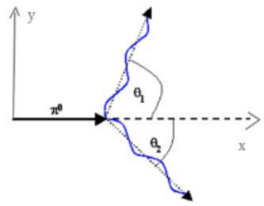
Introdução à Análise de dados em FAE **(17.08.2021)**

CINEMÁTICA DAS COLISÕES EM ALTAS ENERGIAS

Professores: DILSON, ELIZA, SANDRO E SHEILA *Name:* TAÍS DIAS IZIDORO

EXERCICIO 0

Quando um píon decai em dois fótons, qual a energia dos fótons?



Pela conservação de energia, temos que:

$$E_\pi = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$$

Sendo a energia do píon e de cada fóton iguais a:

$$E_\pi = \gamma m_\pi c^2$$
$$E_{\gamma_1} = h\nu_1$$
$$E_{\gamma_2} = h\nu_2$$

A equação da conservação de energia se dá por:

$$\gamma m_\pi c^2 = h\nu_1 + h\nu_2 \tag{0.1}$$

$$\frac{h\nu_2}{c} = \gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c} \tag{0.2}$$

Analisando agora a conservação do momentum do píon:

$$\vec{p} = \vec{\gamma_1} + \vec{\gamma_2}$$

Sendo o momentum paralelo e perpendicular do píon em relação a sua trajetória iguais a:

$$|\vec{p_{\pi,\parallel}}| = |\vec{p_{\gamma_1,\parallel}}| + |\vec{p_{\gamma_2,\parallel}}| = \gamma m_\pi v$$
$$|\vec{p_{\pi,\perp}}| = |\vec{p_{\gamma_1,\perp}}| + |\vec{p_{\gamma_2,\perp}}| = 0$$

E o momentum paralelo e perpendicular de cada fóton em relação a sua trajetória iguais a:

$$|p_{\vec{\gamma_1},\parallel}| = \frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1$$
$$|p_{\vec{\gamma_2},\parallel}| = \frac{h\nu_2}{c}cos\theta_2$$
$$|p_{\vec{\gamma_1},\perp}| = \frac{h\nu_1}{c}sen\theta_1$$
$$|p_{\vec{\gamma_2},\perp}| = \frac{h\nu_2}{c}sen\theta_2$$

As equações da conservação do momentum paralelo e perpendicular se dão por:

$$\gamma m_\pi v = \frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c}cos\theta_2 \tag{0.3}$$

$$0 = \frac{h\nu_1}{c}sen\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c}sen\theta_2 \Longrightarrow (\frac{h\nu_1}{c})^2 sen^2\theta_1 = (\frac{h\nu_2}{c})^2 sen^2\theta_2 \tag{0.4}$$

Trabalhando agora com a Equação 0.3:

$$\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1 = \frac{h\nu_2}{c}cos\theta_2$$
$$(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1)^2 = (\frac{h\nu_2}{c})^2 cos^2\theta_2 = (\frac{h\nu_2}{c})^2(1 - sen^2\theta_2)$$
$$(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1)^2 = (\frac{h\nu_2}{c})^2 - (\frac{h\nu_2}{c})^2 sen^2\theta_2$$

Aplicando as Equações 0.2 e 0.4 no resultado acima:

$$(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1)^2 = (\gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c})^2 - (\frac{h\nu_1}{c})^2 sen^2\theta_1$$
$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1 + (\frac{h\nu_1}{c})^2 cos^2\theta_1 = (\gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c})^2 - (\frac{h\nu_1}{c})^2 sen^2\theta_1$$
$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1 + (\frac{h\nu_1}{c})^2(cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1) = (\gamma m_\pi c)^2 - 2\gamma m_\pi c\frac{h\nu_1}{c} + (\frac{h\nu_1}{c})^2$$
$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1 + (\frac{h\nu_1}{c})^2 = (\gamma m_\pi c)^2 - 2\gamma m_\pi c\frac{h\nu_1}{c} + (\frac{h\nu_1}{c})^2$$
$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}cos\theta_1 = (\gamma m_\pi c)^2 - 2\gamma m_\pi c\frac{h\nu_1}{c}$$
$$2\frac{h\nu_1}{c}(c - vcos\theta_1) = \gamma m_\pi(c^2 - v^2)$$
$$2\frac{h\nu_1}{c}(c - vcos\theta_1) = \gamma m_\pi c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})$$
$$2\frac{h\nu_1}{c}(c - vcos\theta_1) = \frac{m_\pi c^2}{\gamma}$$
$$2h\nu_1(1 - \frac{v}{c}cos\theta_1) = \frac{m_\pi c^2}{\gamma}$$
$$h\nu_1 = \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v}{c}cos\theta_1)}$$
$$\boxed{E_{\gamma_1} = \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v}{c}cos\theta_1)}}$$

Encontramos então a energia do primeiro fóton. Aplicando esse resultado na Equação 0.1:

$$\gamma m_\pi c^2 = \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1-\frac{v}{c}cos\theta_1)} + h\nu_2$$

$$h\nu_2 = \gamma m_\pi c^2 - \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1-\frac{v}{c}cos\theta_1)} = \frac{2\gamma^2 m_\pi c^2 - 2\gamma^2 m_\pi cvcos\theta_1 - m_\pi c^2}{2\gamma(1-\frac{v}{c}cos\theta_1)}$$

$$h\nu_2 = 2m_\pi c^2\left[\frac{\gamma^2-\gamma^2\frac{v}{c}cos\theta_1 - 1}{2\gamma(1-\frac{v}{c}cos\theta_1)}\right]$$

Porém:

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{1-\frac{v}{c}} - 1$$

$$\gamma^2 - 1 = \frac{c^2}{c^2-v^2} - \frac{c^2-v^2}{c^2-v^2}$$

$$\gamma^2 - 1 = \frac{v^2}{c^2-v^2} = \frac{v^2}{c^2}\gamma^2$$

Então:

$$h\nu_2 = 2m_\pi c^2\left[\frac{\frac{v^2}{c^2}\gamma^2 - \frac{v}{c}\gamma^2 cos\theta_1}{2\gamma(1-\frac{v}{c}cos\theta_1)}\right]$$

$$h\nu_2 = 2m_\pi c^2\frac{v}{c}\gamma^2\left[\frac{\frac{v}{c}-cos\theta_1}{2\gamma(1-\frac{v}{c}cos\theta_1)}\right]$$

$$h\nu_2 = m_\pi cv\gamma\left[\frac{\frac{v}{c}-cos\theta_1}{1-\frac{v}{c}cos\theta_1}\right]$$

$$h\nu_2 = m_\pi cv\gamma\left[\frac{\frac{v-ccos\theta_1}{c}}{\frac{c-vcos\theta_1}{c}}\right]$$

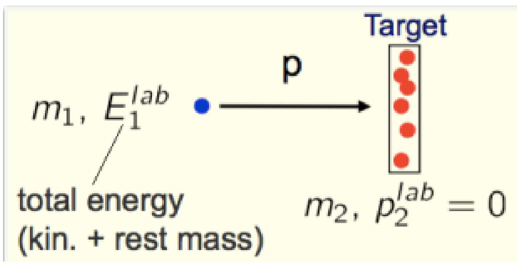
$$h\nu_2 = m_\pi cv\gamma\left[\frac{v-ccos\theta_1}{c-vcos\theta_1}\right]$$

$$\boxed{E_{\gamma_2} = m_\pi cv\gamma\left[\frac{v-ccos\theta_1}{c-vcos\theta_1}\right]}$$

Encontramos então a energia do segundo fóton.

EXERCICIO 1

Prove a equação: $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_1^2 + 2E_1^{LAB}m_2}$



Da relação energia-momentum temos que:

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{0.5}$$

Em experimentos de alvo fixo o momentum do alvo é $p = 0$, logo a equação anterior se reduz a:

$$E^2 = m^2$$

O produto interno do quadrimomentum nos dá o quadrado da norma desse vetor, o que e proporcional ao quadrado da massa em repouso

$$< P, P >= |P|^2 = m_o^2$$
$$p^2 = m^2 \tag{0.6}$$

Então, trabalhando com o canal s para analisarmos antes e depois da colisão separadamente, temos que:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 s = (m_1 + m_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$$

O ultimo termo de $p_1p_2 = p_1^0p_2^0 - \vec{p_1}\vec{p_2}$ é anulado pelo fato da partícula alvo ter momentum nulo. Já no termo $p_1^0p_2^0$ temos para p_1^0:

$$\vec{p_1} = (E_1^{LAB}, p_x, p_y, p_z)$$
$$p_1^0 = E_1^{LAB}$$

Da Equação 0.6 tiramos que:

$$p_2^0 = m_2$$

Então a nossa equação para o canal s fica como:

$$s = m_1 + m_2 + 2E_1^{LAB}m_2$$

Em experimentos de alvo fixo a energia total é dada por $\sqrt{s}$, então temos para a energia total:

$$\boxed{E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1 + m_2 + 2E_1^{LAB}m_2}}$$

EXERCICIO 2

Considerando $E_1^{LAB} >> m_1, m_2$, prove esta aproximação: $E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{LAB}}$

Para altas energias E_1^{LAB}, ou seja, $E_1^{LAB} >> m_1, m_2$, a massa das partículas sendo $m_1, m_2 < 1$, temos que o quadrado de cada massa aproxima mais ainda esse valor de 0.
Então se $m_1 \approx 0, m_2 \approx 0$:

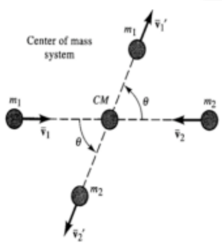
$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{0 + 0 + 2E_1^{LAB}}$$
$$\boxed{E_T \approx \sqrt{2E_1^{LAB}}}$$

EXERCICIO 3

Prove que $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1 + m_2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 cos\theta)}$

A energia do centro de massa é dada pelo canal s:

$$s = (p_1 + p_2)^2$$
$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$$



O termo p_1p_2 se da por $p_1p_2 = p_1^0p_2^0 - \vec{p_1}\vec{p_2}$ onde $\vec{p_1}\vec{p_2} = p_1p_2cos\theta$, logo:

$$p_1p_2 = p_1^0p_2^0 - p_1p_2cos\theta$$

Pela Equação 0.6 no exercício 1 ($p^2 = m^2$) e pela proposição feita também no exercício 1:

$$\vec{p_1} = (E_1, p_x, p_y, p_z)$$
$$p_1^0 = E_1$$

O mesmo vale para p_2. Como $\beta = \frac{p}{E}$:

$$p = \beta E$$
$$p_1p_2 = E_1E_2 - \beta_1E_1\beta_2E_2cos\theta$$

Então:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\beta_1E_1\beta_2E_2cos\theta$$
$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2cos\theta)$$

A energia total do centro de massa é dado por:

$$E_T = \sqrt{s}$$
$$\boxed{E_T = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2cos\theta)}}$$

EXERCICIO 4

Considerando $p_1 = -p_2, m_1 = m_2$, prove a aproximação: $E_T = \sqrt{s} = 2E_1$:

Se $E_T = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2cos\theta)}$, escrevendo $m_1 = m_2 = m, p_1 = -p_2 = p$:

$$E_T = \sqrt{2m^2 + 2E_1E_2\left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{E_1E_2}\right)}$$
$$E_T = \sqrt{2m^2 + 2E_1E_2 + 2\,|\vec{p}|^2}$$

Porém $E_1^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 = E_2^2$, então temos para a energia total:

$$E_T = \sqrt{2(p^2 + m^2) + 2E_1^2}$$
$$E_T = \sqrt{2E_1^2 + 2E_1^2}$$
$$E_T = \sqrt{4E_1^2}$$
$$\boxed{E_T = 2E_1}$$

EXERCICIO 5

Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.
a. Qual a energia do centro de massa para essa interação?
b. Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?
c. Quais os colisores assimétricos usados atualmente e por que não usar um colisor mais potente?

a. Como mostrado no exercício 2, a energia do centro de massa em experimentos de alvo fixo é dada por $E = \sqrt{2E_1 m_2}$. Temos então que descobrir a energia do próton. Sendo a massa do hidrogênio e do próton apresentadas abaixo, descobrimos essa energia a partir da Equação 0.5 da seguinte maneira:

$$m_H = 0.938GeV, m_P = 0.938GeV$$
$$E_P = \sqrt{p^2 + m^2}$$
$$E_P = \sqrt{(100GeV)^2 + (0.938GeV)^2} = 100,004GeV$$

Então, aplicando a energia do próton na Equação da energia total temos:

$$E = \sqrt{2E_P m_H}$$
$$E = \sqrt{2(100,004\,GeV)(0.938\,GeV)}$$
$$E = \sqrt{187,607}$$
$$\boxed{E = 13,697\,GeV}$$

b. Como não é um experimento de alvo fixo, a energia total é dada por $E = 2E_1$. Um próton é acelerado a 7 TeV no LHC, então a energia total é:

$$E_{LHC} = 2E_P = 2(7\,TeV) = 14\,Tev$$

Para alcançar essa energia total devemos acelerar o próton a energia de:

$$E_T = \sqrt{2E_1^{LAB} m_2}$$
$$14000\,GeV = \sqrt{2E_1^{LAB}(0.938\,GeV)}$$
$$E_1^{LAB} = \frac{(14000\,GeV)^2}{2(0.938\,GeV)}$$
$$E_1^{LAB} = 104,477,612\,GeV$$
$$\boxed{E_1^{LAB} = 104,477\,TeV}$$

c. Como colisores assimétricos atuais temos o LHC (Large Hadron Collider), o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), PEP-II no SLAC, o KEK-B e o BELLE no KEK, HERA no DESY, PHENIX collaboration, PHOBOS collaboration, STAR collaboration, etc. Para visualizarmos partículas extremamente energéticas que só podem ser visualizadas quando duas partículas colidem muito próximo a velocidade da luz, a tendência é aumentar cada vez mais a energia de colisão. No entanto, conforme aumentamos essa energia, aumentamos muito pouco a velocidade (nunca alcançando a velocidade da luz), quase não alterando o momentum de cada partícula e por fim, a energia de colisão.

EXERCICIO 5-A

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV:

Primeiramente para o experimento de alvo fixo, a energia de centro de massa é dada por:

$$E = \sqrt{2E_1^{LAB} m_2}$$
$$E = \sqrt{2(3500\,GeV)(0.938\,GeV)}$$
$$\boxed{E = 81,03\,Gev}$$

Agora para um colisor de partículas, a energia de centro de massa é dada por:

$$E = 2E_1$$
$$E = 2(3500\,GeV) = 7000\,GeV$$
$$\boxed{E = 7\,TeV}$$

EXERCICIO 6

Em espalhamento elástico do tipo A + A = A + A, quais são as variáveis de Mandelstam?

As Variáveis de Mandelstam são:

$$\boxed{s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1^{'} + p_2^{'})^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2}$$
$$\boxed{t = (p_1 - p_1^{'})^2 = (p_2 - p_2^{'})^2 = p_1^2 + p_1^{'2} - 2p_1p_1^{'}}$$
$$\boxed{u = (p_1 - p_2^{'})^2 = (p_2 - p_1^{'})^2 = p_1^2 + p_2^{'2} - 2p_1p_2^{'}}$$

EXERCICIO 7

Prove que: $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$

Pelas equações descritas no exercício anterior, o somatório $s + t + u$ é igual a:

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_1^2 + p_1^{'2} + p_1^2 + p_2^{'2} + 2p_1p_2 - 2p_1p_1^{'} - 2p_1p_2^{'}$$

Através da Equação 0.6 podemos fazer a seguinte modificação:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 + 2p_1^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_1^{'} - 2p_1p_2^{'}$$

Pela conservação do quadrimomentum: $p_1 + p_2 = p_1^{'} + p_2^{'},\ p_1 = -p_2 + p_1^{'} + p_2^{'}$**, os quatro últimos termos da equação anterior somam 0, logo:**

$$\boxed{s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2}$$

EXERCICIO 8

Mostre a transformação: $\begin{pmatrix} E^{'} \\ p_{\parallel}^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\,y & -\,senh\,y \\ -senh\,y & cosh\,y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}$

Considerando o vetor quadrimomentum $p = (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z)$ para $p_x = p_{\parallel}$ e $p_{\perp} = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$, as transformações de Lorentz se resumem a (contanto que $p_{\perp} = p_{\perp}^{'}$):

$$E^{'} = \gamma(E - \beta p_{\parallel})$$
$$p_{\parallel}^{'} = \gamma(p_{\parallel} - \beta E)$$

Que da forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} E^{'} \\ p^{'}_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Sendo $\gamma = cos\, y$, $\beta = tanh\, y$, $\gamma\beta = sen\, y$**:**

$$\boxed{\begin{pmatrix} E^{'} \\ p^{'}_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\, y & -senh\, y \\ -senh\, y & cosh\, y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}, \, p_{\perp} = p^{'}_{\perp}}$$