

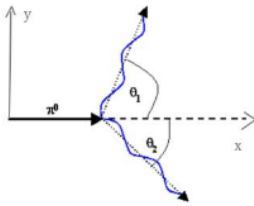
CINEMÁTICA DAS COLISÕES EM ALTAS ENERGIAS

Professores: DILSON, ELIZA, SANDRO E SHEILA

Name: TAÍS DIAS IZIDORO

EXERCICIO 0

Quando um pión decai em dois fótons, qual a energia dos fótons?



Pela conservação de energia, temos que:

$$E_{\pi} = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$$

Sendo a energia do pión e de cada fóton iguais a:

$$E_{\pi} = \gamma m_{\pi} c^2$$

$$E_{\gamma_1} = h\nu_1$$

$$E_{\gamma_2} = h\nu_2$$

A equação da conservação de energia se dá por:

$$\gamma m_{\pi} c^2 = h\nu_1 + h\nu_2 \quad (0.1)$$

$$\frac{h\nu_2}{c} = \gamma m_{\pi} c - \frac{h\nu_1}{c} \quad (0.2)$$

Analisando agora a conservação do momentum do pión:

$$\vec{p} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$$

Sendo o momentum paralelo e perpendicular do pión em relação a sua trajetória iguais a:

$$|p_{\pi, \parallel}| = |p_{\gamma_1, \parallel}| + |p_{\gamma_2, \parallel}| = \gamma m_{\pi} v$$

$$|p_{\pi, \perp}| = |p_{\gamma_1, \perp}| + |p_{\gamma_2, \perp}| = 0$$

E o momentum paralelo e perpendicular de cada fóton em relação a sua trajetória iguais a:

$$\begin{aligned} |p_{\gamma_1, \parallel}^{\rightarrow}| &= \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1 \\ |p_{\gamma_2, \parallel}^{\rightarrow}| &= \frac{h\nu_2}{c} \cos\theta_2 \\ |p_{\gamma_1, \perp}^{\rightarrow}| &= \frac{h\nu_1}{c} \sin\theta_1 \\ |p_{\gamma_2, \perp}^{\rightarrow}| &= \frac{h\nu_2}{c} \sin\theta_2 \end{aligned}$$

As equações da conservação do momentum paralelo e perpendicular se dão por:

$$\gamma m_{\pi} v = \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c} \cos\theta_2 \quad (0.3)$$

$$0 = \frac{h\nu_1}{c} \sin\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c} \sin\theta_2 \implies \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \sin^2\theta_1 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 \sin^2\theta_2 \quad (0.4)$$

Trabalhando agora com a Equação 0.3:

$$\begin{aligned} \gamma m_{\pi} v - \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1 &= \frac{h\nu_2}{c} \cos\theta_2 \\ (\gamma m_{\pi} v - \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1)^2 &= \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 \cos^2\theta_2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 (1 - \sin^2\theta_2) \\ (\gamma m_{\pi} v - \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1)^2 &= \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 \sin^2\theta_2 \end{aligned}$$

Aplicando as Equações 0.2 e 0.4 no resultado acima:

$$\begin{aligned} (\gamma m_{\pi} v - \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1)^2 &= (\gamma m_{\pi} c - \frac{h\nu_1}{c})^2 - \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \sin^2\theta_1 \\ (\gamma m_{\pi} v)^2 - 2\gamma m_{\pi} v \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \cos^2\theta_1 &= (\gamma m_{\pi} c - \frac{h\nu_1}{c})^2 - \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \sin^2\theta_1 \\ (\gamma m_{\pi} v)^2 - 2\gamma m_{\pi} v \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 (\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) &= (\gamma m_{\pi} c)^2 - 2\gamma m_{\pi} c \frac{h\nu_1}{c} + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \\ (\gamma m_{\pi} v)^2 - 2\gamma m_{\pi} v \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 &= (\gamma m_{\pi} c)^2 - 2\gamma m_{\pi} c \frac{h\nu_1}{c} + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \\ (\gamma m_{\pi} v)^2 - 2\gamma m_{\pi} v \frac{h\nu_1}{c} \cos\theta_1 &= (\gamma m_{\pi} c)^2 - 2\gamma m_{\pi} c \frac{h\nu_1}{c} \\ 2\frac{h\nu_1}{c} (c - v \cos\theta_1) &= \gamma m_{\pi} (c^2 - v^2) \\ 2\frac{h\nu_1}{c} (c - v \cos\theta_1) &= \gamma m_{\pi} c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) \\ 2\frac{h\nu_1}{c} (c - v \cos\theta_1) &= \frac{m_{\pi} c^2}{\gamma} \\ 2h\nu_1 (1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1) &= \frac{m_{\pi} c^2}{\gamma} \\ h\nu_1 &= \frac{m_{\pi} c^2}{2\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)} \\ \boxed{E_{\gamma_1} = \frac{m_{\pi} c^2}{2\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)}} \end{aligned}$$

Encontramos então a energia do primeiro fóton. Aplicando esse resultado na Equação 0.1:

$$\begin{aligned}\gamma m_\pi c^2 &= \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)} + h\nu_2 \\ h\nu_2 &= \gamma m_\pi c^2 - \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)} = \frac{2\gamma^2 m_\pi c^2 - 2\gamma^2 m_\pi c v \cos\theta_1 - m_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)} \\ h\nu_2 &= 2m_\pi c^2 \left[\frac{\gamma^2 - \gamma^2 \frac{v}{c} \cos\theta_1 - 1}{2\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)} \right]\end{aligned}$$

Porém:

$$\begin{aligned}\gamma^2 - 1 &= \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} - 1 \\ \gamma^2 - 1 &= \frac{c^2}{c^2 - v^2} - \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} \\ \gamma^2 - 1 &= \frac{v^2}{c^2 - v^2} = \frac{v^2}{c^2} \gamma^2\end{aligned}$$

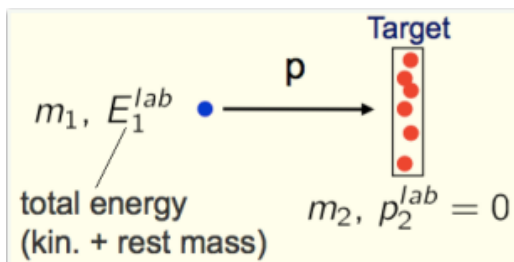
Então:

$$\begin{aligned}h\nu_2 &= 2m_\pi c^2 \left[\frac{\frac{v^2}{c^2} \gamma^2 - \frac{v}{c} \gamma^2 \cos\theta_1}{2\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)} \right] \\ h\nu_2 &= 2m_\pi c^2 \frac{v}{c} \gamma^2 \left[\frac{\frac{v}{c} - \cos\theta_1}{2\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1)} \right] \\ h\nu_2 &= m_\pi c v \gamma \left[\frac{\frac{v}{c} - \cos\theta_1}{1 - \frac{v}{c} \cos\theta_1} \right] \\ h\nu_2 &= m_\pi c v \gamma \left[\frac{\frac{v - c \cos\theta_1}{c}}{\frac{c - v \cos\theta_1}{c}} \right] \\ h\nu_2 &= m_\pi c v \gamma \left[\frac{v - c \cos\theta_1}{c - v \cos\theta_1} \right] \\ E_{\gamma_2} &= m_\pi c v \gamma \left[\frac{v - c \cos\theta_1}{c - v \cos\theta_1} \right]\end{aligned}$$

Encontramos então a energia do segundo fóton.

EXERCICIO 1

Prove a equação: $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_1^2 + 2E_1^{LAB} m_2}$



Da relação energia-momentum temos que:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (0.5)$$

Em experimentos de alvo fixo o momentum do alvo é $p = 0$, logo a equação anterior se reduz a:

$$E^2 = m^2$$

O produto interno do quadrimomentum nos dá o quadrado da norma desse vetor, o que é proporcional ao quadrado da massa em repouso

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle &= |P|^2 = m_o^2 \\ p^2 &= m^2 \end{aligned} \quad (0.6)$$

Então, trabalhando com o canal s para analisarmos antes e depois da colisão separadamente, temos que:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \\ s &= (m_1 + m_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \end{aligned}$$

O ultimo termo de $p_1 p_2 = p_1^0 p_2^0 - \vec{p}_1 \vec{p}_2$ é anulado pelo fato da partícula alvo ter momentum nulo. Já no termo $p_1^0 p_2^0$ temos para p_1^0 :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= (E_1^{LAB}, p_x, p_y, p_z) \\ p_1^0 &= E_1^{LAB} \end{aligned}$$

Da Equação 0.6 tiramos que:

$$p_2^0 = m_2$$

Então a nossa equação para o canal s fica como:

$$s = m_1 + m_2 + 2E_1^{LAB} m_2$$

Em experimentos de alvo fixo a energia total é dada por \sqrt{s} , então temos para a energia total:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1 + m_2 + 2E_1^{LAB} m_2}$$

EXERCICIO 2

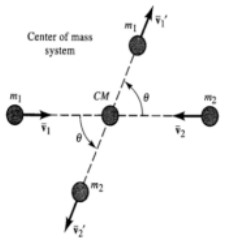
Considerando $E_1^{LAB} \gg m_1, m_2$, prove esta aproximação: $E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{LAB}}$

Para altas energias E_1^{LAB} , ou seja, $E_1^{LAB} \gg m_1, m_2$, a massa das partículas sendo $m_1, m_2 < 1$, temos que o quadrado de cada massa aproxima mais ainda esse valor de 0. Então se $m_1 \approx 0, m_2 \approx 0$:

$$\begin{aligned} E_T &\approx \sqrt{s} \approx \sqrt{0 + 0 + 2E_1^{LAB}} \\ E_T &\approx \sqrt{2E_1^{LAB}} \end{aligned}$$

EXERCICIO 3

Prove que $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1 + m_2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)}$



A energia do centro de massa é dada pelo canal s :

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2$$

O termo $p_1 p_2$ se da por $p_1 p_2 = p_1^0 p_2^0 - \vec{p}_1 \vec{p}_2$ onde $\vec{p}_1 \vec{p}_2 = p_1 p_2 \cos \theta$, logo:

$$p_1 p_2 = p_1^0 p_2^0 - p_1 p_2 \cos \theta$$

Pela Equação 0.6 no exercício 1 ($p^2 = m^2$) e pela proposição feita também no exercício 1:

$$\vec{p}_1 = (E_1, p_x, p_y, p_z)$$

$$p_1^0 = E_1$$

O mesmo vale para p_2 . Como $\beta = \frac{p}{E}$:

$$p = \beta E$$

$$p_1 p_2 = E_1 E_2 - \beta_1 E_1 \beta_2 E_2 \cos \theta$$

Então:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2\beta_1 E_1 \beta_2 E_2 \cos \theta$$

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)$$

A energia total do centro de massa é dado por:

$$E_T = \sqrt{s}$$

$$E_T = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)}$$

EXERCICIO 4

Considerando $p_1 = -p_2, m_1 = m_2$, prove a aproximação: $E_T = \sqrt{s} = 2E_1$:

Se $E_T = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)}$, escrevendo $m_1 = m_2 = m, p_1 = -p_2 = p$:

$$E_T = \sqrt{2m^2 + 2E_1 E_2 \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{E_1 E_2}\right)}$$

$$E_T = \sqrt{2m^2 + 2E_1 E_2 + 2|\vec{p}|^2}$$

Porém $E_1^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 = E_2^2$, então temos para a energia total:

$$E_T = \sqrt{2(p^2 + m^2) + 2E_1^2}$$

$$E_T = \sqrt{2E_1^2 + 2E_1^2}$$

$$E_T = \sqrt{4E_1^2}$$

$$E_T = 2E_1$$

EXERCICIO 5

Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.

- Qual a energia do centro de massa para essa interação?
- Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?
- Quais os colisores assimétricos usados atualmente e por que não usar um colisor mais potente?

a. Como mostrado no exercício 2, a energia do centro de massa em experimentos de alvo fixo é dada por $E = \sqrt{2E_1m_2}$. Temos então que descobrir a energia do próton. Sendo a massa do hidrogênio e do próton apresentadas abaixo, descobrimos essa energia a partir da Equação 0.5 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} m_H &= 0.938 \text{ GeV}, m_P = 0.938 \text{ GeV} \\ E_P &= \sqrt{p^2 + m^2} \\ E_P &= \sqrt{(100 \text{ GeV})^2 + (0.938 \text{ GeV})^2} = 100,004 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Então, aplicando a energia do próton na Equação da energia total temos:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2E_P m_H} \\ E &= \sqrt{2(100,004 \text{ GeV})(0.938 \text{ GeV})} \\ E &= \sqrt{187,607} \\ E &= 13,697 \text{ GeV} \end{aligned}$$

b. Como não é um experimento de alvo fixo, a energia total é dada por $E = 2E_1$. Um próton é acelerado a 7 TeV no LHC, então a energia total é:

$$E_{LHC} = 2E_P = 2(7 \text{ TeV}) = 14 \text{ TeV}$$

Para alcançar essa energia total devemos acelerar o próton a energia de:

$$\begin{aligned} E_T &= \sqrt{2E_1^{LAB} m_2} \\ 14000 \text{ GeV} &= \sqrt{2E_1^{LAB} (0.938 \text{ GeV})} \\ E_1^{LAB} &= \frac{(14000 \text{ GeV})^2}{2(0.938 \text{ GeV})} \\ E_1^{LAB} &= 104,477,612 \text{ GeV} \\ E_1^{LAB} &= 104,477 \text{ TeV} \end{aligned}$$

c. Como colisores assimétricos atuais temos o LHC (Large Hadron Collider), o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), PEP-II no SLAC, o KEK-B e o BELLE no KEK, HERA no DESY, PHENIX collaboration, PHOBOS collaboration, STAR collaboration, etc. Para visualizarmos

partículas extremamente energéticas que só podem ser visualizadas quando duas partículas colidem muito próximo a velocidade da luz, a tendência é aumentar cada vez mais a energia de colisão. No entanto, conforme aumentamos essa energia, aumentamos muito pouco a velocidade (nunca alcançando a velocidade da luz), quase não alterando o momentum de cada partícula e por fim, a energia de colisão.

EXERCICIO 5-A

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV:

Primeiramente para o experimento de alvo fixo, a energia de centro de massa é dada por:

$$E = \sqrt{2E_1^{LAB}m_2}$$

$$E = \sqrt{2(3500 \text{ GeV})(0.938 \text{ GeV})}$$

$$E = 81,03 \text{ GeV}$$

Agora para um colisor de partículas, a energia de centro de massa é dada por:

$$E = 2E_1$$

$$E = 2(3500 \text{ GeV}) = 7000 \text{ GeV}$$

$$E = 7 \text{ TeV}$$

EXERCICIO 6

Em espalhamento elástico do tipo $A + A = A + A$, quais são as variáveis de Mandelstam?

As Variáveis de Mandelstam são:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$$

$$t = (p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1'$$

$$u = (p_1 - p_2')^2 = (p_2 - p_1')^2 = p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2'$$

EXERCICIO 7

Prove que: $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$

Pelas equações descritas no exercício anterior, o somatório $s + t + u$ é igual a:

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_1'^2 + p_2'^2 + p_1^2 + p_2'^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_1' - 2p_1p_2'$$

Através da Equação 0.6 podemos fazer a seguinte modificação:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 + 2p_1^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_1' - 2p_1p_2'$$

Pela conservação do quadrimomentum: $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$, $p_1 = -p_2 + p_1' + p_2'$, os quatro últimos termos da equação anterior somam 0, logo:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$$

EXERCICIO 8

Mostre a transformação: $\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}$

Considerando o vetor quadrimomentum $p = (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z)$ para $p_x = p_{\parallel}$ e $p_{\perp} = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$, as transformações de Lorentz se resumem a (contanto que $p_{\perp} = p'_{\perp}$):

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \beta p_{\parallel}) \\ p'_{\parallel} &= \gamma(p_{\parallel} - \beta E) \end{aligned}$$

Que da forma matricial é:

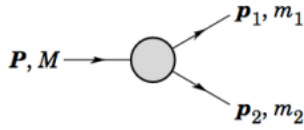
$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Sendo $\gamma = \cosh y$, $\beta = \tanh y$, $\gamma\beta = \sinh y$:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}, p_{\perp} = p'_{\perp}$$

EXERCICIO 8-A

Mostre em detalhes que o decaimento de dois corpos pode ser descrito por:



Sejam os quadrimomentum $P = (E, \vec{P})$, $P_1 = (E_1, \vec{P}_1)$, $P_2 = (E_2, \vec{P}_2)$ e sejam os quadrimomentum no centro de massa $P' = (M, \vec{0})$, $P'_1 = (E'_1, \vec{P}'_1)$, $P'_2 = (E'_2, \vec{P}'_2)$. Pela conservação da energia e do momentum temos que:

$$M = E'_1 + E'_2 \quad (0.7)$$

$$\vec{P}'_1 = -\vec{P}'_2 \equiv \vec{P}'$$

Da onde tiramos que $\left| \vec{P}'_1 \right|^2 = \left| \vec{P}'_2 \right|^2$, logo pela Equação 0.5:

$$\begin{aligned} E_1'^2 - m_1^2 - E_2'^2 + m_2^2 &= 0 \\ E_2'^2 &= E_1'^2 - m_1^2 + m_2^2 \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na Equação 0.7, encontramos:

$$\begin{aligned} M &= E'_1 + (E_2'^2 - m_1^2 + m_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ M^2 - 2ME'_1 + E_1'^2 &= E_1'^2 - m_1^2 + m_2^2 \end{aligned}$$

$$E'_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

O qual é o valor da energia da primeira partícula. Podemos também encontrar a energia da segunda partícula substituindo novamente na Equação 7 o valor encontrado acima:

$$E'_2 = M - E'_1$$

$$E'_2 = \frac{2M^2 - M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}$$

$$E'_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}$$

Podemos agora calcular também o valor do momentum P' :

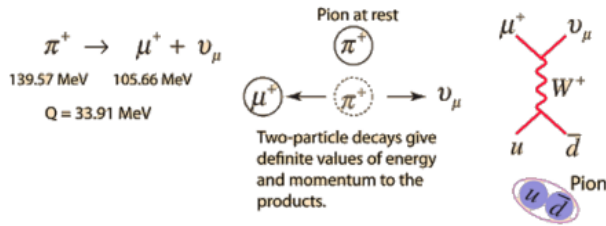
$$P' = P'_1 = P'_2 = (E'^2_1 - m^2_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$p' = \left[\frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2} - m_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$p' = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{\frac{1}{2}}}{2M}$$

EXERCICIO 9

Determine a energia e o momentum para o seguinte decaimento de dois corpos:



Substituindo os valores nas equações encontradas no exercício anterior, temos os seguintes valores para energia e momentum, dados $M = m_\pi = 139.57 \text{ MeV}$, $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}$, $m_\nu = 0$:

$$E_\mu = \frac{(139.57 \text{ MeV})^2 + (105.66 \text{ MeV})^2 - 0}{2(139.57 \text{ MeV})}$$

$$E_\mu = \frac{30,643.8205 \text{ MeV}^2}{279.14 \text{ MeV}}$$

$$E_\mu = 109.779 \text{ MeV}$$

$$E_\nu = \frac{(139.57 \text{ MeV})^2 + 0 - (105.66 \text{ MeV})^2}{2(139.57 \text{ MeV})}$$

$$E_\nu = \frac{8,315.7493 \text{ MeV}^2}{279.14 \text{ MeV}}$$

$$E_\nu = 29.79 \text{ MeV}$$

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{P}|$$

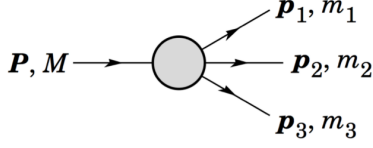
$$P = \frac{[((139.57 \text{ MeV})^2 - (105.66 \text{ MeV} + 0)^2)((139.57 \text{ MeV})^2 - (105.66 \text{ MeV} - 0)^2)]^{\frac{1}{2}}}{2(139.57 \text{ MeV})}$$

$$P = \frac{8,315.7493 \text{ MeV}^2}{279.14 \text{ MeV}}$$

$$P = 29.79 \text{ MeV}$$

EXERCICIO 10

Prove o decaimento de 3 corpos:



Analogamente ao método utilizado para o decaimento de 2 corpos, valem as variáveis:

$$\begin{aligned}s_{12} &= (P_1 + P_2)^2 = (P - P_3)^2 \\ s_{23} &= (P_2 + P_3)^2 = (P - P_1)^2 \\ s_{31} &= (P_3 + P_1)^2 = (P - P_2)^2\end{aligned}$$

Sendo a soma das variáveis:

$$s_{12} + s_{21} + s_{31} = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

Sendo que no centro de massa temos que o vetor quadrimomentum é igual a $\vec{P} = (M, \vec{0})$:

$$\begin{aligned}s_{12} &= (M - E'_3)^2 - \left| \vec{P} - \vec{P}_3 \right|^2 \\ s_{12} &= M^2 - 2ME'_3 + E_3'^2 - P_3'^2 \\ s_{12} &= M^2 - 2ME'_3 + m_3^2\end{aligned}$$

A partir do resultado acima conseguimos encontrar as energias:

$$E'_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - s_{12}}{2M}$$

De forma análoga podemos encontrar E'_1 e E'_2 :

$$E'_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - s_{12}}{2M}$$

$$E'_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - s_{12}}{2M}$$

A partir da Equação 0.5 encontramos os valores para o momentum de cada partícula:

$$\begin{aligned}
 P_i'^2 &= E_i'^2 - m_i^2 \\
 P_3'^2 &= E_3'^2 - m_3^2 \\
 P_3' &= \left[\frac{(M^2 + m_3^2 - s_{12})^2 - 4M^2 m_3^2}{4M^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 P_3' &= \frac{[(M^2 - (s_{12} + m_3)^2)(M^2 - (s_{12} - m_3)^2)]^{\frac{1}{2}}}{2M} \\
 P_2' &= \frac{[(M^2 - (s_{12} + m_2)^2)(M^2 - (s_{12} - m_2)^2)]^{\frac{1}{2}}}{2M} \\
 P_1' &= \frac{[(M^2 - (s_{12} + m_1)^2)(M^2 - (s_{12} - m_1)^2)]^{\frac{1}{2}}}{2M}
 \end{aligned}$$

EXERCICIO 11

Prove a equação: $M_o = \sqrt{(\sum E_i)^2 - (\sum \vec{P}_i)^2}$

Primeiramente começamos com as equações para energia e momentum relativísticos:

$$\begin{aligned}
 E &= \gamma mc^2 \\
 P &= \gamma mv
 \end{aligned}$$

Fazendo uso do quadrado de E e P encontrados anteriormente e substituindo o valor de γ , encontramos a relação energia-momentum relativísticos:

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 P^2 &= \frac{m^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2} \\
 v^2 &= \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + P} \\
 \text{---} & \\
 E^2 &= \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 \frac{E^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4}{c^2 - v^2}
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de v^2 na equação acima:

$$\begin{aligned}
 \frac{E^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4}{c^2 - \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + P}} \\
 \frac{E^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4 m^2 c^2 + P}{m^2 c^4 + P^2 c^2 - P^2 c^2} \\
 E^2 &= P^2 c^2 + m^2 c^4
 \end{aligned}$$

Em unidades naturais, ou seja, $c = 1$, a relação energia-momentum relativísticos é:

$$E^2 = P^2 + m^2$$

$$E_i^2 = P_i^2 + m_i^2$$

Da equação acima retiramos o valor da massa invariante:

$$M_o = \sqrt{(\sum E_i)^2 - (\sum \vec{P}_i)^2}$$