

# ダークマター

2025年12月2日

## 目次

1	宇宙論の復習	2
1.1	宇宙膨張	2
2	ダークマターの観測的証拠	13
2.1	ダークマター存在の観測的証拠	13
2.2	ダークマターの性質	19
3	天文学とダークマター	21
3.1	バリオン・ダークマター	21
3.2	原始ブラックホール	23
3.3	重力マイクロレンズ効果	28
3.4	原子ブラックホールに対する観測的制限	37
付録 A	ランダムウォーク	38
A.1	1次元ランダムウォーク	38

# 1 宇宙論の復習

以下では、自然単位系を採用する。つまり、光速  $c$ , プランク定数  $\hbar$ , ボルツマン定数  $k_B$  について  $c = \hbar = k_B = 1$  とする。また、計量テンソルについては space-like convention を採用し、 $(+, -, -, -)$  とする。

## 1.1 宇宙膨張

### 1.1.1 ロバートソン・ウォーカー計量

我々の宇宙は大きなスケール ( $\sim 100$  Mpc) で見ると、一様等方である。これは、宇宙原理と呼ばれており、ビッグバン宇宙論において基本となる原理である。このときの計量はロバートソン・ウォーカー計量と呼ばれ、以下のように書ける。

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (\text{ただし}, d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1)$$

これは、以下のようにして考えると良い。

まず、3次元空間を考える。このときの線要素  $ds$  は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2)$$

でこのとき、不变となる操作は回転と並進であった。同様に4次元空間において  $ds^2$  を不变にする操作を考える。例えば、4次元ユークリッド空間  $(x, y, z, w)$  で半径  $a$  の球を考える。このときの線素は

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 + dw^2, \quad \mathbf{x}^2 + w^2 = a^2 \quad (3)$$

である。また、四次元擬ユークリッド空間  $(x, y, z, w)$  における場合については

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 - dw^2, \quad \mathbf{x}^2 - w^2 = a^2, \quad a^2 > 0 \quad (4)$$

となることが知られている。このとき、 $w$  を時間とするとローレンツ変換に対応する。

ここで、座標系を

$$\mathbf{x}' = a\mathbf{x}, \quad w' = aw \quad (5)$$

と変換すると上の線素は

$$ds^2 = a^2(d\mathbf{x}^2 \pm dw^2), \quad w^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1 \quad (6)$$

$w^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1$  から  $wdw = \mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  となるので

$$ds^2 = a^2 \left( d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right) \quad (7)$$

となる。ユークリッド空間についても拡張すると

$$ds^2 = a^2 \left( d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right) \quad (8)$$

となる。ここで、

$$K = \begin{cases} +1 & (\text{閉じた宇宙}) \\ 0 & (\text{平坦な宇宙}) \\ -1 & (\text{開いた宇宙}) \end{cases} \quad (9)$$

これを時空間に拡張すれば良い。上で述べた  $a(t)$  がスケールファクターであり

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right) \quad (10)$$

となる。また、一様等方時空について共動座標系を考えることによって計量は唯一に定まることが知られており

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K\mathbf{x}^2} \right) dx^i dx^j \quad (11)$$

となる。

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = r dr \quad (12)$$

とするとであることを用いれば、最初に示したロバートソン・ウォーカー計量が得られる。

### 1.1.2 宇宙を記述する諸式

FLRW 計量を用いて、宇宙を記述する諸式を導出する。まず、ゼロにならないクリストッフェル記号は

$$\Gamma_{ij}^0 = a \dot{a} g_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad (13)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lj,k} + g_{k\ell,j} - g_{jk,\ell}) := \tilde{\Gamma}_{jk}^i \quad (14)$$

これを用いて、リッチテンソル  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta$  を計算すると

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (15)$$

$$R_{0i} = 0, \quad (16)$$

$$R_{ij} = \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{K}{a^2} \right] g_{ij} \quad (17)$$

となる。また、リッチスカラー  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  は

$$R = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \quad (18)$$

一方で、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は一様等方性から完全流体の形をとることが知られており

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (19)$$

ここで、 $u^\mu$  は流体の 4 元速度であり、 $\rho$  はエネルギー密度、 $p$  は圧力である。AINSHUTAIN 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (20)$$

から、 $\mu = \nu = 0$  成分を考えると

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\left[-6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right)\right] &= 8\pi G\rho \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \end{aligned} \quad (21)$$

さらに、 $g^{\mu\nu}$  をかけてAINSHUTAIN方程式の縮約をとった形

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = 8\pi GT_\nu^\mu \quad (22)$$

から

$$\begin{aligned} R_\mu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\mu R &= 8\pi GT_\mu^\mu \\ R - 2R &= 8\pi GT_\mu^\mu \\ R &= -8\pi GT_\mu^\mu \end{aligned}$$

となるので、式 (21) を用いると

$$\begin{aligned} -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right] &= -8\pi G(\rho - 3p) \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} &= \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3p) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \end{aligned} \quad (23)$$

また、エネルギー運動量保存則  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  から

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (24)$$

となる。この式から  $a^3$  を両辺にかけると

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d}{dt}(a^3) = 0 \quad (25)$$

となる。これは、熱力学第一法則  $dU + pdV = 0$  を表している。

これらの宇宙膨張に関する方程式をあらためてまとめておく

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \\ \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= -p \frac{d}{dt}(a^3)\end{aligned}$$

この3つの式は独立ではなく、どれか2つから残りの1つが導出できる。

以下では、宇宙論において便利な量を紹介する。

- 宇宙膨張を表すハッブルパラメータ  $H$ :

$$H := \frac{\dot{a}}{a} \quad (26)$$

また、現在のハッブルパラメータ  $H_0$  は  $H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}$ 。ここで導入した無次元パラメータ  $h$  は今でも議論が続いているが、 $h \sim 0.7$ <sup>\*1</sup>であると考えられている。

- 赤方偏移  $z$ :

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad (27)$$

ここで、 $t_0$  は現在の時刻、 $\lambda$  は光源での波長、 $\lambda'$  は観測者での波長である。つまり、光源から発せられた光が膨張によってどの程度波長が伸びたかを表しているというようにも考えることができる。

### 1.1.3 宇宙のエネルギー密度

宇宙膨張を表す方程式は3つで、未知数は2つであるので方程式が一つ不足している。これが、状態方程式である。状態方程式  $p = w\rho$  を仮定する。このとき、エネルギー保存則(25)から積分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho a^3) &= -w\rho \frac{d}{dt}(a^3) \\ \frac{1}{\rho a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= -w \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(a^3) \\ \ln(\rho a^3) &= -w \ln(a^3) + \text{const.} \\ \rho &\propto a^{-3(1+w)}\end{aligned} \quad (28)$$

となる。したがって、宇宙のエネルギー構成要素によって進化の仕方が異なる。

---

<sup>\*1</sup> 文献では、 $h = 0.674 \pm 0.005$  や  $h = 0.73$  など様々な値が使われている。

**■放射** : 相対論的粒子 ( $w \simeq 1/3$ ) の場合、 $\rho_r \propto a^{-4}$  となる。これは、粒子数密度が  $a^{-3}$  に比例して減少することに加えて、膨張によってエネルギーが  $a^{-1}$  に比例して減少するためである。非相対論的粒子について圧力は

$$p = nm v_x^2 = \frac{1}{3} n m v^2$$

であるが、 $mv^2 \rightarrow p^2/E$  となる。相対論的粒子についても一般的に、

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{E} f(p) \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}} f(p) \\ &\simeq \frac{1}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p f(p) \\ &\simeq \frac{1}{3} \rho \end{aligned}$$

となるため、 $w = 1/3$  となる。スケールファクターの時間依存性については

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &\propto a^{-4} \\ \dot{a} &\propto a^{-1} \\ \int a \, da &\propto t \\ a &\propto t^{1/2} \end{aligned}$$

**■物質** : 非相対論的粒子 ( $w \simeq 0$  <sup>\*2</sup>) の場合、 $\rho_m \propto a^{-3}$  となる。これは、粒子数密度が  $a^{-3}$  に比例して減少するためである。

**■ダークエネルギー** : 宇宙を加速膨張させるエネルギー要素。加速膨張を起こすためには  $w < -1/3$  である必要がある。 $w = -1$  を満たすとき宇宙定数と呼ぶ。実際、

$$\rho_\Lambda \propto a^0 = \text{const.} \quad (29)$$

で時間変化しない。

---

<sup>\*2</sup> 非相対論的粒子については、 $p = nm v_x^2$ ,  $\rho \simeq nmc^2$  なので、 $w \simeq 0$  と近似できる。

宇宙が放射優勢期であったときを考える。密度は

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad (30)$$

$$g_* = \sum_{i=\text{boson}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermion}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (31)$$

である。ここで、 $g_i$  は粒子  $i$  の自由度、 $T_i$  は粒子  $i$  の温度である。 $g_*$  は相対論的自由度と呼ばれる。自由度は与えられているとして密度は以下のように計算する。

$$\begin{aligned} \rho &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E f(p) \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \, p^2 \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{e^{\sqrt{p^2 + m^2}/T} \pm 1} \\ &\simeq \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \, p^2 \frac{p}{e^{p/T} \pm 1} \\ &= \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty dx \, \frac{x^3}{e^x \pm 1} \quad (x = p/T) \end{aligned} \quad (32)$$

積分は Boson のとき

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \, \frac{x^3}{e^x - 1} &= \int_0^\infty dx \, x^3 \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dy \, \frac{y^3}{n^4} e^{-y} \quad (y = nx) \\ &= \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{15} \end{aligned}$$

ここで、 $\zeta(4) = \pi^4/90$ ,  $\Gamma(4) = 3! = 6$  を用いた。

一方、Fermion のとき

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \, \frac{x^3}{e^x + 1} &= \int_0^\infty dx \, x^3 \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} e^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \int_0^\infty dy \, \frac{y^3}{n^4} e^{-y} \quad (y = nx) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \Gamma(4) = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{7\pi^4}{120} \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \zeta(4)$$

を用いた。この関係式は

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

を定義すると

$$\begin{aligned}\zeta(s) - \eta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^s} \\ &= \zeta(s) - \frac{2}{2^s} \zeta(s)\end{aligned}$$

となるので、

$$\eta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s)$$

を使えば良い。

宇宙は断熱膨張すると仮定するとエントロピーは保存される。エントロピーは

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 \quad (33)$$

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{boson}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermion}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (34)$$

である。ここで、 $g_{*s}$  はエントロピーに関する相対論的自由度である。エントロピー密度  $s$  は

$$s = \frac{\rho + p}{T}$$

を使えば良い。 $p = \rho/3$  を用いれば

$$s = \frac{4\rho}{3T} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} g_* T^3 = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3$$

となる。

全エントロピーは  $S = a^3 s$  である。断熱膨張を仮定すると  $S$  は保存されるので  $S \propto a^3 g_{*s} T^3 = \text{const.}$  となる。したがって、 $a \propto 1/T$  となる。この関係とフリードマン方程式 (RD 期)

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

から、 $M_{pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$  を用いて

$$-\frac{\dot{T}}{T} = \left( \frac{8\pi G}{3} \rho \right)^{1/2} = \left( \frac{\rho_R}{3M_{pl}^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{\pi^2 g_*}{90} \right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{pl}}$$

これを積分すると

$$\frac{1}{2} \frac{1}{T^2} = \left( \frac{\pi^2 g_*}{90} \right)^{1/2} \frac{1}{M_{pl}} t$$

となるので

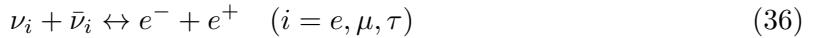
$$t = \left( \frac{45}{2\pi^2 g_*} \right)^{1/2} \frac{M_{pl}}{T^2} = 1.7 s g_*^{-1/2} \left( \frac{T}{\text{MeV}} \right)^{-2} \quad (35)$$

が得られる。

#### 1.1.4 宇宙の歴史

##### ■ニュートリノの熱平衡からの離脱

宇宙の温度が数 MeV 以上<sup>\*3</sup>のときニュートリノは弱い相互作用によって起こる対消滅・対生成反応



の熱平衡にあった。この反応は  $T^5$  に比例する。そのため、宇宙の温度が下がると宇宙膨張に比べて反応速度は急速に低下する。宇宙の温度（このときの温度を離脱温度という）が約 2MeV 以下になると熱平衡から離脱して、宇宙膨張によって薄められる。

##### ■電子・陽電子対消滅

ニュートリノが熱平衡から離脱した後、宇宙の温度が電子の質量  $m_e \simeq 0.511 \text{ MeV}$  になると<sup>\*4</sup>、光子との対消滅・対生成反応から



によって電子は宇宙からなくなっていく。これは、電子が非相対論的になると熱平衡分布がボルツマン分布になって数密度が  $\exp(-m_e/T)$  の指数関数的に減少するためである。しかし、物理的には温度が下がり光子のエネルギーが減少することによって電子が対生成反応を起こせなくなるためである。この結果により、わずかに多い電子が生き残り陽電子は対消滅によってなくなっていく。(バリオジエネシス)

この電子・陽電子対消滅の効果によって、今までニュートリノと同じ温度であった光子の温度は上昇する。つまり、電子などと熱的に隔絶されたニュートリノの方、消滅した電子・陽電子のエンタロピーは光子に渡され光子のみを暖められる。結果、光子の温度  $T$  とニュートリノの温度  $T_\nu$  は

$$T_\nu = \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} T \quad (38)$$

---

<sup>\*3</sup> 宇宙年齢が 1s も満たないとき

<sup>\*4</sup> 宇宙年齢が数秒のとき

となる。

この関係は、ニュートリノが以下の三つの性質があることから導出できる。

- ニュートリノは3世代ある。
- 各世代のニュートリノと反ニュートリノはそれぞれスピン1自由度を持つ。
- ニュートリノはフェルミ粒子である。

光子のエネルギー密度とニュートリノのエネルギー密度の関係を求める。まず、上の二つによる自由度は6である。最後の性質から、ニュートリノのエネルギー密度はボーズAINシュタイン分布(光子)に対して $7/8$ をかける必要がある。光子は元々、2自由度を持つので、ニュートリノのエネルギー密度は

$$\rho_\nu = 3 \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 \rho_\gamma \quad (39)$$

となる。

さらに、電子対消滅前のエントロピーを考える。このとき、光子(自由度2), 電子・陽電子(自由度4), ニュートリノ(自由度6)からの寄与を考えて、 $a = a_1$ のときのエントロピー密度は式(33)より

$$s(a_1) = \frac{2\pi^2}{45} \left[ 2 + \frac{7}{8} \times (4+6) \right] T_1^3 = \frac{43\pi^2}{90} T_1^3 \quad (40)$$

また、電子対消滅後の $a = a_2$ のときのエントロピー密度を考える。電子と陽電子は消滅してしまい、他の残っている粒子は非相対論的であるとして無視して良い。つまり、光子(自由度2)とニュートリノ(自由度6)からの寄与のみを考えれば良い。ただし、光子とニュートリノは温度が異なっているので注意する必要があり

$$s(a_2) = \frac{2\pi^2}{45} \left[ 2T^3 + \frac{7}{8} \times 6T_\nu^3 \right] = \frac{4\pi^2}{45} \left[ \left(\frac{T}{T_\nu}\right)^3 + \frac{21}{8} \right] T_\nu^3 \quad (41)$$

となる。

宇宙のエントロピーは保存するので $s(a_1)a_1^3 = s(a_2)a_2^3$ とすると

$$\frac{43}{2}(a_1 T_1)^3 = 2 \left[ \left(\frac{T}{T_\nu}\right)^3 + \frac{21}{8} \right]_{a_2} (a_2 T_\nu)^3 \quad (42)$$

となる。

ニュートリノは電子・陽電子と光子と熱的に隔絶されているので、 $a_1 T_1 = a_2 T_\nu (a_2)$ であるので

$$\frac{43}{2} = 2 \left[ \left(\frac{T}{T_\nu}\right)^3 + \frac{21}{8} \right] \quad (43)$$

となるので、

$$\frac{T_\nu}{T} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3}$$

## ■ビッグバン元素合成 (BBN)

宇宙の時刻 1s<sup>\*5</sup>から 1000s までの間に陽子と中性子からヘリウム 4 原子核 (<sup>4</sup>He) や重水素 (D)、リチウム 7 (<sup>7</sup>Li) などの軽元素が合成される。



その反応過程を示していく。BBN は 3 段階で進む。第一段階は弱い相互作用によって陽子と中性子の比が決まる。このとき、弱い相互作用によって起こる反応



によって化学平衡にある。このとき、陽子と中性子の比は

$$\frac{n_n}{n_s} = \frac{g_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_n/T}}{g_p \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_p/T}}$$

である。非相対論的な極限 ( $E_i = m_i + p^2/2m_i$ ) をとると

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{e^{-m_n/T} \int dp p^2 e^{-p^2/2m_n T}}{e^{-m_p/T} \int dp p^2 e^{-p^2/2m_p T}} \quad (46)$$

となる。積分は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp p^2 e^{-p^2/2m_i T} &= (2m_i T)^{3/2} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} \quad (x = p/\sqrt{2m_i T}) \\ &\propto m_i^{3/2} \end{aligned}$$

となるが、 $m_n \simeq m_p$  であるため

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{m_n - m_p}{T}\right) \quad (47)$$

となる。 $T_f \simeq 0.7$  MeV まで下がると平衡から離脱して、陽子・中性子の比はほぼ凍結される ( $n_n/n_p \simeq 1/7$ )。

第二段階は陽子と中性子から重陽子 (D) が生成される。

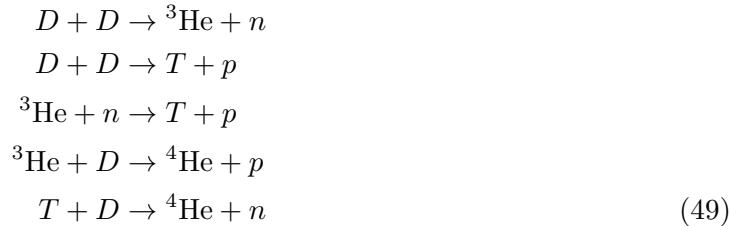


重陽子の結合エネルギーが  $B_D = 2.2$  MeV と小さい。したがって、温度が高いと重陽子が生成されてもバックグラウンドの光子によって分解されてしまい、重陽子生成反応はなかなか進まないため、温度が約 0.1 MeV まで下がると重陽子が生成され始める。

---

<sup>\*5</sup> 1s 頃は光子の平均自由行路は原子の大きさ程度である。

第三段階では、重陽子からヘリウム 4 原子核 ( ${}^4\text{He}$ ) が生成される。



結局、

- ヘリウム 4 ( ${}^4\text{He}$ ) : バリオン密度の約 25%
- 中間生成物 (D,  ${}^3\text{He}$ , T) : 水素との数密度比で  $10^{-5} - 10^{-4}$  程度
- リチウム 7 ( ${}^7\text{Li}$ ) : 水素との数密度比で  $10^{-10}$  程度
- ベリリウム 7 ( ${}^7\text{Be}$ ) : 水素との数密度比で  $10^{-10}$  程度。電子捕獲によってリチウム 7 になる
- ${}^4\text{He}$  より大きな元素 : クーロン障壁のため合成されない

となるので、安定な元素として  ${}^4\text{He}$ , D,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$  が生成される。

### ■再結合

宇宙年齢が約 38 万年、温度が約 3000K になると、電子と陽子が結合して中性水素原子が生成される。



再結合後は今まで電子に捕獲されていた光子は電子とコンプトン散乱をすることがなくなるために直進できるようになる。この光子が現在宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) として観測されている。

### ■構造形成

宇宙が物質優勢になると、宇宙初期に存在していたわずかな密度ゆらぎが重力によって成長、銀河や銀河団を形成する。このとき、ダークマターが重要な役割を果たす。

#### 1.1.5 インフレーション

## 2 ダークマターの観測的証拠

### 2.1 ダークマター存在の観測的証拠

銀河の星のように光っている物質とは別に光や電波を発さない暗黒の物質が大量にあることがわかっている。このような物質をダークマターと呼ぶ。

#### 2.1.1 ツヴィッキーの発見

ツヴィッキーは銀河団の観測からダークマターの存在を示唆した。かみのけ座銀河団の800の銀河を観測、その速度の分散  $\langle v^2 \rangle^{1/2}$  が約 1000 km/s であることを見出した。これから、力学のビリアル定理を用いて銀河団の質量を見積もり、光っていない物質が大量にあることを発見した。

#### ■ビリアル定理

$N$  粒子系を考える。 $i$  番目の粒子の質量を  $m_i$ 、位置ベクトルを  $\mathbf{r}_i$ 、速度ベクトルを  $\mathbf{v}_i$  とする。また、 $\sum_j \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}_i$  を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i &= \sum_i \left( \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \\ &= \sum_i (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + m_i v_i^2) \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + 2 \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + 2T \end{aligned}$$

となる。ここで、 $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$  を運動エネルギーとした。

次に時間平均を考える。

$$\begin{aligned} (L.H.S.) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \frac{1}{\tau} \left[ \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \right]_{t=0}^{t=\tau} \end{aligned}$$

多体系が常に保たれ続く（系全体のエネルギーが有限）と仮定すると、 $\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i|_0^\tau$  は有限となる。したがって、 $\tau \rightarrow \infty$  の極限で  $(L.H.S.) \rightarrow 0$  となる。また、

$$(R.H.S.) = 2 \langle T \rangle + \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle$$

と計算することができる。したがって、

$$2 \langle T \rangle + \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = 0$$

この系におけるポテンシャルエネルギー  $U$  を

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (51)$$

と書くことにする。ここで、 $V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$  は粒子  $i$  と  $j$  の間の相互作用ポテンシャルであり  $V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \propto |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^n$  となることを仮定すると  $V(a|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) = a^n V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$  となる。 $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| \rightarrow a|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$  の変換で、 $U$  から  $U'$  となるとすると

$$U' = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(a|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) = a^n U$$

となる。この式について、両辺を  $a$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} (L.H.S.) &= \sum_k \frac{\partial(a\mathbf{r}_k)}{\partial a} \cdot \frac{\partial}{\partial(a\mathbf{r}_k)} U' = \sum_k \mathbf{r}_k \cdot \frac{\partial}{\partial(a\mathbf{r}_k)} U' \\ \frac{\partial}{\partial a} (R.H.S.) &= n a^{n-1} U \end{aligned}$$

となり、 $a = 1$  とすると

$$\sum_k \mathbf{r}_k \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} U = n U \quad (52)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} U &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} V(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|) \\ &= \sum_{j \neq k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|) = - \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_k \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、 $\mathbf{F}_{kj}$  は粒子  $k$  に働く粒子  $j$  からの力、 $\mathbf{F}_k$  は粒子  $k$  に働く全ての力である。結局、

$$\sum_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{F}_k = -n U \quad (53)$$

となり

$$2 \langle T \rangle - n \langle U \rangle = 0 \quad (54)$$

が得られる。これをビリアル定理という。

## ■ツヴィッキーの計算

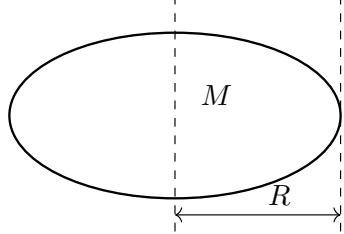


図 1 銀河団 (質量  $M$ 、半径  $R$ )

銀河団は重力によってその系が成り立っている。この系における運動エネルギーを  $E_{\text{kin}}$ 、ポテンシャルエネルギーを  $E_{\text{pot}}$  とする。重力のポテンシャルは距離に反比例するので、ビリアル定理(式 54)から、 $n = -1$  とすると

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (55)$$

の関係が成り立つ。ここで、 $E_{\text{kin}}, E_{\text{pot}}$  は

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle \quad (56)$$

$$E_{\text{pot}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (57)$$

とかける。 $E_{\text{pot}}$  は銀河団を密度が一定 ( $M = 4\pi\rho R^3/3$ ) な球と近似すると

$$\begin{aligned} -E_{\text{pot}} &= \int_0^R 4\pi r^2 dr \frac{4\pi\rho}{3} r^3 \frac{G\rho}{r} \\ &= \frac{16\pi^2}{3} G\rho^2 \int_0^R dr r^4 = \frac{16\pi^2}{3} G\rho^2 \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \end{aligned}$$

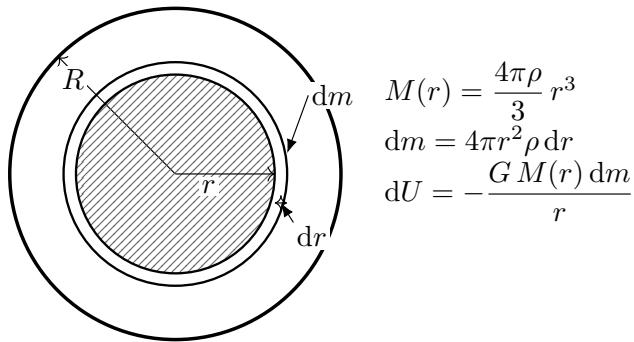


図 2 均一密度球の殻分割： $M(r)$  は半径  $r$  以内の質量、 $dm$  は厚さ  $dr$  の薄殻。

よって、式 55 から

$$M = \frac{5\langle v^2 \rangle}{3G} R \quad (58)$$

となる。かみのけ座銀河団の観測から、 $R \simeq 10^{24}$  cm,  $\langle v^2 \rangle^{1/2} \simeq 1000$  km/s,  $G = 6.67 \times 10^{-8}$  cm<sup>3</sup>/g/s<sup>2</sup> を代入すると

$$M \simeq 1.3 \times 10^{14} M_{\odot} \quad (59)$$

を得る。<sup>6</sup>

銀河団の質量が光っているものだけで説明できるかを考える。恒星に関して質量光度関係というものが成り立つことがわかっている。光度  $L$  と質量  $M$  の比について

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^a \quad (60)$$

とかける。ここで、 $a$  は定数で 1 から 6 までの値をとる。ここでは、銀河団の星が典型的な太陽質量程度であると仮定して  $a \sim 1$  とする。つまり、一つの銀河の質量を  $M_{\text{gal}}$ 、光度を  $L_{\text{gal}}$  とすると

$$\frac{M_{\text{gal}}}{M_{\odot}} \simeq \frac{L_{\text{gal}}}{L_{\odot}} \quad (61)$$

また、銀河の光度は典型的に  $L_{\text{gal}} \simeq 10^9 L_{\odot}$  である。したがって、銀河一つあたりの質量は光度から推定できて

$$M_{\text{gal}} \simeq 10^9 M_{\odot} \quad (62)$$

となる。銀河団の中には銀河は約 800 個があるので、総質量は

$$M_{\text{lum}} \simeq 800 \times 10^9 M_{\odot} = 8 \times 10^{11} M_{\odot} \quad (63)$$

となる。これは、ビリアル定理から求めた質量  $M \simeq 1.3 \times 10^{14} M_{\odot}$  に比べて非常に小さい。このことから、銀河団には光っている物質以外に大量の暗黒物質が存在すると結論づけた。

### 2.1.2 銀河の回転曲線

銀河団よりも小さなスケールである銀河においてもダークマターの存在が示唆されている。銀河の周りを回っている星や水素原子の回転速度  $v$  は等速円運動していると仮定すると

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (64)$$

となる。 $M(r)$  は銀河の中心から距離  $r$  以内にある質量である。銀河の質量のほとんどが恒星が担っていると仮定すると観測により中心付近以外は一定である。したがって、回転速度は

---

<sup>6</sup> 太陽質量  $M_{\odot} = 2 \times 10^{33}$  g

$v(r) \propto r^{-1/2}$  と予想される。しかし、実際には銀河の回転曲線は  $r$  に対してほぼ一定である。図 3 に典型的な銀河の回転曲線を示す。Halo はダークマターの分布のことである。この結果に対する反論として、重力が遠距離では修正が必要とされるというものがある。これは、後の弾丸銀河団の観測により否定される。

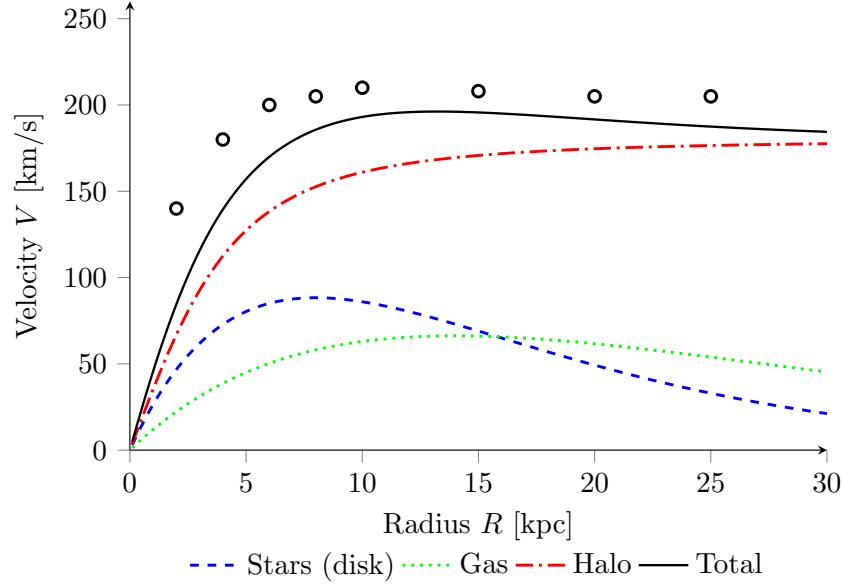


図 3 銀河の回転曲線

### 2.1.3 銀河団ガスの X 線観測

銀河団においてもダークマターが存在する証拠がある。銀河団ガスが球対称、静水圧平衡にあると仮定する。つまり、

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2} \quad (65)$$

また、状態方程式

$$P = \frac{\rho k_B T}{\mu m_p}, \quad (\mu : \text{平均分子量}, m_p : \text{陽子質量}) \quad (66)$$

から

$$\frac{k_B}{\mu m_p} \left( \rho \frac{dT}{dr} + T \frac{d\rho}{dr} \right) = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$

であるので

$$\begin{aligned} M(r) &= -\frac{kr^2}{G\mu m_p \rho} \left( \rho \frac{dT}{dr} + T \frac{d\rho}{dr} \right) = -\frac{kr^2}{G\mu m_p} T \left( \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \\ &= -\frac{krT}{G\mu m_p} r \left( \frac{d \ln T}{dr} + \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{krT}{G\mu m_p} \left( \frac{d \ln T}{d \ln r} + \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \right) \end{aligned}$$

と計算できる。<sup>7</sup>つまり、

$$M(r) = -\frac{krT}{G\mu m_p} \left( \frac{d \ln T}{d \ln r} + \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \right) \quad (67)$$

であり、ガスの温度分布と密度分布が取得できると質量分布がわかる。観測により温度分布は中心から離れたところではほぼ一定であり、密度分布は  $\rho \propto r^{-(1.5-2)}$  であることがわかっている。銀河団の温度を 10 keV とすると

$$M(r) \sim 10^{15} M_\odot \left( \frac{r}{\text{Mpc}} \right) \left( \frac{T}{10 \text{ keV}} \right) \quad (68)$$

となる。X 線の強度から推定した銀河団の質量は  $10^{14} M_\odot$  程度である。つまり、X 線では観測されないダークマターがバリオンに比べて約 10 倍程度存在すると結論づけられる。

#### 2.1.4 宇宙背景放射の温度ゆらぎ

天空のある方向  $(\theta, \phi)$  における CMB の温度を  $T(\theta, \phi)$  とする。このとき温度ゆらぎ  $\delta T(\theta, \phi)$  を

$$\delta T(\theta, \phi) = T(\theta, \phi) - \langle T \rangle \quad (69)$$

と定義する。 $\delta T$  を球面調和関数で展開すると

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (70)$$

さらに、角度パワースペクトルと呼ばれる量を定義する。

$$C_l = \left\langle |a_{lm}|^2 \right\rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 \quad (71)$$

これは、温度ゆらぎの 2 乗平均に対応する。 $C_l$  はさまざまな効果を考慮することによって<sup>8</sup>  $\ell$  の関数として理論的に予言することができる。スペクトルのピークはダークマター密度やバリオン密度に敏感に依存する。つまり、温度ゆらぎの観測データからそれらの密度パラメータを推定することができる。結果、

$$\Omega_b h^2 \simeq 0.0224 \pm 0.001, \quad \Omega_{dm} h^2 \simeq 0.120 \pm 0.0001 \quad (72)$$

つまり、ダークマターの量はバリオンの量の約 5 倍程度存在していることがわかる。

---

<sup>7</sup>  $\frac{d \ln T}{d \ln r} = \frac{r}{T} \frac{dT}{dr}$  を用いた。

<sup>8</sup> 例えば、ザクスヴォルフェ効果など。最初のゆらぎの分布は明確に決めることは難しいが、分布関数を仮定することによって確率論的に定量的に予測できる。

## 2.2 ダークマターの性質

ダークマターは以下のような性質を持つと考えられている。

- 安定、または、宇宙年齢よりも寿命が長い
- 電荷もカラーも持たない
- 通常の物質や自分自身と弱い相互作用しかしない
- 非相対論的で冷たい

### ■安定性

宇宙が誕生して 138 億年、現在の宇宙でもダークマターが観測されていることから、ダークマターは安定である必要がある。

### ■電荷・カラーを持たない

ダークマターは重力を通してのみ存在が確かめられているので、電磁相互作用を行わないことがわかる。また、強い相互作用を行うと、通常の物質と結合して重い原子核を形成してしまうのでカラーも持たないことがわかる。

### ■弱い相互作用

ダークマターは通常の物質と相互作用していたとしても、非常に弱い相互作用しか持たないことがわかっている。また、自身との相互作用が小さいことも後の節で述べる。

### ■冷たい

ダークマターは構造形成に非常に重要な役割を果たしている。宇宙の大規模構造は、宇宙初期に存在していたわずかな密度ゆらぎが重力によって成長してできたと考えられている。このため、ダークマターはそのゆらぎを保持している必要がある。もし、ダークマターが熱い場合はあるスケールのゆらぎは消えてしまい構造形成の障害になる。(シルク減衰)

### 2.2.1 弾丸銀河団の観測

ダークマターは重力のみでしかその存在を示唆されていないため、他の相互作用の効果は弱いと考えられている。

X 線観測から銀河団内のガスがお互いの圧力を感じて銀河団から剥ぎ取られた形になっている。一方で、銀河は数密度が小さいためお互いの影響を受けずにすれ違っていることがわかる。このことから、弾丸銀河団は二つの銀河団が衝突しすれ違った後の姿であると考えられている。さらに、重力レンズ効果によって推定されたダークマターの分布は銀河の分布とほぼ一致していることがわかる。したがって、ダークマターは銀河と同様にお互いの影響を受けずにすれ違ったと考えられる。

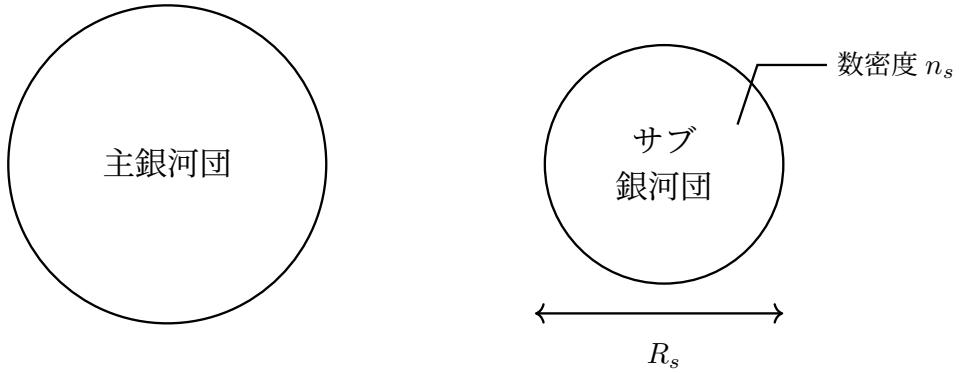


図4 弾丸銀河団の模式図。

2つの銀河団のうち大き方と小さい方をそれぞれ主銀河団とサブ銀河団とする。サブ銀河団のサイズを  $R_s$ 、ダークマターの数密度を  $n_s$ 、ダークマター同士の衝突断面積を  $\sigma$  とする。主銀河団のダークマターがサブ銀河団のダークマターに衝突する確率  $p$  は

$$p \simeq n_s R_s \sigma = m n_s R_s \frac{\sigma}{m} \simeq \Sigma_s \frac{\sigma}{m} \quad (73)$$

となる。ここで、 $\Sigma_s$  はサブ銀河団のダークマターの質量面密度である。観測から  $\Sigma_s \simeq 0.2 \text{ g/cm}^2$  であり、ダークマターが銀河団をすれ違うことから  $p < 1$  である。よって、

$$\frac{\sigma}{m} < 5 \text{ cm}^2 \text{g}^{-1} = 0.9 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \text{GeV}^{-1} \quad (74)$$

の制限が与えられる。また、シミュレーションによる結果から

$$\frac{\sigma}{m} < 0.6 \text{ cm}^2 \text{g}^{-1} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \text{GeV}^{-1} \quad (75)$$

の制限がついている。

### 3 天文学とダークマター

#### 3.1 バリオン・ダークマター

バリオン・ダークマターとは、通常のバリオンからなるが光を出さない天体である。その代表的な候補として、Massive Compact Halo Object (MACHO) がある。MACHO は、木星の約 10 倍以上の質量をもつ天体である。現在、MACHO の存在量には上限が与えられている。また、MACHO は未知の素粒子を仮定することない点で魅力的である。しかし、バリオンが誕生するのは宇宙が誕生して約 1s のことであり、それによって作られた天体が宇宙のダークマターの全てを説明することはできない。

##### 3.1.1 宇宙初期の元素合成

ここで、元素合成後に生成されたバリオンからなるいかなる天体もダークマター全てを説明することはできないことを見る。

BBN で生成された軽元素がどのような存在比で作られるかは元素合成時のバリオンと光子の数密度比  $\eta$  によって決まる。元素合成の理論から軽元素の存在比を予測し、観測と比較することによって  $\eta$  を得ることができる。

$$\eta \simeq 6 \times 10^{-10} \quad (76)$$

である。また、CMB の観測からも  $\eta$  を得ることができる。

$$\eta \simeq (6.11 \pm 0.08) \times 10^{-10} \quad (77)$$

である。この  $\eta$  とバリオン密度パラメータ  $\Omega_b$  には

$$\Omega_b h^2 = 3.73 \times 10^7 \eta \quad (78)$$

の関係がある。この式に  $\eta$  を代入すると

$$\Omega_b h^2 \simeq 0.022 \quad (79)$$

でダークマターの密度パラメータ  $\Omega_{dm} h^2 \simeq 0.12$  に比べて非常に小さい。このことから、バリオン・ダークマターは宇宙のダークマター全てを説明することはできない。

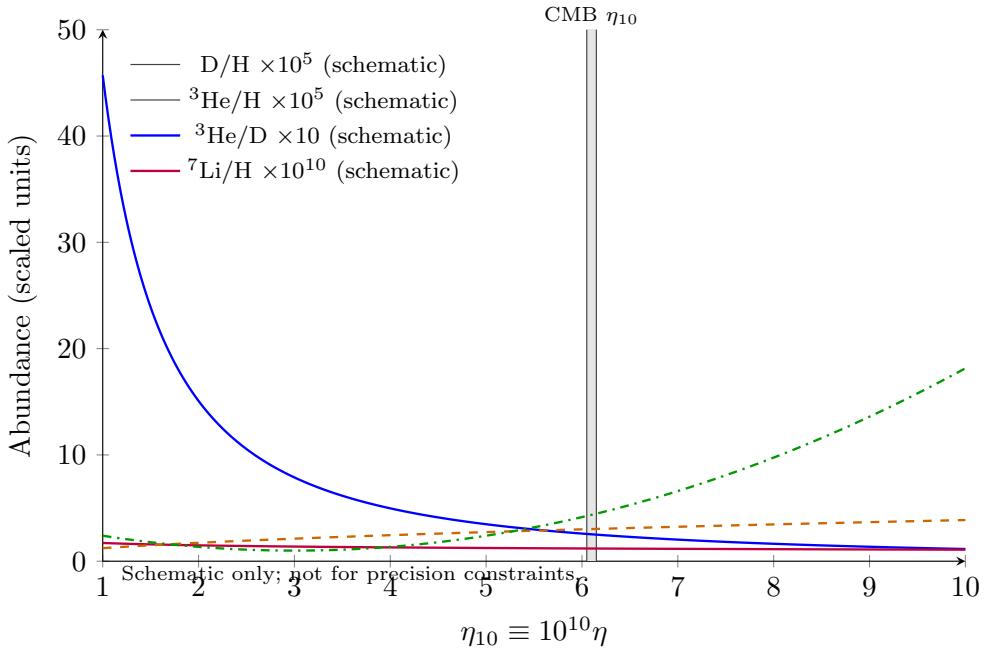


図 5 軽元素存在比とバリオン・光子比  $\eta$ (模式図)

### 3.1.2 構造形成の問題

構造形成の観点からもバリオン・ダークマターは宇宙のダークマター全てを説明することはできないことがわかる。再結合以前の宇宙を考える。バリオンと電子はクーロン散乱によって相互作用している。また、電子と光子はトムソン散乱によって相互作用している。

このため、バリオンと電子、光子は密接に結びついている。

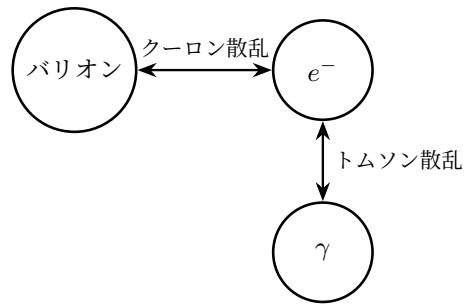


図 6 バリオン-電子-光子の強結合

このとき、小さいスケールで見ると光子は拡散運動をしている。まず、光子の平均自由行路  $\ell_f$  は

$$\ell_f = \frac{1}{n_e \sigma_T} \quad (80)$$

である。<sup>\*9</sup>ここで、 $n_e$  は電子の数密度、 $\sigma_T$  はトムソン断面積である。ここで、光子は  $\ell_f$  の距離を進み電子によって散乱され、また  $\ell_f$  の距離を進むというようなランダムウォークをすると仮定する。このとき、時間  $t$  で光子が進む距離(拡散距離) $\ell_d$  は

$$\ell_d \simeq \ell_f \sqrt{N} = \sqrt{\frac{t}{\sigma_T n_e}} \quad (81)$$

である。ここで、 $N = t/\ell_f$  は時間  $t$  の間に散乱する回数である。この拡散距離よりも小さなスケールのゆらぎは拡散によって消えてしまう。(シルク減衰)

どの程度のスケールのゆらぎが消えるかを見積もる。放射優勢期の宇宙を考える。このとき、

$$t \simeq 1.7 \times 10^{19} (1+z)^{-2} \text{ s} \quad (82)$$

$$n_e = \frac{\rho_b}{m_p} \left(1 - \frac{Y}{2}\right) = 2.2 \times 10^{-7} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022}\right) (1+z)^3 \text{ cm}^{-3} \quad (83)$$

となる。ここで、 $m_p$  は陽子質量、 $Y \simeq 0.25$  はヘリウムのバリオン質量密度に対する割合である。これから、拡散スケールの共動距離  $L_d = \ell_d/a$  は

$$L_d = \ell_d (1+z) \simeq 6.1 \times 10^5 \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022}\right)^{-1/2} (1+z)^{-3/2} \text{ Mpc} \quad (84)$$

宇宙にダークマターがバリオン由来以外は存在しないとする。このとき、放射優勢期の終わり頃  $z \sim 3400$  では  $L_d \sim 20$  Mpc であり、銀河スケール ( $\sim 1$  Mpc) のゆらぎは消えてしまう。したがって、バリオンだけでは銀河のような構造を説明することはできない。これに対して、ダークマターは光子と相互作用しないので、ゆらぎを保持することができる。

### 3.2 原始ブラックホール

原始ブラックホールは、宇宙年齢が 1s にも満たない宇宙初期において大きな密度ゆらぎが存在した場合に重力崩壊を起こして形成される。歴史的には、1966 年にヤコブ・ゼルドビッチとイグナティ・ノヴィコフによってその存在が指摘された。<sup>\*10</sup> その後、1971 年にスティーブン・ホーキングによって大きな密度ゆらぎを持った領域が重力崩壊してブラックホールができるという描像が提示された。<sup>\*11</sup>

原始ブラックホールの質量はブラックホールが作られた時期によって決まる。原始ブラックホールは宇宙初期の大きな密度ゆらぎが要因で生成される。生成されるかどうかは、ゆらぎの波長が宇宙のホライズンの中に入ったとき、ある密度ゆらぎの大きさ  $\delta_c$  を超えるかどうかで決まる。密度

<sup>\*9</sup> ランダムウォークの一般論から距離の期待値は  $\sqrt{N}$  に比例することが知られている。付録??を参照。

<sup>\*10</sup> I. D. Novikov, A. G. Polnarev, A. A. Starobinsky, and Ya. B. Zeldovich, "Primordial black holes," Astron. Astrophys. 80, 104 (1979).

<sup>\*11</sup> S. W. Hawking, "Gravitationally collapsed objects of very low mass," Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 152, 75 (1971).

ゆらぎは

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}, \quad \delta\rho = \rho - \bar{\rho} \quad (85)$$

で定義される。ここで、 $\rho(\mathbf{x})$  は共動座標  $\mathbf{x}$  における密度、 $\bar{\rho}$  は宇宙の平均密度である。

$\delta(\mathbf{x})$  をフーリエ変換した  $\delta(\mathbf{k})$  を波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を持つゆらぎという。ゆらぎの波長  $\lambda$  はスケールファクター  $a$  に比例するのであった。例えば、RD 期では  $a(t) \propto t^{1/2}$ 、MD 期では  $a(t) \propto t^{2/3}$  であった。一方、ホライズンは  $t$  に比例して大きくなる。つまり、時間が経つにつれてホライズンは大きくなり、ゆらぎの波長は相対的に小さくなる。もともとホライズンよりも大きかったゆらぎの波長がホライズンと同じ大きさになることをゆらぎのモードがホライズンに入ると言う。

$\delta_c$  は解析的、数値シミュレーション的に計算されており、RD 期では  $\delta_c \simeq 0.3 - 0.5$ 、MD 期では  $\delta_c \simeq 0.005 - 0.05$  であることがわかっている。また、RD 期で生成される BH の質量  $M$  はホライズン質量  $M_H$  にほぼ等しい。 $(M = \gamma M_H, \gamma : \text{ホライズン質量と BH 質量の違い})$

ホライズン質量は

$$M_H = \frac{4\pi}{3}\rho_R H^{-3} = \frac{4\pi}{3}\rho_R \left( \frac{8\pi G}{3}\rho_R \right)^{-3/2} = \frac{4\pi^3 g_* T^4}{90} \left( \frac{\pi^2 g_* T^4}{90 M_{\text{pl}}^2} \right)^{-3/2} \quad (86)$$

である。ここで、 $\rho_R = \frac{\pi^2}{30}g_*T^4$ 、 $M_{\text{pl}} = 1/\sqrt{8\pi G}$  である。したがって、

$$M = \gamma M_H \simeq 6 \times 10^{35} \text{ g} \left( \frac{\gamma}{0.2} \right) \left( \frac{g_*}{10.75} \right)^{-1/2} \left( \frac{T}{10 \text{ MeV}} \right)^{-2} \quad (87)$$

となる。

また、原始ブラックホール質量と密度ゆらぎの波数  $k$  の関係も導くことができる。密度ゆらぎが地平線に入ったとき、つまり

$$\frac{2\pi}{k} \frac{a}{a_0} = \frac{1}{H} \quad (88)$$

である。<sup>\*12</sup>

$$H = \left( \frac{8\pi G}{3}\rho_R \right)^{1/2} = \left( \frac{8\pi}{3} \frac{1}{8\pi M_{\text{pl}}^2} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \right)^{1/2}$$

したがって、

$$k \simeq \frac{a}{a_0} H = \frac{g_{s*0}^{1/3} T_0}{g_{s*}^{1/3} T} H = \frac{g_{s*0}^{1/3} T_0}{g_{s*}^{1/3} T} \left( \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \right)^{1/2} \quad (89)$$

$$= g_{s*0}^{1/3} g_*^{1/6} \left( \frac{\pi^2}{90} \right)^{1/2} \frac{T T_0}{M_{\text{pl}}} \quad (90)$$

(91)

---

<sup>\*12</sup> 宇宙年齢は  $\sim 1/H$  であり、光速は 1 である。

したがって、

$$M = \gamma M_H \simeq 8 \times 10^{35} \text{ g} \left( \frac{\gamma}{0.2} \right) \left( \frac{g_*}{10.75} \right)^{-1/6} \left( \frac{k}{10^5 \text{ Mpc}^{-1}} \right)^{-2} \quad (92)$$

となる。

### 3.2.1 原始ブラックホールの生成率とダークマターへの寄与

ある時刻において BH になるかの割合  $\beta(M)$  を考える。地平線内の密度ゆらぎの確率分布から計算できる。地平線内の密度ゆらぎ  $\delta$  がガウス分布に従うとする。したがって、

$$\begin{aligned} \beta(M) &= \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right) \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)}\right) \quad (\sigma(M) \ll \delta_c) \end{aligned} \quad (93)$$

密度ゆらぎの分散  $\sigma^2(M)$  は共動スケール  $R = 1/k$  で均したときの密度ゆらぎ  $\delta(R = 1/k, \mathbf{x}, t_H)$  の分散である。

$$\sigma^2(M) = \langle \delta^2(R = 1/k, \mathbf{x}, t_H) \rangle \quad (94)$$

$t_H (\simeq H^{-1} = a/k)$  は注目しているゆらぎのスケールがホライズンに入った時刻である。

密度ゆらぎ  $\delta(\mathbf{x}, t)$  からスケール  $R$  で均し  $\delta(R = 1/k, \mathbf{x}, t_H)$  とするという操作について考える。空間点の半径  $R$  内で値をもち、十分外側でゼロとなるような関数（ウィンドウ関数） $W(\mathbf{x}, R)$  を用いる。ウィンドウ関数は

$$\int d^3x W(R, \mathbf{x}) = 1, \quad W(R, \mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{x}| \gg R) \quad (95)$$

という性質を満たす関数である。 $\delta(R, \mathbf{x}, t)$  はウィンドウ関数の畳み込みとして

$$\delta(R, \mathbf{x}, t) = \int d^3x' W(R, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}', t) \quad (96)$$

である。フーリエ変換は

$$\begin{aligned} \delta(R, \mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \delta(R, \mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \int d^3x' W(R, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}', t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x' \delta(\mathbf{x}', t) \int d^3x W(R, \mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x' \delta(\mathbf{x}', t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int d^3y W(R, \mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}, \quad (\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= (2\pi)^{3/2} \tilde{W}(R, \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (97)$$

である。ここで、 $\tilde{W}(R, \mathbf{k})$  はウィンドウ関数のフーリエ変換である。

これより、分散  $\sigma^2(M)$  は

$$\begin{aligned}
\sigma^2(M) &= \langle \delta^2(R = 1/k, \mathbf{x}, t_H) \rangle \\
&= \left\langle \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{W}(k^{-1}, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{q}, t_H) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{W}(k^{-1}, \mathbf{q}') \delta(\mathbf{q}', t_H) e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}} \right\rangle \\
&= \int \frac{d^3 q d^3 q'}{(2\pi)^3} \tilde{W}(k^{-1}, \mathbf{q}) \tilde{W}(k^{-1}, \mathbf{q}') e^{-i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}} \langle \delta(\mathbf{q}, t_H) \delta(\mathbf{q}', t_H) \rangle \\
&= \int \frac{d^3 q d^3 q'}{(2\pi)^3} \tilde{W}(k^{-1}, \mathbf{q}) \tilde{W}(k^{-1}, \mathbf{q}') e^{-i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \frac{2\pi^2}{q^3} P_\delta(q, t_H) \\
&= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{W}^2(k^{-1}, \mathbf{q}) \frac{2\pi^2}{q^3} P_\delta(q, t_H) \\
&= \int \frac{dq}{q} \tilde{W}^2(k^{-1}, q) P_\delta(q, t_H), \quad (d^3 q = 4\pi q^2 dq)
\end{aligned} \tag{98}$$

となる。ここで、 $P_\delta(k, t)$  は密度ゆらぎのパワースペクトルで

$$\langle \delta(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k}', t) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} P_\delta(k, t) \tag{99}$$

と定義される。密度ゆらぎ（共動ゲージでの密度ゆらぎ）は曲率ゆらぎ  $\zeta$  について

$$\delta = \frac{2(1+w)}{5+3w} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \zeta \tag{100}$$

の関係があるが、RD 期では  $w = 1/3$  であるので

$$\delta = \frac{4}{9} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \zeta \tag{101}$$

という関係にある。したがって、曲率ゆらぎのパワースペクトル  $P_\zeta(q)$  を用いて

$$P_\delta(q, t) = \frac{16}{81} \left( \frac{q}{aH} \right)^4 P_\zeta(q) \tag{102}$$

とかけるため、 $t = t_H$  のときは  $H^{-1} = a/k$  であるので

$$P_\delta(q, t_H) = \frac{16}{81} \left( \frac{q}{k} \right)^4 P_\zeta(q) \tag{103}$$

$\sigma^2(M)$  は

$$\sigma^2(M) = \int \frac{dq}{q} \tilde{W}^2(k^{-1}, q) \frac{16}{81} \left( \frac{q}{k} \right)^4 P_\zeta(q) \tag{104}$$

となる。

原始ブラックホール形成ではガウス型のウィンドウ関数は

$$W(R, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R^3} \exp \left( -\frac{\mathbf{x}^2}{2R^2} \right) \tag{105}$$

を使われることが多い。また、フーリエ変換は

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(R, k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x W(R, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3 R^3} \int d^3x \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2R^2}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{(2\pi R)^3} \prod_{i=1}^3 \int dx_i \exp\left(-\frac{x_i^2}{2R^2} + ik_i x_i\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi R)^3} \prod_{i=1}^3 \int dx_i \exp\left(-\frac{(x_i - ik_i R^2)^2}{2R^2} - \frac{k_i^2 R^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi R)^3} (2\pi R^2)^{3/2} \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{106}$$

である。

ブラックホールになる割合  $\beta(M)$  から、生成時における原始ブラックホールのエネルギー密度  $\rho_{\text{PBH}}$  と放射の密度  $\rho_R$  の比率は

$$\frac{1}{\rho_R} \frac{d\rho_{\text{PBH}}(M)}{d\ln M} \Big|_{T=T_M} = \gamma \beta(M) \tag{107}$$

で与えられる。ここで、 $T_M$  は質量  $M$  のブラックホールが生成される温度である。生成された原子ブラックホールはほとんど速度を持たないと考えられるので、非相対論的物質として振る舞う。したがって、この比はスケールファクター  $a$  に比例して大きくなる。つまり、

$$\frac{\rho_{\text{PBH}}}{\rho_R} \propto \frac{a^{-3}}{g_* T^4} = \frac{1}{T} \frac{1}{g_* T^3 a^3} \propto \frac{1}{T}$$

である

のことから、現在の宇宙の全ダークマターの中のブラックホールが占める割合  $f(M)$  は

$$\begin{aligned}
f(M) &= \frac{1}{\rho_{\text{dm},0}} \frac{d\rho_{\text{PBH}}(M)}{d\ln M} \Big|_0 \\
&= \frac{1}{\rho_{\text{dm},\text{eq}}} \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}}\right)^3 \frac{d\rho_{\text{PBH}}(M)}{d\ln M} \Big|_{T=T_{\text{eq}}} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_0}\right)^3 = \frac{1}{\rho_{\text{dm},\text{eq}}} \frac{d\rho_{\text{PBH}}(M)}{d\ln M} \Big|_{T=T_{\text{eq}}} \\
&= \frac{1}{\rho_{M,\text{eq}}} \frac{\Omega_{M,\text{eq}}}{\Omega_{\text{dm},\text{eq}}} \frac{d\rho_{\text{PBH}}(M)}{d\ln M} \Big|_{T=T_{\text{eq}}} \\
&= \frac{1}{\rho_{R,\text{eq}}} \frac{d\rho_{\text{PBH}}(M)}{d\ln M} \Big|_{T=T_{\text{eq}}} \frac{\Omega_{M,\text{eq}}}{\Omega_{\text{dm},\text{eq}}} = \gamma \beta(M) \left(\frac{T_M}{T_{\text{eq}}}\right) \frac{\Omega_M}{\Omega_{\text{dm}}}
\end{aligned} \tag{108}$$

ここで、<sup>\*13</sup> $T_{\text{eq}}$  は物質・放射等価の温度、 $\Omega_M$ 、 $\Omega_{\text{dm}}$  はそれぞれ現在の全物質密度、ダークマター密度の臨界密度に対する割合である。

---

<sup>\*13</sup> 二つ目の等式では MD 期で、 $\rho \propto a^{-3}$  であることを用いた。

さらに、式(87)より

$$f(M) = \gamma^{3/2} \left( \frac{\beta(M)}{1.6 \times 10^{-9}} \right) \left( \frac{10.75}{g_*(T_M)} \right)^{1/4} \left( \frac{0.12}{\Omega_{\text{dm}} h^2} \right) \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \quad (109)$$

とかける。

### 3.3 重力マイクロレンズ効果

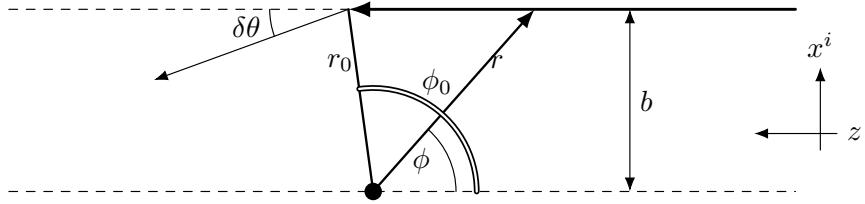


図7 遠方から光が到来し重力レンズ効果を受ける

この重力マイクロレンズ効果の議論は間違っていることが判明したので、参考にしないこと!!!

星の光がブラックホールによってどれだけ曲げられるかを考える。遠方からやってきて角度  $\delta\theta$  だけ曲げられるとする。ブラックホールの大きさは無視できるとして質量は  $M$  とする。このとき、BH の周りの時空はシュワルツシルト計量で記述される。

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} - r^2 d\Omega^2 \quad (110)$$

ここで、

$$r = \chi \left( 1 + \frac{GM}{2\chi} \right)^2 \quad (111)$$

と変数変換する。まず、時間成分は

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2GM}{r} &= 1 - \frac{2GM}{\chi \left( 1 + \frac{GM}{2\chi} \right)^2} \\ &= \frac{\chi \left( 1 + \frac{GM}{2\chi} \right)^2 - 2GM}{\chi \left( 1 + \frac{GM}{2\chi} \right)^2} = \frac{\left( 1 - \frac{GM}{2\chi} \right)^2}{\left( 1 + \frac{GM}{2\chi} \right)^2} \end{aligned}$$

である。また、

$$r = \chi \left[ 1 + \frac{GM}{\chi} + \frac{(GM)^2}{4\chi^2} \right] = \chi + GM + \frac{(GM)^2}{4\chi}$$

なので、

$$dr = d\chi \left[ 1 - \left( \frac{GM}{2\chi} \right)^2 \right]$$

$$dr^2 = d\chi^2 \left[ 1 - \left( \frac{GM}{2\chi} \right)^2 \right]^2$$

であるので、空間成分は

$$-\frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} - r^2 d\Omega^2 = -\frac{\left(1 + \frac{GM}{2\chi}\right)^2}{\left(1 - \frac{GM}{2\chi}\right)^2} \left[ 1 - \left( \frac{GM}{2\chi} \right)^2 \right]^2 d\chi^2 - \chi^2 \left(1 + \frac{GM}{2\chi}\right)^4 d\Omega^2$$

$$= -\left(1 + \frac{GM}{2\chi}\right)^4 (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2)$$

となる。したがって、計量は

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{2\chi}\right)^2}{\left(1 + \frac{GM}{2\chi}\right)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{GM}{2\chi}\right)^4 (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2) \quad (112)$$

となる。ここで、弱い重力場近似 ( $2GM/\chi \ll 1$ ,  $r \simeq \chi$ ) を用いる。<sup>\*14</sup> したがって、

$$ds^2 \simeq \left(1 - \frac{2GM}{\chi}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{\chi}\right) (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2)$$

$$\simeq \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (113)$$

となる。

光の運動は測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (114)$$

より決定される。まず、時間成分について  $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$  として

$$(L.H.S.) = \frac{d^2x^0}{d\lambda^2} = \frac{dp^0}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{dE}{dt} \quad (115)$$

である。右辺のクリストッフェル記号は

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho})$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} (g_{0\alpha,\beta} + g_{0\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,0}) \quad (116)$$

---

<sup>\*14</sup>  $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \simeq 1 - 4x$ ,  $(1+x)^4 \simeq 1 + 4x$  for  $x \ll 1$

なので、 $\alpha, \beta$  のいずれかが 0 に等しいときに値を持つことがわかる。つまり、

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}g_{ij,0} = 0 \quad (117)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} \left( \frac{2GM}{r^2} \frac{x^i}{r} \right) \simeq \frac{GM}{r^2} \frac{x_i}{r} \quad (118)$$

である。例えば、式 118 の変形は

$$g_{00,i} = -2GM\partial_i \left( \frac{1}{r} \right)$$

より丁寧に計算すると

$$\begin{aligned} \partial_i \left( \frac{1}{r} \right) &= \partial_i \left( \frac{1}{(-g_{jk}x^j x^k)^{1/2}} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{2} \frac{1}{(-g_{jk}x^j x^k)^{3/2}} (-g_{jk})(\delta_i^j x^k + x^j \delta_i^k) \\ &= \frac{1}{2r^3} g_{ij} x^j \\ &\simeq -\frac{1}{2r^3} \left( 1 + \frac{2GM}{r} \right) \delta_{ij} x^j = -\frac{1}{2r^3} \left( 1 + \frac{2GM}{r} \right) x_i \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^0 &= -2GM \left[ -\frac{1}{2r^3} \left( 1 + \frac{2GM}{r} \right) x_i \right] \\ &\simeq \frac{2GM}{r^3} x_i \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dE}{dt} &= -2\Gamma_{0i}^0 p^0 p^i \\ \frac{dE}{dt} &= -2\Gamma_{0i}^0 p^i \simeq \frac{2GM}{r^3} x_i p^i \end{aligned} \quad (119)$$

となる。測地線の方程式 114 について空間成分は

$$\begin{aligned} (L.H.S.) &= \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx^i}{dt} \right) = E \frac{d}{dt} \left( E \frac{dx^i}{dt} \right) \\ &= E^2 \frac{d^2 x^i}{dt^2} + E \frac{dE}{dt} \frac{dx^i}{dt} \end{aligned} \quad (120)$$

となる。右辺のクリストッフェル記号は

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} g^{i\rho} (g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho}) \\ &= \frac{1}{2} g^{i\ell} (g_{\ell\alpha,\beta} + g_{\ell\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\ell}) \end{aligned} \quad (121)$$

なので、 $GM/r$  の一次のオーダーまで考えると

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{ii}(-g_{00,i}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{2GM}{r}}\left(\frac{2GM}{r^2}\frac{x_i}{r}\right) \simeq -\frac{GM}{r^3}x_i \quad (122)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{i\ell}(g_{\ell 0,j} + g_{\ell j,0} - g_{0j,\ell}) = 0 \quad (123)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{i\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{-1}{1+\frac{2GM}{r}}\delta^{i\ell}\left(\frac{2GM}{r^2}\frac{x_k}{r}\delta_{\ell j} + \frac{2GM}{r^2}\frac{x_j}{r}\delta_{\ell k} - \frac{2GM}{r^2}\frac{x_\ell}{r}\delta_{jk}\right) \\ &\simeq -\frac{GM}{r^3}(x_k\delta_j^i + x_j\delta_k^i - x^i\delta_{jk}) \end{aligned} \quad (124)$$

である。式(122)の変形は式(118)と同様にして

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= -2GM\left[-\frac{1}{2r^3}\left(1 + \frac{2GM}{r}\right)x_i\right] \\ &\simeq \frac{2GM}{r^3}x_i \end{aligned}$$

今、光は  $z$  方向に進行している。したがって、 $p_x, p_y, dx/dt, dy/dt, dE/dt$  は  $GM/r$  のオーダーであり、 $p_z, dz/dt$  は 1 のオーダーである。

このことに考慮して  $i = x, y$  について

$$\begin{aligned} E^2\frac{d^2x^i}{dt^2} + E\frac{dE}{dt}\frac{dx^i}{dt} &= -\Gamma_{jk}^i p^j p^k - \Gamma_{00}^i p^0 p^0 \\ E^2\frac{d^2x^i}{dt^2} &\simeq -\Gamma_{zz}^i p_z p_z - \Gamma_{00}^i p_0 p_0 \\ &\stackrel{*15}{\simeq} -\left(-\frac{GM}{r^3}(z\delta_z^i + z\delta_z^i - x^i)\right)p_z^2 - \frac{GM}{r^3}x^i E^2 \\ &\simeq -\frac{2GM}{r^3}x^i E^2, \quad (E^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \simeq p_z^2) \end{aligned} \quad (125)$$

となる。

また、 $i = z$  について

$$\begin{aligned} E^2\frac{d^2z}{dt^2} + E\frac{dE}{dt}\frac{dz}{dt} &= -\Gamma_{jk}^z p^j p^k - \Gamma_{00}^z p^0 p^0 \\ E^2\frac{d^2z}{dt^2} + E\frac{2GM}{r^3}x^i p^i &\simeq -\Gamma_{zz}^z p_z p_z - \Gamma_{00}^z p_0 p_0, \quad \left(\frac{dz}{dt} \simeq 1\right) \\ E^2\frac{d^2z}{dt^2} + E\frac{2GM}{r^3}z p_z &\simeq -\left(-\frac{GM}{r^3}(z + z - z)\right)p_z^2 - \frac{GM}{r^3}z E^2 \\ E^2\frac{d^2z}{dt^2} &\simeq -\frac{2GM}{r^3}z E^2 \end{aligned} \quad (126)$$

結局、空間成分の測地線方程式は

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{2GM}{r^3}x^i, \quad (i = x, y, z) \quad (127)$$

となる。<sup>\*16</sup>

上方程式を極座標  $(r, \phi)$  に変換する。各成分は

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{2GM}{r^2} \quad (128)$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0, \quad (r^2\dot{\phi} = J = \text{const.}) \quad (129)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} = \frac{J}{r^2} \frac{d}{d\phi} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{J}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{J}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right) = \frac{J^2}{r^4} \left[ \frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{J^2}{r^4} \left[ \frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \right] - r \frac{J^2}{r^4} &= -\frac{2GM}{r^2} \\ \frac{r''}{r^2} - 2\frac{r'^2}{r^3} - \frac{1}{r} &= -\frac{2GM}{J^2}, \quad (' = \frac{d}{d\phi}) \end{aligned}$$

ここで、 $u = 1/r$  とすると

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{1}{u^2} u' \\ r'' &= \frac{2}{u^3} u'^2 - \frac{1}{u^2} u'' \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{r''}{r^2} - 2\frac{r'^2}{r^3} - \frac{1}{r} &= \left( \frac{2}{u^3} u'^2 - \frac{1}{u^2} u'' \right) u^2 - 2 \left( -\frac{1}{u^2} u' \right)^2 u^3 - u \\ &= -u'' - u \end{aligned}$$

となり、

$$u'' + u = \frac{2GM}{J^2} \quad (130)$$

となる。この方程式の解は

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left( u - \frac{2GM}{J^2} \right) = - \left( u - \frac{2GM}{J^2} \right)$$

より

$$u = \frac{2GM}{J^2} + A \cos(\phi - \phi_0) \quad (131)$$

---

<sup>\*16</sup> ニュートン力学から導かれるものとファクターが 2 倍違う。

ここで、 $\phi_0$  は光が最も近づくときの角度である。十分遠方 ( $r \rightarrow \infty$ ) で、 $J$  を考える。 $r \rightarrow \infty$  のとき、 $\dot{r} \simeq 1$  であることを用いると、

$$\dot{\phi} \simeq \frac{d}{dt} \left( \frac{b}{r} \right) = -\frac{b}{r^2} \dot{r} \simeq -\frac{b}{r^2}$$

となるので、

$$J = r^2 \dot{\phi} \simeq -b, \quad (r \rightarrow \infty)$$

である。よって、式 131 は  $r \rightarrow \infty$  のとき  $u = 1/r \rightarrow 0$  より

$$0 = \frac{2GM}{b^2} + A \cos(-\phi_0) \quad (132)$$

となる。さらに、式 131 を時間微分すると

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{r}}{r^2} &= -A \sin(\phi - \phi_0) \dot{\phi} \\ \dot{r} &= AJ \sin(\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

となるので、 $r \rightarrow \infty$  のとき

$$A = \frac{1}{-b \sin(-\phi_0)} = \frac{1}{b \sin \phi_0} \quad (133)$$

が得られる。重力レンズ効果が弱い場合、 $\phi_0 \simeq \pi/2$  であると考えられるので、

$$\phi_0 \simeq \frac{\pi}{2} + \epsilon, \quad (|\epsilon| \ll 1) \quad (134)$$

とおく。このようにすると 132 と式 133 は

$$A = \frac{1}{b \cos \epsilon} \simeq \frac{1}{b} \quad (135)$$

$$0 = \frac{2GM}{b^2} - A \sin \epsilon \simeq \frac{2GM}{b^2} - \frac{\epsilon}{b} \quad (136)$$

したがって、

$$A = \frac{1}{b} \quad (137)$$

$$\epsilon = \frac{2GM}{b} \quad (138)$$

と決まる。これによって、光が曲げられた角度  $\delta\theta$ (図 3.3) は

$$\delta\theta = 2\phi_0 - \pi = \frac{4GM}{b} \quad (139)$$

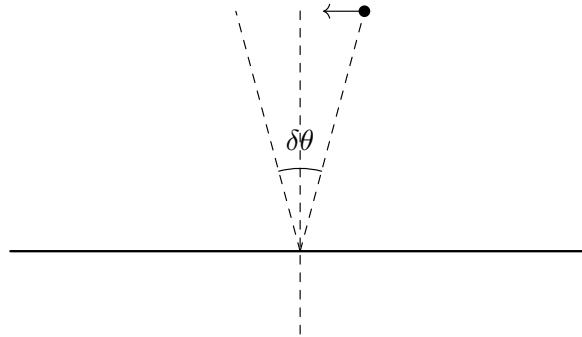


図 8 重力レンズ効果により  $\delta\theta$ だけ光が曲げられる

図 9 のような幾何を考える。観測者と BH の距離を  $d_L$ 、観測者と星の距離を  $d_S$ 、BH と星の距離を  $d_{LS}$  とする。星は実際には角度  $\beta$  の方向にあるが、BH によって光が曲げられるため、観測者には角度  $\theta = \beta + \alpha$  の方向にあるように見える。まずは青線について

$$d_{LS} \sin \delta\theta = d_S \sin \alpha \quad (140)$$

となる。 $\alpha, \delta\theta \ll 1$  として

$$\alpha = \frac{d_{LS}}{d_S} \delta\theta = \frac{d_{LS}}{d_S} \frac{4GM}{b} \quad (141)$$

また、赤線について ( $\theta \ll 1$ )

$$b = d_L \sin \theta \simeq d_L \theta \quad (142)$$

となるので、

$$\alpha = \frac{d_{LS}}{d_S d_L} \frac{4GM}{\theta} \quad (143)$$

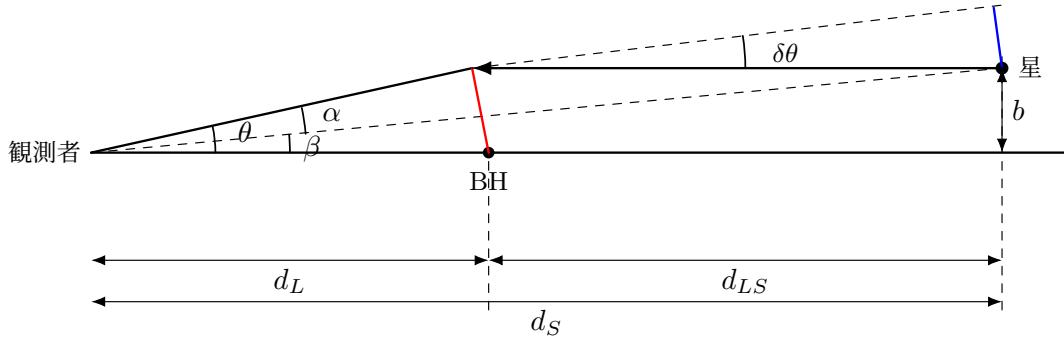


図 9 BH によって星の光が受ける重力レンズ効果

特別な場合として  $\beta = 0$ 、すなわち星が BH の真後ろにある場合を考える。式 143 より

$$\theta = \sqrt{\frac{4GM d_{LS}}{d_S d_L}} = \sqrt{\frac{4GM}{d_L} \left(1 - \frac{d_L}{d_S}\right)} := \theta_E \quad (144)$$

となる。また、

$$R_E = d_L \theta_E = \sqrt{4GM d_L \left(1 - \frac{d_L}{d_S}\right)} \quad (145)$$

をAINシュタイン半径と呼ぶ。AINシュタイン半径は重力レンズ効果が現れる典型的な長さスケールを与える。 $d_L \ll d_S$  の場合は

$$R_E = 0.06 R_\odot \left(\frac{M}{10^{-10} M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{d_L}{100 \text{ kpc}}\right)^{1/2} \quad (146)$$

である。

図 9 の角度をベクトル  $\alpha, \beta, \theta$  で表す

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (147)$$

である。 $\alpha$  は式 143 より

$$\alpha(\theta) = \frac{\theta_E^2}{\theta} \frac{\theta}{\theta} = \frac{\theta_E^2}{\theta^2} \theta \quad (148)$$

である。よって、

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta^2} \theta \quad (149)$$

となる。レンズの光源となる星の位置を  $x$  軸方向にとると、 $\beta = (\beta, 0)$  であるので、式 149 は

$$\beta = \theta_x \left(1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\right) \quad (150)$$

$$0 = \theta_y \left(1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\right) \quad (151)$$

となる。式 151 の第二式より、 $\theta_y = 0$  または  $\theta = \theta_E$  である。後者の場合、第一式は  $\beta = 0$  となるので、物理的な興味はない。よって、 $\theta_y = 0$  である。したがって、 $\theta = |\theta_x|$  である。さらに、第一式は

$$\begin{aligned} \theta \left(1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\right) - \beta &= 0 \\ \theta^2 - \beta \theta - \theta_E^2 &= 0 \end{aligned} \quad (152)$$

と  $\theta$  についての二次方程式となる。したがって、

$$\theta = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2} = \frac{\beta}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta_E^2}{\beta^2}}\right) \quad (153)$$

となり重力レンズによって見かけ上 2 つの像ができる。

光源が質点の場合を考えてきたが、実際の星は有限の大きさを持つ。このとき、重力レンズ効果によって光源が広がることによって、増光が起こる。Liouville の定理によって、光の伝搬に伴い放射強度は保存することができる。観測される重力レンズ像の明るさは、 $\beta$  と  $\theta$  の位置での微小面積の比だけ明るくなる。この比は Jacobian の絶対値の逆数で与えられる。増光  $M$  は

$$M = \left| \frac{\partial(\theta_x, \theta_y)}{\partial(\beta_x, \beta_y)} \right| \quad (154)$$

で与えられる。ここで、式 149

$$\begin{aligned} \beta_x &= \theta_x - \frac{\theta_E^2}{\theta_x^2 + \theta_y^2} \theta_x \\ \beta_y &= \theta_y - \frac{\theta_E^2}{\theta_x^2 + \theta_y^2} \theta_y \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(\beta_x, \beta_y)}{\partial(\theta_x, \theta_y)} \right| &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2 - \theta_x 2\theta_x}{\theta^4} \theta_E^2 & \frac{2\theta_E^2 \theta_x \theta_y}{\theta^4} \\ \frac{2\theta_E^2 \theta_x \theta_y}{\theta^4} & 1 - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2 - \theta_y 2\theta_y}{\theta^4} \theta_E^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \frac{\theta_E^2}{\theta^4} (\theta_x^2 - \theta_y^2) & \frac{2\theta_E^2 \theta_x \theta_y}{\theta^4} \\ \frac{2\theta_E^2 \theta_x \theta_y}{\theta^4} & 1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^4} (\theta_x^2 - \theta_y^2) \end{vmatrix} \\ &= 1 - \frac{\theta_E^4}{\theta^8} (\theta_x^2 - \theta_y^2)^2 - \frac{4\theta_E^4 \theta_x^2 \theta_y^2}{\theta^8} \\ &= 1 - \frac{\theta_E^4}{\theta^8} (\theta_x^2 + \theta_y^2)^2 = 1 - \frac{\theta_E^4}{\theta^4} \end{aligned} \quad (155)$$

したがって、

$$M = \left| \frac{\partial(\theta_x, \theta_y)}{\partial(\beta_x, \beta_y)} \right|^{-1} = \left| \frac{\partial(\beta_x, \beta_y)}{\partial(\theta_x, \theta_y)} \right| = \frac{\theta^4}{\theta^4 - \theta_E^4} \quad (156)$$

と計算できる。ここでは、2 つの像が分解できない状況を仮定して  $\theta_+$  と  $\theta_-$  の寄与を足すことで  $M$  は

$$\begin{aligned} M &= M_+ + M_- \\ &= \frac{\theta_+^4}{|\theta_+^4 - \theta_E^4|} + \frac{\theta_-^4}{|\theta_-^4 - \theta_E^4|} \end{aligned} \quad (157)$$

を計算する。式 153 を用いて計算する。

$$\theta_+ + \theta_- = \beta \quad (158)$$

$$\theta_+ \theta_- = -\theta_E^2 \quad (159)$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
\theta_+^2 + \theta_-^2 &= (\theta_+ + \theta_-)^2 - 2\theta_+\theta_- = \beta^2 + 2\theta_E^2 \\
\theta_+^4 + \theta_-^4 &= (\theta_+^2 + \theta_-^2)^2 - 2\theta_+^2\theta_-^2 = \beta^4 + 4\beta^2\theta_E^2 + 2\theta_E^4 \\
\theta_+^4 - \theta_-^4 &= (\theta_+^2 - \theta_-^2)(\theta_+^2 + \theta_-^2) = (\theta_+ - \theta_-)(\theta_+ + \theta_-)(\theta_+^2 + \theta_-^2) \\
&= \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \beta(\beta^2 + 2\theta_E^2)
\end{aligned}$$

となる。これらを用いて、 $M$  を計算すると

$$\begin{aligned}
M_+ + M_- &= \frac{\theta_+^4 |\theta_-^4 - \theta_E^4| + \theta_-^4 |\theta_+^4 - \theta_E^4|}{|(\theta_+^4 - \theta_E^4)(\theta_-^4 - \theta_E^4)|} \\
&= \frac{\theta_+^4(\theta_E^4 - \theta_-^4) + \theta_-^4(\theta_+^4 - \theta_E^4)}{|\theta_E^8 - (\theta_+^4 + \theta_-^4)\theta_E^4 + \theta_+^4\theta_-^4|} \\
&= \frac{\theta_E^4(\theta_+^4 - \theta_-^4)}{|\theta_E^8 - (\theta_+^4 + \theta_-^4)\theta_E^4 + \theta_+^4\theta_-^4|} \\
&= \frac{\theta_E^4 \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \beta(\beta^2 + 2\theta_E^2)}{|\theta_E^8 - (\beta^4 + 4\beta^2\theta_E^2 + 2\theta_E^4)\theta_E^4 + \theta_E^8|} \\
&= \frac{\beta^2 + 2\theta_E^2}{\beta \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}
\end{aligned} \tag{160}$$

となる。

重力マイクロレンズによる増光が起こる時間スケール  $t_E$  はインシュタイン半径を光源の見かけの横速度  $v$  で割ったもので与えられ

$$t_E = \frac{R_E}{v} \simeq 34 \text{ min} \left( \frac{M}{10^{-8} M_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{d_L}{100 \text{ kpc}} \right)^{1/2} \left( \frac{200 \text{ km/s}}{v} \right) \tag{161}$$

となる。つまり、太陽の  $10^{-10}$  倍程度の質量を持つブラックホールなら数分、太陽質量のブラックホールなら数ヶ月程度の時間スケールで増光が起こる。

これまででは、星の光を粒子のように扱ったが、実際には光は波なので光の波長が Schwarzschild 半径に比べて小さいときに限り、上の議論が成り立つ。BH の Schwarzschild 半径は

$$r_s = 2GM \simeq 3 \times 10^{-5} \text{ cm} \left( \frac{M}{10^{-10} M_\odot} \right) \tag{162}$$

で与えられ、これより大きな波長を持つ光に対しては回折の効果で弱まる。したがって、可視光(波長  $\sim 400 - 800 \text{ nm}$ ) の観測で重力レンズ効果を調べることができるのは  $10^{-12} M_\odot$  以上の質量を持つ BH に限られる。さらに、星の大きさがインシュタイン半径に対して無視できない場合についても重力レンズ効果は弱まる。

### 3.4 原子ブラックホールに対する観測的制限

to be continued...

## 付録 A ランダムウォーク

### A.1 1次元ランダムウォーク

1次元のランダムウォークを考える。ここでは、一般論として確率  $p$  で正の方向に、確率  $q = 1 - p$  で負の方向に 1 ステップ進むとする。n ステップ後に正の方向に  $k$  ステップ進んでいるとする。このときの確率分布は二項分布であり

$$P(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (163)$$

に従う。

#### ■期待値

期待値は

$$\begin{aligned} E[k] &= \sum_{k=0}^n k P(n, k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned} \quad (164)$$

と計算できる。また、分散は

$$\begin{aligned} E[k^2] &= \sum_{k=0}^n k^2 P(n, k) \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} + np(p+q)^{n-1} \\ &= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np = n(n-1)p^2 + np \end{aligned} \quad (165)$$

と計算できる。

したがって、位置の期待値 ( $k - (n - k)$  にいる期待値) は

$$\begin{aligned} E[X] &= E[2k - n] \\ &= 2E[k] - n = 2np - n = 2np - n(p+q) = n(p-q) \end{aligned} \quad (166)$$

である。

また、原点からの距離の 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[(2k-n)^2] \\ &= 4E[k^2] - 4nE[k] + n^2 \\ &= 4n(n-1)p^2 + 4np - 4n^2p + n^2 \\ &= 4np((n-1)p+1-n) + n^2 \\ &= 4np((n-1)(p-1)) + n^2 \\ &= 4npq(1-n) + n^2 \\ &= 4pqn + n^2(1-4pq) \\ &= 4pqn + n^2(p-q)^2 \end{aligned} \tag{167}$$

となる。 $p = q = 1/2$  のとき、左右に同じ確率で広がり、 $E[X] = 0, E[X^2] = n$  となる。移動距離の期待値は  $\sqrt{n}$  となる。

— 1 次元ランダムウォーク —

- 期待値 :  $n(p - q)$
- 移動距離の期待値 :  $\sqrt{4pqn + n^2(p - q)^2}$

## 参考文献