ponderados pelo quadrados dos inversos dessas incertezas de cada medida, e a função positiva $S(a,b)$ dos parâmetros a e b é expressa por:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right)^2 > 0$$

EXERCICIO 6

V. Oguri, et. al., Estimativas e erros em experimentos de Física, 2013. Dedução de:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \sigma_a = \dfrac{1}{\sigma_x}\dfrac{\epsilon_y}{\sqrt{N}} \\ \\ \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}} \end{array}}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{N-2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N-2}(1-r^2)}$$

Expandindo a equação encontrada no exercício anterior, porém as incertezas de y sendo idênticas, ou seja:

$$\begin{aligned} S(a,b) &= \sum_{i=1}^{N} (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2 > 0 \\ &= \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2(ax_i + b)y_i + (ax_i + b)^2 > 0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - 2b\sum_{i=1}^{N} y_i + a^2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{N} x_i + Nb^2 \right) > 0 \\ &= \left(\overline{y^2} - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + a^2\overline{x^2} + 2ab\overline{x} + b^2 \right) > 0 \end{aligned}$$

Uma vez que N, $\overline{x^2}$ são positivos, para um dado valor de b:

$$S(a, b = cte) = \left[\overline{x^2}a^2 - 2(\overline{xy} - b\overline{x})a + \overline{y^2} - 2b\overline{y} + b^2 \right] N > 0$$

É um trinômio positivo do segundo grau em a que apresenta um valor mínimo para $a = \widehat{a}$. E, para um dado valor de a:

$$S(a = cte, b) = \left[b^2 - 2(\overline{y} - a\overline{x})b + \overline{y^2} - 2a\overline{xy} + a^2\overline{x^2} \right] N > 0$$

É um trinômio positivo do segundo grau em b que apresenta um valor mínimo para $b = \widehat{b}$. Desse modo, os valor de a e b que minimizam simultaneamente ambos os trinômios relacionam-se

por:

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

$$a = \frac{\overline{xy} - b\overline{x}}{\overline{x^2}} = \frac{\overline{xy}v - v\overline{xy + a\overline{x}^2}}{\overline{x^2}} \Rightarrow (\overline{x^2} - \overline{x}^2)a = \sigma_{xy}$$

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Escrevendo-se a solução para os parâmetros como:

$$a = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i y_i - \overline{x} y_i)}{N\sigma_x^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x}) y_i}{N\sigma_x^2}$$

$$b = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{N} - \frac{(x_i - \overline{x})\overline{x}}{N\sigma_x^2}\right] y_i$$

De acordo com a fórmula de erros para a adição e levando em conta que cada medida de y tem a mesma incerteza ($\sigma_i = \varepsilon_y$), as incertezas nos parâmetros são dadas por:

$$(\sigma_a)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{(N\sigma_x^2)^2}(\varepsilon_y)^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{N\sigma_x^2}$$

$$(\sigma_b)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\sigma_x^2 - (x_i - \overline{x})\overline{x}\right]^2}{(N\sigma_x^2)^2}(\varepsilon_y)^2$$

$$= \frac{\left[N\sigma_x^4 - 2\sigma_x^2\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})\overline{x} + \sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\overline{x}^2\right]}{(N\sigma_x^2)^2}(\varepsilon_y)^2$$

$$= \frac{(\sigma_x^2 + \overline{x}^2)}{N\sigma_x^2}(\varepsilon_y)^2 = \overline{x^2}\frac{\varepsilon_y^2}{N\sigma_x^2} = (\sigma_a)^2\overline{x^2}$$

Ou seja:

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x}\frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}}$$

$$\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - ax_i - b)^2}{N-2}} = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{N-2}(1-r^2)}$$

Onde ε_y é a estimativa para o erro em cada uma das medidas de y.

EXERCICIO 7

Para encontrarmos a probabilidade de sortearmos um aluno de exatas, devemos encontrar primeiramente a probabilidade de se sortear um aluno dentre todos os calouros e depois somente dos inscritos na área tecnológica e multiplicar essas probabilidades. (Seja S_1 a soma dos calouros, P_1 a probabilidade de se sortear um calouro, S_2 a soma dos inscritos na área tecnológica, P_2 a probabilidade de sortearmos um aluno dessa área, e P_3 a probabilidade de sortearmos um calouro da área tecnológica):

$$S_1 = 5419, \; S_2 = 1838$$

$$P_1 = \frac{2587}{5419} = 47,7\%$$

$$P_2 = \frac{1291}{1838} = 70,2\%$$

$$P_3 = 47,7\% \times 70,2\% = \boxed{33,5\%}$$

EXERCICIO 8

Devemos fazer uma combinação da taxa de acertos da testemunha com a taca de carros aceitados (Sendo a taxa de acerto igual a 80% e a taxa de carros igual a 15%):

$$80\% \times 15\% = \boxed{12\%}$$

EXERCICIO 9

Devemos retirar a "parte"dos testes falsos positivos e falsos negativos da taxa de incidência. Fazemos então (Seja $0,8\%$ a taxa de incidência de câncer $7\% \times 0,8\%$ os falsos positivos e $10\% \times 0,8\%$ os falsos negativos):

$$0,8\% - (7\% \times 0,8\% + 10\% \times 0,8\%) = \boxed{0,66\%}$$

EXERCICIO 10

Devemos fazer uma combinação de probabilidades de sair uma bola preta em cada urna (P_1 = Bola preta 1° × bola preta 2° × bola preta 3°) combinada também com a chance de ter sido a terceira urna($P_1 \times \frac{1}{3}$):

$$P_1 = \frac{6}{11} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = 15,15\%$$
$$P_1 \times \frac{1}{3} = 0,1515 \times \frac{1}{3} = \boxed{5,05\%}$$

EXERCICIO 11

Sejam os métodos para calcular a média μ e o desvio padrão σ:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx$$
$$\mu = sin^2\frac{\pi}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ dx$$
$$\boxed{\mu = 0}$$
$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx - \mu^2$$
$$\sigma = sin^2\frac{\pi}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x^3\ dx - 0$$
$$\boxed{\sigma = 0}$$

EXERCICIO 12

As eficiências para sistemas compostos por 4 e 5 câmaras serão dadas pelas distribuições binomiais a seguir:

$$B(3|4;0,6) = \frac{4!}{3!1!}0,6^3(1-0,6)^1 = 34,5\%$$
$$B(3|5;0,6) = \frac{5!}{3!2!}0,6^3(1-0,6)^2 = 34,5\%$$

EXERCICIO 14

Resolução no notebook.

EXERCICIO 15

Resolução no notebook.

EXERCICIO 16

Para chegarmos nos 10% do final da distribuição, devemos calcular a 'área' coberta pelo intervalo de confiança tal que seja 80%, onde a altura h será a altura a partir da qual estarão os 10% mais altos (Pois a distribuição parte da média, logo para chegarmos nos 10% finais também chegaremos nos 10% iniciais). Seja $(\mu \pm 1,28\sigma) = 80\%$:

$$h = (1,70 + 1,28 \times 5)cm = 176,4cm$$