

LSS：宇宙の大規模構造

2025 年 12 月 2 日

目次

1	はじめに	3
2	密度ゆらぎの進化	3
2.1	宇宙の構造形成	3
2.2	流体方程式と密度ゆらぎ	3
2.3	線形近似とジーンズ不安定性	8
2.4	バリオン音響振動	10
2.5	密度ゆらぎの線形成長	14
2.6	非線形摂動論	19
2.7	球対称密度ゆらぎ	32
3	密度ゆらぎの統計と観測量	34
3.1	キュムラント展開定理	34
3.2	モーメントとキュムラント母関数	37
3.3	他変数ガウス分布	39
3.4	密度ゆらぎのパワースペクトル	41
3.5	線形パワースペクトル	43
3.6	初期非ガウス性	45
3.7	天体のバイアス	48
3.8	赤方偏移空間変形	54
3.9	大規模構造とバリオン音響振動	61
3.10	ハローの形成と質量関数	65
4	大規模構造と非線形摂動論	71
4.1	構造形成における非線形性	71
4.2	標準摂動論による非線形パワースペクトル	72

4.3	摂動展開の図形的表現	73
4.4	摂動論におけるバイアス効果	77
5	一般相対論による線形摂動論	78
5.1	アインシュタイン方程式の線形近似	78
5.2	ゲージ変換と SVT 分解	92
5.3	ゲージ不変摂動論	99
付録 A	相対論的なドップラー効果	100

1 はじめに

宇宙の大規模構造についてまとめていく。主に、[4] を参考に行っている。詳しい計算や細かい議論については、[1],[3] を参照している。他にも、[2] を参照している。参考文献リストは最後にまとめている。

2 密度ゆらぎの進化

2.1 宇宙の構造形成

小スケールの構造を無視して、対局的なスケールで宇宙は厳密に一様等方である。しかし、実際には宇宙にはさまざまな構造が存在する。例えば、銀河、銀河団、超銀河団、ボイド、フィラメントなどがそれである。これらの構造が存在しないと我々はもちろん存在しない。

これらの構造形成について我々が存在し得るまでの厳密な過程を理論的に記述することは極めて困難である。その主たる理由は、その形成過程が力学的な非線形過程であるためである。初期条件の特殊な対称性が存在する場合を除いて、非線形性の強い領域を含めた時間進化の一般解を求めることはできない。

宇宙は時間を遡るほどに一様等方に近づいていく。しかし、それでもわずかに非一様性が存在するはずである。このわずかな密度の高い部分には重量によって段々と物質が集まっていき、密度の低い部分には段々と物質がなくなっていく。この現象を重力不安定性という。この重力不安定性によって、宇宙の複雑な構造は形成されてきた。

宇宙の構造の種となる十分初期にあったゆらぎを初期ゆらぎという。初期ゆらぎの起源は不定性が多いが、現在はインフレーション由来の初期ゆらぎが有望視されている。

2.2 流体方程式と密度ゆらぎ

重力不安定性による宇宙の構造形成を記述するために、物質の空間分布を非相対論的ニュートン流体として扱う。ここで、空間曲率については構造形成に関するスケールで見ると無視できるため平坦空間を仮定する。そのような平坦な座標空間 \mathbf{r} について質量密度場 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、圧力場 $p(\mathbf{r}, t)$ 、速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ を考えると、重力ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ 中の流体の基礎方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (2)$$

である。

式 (1) は質量保存則を表し、式 (2) はオイラー方程式と呼ばれ運動方程式^{*1}を表す。右辺の第一

^{*1} 時間微分 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ は流体素片に対する微分であり、物質微分とも呼ばれる。

項は圧力勾配力、第二項は重力を表している。また、一般相対論からニュートン近似をして流体方程式を導出することもできる。この方程式は非相対論的な物質についてのみ成り立つ。したがって、 H^{-1} よりも大きなスケールでは宇宙膨張の効果が顕著になるので、これよりも小さなスケールでのみ成り立つ。^{*2}

■導出

流体方程式の導出を簡単に示す。以下では、簡単のために $\partial/\partial \mathbf{r}$ を ∇ と表す。まず、固定された体積要素 ΔV の質量の変化率は

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r \quad (3)$$

である。一方、体積要素を出入りする質量流束は

$$-\oint_{\partial \Delta V} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3r \quad (4)$$

である。したがって、質量保存則から

$$\int_{\Delta V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) d^3r = 0 \quad (5)$$

が成り立つ。

次に、オイラー方程式の導出を示す。微小体積要素における質量を $\Delta m = \rho \Delta V$ とすると、そこに加わる重力は

$$\mathbf{F}_{\text{gravity}} = -\Delta m \nabla \phi$$

である。ここで、 ϕ は重力ポテンシャルである。また、圧力勾配力は

$$\mathbf{F}_{\text{pressure}} = -\oint p \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\Delta V} \nabla p dV \simeq -\Delta V \nabla p$$

である。重力加速度は運動方程式から

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{dr^i}{dt} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

である。したがって、ニュートンの第二法則 $\mathbf{F} = \Delta m \mathbf{g}$ から

$$\begin{aligned} \Delta m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\Delta V \nabla p - \Delta m \nabla \phi \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \end{aligned}$$

^{*2} いわゆるホライズンスケールでの理論は一般相対論の摂動論を駆使して記述される。詳しい議論については後に述べる。

■共動座標系における流体方程式

上の座標 \mathbf{r} では静止座標によって表されている。これを宇宙論に適応させるには、膨張する宇宙と一緒に動く共動座標 \mathbf{x} を導入する。つまり、物理的距離で定義される静止座標 \mathbf{r} と共動座標 \mathbf{x} は

$$\mathbf{r} = a\mathbf{x} \quad (6)$$

が成り立つ。このときの物理的な速度は

$$\mathbf{u} = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} \quad (7)$$

である。このときの $\dot{a}\mathbf{x}$ は共動座標が一定な点では、静止座標では運動して見えることを表している。つまり、共動座標における速度 \mathbf{v} は共動座標が一定な点に対する相対速度によって定義できるので

$$\mathbf{v} := \mathbf{u} - \dot{a}\mathbf{x} = a\dot{\mathbf{x}} \quad (8)$$

となる。すなわち、

$$\mathbf{u} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (9)$$

である。

静止座標系 (\mathbf{r}, t) から共動座標系 (\mathbf{x}, t) への変換で、偏微分は $\partial/\partial\mathbf{x}$ を ∇ とすると

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} \cdot \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \rightarrow \frac{1}{a}\nabla \quad (10)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} = -\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x}$$

は式 (6) を両辺で t で微分すれば得られる。この変数変換によって、式 (1) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} \cdot \nabla\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot [\rho(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v})] &= 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} \cdot \nabla\rho + \frac{\dot{a}}{a}\nabla \cdot (\rho\mathbf{x}) + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) &= 0, \quad (\nabla \cdot (\rho\mathbf{x}) = 3\rho + \mathbf{x} \cdot \nabla\rho) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。また、式 (2) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} \cdot \nabla \right) (\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \frac{1}{a}[(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}) \cdot \nabla] (\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}) &= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{a}\nabla p - \frac{1}{a}\nabla\phi \\ \frac{\partial}{\partial t}(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}) &= -\frac{1}{a\rho}\nabla p - \frac{1}{a}\nabla\phi \end{aligned} \quad (12)$$

より

$$\begin{aligned}
\ddot{a}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\frac{1}{a\rho}\nabla p - \frac{1}{a}\nabla\phi \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\frac{1}{a\rho}\nabla p - \frac{1}{a}(\nabla\phi + a\ddot{a}\mathbf{x}) \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\frac{1}{a\rho}\nabla p - \frac{1}{a}\nabla\Phi, \quad (\Phi := \phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2)
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで、 (\mathbf{x}, t) は独立に扱っているので $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ の項は消えることに注意。また、ここで導入した Φ は共動座標系での重力ポテンシャルに対応する。右辺の第二項に \ddot{a} に比例する項がついているのは、共動座標で一定値をとる点が、静止座標で見ると加速度運動しているように見えることに起因している。

静止座標系における重力ポテンシャル ϕ はポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{r}^2} = \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho - \Lambda \tag{14}$$

を満たす。ここで、宇宙の平均密度 $\bar{\rho}$ に対してフリードマン方程式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho} + \frac{\Lambda}{3} \tag{15}$$

が成り立つ。ただし、今は物質優勢期を考えているので \bar{p} を無視した。したがって、

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \Phi &= \nabla^2 \left(\phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2 \right) \\
&= a^2(4\pi G\rho - \Lambda) + 3a\ddot{a} \\
&= a^2(4\pi G\rho - \Lambda) + 3a^2 \left(-\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho} + \frac{\Lambda}{3} \right) \\
&= 4\pi G a^2(\rho - \bar{\rho})
\end{aligned} \tag{16}$$

が得られる。

ここで、密度ゆらぎ $\delta(\mathbf{x}, t)$ と圧力ゆらぎ $\delta p(\mathbf{x}, t)$ を

$$\delta(\mathbf{x}, t) := \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad \delta p(\mathbf{x}, t) := p(\mathbf{x}, t) - \bar{p}(t) \tag{17}$$

によって定義する。これらの変数を用いて、流体方程式とポアソン方程式を記述することを考える。

まず、式 (11) について

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$$

から左辺は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\
&= \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + (1 + \delta) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\bar{\rho}(1 + \delta) + \frac{1}{a}\nabla \cdot [\bar{\rho}(1 + \delta)\mathbf{v}] \\
&= \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + (1 + \delta) \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\bar{\rho} \right) + \frac{1}{a}\nabla \cdot [\bar{\rho}(1 + \delta)\mathbf{v}] \\
&= \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot [\bar{\rho}(1 + \delta)\mathbf{v}] \\
&= \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{v}]
\end{aligned}$$

となる。

次に、式 (13) について

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta), \quad p = \bar{p} + \delta p$$

であるので、右辺は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{a\rho}\nabla p - \frac{1}{a}\nabla\Phi &= -\frac{1}{a\bar{\rho}(1 + \delta)}\nabla(\bar{p} + \delta p) - \frac{1}{a}\nabla\Phi \\
&= -\frac{1}{a\bar{\rho}(1 + \delta)}\nabla\delta p - \frac{1}{a}\nabla\Phi
\end{aligned}$$

となる。

最後に、式 (16) についても導くことができ、これらの式についてまとめると

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{v}] = 0 \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{a\bar{\rho}(1 + \delta)}\nabla\delta p - \frac{1}{a}\nabla\Phi \quad (19)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta \quad (20)$$

となる。これらが、膨張宇宙におけるゆらぎの時間進化を支配する基礎方程式である。これらの式についてもアインシュタイン方程式のニュートン極限から導くことは可能である。

また、式 (18) に \mathbf{v} をかけたものと式 (19) に $(1 + \delta)$ をかけたものを足し合わせると

$$\mathbf{v}\dot{\delta} + (1 + \delta)\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t}[(1 + \delta)\mathbf{v}]$$

さらに、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{v}\nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{v}] + (1 + \delta)(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \\
&= v^\alpha \partial_\beta [(1 + \delta)v^\beta] + (1 + \delta)v^\beta \partial_\beta v^\alpha = \partial_\beta [(1 + \delta)v^\beta v^\alpha]
\end{aligned}$$

であるので

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1 + \delta)v^\alpha] + \frac{\dot{a}}{a}(1 + \delta)v^\alpha + \frac{1}{a}\partial_\beta [(1 + \delta)v^\beta v^\alpha] = -\frac{1}{a\bar{\rho}}\nabla\delta p - \frac{1}{a}(1 + \delta)\nabla\Phi \quad (21)$$

となる。これに対して発散をとると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot [(1+\delta)\mathbf{v}]] + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \cdot [(1+\delta)\mathbf{v}] + \frac{1}{a} \partial_\alpha \partial_\beta [(1+\delta) v^\alpha v^\beta] \\ = -\frac{1}{a\bar{\rho}} \nabla^2 \delta p - \frac{1}{a} \left((1+\delta) \nabla^2 \Phi + \nabla \delta \cdot \nabla \Phi \right), \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここで、式 (18) から

$$\nabla \cdot [(1+\delta)\mathbf{v}] = -a\dot{\delta} \Rightarrow \partial_t \nabla \cdot [(1+\delta)\mathbf{v}] = -\dot{a}\dot{\delta} - a\ddot{\delta},$$

したがって

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} &= \frac{1}{a^2\bar{\rho}} \nabla^2 \delta p + \frac{1}{a^2} \nabla \delta \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{a^2} (1+\delta) \nabla^2 \Phi + \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j [(1+\delta) v^i v^j] \\ &= \frac{1}{a^2\bar{\rho}} \nabla^2 \delta p + \frac{1}{a^2} \nabla \delta \cdot \nabla \Phi + 4\pi G \bar{\rho} (1+\delta) \delta + \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j [(1+\delta) v^i v^j], \end{aligned} \quad (23)$$

ここで $\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta$ を用いた。したがって、

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G \bar{\rho} (1+\delta) \delta = \frac{\nabla^2 \delta p}{a^2\bar{\rho}} + \frac{1}{a^2} \nabla \delta \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j [(1+\delta) v^i v^j]}.$$

という式が得られる。この方程式も時間発展を考える上で有用な方程式である。

2.3 線形近似とジーンズ不安定性

スケールファクター $a(t)$ の時間発展はフリードマン方程式によって決定される。前までの節で導出した式 (18)、(19)、(20) の未知変数は $\delta, \delta p, \mathbf{v}, \Phi$ であり、これらの変数を解くには方程式の数が 1 つ足りない。これは物質の状態方程式が指定されていないためである。

散逸を無視するとエントロピーは保存され

$$\frac{dS(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) S = 0 \quad (24)$$

が成り立つ。ここで、 $S(\mathbf{x}, t)$ は単位質量あたりのエントロピーである。したがって、保存則の式とオイラー方程式に加えてエントロピー保存の式から

$$p = p(\rho, S) \quad (25)$$

のように、各流体素片に対してエネルギー密度 ρ とエントロピー S を独立な熱力学変数と考えることができる。これらのゆらぎは $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$ 、 δS は

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \bar{\rho} \delta + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S = c_s^2 \bar{\rho} \delta + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S \quad (26)$$

となる。ここで、 $c_s^2 := (\partial p / \partial \rho)_S$ は音速の 2 乗である。熱伝導の無視できる断熱的な流体の場合、 $\delta S = 0$ である。初期ゆらぎにエントロピーゆらぎが含まれていない初期条件のことを、断熱ゆらぎという。断熱ゆらぎではない場合であったとしても、線形理論の範囲では

$$S = \bar{S} + \delta S(\mathbf{x}, t) \quad (27)$$

とすると、エントロピー保存の式は

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{S} = 0 \quad (28)$$

であり、非線形項を無視すると

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

となる。したがって、 δS は時間発展しない。つまり、時間発展の結果として密度ゆらぎが成長するが、エントロピーゆらぎは成長しない。よって、構造形成に関する後期宇宙ではエントロピーゆらぎが無視できるようになる ($\delta \rho \gg \delta S$)。

以下ではエントロピーゆらぎが無視できるとして、圧力ゆらぎは

$$\delta p = c_s^2 \bar{\rho} \delta \quad (30)$$

が成り立つ。

初期ゆらぎは極めて小さい。したがって、時間が経過してゆらぎが十分に大きくなるまでの間、ゆらぎの時間進化に対して非線形性は重要ではない。つまり、ゆらぎが十分に大きくなるまでは非線形項は無視してゆらぎの成長方程式を取り扱って良いということである。この近似理論は**ゆらぎの線形理論**と呼ばれる。

ゆらぎの時間発展における方程式は

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G \bar{\rho}(1 + \delta)\delta = \frac{\nabla^2 \delta p}{a^2 \bar{\rho}} + \frac{1}{a^2} \nabla \delta \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j [(1 + \delta) v^i v^j]$$

であった。この方程式に式 (30) を代入し、非線形項 (ゆらぎに対する 2 次以上の項) を無視すると

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - \left(4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta\right) = 0 \quad (31)$$

となる。ただし、非相対論的な物質の音速が光速よりも十分に小さい ($c_s \ll 1$) ことを仮定している。ここで、 δ をフーリエ変換する。

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = \int d^3 x \delta(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (32)$$

これを式 (31) に適応すると

$$\ddot{\tilde{\delta}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\tilde{\delta}} - \left(4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\right) \tilde{\delta} = 0 \quad (33)$$

となる。

式 (33) は $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t)$ を質点の位置とみなすと、速度に比例する摩擦を受けながら、二次関数で与えられるポテンシャル中を運動する質点の運動方程式に対応している。左辺の第二項はゆらぎの変化

を鈍らせる効果を表している。右辺は正符号ならばゆらぎは増幅し、負符号ならばゆらぎは振動しながら減衰する。すなわち、

$$k_J := \sqrt{\frac{4\pi G \bar{\rho} a^2}{c_s^2}} = \frac{a}{c_s} \sqrt{4\pi G \bar{\rho}} \quad (34)$$

で定義される波数 k_J を境にしてゆらぎが増幅するか振動するかが決定される。これに対応する波長は

$$\lambda_J = \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}} \quad (35)$$

であり、これを**ジーンズ長**と呼ぶ。

ジーンズ長よりも長い波長スケールのゆらぎは重力が圧力に打ち勝って密度ゆらぎが増幅する。それよりも短い波長スケールのゆらぎは圧力が重力に打ち勝って振動しながら減衰する。この密度ゆらぎの不安定性機構のことを**ジーンズ不安定性**という。

2.4 バリオン音響振動

初期の宇宙では、物質の温度や密度が高く、原子は電離していて宇宙空間には自由電子が満ち溢れている。自由電子と光子はトムソン散乱によって強く結合している。また、自由電子と原子核はクーロン力によって強く結合している。したがって、バリオン成分と光子成分は互いに強く結合し、二成分の混合流体として振る舞う。

宇宙が膨張してくると温度が下がり、電離した原子が中性化し自由電子の数が減少していく。これによって、バリオン成分と光子の強い結合が切れる。これを**光子の再結合**や**宇宙の晴れ上がり**と呼ぶ。脱結合以前は、混合流体として運動しているため、光子の圧力によってバリオン・光子混合流体のゆらぎが音波モードとなって振動する。これを**バリオン音響振動**という。

宇宙の質量の大部分はダークマターが担っている。つまり、重力ポテンシャルのほとんどはダークマターによって形成されている。ダークマターは光子やバリオンと相互作用しないため、バリオン・光子混合流体は重力ポテンシャルにほとんど影響を与えず、ダークマターの作る重力ポテンシャルに従って運動する。このため、前で導いた式 (33) はそのままでは成り立たない。正確な振動方程式は一般相対論的なゆらぎの発展方程式から導出する必要がある。この節では、正確な振動方程式を導くことはせずにおおまかな振動スケールを見積もる。

■音響ホライズン

バリオン・光子混合流体を考える。密度と圧力はそれぞれ ρ_i, p_i として $i = b, \gamma$ でバリオンと光子を表すことにする。

このとき、バリオンは非相対論的で光子は相対論的な粒子として振る舞う。したがって、バリオンについては $\rho_b \gg p_b$ が成り立ち、 $\rho_b \propto a^{-3} \propto T^3$ である。一方、光子については $\rho_\gamma = 3p_\gamma$ が成

り立ち、 $\rho_\gamma \propto a^{-4} \propto T^4$ である。したがって、 $\rho_b \propto \rho_\gamma^{3/4}$ である。ここで、 R を

$$R := \frac{\rho_b + p_b}{\rho_\gamma + p_\gamma} \simeq \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \quad (36)$$

として定義する。ここで、 R は上の性質から $R \propto a \propto 1/T$ である。また、 $\rho_b \propto \rho_\gamma^{3/4}$ であるので、

$$\left(\frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_\gamma} \right)_S = \frac{3}{4} \rho_\gamma^{-1/4} \rho_b \rho_\gamma^{-3/4} = \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma} = R \quad (37)$$

となる。^{*3}

バリオンと光子が強く結合しているとき、圧力は光子によって支配されるので混合流体のエネルギー密度と圧力はそれぞれ $\rho = \rho_b + \rho_\gamma$ 、 $p = p_b + p_\gamma \simeq p_\gamma$ である。したがって、混合流体の音速 c_s は

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{\frac{\partial p_\gamma}{\partial \rho_\gamma}}{\frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_\gamma} + \frac{\partial p_\gamma}{\partial \rho_\gamma}} = \frac{1/3}{R+1} = \frac{1}{3(1+R)}$$

となるので

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}} \quad (38)$$

である。十分初期の時刻から時刻 t までの間に音波が伝播できる距離を**音響ホライズン**と呼び、 $r_s(t)$ で表す。微小時間 dt の間に音波が伝播できる共動距離は $c_s dt/a$ であるので

$$r_s(t) = \int_0^t \frac{c_s dt'}{a} = \int_0^{a(t)} \frac{c_s da'}{a'^2 H(a')} \quad (39)$$

となる。^{*4}

初期宇宙では、曲率と宇宙定数は無視できるのでフリードマン方程式は

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad \rho = \rho_m + \rho_r \quad (40)$$

である。ここで、 ρ_m は物質成分のエネルギー密度、 ρ_r は放射成分のエネルギー密度である。今の場合、物質成分はバリオンとダークマターであり、放射成分は光子とニュートリノである。

物質成分と放射成分のエネルギー密度が等しい時刻 (**等密度時**) を t_{eq} 、スケールファクターを a_{eq} とする。そのときの全密度を ρ_{eq} とする。このときの物質成分と放射成分のエネルギー密度は

$$\rho_m = \frac{\rho_{\text{eq}}}{2} \left(\frac{a}{a_{\text{eq}}} \right)^{-3}, \quad \rho_r = \frac{\rho_{\text{eq}}}{2} \left(\frac{a}{a_{\text{eq}}} \right)^{-4} \quad (41)$$

と両者とも等密度時の値を用いて表すことができる。

^{*3} 例えば、 C に ρ_γ 以外の変数によるものを押し付けて $\rho_b = C\rho_\gamma^{3/4}$ として偏微分すると良い。 C は $C = \rho_b \rho_\gamma^{-3/4}$ が成り立つ。

^{*4} $dt = (dt/da)da = (1/\dot{a})da = (1/aH)da$ を用いた。

さらに、等密度時のハッブルパラメーターを H_{eq} とすると

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{\text{eq}}}{2} \left[\left(\frac{a_{\text{eq}}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a} \right)^4 \right] = \frac{H_{\text{eq}}^2}{2} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a} \right)^4 \left(1 + \frac{a}{a_{\text{eq}}} \right)$$

となるので、

$$H = \frac{a_{\text{eq}}^2 H_{\text{eq}}}{\sqrt{2} a^2} \sqrt{1 + \frac{a}{a_{\text{eq}}}} \quad (42)$$

が得られる。この式 (42) から、音響ホライズンは

$$\begin{aligned} r_s(t) &= \int_0^{a(t)} \frac{c_s da}{a^2 H(a)} \\ &= \int_0^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}} \frac{\sqrt{2} a^2 da}{a^2 a_{\text{eq}}^2 H_{\text{eq}} \sqrt{1 + a/a_{\text{eq}}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} a_{\text{eq}}^2 H_{\text{eq}}} \int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{(1+R)(1 + a/a_{\text{eq}})}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $R \propto a$ であることと等密度時のハッブル半径の逆数に対応する波数 $k_{\text{eq}} := a_{\text{eq}} H_{\text{eq}}$ を用いると

$$\begin{aligned} r_s(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} a_{\text{eq}} k_{\text{eq}}} \int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{(1 + R_{\text{eq}} a/a_{\text{eq}})(1 + a/a_{\text{eq}})}} \\ &= \frac{1}{k_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{(a_{\text{eq}} + R_{\text{eq}} a)(a_{\text{eq}} + a)}} \\ &= \frac{1}{k_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{3 R_{\text{eq}}}} \int_0^{a(t)} \frac{da}{\sqrt{(a + a_{\text{eq}})(a + a_{\text{eq}}/R_{\text{eq}})}} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} (a + a_{\text{eq}})(a + a_{\text{eq}}/R_{\text{eq}}) &= a^2 + \left(1 + \frac{1}{R_{\text{eq}}} \right) a_{\text{eq}} a + \frac{a_{\text{eq}}^2}{R_{\text{eq}}} \\ &= \left[a + \frac{1 + R_{\text{eq}}}{2 R_{\text{eq}}} a_{\text{eq}} \right]^2 - \left(\frac{1 + R_{\text{eq}}}{2 R_{\text{eq}}} \right)^2 a_{\text{eq}}^2 + \frac{a_{\text{eq}}^2}{R_{\text{eq}}} \\ &= \left[a + \frac{1 + R_{\text{eq}}}{2 R_{\text{eq}}} a_{\text{eq}} \right]^2 - \frac{(1 - R_{\text{eq}})^2}{4 R_{\text{eq}}^2} a_{\text{eq}}^2 \end{aligned}$$

となるので

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - A^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - A^2} \right| + C \quad (43)$$

を用いると

$$r_s(t) = \frac{1}{k_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{3R_{\text{eq}}}} \times \ln \left| \frac{a(t) + \frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} a_{\text{eq}} + \sqrt{\left[a(t) + \frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} a_{\text{eq}} \right]^2 - \frac{(1-R_{\text{eq}})^2}{4R_{\text{eq}}^2} a_{\text{eq}}^2}}{\frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} a_{\text{eq}} + \sqrt{\left(\frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} \right)^2 a_{\text{eq}}^2 - \frac{(1-R_{\text{eq}})^2}{4R_{\text{eq}}^2} a_{\text{eq}}^2}} \right| \quad (44)$$

となる。ln の中身は

$$\begin{aligned} & \frac{a(t) + \frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} a_{\text{eq}} + \sqrt{(a(t) + a_{\text{eq}})(a(t) + a_{\text{eq}}/R_{\text{eq}})}}{\frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} a_{\text{eq}} + \frac{a_{\text{eq}}}{\sqrt{R_{\text{eq}}}}} \\ &= \frac{1 + \frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} \frac{a_{\text{eq}}}{a(t)} + \sqrt{(1 + a_{\text{eq}}/a)(1 + a_{\text{eq}}/a(t)R_{\text{eq}})}}{\frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} \frac{a_{\text{eq}}}{a(t)} + \frac{1}{\sqrt{R_{\text{eq}}}} \frac{a_{\text{eq}}}{a(t)}} \\ &= \frac{1 + \frac{1+R_{\text{eq}}}{2R_{\text{eq}}} \frac{R_{\text{eq}}}{R} + \sqrt{(1 + R_{\text{eq}}/R)(1 + 1/R)}}{\frac{1+R_{\text{eq}}}{2R} + \frac{1}{\sqrt{R_{\text{eq}}}} \frac{R_{\text{eq}}}{R}} \\ &= \frac{R + \frac{1+R_{\text{eq}}}{2} + \sqrt{(R + R_{\text{eq}})(R + 1)}}{\frac{1+R_{\text{eq}}}{2} + \sqrt{R_{\text{eq}}}} = \left(\frac{\sqrt{R + R_{\text{eq}}} + \sqrt{R + 1}}{\sqrt{R_{\text{eq}}} + 1} \right)^2 \end{aligned}$$

と計算できるので、

$$r_s(t) = \frac{1}{k_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{8}{3R_{\text{eq}}}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + R(t)} + \sqrt{R(t) + R_{\text{eq}}}}{\sqrt{1 + R_{\text{eq}}}} \right) \quad (45)$$

となる。

バリオン音響振動は光子の脱結合時まで続く。その後は、結合がなくなるためゆらぎは振動しなくなる。つまり、脱結合の時の振動位相はそのまま固定されてその後の密度ゆらぎに刻み込まれる。バリオンよりもダークマターの方が量は多いので、全体のゆらぎとしてはダークマターのゆらぎが支配的であるが、わずかにバリオン音響振動由来のゆらぎは残る。この振動が特徴的に現れるスケールは、光子の脱結合時刻 t_{dec} における音響ホライズン $r_s(t_{\text{dec}})$ である。観測されている宇宙論パラメータを代入すると

$$r_s(t_{\text{dec}}) \simeq 107h^{-1}\text{Mpc} \quad (46)$$

程度となる。この特徴的なゆらぎは、銀河の空間分布にわずかに刻み込まれている。この要素はダークマターの性質を調べる上で重要な手がかりとなる。

2.5 密度ゆらぎの線形成長

非相対論的な物質の音速は光速よりも十分に小さい ($c_s \ll 1$)。したがって、ジーンズ長 λ_J (式 (35))

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}$$

は宇宙のホライズンサイズを目安である $H^{-1} \sim 1/\sqrt{G\bar{\rho}}$ と比べると非常に小さい。 ($\lambda_J \ll H^{-1}$)

標準的な構造形成のモデルでは、ダークマターは生成時の温度が非常に低い無衝突粒子であるコールド・ダークマターによって構成されている。コールド・ダークマターは圧力が無視できる非相対論的流体として近似できる。つまり、上で見たようにジーンズ長は非常に小さく重力不安定性によって効率的な構造形成を起こすことができる。

■物質優勢期の成長率

物質優勢期以降、宇宙の支配的なエネルギー成分はダークマターである。したがって、密度ゆらぎの時間発展はジーンズ長よりも十分に大きいスケールで考えれば良いので、式 (31) は

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0 \quad (47)$$

となる。^{*5}

この式 (47) を解いていく。物質優勢期では、圧力が無視できるのでフリードマン方程式は

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho} + \Lambda \quad (48)$$

である。^{*6} この式を微分すると

$$\frac{\ddot{\ddot{a}}a - \ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G}{3}\dot{\bar{\rho}}$$

である。ハッブルパラメーターの微分については

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \\ \ddot{H} &= \frac{\ddot{\ddot{a}}a - \ddot{a}\dot{a}}{a^2} - 2H\dot{H} \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、 $\bar{\rho} \propto a^{-3}$ であるので $\dot{\bar{\rho}} = -3H\bar{\rho}$ を用いると

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} - 4\pi G\bar{\rho}H = 0 \quad (49)$$

^{*5} 当然のことながら、非線形項は無視している。

^{*6} ここで、 Λ は宇宙定数でありダークエネルギーと等価とする。

となる。このことから、 $\delta \propto H$ は式 (47) の特殊解であることがわかる。したがって、式 (47) の一般解を求めるには $\delta = Hy(t)$ と置いて、 $y(t)$ についての方程式を解けば良い。 $\delta = Hy(t)$ を式 (47) に代入すると

$$\begin{aligned}\ddot{H}y + 2\dot{H}\dot{y} + H\ddot{y} + 2H(\dot{H}y + H\dot{y}) - 4\pi G\bar{\rho}Hy &= 0 \\ (\ddot{H} + 2H\dot{H} - 4\pi G\bar{\rho}H)y + (2\dot{H} + 2H^2)\dot{y} + H\ddot{y} &= 0 \\ 2(\dot{H} + H^2)\dot{y} + H\ddot{y} &= 0\end{aligned}$$

となるので、

$$\dot{a}\ddot{y} + 2\dot{a}\dot{y} = 0 \quad (50)$$

が得られる。これは \dot{y} についての 1 階微分方程式であるので、簡単に積分ができて $\dot{y} \propto \dot{a}^{-2}$ が得られる。これを再び積分すると

$$y \propto \int_0^t \frac{dt}{\dot{a}^2} = \int_0^a \frac{da}{\dot{a}^3} = \int_0^a \frac{da}{a^3 H^3} \quad (51)$$

が得られる。

したがって、式 (47) の独立な二つの解がもとまった。それらを D_- , D_+ で表すと

$$D_- \propto H, \quad D_+ \propto H \int_0^a \frac{da}{a^3 H^3} \quad (52)$$

となる。

物質優勢期でのハッブルパラメーターは

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{\Omega_{K0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0}} \quad (53)$$

となるのであった。物質優勢期では、曲率項と宇宙項は無視できるので $H \propto a^{-3/2}$ である。したがって、

$$D_- \propto a^{-3/2}, \quad D_+ \propto a^{-3/2} \int_0^a a^{3/2} da \propto a \quad (54)$$

となる。つまり、時間とともに減少する減衰解 D_- と時間とともに増加する成長解 D_+ の二つの解が得られる。

2.5.1 線形成長因子と線形成長率

方程式の一般解は D_+ と D_- の線形結合で与えられる。物質優勢期が十分長く続いた場合、 D_- は十分に減衰して無視できるので、その後の時間発展は成長解 D_+ によって支配される。成長解の時間依存性を表す関数 $D_+(t)$ を**線形成長因子**という。

線形成長因子の規格化は任意であり、現在時刻 t_0 において $D_+(t_0) = 1$ となるように規格化することにする。つまり、

$$D(t) := \frac{D_+(t)}{D_+(t_0)} \quad (55)$$

とする。このようにすると線形近似による密度ゆらぎの時間発展は

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D(t)\delta_0(\mathbf{x}) \quad (56)$$

と表される。ただし、 $\delta_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}, t_0)$ は現在時刻における密度ゆらぎである。

次に速度場 \mathbf{v} について考える。まず、オイラー方程式 (19)

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{a\bar{\rho}(1+\delta)}\nabla\delta p - \frac{1}{a}\nabla\Phi$$

について線形近似を適用すると

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = -\frac{1}{a\bar{\rho}}\nabla\delta p - \frac{1}{a}\nabla\Phi \quad (57)$$

となり、ここに回転をとると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla \times \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(a\nabla \times \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

が得られる。したがって、 $\nabla \times \mathbf{v} \propto 1/a$ であり、宇宙の膨張とともに減衰していくので、十分に長い時間が経過した後には無視できる。よって、速度場の成長解は回転なしのベクトルとなり、あるスカラー場 $\psi(\mathbf{x}, t)$ を用いて

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla\psi}{aH} \quad (59)$$

と表すことができる。^{*7}

次に、連続の式 (18)

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla \cdot ((1+\delta)\mathbf{v}) = 0$$

について線形近似を適用すると

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (60)$$

となり、ここに $\mathbf{v} = -\nabla\psi/(aH)$ を代入すると

$$\dot{\delta} = \frac{1}{a^2 H}\nabla^2\psi \quad (61)$$

が得られる。ここに、 $\delta(\mathbf{x}, t) = D(t)\delta_0(\mathbf{x})$ を代入すると

$$\nabla^2\psi = a^2 H \dot{D}\delta_0(\mathbf{x}) = a^2 H^2 f\delta(\mathbf{x}, t) \quad (62)$$

^{*7} ここで、 H で割っているのは後で式が簡単になるようにするための便宜的な措置である。

が得られる。ただし、 f は

$$f := \frac{d \ln D}{d \ln a} = \frac{a}{D} \frac{dD}{da} = \frac{\dot{D}}{HD} \quad (63)$$

であり、**線形成長率**と呼ばれる関数である。線形成長率は線形成長因子の時間変化の割合を表す無次元量である。

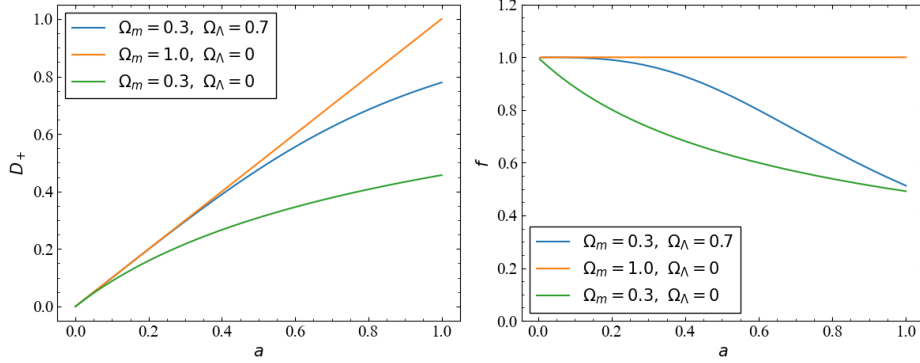


図 1 線形成長因子と線形成長率のプロット。 $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda 0}) = (0.3, 0.7), (1, 0), (0.3, 0)$ とした。

■放射優勢期における線形成長因子・成長因子

宇宙の構造形成は主に物質優勢期で起こる。このことは、線形成長因子を用いて説明できる。ここでは、放射優勢期におけるダークマターの密度ゆらぎの線形成長因子を求める。^{*8}ダークマターの密度ゆらぎを δ_c とする。このときのゆらぎの発展方程式は

$$\ddot{\delta}_c + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_c - 4\pi G \sum_a \bar{\rho}_a \delta_a = 0 \quad (64)$$

放射優勢期では、バリオンは光子と強く結合しているため、バリオンの密度ゆらぎは光子の密度ゆらぎと同じ振る舞いをする。したがって、この式の和は

$$\sum_a \bar{\rho}_a \delta_a = \bar{\rho}_c \delta_c + \bar{\rho}_r \delta_r$$

この放射流体の音速は $c_s \simeq 1/\sqrt{3}$ であるので、ジーンズ長はホライズンサイズより小さい。結局、方程式は

$$\ddot{\delta}_c + 2H\dot{\delta}_c - 4\pi G\bar{\rho}_c\delta_c = 0 \quad (65)$$

となる。ここで、調和振動子の摩擦項にあたる $2H\dot{\delta}_c$ の効果を考える。この効果を考えると、ダークマターはハッブル時間 H^{-1} 程度の時間スケールでしか成長できない。つまり、 $\ddot{\delta}_c \sim H\dot{\delta}_c \sim H^2\delta_c$

^{*8} もう一度確認するが、物質優勢期ではダークマターが構造形成の中心的役割を果たすという意味で主要成分がダークマターであるとして、ゆらぎを見た。つまり、他の成分については異なる振る舞いをする。ダークマターの特異な性質として冷たく寿命が長いことで、構造形成において重要な役割を果たしていた。

であると考えられる。放射優勢期では、 $\bar{\rho}_r \gg \bar{\rho}_c$ であるので、フリードマン方程式から

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_r \gg 4\pi G \bar{\rho}_c \quad (66)$$

が成り立つ。したがって、 $\ddot{\delta}_c \gg 4\pi G \bar{\rho}_c \delta_c$ となり、方程式は

$$\ddot{\delta}_c + 2H\dot{\delta}_c \simeq 0 \quad (67)$$

となる。また、放射優勢期ではスケールファクターは $a(t) \propto t^{1/2}$ であるので $H = \dot{a}/a = 1/(2t)$ である。したがって、方程式は

$$\ddot{D} + \frac{1}{t}\dot{D} = 0 \quad (68)$$

となる。この方程式の一般解は

$$D_- \propto \text{const}, \quad D_+ \propto \ln t \propto \ln a \quad (69)$$

である。したがって、放射優勢期における線形成長因子は非常に遅い対数的成長を示す。実際、線形成長率は

$$f = \frac{d \ln D}{d \ln a} \propto \frac{1}{\ln a} \quad (70)$$

となり、非常に小さい値をとる。このことから、放射優勢期には密度ゆらぎの成長が著しく抑制されることがわかる。この成長が抑制される効果は **Mészáros effect** と呼ばれる。

■ダークエネルギー優勢

ダークエネルギーが支配的な宇宙を考える。物質成分 (ダークマター + バリオン) のゆらぎ δ_m の発展方程式は

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G \bar{\rho}_m \delta_m = 0 \quad (71)$$

である。 H はダークエネルギー (宇宙定数) が支配的な宇宙では一定値 $H = \text{const.}$ である。また、 $4\pi G \bar{\rho}_m \ll H^2$ であるので、方程式は

$$\ddot{D} + 2H\dot{D} \simeq 0 \quad (72)$$

となる。この方程式の一般解は

$$D_- \propto a^{-2}, \quad D_+ \propto \text{const} \quad (73)$$

である。したがって、ダークエネルギー優勢期では密度ゆらぎの成長は停止する。

■宇宙膨張がない場合

また、宇宙膨張がない場合には $D(t)$ は

$$\ddot{D} - 4\pi G \bar{\rho} D = 0 \quad (74)$$

を満たすので、

$$D(t) \propto e^{\sqrt{4\pi G \bar{\rho}} t} \quad (75)$$

となり、非常に速い指数関数的な成長を示す。これは、宇宙膨張がない場合には重力不安定性が非常に効率的に働くためである。宇宙膨張があるために、このような速い成長は抑制され、物質優勢期においても線形成長因子は $D(t) \propto a(t) \propto t^{2/3}$ と多項式的な成長にとどまる。

2.5.2 線形成長因子の一般解

線形成長因子 $D(t)$ の一般解を求めることもできる。先に結果を示すと、

$$D \propto \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}y \\ \left(1 + \frac{3}{2}y\right) \ln \left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1} \right) - 3\sqrt{1+y} \end{cases} \quad (76)$$

となる。ただし、 $y = a/a_{\text{eq}}$ である。初期の宇宙では放射が支配的であり、 $y \ll 1$ である。このとき、成長解は

$$D_+ \propto \ln y \quad (77)$$

となり、放射優勢期の結果と一致する。一方で、 $y \gg 1$ のときには

$$D_+ \propto y \propto a \quad (78)$$

となり、物質優勢期の結果と一致する。

また、ダークエネルギーと物質が共に存在する場合の線形成長因子の一般解も求めることができる。その結果は

$$D \propto \begin{cases} H \\ H \int \frac{da}{aH^3} \end{cases} \quad (79)$$

となる。

2.6 非線形摂動論

ゆらぎが大きくなってくると、非線形項が無視できなくなってくる。まだ非線形性が弱い場合、非線形項を摂動として扱うことができる。

圧力の無視できる流体を考える。ゆらぎの時間発展を表す方程式系 (18,19,20) は

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta) \mathbf{v}] = 0 \quad (80)$$

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{a} \nabla \Phi \quad (81)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \quad (82)$$

となる。この非線形方程式を摂動論によって解き、線形近似を超える高次の近似解を求める。密度ゆらぎの解析では、成長解が重要である。以下では、最も成長の速い解にのみに注目する。

線形成長因子 $D(t)$ の対数

$$\tau := \ln D(t) \quad (83)$$

を新しい時間変数として導入する。また、速度場 \mathbf{v} と重力ポテンシャル Φ の代わりに

$$\mathbf{V} := \frac{\mathbf{v}}{aHf}, \quad \varphi := \frac{\Phi}{4\pi G \bar{\rho} a^2} \quad (84)$$

を導入する。これらを用いると、方程式系は

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla \cdot [(1 + \delta) \mathbf{V}] = 0 \quad (85)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \nabla \varphi = 0 \quad (86)$$

$$\nabla^2 \varphi = \delta \quad (87)$$

となる。ただし、

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \bar{\rho}_m \quad (88)$$

は時間に依存する物質密度パラメーターである。

■式の導出

これらの式の導出は以下の通りである。^{*9}まず、時間変数の変換について

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d\tau}{dt} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\dot{D}}{D} \frac{\partial}{\partial \tau} = Hf \frac{\partial}{\partial \tau}$$

が成り立つ。次に、式 (80) は

$$Hf \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta) a H f \mathbf{V}] = 0$$

となるので、式 (85) が得られる。

^{*9} この計算は [3] を大いに参考にした。

次に、式 (81) を変換する。まず、 $\dot{\mathbf{v}}$ について

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \frac{\partial}{\partial t}(aHf\mathbf{V}) \\ &= (\dot{a}Hf + a\dot{H}f + aH\dot{f})\mathbf{V} + aHf\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} \\ &= (\dot{a}Hf + a\dot{H}f + aH\dot{f})\mathbf{V} + aH^2f^2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\tau}\end{aligned}$$

となる。^{*10}式 (81) は

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = (2\dot{a}Hf + a\dot{H}f + aH\dot{f})\mathbf{V} + aH^2f^2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\tau}$$

となるので

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{a}\nabla\Phi &= 0 \\ (2\dot{a}Hf + a\dot{H}f + aH\dot{f})\mathbf{V} + aH^2f^2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\tau} + \frac{1}{a}(aHf\mathbf{V} \cdot \nabla)(aHf\mathbf{V}) + \frac{1}{a}\nabla(4\pi G\bar{\rho}a^2\varphi) &= 0 \\ \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\tau} + \frac{2\dot{a}Hf + a\dot{H}f + aH\dot{f}}{aH^2f^2}\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{4\pi G\bar{\rho}}{H^2f^2}\nabla\varphi &= 0 \\ \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\tau} + \frac{1}{f}\left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\dot{f}}{Hf}\right)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{3}{2}\frac{\Omega_m}{f^2}\nabla\varphi &= 0\end{aligned}$$

となる。また、 \dot{f} については密度ゆらぎの方程式

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0$$

から、 $\delta(\mathbf{x}, t) = D(t)\delta_0(\mathbf{x})$ であるので $D(t)$ についても

$$\ddot{D} + 2H\dot{D} - 4\pi G\bar{\rho}D = 0$$

が成り立つ。 $f = \dot{D}/(HD)$ であるので、

$$\begin{aligned}\ddot{D} &= \dot{f}HD + f\dot{H}D + fH\dot{D} \\ \frac{\ddot{D}}{H^2D} &= \frac{\dot{f}}{H} + f\frac{\dot{H}}{H^2} + f\frac{\dot{D}}{HD} \\ &= \frac{\dot{f}}{H} + f\frac{\dot{H}}{H^2} + f^2\end{aligned}$$

これらの式から

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{D}}{H^2D} + 2\frac{\dot{D}}{HD} - \frac{4\pi G\bar{\rho}}{H^2} &= 0 \\ \left(\frac{\dot{f}}{H} + f\frac{\dot{H}}{H^2} + f^2\right) + 2f - \frac{3}{2}\Omega_m &= 0\end{aligned}$$

^{*10} ここで、 $\dot{D}/D = Hf$ を用いた。

であるので、

$$\frac{\dot{f}}{Hf} = -2 + \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} - f - \frac{\dot{H}}{H^2}$$

となる。この式を上の式に代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \nabla \varphi = 0$$

が得られる。

最後に、式 (82) は

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\nabla^2 \Phi}{4\pi G \bar{\rho} a^2} = \delta$$

となる。

2.6.1 回転なしの速度場

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{a} \nabla \Phi - \frac{1}{a} \nabla \Phi$$

の回転をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \times \mathbf{v} + \frac{1}{a} \nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = 0$$

である。ここでベクトル場に関する恒等式

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \times \mathbf{v}) - [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla] \mathbf{v}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \times \mathbf{v} + \frac{1}{a} [(\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \times \mathbf{v}) - [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla] \mathbf{v}] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (a \nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \times \mathbf{v}) - [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla] \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

と計算できる。

この微分方程式 (89) は $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ の解を持つ。したがって、初期条件として $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ を課せば、時間発展しても $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ が保たれる。

実際に、このような初期条件を課すことは妥当である。速度場の回転は線形成長の段階で減衰することは前に見た。非線形成長は線形成長の後に起こるので、非線形成長が始まる時点では $\nabla \times \mathbf{v}$ は十分に小さく無視することができる。したがって、非線形摂動論においても $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ を仮定して良い。^{*11}

^{*11} もちろん、非線形性が強くなってくると渦が発生して $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ となることもある。例えば、渦巻き銀河が存在することはその一例である。

$\nabla \times \mathbf{v} = 0$ が成り立つので、回転なしの速度場の自由度を表すスカラー関数 θ

$$\theta := -\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{aHf} \quad (90)$$

を導入する。

回転なしの速度場は空間点あたりの自由度が 1 つである。したがって、このスカラー関数によって速度場を完全に表すことができる。実際に、フーリエ空間において

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \theta(\mathbf{k}), \quad \mathbf{v} = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} aHf \theta(\mathbf{k}) \quad (91)$$

が成り立つ。

これは、

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{k}) &= -\int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) \\ &= -\int d^3x \nabla \cdot (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{V}(\mathbf{x})) - \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x})) \\ &= -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

となるので

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}) = i\theta(\mathbf{k})$$

が成り立つ。 V に回転成分は存在しないので、

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k})) = i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \theta(\mathbf{k})$$

が成り立つ。

これらを用いると、方程式系 (85,86,87)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla \cdot [(1 + \delta) \mathbf{V}] &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \nabla \varphi &= 0 \\ \nabla^2 \varphi &= \delta \end{aligned}$$

のフーリエ変換は

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{k})}{\partial \tau} - \theta(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \theta(\mathbf{k}) - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \delta(\mathbf{k}) &= \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\ &\quad - k^2 \varphi(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (93)$$

$$-k^2 \varphi(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k}) \quad (94)$$

となる。ただし、

$$\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) := \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2} \quad (95)$$

$$\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) := \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2} \quad (96)$$

である。これらの式はすべての波数に対応する自由度が独立ではないので、解析的な取り扱いが非常に難しくなっている。

■式の導出

これらの式 (92,93,94) の導出は以下の通りである。^{*12}まず、式 (87) のフーリエ変換は

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \nabla \cdot [(1 + \delta(\mathbf{x})) \mathbf{V}(\mathbf{x})] = 0$$

であるが、第二項は

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \nabla \cdot [(1 + \delta(\mathbf{x})) \mathbf{V}(\mathbf{x})] \\ &= \int d^3x \nabla \cdot [e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (1 + \delta(\mathbf{x})) \mathbf{V}(\mathbf{x})] + \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} i\mathbf{k} \cdot ((1 + \delta(\mathbf{x})) \mathbf{V}(\mathbf{x})) \\ &= \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} i\mathbf{k} \cdot (\delta(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x})) \\ &= i\mathbf{k} \cdot \left(i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \theta(\mathbf{k}) \right) + i\mathbf{k} \cdot \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x}) \\ &= -\theta(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \cdot \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

となる。最後の項について、 $\delta(\mathbf{x})$ と $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ のフーリエ変換を代入すると

$$\begin{aligned} & i\mathbf{k} \cdot \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}) \\ &= i\mathbf{k} \cdot \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} i \frac{\mathbf{k}_1}{k_1^2} \theta(\mathbf{k}_1) \right) \left(\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{k}_2) \right) \\ &= -\mathbf{k} \cdot \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \left(\int d^3x e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \frac{\mathbf{k}_1}{k_1^2} \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \\ &= -\mathbf{k} \cdot \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}_1}{k_1^2} \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \\ &= - \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2} \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \\ &= - \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

となるので、式 (92) が得られる。

^{*12} 畳み込みを使うともっと簡潔にできるよ

次に、式 (86) のフーリエ変換を考える。

$$\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \mathbf{V}(\mathbf{k}) + \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \nabla \varphi(\mathbf{x}) = 0$$

において、第三項は

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V^j(\mathbf{x}) \partial_j V^i(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3x \partial_j (e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V^j(\mathbf{x}) V^i(\mathbf{x})) + \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} i k_j V^j(\mathbf{x}) V^i(\mathbf{x}) - \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\partial_j V^j(\mathbf{x})) V^i(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} i k_j V^j(\mathbf{x}) V^i(\mathbf{x}) + \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}) V^i(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

である。初項は、 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ のフーリエ変換を代入すると

$$\begin{aligned} & i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} k_j V^j(\mathbf{x}) V^i(\mathbf{x}) \\ &= i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} k_j \left(\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}} i \frac{k_1^j}{k_1^2} \theta(\mathbf{k}_1) \right) \left(\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}} i \frac{k_2^i}{k_2^2} \theta(\mathbf{k}_2) \right) \\ &= -i \int d^3x k_j \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \frac{k_1^j k_2^i}{k_1^2 k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\ &= -i \int k_j \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{k_1^j k_2^i}{k_1^2 k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\ &= -i \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2 k_2^2} k_2^i \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

となる。

第二項は

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}) V^i(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}} \theta(\mathbf{k}_1) \right) \left(\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}} i \frac{k_2^i}{k_2^2} \theta(\mathbf{k}_2) \right) \\ &= i \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \left(\int d^3x e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right) \frac{k_2^i}{k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\ &= i \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{k_2^i}{k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

となる。

よって、合計は

$$\begin{aligned}
& i \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \left(-\frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2 k_2^2} k_2^i + \frac{k_2^i}{k_2^2} \right) \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\
&= i \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \left(-\frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1 - k_1^2}{k_1^2 k_2^2} k_2^i \right) \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\
&= -i \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} k_2^i \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

また、最初の式の第四項は式 (87) のフーリエ変換 $-k^2 \varphi(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k})$ を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \int d^3 x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \nabla \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \int d^3 x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} i\mathbf{k} \varphi(\mathbf{x}) \\
&= \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} i\mathbf{k} \int d^3 x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \\
&= \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} i\mathbf{k} \varphi(\mathbf{k}) \\
&= -\frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \delta(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \mathbf{V}(\mathbf{k}) + \int d^3 x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \int d^3 x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \nabla \varphi(\mathbf{x}) &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \mathbf{V}(\mathbf{k}) - i \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} k_2^i \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \delta(\mathbf{k}) &= 0
\end{aligned}$$

となり、両辺に $-i\mathbf{k}$ との内積を取ると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \theta(\mathbf{k}) - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} \delta(\mathbf{k}) &= \mathbf{k} \cdot \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} \mathbf{k}_2 \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\
&= \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 \mathbf{k}_1 と \mathbf{k}_2 は交換可能であるので

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_1}{k_1^2 k_2^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2}
\end{aligned}$$

となるので、式 (93) が得られる。

2.6.2 摂動展開

これらの方程式系 (92,93,94) を摂動論的に扱う。まず、線形近似による密度ゆらぎと速度場の解をそれぞれ $\delta^{(1)}$ 、 $\theta^{(1)}$ とする。すると、線形近似では

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla\psi}{aH}, \quad \nabla^2\psi = a^2H^2f\delta$$

であった。回転なしの速度場では

$$\theta = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{aHf}$$

であった。したがって、 $\theta^{(1)} = \delta^{(1)}$ となる。以下では、この共通の量を δ_L で表す。このとき、

$$\delta_L = \delta^{(1)} = \theta^{(1)} = D\delta_0 = e^\tau \delta_0 \quad (97)$$

が成り立つ。ただし、 δ_0 は線形理論で成長させた密度ゆらぎの現在値である。

ここで δ_L を微小量として、密度ゆらぎと速度場を摂動展開する。

$$\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)} + \delta^{(3)} + \dots = \delta_L + \delta^{(2)} + \delta^{(3)} + \dots \quad (98)$$

$$\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \theta^{(3)} + \dots = \delta_L + \theta^{(2)} + \theta^{(3)} + \dots \quad (99)$$

ここで、 $\delta^{(n)}$ 、 $\theta^{(n)}$ はそれぞれ $\mathcal{O}(\delta_L^n)$ の項である。つまり $\delta^{(n)} \propto e^{n\tau}$ 、 $\theta^{(n)} \propto e^{n\tau}$ である。このとき、方程式系 (92,93) は

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}) \\ \times F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \dots \delta_L(\mathbf{k}_n) \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \theta^{(n)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}) \\ \times G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \dots \delta_L(\mathbf{k}_n) \end{aligned} \quad (101)$$

と一般的に表される。関数 $\delta^{(n)}$ 、 $\theta^{(n)}$ 、 F_n 、 G_n 、 δ_L は時間にも依存するが、省略してある。

■ F_n, G_n の具体的な形

F_n, G_n の具体的な形を求める。各次数について、方程式系 (92,93) の両辺を比較すればよい。ここで、式 (92, 93) において顕に時間に依存する項は Ω_m/f^2 のみである。現実的な宇宙モデルでは、この因子の時間依存性は極めて弱い。この近似の妥当性は、 f を数値的に評価するとわかる。現実的な宇宙モデルの範囲では、 $f \simeq \Omega_m^{0.6}$ という関係が成り立つ。これをさらに近似して

$$f \simeq \Omega_m^{1/2} \quad (102)$$

とすると、 $\Omega_m/f^2 \simeq 1$ となり、時間に依存しなくなる。これにより解析的な扱いが楽になる。

実際にこの近似を用いたものと数値的な計算で求めたものの差はほとんどなく、密度ゆらぎの摂動論では広く用いられている。また、アインシュタイン・ド・シッター宇宙 ($\Omega_{m0} = 1, \Omega_{\Lambda 0} = 0$)

ではこの近似は厳密に成り立つ。それ以外の宇宙モデルにおいても $\Omega_{m0} = f = 1$ とすることは有用である。^{*13}

計算上の便宜のために

$$\delta^{(n)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{n!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \quad (103)$$

$$\theta^{(n)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{n!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \quad (104)$$

$$D_n k := \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3}, \quad \mathbf{k}_{1,\dots,n} := \mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n$$

と書くことにする。

まずは、式 (92) について考える。

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{k})}{\partial \tau} - \theta(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2)$$

$\mathcal{O}(\delta_L^n)$ の項は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta^{(n)}(\mathbf{k})}{\partial \tau} - \theta^{(n)}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta^{(m)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(n-m)}(\mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

左辺に式 (100,101) を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta^{(n)}(\mathbf{k})}{\partial \tau} - \theta^{(n)}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{n!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \right] \\ & \quad - \frac{1}{n!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \\ &= \frac{1}{n!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) [n F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) - G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)] \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \end{aligned}$$

となる。

^{*13} もちろん、この近似を用いないで解くことも可能であるが実用上はあまり意味がない (らしい)。

右辺は

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{n-1} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\
& \quad \times \left[\frac{1}{m!} \int D_m q \delta_D(\mathbf{q}_{1,\dots,m} - \mathbf{k}_1) G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m) \delta_L(\mathbf{q}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{q}_m) \right] \\
& \quad \times \left[\frac{1}{(n-m)!} \int D_{n-m} p \delta_D(\mathbf{p}_{1,\dots,n-m} - \mathbf{k}_2) F_{n-m}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-m}) \delta_L(\mathbf{p}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{p}_{n-m}) \right] \\
& = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\
& \quad \times \int D_m q D_{n-m} p \delta_D(\mathbf{q}_{1,\dots,m} - \mathbf{k}_1) \delta_D(\mathbf{p}_{1,\dots,n-m} - \mathbf{k}_2) \\
& \quad \times G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m) F_{n-m}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-m}) \delta_L(\mathbf{q}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{q}_m) \delta_L(\mathbf{p}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{p}_{n-m}) \\
& = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) \\
& \quad \times G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n)
\end{aligned}$$

となる。

最後の等式は、デルタ関数の積分

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_D(\mathbf{q}_{1..m} - \mathbf{k}_1) \delta_D(\mathbf{p}_{1..n-m} - \mathbf{k}_2) \\
& = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{q}_{1..m} + \mathbf{p}_{1..n-m} - \mathbf{k}),
\end{aligned}$$

と変数変換（ヤコビアンは 1）

$$(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-m}) \mapsto (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$$

をしている。^{*14}

したがって、両辺を比較すると

$$\begin{aligned}
& n F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) - G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \\
& = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \alpha(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \quad (105)
\end{aligned}$$

*14

$$D_m q D_{n-m} p \rightarrow D_n k, \quad \delta_D(\mathbf{q}_{1..m} + \mathbf{p}_{1..n-m} - \mathbf{k}) \rightarrow \delta_D(\mathbf{k}_{1..n} - \mathbf{k}),$$

$$\alpha(\mathbf{q}_{1..m}, \mathbf{p}_{1..n-m}) \rightarrow \alpha(\mathbf{k}_{1..m}, \mathbf{k}_{m+1..n}),$$

となる。

が得られる。

同様にして、式 (93) についても考える。 $\Omega_m/f^2 \simeq 1$ とすると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \theta(\mathbf{k}) - \frac{3}{2} \delta(\mathbf{k}) \\ &= \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

$\mathcal{O}(\delta_L^n)$ の項は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta^{(n)}(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \theta^{(n)}(\mathbf{k}) - \frac{3}{2} \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta^{(m)}(\mathbf{k}_1) \theta^{(n-m)}(\mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

左辺に式 (100,101) を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta^{(n)}(\mathbf{k})}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \theta^{(n)}(\mathbf{k}) - \frac{3}{2} \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{n!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) \\ & \quad \times \left[n G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + \frac{1}{2} G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) - \frac{3}{2} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \right] \\ & \quad \times \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \end{aligned}$$

となる。右辺は

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ & \quad \times \left[\frac{1}{m!} \int D_m q \delta_D(\mathbf{q}_{1,\dots,m} - \mathbf{k}_1) G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m) \delta_L(\mathbf{q}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{q}_m) \right] \\ & \quad \times \left[\frac{1}{(n-m)!} \int D_{n-m} p \delta_D(\mathbf{p}_{1,\dots,n-m} - \mathbf{k}_2) G_{n-m}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-m}) \delta_L(\mathbf{p}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{p}_{n-m}) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ & \quad \times \int D_m q D_{n-m} p \delta_D(\mathbf{q}_{1,\dots,m} - \mathbf{k}_1) \delta_D(\mathbf{p}_{1,\dots,n-m} - \mathbf{k}_2) \\ & \quad \times G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m) G_{n-m}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-m}) \delta_L(\mathbf{q}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{q}_m) \delta_L(\mathbf{p}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{p}_{n-m}) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \int D_n k (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{1,\dots,n} - \mathbf{k}) \beta(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) \\ & \quad \times G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) G_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \end{aligned}$$

となる。

したがって、両辺を比較すると

$$\begin{aligned} & \left(n + \frac{1}{2}\right) G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) - \frac{3}{2} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \beta(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) G_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \end{aligned} \quad (106)$$

が得られる。

上で求めた2つの式を連立させて、 F_n, G_n について解く。関係式をもう一度表しておくと、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} n & -1 \\ -\frac{3}{2} & n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \\ G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \begin{pmatrix} \alpha(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \\ \beta(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) G_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (107)$$

この連立方程式を解くと、 F_n, G_n は以下の漸化式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) &= \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \frac{G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)}{(2n+3)(n-1)} \\ &\quad \times [(2n+1)\alpha(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \\ &\quad + 2\beta(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) G_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n)] \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) &= \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \frac{F_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)}{(2n+3)(n-1)} \\ &\quad \times [3\alpha(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) G_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \\ &\quad + 2n\beta(\mathbf{k}_{1,\dots,m}, \mathbf{k}_{m+1,\dots,n}) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n)] \end{aligned} \quad (109)$$

ここで求めた積分核は時間依存しない。これは、上で述べた $\Omega_m/f^2 \simeq 1$ という近似を用いたためである。この近似を用いなければ、 F_n, G_n はわずかに時間依存する。しかし、この時間依存性は非常に弱いので、実用上は無視してよい。

これで F_n, G_n を順次求めていくことができる。 $n=1$ のとき、上の式から

$$F_1 = G_1 = 1 \quad (110)$$

したがって、 $n=2$ のとき

$$F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{7} [5\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)] \quad (111)$$

$$G_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{7} [3\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + 4\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)] \quad (112)$$

となる。 α, β の定義を代入すると

$$F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{10}{7} + \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} + \frac{4}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \quad (113)$$

$$G_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{6}{7} + \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} + \frac{8}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \quad (114)$$

となり、対称である。

2.7 球対称密度ゆらぎ

前節では、線形理論を超えた密度ゆらぎの摂動展開を導出した。これは、非線形性が弱い場合において有効である。つまり、いずれ非線形性が強くなると、この摂動展開は破綻する。この節では、この準非線形領域を超えた非線形性の強い領域について考える。摂動論は使えないので、何らかの高い対称性を持つような場合に限られる。その一例として、球対称密度ゆらぎを考える。

■球対称密度ゆらぎの運動方程式

ある点を中心として質量密度が球対称な分布をしているとする。半径 $R(t)$ の球殻を考える。この球殻よりも内側の質量を M とする。このときの球殻の運動方程式は

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} \quad (115)$$

である。この方程式の両辺に dR/dt をかけて、 t で積分すると^{*15}

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{R} + E$$

となる。ここで、 E は積分定数である。これは、質点のエネルギー方程式と等価である。 E の符号によって、系の運動が異なる。

- $E < 0$ のとき、球殻はある最大半径 R_{\max} まで膨張した後に収縮し、重力崩壊する。
- $E > 0$ のとき、 R は増加し続けて内部の密度はゼロに近づく。

束縛解 ($E < 0$) の場合を考える。このときのパラメータ表示は

$$\begin{cases} R = (GM)^{1/3} A^2 (1 - \cos \vartheta) \\ t = A^3 (\vartheta - \sin \vartheta) \end{cases} \quad (116)$$

である。ここで ϑ はパラメータで、 A は積分定数である。また、非束縛解 ($E > 0$) の場合は $\vartheta \rightarrow i\vartheta, A \rightarrow iA$ として解析接続すれば良い。

^{*15} エネルギー積分とも呼ばれる。

■球対称密度ゆらぎ

球殻内の密度は $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ である。また、簡単のために、背景宇宙がアインシュタイン・ド・シッター宇宙であるとする。このとき、背景宇宙のスケールファクターは $a(t) \propto t^{2/3}$ で $\Omega_m = 1$ である。フリードマン方程式から宇宙全体の平均密度は

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

である。一般の宇宙モデルでは、計量が複雑になるのでここではアインシュタイン・ド・シッター宇宙を考える。このときの球殻内の密度ゆらぎは

$$1 + \delta = \frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2} G M \frac{t^2}{R^3} = \frac{9(\vartheta - \sin \vartheta)^2}{2(1 - \cos \vartheta)^3} \quad (117)$$

となる。

密度ゆらぎの絶対値が小さく $\delta \ll 1$ のとき、線形近似の結果に一致するはずである。これは、宇宙年齢が小さい極限 $\vartheta \rightarrow 0$ に対応する。式 (117) を ϑ についてテイラー展開をすると

$$\delta \simeq \frac{3}{20} \vartheta^2 \quad (118)$$

となる。また、パラメータ表示についてもテイラー展開すると

$$t \simeq \frac{1}{6} A^3 \vartheta^3 \simeq \frac{A^3}{6} \left(\frac{20}{3} \right)^{3/2} \delta^{3/2} \quad (119)$$

が得られる。すなわち、 $\delta \propto t^{2/3}$ である。この関係はアインシュタイン・ド・シッター宇宙における線形理論の成長率 $D(t) \propto a(t) \propto t^{2/3}$ と一致する。よって、上の近似式における δ は線形理論における密度ゆらぎ δ_L と一致する。したがって、

$$\delta_L(t) = \frac{3}{20} \left(\frac{6}{A} \right)^{2/3} t^{2/3} \quad (120)$$

となる。

■非線形密度ゆらぎの成長

この線形密度ゆらぎ δ_L は十分に時間が経過すると非線形性が増すので、実際の δ とは異なってくる。しかし、球対称揺らぎの場合は、式 (117) を用いて正確に δ と δ_L の関係を求めることができる。

例えば、球対称密度ゆらぎが崩壊して中心点に質量が集中する時刻を求めることもできる。つまり、 $\vartheta > 0$ において $R = 0$ となる時刻を求めれば良い。これは、 $\vartheta = 2\pi$ に対応し時刻は $t_c = 2\pi A^3$ である。このときの線形密度ゆらぎを**臨界密度ゆらぎ**と呼び、その値は

$$\delta_L(t_c) = \frac{3}{20} \left(\frac{6}{A} \right)^{2/3} (2\pi A^3)^{2/3} = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} \simeq 1.686 \quad (121)$$

となる。つまり、線形理論における密度ゆらぎが約 1.686 になったときに、実際の密度ゆらぎは無限大になる。実際にはこの時点でゆらぎがビリアル平衡に達して、銀河団などの天体が形成されることが考えられている。

アインシュタイン・ド・シッター宇宙モデルではない場合においても、臨界密度ゆらぎはほぼ同じ値になる。この値が天体形成のしきい値の目安として使われている（らしい）。

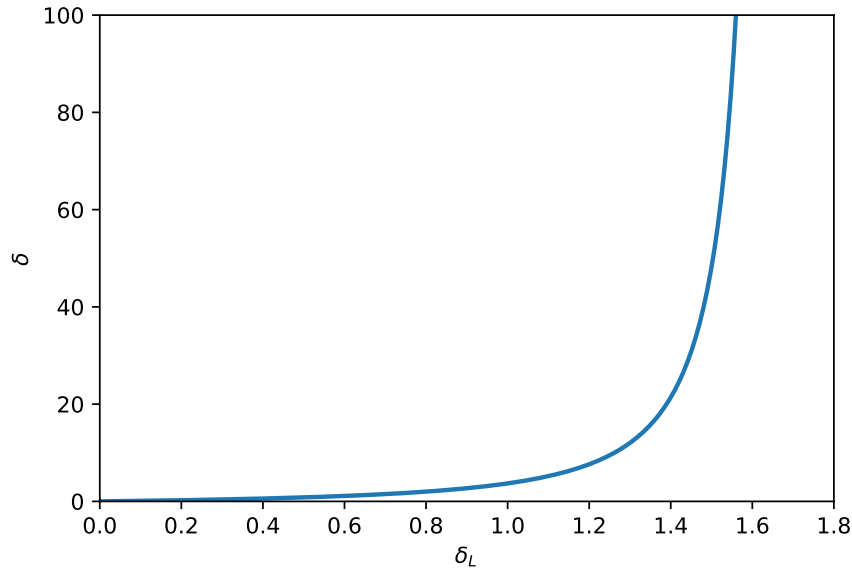


図 2 球対称密度ゆらぎにおける非線形密度ゆらぎ δ と線形密度ゆらぎ δ_L の関係。 $\delta_L \simeq 1.69$ で非線形密度ゆらぎが発散する。

3 密度ゆらぎの統計と観測量

3.1 キュムラント展開定理

複数のランダム変数 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。ランダム変数の値はその名の通りランダムに決まる。その値から作られる関数に対する統計平均を $\langle \dots \rangle$ で表すことにする。このとき、

$$\langle X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_n} \rangle \quad (122)$$

を n 次のモーメントという。例えば、

$$\langle X_1^4 \rangle, \langle X_1^2 X_2^2 \rangle, \langle X_1 X_2 X_3 X_4 \rangle$$

はすべて 4 次のモーメントである。

さらに、高次モーメントからその部分的な組み合わせで作られる低次モーメントの寄与を取り除

いたものをキュムラントと呼ぶ。例えば、4 次までのキュムラントは以下のように

$$\langle X_i \rangle = \langle X_i \rangle_c \quad (123)$$

$$\langle X_i X_j \rangle = \langle X_i X_j \rangle_c + \langle X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \langle X_i X_j X_k \rangle &= \langle X_i X_j X_k \rangle_c + \langle X_i X_j \rangle_c \langle X_k \rangle_c + \langle X_j X_k \rangle_c \langle X_i \rangle_c \\ &\quad + \langle X_k X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c + \langle X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c \langle X_k \rangle_c \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \langle X_i X_j X_k X_l \rangle &= \langle X_i X_j X_k X_l \rangle_c + \langle X_i X_j X_k \rangle_c \langle X_l \rangle_c + 3 \text{ perms} \\ &\quad + \langle X_i X_j \rangle_c \langle X_k X_l \rangle_c + 2 \text{ perms} \\ &\quad + \langle X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c \langle X_k X_l \rangle_c + 5 \text{ perms} \\ &\quad + \langle X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c \langle X_k \rangle_c \langle X_l \rangle_c \end{aligned} \quad (126)$$

となる。n perms は直前の項を置換して n 個の項を加えることを意味する。蛇足だが、4 次のキュムラントは

$$\begin{aligned} \langle X_i X_j X_k X_l \rangle &= \langle X_i X_j X_k X_l \rangle_c \\ &\quad + \langle X_i X_j X_k \rangle_c \langle X_l \rangle_c + \langle X_j X_k X_l \rangle_c \langle X_i \rangle_c + \langle X_k X_l X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c + \langle X_l X_i X_j \rangle_c \langle X_k \rangle_c \\ &\quad + \langle X_i X_j \rangle_c \langle X_k X_l \rangle_c + \langle X_j X_k \rangle_c \langle X_l X_i \rangle_c + \langle X_l X_i \rangle_c \langle X_j X_k \rangle_c \\ &\quad + \langle X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c \langle X_k X_l \rangle_c + \langle X_j \rangle_c \langle X_k \rangle_c \langle X_l X_i \rangle_c + \langle X_k \rangle_c \langle X_l \rangle_c \langle X_i X_j \rangle_c \\ &\quad + \langle X_l \rangle_c \langle X_i \rangle_c \langle X_j X_k \rangle_c + \langle X_i \rangle_c \langle X_k \rangle_c \langle X_j X_l \rangle_c + \langle X_j \rangle_c \langle X_l \rangle_c \langle X_i X_l \rangle_c \\ &\quad + \langle X_i \rangle_c \langle X_j \rangle_c \langle X_k \rangle_c \langle X_l \rangle_c \end{aligned}$$

である。

図で表すと、以下のようなになる。

■キュムラント展開定理

キュムラント展開定理

モーメントとキュムラントの間には以下の関係式が成り立つ。

$$\ln \langle e^X \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle X^n \rangle_c$$

この定理についての証明を示す。

まず、 N 次のモーメント $\langle X^N \rangle$ をキュムラントで表す。定義から

$$\langle X^N \rangle = \sum_{\text{組分け}} \prod_{\text{組}\alpha} \langle X^{n_\alpha} \rangle_c$$

のように書ける。これは、 N 個の X をいくつかの組に分け、その各組 α に含まれる要素数を n_α としたときの総和である。当然、 $\sum_\alpha n_\alpha = N$ が成り立つ。さらに、この式を

$$\langle X^N \rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots \\ \sum_i i m_i = N}} n_{m_1 m_2 \dots} \langle X \rangle_c^{m_1} \langle X^2 \rangle_c^{m_2} \dots$$

と書き換えることにする。ここで、 m_i は i 次のキュムラントが組に分けたときに何個含まれるかを表す変数である。この m_i を用いると、和についての制約として $\sum_\alpha n_\alpha = N$ は $\sum_i i m_i = N$ と書き換えられる。 $n_{m_1 m_2 \dots}$ は、上の式 (125), (126) で見たようにキュムラントに含まれる要素数が m_1, m_2, \dots であるような組分けの総数である。上の例では、ランダム変数がそれぞれ違う添え字がついていたが、今の場合は同じなので単に重複分を数え上げれば良いためにこのような操作ができる。

この組み分けの数を考える。全体で N 個の要素がある。これを m_1 個の 1 要素の組、 $2m_2$ 個の 2 要素の組、 \dots に分ける。まず、 N 個の要素から $m_1, 2m_2, \dots$ 個の組に分ける方法は

$$\binom{N}{m_1, 2m_2, \dots, Nm_N} = \frac{N!}{\prod_i (i m_i)!}$$

通りある。次に、 $i m_i$ 個の要素に分かれた組について考える。 i 個ずつ m_i 個の組に分ける方法は各要素は区別しないので

$$\frac{(i m_i)!}{(i!)^{m_i} m_i!}$$

通りある。したがって、すべての組を選ぶと

$$\begin{aligned} n_{m_1, m_2, \dots} &= \frac{N!}{\prod_i (i m_i)!} \cdot \prod_j \frac{(j m_j)!}{(j!)^{m_j} m_j!} \\ &= \frac{N!}{\prod_i m_i! (i!)^{m_i}} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
\langle e^X \rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \langle X^N \rangle \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots \\ \sum_i m_i = N}} \frac{N!}{\prod_i m_i! (i!)^{m_i}} \prod_j \langle X^j \rangle^{m_j} \\
&= \prod_i \sum_{m_i} \frac{\langle X^i \rangle^{m_i}}{m_i! (i!)^{m_i}} = \prod_i \exp \left(\frac{1}{i!} \langle X^i \rangle_c \right) \\
&= \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \langle X^i \rangle_c \right)
\end{aligned}$$

が得られる。以上で、キュムラント展開定理が示された。

3.2 モーメントとキュムラント母関数

ランダム変数 X のモーメント $\langle X^n \rangle$ を用いて、

$$Z(J) := \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-iJ)^N}{N!} \langle X^N \rangle = \langle e^{-iJX} \rangle \quad (127)$$

という関数を定義する。ここで、 $P(X)$ を X の確率分布関数とする。すると、明らかに

$$Z(J) = \int dX P(X) e^{-iJX} \quad (128)$$

が成り立つ。この関数は分布関数 $P(X)$ のフーリエ変換となっている。式 (127) において、 $Z(J)$ を J で微分して $J=0$ とすると

$$\langle X^n \rangle = i^n \left. \frac{\partial^n Z(J)}{\partial J^n} \right|_{J=0} \quad (129)$$

が得られる。このような関数をモーメントの生成母関数と呼ぶ。

同様に、キュムラント展開定理から

$$\ln Z(J) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-iJ)^N}{N!} \langle X^N \rangle_c \quad (130)$$

となる。この式において、 $\ln Z(J)$ を J で微分して $J=0$ とすると

$$\langle X^n \rangle_c = i^n \left. \frac{\partial^n \ln Z(J)}{\partial J^n} \right|_{J=0} \quad (131)$$

が得られる。つまり、モーメント母関数 $Z(J)$ の対数関数はキュムラントの生成母関数になっている。

次に、複数個のランダム変数 X_1, X_2, \dots, X_n について考える。この場合のモーメント母関数は

$$\begin{aligned} Z(J_1, J_2, \dots, J_n) &:= \left\langle \exp \left(-i \sum_i J_i X_i \right) \right\rangle \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} J_{i_1} J_{i_2} \dots J_{i_N} \langle X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_N} \rangle \end{aligned} \quad (132)$$

である。この関数についても、同時分布関数 $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ とすると

$$Z(J_1, J_2, \dots, J_n) = \int dX_1 dX_2 \dots dX_n P(X_1, X_2, \dots, X_n) \exp \left(-i \sum_i J_i X_i \right) \quad (133)$$

となっているので、多次元フーリエ変換になっていることがわかる。また、同様に

$$\langle X_{i_1} \dots X_{i_N} \rangle = i^N \frac{\partial^N Z}{\partial J_{i_1} \dots \partial J_{i_N}} \Big|_{J_1=J_2=\dots=0} \quad (134)$$

$$(135)$$

が成り立つ。つまり、モーメント母関数 $Z(J_1, J_2, \dots, J_n)$ の多変数微分によってモーメントが得られる。

キュムラント展開定理から、多変数の場合も

$$\ln Z(J_1, J_2, \dots, J_n) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N} J_{i_1} \dots J_{i_N} \langle X_{i_1} \dots X_{i_N} \rangle_c \quad (136)$$

が成り立つ。この式から

$$\langle X_{i_1} \dots X_{i_N} \rangle_c = i^N \frac{\partial^N \ln Z}{\partial J_{i_1} \dots \partial J_{i_N}} \Big|_{J_1=J_2=\dots=0} \quad (137)$$

が得られる。この場合についても、モーメント母関数の対数関数はキュムラントの生成母関数になっている。

さらに、ランダム変数が連続的に分布している場合を考える。このようなランダム変数をランダム場と呼ぶ。このとき、ランダム場 $X(x)$ の引数 x は多次元自由度を持っても良い。例えば、 x が 3 次元空間の位置ベクトル \mathbf{x} であれば、 $X(\mathbf{x})$ は 3 次元空間に分布するランダム場になる。

このときのモーメント母関数に対応する量は、関数 $J(x)$ に対する汎関数で

$$\begin{aligned} Z[J(x)] &:= \left\langle \exp \left(-i \int dx J(x) X(x) \right) \right\rangle \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int dx_1 \dots dx_N J(x_1) \dots J(x_N) \langle X(x_1) \dots X(x_N) \rangle \end{aligned} \quad (138)$$

が成り立つ。この汎関数は、ランダム場 $X(x)$ の分布関数 $P[X(x)]$ の汎関数フーリエ変換になっている。また、この汎関数についても

$$\langle X(x_1) \dots X(x_N) \rangle = i^N \frac{\delta^N Z[J(x)]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} \Big|_{J(x)=0} \quad (139)$$

が成り立つ。ただし、 $\delta/\delta J(x)$ は汎関数微分を表す。

キュムラント展開定理から、ランダム場の場合も

$$\ln Z[J(x)] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N J(x_1) \cdots J(x_N) \langle X(x_1) \cdots X(x_N) \rangle_c \quad (140)$$

が成り立つ。この式から

$$\langle X(x_1) \cdots X(x_N) \rangle_c = i^N \left. \frac{\delta^N \ln Z[J(x)]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_N)} \right|_{J(x)=0} \quad (141)$$

が得られる。したがって、ランダム場の場合についても、モーメント母関数の対数汎関数はキュムラントの生成母関数になっている。

つまり、ランダム変数、複数のランダム変数、ランダム場のいずれの場合においても、モーメント母関数の対数がキュムラント母関数になっていることがわかる。このようにすることによって、ランダム変数がしたがう確率分布が与えられたとき、そのキュムラントはモーメント母関数の対数を取ることによって簡単に求められる。(これがキュムラント母関数の言葉の意味) モーメント母関数は確率分布のフーリエ変換で与えられる。

3.3 他変数ガウス分布

■1 次元ガウス分布

まずは、1次元ガウス分布について考える。ランダム変数 X が平均 μ 、分散 σ^2 のガウス分布に従うとする。このとき、確率分布関数は

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (142)$$

である。いわゆる正規分布である。

このとき、モーメント母関数は

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int dX P(X) e^{-iJX} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dX \exp\left(-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2} - iJX\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dX \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu+iJ\sigma^2)^2 - iJ\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 J^2\right) \\ &= \exp\left(-iJ\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 J^2\right) \end{aligned} \quad (143)$$

となる。したがって、キュムラント母関数は

$$\ln Z(J) = -iJ\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 J^2 \quad (144)$$

となるので、3 次以上のキュムラントはすべてゼロであることがわかる。式 (130) より

$$\langle X \rangle_c = \mu, \quad \langle X^2 \rangle_c = \sigma^2, \quad \langle X^n \rangle_c = 0 \quad (n \geq 3) \quad (145)$$

が得られる。したがって、ガウス分布の 1 次モーメントと 2 次モーメントがそれぞれ平均と分散に対応することがわかる。また、ガウス分布の統計的な性質は平均と分散だけで完全に決定されることもわかる。つまり、高次モーメントはすべて 1 次モーメントと 2 次モーメントで表せる。

$$\begin{aligned} \langle X^3 \rangle &= \langle X^3 \rangle_c + 3 \langle X^2 \rangle_c \langle X \rangle_c + \langle X \rangle_c^3 \\ &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \langle X^4 \rangle &= \langle X^4 \rangle_c + 4 \langle X^3 \rangle_c \langle X \rangle_c + 3 \langle X^2 \rangle_c^2 + 6 \langle X^2 \rangle_c \langle X \rangle_c^2 + \langle X \rangle_c^4 \\ &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \end{aligned} \quad (147)$$

などのようになる。

■多変数ガウス分布

上の 1 変数ガウス分布を多変数に拡張することを考える。一般の他変数ガウス分布は 3 次以上のキュムラントがすべてゼロである分布として定義される。以下では、 n 個のランダム変数 X_1, X_2, \dots, X_n の場合を考える。

まず、1 次モーメントである $\langle X_i \rangle$ を μ_i はランダム変数の平均値である。この平均値との差引いた変数を

$$Y_i := X_i - \langle X_i \rangle \quad (148)$$

と定義する。 X_i が多変数ガウス分布に従うとき、 Y_i は 2 次のモーメントだけで完全に記述できる。実際、

$$\langle Y_i \rangle = 0 \quad (149)$$

$$\langle Y_i Y_j \rangle = \langle Y_i Y_j \rangle_c \quad (150)$$

$$\langle Y_i Y_j Y_k \rangle = 0 \quad (151)$$

$$\langle Y_i Y_j Y_k Y_l \rangle = \langle Y_i Y_j \rangle_c \langle Y_k Y_l \rangle_c + 2 \text{ perms} \quad (152)$$

などとなる。

このランダム変数 Y_i に対して、キュムラント母関数 $\ln Z_G$ を考える。すると、2 次モーメントだけが非ゼロなので式 (136) より

$$\ln Z_G(J_1, J_2, \dots, J_n) = \sum_{i,j} \frac{(-i)^2}{2!} J_i J_j \langle Y_i Y_j \rangle_c \quad (153)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{pmatrix}, \quad M_{ij} := \langle Y_i Y_j \rangle_c \quad (154)$$

を定義すると、

$$\ln Z_G(\mathbf{J}) = -\frac{1}{2}\mathbf{J}^T M \mathbf{J} \quad (155)$$

となる。ここで、 M は相関行列と呼ばれ、 M_{ij} はランダム変数 X_i と X_j の共分散を表す。したがって、モーメント母関数は

$$Z_G(\mathbf{J}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{J}^T M \mathbf{J}\right) \quad (156)$$

となる。

モーメント母関数は分布関数のフーリエ変換であるので、逆フーリエ変換をとることで分布関数を求めることができる。つまり、

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}) &= \int \frac{d^n J}{(2\pi)^n} Z_G(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y}} \\ &= \int \frac{d^n J}{(2\pi)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{J}^T M \mathbf{J} + i\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det M}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T M^{-1} \mathbf{Y}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det M}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} Y_i (M^{-1})_{ij} Y_j\right) \end{aligned} \quad (157)$$

となる。

特別な場合として、1次元のとき $M = \langle Y^2 \rangle = \sigma^2$ となるので、

$$P(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{Y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (158)$$

となって、1次元ガウス分布の結果が得られる。

3.4 密度ゆらぎのパワースペクトル

宇宙の大規模構造の解析で、最も基本的な統計量は密度ゆらぎのパワースペクトルである。この節では、密度ゆらぎのパワースペクトルについて説明する。

■パワースペクトル

まず、密度ゆらぎ $\delta(\mathbf{x})$ のフーリエ変換 $\delta(\mathbf{k})$ とする。フーリエ変換は

$$\delta(\mathbf{k}) = \int d^3x \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (159)$$

とする。

ここで、密度ゆらぎのフーリエ係数に対する2次キュムラントを考える。つまり、

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \rangle_c = \int d^3x_1 d^3x_2 \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle_c e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2)} \quad (160)$$

である。ここで、宇宙が大局的に一様等方であるためには、統計量は空間的に特別な点や方向を持たない必要がある。したがって、 $\langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2) \rangle_c$ は $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ の関数でなければならない。それを

$$\xi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) := \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}') \rangle_c \quad (161)$$

と定義する。この関数を 2 点相関関数と呼ぶ。

2 点相関関数は、実空間において密度ゆらぎがどのように相関しているかを表す統計量である。例えば、 $\xi(r)$ が正の値を持つとき、距離 r だけ離れた 2 点において一方が大きくなればもう一方も大きくなる傾向があることを意味する。逆に、 $\xi(r)$ が負の値を持つとき、距離 r だけ離れた 2 点において一方が大きくなればもう一方は小さくなる傾向があることを意味する。そして、 $\xi(r) = 0$ であれば、距離 r だけ離れた 2 点において密度ゆらぎは無相関であることを意味する。

この 2 点相関関数を用いて、2 次キュムラントを計算すると

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle_c &= \int d^3x d^3x' \xi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} \\ &= \int d^3r \xi(r) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \int d^3x' e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}'} \quad (\mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k) \end{aligned} \quad (162)$$

が得られる。^{*16}ここで、

$$P(k) := \int d^3r \xi(r) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{\sin(kr)}{kr} \xi(r) \quad (163)$$

と定義した。この関数 $P(k)$ を密度ゆらぎのパワースペクトルと呼ぶ。宇宙の一様性から、デルタ関数 $\delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ が現れる。また、宇宙の等方性から、パワースペクトルは波数ベクトル \mathbf{k} の大きさ $k = |\mathbf{k}|$ の関数だけになる。

パワースペクトルは、密度ゆらぎ 2 点相関関数のフーリエ変換として定義される統計量である。したがって、数学的には実空間での 2 点相関関数と同じ情報を持っている。

■バースペクトル

3 次以上のキュムラントについても同様に考えることができる。例えば、3 次キュムラントは

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3) \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \quad (164)$$

である。ここで、 $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ を密度ゆらぎのバースペクトルと呼ぶ。波数ベクトルの和がゼロになるという条件は、宇宙の一様性から導かれるものである。バースペクトルは、3 点相関関数の

^{*16} $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ から $(\mathbf{x}', \mathbf{r})$ への変数変換のヤコビアンは 1 である。

フーリエ変換として定義される統計量である。計算は以下になる。

$$\begin{aligned}
& \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \rangle_c \\
&= \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_3) \rangle_c e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3)} \\
&= \int d^3r_{12} d^3r_{13} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{12}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{13}) \rangle_c e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_{12} + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_{13})} \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{x}} \\
&= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)
\end{aligned}$$

となり、ここで

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) := \int d^3r_{12} d^3r_{13} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{12}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{13}) \rangle_c e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_{12} + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_{13})} \quad (165)$$

と定義し、バイスペクトルという。波数ベクトルについて $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$ という関係が成り立たなければならない。したがって、この波数ベクトルは三角形を形成する必要がある。宇宙の等方性から、バイスペクトルは三角形の形状だけに依存し、三角形の位置や向きには依存しない。つまり、バイスペクトルは3つの波数ベクトルの大きさだけで決定され自由度は3つである。

■トライスペクトル

4次キュムラントについても同様に考えることができる。例えば、4次キュムラントは

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \quad (166)$$

である。ここで、 $T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ を密度ゆらぎのトライスペクトルと呼ぶ。波数ベクトルについて $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$ という条件は、宇宙の一様性から導かれるものである。4つの波数ベクトルは4面体を形成する必要がある。宇宙の等方性から、この4面体は回転対称性を持ち、トライスペクトルは4面体の形状だけに依存し、位置や向きには依存しない。つまり、トライスペクトルは4つの波数ベクトルの大きさだけで決定される。辺の数は6なので、自由度は6つである。

■ポリスペクトル

以上の議論を一般化して、 n 次キュムラントについて考えることができる。 n 次キュムラントは

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \delta(\mathbf{k}_n) \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) P_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) \quad (167)$$

である。このとき、 $P_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n)$ を密度ゆらぎのポリスペクトルと呼ぶ。単に、波数ベクトルを n 個選ぶときの自由度は $3n$ 個である。宇宙の一様性と等方性から、並進対称性と回転対称性が成り立つのでこの分の自由度6を引く必要がある。したがって、 n 次ポリスペクトルの自由度は $n \geq 3$ の場合、 $3n - 6$ 個である。

3.5 線形パワースペクトル

初期の密度ゆらぎがガウス型であるとき、その後も線形成長する限り、密度ゆらぎはガウス型のままである。つまり、高次のキュムラントは線形成長で励起されることはない。

密度ゆらぎの線形成長の式 (??) を思い出すと、

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D(t)\delta_0(\mathbf{x})$$

と書けるのであった。この式をフーリエ変換すると、

$$\delta(\mathbf{k}, t) = D(t)\delta_0(\mathbf{k}) \quad (168)$$

となる。パワースペクトルの定義より、

$$\langle \delta(\mathbf{k}, t)\delta(\mathbf{k}', t) \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_L(k) \quad (169)$$

である。ここで、 $P_L(k)$ は時刻 t における線形パワースペクトルである。一方で、

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}, t)\delta(\mathbf{k}', t) \rangle_c &= D^2(t) \langle \delta_0(\mathbf{k})\delta_0(\mathbf{k}') \rangle_c \\ &= D^2(t)(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{L0}(k) \end{aligned} \quad (170)$$

となる。ここで、 $P_{L0}(k)$ は現在時刻 t_0 における線形パワースペクトルである。したがって、

$$P_L(k) = D^2(t)P_{L0}(k) \quad (171)$$

となる。物質優勢期以降において、波数 k に対するパワースペクトルの関数系は時間的にはほとんど変化しない。

MD 期の以前と以降では、ゆらぎの成長について異なった振る舞いを示す。MD 期以前のゆらぎの成長では、スケールによって成長率が異なる。特に、RD 期ではホライズンスケール ($k \simeq aH$) よりも短波長側のゆらぎは成長しない。これは、放射圧によってゆらぎの成長が抑制されるためである。ホライズンは時間とともに大きくなり最終的には、 $k_{\text{eq}} = a_{\text{eq}}H_{\text{eq}}$ よりも短い波長のゆらぎ ($k > k_{\text{eq}}$) が抑制される。

線形理論では、ゆらぎの成長抑制の効果は波数 k によって決まる。そこで、各 k に対して成長抑制の効果を表す伝達関数 $T(k)$ を導入する。RD 期における十分初期のゆらぎを $\delta_{\text{in}}(\mathbf{k})$ とすると

$$\delta_L(\mathbf{k}) = \frac{D(t)}{D(t_{\text{in}})} T(k) \delta_{\text{in}}(\mathbf{k}) \quad (172)$$

となる。ただし、 $D(t)$ はホライズンを超えるスケール (超ホライズンスケール) での線形成長因子である。つまり、超ホライズンスケールでは $T(k) = 1$ となる。よって、 $k \rightarrow 0$ の極限では $T(k) \rightarrow 1$ となる。

晴れ上がりの時刻 $z \simeq 1100$ 程度までは、 $T(k)$ は時間に依存する。しかし、時間と共にその依存性は弱くなり、現在時刻においてはほとんど時間に依存しない。

密度ゆらぎの式 (172) を線形パワースペクトルに変換すると

$$P_L(k, t) = \left(\frac{D(t)}{D(t_{\text{in}})} \right)^2 T^2(k) P_{\text{in}}(k) \quad (173)$$

となる。 $P_{\text{in}}(k)$ は初期の密度ゆらぎのパワースペクトルである。しかし、この $P_{\text{in}}(k)$ は確定的なものではなく、モデル依存の量である。ここで、モデル依存しないような結果を得るために、 $P_{\text{in}}(k)$ を次のように

$$P_{\text{in}}(k) \propto k^n \quad (174)$$

と仮定されることが多い。ここで、指数 n はスペクトル指数と呼ばれる。現在、観測的には $n \simeq 0.96$ であることがわかっている。この初期ゆらぎの形状は、インフレーション宇宙論によって自然に説明される。

この形状の初期ゆらぎを仮定すると、線形パワースペクトルは

$$P_L(k, t) = A D^2(t) k^n T^2(k) \quad (175)$$

となる。 A は定数因子であり、観測的に決定される。

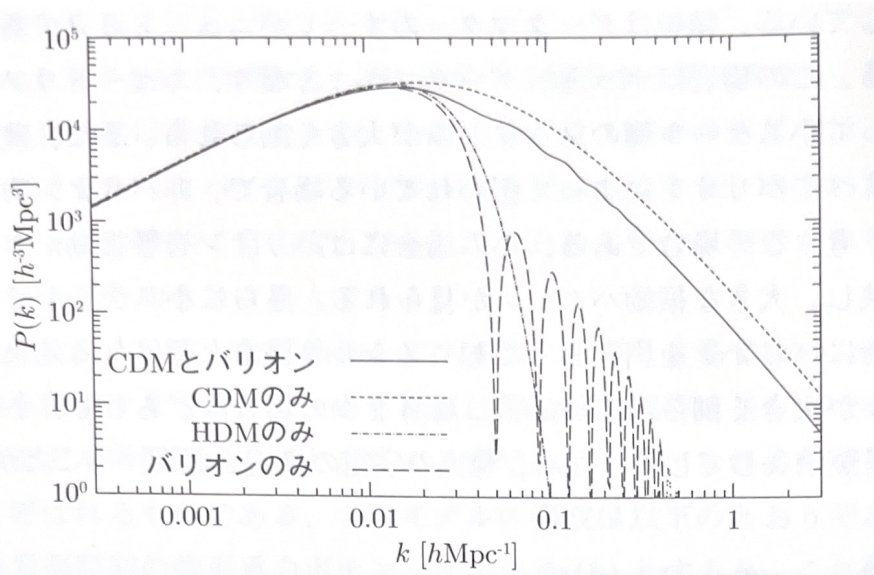


図3 線形パワースペクトル。スペクトル指数 $n = 0.96$ を用いている。

図3に線形パワースペクトルの例を示す。現実的に正しいとされるモデルはコールドダークマターとバリオンを含むものであり、そのほかのモデルは非現実的なものである。 $k \simeq 0.02 h \text{ Mpc}^{-1}$ 付近の山は、RD 期にゆらぎが抑制される効果である。コールドダークマターは速度分散が小さなダークマターのことである。これに比べて、ホットダークマターは速度分散が大きなダークマターであり、自由流運動によってゆらぎの成長が抑制される。バリオンが存在する場合は、バリオン音響振動によってパワースペクトルに特徴的な山が現れる。

3.6 初期非ガウス性

初期ゆらぎはよい精度でガウス型であることが観測的にわかっている。しかし、完全にガウス型であるわけではなく、わずかな非ガウス性が存在する可能性がある。

ガウス型はパワースペクトルだけで完全に記述できていた。しかし、非ガウス型の場合は高次のポリスペクトルも必要になる。その自由度の大きさは莫大である。

■局所型非ガウス性モデル

非ガウス性に関する広大なパラメータ空間を扱うのは困難である。そこで、非ガウス性の特徴を捉えるために、いくつかの簡単なモデルが提案されている。有名なものとして、局所型非ガウス性モデルがある。

MD 期の線形重力ポテンシャル $\Phi_*(\mathbf{k})$ とする。これは時間的に変化しない。理由は簡単で、ポアソン方程式は

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta$$

であった。MD 期では $\delta \propto a$ である。 $\bar{\rho} \propto a^{-3}$ であるので、右辺は時間に対して一定の値をとる。したがって、 Φ も時間に対して一定の値をとる。ただし、MD 期の前に RD 期が存在しているので初期の重力ポテンシャルは $\Psi(\mathbf{k})$ とは一致せず、全体の振幅や波数依存性が変化する。波数依存性については、伝達関数 $T(k)$ で表される。これは、

$$\delta_L(\mathbf{k}) = \frac{D(t)}{D(t_{\text{in}})} T(k) \delta_{\text{in}}(\mathbf{k})$$

と上のポアソン方程式から連立して導くことができるためである。^{*17} ここで、 $\delta_{\text{in}}(\mathbf{k})$ は RD 期の十分初期の密度ゆらぎであった。また、 $\delta_L(\mathbf{k})$ は MD 期 (まで) の線形密度ゆらぎであった。

したがって、初期ゆらぎ φ の波数依存性は注釈で述べたことに注意して

$$\varphi(\mathbf{k}) = -\frac{\Phi_*(\mathbf{k})}{T(k)} \quad (176)$$

である。ただし、ここでは振幅の定数因子は無視している。ガウス型の分布に従う場 $\varphi_G(\mathbf{x})$ を考える。この関数の局所的な関数として

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_G(\mathbf{x}) + f_{\text{NL}}[\varphi_G^2(\mathbf{x}) - \langle \varphi_G^2 \rangle] + g_{\text{NL}}[\varphi_G(\mathbf{x})]^3 + \dots \quad (177)$$

という形を仮定する。この φ は非ガウス型の場合である。このようなモデルにおける初期ゆらぎの非ガウス性を局所型非ガウス性と呼ぶ。ここで、 $f_{\text{NL}}, g_{\text{NL}}, \dots$ は非ガウス性を特徴づけるパラメータである。このような非ガウス性を予言するようなインフレーションモデルも提案されている。

^{*17} 重力ポテンシャルと呼んでいるが、正確にはバーディーン曲率ゆらぎ Ψ である。MD 期では $\Psi = -\Phi$ であるため、ここでは区別しないが、本文で呼んでいるポテンシャル (曲率ゆらぎのこと) を伝達関数 T で書き直すとき “-” がつくことに注意。

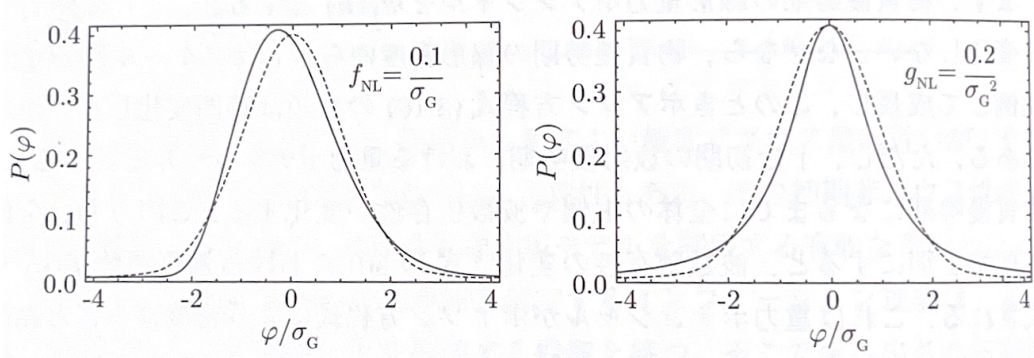


図4 局所型非ガウス性を持つポテンシャルに対する1点分布関数の例。点線がガウス分布。実線が非ガウス分布。左図は $(f_{\text{NL}}, g_{\text{NL}}) = (0.1\sigma_G, 0)$ 、右図は $(f_{\text{NL}}, g_{\text{NL}}) = (0, 0.2\sigma_G)$ の場合。

図4に局所型非ガウス性を持つポテンシャルに対する1点分布関数の例を示す。左図からわかるように、 f_{NL} は左右非対称を引き起こす(歪度)。右図からわかるように、 g_{NL} は分布の尖りを引き起こす(尖度)。

観測から初期ゆらぎを表す φ の振幅は 10^{-5} 程度であり非常に小さい。したがって、局所型非ガウス性モデルにおいても $|f_{\text{NL}}| \ll 10^5$, $|g_{\text{NL}}| \ll 10^{10}$ であることが期待される。式(177)の両辺をフーリエ変換すると^{*18}

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}) = & \varphi_G(\mathbf{k}) + f_{\text{NL}} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \varphi_G(\mathbf{k}_1) \varphi_G(\mathbf{k}_2) \\ & + g_{\text{NL}} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) \varphi_G(\mathbf{k}_1) \varphi_G(\mathbf{k}_2) \varphi_G(\mathbf{k}_3) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (178)$$

となる。

次に、MD期以降の線形成長を考える。ここで、MD期における任意の時刻を t_* とする。このときの密度ゆらぎを δ_* 、スケールファクターを $a_* = a(t_*)$ とする。このとき、ポアソン方程式より

$$-k^2 \Phi_*(\mathbf{k}) = 4\pi G a_*^2 \bar{\rho}_* \delta_*(\mathbf{k}) = \frac{3}{2} \Omega_{m0} H_0^2 \frac{\delta_*(\mathbf{k})}{a_*} = \frac{3}{2} \Omega_{m0} H_0^2 (1 + z_*) \delta_*(\mathbf{k}) \quad (179)$$

となる。ただし、 $\Omega_{m0} = 8\pi G \bar{\rho}_0 / (3H_0^2)$ であり $\bar{\rho}_* = \bar{\rho}_0 a_*^{-3}$ を用いた。

MD期以降に線形成長した密度ゆらぎ $\delta_*(\mathbf{k})$ は、RD期におけるゆらぎの抑制効果はないので単純に

$$\delta_L(\mathbf{k}) = \frac{D(t)}{D(t_*)} \delta_*(\mathbf{k})$$

^{*18} 畳み込みの定理を用いた。

であった。この式に (176), (179) を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{D(t)}{D(t_*)}\delta_*(\mathbf{k}) &= -\frac{2}{3}\frac{D(t)}{(1+z_*)D(t_*)}\frac{k^2}{\Omega_{m0}H_0^2}\Phi_*(\mathbf{k}) \\ &= \frac{2}{3}\frac{D(t)}{(1+z_*)D(t_*)}\frac{k^2T(k)}{\Omega_{m0}H_0^2}\varphi(\mathbf{k}) := \mathcal{M}(k)\varphi(\mathbf{k})\end{aligned}$$

となり

$$\delta_L(\mathbf{k}) = \mathcal{M}(k)\varphi(\mathbf{k}), \quad \mathcal{M}(k) := \frac{2}{3}\frac{D(t)}{(1+z_*)D(t_*)}\frac{k^2T(k)}{\Omega_{m0}H_0^2} \quad (180)$$

となる。

導かれた式 (180) から各スペクトルを求めることができる。

$$\begin{aligned}P_L(k) &= \mathcal{M}^2(k)P_\varphi(k), \\ B_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \mathcal{M}(k_1)\mathcal{M}(k_2)\mathcal{M}(k_3)B_\varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \\ T_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \mathcal{M}(k_1)\mathcal{M}(k_2)\mathcal{M}(k_3)\mathcal{M}(k_4)T_\varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)\end{aligned} \quad (181)$$

となる。ここで、 $P_\varphi, B_\varphi, T_\varphi$ はそれぞれ初期ポテンシャル φ のパワースペクトル、バイスペクトル、トリスペクトルである。

フーリエ展開をした式 (178) を用いて、最低次の近似でバイスペクトルとトリスペクトルを求めるとパワースペクトルを用いて表現でき、

$$\begin{aligned}B_\varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= 2f_{\text{NL}}[P_\varphi(k_1)P_\varphi(k_2) + P_\varphi(k_2)P_\varphi(k_3) + P_\varphi(k_3)P_\varphi(k_1)], \\ T_\varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= 6g_{\text{NL}}[P_\varphi(k_1)P_\varphi(k_2)P_\varphi(k_3) + 3 \text{ perms}] \\ &\quad + 4f_{\text{NL}}^2[P_\varphi(k_1)P_\varphi(k_2)P_\varphi(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3|) + 11 \text{ perms}]\end{aligned} \quad (182)$$

となる。以下、計算。

$$\begin{aligned}&\langle \varphi(\mathbf{k}_1)\varphi(\mathbf{k}_2)\varphi(\mathbf{k}_3) \rangle_c \\ &= \left\langle \left[\varphi_G(\mathbf{k}_1) + f_{\text{NL}} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1) \varphi_G(\mathbf{p}_1) \varphi_G(\mathbf{p}_2) \right] \varphi_G(\mathbf{k}_2) \varphi_G(\mathbf{k}_3) \right\rangle_c \\ &= f_{\text{NL}} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1) \langle \varphi_G(\mathbf{p}_1) \varphi_G(\mathbf{p}_2) \varphi_G(\mathbf{k}_2) \varphi_G(\mathbf{k}_3) \rangle_c \\ &= f_{\text{NL}} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1) [(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_2) P_\varphi(p_1) (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_3) P_\varphi(p_2) + (k_2 \leftrightarrow k_3)] \\ &= 2f_{\text{NL}} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) P_\varphi(k_2) P_\varphi(k_3) + 2 \text{ perms}\end{aligned}$$

3.7 天体のバイアス

今までの議論では質量分布やそのゆらぎについて述べてきた。しかし、実際の観測では銀河や銀河団などの天体を観測する。この天体分布と質量分布は必ずしも一致しない。つまり、理論的なモ

デルが予言するのは質量分布であるが、観測されるのは天体分布である。これらの間に何らかの関係を見出したい。このようなモチベーションから、天体分布という指標から質量分布を表したい。この質量分布を天体分布で表したときの偏りのことを天体の**バイアス**と呼ぶ。

どのような環境で天体が形成されるかは複雑であり、完全に理解されているわけではない。しかし、複雑な形成過程を考えず大スケールに着目することによってある程度、解析的な取り扱いをすることができる。

■ピーク・バイアス

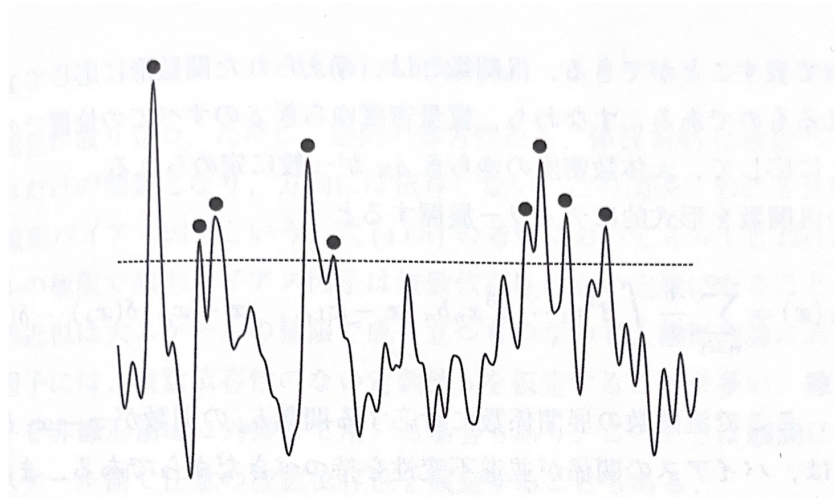


図5 ピーク・バイアスのイメージ図。上図が密度分布、下図がピーク分布。

バイアスの効果を直感的に理解するために、バイアスの一つのモデルとして**ピーク・バイアス**を考える。簡単に一次元空間を考える。密度分布が図5の実線で与えられるとする。点線で表されるしきい値よりも密度が高いピークの位置に天体が位置するものとする。このしきい値（バイアス）の値を大きくすると、天体の数は少なくなるが、天体同士の距離は大きくなる。また、しきい値を小さくすると、天体の数は多くなるが、天体同士の距離は小さくなる。つまり、天体の数密度はバイアスの効果によって増加したり減少したりする。

3.7.1 一般的なバイアスモデル

以下では、具体的なバイアス機構を特定せずに一般的な性質を形式的に表現することを考える。まず、ある種類の天体 X に着目してその数密度ゆらぎを δ_X とする。この天体 X はある基準で選ばれた多数の天体である。例えば、とある観測的基準で選ばれた特定種類の銀河群などである。

一方で、質量の密度ゆらぎについては δ とする。質量の集まる場所には天体に集まる傾向があるが、必ずしも比例関係にあるとは限らない。その関係は一般に

$$\delta_X(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_X[\delta(\mathbf{x})] \quad (183)$$

と汎関数を用いて表される。つまり、すべての位置における δ の値から δ_X の値が決定される。

汎関数をテイラー展開すると

$$\delta_X(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n b_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \delta(\mathbf{x}_1) \cdots \delta(\mathbf{x}_n) \quad (184)$$

である。ここで、 b_n はバイアス関数と呼ばれる。 b_n の引数が $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ となっているのは宇宙の大域的な一様等方性からくるもので、並進対称性を課することによって得られる。 $n = 0$ がないのは、 $\delta = 0$ のときに $\delta_X = 0$ であることを仮定しているためである。

式 (184) をフーリエ変換する。つまり、

$$\delta_X(\mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n b_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \delta(\mathbf{x}_1) \cdots \delta(\mathbf{x}_n)$$

を計算する。ここで、

$$\delta(\mathbf{x}_i) = \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_i} \delta(\mathbf{k}_i) \quad (185)$$

$$b_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3q_n}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)} \cdots e^{i\mathbf{q}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)} b_n(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n) \quad (186)$$

と表せることを用いると

$$\begin{aligned} \delta_X(\mathbf{k}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3q_n}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)} \cdots e^{i\mathbf{q}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)} b_n(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n) \\ &\quad \times \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \int \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n} \delta(\mathbf{k}_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3q_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} b_n(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n) \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \delta(\mathbf{k}_n) \\ &\quad \times \int d^3x e^{i(\mathbf{q}_1 + \cdots + \mathbf{q}_n - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \int d^3x_1 e^{i(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_1} \cdots \int d^3x_n e^{i(\mathbf{q}_n - \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{x}_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3q_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} b_n(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n) \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \delta(\mathbf{k}_n) \\ &\quad \times (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{q}_1 + \cdots + \mathbf{q}_n - \mathbf{k}) (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1) \cdots (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{q}_n - \mathbf{k}_n) \end{aligned}$$

となり、 \mathbf{q} について積分すると最終的に

$$\delta_X(\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}) b_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \delta(\mathbf{k}_n) \quad (187)$$

となる。天体の位置から遥か遠い場所にある質量分布が天体の数密度に影響を与えることはないと考えられる。したがって、 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \rightarrow \infty$ において $b_n \rightarrow 0$ となる。極限への収束が十分に速い場

合は

$$b_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \int d^3x_1 \dots d^3x_n e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n)} b_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (188)$$

$$\approx b_n(0, \dots, 0) := b_n \quad (189)$$

と k_i に依存しない定数近似できる。この近似を用いると、式 (187) は

$$\delta_X(\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}_1) \dots \delta(\mathbf{k}_n) \quad (190)$$

となり、多項式で表される。

線形近似が成り立つような大スケールにおいては、 $n = 1$ の項のみが重要である。つまり、ゆらぎの高次の項は無視できる。したがって、式 (190) は

$$\delta_X(\mathbf{k}) \approx b(k) \delta(\mathbf{k}) \quad (191)$$

が成り立つ。ただし、空間の等方性から b は $k = |\mathbf{k}|$ の関数であることに注意。このときの $b(k)$ を**線形バイアス因子**と呼ぶ。線形近似は大スケール ($k \rightarrow 0$) において成り立つので、式 (190) から線形理論において、線形バイアス因子は波数依存性のない定数値 b を仮定することが多い。^{*19}

3.7.2 局所バイアス・モデル

式 (184) において

$$b_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \bar{b}_n \left[W_R(|\mathbf{r}_1|) \dots W_R(|\mathbf{r}_n|) - \frac{1}{V} \int d^3r W_R(|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}|) \dots W_R(|\mathbf{r}_n + \mathbf{r}|) \right] \quad (192)$$

としたものを**局所バイアス・モデル**という。ただし、 $W_R(r)$ は

$$\int d^3r W_R(r) = 1, \quad (193)$$

という性質を持つ**ウィンドウ関数**である。体積 V は十分に大きな体積であり、

$$\frac{1}{V} \int d^3r W_R(|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}|) \dots W_R(|\mathbf{r}_n + \mathbf{r}|) \quad (194)$$

は十分に広い範囲で \mathbf{r} を動かして平均値を取ることを表している。ウィンドウ関数による密度ゆらぎ $\delta(\mathbf{x})$ の畳み込み積分

$$\delta_R(\mathbf{x}) := \int d^3x' W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \delta(\mathbf{x}') \quad (195)$$

はスケール R で平滑化された密度ゆらぎを表している。

^{*19} 線形バイアス因子を非線形領域に外挿して用いる場合もある。そのときは観測と合うようにして波数依存性を持たせることもある(らしい)。

このバイアスを使って式 (184) を書き直すと

$$\begin{aligned}\delta_X(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n!} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n \left[W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|) \cdots W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{V} \int d^3r W_R(|\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}|) \cdots W_R(|\mathbf{x}_n + \mathbf{r}|) \right] \delta(\mathbf{x}_1) \cdots \delta(\mathbf{x}_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n!} \left[\delta_R^n(\mathbf{x}) - \frac{1}{V} \int d^3r \delta_R^n(\mathbf{r}) \right]\end{aligned}$$

と計算できる。ここで、空間平均を

$$\overline{\delta_X^n} := \frac{1}{V} \int d^3r [\delta_X(\mathbf{r})]^n \quad (196)$$

とすると

$$\delta_X(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n!} [\delta_R^n(\mathbf{x}) - \overline{\delta_R^n}] \quad (197)$$

となる。

式 (197) は、天体の数密度ゆらぎがスケール R で平滑化された質量密度ゆらぎの多項式で表されることを示している。また、ある場所での天体の数密度ゆらぎ δ_X はその場所での質量密度ゆらぎ δ のみで決定され、遠く離れた場所の質量密度ゆらぎには依存しないことを示している。例えば、任意の一変数関数 $f(\mathbf{x})$ に対して、あらゆる場所において天体数密度 $\rho_X(\mathbf{x})$ が

$$\rho_X(\mathbf{x}) = f(\delta_R(\mathbf{x})) \quad (198)$$

と表される場合は、局所バイアス・モデルが成り立つ。このとき、関数 f をテイラー展開することによって式 (197) が得られる。

さらに、局所バイアス・モデルについて式 (192) を考える。つまり、

$$b_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \bar{b}_n \left[W_R(|\mathbf{r}_1|) \cdots W_R(|\mathbf{r}_n|) - \frac{1}{V} \int d^3r W_R(|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}|) \cdots W_R(|\mathbf{r}_n + \mathbf{r}|) \right]$$

をフーリエ変換する。すると、

$$\begin{aligned}b_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) &= \int d^3x_1 \cdots d^3x_n e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n)} b_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= \bar{b}_n \left[\int d^3x_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} W_R(|\mathbf{x}_1|) \cdots \int d^3x_n e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n} W_R(|\mathbf{x}_n|) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{V} \int d^3r \int d^3x_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} W_R(|\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}|) \cdots \int d^3x_n e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n} W_R(|\mathbf{x}_n + \mathbf{r}|) \right] \\ &= \bar{b}_n \left[W(k_1 R) \cdots W(k_n R) - \frac{1}{V} \int d^3r e^{-i(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}} \right. \\ &\quad \left. \times \int d^3x_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} W_R(|\mathbf{x}_1|) \cdots \int d^3x_n e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n} W_R(|\mathbf{x}_n|) \right]\end{aligned}$$

と計算できるので、まとめると

$$b_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \bar{b}_n W(k_1 R) \cdots W(k_n R) \left[1 - \frac{(2\pi)^3}{V} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) \right] \quad (199)$$

となる。ただし、

$$W(kR) := \int d^3r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} W_R(r) \quad (200)$$

はウィンドウ関数のフーリエ変換である。ここで、 kR のみの関数となるのは実空間においてウィンドウ関数が r/R のみの関数である場合に限られる。以下では、そのようなウィンドウ関数を考える。

では、局所バイアス・モデルにおけるフーリエ変換された b_n を式 (187) に代入する。式 (187) において、 $\delta_D(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k})$ がある。すなわち、 $\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n = \mathbf{k}$ において積分が寄与する。式 (199) において $\delta_D(\mathbf{k})$ の項は $\mathbf{k} = 0$ のとき

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k}=0} = \int d^3r e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{k}=0} = \int d^3r = V \quad (201)$$

となるので、 $b_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = 0$ となる。一方で、 $\mathbf{k} \neq 0$ のときは $\delta_D(\mathbf{k}) = 0$ となるので

$$b_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \bar{b}_n W(k_1 R) \cdots W(k_n R) \quad (202)$$

となる。したがって、式 (187) は

$$\begin{aligned} \delta_X(\mathbf{k}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}) \\ &\quad \times W(k_1 R) \cdots W(k_n R) \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \delta(\mathbf{k}_n) \end{aligned} \quad (203)$$

となる。

この局所バイアス・モデルにおいて高次の項を無視する線形近似を考える。つまり、 $n = 1$ の項のみを考えると

$$\delta_X(\mathbf{x}) \simeq \bar{b}_1 \delta_R(\mathbf{x}) \quad (204)$$

$$\delta_X(\mathbf{k}) \simeq \bar{b}_1 W(kR) \delta(\mathbf{k}) \quad (205)$$

となる。一般的なバイアスモデルにおける $b(k)$ (式 (191)) と比較すると、局所バイアス・モデルにおける線形バイアス因子は

$$b(k) = \bar{b}_1 W(kR) \quad (206)$$

となる。実空間のウィンドウ関数の性質 (193) から

$$W(kR) \rightarrow 1 \quad (k \ll R^{-1}) \quad (207)$$

が成り立つ。したがって、十分大きなスケールにおいては $b(k)$ は定数 \bar{b}_1 に近づく。一方で、 $kR \geq 1$ においてはバイアス因子がスケール依存性を持つ。これは、天体の場所から半径 R 以内の質量分布が天体の形成に影響を与えるためである。

このように局所バイアス・モデルは、天体形成の複雑な過程がウィンドウ関数だけで表現され、非常に単純化されている。

実際の天体形成は局所バイアス・モデルよりも複雑である。さらに、天体の種類ごとにバイアスの性質が異なる。しかし、大スケールの極限ではバイアス因子は定数に近づくので、線形バイアス因子を用いた解析は有効である。^{*20}

3.8 赤方偏移空間変形

天体までの距離を正確に測定することは困難である。有用な方法として赤方偏移を用いる方法がある。宇宙膨張における天体の赤方偏移を測定して、その赤方偏移から天体までの距離を推定する。しかし、天体の赤方偏移には宇宙膨張に起因する成分だけでなく、天体の固有運動に起因する成分 (**特異速度**) も含まれる。そのため、赤方偏移と距離は厳密には一対一対応しない。

観測者は宇宙膨張による効果と特異速度による効果を区別できない。この実際の天体の空間分布と観測される天体の空間分布の違いを**赤方偏移空間変形**と呼ぶ。

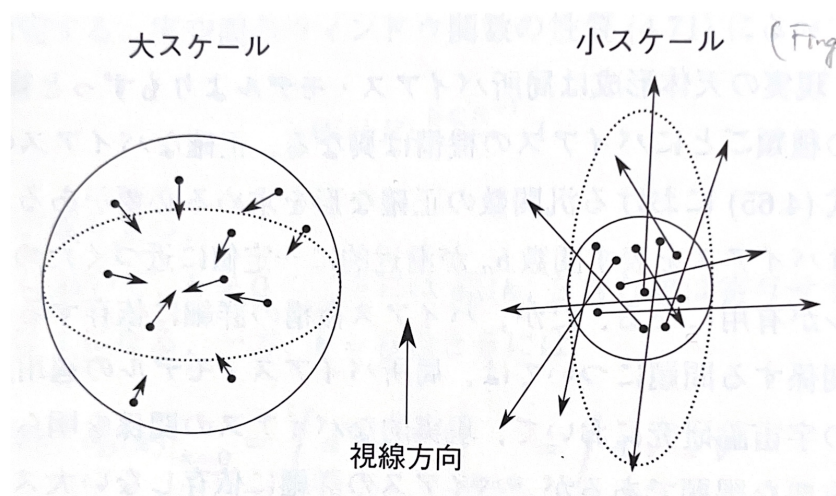


図6 大スケールと小スケールにおける赤方偏移空間変形のイメージ図。

また、赤方偏移空間変形は大スケールと小スケールでは異なる特徴を持つ。大スケールにおいては、線形理論が成り立つ。このようなスケールでは、天体の特異速度は重力による流れに従う。そのため、天体の分布は密度が高い方向に押しつぶされて見える。このような効果を**カイザー効果**という。一方で、小スケールにおいては、非線形性が強い。このとき密度の高い部分では、天体の特

^{*20} 小スケールのゆらぎが関係する問題については、より現実的なバイアスの関係を求めることが重要である。また、バイアスの詳細に依存しない大スケールでのさらなる性質を明らかにすることも重要である。

異速度が構造スケールに比べて大きい。そのため、天体の分布は視線方向に形が引き伸ばされて見える。このような効果を**神の指効果 (Finger-of-God effect)** という。

3.8.1 赤方偏移の特異速度成分

基本観測者における波長を λ_1 、実際の観測者の位置における基本観測者に見える波長を λ'_0 とする。このとき一様等方時空における赤方偏移 z は

$$1 + z = \frac{\lambda'_0}{\lambda_1} \quad (208)$$

で与えられる。また、実際に観測される赤方偏移 z_{obs} は天体とともに運動する座標からみた波長を λ_1 、観測者における波長を λ_0 とすると

$$1 + z_{\text{obs}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (209)$$

で与えられる。実際の観測者が観測するものは「宇宙膨張」+「特異速度」による赤方偏移、基本観測者が観測するものは「宇宙膨張」による赤方偏移である。これらを組み合わせると「特異速度」による赤方偏移が得られるはずである。

ここで、天体の特異速度に対する視線方向成分を v_{\parallel} とし、観測者の特異速度に対する視線方向成分を $v_{0\parallel}$ とする。このとき、相対論的なドップラー効果^{*21}により

$$\lambda'_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{1 + v_{\parallel}}{1 - v_{\parallel}}}, \quad \lambda'_0 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + v_{0\parallel}}{1 - v_{0\parallel}}} \quad (210)$$

が成り立つ。ここで、天体の特異速度は典型的に 300 km/s 程度であり、光速に比べて十分小さい。したがって、 $v_{\parallel}, v_{0\parallel}$ の 1 次までの近似をとることとする。したがって、

$$\begin{aligned} 1 + z_{\text{obs}} &= \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \\ &= \frac{\lambda'_0}{\lambda'_1} \sqrt{\frac{1 - v_{0\parallel}}{1 + v_{0\parallel}}} \sqrt{\frac{1 - v_{\parallel}}{1 + v_{\parallel}}} \\ 1 + z_{\text{obs}} &\simeq (1 + z)(1 + v_{\parallel} - v_{0\parallel}) \end{aligned} \quad (211)$$

となる。この式を変形すると、

$$z_{\text{obs}} = z + (1 + z)(v_{\parallel} - v_{0\parallel}) = z + \frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{a} \quad (212)$$

となる。ここで、 $a = 1/(1 + z)$ は天体が電磁波を放射した時刻におけるスケールファクターである。

実際に観測される赤方偏移を用いて天体までの共動距離は

$$s = \int_0^{z_{\text{obs}}} \frac{dz}{H(z)} \quad (213)$$

^{*21} 付録を参照。

である。これを**赤方偏移空間の共動距離**と呼ぶ。一様等方宇宙における赤方偏移 z に対応する共動距離は

$$\chi = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (214)$$

と表すことにする。式 (212) を用いると、赤方偏移空間の共動距離 s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{z + \frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{a}} \frac{dz'}{H(z')} \\ &\simeq \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} + \frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{aH(z)} \\ &= \chi + \frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{aH(z)} \end{aligned} \quad (215)$$

となる。^{*22} 何らかの宇宙論のモデルを固定したときに $H(z)$ を理論的に与えることができる。その場合、 s は観測量となる。右辺の第一項は天体までの真の共動距離であり、第二項は特異速度による補正項である。観測では、これらの量を区別できない。

3.8.2 実空間と赤方偏移空間

視線方向は一般に一定ではない。しかし、遠方宇宙の観測では、視線方向を一定とみなしても十分に正確であることが多い。以下では、観測する領域内では視線方向が一定であると仮定する。この近似を**遠方観測者近似**という。

視線方向を z 軸方向とする。実空間の共動座標 \mathbf{x} と赤方偏移空間の座標 \mathbf{s} の関係を各成分毎に示すと式 (215) より

$$(s_1, s_2, s_3) = \left(x_1, x_2, x_3 + \frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{aH(z)} \right) \quad (216)$$

となる。

実空間から赤方偏移空間に変換しても天体の数は当然ながら保存される。つまり、実空間における数密度を $n_r(\mathbf{x})$ 、赤方偏移空間における数密度を $n_s(\mathbf{s})$ とすると

$$n_s(\mathbf{s})d^3s = n_r(\mathbf{x})d^3x \quad (217)$$

である。変換のヤコビアンを計算すると

$$\frac{\partial(s_1, s_2, s_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{aH} \right) \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{aH} \right) \quad (218)$$

^{*22} v の一次までの近似をとった。 $F(z) = \int_0^z dz' f(z')$

$F(z + \delta z) = F(z) + f(z)\delta z + \mathcal{O}(\delta z)^2$

となる。以下は簡略化のために $v_3 = v_{\parallel} - v_{0\parallel}$ とする。この v_3 は観測される天体の特異速度の視線方向成分である。したがって、赤方偏移空間における数密度は

$$n_s(\mathbf{s}) = \frac{n_r(\mathbf{x})}{1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v_3}{aH} \right)} \quad (219)$$

となる。

3.8.3 赤方偏移空間の線型パワースペクトル

数密度に関する変換式 (219) が得られたので、数密度ゆらぎに関する関係を求める。以下では、ゆらぎが小さい場合を考えて、線形近似をとる。(空間) 平均数密度について $\bar{n}_s = \bar{n}_r$ が成り立つ。したがって、数密度ゆらぎは

$$\begin{aligned} \delta_s(\mathbf{s}) &= \frac{n_s(\mathbf{s}) - \bar{n}_s}{\bar{n}_s} \\ &= \frac{1}{\bar{n}_r} \left(\frac{n_r(\mathbf{x})}{1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v_3}{aH} \right)} - \bar{n}_r \right) \\ &\simeq \frac{1}{\bar{n}_r} \left[n_r(\mathbf{x}) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v_3}{aH} \right) \right) - \bar{n}_r \right] \\ &\simeq \delta_r(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v_3}{aH} \right) \end{aligned} \quad (220)$$

となる。^{*23}

実空間の座標 \mathbf{x} と赤方偏移空間の座標 \mathbf{s} は異なるが、線形近似の範囲では

$$\delta_s(\mathbf{s}) = \delta_s(\mathbf{x} + \mathcal{O}(v)) \simeq \delta_s(\mathbf{x}) + \delta'(\mathbf{x}) \mathcal{O}(v) \simeq \delta_s(\mathbf{x}) \quad (221)$$

が成り立つ。また、考える領域が視線方向に対して大きすぎない場合は aH を一定とみなせる。^{*24} したがって、式 (220) は

$$\delta_s(\mathbf{x}) \simeq \delta_r(\mathbf{x}) - \frac{1}{aH} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (222)$$

となる。

式 (222) をフーリエ変換する。すると、

$$\begin{aligned} \delta_s(\mathbf{k}) &= \int d^3x \, e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[\delta_r(\mathbf{x}) - \frac{1}{aH} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] \\ &= \delta_r(\mathbf{k}) - \frac{ik_3}{aH} v_3(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (223)$$

^{*23} ゆらぎが小さいと速度の分散が小さい、つまり、速度勾配が小さいと解釈できる。したがって、 $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v_3}{aH} \right) \ll 1$ と近似できる。また、最後の近似は $n_r(\mathbf{x}) = \bar{n}_r(1 + \delta_r(\mathbf{x}))$ から得られる。

^{*24} $aH = \dot{a}$ は考えている範囲が大きいほど、値が変化する。物理的に考えると、宇宙は一様に膨張しているが遠い場所ほど離れる速度が大きい。したがって、非常に大きな範囲を考えると、膨張速度が場所によって異なることになる。

となる。 v_3 は観測される天体の特異速度 (線形速度場) \mathbf{v} の視線方向成分であった。この速度場 \mathbf{v} について、線形理論の速度場である。線形理論では、速度場の回転は宇宙膨張とともに減少し、回転がないとみなすことができた。このことから、線形成長率 f , スカラー場 ψ , 質量密度ゆらぎ δ ^{*25}を用いて

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla\psi}{aH}, \quad \nabla^2\psi = a^2H^2f\delta$$

が成り立つのであった。これらをフーリエ変換すると

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{aH}\psi(\mathbf{k}), \quad -k^2\psi(\mathbf{k}) = a^2H^2f\delta(\mathbf{k}) \quad (224)$$

となる。 ψ を消去すると

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = aHf\frac{i\mathbf{k}}{k^2}\delta(\mathbf{k}) \quad (225)$$

が得られる。したがって、式 (223) は

$$\begin{aligned} \delta_s(\mathbf{k}) &= \delta_r(\mathbf{k}) - \frac{ik_3}{aH} \left(aHf\frac{ik_3}{k^2}\delta(\mathbf{k}) \right) \\ &= \delta_r(\mathbf{k}) + f\frac{k_3^2}{k^2}\delta(\mathbf{k}) = \delta_r(\mathbf{k}) + f\mu_{\mathbf{k}}^2\delta(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (226)$$

となる。ただし、 $\mu_{\mathbf{k}} := k_3/k$ として視線方向に関する波数ベクトルの方向余弦である。

線形近似を用いているので、線形バイアス因子 b を用いて数密度ゆらぎが

$$\delta_r(\mathbf{k}) = b\delta(\mathbf{k}) \quad (227)$$

と表されるとする。このとき、式 (226) は

$$\delta_s(\mathbf{k}) = (b + f\mu_{\mathbf{k}}^2)\delta(\mathbf{k}) \quad (228)$$

となる。赤方偏移空間の線型パワースペクトル $P_s(k, \mu_{\mathbf{k}})$ は

$$\langle \delta_s(\mathbf{k})\delta_s(\mathbf{k}') \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_s(\mathbf{k}) \quad (229)$$

で定義される。この定義は遠方観測者近似を用いているため、このような形になる。赤方偏移空間では、等方性が成り立たないので、 P_s は \mathbf{k} のように方向にも依存する。また、 $\mu_{\mathbf{k}}$ にも依存する。

式 (228) を式 (229) に代入して、赤方偏移空間のパワースペクトルを求めると

$$P_s(k, \mu_{\mathbf{k}}) = (b + f\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 P(k) = b^2(1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 P(k) \quad (230)$$

となる。ここで、 $\beta := f/b$ とした。この式は実空間と赤方偏移空間のパワースペクトルを線形理論で結びつける式で、**カイザーの公式**と呼ばれている。この β は赤方偏移空間変形パラメータと呼ばれ、時間に依存する。バイアス因子がスケール依存する場合には、当然、 β もスケール依存する。

^{*25} ややこしいが、 δ は質量密度のゆらぎ。 δ_r が天体の数密度ゆらぎである。

3.8.4 赤方偏移空間の線型相関関数

赤方偏移空間における 2 点相関関数を

$$\xi_s(\mathbf{s} - \mathbf{s}') = \langle \delta_s(\mathbf{s}) \delta_s(\mathbf{s}') \rangle_c \quad (231)$$

と定義する。相関関数はパワースペクトルのフーリエ変換で与えられ、大規模構造の観測量である。実際、

$$\delta_s(\mathbf{s}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} \delta_s(\mathbf{k}) \quad (232)$$

とすると

$$\begin{aligned} \xi_s(\mathbf{s} - \mathbf{s}') &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}'} \langle \delta_s(\mathbf{k}) \delta_s(\mathbf{k}') \rangle_c \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}'} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_s(\mathbf{k}) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}')} P_s(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (233)$$

となる。

ここに線形近似における赤方偏移空間のパワースペクトルであるカイザーの公式 (230) を代入する。角度積分はレイリー展開公式^{*26}

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell j_\ell(kr) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^{m*}(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) Y_\ell^m(\theta_{\mathbf{r}}, \phi_{\mathbf{r}}) \quad (234)$$

を用いる。すると、

$$\begin{aligned} \xi_s(\mathbf{s}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} (b + f\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 P(k) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk P(k) \int d\Omega_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} (b + f\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 \end{aligned}$$

であるが、方位角成分の依存性は $Y_\ell^m(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) \propto e^{im\phi_{\mathbf{k}}}$ であるので

$$\int_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{k}} e^{im\phi_{\mathbf{k}}} = 2\pi \delta_{m0} \quad (235)$$

のように $m = 0$ のみが寄与する。 $m = 0$ の球面調和関数を明示的にかくと

$$Y_\ell^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) \quad (236)$$

^{*26} 付録参照。

である。したがって、

$$\begin{aligned}
\xi_s(s) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk P(k) \int_0^\pi d\theta_{\mathbf{k}} \sin \theta_{\mathbf{k}} 2\pi \sum_{\ell=0}^\infty i^\ell (2\ell+1) j_\ell(ks) P_\ell(\cos \theta_{\mathbf{k}}) P_\ell(\cos \theta_s) (b + f\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk P(k) \sum_{\ell=0}^\infty i^\ell (2\ell+1) j_\ell(ks) P_\ell(\mu_s) \int_{-1}^1 d\mu_{\mathbf{k}} P_\ell(\mu_{\mathbf{k}}) b^2 (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk P(k) \sum_{\ell=0}^\infty i^\ell (2\ell+1) j_\ell(ks) P_\ell(\mu_s) \int_0^1 d\mu_{\mathbf{k}} P_\ell(\mu_{\mathbf{k}}) b^2 (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 \quad (237)
\end{aligned}$$

となる。ルジャンドル多項式は具体的に

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad (238)
\end{aligned}$$

である。奇数次のルジャンドル多項式は偶関数である $\mu_{\mathbf{k}}^2$ との積分に寄与しない。したがって、 $\ell = 0, 2, 4$ の場合について積分を計算すると

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 d\mu_{\mathbf{k}} P_0(\mu_{\mathbf{k}}) b^2 (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 = b^2 \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right), \\
(2 \times 2 + 1) \int_0^1 d\mu_{\mathbf{k}} P_2(\mu_{\mathbf{k}}) b^2 (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 &= b^2 \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right), \\
(2 \times 4 + 1) \int_0^1 d\mu_{\mathbf{k}} P_4(\mu_{\mathbf{k}}) b^2 (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 &= \frac{8}{35} b^2 \beta^2 \quad (239)
\end{aligned}$$

となる。したがって、赤方偏移空間における 2 点相関関数は

$$\begin{aligned}
\xi_s(s) &= \sum_{\ell} \left(i^\ell \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} j_\ell(ks) P(k) \right) P_\ell(\mu_s) \times (2\ell+1) \int_0^1 d\mu_{\mathbf{k}} P_\ell(\mu_{\mathbf{k}}) b^2 (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 \\
&= b^2 \left[\left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) \xi_0(s) P_0(\mu_s) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right) \xi_2(s) P_2(\mu_s) + \frac{8}{35} \beta^2 \xi_4(s) P_4(\mu_s) \right] \quad (240)
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\xi_\ell(s) = i^\ell \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} j_\ell(ks) P(k) \quad (241)$$

とした。この式は式 (230) と同様に、赤方偏移空間における 2 点相関関数を線形理論で結びつける式である。赤方偏移サーベイによる大規模構造の解析で、最も基本的な式として用いられる。

3.9 大規模構造とバリオン音響振動

宇宙の大規模構造では、ダークエネルギーの性質を観測的に制限することができる。その手法を述べる。

大規模構造では直接共動距離を測定することはできない。赤方偏移サーベイで得られる天体の位置に関する観測量は「奥行き方向を示す赤方偏移」と「天球上の角度座標」である。

そこで、任意の2点にある天体を考える。それらの赤方偏移の差を Δz 、天球上の角度座標の差を $\Delta\theta$ とする。このとき、 $\Delta z \ll 1$ としてこれら2つの点におけるハッブルパラメータの値 H の変化を無視する。すると視線方向への共動座標の差 x_{\parallel} は

$$x_{\parallel} = \frac{\Delta z}{H(z)} \quad (242)$$

で与えられる。^{*27} また、視線に垂直な方向への相対距離 x_{\perp} は

$$x_{\perp} = d_A(z)\Delta\theta \quad (243)$$

で与えられる。^{*28}

宇宙は等方的であるので、ゆらぎの統計量（例えば2点相関関数やパワースペクトル）は視線方向や垂直方向には依存しない。観測から得られるのは、この Δz と $\Delta\theta$ である。また、何らかの宇宙論モデルを仮定すると、 $H(z)$ と $d_A(z)$ を理論的に計算できる。つまり、上で与えた式 (242) と (243) は宇宙論モデルに依存する。式 (242) と (243) から得られる統計量が等方的になるような宇宙論モデルが正しいモデルであると考えられる。そのようにして、モデルのパラメータを制限することができる。

例えば、仮想的に共動座標系で天体が球状に配置されている場合を考える。このとき、共動座標系では天体の分布は等方的である。観測から Δz と $\Delta\theta$ を測定し、宇宙論モデルを仮定し式 (242)

^{*27} 共動座標 x は

$$x = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^1 \frac{da}{a^2 H} = \int_0^z \frac{dz'}{H}$$

で定義される。

^{*28} 角経距離 d_A は見かけの角度 $\Delta\theta$ と実際の大きさ l を用いて

$$d_A = \frac{l}{\Delta\theta}$$

で定義される。 l は動径座標 r を用いて

$$l = \int_0^{\Delta\theta} ar d\theta = ar\Delta\theta = \frac{r\Delta\theta}{1+z}$$

と計算できるので、角経距離は赤方偏移を用いて

$$d_A(z) = \frac{r(z)}{1+z} = \frac{1}{1+z} S_K \left(\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right)$$

と表される。 S_K は曲率 K に依存する関数であり動径座標 r と共動座標 x の関係を表す。

と (243) を用いて共動座標系での天体の位置を計算する。もし、仮定した宇宙論モデルが正しい場合、天体の分布も等方的になるはずである。しかし、仮定した宇宙論モデルが間違っている場合、共動座標系での天体の分布は図 7 のように見かけが変形する。この歪み具合から、仮定した宇宙論モデルのパラメータが正しいかどうかを調べることができる。^{*29} この手法を**アルコック・パッサー効果 (Alcock-Paczyński effect)** という。

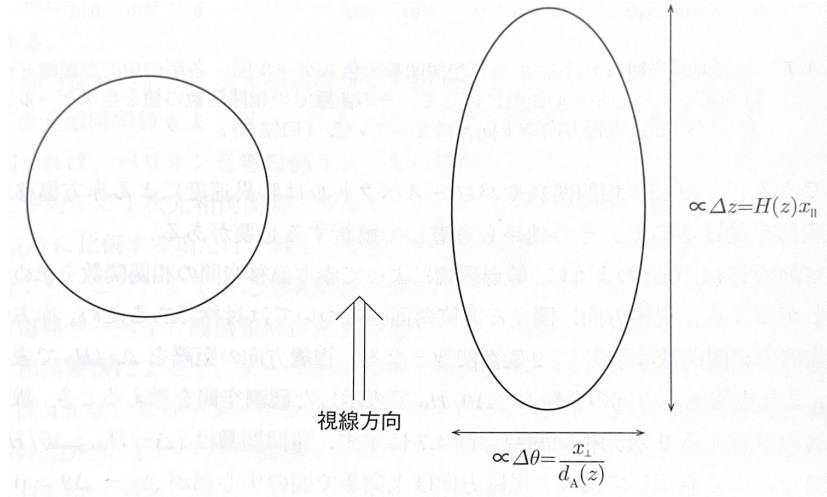


図 7 正しい宇宙論モデルを仮定しないと、球状に見えるはずのものが歪んで見える。この歪み具合から正しい宇宙論モデルを制限することができる。

一般のダークエネルギーを含む場合、ハッブルパラメータの赤方偏移依存性は

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{K0}(1+z)^2 + \Omega_{DE0} \exp\left(3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz'\right)} \quad (244)$$

で与えられる。ダークエネルギーの状態方程式パラメータ w に $H(z)$ は依存する。また、 $d_A(z)$ は $H(z)$ に依存していたので、結局 $d_A(z)$ も w に依存する。したがって、この歪みの効果はダークエネルギーの性質に強く依存することがわかる。相関関数やパワースペクトルに対しても実空間では、回転対称性を持つので、共動座標系では球対称な関数になる。

■バリオン音響リング

^{*29} 赤方偏移空間の場合、天体の特異速度の効果が入っているため、その効果も一緒に考える必要がある。

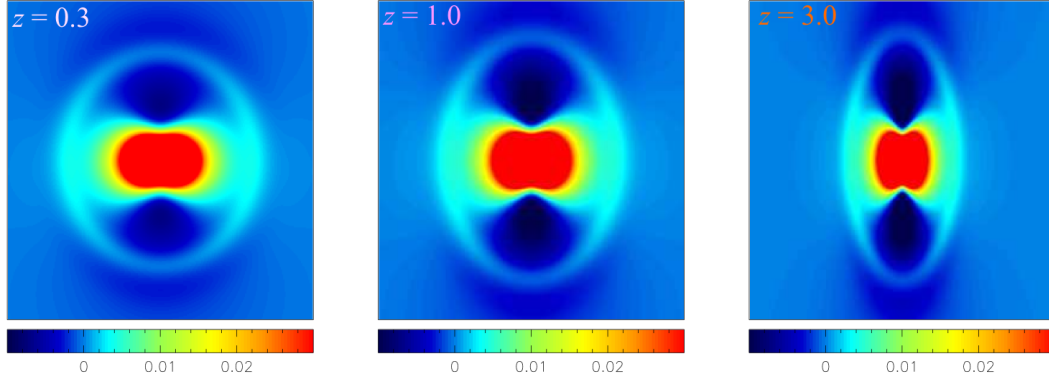


図 8 赤方偏移空間における 2 次元相関関数の色スケール図。中心が距離ゼロに対応し、中心からの距離に応じて、その距離での相関関数の値を色スケールで表している。視線方向は上向きに取っている。

赤方偏移空間における相関関数は前節の式 (240) で与えられる。

$$\xi_s(\mathbf{s}) = b^2 \left[\left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2 \right) \xi_0(s) P_0(\mu_s) + \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2 \right) \xi_2(s) P_2(\mu_s) + \frac{8}{35}\beta^2 \xi_4(s) P_4(\mu_s) \right]$$

この式は視線方向に対する方位角回転に対して対称である。したがって、実質的に 2 変数関数になっている。視線方向の距離を $\Delta z/H_0$ 、視線に垂直な方向の距離を $z\Delta\theta/H_0$ とした観測空間を考えると、理論的に予言される **2 次元相関関数**を図 8 に示す。相関関数は $(\Delta z/H_0, z\Delta\theta/H_0)$ の関数として表示されている。相関関数の値は色スケールで表されている。また、中心の赤方偏移は左から $z = 0.3, 1.0, 3.0$ である。

相関関数の値は直感的にわかるように、距離が近いほど大きい傾向を持つ。つまり、中心から離れるほどに値が小さくなっていく。図を見ると、視線方向に平行な方向は速く値が小さくなり、垂直な方向はゆっくり値が小さくなっていることがわかる。これは、赤方偏移空間におけるカイザー効果の影響である。また、中心から離れたところにリング状に相関関数の値が大きくなる部分がある。これはバリオン音響振動の痕跡である。この観測空間における楕円形は、実空間において脱結合時の音響ホライズンを半径とした円に対応する。図 3 で示したように、フーリエ空間のパワースペクトルにおける BAO の痕跡はいくつものスケールにわたって現れる。しかし、相関関数の場合、BAO の痕跡は一つのスケールに集約され、特徴が顕著に見られる。この円環状の特徴を**バリオン音響リング**と呼ぶ。

上では、天体の位置が球状に分布している場合を考えた。実際には天体は球状に分布しているとは限らない。しかし、これと同じ役割を果たしているものがバリオン音響リングである。実空間では、バリオン音響リングは完全な円である。したがって、できるだけ多くの赤方偏移においてスケールが $100h^{-1} Mpc$ 付近の相関関数の形を正確に測定し、楕円度を調べることで、宇宙論パラメータ、特にダークエネルギーの性質を制限することができる。

■バリオン音響ピーク

2次元相関関数を直接調べる代わりに、角度方向に平均した1次元相関関数もよく用いられる。できるだけ現実に近い宇宙論パラメータを用いると、バリオン音響リングは近似的に等方になる。バリオン音響リングを角度方向に平均して1次元相関関数にすると、式(240)から

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_s(s) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu_s \xi_s(s) \\ &= b^2 \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2 \right) \xi_0(s)\end{aligned}\quad (245)$$

となり、単極成分のみが残る。このように角度平均を行うと、誤差を減らすことができる。赤方偏移サーベイで観測領域が狭い場合、2次元相関関数を正確に測定することは難しい。そのような場合、1次元相関関数を測定する方が現実的である。

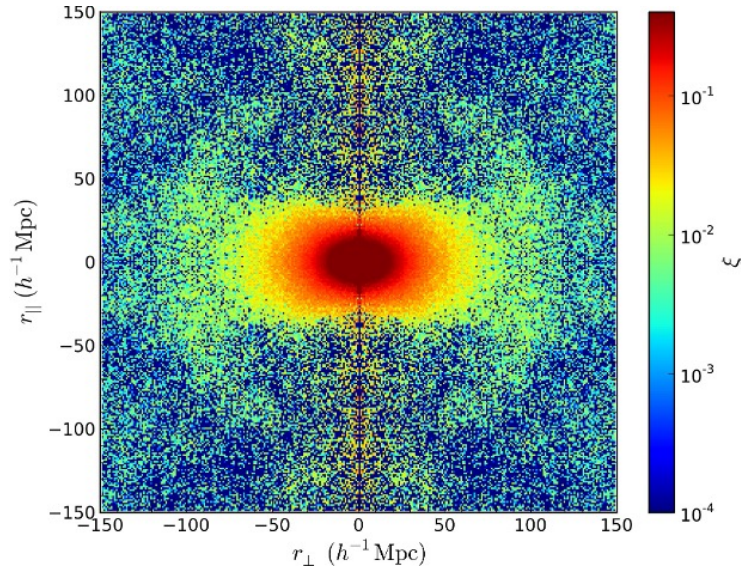


図9 SDSSによって測定された、2次元相関関数。 $z = 0.57$ 。

図9にSDSSによって測定された2次元相関関数を示す。中心から離れたところにバリオン音響リングが見えることがわかる。

さらに、図10にSDSSによって測定された1次元相関関数を示す。誤差棒付きの記号が実際のデータから求めた値で、波線が最もデータに適合する理論モデルである。大スケールでは、データと標準的な理論では系統的に多少ずれているが、おおむね良い適合を示している。^{*30} 1次元相関関数はスケールが小さいところから大きいところまで滑らかに減少していることがわかる。しかし、

^{*30} この系統誤差は現在、はっきりと解明されていない。

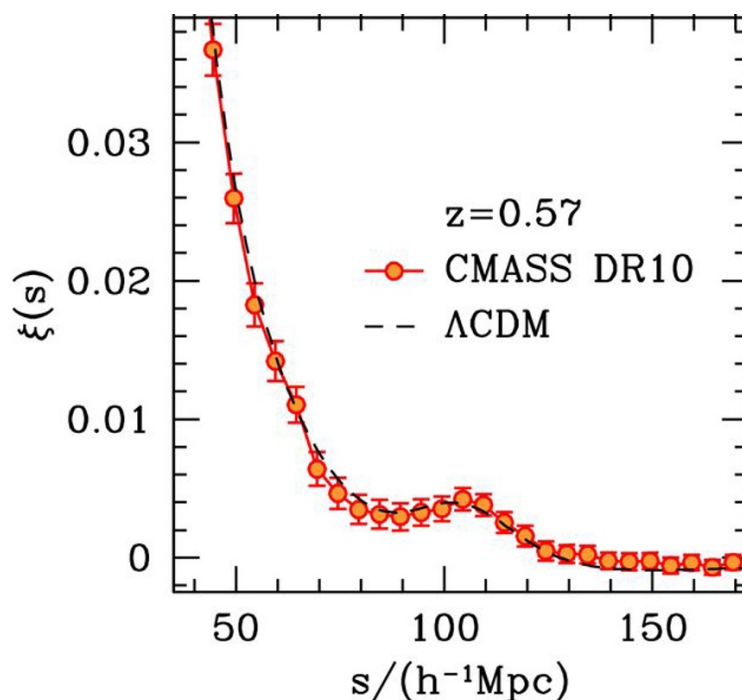


図 10 SDSS によって測定された、1 次元相関関数。z = 0.57。

以前求めたバリオン音響スケールである $107h^{-1} \text{ Mpc}$ 付近でピークが現れていることがわかる。これは、二次元のバリオン音響リングの特徴が一次元相関関数に反映されたものである。これをバリオン音響ピークと呼ぶ。

3.10 ハローの形成と質量関数

バイアス機構の一つであるハロー・バイアスを述べる。このバイアス機構はハロー・モデルという現象論的な天体形成の描像に基づいたものである。

ここでのハローは、ダークマターが重力的に集まっている場所を指すダークマター・ハローを意味することにする。銀河などの観測可能な天体はおおむねハローの中に形成されと考えられている。大スケールでは、ハローの分布と天体の分布はほぼ同じであると考えられる。^{*31}

ハローの数密度を考える。線型理論の密度ゆらぎの値からハローの形成を現象論的に見積もる。前の節で非線形領域を考える際に、良い対称性を持った球対称密度ゆらぎを考えた。このとき、線型理論の密度ゆらぎが $\delta_c \simeq 1.69$ を超えたときに非線形ゆらぎが発散することがわかった。(図 2 参照。) 実際には線型ゆらぎが δ_c となる時点で、その質量に対応する天体が形成されと考える。この性質を球対称だけでなく、一般の密度ゆらぎに拡張する。

^{*31} ハローよりも小さなスケールでは、ハローの内部構造が重要になるので、両者は異なる。この内部構造をモデル化する方法も提案されている。一般にハローモデルといえば、この内部構造も含めたモデルを指すことが多い。今回は、内部構造までは立ち入らずに大スケールに着目する。

ある質量素片の初期位置を考える。これを**ラグランジュ座標**という。初期位置における線型密度ゆらぎの値が δ_c を超えているとき、その質量素片がハローを構成する質量の一部として取り込まれていると考える。ラグランジュ座標の半径 R の球内を考える。その R 以内における密度ゆらぎの平均値が δ_c を超えているとき、 R 内の質量 M よりも大きな質量を持つハローに取り込まれていると考える。このとき、

$$M = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}_{0m}R^3 \quad (246)$$

が成り立つ。ただし、 $\bar{\rho}_{0m}$ は現在の宇宙の平均物質密度である。平均密度は共動座標系を用いているので、時間によらず一定である。物質成分の密度パラメータ Ω_{m0} を用いると、

$$R = \left[\frac{M}{1.163 \times 10^{12} h^{-1} M_{\odot} \Omega_{m0}} \right]^{1/3} h^{-1} \text{Mpc} \quad (247)$$

と書ける。

ラグランジュ座標 \mathbf{q} における線型密度ゆらぎ $\delta_L(\mathbf{q})$ を考える。質量 M に対応する半径 R で平均化したものを

$$\delta_M(\mathbf{q}) = \int d^3q' W_R(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \delta_L(\mathbf{q}') \quad (248)$$

とする。ここで、 $W_R(x)$ はウィンドウ関数である。例えば、

$$W_R(x) = \frac{3}{4\pi R^3} \Theta(R - x) \quad (249)$$

とすると、半径 R の球内で一様に平均化することになる。ただし、 $\Theta(x)$ はヘヴィサイドの階段関数である。この形のウィンドウ関数は**トップハット型ウィンドウ関数**と呼ばれる。

トップハット型ウィンドウ関数は球対称崩壊する場合に自然に考えられる。しかし、実際の密度ゆらぎは球対称ではないので、階段関数から生じる不連続性は不自然である。そこで、ガウス型ウィンドウ関数

$$W_{R_G}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R_G^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_G^2}\right) \quad (250)$$

を用いると端点はゆるやかな関数形になる。ただし、ガウス型ウィンドウ関数の半径 R_G と質量 M の関係は自明ではない。決定方法の一つとして、原点において 1 に規格化したウィンドウ関数^{*32}を使って、密度 $\bar{\rho}_{m0}$ を空間積分した値が M となるように R_G を決定する方法がある。つまり、

$$M = \int d^3x \bar{\rho}_{m0} W_{R_G}(x) = \bar{\rho}_{m0} \int d^3x \exp\left(-\frac{x^2}{2R_G^2}\right) = \bar{\rho}_{m0} (2\pi)^{3/2} R_G^3 \quad (251)$$

^{*32} ウィンドウ関数の規格化には任意性がある。上のウィンドウ関数は積分したとき 1 になるように規格化してある。今は、原点で 1 とするので指数関数にかかっている係数は 1 となる。

とする。式 (246),(247) と比較すると、

$$R_G = \left(\frac{2}{9\pi} \right)^{1/6} R \simeq 0.6431 R \quad (252)$$

または、

$$R_G = \left[\frac{M}{4.371 \times 10^{12} h^{-1} M_\odot \Omega_{m0}} \right]^{1/3} h^{-1} \text{Mpc} \quad (253)$$

と書ける。ただし、これらはあくまでおおまかな目安である。

トップハット型ウィンドウ関数を 3 次元フーリエ変換すると

$$\begin{aligned} W(kR) &= \int d^3x \, e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} W_R(x) \\ &= \int_0^R x^2 dx \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, e^{-ikx \cos \theta} \frac{3}{4\pi R^3} \\ &= 2\pi \int_0^R x^2 dx \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \, e^{-ikx \cos \theta} \frac{3}{4\pi R^3} \\ &= 2\pi \int_0^R x^2 dx \frac{3}{4\pi R^3} \left(\frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{-ikx} \right) \\ &= 4\pi \int_0^R x^2 dx \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\sin(kx)}{kx} = \frac{3}{R^3} \int_0^R x^2 dx \frac{\sin(kx)}{kx} \\ &= \frac{3}{(kR)^3} \int_0^{kR} x dx \sin x = \frac{3}{(kR)^3} [-x \cos x + \sin x]_0^{kR} \\ &= \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)] \end{aligned}$$

となる。ベッセル関数 $j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$ を用いると、

$$W(kR) = \frac{3j_1(kR)}{kR} \quad (254)$$

となる。一方、ガウス型ウィンドウ関数のフーリエ変換は

$$W(kR_G) = \exp \left(-\frac{k^2 R_G^2}{2} \right) \quad (255)$$

である。また、式 (248) は

$$\begin{aligned} \delta_M(\mathbf{q}) &= \int d^3q' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')} W(kR) \delta_L(\mathbf{q}') \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} W(kR) \delta_L(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (256)$$

のようにウィンドウ関数の具体的な形によらずにフーリエ空間で次のように書ける。一般に、実空間での畳み込みはフーリエ空間での積に対応する。さらに、質量スケール M で平均化した密度ゆ

らぎの分散 $\sigma_M^2 = \langle \delta_M(\mathbf{q})^2 \rangle$ は

$$\begin{aligned}
\sigma_M^2 &= \langle \delta_M(\mathbf{q}) \delta_M(\mathbf{q}) \rangle \\
&= \left\langle \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} W(kR) \delta_L(\mathbf{k}) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{q}} W(k'R) \delta_L(\mathbf{k}') \right\rangle \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{q}} W(kR) W(k'R) \langle \delta_L(\mathbf{k}) \delta_L(\mathbf{k}') \rangle \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{q}} W(kR) W(k'R) (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_L(k) \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} W^2(kR) P_L(k)
\end{aligned} \tag{257}$$

が得られる。

初期非ガウス性が無視できる場合、線形密度ゆらぎは多変数ガウス分布に従う。一般に、ガウス分布に従う変数を線形に重ね合わせたものもガウス分布に従う。これは、線形重ね合わせによって高次のキュムラントが生成されないためである。したがって、 δ_M もガウス分布に従う。その一変数分布関数は

$$P(\delta_M) d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right) d\delta_M \tag{258}$$

である。質量スケール M で平均化した線形密度ゆらぎ δ_M の値が臨界値 δ_c を超える確率は

$$P(\delta_M, \delta_c) = \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta_M P(\delta_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_c/\sigma_M}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \tag{259}$$

で与えられる。

ある質量スケール M で平均化された線形密度ゆらぎ δ_M が臨界値 δ_c を超えているならば、そのラグランジュ座標 \mathbf{q} にある質量素片は質量 M 以上のハローに取り込まれていると考えられる。これより、質量 M 以上のハローに取り込まれている質量の割合は $P(\delta_M, \delta_c)$ で与えられると考える。しかし、これは過小評価である。

質量スケール M で平均化したときに $\delta_M > \delta_c$ であっても、より小さな質量スケール $M' (< M)$ で平均化したときに $\delta_{M'} < \delta_c$ となる場合がある。この場合、 $\delta_{M'} < \delta_c$ となっていたとしても、それよりも大きな質量スケール M 以上のハローに取り込まれていると考えるのが妥当である。したがって、質量 M 以上のハローに取り込まれている質量の割合は $P(\delta_M, \delta_c)$ よりも大きくなる。

この過小評価を補正するために、質量 M 以上のハローに取り込まれている質量の割合を $2P(\delta_M, \delta_c)$ と考える。これは、線形密度ゆらぎが際限なく大きくなるという極限を考えると妥当である。この極限では $\delta_c/\sigma_M \rightarrow 0$ となるので、 $\sigma_M \rightarrow \infty$ を考えれば良い。このとき、 $P(\delta_M, \delta_c) \rightarrow 1/2$ となる。しかし、物理的にはこの極限で全ての質量素片は何らかのハローに取り込まれているはずである。つまり、質量 M 以上のハローに取り込まれている質量の割合は 1 に近づくはずである。したがって、質量 M 以上のハローに取り込まれている質量の割合を $2P(\delta_M, \delta_c)$ と考えると辻褄は合う。

また、質量スケール M の変化に対して δ_M の値がランダム・ウォークをするのならば、2 倍の因子は正当化される。例えば、図 11 のように δ_M がランダム・ウォークをしているとする。このとき、 δ_M は σ_M の関数としてプロットされている。この図では、左から右にいくにつれて対応する質量スケールが小さくなっていく。図のガウス型の曲線は、ある質量スケール M を固定したときの δ_M の頻度分布を表している。濃いグレーの部分には、一度でも臨界値 δ_c を上回ったことのある割合を表している。

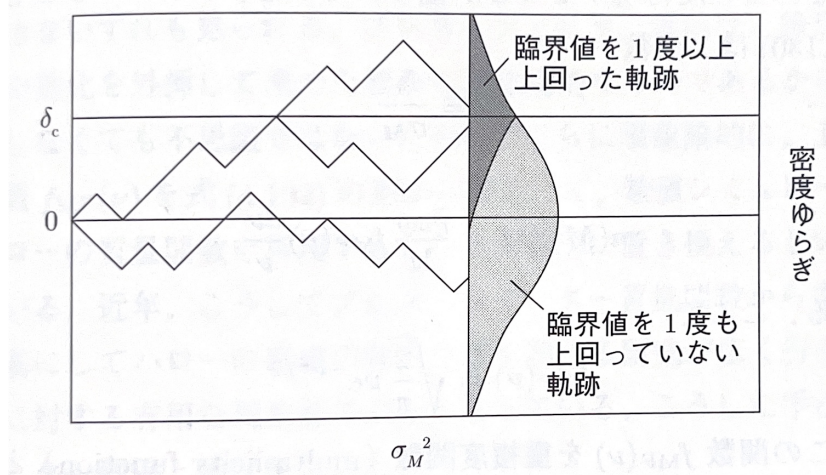


図 11 δ_M を σ_M の関数としてプロットした図。 δ_M はランダム・ウォークをしていると仮定する。一度でも臨界値 δ_c を上回ったことのある割合は、ある質量スケールを考えたときに臨界値を超えている割合の 2 倍になる。

実際には、 δ_M はランダム・ウォークをするわけではないが、近似的に成り立つ。すると、質量 M 以上のハローに取り込まれている物質の割合は $2P(\delta_M, \delta_c)$ と考えられる。ここで質量が M から $M + dM$ のハローの数密度を $n(M)dM$ とする。 $n(M)$ をハローの質量関数と呼ぶ。このとき、ハローに取り込まれている物質の割合は

$$n(M)M dM = 2\bar{\rho}_{m0}[P(M, \delta_c) - P(M + dM, \delta_c)] \quad (260)$$

と書ける。したがって、ハローの質量関数は

$$n(M) = -\frac{2\bar{\rho}_{m0}}{M} \frac{\partial}{\partial M} P(M, \delta_c) \quad (261)$$

で与えられる。

式 (259) と式 (261) を用いると、ハローの質量関数は

$$\begin{aligned} n(M) &= -\frac{2\bar{\rho}_{m0}}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial M} \left[\int_{\delta_c/\sigma_M}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}_{m0}}{M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}\right) \left(-\frac{\delta_c}{\sigma_M^2} \frac{\partial \sigma_M}{\partial M}\right) \end{aligned}$$

であるが、

$$\frac{\partial \sigma_M}{\partial M} = \frac{\sigma_M}{M} \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M}$$

となるので

$$n(M) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}_{m0}}{M^2} \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} \frac{\delta_c}{\sigma_M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}\right) \quad (262)$$

が得られる。これを**プレス・シュヒター質量関数**と呼ぶ。また、このようなハローの形成量を求める理論手法を**プレス・シュヒター理論**と呼ぶ。

プレス・シュヒター理論は非常に単純なモデルであるが、数値シミュレーションの結果と比較してもおおむね良い適合を示す。

$$\nu := \frac{\delta_c}{\sigma_M} \quad (263)$$

として

$$n(M)dM = \frac{\bar{\rho}_{m0}}{M} f_{\text{MF}}(\nu) \frac{d\nu}{\nu} \quad (264)$$

と変形できる。ここで、

$$f_{\text{MF}}(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \quad (265)$$

である。この関数 $f_{\text{MF}}(\nu)$ を**重複度関数**と呼ぶ。

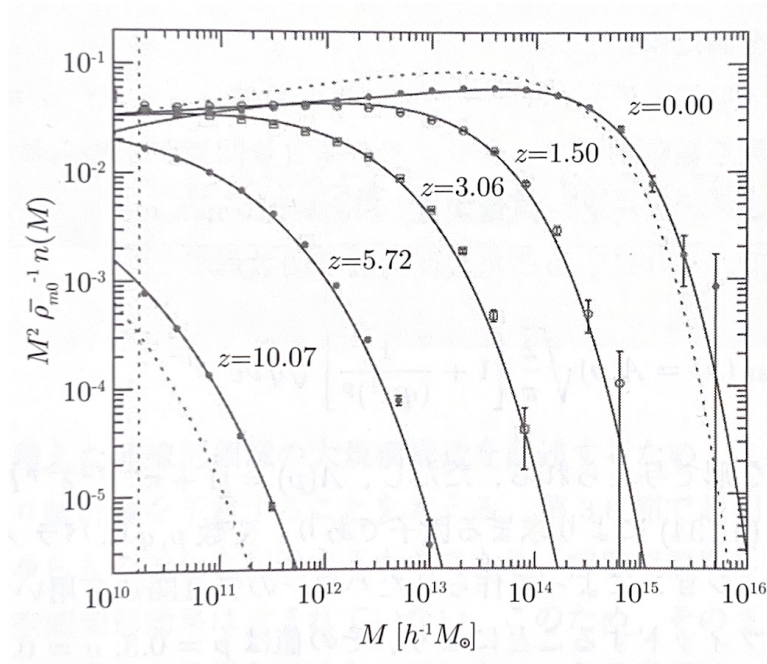


図 12 プレス・シュヒター質量関数と数値シミュレーションの結果、さらに、シェス・トーマン質量関数の比較。

図 12 にプレス・シュヒター質量関数と数値シミュレーションの結果を比較したものを示す。現象論的なモデルであるので、無視できない誤差があるが、おおむね良い適合を示していることがわかる。

さらに、式 (264) から出発して、重複度関数 $f_{\text{MF}}(\nu)$ を数値シミュレーションに合わせて調整する手法が考えられている。このような手法は**拡張プレス・シュヒター理論**と呼ばれている。

重複度関数が ν のみの関数であり、質量関数の変化も σ_M の変化だけを通じて表すことができる場合、その質量関数は**普遍質量関数** (universal mass function) であると言う。線形密度ゆらぎが十分大きい極限で、すべての質量素片が何らかのハローに取り込まれていると考えられるので、普遍質量関数は

$$\int_0^\infty f_{\text{MF}}(\nu) \frac{d\nu}{\nu} = 1 \quad (266)$$

を満たす必要がある。

標準的な CDM モデルの数値シミュレーションに基づいてハロー質量関数を数値的にフィッティングし普遍質量関数が求められている。この典型的なものが**シェス・トーメン質量関数**と呼ばれている。シェス・トーメン質量関数の重複度関数は

$$f_{\text{MF}}(\nu) = A(p) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{(q\nu^2)^p} \right) \sqrt{q\nu} \exp\left(-\frac{q\nu^2}{2}\right) \quad (267)$$

で与えられる。ただし、

$$A(p) = \left[1 + 2^{-p} \pi^{-1/2} \Gamma(1/2 - p) \right]^{-1} \quad (268)$$

は規格化条件 (266) により求まる定数である。また、 $p = 0.3, q = 0.707$ とすると数値シミュレーションの結果に良く適合する。これは図 12 の実線で示されている。

4 大規模構造と非線形摂動論

線形理論を超えた非線形領域の大規模構造を記述するため、非線形摂動論の範囲で予言される統計量を考える。

4.1 構造形成における非線形性

松原氏の激アツ宇宙観が炸裂する [4] を読めば、大規模構造に対するモチベーションの爆上げ間違いない。

4.2 標準摂動論による非線形パワースペクトル

フーリエ空間における密度ゆらぎの摂動展開は式 (100),(101) で与えられる。つまり、

$$\delta(\mathbf{k}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \quad (269)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdots \int \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}) \\ \times F_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n) \quad (270)$$

である。ただし、 F_n は引数について対称化してあるものとする。この摂動展開を用いて、非線形パワースペクトルを求める。まず、パワースペクトルは2点キュムラントから定義されていた。したがって、2点キュムラントを摂動展開に基づいて計算する。

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{(m)}(\mathbf{k}') \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \delta^{(m)}(\mathbf{k}') \rangle \\ = \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c \\ + \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle_c \\ + \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c \\ + \cdots \quad (271)$$

が得られる。第1項は最低次の寄与になっていて $\mathcal{O}(\delta_L^2)$ である。第2,3項 (赤色の項) は $\mathcal{O}(\delta_L^3)$ 、第4-6項 (青色の項) は $\mathcal{O}(\delta_L^4)$ である。

最低次の項は

$$\langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle = \langle \delta_L(\mathbf{k}) \delta_L(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_L(k) \quad (272)$$

である。次に現れる項は

$$\langle \delta^{(2)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c = \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \langle [\delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}_2)] \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c \quad (273)$$

となる。ここで、 $\langle [\delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}_2)] \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c$ は3次のキュムラントではなく、2次のキュムラントである。以下でも、カギ括弧で囲まれた部分は1つの変数とみなすことにする。また、キュムラントは $\langle \delta_L(\mathbf{k}) \rangle_c = 0$ であることを用いると、

$$\langle [\delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}_2)] \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c \\ = \langle \delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}_2) \delta_L(\mathbf{k}') \rangle - \langle \delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}_2) \rangle_c \langle \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c \\ = \langle \delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}_2) \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta_L(\mathbf{k}_1) \rangle_c \langle \delta_L(\mathbf{k}_2) \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c \\ + \langle \delta_L(\mathbf{k}_2) \rangle_c \langle \delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta_L(\mathbf{k}_1) \rangle_c \langle \delta_L(\mathbf{k}_2) \rangle_c \langle \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c \\ = \langle \delta_L(\mathbf{k}_1) \delta_L(\mathbf{k}_2) \delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c \quad (274)$$

と計算できる。さらに、バイスペクトル $B_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ を用いると、

$$\langle [\delta_L(\mathbf{k}_1)\delta_L(\mathbf{k}_2)]\delta_L(\mathbf{k}') \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}') B_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}') \quad (275)$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c &= \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ &\quad \times (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}') B_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}') \\ &= \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) B_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}') (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) B_L(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}, -\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (276)$$

である。この式は $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}'$ で対称であり、空間反転不変性が成り立つとバイスペクトルは $B_L(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}, -\mathbf{k}) = B_L(-\mathbf{p}, -\mathbf{k} + \mathbf{p}, \mathbf{k})$ となる。したがって、

$$\langle \delta^{(2)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c = \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle_c$$

が成り立つ。

高次のキュムラントについても同様の計算ができる。すると、

$$\begin{aligned} P(k) &= P_L(k) \\ &+ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) B_L(-\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) \\ &+ P_L(k) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}) P_L(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p})]^2 P_L(p) P_L(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|) \\ &+ \frac{1}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} F_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}') T_L(-\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) F_2(\mathbf{p}', \mathbf{k} - \mathbf{p}') T_L(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}, -\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (277)$$

となる。

4.3 摂動展開の図形的表現

式 (277) を求め方は上で述べた通りであるが、その計算は高次になる程に煩雑になる。以下では、代数的な計算を図形的に表現する方法を述べる。

1. 頂点で波数ベクトルは保存する。

2. 矢印の向きで正負が反対になる。
3. パワースペクトル, ポリスペクトルは \otimes で表現する。例えば、

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{k} \quad \otimes \quad \overrightarrow{-k} \end{array} \Leftrightarrow P_L(k)$$

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{k_1} \\ \nearrow \quad \otimes \quad \nwarrow k_3 \\ \searrow k_2 \end{array} \Leftrightarrow P_L^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

と表現する。

4. 積分核は \triangleleft で表現する。例えば、

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{k} \\ \triangleleft \begin{array}{l} \nearrow k_1 \\ \nearrow k_2 \\ \searrow k_n \end{array} \end{array} \Leftrightarrow F_n(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

$$(k = k_1 + k_2 + \dots + k_n)$$

と表現する。

5. ループは不定の波数ベクトルについて積分する。
6. 同等な部分を n 個含む場合は、全体を $n!$ で割る。

以上のルールに則って、二つの積分核をパワースペクトルを使って結合する。より複雑な繋げ方をすると、より高次の寄与を表現できる。式 (277) の各項を図形的に表現すると、次のようになる。

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A horizontal line with two parallel lines at each end. From left to right: a double arrow pointing right labeled k , a grey triangle pointing left, a single arrow pointing right labeled k , a circle with a cross, a single arrow pointing right labeled k , a grey triangle pointing right, and a double arrow pointing right labeled k .} \end{array} \Leftrightarrow P_L(k)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 2: Similar to Diagram 1, but after the first circle with a cross, there is a loop. The loop has two vertices (circles with crosses). The top arc is labeled p and the bottom arc is labeled $k-p$. The loop ends at a grey triangle pointing right, followed by a double arrow pointing right labeled k .} \end{array} \Leftrightarrow \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) B_L(-\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p})$$

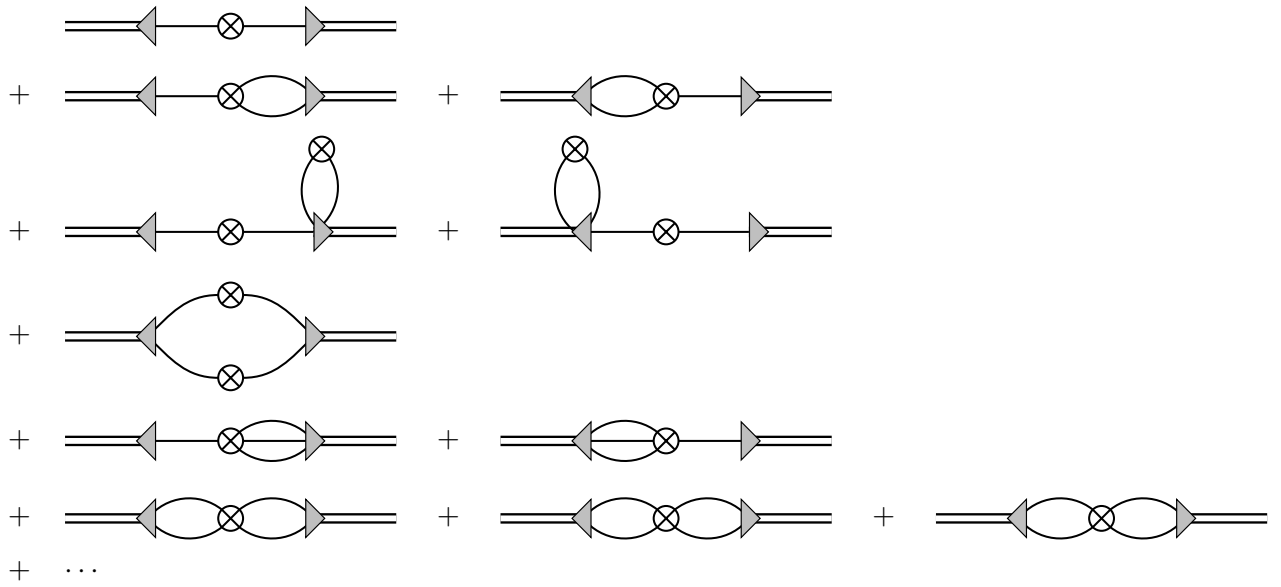
$$\begin{array}{c} \text{Diagram 3: Similar to Diagram 1, but after the first circle with a cross, there is a loop. The loop has two vertices (circles with crosses). The top arc is labeled p and the bottom arc is labeled p . The loop ends at a grey triangle pointing right, followed by a double arrow pointing right labeled k .} \end{array} \Leftrightarrow \frac{1}{2!} P_L(k) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}) P_L(p)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 4: Similar to Diagram 1, but after the first circle with a cross, there is a loop. The loop has two vertices (circles with crosses). The top arc is labeled p and the bottom arc is labeled $k-p$. The loop ends at a grey triangle pointing right, followed by a double arrow pointing right labeled k .} \end{array} \Leftrightarrow \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p})]^2 P_L(p) P_L(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|)$$

つまり、

$$\begin{aligned} P(k) &= P_L(k) \\ &+ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) B_L(-\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) \\ &+ P_L(k) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}) P_L(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p})]^2 P_L(p) P_L(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|) \\ &+ \frac{1}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} F_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}') T_L(-\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) F_2(\mathbf{p}', \mathbf{k} - \mathbf{p}') T_L(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}, -\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

は、次の図形的表現で書ける。



4.4 摂動論におけるバイアス効果

今までに述べた標準摂動論の枠組みでは、密度ゆらぎについて議論してきた。密度ゆらぎは重力レンズ効果を用いて間接的に観測することは可能であるが、直接的に観測することはできない。そこで、天体の数密度は密度ゆらぎよりも直接的に観測可能な量であるため、天体の数密度ゆらぎについて議論する。ここでは、天体の数密度ゆらぎが線形密度ゆらぎでどのように表されるかを考える。

密度ゆらぎから天体の数密度ゆらぎに変換する際に考慮すべきものは、「バイアス効果」と「赤方偏移空間変形効果」である。

5 一般相対論による線形摂動論

一般相対論の摂動に基づいた線形摂動論について詳しく述べる。この理論は上で述べたようなニュートン力学に基づいた線形理論の一般的な理論である。つまり、この理論は超ホライズンスケールからサブホライズンスケールまでを一貫して扱うことができる。

5.1 アインシュタイン方程式の線形近似

5.1.1 時空間の線形摂動

計量 $g_{\mu\nu}$ を一様等方成分 $\bar{g}_{\mu\nu}$ と非一様な摂動成分 $\eta_{\mu\nu}$ に分解する。つまり、

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}, \quad |\eta_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (278)$$

とする。このとき、 $\bar{g}_{\mu\nu}$ を背景時空、 $\eta_{\mu\nu}$ を摂動時空と呼ぶ。ここで、 $\bar{g}_{\mu\nu}$ はフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー計量である。この章では、共形時間 τ

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (279)$$

を使う。つまり、ロバートソン・ウォーカー計量は

$$ds^2 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j)$$

と書ける。

アインシュタイン方程式に式 (278) を代入して、線形近似をとれば $\eta_{\mu\nu}$ に関する式が得られると思われる。しかし、それはアインシュタイン方程式の一般解を導くようなものであり、計量を分離した意味がない。この分離は $|\eta_{\mu\nu}|$ が小さい場合にのみ有効である。そこで、 $\eta_{\mu\nu}$ の 2 次以上の項を無視する線形近似をとる。

摂動成分 $\eta_{\mu\nu}$ を

$$h_{00} = -2a^2 A, \quad h_{0i} = -a^2 B_i, \quad h_{ij} = 2a^2 C_{ij} \quad (280)$$

と定義する。これらの変数 A, B_i, C_{ij} については一様等方 3 次元計量 γ_{ij} を用いて、次のようにインデックスを上げ下げする。つまり、

$$B^i := \gamma^{ij} B_j, \quad C^i{}_j := \gamma^{ik} C_{kj}, \quad C_i{}^j := \gamma^{jk} C_{ik}, \quad C^{ij} := \gamma^{ik} \gamma^{jl} C_{kl} \quad (281)$$

とする。すると、摂動宇宙の計量は

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2A)d\tau^2 - 2B_i dx^i d\tau + (\gamma_{ij} + 2C_{ij})dx^i dx^j] \quad (282)$$

と書ける。以下では、 A, B_i, C_{ij} の絶対値は十分小さいとして、2 次以上の項を無視する。この近似を使うと逆行列は、

$$g^{00} = -\frac{1}{a^2}(1 - 2A), \quad g^{0i} = -\frac{1}{a^2}B^i, \quad g^{ij} = \frac{1}{a^2}(\gamma^{ij} - 2C^{ij}) \quad (283)$$

が簡単に得られる。

■クリストッフエル記号の線形摂動

まずは、クリストッフエル記号の線形摂動を求める。結果を先に示すと、

クリストッフエル記号の線形摂動

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^0 &= \mathcal{H} + A' \\
 \Gamma_{0i}^0 &= \Gamma_{i0}^0 = A_{|i} - \mathcal{H} B_i \\
 \Gamma_{ij}^0 &= \mathcal{H}(1 - 2A)\gamma_{ij} + \frac{1}{2}(B_{i|j} + B_{j|i}) + C'_{ij} + 2\mathcal{H}C_{ij} \\
 \Gamma_{00}^i &= A^{|i} + (B^i)' - \mathcal{H}B^i \\
 \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = \mathcal{H}\delta_j^i + \frac{1}{2}(B_j^{||i} - B^i_{|j}) + (C^i_j)' \\
 \Gamma_{jk}^i &= {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i + \mathcal{H}B^i\gamma_{jk} + C^i_{j|k} + C^i_{k|j} - C_{jk}^{||i}
 \end{aligned} \tag{284}$$

となる。ここで、 $(')$ は共形時間 τ による微分、 $|i$ は 3 次元の一樣等方計量 γ_{ij} における共変微分を表す。さらに、共形時間に関するハッブルパラメータ \mathcal{H} を^{*33}

$$\mathcal{H} := \frac{a'}{a} = \frac{1}{a} \frac{dt}{d\tau} \dot{a} = aH \tag{285}$$

と定義した。また、 ${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i$ は 3 次元の一樣等方計量 γ_{ij} に関するクリストッフエル記号であり、

$${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l}) \tag{286}$$

である。

■導出 (クリストッフエル記号)

計算は次のようになる。見やすいように、もう一度計量を示しておく。

^{*33} $ad\tau = dt$

摂動宇宙の計量

$$ds^2 = a^2(\tau) [-(1+2A)d\tau^2 - 2B_i dx^i d\tau + (\gamma_{ij} + 2C_{ij})dx^i dx^j]$$

各成分は、

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(1+2A), & g_{0i} &= -a^2 B_i, & g_{ij} &= a^2(\gamma_{ij} + 2C_{ij}) \\ g^{00} &= -\frac{1}{a^2}(1-2A), & g^{0i} &= -\frac{1}{a^2} B^i, & g^{ij} &= \frac{1}{a^2}(\gamma^{ij} - 2C^{ij}) \end{aligned}$$

まずは、 Γ_{00}^0 を求める。

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\lambda}(g_{\lambda 0,0} + g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} + \frac{1}{2}g^{0i}(2g_{i0,0} - g_{00,i}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}(1-2A)\right)[-2aa'(1+2A) - a^2 2A'] \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{B^i}{a^2}[-2(2aa'B_i + a^2 B'_i) + a^2 2A_{,i}] \\ &\simeq \frac{a'}{a}(1-2A)(1+2A) + A' \simeq \mathcal{H} + A' \end{aligned}$$

となる。次に、 Γ_{0i}^0

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\lambda}(g_{\lambda 0,i} + g_{\lambda i,0} - g_{0i,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i} + \frac{1}{2}g^{0j}(g_{j0,i} + g_{ji,0} - g_{0i,j}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}(1-2A)\right)(-a^2 2A_{,i}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{B^j}{a^2}\right)[-a^2 B_{i,j} + 2aa'(\gamma_{ij} + 2C_{ij}) + a^2 2C'_{ij} + a^2 B_{i,j}] \\ &\simeq A_{,i} - \frac{a'}{a}B_i \end{aligned}$$

次に、 Γ_{ij}^0

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\lambda}(g_{\lambda i,j} + g_{\lambda j,i} - g_{ij,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) + \frac{1}{2}g^{0k}(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}(1-2A)\right)[-a^2 B_{i,j} - a^2 B_{j,i} - 2aa'(\gamma_{ij} + 2C_{ij}) - 2a^2 C'_{ij}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{B^k}{a^2}\right)[a^2(\gamma_{ki,j} + 2C_{ki,j}) + a^2(\gamma_{kj,i} + 2C_{kj,i}) - a^2(\gamma_{ij,k} + 2C_{ij,k})] \\ &\simeq \frac{a'}{a}(1-2A)(\gamma_{ij} + 2C_{ij}) + C'_{ij} + \frac{1}{2}(B_{i,j} + B_{j,i}) - \frac{1}{2}B^k(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k}) \\ &\simeq \mathcal{H}(1-2A)\gamma_{ij} + 2\mathcal{H}C_{ij} + C'_{ij} + \frac{1}{2}(B_{i,j} + B_{j,i}) - \frac{1}{2}B_l \gamma^{lk}(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k}) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(B_{i,j} + B_{j,i}) - \frac{1}{2}B_l\gamma^{lk}(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k}) \\
&= \frac{1}{2}(B_{i,j} + B_{j,i}) - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^l B_l = \frac{1}{2}(B_{i,j} - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^l B_l + B_{j|i} - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^l B_l) \\
&= \frac{1}{2}(B_{i|j} + B_{j|i})
\end{aligned}$$

となる。次に、 Γ_{00}^i

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}g^{i\lambda}(g_{\lambda 0,0} + g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{i0}g_{00,0} + \frac{1}{2}g^{ij}(2g_{j0,0} - g_{00,j}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{B^i}{a^2}\right)[-2aa'(1+2A) - a^2 2A'] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}(\gamma^{ij} - 2C^{ij})\right)[-2(2aa'B_j + a^2 B'_j) + a^2 2A_{,j}] \\
&\simeq \frac{a'}{a}B^i - 2\frac{a'}{a}\gamma^{ij}B_j - \gamma^{ij}B'_j + \gamma^{ij}A_{,j} \\
&= -\mathcal{H}B^i - (B^i)' + A^{|i}
\end{aligned}$$

となる。最後の等式はスカラーの共変微分が普通の微分と等しいことを用いた。

次に、 Γ_{0j}^i

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}g^{i\lambda}(g_{\lambda 0,j} + g_{\lambda j,0} - g_{0j,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{i0}g_{00,j} + \frac{1}{2}g^{ik}(g_{k0,j} + g_{kj,0} - g_{0j,k}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{B^i}{a^2}\right)(-a^2 2A_{,j}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}(\gamma^{ik} - 2C^{ik})\right)[-a^2 B_{k,j} + 2aa'(\gamma_{kj} + 2C_{kj}) + a^2 2C'_{kj} + a^2 B_{j,k}] \\
&\simeq \frac{1}{2}\gamma^{ik}(B_{j,k} - B_{k,j}) + \frac{a'}{a}\gamma^{ik}(\gamma_{kj} + 2C_{kj}) - 2\frac{a'}{a}C^{ik}\gamma_{kj} + \gamma^{ik}C'_{kj} \\
&= \frac{1}{2}\gamma^{ik}(B_{j,k} - B_{k,j}) + \mathcal{H}\delta_j^i + (C^i_j)'
\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
(B_{j,k} - B_{k,j}) &= B_{j,k} - B_{k,j} + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^l B_l - {}^{(3)}\Gamma_{kj}^l B_l \\
&= \left(B_{j,k} - {}^{(3)}\Gamma_{kj}^l B_l\right) - \left(B_{k,j} - {}^{(3)}\Gamma_{jk}^l B_l\right) \\
&= B_{j|k} - B_{k|j} \\
\gamma^{ik}(B_{j,k} - B_{k,j}) &= B_j^{|i} - B_{|j}^i
\end{aligned}$$

となる。

最後に、 Γ_{jk}^i

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{i\lambda}(g_{\lambda j,k} + g_{\lambda k,j} - g_{jk,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{i0}(g_{0j,k} + g_{0k,j} - g_{jk,0}) + \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{B^i}{a^2}\right)[-a^2B_{j,k} - a^2B_{k,j} - 2aa'(\gamma_{jk} + 2C_{jk}) - 2a^2C'_{jk}] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}(\gamma^{il} - 2C^{il})\right)[a^2(\gamma_{lj,k} + 2C_{lj,k}) + a^2(\gamma_{lk,j} + 2C_{lk,j}) - a^2(\gamma_{jk,l} + 2C_{jk,l})] \\
&\simeq \frac{a'}{a}B^i\gamma_{jk} + \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l}) + \gamma^{il}(C_{lj,k} + C_{lk,j} - C_{jk,l}) - C^{il}(\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l}) \\
&= \mathcal{H}B^i\gamma_{jk} + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i + \gamma^{il}(C_{lj,k} + C_{lk,j} - C_{jk,l}) - C^{il}(\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l})
\end{aligned}$$

であり、共変微分に書き換える操作をすると、

$$\begin{aligned}
&C_{lj,k} + C_{lk,j} - C_{jk,l} \\
&= (C_{lj|k} + {}^{(3)}\Gamma_{lk}^m C_{mj} + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^m C_{lm}) + (C_{lk|j} + {}^{(3)}\Gamma_{lj}^m C_{mk} + {}^{(3)}\Gamma_{kj}^m C_{lm}) \\
&\quad - (C_{jk|l} + {}^{(3)}\Gamma_{jl}^m C_{mk} + {}^{(3)}\Gamma_{kl}^m C_{jm}) \\
&= C_{lj|k} + C_{lk|j} - C_{jk|l} + 2{}^{(3)}\Gamma_{jk}^m C_{lm}
\end{aligned}$$

となり、

$$\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l} = 2\gamma_{lm} {}^{(3)}\Gamma_{jk}^m$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&\gamma^{il}(C_{lj,k} + C_{lk,j} - C_{jk,l}) - C^{il}(\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l}) \\
&= \gamma^{il}(C_{lj|k} + C_{lk|j} - C_{jk|l}) + 2\gamma^{il} {}^{(3)}\Gamma_{jk}^m C_{lm} - 2C^{il}\gamma_{lm} {}^{(3)}\Gamma_{jk}^m \\
&= C_{j|k}^i + C_{k|j}^i - C_{jk}^{\quad |i}
\end{aligned}$$

となる。

■曲率テンソルの線形摂動

クリストッフェル記号の線形摂動が求まったので、曲率テンソルの線形摂動を求める。こちらも先に結果を示すと、

曲率テンソルの線形摂動

$$\begin{aligned}
R^0_{00i} &= -\mathcal{H}' B_i, & R^0_{0ij} &= 0, & R^\mu_{\nu 00} &= 0 \\
R^0_{i0j} &= \mathcal{H}' \gamma_{ij} (1 - 2A) - \mathcal{H} \gamma_{ij} A' - A_{|ij} \\
&\quad + B'_{(i|j)} + \mathcal{H} B_{(i|j)} + C''_{ij} + \mathcal{H} C'_{ij} + 2\mathcal{H}' C'_{ij} \\
R^i_{00j} &= \mathcal{H}' \delta_j^i + A^{|i}_{|j} - \mathcal{H} \delta_j^i A' \\
&\quad + \frac{1}{2} (B^i_{|j} + B_j^{|i})' + \frac{1}{2} \mathcal{H} (B^i_{|j} - B_j^{|i}) + (C^i_j)'' + \mathcal{H} (C^i_j)' \\
R^0_{ijk} &= 2\mathcal{H} \gamma_{i[j} A_{k]} - B_{i|[jk]} + \frac{1}{2} (B_{k|ij} - B_{j|ik}) + 2C_{i[j|k]}' \\
R^i_{0jk} &= 2\mathcal{H} \delta_{[k}^i A_{j]} - 2\mathcal{H}^2 \delta_{[j}^i B_{k]} + B^i_{|[jk]} - B_{[j}^{|i}{}_{|k]} - 2C_{[j|k]}^i' \\
R^i_{j0k} &= \mathcal{H} (\gamma_{jk} A^{|i}_{|j} - \delta_k^i A_{|j}) + \mathcal{H}^2 (\delta_k^i B_j - \gamma_{jk} B^i) \\
&\quad - \mathcal{H}' \gamma_{jk} B^i + \frac{1}{2} (B^i_{|jk} - B_j^{|i}{}_{|k}) + (C^i_{k|j} - C_{jk}^{|i})' \\
R^i_{jkl} &= 2[K + \mathcal{H}^2 (1 - 2A)] \delta_{[k}^i \gamma_{l]j} + \mathcal{H} (\delta_k^i B_{(j|l)} - \delta_l^i B_{(j|k)} - \gamma_{j[k} B^i_{|l]} - \gamma_{j[k} B_{l]}^{|i}) \\
&\quad + 2\mathcal{H} (\delta_{[k}^i C_{l]j} + \gamma_{j[l} C^i_{k]})' + 4\mathcal{H}^2 \delta_{[k}^i C_{l]j} - 2C_{j[kl]}^i + C^i_{l|jk} - C^i_{k|jl} + 2C_{j|k}^i{}_{|l} \\
&\hspace{15em} (287)
\end{aligned}$$

となる。

■導出 (曲率テンソル)

■リッチテンソル ($R_{\mu\nu}$)

上で求めた曲率テンソルからリッチテンソルを求める。

リッチテンソルの線形摂動 (1)

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\mathcal{H}' + \nabla^2 A + 3\mathcal{H} A' - B^i_{|i}' - \mathcal{H} B^i_{|i} - C^i_i{}'' - \mathcal{H} C^i_i{}' \\
R_{0i} &= 2\mathcal{H} A_{|i} - (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') B_i + \frac{1}{2} B_{i|j}{}^{|j} - \frac{1}{2} B_{|ij}^j + 2C_{[i|j]}^j' \\
R_{ij} &= [2K + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(1 - 2A) - \mathcal{H} A'] \gamma_{ij} - A_{|ij} \\
&\quad + B_{(i|j)}' + 2\mathcal{H} B_{i|j} + \mathcal{H} \gamma_{ij} B^k_{|k} + (C_{ij})'' + 2\mathcal{H} (C_{ij})' + \mathcal{H} \gamma_{ij} C^k_k{}' \\
&\quad + 2(2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') C_{ij} + 2C^k_{(i|j)k} - C^k_{k|ij} + C_{ij|k}^{|k} \\
&\hspace{15em} (288)
\end{aligned}$$

■導出 1 (リッチテンソル)

■リッチテンソル (R^μ_ν)

リッチテンソルの線形摂動 (2)

$$\begin{aligned}
 a^2 R^0_0 &= 3\mathcal{H}'(1-2A) + \nabla^2 A - 3\mathcal{H}A' + B^i{}_{|i}' + \mathcal{H}B^i{}_{|i} + C^i{}_{i}'' + \mathcal{H}C^i{}_{i}' \\
 a^2 R^0_i &= -2\mathcal{H}A_{|i} - 2KB_i - \frac{1}{2}B_{i|j}{}^{|j} + \frac{1}{2}B^j{}_{|ij} - 2C^j{}_{[i|j]}' \\
 a^2 R^i_0 &= 2\mathcal{H}A^{|i} - 2(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')B^i + \frac{1}{2}B^{i|j}{}_{|j} - \frac{1}{2}B_j{}^{i|j} + 2C_j{}^{[i|j]}' \\
 a^2 R^i_j &= \left[2K + (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')(1-2A) - \mathcal{H}A' + \mathcal{H}B^k{}_{|k} + \mathcal{H}C^k{}_{k}' \right] \delta_j^i \\
 &\quad - A^{i|j} + \frac{1}{2}(B^i{}_{|j} + B_j{}^{i|})' + \mathcal{H}(B^i{}_{|j} + B_j{}^{i|}) + (C^i_j)'' \\
 &\quad + 2\mathcal{H}(C^i_j)' - 4KC_j^i + C^{ki}{}_{|jk} + C_{kj}{}^{i|k} - C_k{}^{k|i}{}_{|j} - C_j{}^{i|k}{}_{|k}
 \end{aligned} \tag{289}$$

■導出 2(リッチテンソル)

■リッチスカラー

リッチスカラーの線形摂動

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{2} R &= 3K + 3(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')(1-2A) + \nabla^2 A - 3\mathcal{H}A' + B^i{}_{|i}' + 3\mathcal{H}B^i{}_{|i} \\
 &\quad + C^i{}_{i}'' + 3\mathcal{H}C^i{}_{i}' - 2KC^i{}_i + C^{ij}{}_{|ji} - C^i{}_{i|j}{}^{|j}
 \end{aligned} \tag{290}$$

■導出 (リッチスカラー)

■アインシュタインテンソル

アインシュタインテンソルは

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R$$

で定義される。

$$\begin{aligned}
 a^2 G^0_0 &= -3K - 3\mathcal{H}^2(1-2A) - 2\mathcal{H}B^i_{|i} - 2\mathcal{H}C^i_{i'} + 2KC^i_i - C^{ij}_{|ji} + C^i_{i|j}{}^{|j} \\
 a^2 G^0_i &= -2\mathcal{H}A_{|i} - 2KB_i - \frac{1}{2}B_{i|j}{}^{|j} + \frac{1}{2}B^j_{|ij} - 2C^j_{[i|j]}{}' \\
 a^2 G^i_0 &= 2\mathcal{H}A^{[i} - 2(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')B^i + \frac{1}{2}B^{i|j}_{|j} - \frac{1}{2}B_j{}^{i|j} + 2C_j{}^{[i|j]}{}' \\
 a^2 G^i_j &= \left[-K - (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')(1-2A) + 2\mathcal{H}A' + \nabla^2 A - B^k_{|k}{}' - 2\mathcal{H}B^k_{|k} \right. \\
 &\quad \left. - C^k_{k}{}'' - 2\mathcal{H}C^k_{k'} + 2KC^k_k - C^{kl}_{|lk} + C^k_{k|l}{}^{|l} \right] \delta^i_j \\
 &\quad - (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + K)(1-2A)\delta^i_j - \mathcal{H}A'\delta^i_j + \mathcal{H}B^k_{|k}\delta^i_j + \mathcal{H}C^k_{k'}\delta^i_j \\
 &\quad - A^{[i}_{|j} + \frac{1}{2}(B^i_{|j} + B_j{}^{i|})' + \mathcal{H}(B^i_{|j} + B_j{}^{i|}) + (C^i_j)'' + 2\mathcal{H}(C^i_j)' \\
 &\quad - 4KC^i_j + C^{ki}_{|jk} + C_{kj}{}^{i|k} - C_k{}^{k|i}{}_{|j} - C^i_{j|k}{}^{|k}
 \end{aligned} \tag{291}$$

■導出 (アインシュタインテンソル)

5.1.2 エネルギー・運動量テンソルの線形摂動

前節でアインシュタイン方程式の左辺が求まった。ここでは、右辺に現れるエネルギー・運動量テンソルの線形摂動を求める。一般的なエネルギー・運動量テンソルは、

$$T^\mu_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta^\mu_\nu + \sigma^\mu_\nu \tag{292}$$

である。ここで u^μ は流体の 4 元速度、 σ^μ_ν は非等方応力テンソルである。 σ^μ_ν は、流体の静止系で空間成分のみを持つトレースゼロの対称テンソルである。^{*34} つまり、

$$\sigma^{\mu\nu}u_\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 0, \quad \sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\nu\mu} \tag{293}$$

である。

4 元速度の自由度は 3 つである。^{*35}そこで、3 成分の空間的速度

$$v^i := \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{u^i}{u^0}$$

を導入して、これを独立変数として u^μ を v^i で表すことにする。背景宇宙では、等方性のために空間成分はない ($v^i = 0$)。つまり、 v^i そのものは摂動量である。規格化条件 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ から、線形近似で

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -a^2(1+2A)(u^0)^2 - 2a^2B_i u^0 u^i + a^2(\gamma_{ij} + 2C_{ij})u^i u^j \simeq -a^2(1+2A)(u^0)^2$$

^{*34} そのような性質を持つように定義している。局所慣性系での定義を拡張して一般座標にも適応できるとして、今は局所座標のみで考える。トレースゼロの性質は、圧力が $p = \frac{1}{3}T^i_i$ で定義されることから従う。対称性は、エネルギー・運動量テンソルが対称テンソルであることから従う。

^{*35} 4 元速度は $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ を満たすので、4 つの成分のうち 1 つは他の成分で決まる。

となるので、

$$u^0 = \frac{1}{a}(1+2A)^{-1/2} \simeq \frac{1}{a}(1-A) \quad (294)$$

である。また、

$$u^i = u^0 v^i \simeq \frac{1}{a}(1-A)v^i \simeq \frac{1}{a}v^i \quad (295)$$

となる。下付きの成分を求めると、

$$\begin{aligned} u_0 &= g_{0\mu} u^\mu \\ &= -a^2(1+2A)u^0 - a^2 B_i u^i \simeq -a(1+2A)(1-A) \simeq -a(1+A) \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} u_i &= g_{i\mu} u^\mu \\ &= -a^2 B_i u^0 + a^2 (\gamma_{ij} + 2C_{ij}) u^j \simeq -a B_i (1-A) + a (\gamma_{ij} + 2C_{ij}) v^j \\ &\simeq -a B_i (1-A) + a(1-A) \gamma_{ij} v^j \\ &\simeq -a B_i + a v_i \end{aligned}$$

となる。まとめると、

$$u^\mu = a^{-1}(1-A, v^i) \quad (296)$$

$$u_\mu = a(-1-A, v_i - B_i) \quad (297)$$

となる。

次に、非等方応力テンソル $\sigma^{\mu\nu}$ を求める。背景時空では、等方性のために $\sigma^{\mu\nu} = 0$ である。したがって、 $\sigma^{\mu\nu}$ も摂動量である。よって、式 (293) を線形近似で考えると、計量は背景時空のものをいれればよく

$$\sigma^{00} = \sigma^{0i} = \sigma^{i0} = 0, \quad \gamma_{ij} \sigma^{ij} = 0, \quad \sigma^{ij} = \sigma^{ji} \quad (298)$$

となる。さらに、片方の添字を下げたものは

$$\sigma^0_0 = \sigma^0_i = \sigma^i_0 = 0, \quad \sigma^i_j = 0, \quad \sigma^i_j = \sigma_j^i \quad (299)$$

となる。

以上より、エネルギー・運動量テンソルの線形摂動は

$$T^0_0 = -\rho \quad (300)$$

$$T^0_i = (\rho + p)(v_i - B_i) \quad (301)$$

$$T^i_0 = -(\rho + p)v^i \quad (302)$$

$$T^i_j = p\delta^i_j + \sigma^i_j \quad (303)$$

となる。ここで、エネルギー密度のゆらぎ δ と圧力のゆらぎ δp を

$$\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad \delta p = p - \bar{p} \quad (304)$$

と定義する。また、 σ^i_j を圧力 p で無次元化した量を

$$\Pi^i_j = \frac{\sigma^i_j}{p} \quad (305)$$

と定義する。これらの量を用いて、 T^μ_ν を書き直すと、

$$T^0_0 = -\bar{\rho}(1 + \delta) \quad (306)$$

$$T^0_i = (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) \quad (307)$$

$$T^i_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p})v^i \quad (308)$$

$$T^i_j = \bar{p}\delta^i_j + \delta p \delta^i_j + \bar{p}\Pi^i_j \quad (309)$$

が得られる。^{*36}

5.1.3 アインシュタイン方程式の線形摂動

アインシュタイン方程式は

$$G^\mu_\nu + \Lambda\delta^\mu_\nu = 8\pi GT^\mu_\nu \quad (310)$$

である。 G^μ_ν, T^μ_ν を背景時空 $\bar{G}^\mu_\nu, \bar{T}^\mu_\nu$ と摂動時空 $\delta G^\mu_\nu, \delta T^\mu_\nu$ として

$$G^\mu_\nu = \bar{G}^\mu_\nu + \delta G^\mu_\nu, \quad T^\mu_\nu = \bar{T}^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu \quad (311)$$

のように分ける。背景時空に対して

$$\bar{G}^\mu_\nu + \Lambda\delta^\mu_\nu = 8\pi G\bar{T}^\mu_\nu \quad (312)$$

が成り立つので、式 310, 312 を比較すると

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi G\delta T^\mu_\nu \quad (313)$$

となる。

5.1.4 背景時空のアインシュタイン方程式

式 (291) からアインシュタインテンソルの背景成分を取り出すと、

$$\bar{G}^0_0 = -\frac{3}{a^2}(K + \mathcal{H}^2), \quad \bar{G}^0_i = \bar{G}^i_0 = 0, \quad \bar{G}^i_j = -\frac{1}{a^2}(K + \mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\delta^i_j \quad (314)$$

^{*36} ここで、微少量を確認すると $\delta, v^i, B_i, \delta p, \Pi^i_j$ である。

である。また、同様に式 306～309 からエネルギー・運動量テンソルの背景成分は

$$\bar{T}_0^0 = -\bar{\rho}, \quad \bar{T}_i^0 = \bar{T}_0^i = 0, \quad \bar{T}_j^i = \bar{p}\delta_j^i \quad (315)$$

となる。これを背景時空のアインシュタイン方程式 (312) に代入すると、

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\bar{\rho} + \frac{\Lambda}{3}a^2 - K \quad (316)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}a^2(\bar{\rho} + 3\bar{p}) + \frac{\Lambda}{3}a^2 \quad (317)$$

が得られる。また、背景時空でエネルギー・運動量保存則 $\bar{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ を考えると、

$$\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) \quad (318)$$

が得られる。^{*37}

ここで、密度パラメータ Ω 、状態方程式パラメータ w および音速 c_s は

$$\Omega := \frac{8\pi G\bar{\rho}}{3\mathcal{H}^2}, \quad w := \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}, \quad c_s^2 := \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \quad (319)$$

であった。背景時空では、断熱的に膨張するので $dS = 0$ であるので、

$$d\bar{p} = c_s^2 d\bar{\rho} + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho dS = c_s^2 d\bar{\rho}$$

より、

$$c_s^2 = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} \quad (320)$$

が成り立つ。これらの量を用いてアインシュタイン方程式 (316),(317) とエネルギー・運動量保存則 (318) を書き直すと、

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2\Omega + \frac{\Lambda}{3}a^2 - K \quad (321)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^2\Omega(1+3w) + \frac{\Lambda}{3}a^2 \quad (322)$$

$$w' = -3\mathcal{H}(1+w)(c_s^2 - w) \quad (323)$$

となる。

^{*37} これはアインシュタイン方程式と独立ではなく、導くことができる。

さらに、式 (317) を微分すると^{*38}

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}'' &= -\frac{4\pi G}{3} [2aa'(\bar{\rho} + 3\bar{p}) + a^2(\bar{\rho}' + 3\bar{p}')] + \frac{2\Lambda}{3} aa' \\
&= -\frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} \left[2\mathcal{H}(1 + 3w) + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}(1 + 3c_s^2) \right] + \frac{2\Lambda}{3} a^2 \mathcal{H} \\
&= -\frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} [2\mathcal{H}(1 + 3w) - 3\mathcal{H}(1 + w)(1 + 3c_s^2)] + \frac{2\Lambda}{3} a^2 \mathcal{H} \\
\frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}} &= -\frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} [2(1 + 3w) - 3(1 + w)(1 + 3c_s^2)] + \frac{2}{3} \Lambda a^2
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
&2(1 + 3w) - 3(1 + w)(1 + 3c_s^2) \\
&= 2(1 + 3w) - 3(1 + w) - 9(1 + w)c_s^2 = -1 + 3w - 9(1 + w)c_s^2
\end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}} = \frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} [1 - 3w + 9(1 + w)c_s^2] + \frac{2}{3} \Lambda a^2 \quad (324)$$

が得られる。ここで、式 (316),(317) および (324) を用いて

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^2 + K + \mathcal{H}' &= -\frac{4\pi G}{3} a^2 (-\bar{\rho} + 3\bar{p}) + \frac{2\Lambda}{3} a^2 \\
&= -\frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} (-1 + 3w) + \frac{2\Lambda}{3} a^2
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}'' - \mathcal{H}(\mathcal{H}^2 + K + \mathcal{H}') &= \frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} \mathcal{H} 9(1 + w)c_s^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{H}^3 \Omega 9(1 + w)c_s^2
\end{aligned}$$

となるので、

$$\mathcal{H}'' - \mathcal{H}(\mathcal{H}^2 + K + \mathcal{H}') = \frac{9}{2} \mathcal{H}^3 \Omega (1 + w)c_s^2 \quad (325)$$

が得られる。また、式 (316),(317) から

$$\mathcal{H}^2 + K - \mathcal{H}' = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega (1 + w)$$

が得られる。これらの式は、後の計算で用いる。

^{*38} エネルギー保存の式から

$$\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} = -3\mathcal{H}(1 + w)$$

5.1.5 線形アインシュタイン方程式

あとは、線形アインシュタイン方程式

$$\delta G^\mu{}_\nu = 8\pi G \delta T^\mu{}_\nu$$

に代入するだけである。その際に、 $(\mu{}_\nu) = ({}^0{}_0), ({}^0{}_i), ({}^i{}_i), ({}^i{}_j)$ 成分を独立に考える。^{*39}

線形アインシュタイン方程式

$$3\mathcal{H}^2 A - \mathcal{H} B^i{}_{|i} - \mathcal{H} C^i{}_{|i}' + K C^i{}_{|i}' - \frac{1}{2} C^{ij}{}_{|ji} + \frac{1}{2} C^i{}_{|j}{}^{|j} = -4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \quad (326)$$

$$\mathcal{H} A_{|i} + K B_i + \frac{1}{4} B_{i|j}{}^{|j} - \frac{1}{4} B^j{}_{|ij} + C^j{}_{[i|j]}{}' = -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) \quad (327)$$

$$3\mathcal{H} A' + 3(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')A + \nabla^2 A - B^i{}_{|i}' - 2\mathcal{H} B^i{}_{|i} \\ C^i{}_{|i}{}'' - 2\mathcal{H} C^i{}_{|i}' + K C^i{}_{|i} - \frac{1}{2} C^{ij}{}_{|ji} + \frac{1}{2} C^i{}_{|j}{}^{|j} = 12\pi G a^2 \delta p \quad (328)$$

$$\left(\delta^i{}_k \delta^j{}_l - \frac{1}{3} \gamma_{kl} \gamma^{ij} \right) \left(A_{|ij} - B_{(i|j)}{}' - 2\mathcal{H} B_{(i|j)} - C_{ij}{}'' - 2\mathcal{H} C_{ij}' + 4K C_{ij} \right. \\ \left. + C_{ij|m}{}^{|m} + C^m{}_{m|i} - 2C^m{}_{m(i|j)}{}^{|m} \right) = -8\pi G a^2 \bar{p} \Pi_{kl} \quad (329)$$

が得られる。^{*40}

エネルギー・運動量保存則 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ についても考える。実質的には、アインシュタイン方程式と独立ではないが、有用なので導く。つまり、

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\nu} T^{\mu\lambda} \quad (330)$$

について、線形近似を行う。

線形エネルギー・運動量保存則

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta + (1 + w)(v^i{}_{|i} + C^i{}_{|i}') + 3\mathcal{H}w\Gamma = 0 \quad (331)$$

$$(v_i - B_i)' + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)(v_i - B_i) + \frac{c_s^2}{1 + w}\delta_{|i} + A_{|i} + \frac{w}{1 + w}(\Gamma_{|i} + \Pi^j{}_{i|j}) = 0 \quad (332)$$

となる。ここで、エントロピーゆらぎを無次元量として

$$\Gamma = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \frac{\delta S}{\bar{p}} \quad (333)$$

^{*39} $({}^i{}_0)$ 成分は $({}^0{}_i)$ 成分と同じ式になることはアインシュタインテンソルの対称性からわかる。また、 $({}^i{}_j)$ 成分は対角成分と非対角成分に分けた。

^{*40} 後で述べるが、非物理的なゲージ自由度が含まれているため方程式の解を求める際には、なんらかの方法でゲージ自由度を除去する必要がある。

を導入した。実際には、この式と $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$ より

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S = c_s^2 \bar{\rho} \delta + \bar{p} \Gamma$$

であるので、

$$\Gamma = \frac{\delta p}{\bar{p}} - \frac{c_s^2}{w} \delta \quad (334)$$

が成り立つ。この式を用いる。

式 (331),(332) はニュートン流体に対する連続の式とオイラーの式を相対論的に拡張したものになっている。

5.2 ゲージ変換と SVT 分解

5.2.1 ゲージ変換

一般相対論の線形摂動を考える際に、計量 $g_{\mu\nu}$ を $\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と分けた。このとき、 $\bar{g}_{\mu\nu}$ の時空点と $h_{\mu\nu}$ の時空点は一対一対応になっている。しかし、この対応関係は一意ではない。つまり、摂動時空において定義される時空には自由度がある。この自由度をゲージ自由度と呼ぶ。ゲージ自由度は物理的な自由度ではなく、一般相対論の摂動を考えたときに出現する自由度である。

座標変換

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (335)$$

を考える。このとき、計量は

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \quad (336)$$

と変換される。したがって、

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) &= \frac{\partial(\tilde{x}^\alpha - \xi^\alpha)}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial(\tilde{x}^\beta - \xi^\beta)}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \xi_{,\mu}^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \xi_{,\nu}^\beta) g_{\alpha\beta}(x) \simeq g_{\mu\nu}(x) - g_{\alpha\nu} \xi_{,\mu}^\alpha - g_{\mu\beta} \xi_{,\nu}^\beta \end{aligned} \quad (337)$$

となる。ここで、 $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ と $g_{\mu\nu}(x)$ の差を考えると

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x} - \xi) - g_{\mu\nu}(x) \\ &\simeq \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \tilde{g}_{\mu\nu,\alpha}(\tilde{x}) \xi^\alpha - g_{\mu\nu}(x) \\ &\simeq (g_{\mu\nu}(x) - g_{\alpha\nu} \xi_{,\mu}^\alpha - g_{\mu\beta} \xi_{,\nu}^\beta) - g_{\mu\nu,\alpha}(x) \xi^\alpha - g_{\mu\nu}(x) \\ &= -g_{\alpha\nu}(x) \xi_{,\mu}^\alpha - g_{\mu\beta}(x) \xi_{,\nu}^\beta - g_{\mu\nu,\alpha}(x) \xi^\alpha \end{aligned} \quad (338)$$

が成り立つ。^{*41}

式 (335) の座標変換は、背景時空の座標は固定しており摂動時空の座標変換を表している。また、 ξ^μ は摂動量である。したがって、

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(x) - h_{\mu\nu}(x) = -\bar{g}_{\alpha\nu}(x) \xi_{,\mu}^\alpha - \bar{g}_{\mu\beta}(x) \xi_{,\nu}^\beta - \bar{g}_{\mu\nu,\alpha}(x) \xi^\alpha \quad (339)$$

となる。座標変換を時間成分と空間成分に分けて $(\xi^0, \xi^i) = (T, L^i)$ とする。また、摂動計量は

$$h_{00} = -2a^2 A, \quad h_{0i} = -a^2 B_i, \quad h_{ij} = 2a^2 C_{ij}$$

であった。すると、各成分の変換 (339) は

$$\begin{aligned} h_{00} : \quad & -2a^2 \tilde{A} + 2a^2 A = 2a^2 T' + (a^2)' T \\ h_{0i} : \quad & -a^2 \tilde{B}_i + a^2 B_i = -a^2 \gamma_{ji}(L^i)_{,0} + a^2 T_{,i} \\ h_{ij} : \quad & 2a^2 \tilde{C}_{ij} - 2a^2 C_{ij} = -a^2 \gamma_{kj}(L^k)_{,i} - a^2 \gamma_{ik}(L^k)_{,j} - (a^2)' \gamma_{ij} T - a^2 \gamma_{ij,k} L^k \end{aligned}$$

^{*41} 右辺は $-\xi^\mu$ に沿った $g_{\mu\nu}$ のリー微分である。

より、整理すると

$$\begin{aligned} h_{00}: \quad \tilde{A} &= A - T' - \mathcal{H}T \\ h_{0i}: \quad \tilde{B}_i &= B_i + (L_i)' - T_{|i} \\ h_{ij}: \quad \tilde{C}_{ij} &= C_{ij} - \mathcal{H}T\gamma_{ij} - \frac{1}{2}(\gamma_{kj}(L^k)_{,i} - \gamma_{ik}(L^k)_{,j} - \gamma_{ij,k}L^k) \end{aligned}$$

したがって、

$$A \rightarrow \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T \quad (340)$$

$$B_i \rightarrow \tilde{B}_i = B_i + L_i' - T_{|i} \quad (341)$$

$$C_{ij} \rightarrow \tilde{C}_{ij} = C_{ij} - \mathcal{H}T\gamma_{ij} - L_{(i|j)} \quad (342)$$

となる。^{*42}

エネルギー・運動量テンソルに対しても同様にゲージ変換を考える。テンソルとしての変換は

$$T^\mu_\nu(x) \rightarrow \tilde{T}^\mu_\nu(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} T^\alpha_\beta(x) \quad (343)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \tilde{T}^\mu_\nu(\tilde{x}) &= \frac{\partial(x^\mu + \xi^\mu)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\tilde{x}^\beta - \xi^\beta)}{\partial \tilde{x}^\nu} T^\alpha_\beta(x) \\ &\simeq (\delta^\mu_\alpha + \xi^\mu_{,\alpha})(\delta^\beta_\nu - \xi^\beta_{,\nu})T^\alpha_\beta(x) \simeq T^\mu_\nu(x) + T^\alpha_\nu \xi^\mu_{,\alpha} - T^\mu_\beta \xi^\beta_{,\nu} \end{aligned} \quad (344)$$

となる。ここでも、 $\tilde{T}^\mu_\nu(x)$ と $T^\mu_\nu(x)$ の差を考えると

$$\begin{aligned} \tilde{T}^\mu_\nu(x) - T^\mu_\nu(x) &= \tilde{T}^\mu_\nu(\tilde{x} - \xi) - T^\mu_\nu(x) \\ &\simeq \tilde{T}^\mu_\nu(\tilde{x}) - \tilde{T}^\mu_{\nu,\alpha}(\tilde{x})\xi^\alpha - T^\mu_\nu(x) \\ &\simeq \left(T^\mu_\nu(x) + T^\alpha_\nu(x)\xi^\mu_{,\alpha} - T^\mu_\beta(x)\xi^\beta_{,\nu} \right) - T^\mu_{\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha - T^\mu_\nu(x) \\ &= T^\alpha_\nu(x)\xi^\mu_{,\alpha} - T^\mu_\beta(x)\xi^\beta_{,\nu} - T^\mu_{\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \end{aligned} \quad (345)$$

が成り立つ。

さらに、背景時空の成分 \bar{T}^μ_ν と摂動時空の成分に分けて線形近似すると

$$\tilde{T}^\mu_\nu(x) - T^\mu_\nu(x) = \bar{T}^\alpha_\nu(x)\xi^\mu_{,\alpha} - \bar{T}^\mu_{\beta}(x)\xi^\beta_{,\nu} - \bar{T}^\mu_{\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \quad (346)$$

^{*42} $L_{i|j} = L_{i,j} - \Gamma^m_{ij}L_m$ であり、 $L_{(i|j)} = \frac{1}{2}(L_{i|j} + L_{j|i}) = \frac{1}{2}(L_{i,j} + L_{j,i}) - \Gamma^m_{ij}L_m$ である。 $L_{i,j} = \gamma_{ik}(L^k)_{,j} + \gamma_{ik,j}L^k$ と計算するので、

$$\begin{aligned} L_{(i|j)} &= \frac{1}{2}(\gamma_{ik}(L^k)_{,j} + \gamma_{jk}(L^k)_{,i}) + \frac{1}{2}(\gamma_{ik,j} + \gamma_{jk,i})L^k - \Gamma^m_{ij}L_m \\ &= \frac{1}{2}(\gamma_{ik}(L^k)_{,j} + \gamma_{jk}(L^k)_{,i}) + \frac{1}{2}[\gamma^{km}(\gamma_{ik,j} + \gamma_{jk,i}) - \Gamma^m_{ij}]L_m \\ &= \frac{1}{2}(\gamma_{ik}(L^k)_{,j} + \gamma_{jk}(L^k)_{,i}) + \frac{1}{2}\gamma^{km}\gamma_{ij,k}L_m \end{aligned}$$

となる。

となる。 T^μ_ν の具体的な成分は

$$\begin{aligned} T^0_0 &= -\bar{\rho} - \bar{\rho}\delta \\ T^0_i &= (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) \\ T^i_0 &= -(\bar{\rho} + \bar{p})v^i \\ T^i_j &= \bar{p}\delta^i_j + \delta p \delta^i_j + \bar{p}\Pi^i_j \end{aligned}$$

であり、背景成分は

$$\bar{T}^0_0 = -\bar{\rho}, \quad \bar{T}^0_i = 0, \quad \bar{T}^i_0 = 0, \quad \bar{T}^i_j = \bar{p}\delta^i_j$$

である。したがって、各成分の変換は

$$\begin{aligned} T^0_0 : \quad & -\bar{\rho}(\tilde{\delta} - \delta) \simeq -\bar{T}^0_{0,\alpha}\xi^\alpha = \bar{\rho}'T \\ T^i_0 \ (T^0_i) : \quad & -(\bar{\rho} + \bar{p})\tilde{v}^i + (\bar{\rho} + \bar{p})v^i = (\bar{\rho} + \bar{p})(L^i)' \\ T^i_i \ (\text{トレース}) : \quad & 3\delta\bar{p} - 3\delta p = -\bar{T}^i_{i,\alpha}\xi^\alpha = 3\bar{p}'T \\ T^i_j \ (\text{非トレース}) : \quad & \bar{p}\tilde{\Pi}^i_j - \bar{p}\Pi^i_j = 0 \end{aligned}$$

となるので、整理すると^{*43}

$$\delta \rightarrow \tilde{\delta} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}T \quad (347)$$

$$v_i \rightarrow \tilde{v}_i = v_i + L_i' \quad (348)$$

$$\delta p \rightarrow \tilde{\delta}p = \delta p - \bar{p}'T \quad (349)$$

$$\Pi^i_j \rightarrow \tilde{\Pi}^i_j = \Pi^i_j \quad (350)$$

が得られる。エントロピーゆらぎ $\Gamma = \frac{\delta p}{\bar{p}} - \frac{c_s^2}{w}\delta$ の変換は

$$\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma} = \Gamma \quad (351)$$

となる。したがって、エントロピーゆらぎはゲージ不変量である。さらに、線形アインシュタイン方程式やエネルギー・運動量保存則もこの変換によって不変であることが確認できる。

5.2.2 SVT 分解

摂動計量の A, B_i, C_{ij} をそのまま扱うのではなく、スカラー・ベクトル・テンソル (SVT) 分解を行うと便利である。SVT 分解は、各摂動量をスカラー型成分、ベクトル型成分およびテンソル

^{*43} T^0_i 成分については、

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \bar{p})\{(\tilde{v}_i - \tilde{B}_i) - (v_i - B_i)\} &= \bar{T}^{\alpha}_{i,\alpha}\xi^0 - \bar{T}^0_{\beta}\xi^{\beta}_{,i} - \bar{T}^0_{i,\alpha}\xi^\alpha \\ (\bar{\rho} + \bar{p})(\tilde{v}_i - v_i - L_i' + T_{,i}) &= \bar{p}\delta^j_i T_{,j} + \bar{\rho}T_{,i} = (\bar{\rho} + \bar{p})T_{,i} \end{aligned}$$

型成分に分解する方法である。 A はそのままスカラー型成分である。 B_i はスカラー場 $B^{(S)}$ とその他のベクトル場 $B^{(V)}_i$ に分解する。つまり、

$$B_i = B^{(S)}_{|i} + B^{(V)}_i, \quad B^{(V)}_i{}^{|i} = 0 \quad (352)$$

である。この勾配で表されない部分 $B^{(V)}_i$ は発散なしを満たすものとする。このとき、 $B^{(S)}$ はスカラー型成分、 $B^{(V)}_i$ はベクトル型成分と呼ぶ。

両辺に対して発散をとるとスカラー成分に対して

$$\nabla^2 B^{(S)} = B_i{}^{|i} \quad (353)$$

が成り立つ。これより境界条件が与えられればこの方程式の解は一意に定まる。また、 $B^{(V)}_i$ は $B^{(V)}_i = B_i - B^{(S)}_{|i}$ なので、 B_i が決まれば自動的に $B^{(V)}_i$ についても一意に定まる。まとめると、

$$B^{(S)} = \Delta^{-1} B_i{}^{|i}, \quad B^{(V)}_i = B_i - B^{(S)}_{|i} \quad (354)$$

によって SVT 分解が一意に定まる。ここで、 Δ^{-1} はラプラス作用素の逆作用素である。

同様に、 C_{ij} も SVT 分解を行う。 C_{ij} は2つのスカラー場 $D, E^{(S)}$ 、1つのベクトル場 $E^{(V)}_i$ およびその他の成分 $E^{(T)}_{ij}$ に分解して

$$C_{ij} = D\gamma_{ij} + E^{(S)}_{|ij} + E^{(V)}_{(i|j)} + E^{(T)}_{ij} \quad (355)$$

とする。ここで、 $E^{(V)}_i$ は発散なし、 $E^{(T)}_{ij}$ は発散なしかつトレースなしを満たすものとする。つまり、

$$E^{(V)}_i{}^{|i} = 0, \quad E^{(T)}_{ij}{}^{i} = 0, \quad E^{(T)}_{ij}{}^{|j} = 0 \quad (356)$$

を満たすものとする。したがって、ベクトル場 $E^{(V)}_i$ の自由度は $3 - 1 = 2$ 個、テンソル場 $E^{(T)}_{ij}$ の自由度は $6 - 1 - 3 = 2$ 個である。また、この分解も一意に定まる。これは、

$$C_i{}^i = 3D + \nabla^2 E^{(S)}, \quad (357)$$

$$C_{ij}{}^{|j} = D_{|i} + \left[(\nabla^2 + 2K)E^{(S)} \right]_{|i} + \frac{1}{2}E^{(V)}_{i|j}{}^{|j} + KE^{(V)}_i, \quad (358)$$

$$C_{ij}{}^{|ij} = \nabla^2 \left(D + (\nabla^2 + 2K)E^{(S)} \right) \quad (359)$$

が成り立つので、境界条件が与えられれば $D, E^{(S)}, E^{(V)}_i$ が一意に定まり、 $E^{(T)}_{ij}$ も自動的に一意に定まるからである。つまり、これらは

$$D = \frac{1}{3}C_i{}^i - \frac{1}{2}\Delta(\Delta + 3K)^{-1} \left(\Delta^{-1}\nabla^i\nabla^j C_{ij} - \frac{1}{3}C_i{}^i \right) \quad (360)$$

$$E^{(S)} = \frac{3}{2}(\Delta + 3K)^{-1} \left(\Delta^{-1}\nabla^i\nabla^j C_{ij} - \frac{1}{3}C_i{}^i \right) \quad (361)$$

$$E^{(V)}_i = 2(\Delta + 2K)^{-1} (\nabla^j C_{ij} - \nabla_i \Delta^{-1}\nabla^j \nabla^k C_{jk}) \quad (362)$$

$$E^{(T)}_{ij} = C_{ij} - D\gamma_{ij} - E^{(S)}_{|ij} - E^{(V)}_{(i|j)} \quad (363)$$

によって一意に定まる。

ゲージ変換の変数 (T, L^i) についても SVT 分解を行う。つまり、

$$L_i = L^{(S)}_{|i} + L^{(V)}_i, \quad L^{(V)}_i{}^{|i} = 0 \quad (364)$$

とする。

5.2.3 SVT 分解におけるゲージ変換

以下では、この SVT 分解をすると各成分ごとにどのようなゲージ変換 (??)-(??) がなされるかを考える。すると、スカラー成分のゲージ変換は

$$A \rightarrow \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T \quad (365)$$

$$B^{(S)} \rightarrow \tilde{B}^{(S)} = B^{(S)} + L^{(S)'} - T \quad (366)$$

$$D \rightarrow \tilde{D} = D - \mathcal{H}T \quad (367)$$

$$E^{(S)} \rightarrow \tilde{E}^{(S)} = E^{(S)} - L^{(S)} \quad (368)$$

とスカラー成分のゲージ変換はスカラー場のみで表される。さらに、ベクトル成分については

$$B^{(V)}_i \rightarrow \tilde{B}^{(V)}_i = B^{(V)}_i + L^{(V)}_i{}' \quad (369)$$

$$E^{(V)}_i \rightarrow \tilde{E}^{(V)}_i = E^{(V)}_i - L^{(V)}_i \quad (370)$$

となる。これらについてもベクトル成分のゲージ変換はベクトル場のみで表される。テンソル成分については

$$E^{(T)}_{ij} \rightarrow \tilde{E}^{(T)}_{ij} = E^{(T)}_{ij} \quad (371)$$

となり、ゲージ不変量である。このようにスカラー・ベクトル・テンソル成分はそれぞれ独立にゲージ変換されることが SVT 分解の利点である。

■ $\delta, \delta p, v_i, \Pi_{ij}$ の SVT 分解

エネルギー・運動量テンソルの摂動量 $\delta, \delta p, v_i, \Pi_{ij}$ についても SVT 分解を行う。まず、 $\delta, \delta p$ はそのままスカラー成分である。 v_i はスカラー場 $v^{(S)}$ とその他のベクトル場 $v^{(V)}_i$ に分解して

$$v_i = v^{(S)}_{|i} + v^{(V)}_i, \quad v^{(V)}_i{}^{|i} = 0 \quad (372)$$

とする。また、 Π_{ij} の分解はトレースなし対称テンソルであることを考慮して

$$\Pi_{ij} = \Pi^{(S)}_{|ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta\Pi^{(S)} + \Pi^{(V)}_{(i|j)} + \Pi^{(T)}_{ij} \quad (373)$$

とする。ここで、 $\Pi^{(V)}_i$ は発散なし、 $\Pi^{(T)}_{ij}$ は発散なしかつトレースなしを満たすものとする。つまり、

$$\Pi^{(V)}_i{}^{|i} = 0, \quad \Pi^{(T)}_i{}^i = 0, \quad \Pi^{(T)}_{ij}{}^{|j} = 0 \quad (374)$$

を満たすものとする。

ゲージ変換は、スカラー成分について

$$\delta \rightarrow \tilde{\delta} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} T \quad (375)$$

$$v^{(S)} \rightarrow \tilde{v}^{(S)} = v^{(S)} + L^{(S)'} \quad (376)$$

$$\delta p \rightarrow \tilde{\delta} p = \delta p - \bar{p}' T \quad (377)$$

$$\Pi^{(S)} \rightarrow \tilde{\Pi}^{(S)} = \Pi^{(S)} \quad (378)$$

$$(379)$$

となる。ベクトル成分については

$$v^{(V)}_i \rightarrow \tilde{v}^{(V)}_i = v^{(V)}_i + L^{(V)}_i{}' \quad (380)$$

$$\Pi^{(V)}_i \rightarrow \tilde{\Pi}^{(V)}_i = \Pi^{(V)}_i \quad (381)$$

となる。テンソル成分については

$$\Pi^{(T)}_{ij} \rightarrow \tilde{\Pi}^{(T)}_{ij} = \Pi^{(T)}_{ij} \quad (382)$$

となる。つまり、テンソル成分はゲージ不変量である。

■SVT 分解におけるアインシュタイン方程式

SVT 分解を用いて線形アインシュタイン方程式を表す。スカラー成分については

スカラー成分の線形アインシュタイン方程式

$$3\mathcal{H}^2 A - \mathcal{H}\nabla^2 B^{(S)} - 3\mathcal{H}D' + (\nabla^2 + 3K)D - \mathcal{H}\nabla^2 E^{(S)'} = -4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \quad (383)$$

$$\mathcal{H}A + KB^{(S)} - D' + KE^{(S)'} = -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) (v^{(S)} - B^{(S)}) \quad (384)$$

$$3\mathcal{H}A' + 3(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')A + \nabla^2 A - \nabla^2 B^{(S)'} - 2\mathcal{H}\nabla^2 B^{(S)} - 3D'' - 6\mathcal{H}D' \\ + (\nabla^2 + 3K)D - \nabla^2 E^{(S)''} - 2\mathcal{H}\nabla^2 E^{(S)'} = 12\pi G a^2 \delta p \quad (385)$$

$$A - B^{(S)'} - 2\mathcal{H}B^{(S)} + D - E^{(S)''} - 2\mathcal{H}E^{(S)'} = -8\pi G a^2 \bar{p} \Pi^{(S)} \quad (386)$$

となる。

また、ベクトル型成分については

ベクトル成分の線形アインシュタイン方程式

$$(\nabla^2 + 2K)B^{(V)}_i + (\nabla^2 + 2K)E^{(V)}_i{}' = -16\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) (v^{(V)}_i - B^{(V)}_i) \quad (387)$$

$$B^{(V)}_i{}' + 2\mathcal{H}B^{(V)}_i + E^{(V)}_i{}'' + 2\mathcal{H}E^{(V)}_i{}' = 8\pi G a^2 \bar{p} \Pi^{(V)}_i \quad (388)$$

最後に、テンソル型成分については

テンソル成分の線形アインシュタイン方程式

$$E^{(T)}_{ij}'' + 2\mathcal{H}E_{ij}^{(T)'} - (\nabla^2 - 2K)E^{(T)}_{ij} = 8\pi G a^2 \bar{\rho} \Pi^{(T)}_{ij} \quad (389)$$

となる。ただし、 $\nabla^2 B^{(V)}_i = B^{(V)}_{i|j|j}$, $\nabla^2 E^{(V)}_i = E^{(V)}_{i|j|j}$, $\nabla^2 E^{(T)}_{ij} = E^{(T)}_{ij|k|k}$ であり、3次元ラプラシアンは添字を含んだテンソル全体へ最後に作用するものとする。

■SVT 分解におけるエネルギー・運動量保存則

同様にして、エネルギー・運動量保存則も SVT 分解を用いて表す。スカラー成分については

スカラー成分のエネルギー・運動量保存則

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta + (1 + w)(\nabla^2 v^{(S)} + 3D' + \nabla^2 E^{(S)'}) + 3\mathcal{H}w\Gamma = 0 \quad (390)$$

$$\begin{aligned} \left(v^{(S)} - B^{(S)}\right)' + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\left(v^{(S)} - B^{(S)}\right) + \frac{c_s^2}{1 + w}\delta + A \\ + \frac{w}{1 + w}\left[\Gamma + \frac{2}{3}(\nabla^2 + 3K)\Pi^{(S)}\right] = 0 \end{aligned} \quad (391)$$

となる。

また、ベクトル成分は

ベクトル成分のエネルギー・運動量保存則

$$\left(v^{(V)}_i - B^{(V)}_i\right)' + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\left(v^{(V)}_i - B^{(V)}_i\right) + \frac{w}{2(1 + w)}(\nabla^2 + 2K)\Pi^{(V)}_i = 0 \quad (392)$$

となる。

5.3 ゲージ不変摂動論

付録 A 相対論的なドップラー効果

自然単位形ではなく、光速 c を明示的に含めた単位系で考える。光の 4 元波数ベクトルを k^μ とする。各成分を明示的に書くと

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) \quad (393)$$

である。 ω は角周波数、 \mathbf{k} は波数ベクトルである。光であるので

$$k^\mu k_\mu = 0 \quad (394)$$

が成り立つ。

以上のことから、S 系 (静止系) での角周波数を ω_S として x 方向に進む光の 4 元波数ベクトルは

$$k_S^\mu = \left(\frac{\omega_S}{c}, \frac{\omega_S}{c}, 0, 0 \right) \quad (395)$$

である。一方、O 系 (観測者系) は S 系に対して速度 v で運動しているとする。^{*44} この O 系における角周波数を ω_O とすると、O 系における 4 元波数ベクトルはローレンツ変換することにより

$$k_O^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega_S}{c} \\ \frac{\omega_S}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1-\beta)\frac{\omega_S}{c} \\ \gamma(1-\beta)\frac{\omega_S}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (396)$$

となる。したがって、

$$\omega_O = \gamma(1-\beta)\omega_S \quad (397)$$

が成り立つ。ここで、 $\beta = \frac{v}{c}$ 、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ であるので

$$\omega_O = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \omega_S \quad (398)$$

と書くこともできる。この式が相対論的なドップラー効果の式である。波長で表すと $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ であるので、

$$\lambda_O = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_S \quad (399)$$

となる。

^{*44} ここでは視線方向を考えている。特に、視線方向ではない一般の角度に対して考えることもできる。

参考文献

- [1] 宇宙論の物理. 宇宙論の物理, 第 2 巻. 東京大学出版会, 2014.
- [2] S. Dodelson and F. Schmidt. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2024.
- [3] P.J.E. Peebles. *The Large-scale Structure of the Universe*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1980.
- [4] 松原隆彦. 大規模構造の宇宙論. 基本法則から読み解く 物理学最前線 4. 共立出版株式会社, 2014.