

インフレーション

2025年12月2日

目次

1	粒子的ホライズン	2
2	標準ビッグバン理論の諸問題	3
2.1	ホライズン問題	3
2.2	平坦性問題	6
3	インフレーションによる解決	8
3.1	ホライズン問題の解決	8
3.2	平坦性問題の解決	11
4	インフレーションの模型	12
4.1	スカラー場によるインフレーション	12
4.2	スローロールインフレーション	12
4.3	カオス的インフレーション	12
5	加速膨張の機構	13
5.1	スカラー場による加速膨張	13
5.2	スローロールパラメータの計算例	17
6	原始密度ゆらぎの生成	18
6.1	インフレーション期のスカラー場の摂動の進化	18
6.2	曲率ゆらぎのパワースペクトル	24
付録 A	重力場に対する最小作用の原理	26

1 粒子的ホライズン

我々は光を通して宇宙を観測している。この光は有限の速度を持っている。さらに、宇宙は有限の年齢を持っている。すなわち、事象が因果関係を持つ範囲も有限である。

宇宙が等方的に膨張しており、かつ、宇宙が平坦であるとする。すると、共動座標を用いて計量は

$$ds^2 = -cdt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1)$$

で与えられる。光の経路は $ds^2 = 0$ なので、光の共動変位 dr とすると

$$0 = -cdt^2 + a^2(t)dr^2 \quad (2)$$

が成り立つ。時間変位 $dt > 0$ に対して $dr > 0$ の場合を考えると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{a(t)} \quad (3)$$

である。時刻 $t = 0$ で $r = 0$ を出発した光は、時刻 t までに進んだ共動距離 r_H は

$$r_H(t) = \int_0^t \frac{c}{a(t')} dt' \quad (4)$$

である。物理的距離に直すにはスケールファクターをかけねばよいので、

$$d_H(t) = a(t)r_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{c}{a(t')} dt' \quad (5)$$

これを粒子的ホライズンと呼ぶ。(以下では、単にホライズンと呼ぶことにする。)^{*1}

■放射優勢期

放射優勢期の始まりを $t = 0$ とする。 $a(t) \propto t^{1/2}$, $H = 1/2t$ で与えられるので、

$$\begin{aligned} d_H(t) &= a(t) \int_0^t \frac{c}{a(t')} dt' \\ &= a(t) \int_0^t \frac{c}{a_0(t'/t_0)^{1/2}} dt' \\ &= a(t) \frac{ct_0^{1/2}}{a_0} \int_0^t t'^{-1/2} dt' \\ &= a(t) \frac{ct_0^{1/2}}{a_0} 2t^{1/2} \\ &= 2ct = \frac{c}{H} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

^{*1} 粒子的ホライズンの他に事象ホライズンもありこれは未来に対しての因果関係のある距離を表す。

■物質優勢期

物質優勢期の始まりを $t = t_{\text{eq}}$ とする。 $a(t) \propto t^{2/3}$, $H = 2/3t$ で与えられるので、

$$\begin{aligned}
d_H(t) &= a(t) \int_{t_{\text{eq}}}^t \frac{c}{a(t')} dt' + d_H(t_{\text{eq}}) \\
&= a(t) \int_{t_{\text{eq}}}^t \frac{c}{a_0(t'/t_0)^{2/3}} dt' + d_H(t_{\text{eq}}) \\
&= a(t) \frac{ct_0^{2/3}}{a_0} \int_{t_{\text{eq}}}^t t'^{-2/3} dt' + d_H(t_{\text{eq}}) \\
&= a(t) \frac{ct_0^{2/3}}{a_0} 3(t^{1/3} - t_{\text{eq}}^{1/3}) + d_H(t_{\text{eq}}) \\
&= 3ct(1 - (t_{\text{eq}}/t)^{1/3}) + d_H(t_{\text{eq}}) \\
&\simeq 3ct = \frac{3}{2} \frac{c}{H} t
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。

RD,MD 期ともに $d_H(t)$ は時刻 t に比例して増加する。オーダーは cH^{-1} であり

$$L_H = cH^{-1} \tag{8}$$

をハッブル半径と呼ぶ。 L_H は光が情報を伝わる長さの目安で事象が因果律を持つ範囲の目安である。

2 標準ビッグバン理論の諸問題

標準ビッグバン理論では、観測との矛盾がいくつか存在する。

2.1 ホライズン問題

CMB の観測では、現在のハッブル半径 $cH_0^{-1} \simeq 10^{26} m$ 以内のあらゆる領域から $T_0 \simeq 2.7 K$ の等方的な放射が観測されている。その誤差はわずか $\Delta T/T \simeq 10^{-5}$ 程度である。つまり、現在のハッブル半径内のあらゆる領域は、過去において因果関係を持っていたことを表している。

CMB 光子は晴れ上がりの赤方偏移 $z_{\text{rec}} \simeq 1100$ (MD 期) の時に放出されたものを観測している。この後のホライズンは近似的に式 (7) で与えられるとして良い。 $d_H(t)$ で時刻 t に比例して増加するので、

$$d_H(t_{\text{rec}}) \simeq d_H(t_0) \frac{t_{\text{dec}}}{t_0} \tag{9}$$

となる。また、スケールファクターは $a(t) \propto t^{2/3}$ で与えられるので、

$$d_H(t_{\text{rec}}) \simeq d_H(t_0) \left(\frac{a(t_{\text{rec}})}{a(t_0)} \right)^{3/2} = d_H(t_0)(1 + z_{\text{rec}})^{-3/2} \tag{10}$$

となる。

一方、共動長さ λ に対応する物理的波長は $\lambda_{\text{ph}}(t) = a(t)\lambda$ で与えられる。したがって、現在観測可能な距離である $d_{\text{H}}(t_0)$ は晴れ上がりの時刻では

$$\lambda_{\text{ph}}(t_{\text{rec}}) = d_{\text{H}}(t_0) \frac{a(t_{\text{rec}})}{a(t_0)} = d_{\text{H}}(t_0)(1 + z_{\text{rec}})^{-1} \quad (11)$$

に対応する。ホライズンと比較すると、

$$\frac{d_{\text{H}}(t_{\text{rec}})}{\lambda_{\text{ph}}(t_{\text{rec}})} = (1 + z_{\text{rec}})^{-1/2} \simeq 1/30 \quad (12)$$

である。これを体積に換算すると $(1/30)^3 \simeq 10^{-5}$ である。晴れ上がりの時に因果関係を持っていた領域は、現在のハッブル半径内の領域のうち 10^{-5} 程度に過ぎない。全く知らない場所同士が初期条件としてたまたま同じ温度を持っているのは不自然である。この問題を**ホライズン問題**と呼ぶ。

この問題はどうして起こるのだろうか。これは宇宙の膨張が減速的であるときに存在する。スケールファクターの時間変化が

$$a(t) = a_i t^p \quad (13)$$

で与えられる場合を考える。このとき、 H は

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{p}{t}$$

であるので、ハッブル半径は

$$L_{\text{H}} = cH^{-1} = \frac{c}{p} t \propto a^{1/p} \quad (14)$$

のように変化する。また、共動長さ λ に対応する物理的波長は

$$\lambda_{\text{ph}} = a\lambda \propto a \propto t^p \quad (15)$$

と変化する。宇宙が減速膨張している場合、 $0 < p < 1$ であるので、 λ_{ph} は L_{H} よりも遅く増加する。宇宙が加速膨張している場合、 $p > 1$ であるので、 λ_{ph} は L_{H} よりも早く増加する。

現在ちょうど $\lambda_{\text{ph}} = L_{\text{H}} \simeq cH^{-1}$ となる過去の時間変化は図 1 のようになる。図から分かるように宇宙の過去の大部分が減速的な膨張であった場合にこの問題が起こることが分かる。

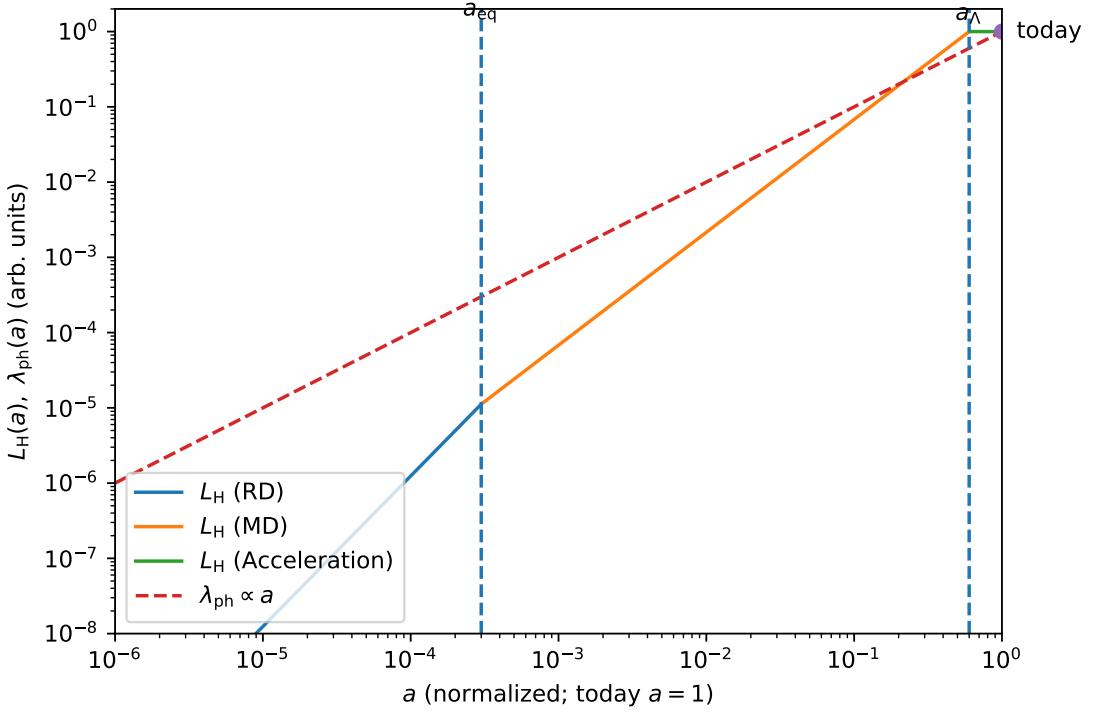


図 1 減速膨張期（放射・物質）から加速膨張期（ Λ 優勢）への遷移における $L_H(a)$ と $\lambda_{ph}(a)$ 。
今日 $a = 1$ で規格化。

さらに、以下のような説明もできる。また、共形時間 η

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (16)$$

を用いると、計量は

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2) \quad (17)$$

である。図 2 のようにダイアグラムを描くことができる。光円錐の内側にある領域が因果関係を持つ領域である。現在観測される CMB 光子について異なる二つの点 p, q から放射された光子を考える。 p, q についての光円錐は互いに交わっていない。しかし、現在の観測では p, q からやってきた光子は同じ温度を持っている。どうやって互いに同じ温度を持つことができたのか説明できない。

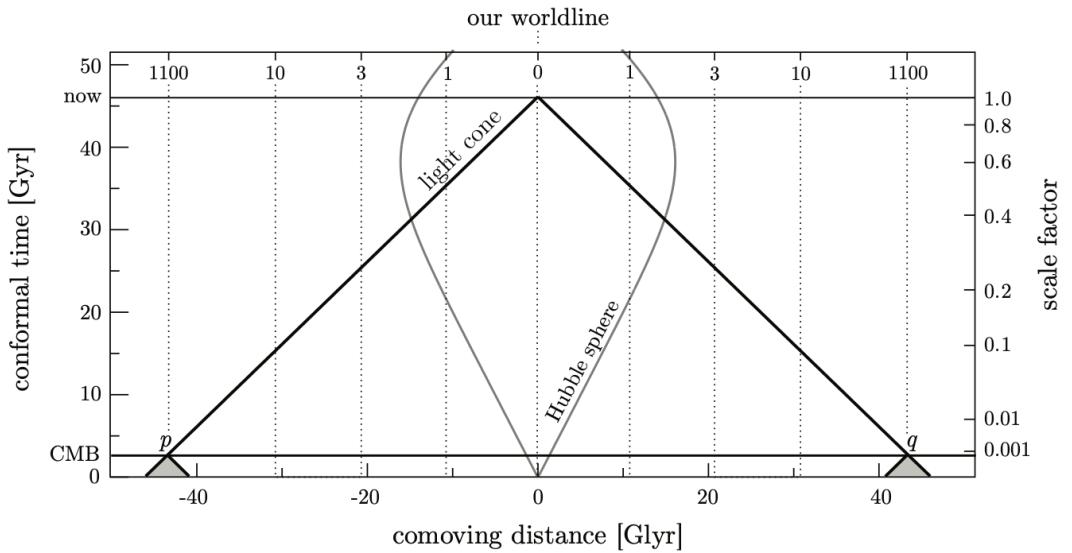


図 2 共形時間と共動座標のダイアグラム。現在観測されている CMB 光子について因果関係を持っていたのはグレーで描かれているところのみ。たまたま、誤差 10^{-5} で同じ温度を持っているのは不自然。[2] より引用。

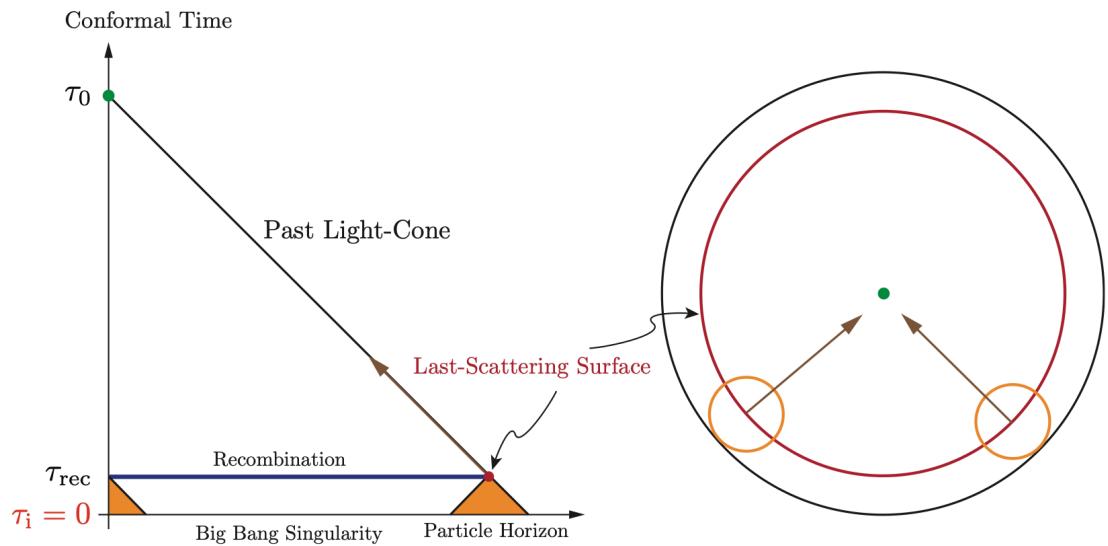


図 3 共形時間と共動座標のダイアグラム。簡略版。[1] より引用。

2.2 平坦性問題

CMB 観測から空間曲率 K の割合は

$$\Omega_K = 0.001 \pm 0.002 \quad (18)$$

と制限されている。つまり、宇宙は非常に平坦である。宇宙のスケールファクターが $a(t) = a_i t^p$ で与えられる場合を考える。減速膨張の場合、 $0 < p < 1$ で空間曲率 K の密度パラメータの絶対値は

$$|\Omega_K| = \frac{c^2 |K|}{a^2 H^2} = \frac{c^2 |K|}{a_i^2 p^2} t^{2(1-p)} \quad (19)$$

のように時間変化する。 $0 < p < 1$ であるので、 $|\Omega_K|$ は時間とともに増加する。RD 期は $|\Omega_K| \propto t \propto a^2$ 、MD 期は $|\Omega_K| \propto t^{2/3} \propto a$ である。加速膨張期では $|\Omega_K|$ は時間とともに減少するがその期間は短い。つまり、MD 期の終わり頃には $|\Omega_K|$ の観測的上限がついて 0.003 程度になる。等密度期（赤方偏移 $z_{\text{eq}} \simeq 3400$ ）における $|\Omega_K|$ の値を考える。MD 期の上限を用いると

$$|\Omega_K^{\text{eq}}| \simeq \left| \Omega_K^{(0)} \right| \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} = \frac{\left| \Omega_K^{(0)} \right|}{1 + z_{\text{eq}}} \lesssim 10^{-6} \quad (20)$$

の上限がつく。さらに、それ以前の RD 期においては

$$|\Omega_K| \lesssim 10^{-6} \left(\frac{a}{a_{\text{eq}}} \right)^2 \quad (21)$$

と制限される。さらに、

$$|\Omega_K^{\text{BBN}} - 1| < \mathcal{O}(10^{-16}) \quad (22)$$

$$|\Omega_K^{\text{GUT}} - 1| < \mathcal{O}(10^{-55}) \quad (23)$$

$$|\Omega_K^{\text{Pl}} - 1| < \mathcal{O}(10^{-61}) \quad (24)$$

のような制限がついている。

このように $a \ll a_{\text{eq}}$ のとき、 $|\Omega_K|$ は非常に小さな値を取る必要がある。宇宙はなぜこのような極めて高い精度で平坦に近いのかという問題を平坦性問題と呼ぶ。つまり、現在のような宇宙を実現するには初期条件として非常に不自然な微調整が必要になる。

■磁気单極子問題

大統一理論 (GUT) では、磁気单極子が生成されると予想されている。しかし、現在までに磁気单極子は観測されていない。この問題を磁気单極子問題と呼ぶ。

3 インフレーションによる解決

前節で標準ビッグバン理論の問題点を述べた。この問題は宇宙の大部分が減速膨張であったことに起因することを述べた。もし、RD期前に宇宙が加速膨張していた時期があったとして、

$$a(t) = a_i t^p, \quad p > 1 \quad (25)$$

で与えられるとする。このとき、標準ビッグバン理論の問題はどのように解決されるのかを考える。

3.1 ホライズン問題の解決

ハッブルパラメータは

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{p}{t}$$

であるので、ハッブル半径 L_H は

$$L_H = cH^{-1} = \frac{c}{p} t \propto a^{1/p} \quad (26)$$

と変化する。インフレーションが始まった時に、ハッブル半径の内部の領域は因果関係を持っている。ハッブル半径内にある 2 点の共動距離を λ とすると、対応する物理的距離 λ_{ph} は

$$\lambda_{\text{ph}} = a\lambda \propto a \quad (27)$$

のように増加する。

インフレーション期では $p > 1$ であるので、 λ_{ph} は L_H よりも早く増加する。特に、 $p \gg 1$ であれば、 $L_H = a^{1/p}$ はゆっくりと増加する。インフレーションの始まりでは、 $\lambda_{\text{ph}} < L_H$ であるが、やがて、 $\lambda_{\text{ph}} = L_H$ となる。このときを 1 回目のハッブル半径の横断と呼ぶ。共動距離 λ に対応する共動波数 $k = 1/\lambda$ を用いると、ハッブル半径の横断の瞬間には、 $a/k = cH^{-1}$ が成り立つので、

$$ck = aH \quad (28)$$

を満たす。この横断の後には $\lambda_{\text{ph}} > L_H$ となる。つまり、インフレーションの開始時にはハッブル半径の中にあり因果関係を持っていた長さ λ_{ph} の領域は、インフレーション期にハッブル半径の外に出てしまう。

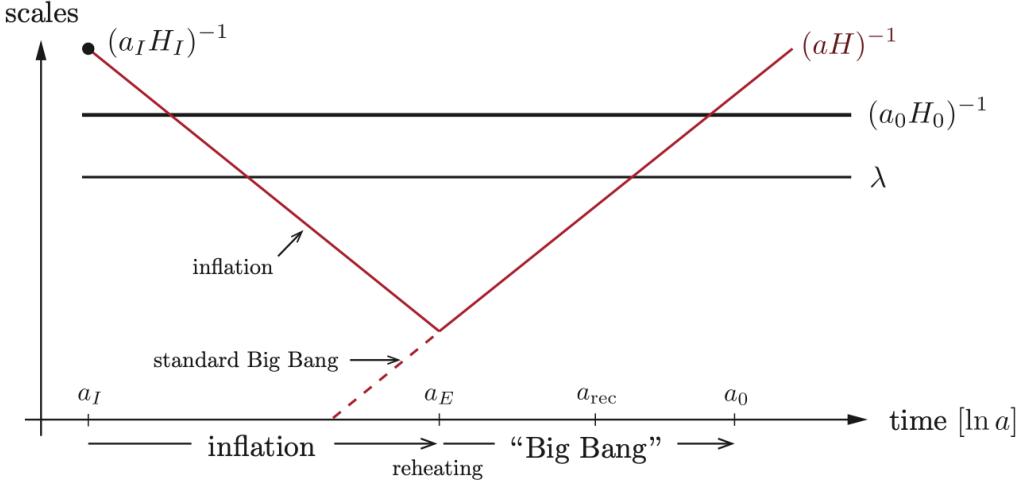


図4 共動スケールでのハッブル半径と物理的波長の時間変化。[2] より引用。

インフレーションが終わると、 L_H は λ_{ph} よりも早く変化する。つまり、 λ_{ph} は再び L_H を追い越す。これが、2回目のハッブル半径の横断である。横断後は、 $\lambda_{\text{ph}} < L_H$ となり、 λ_{ph} はハッブル半径の中に戻る。

つまり、インフレーション期で $\lambda_{\text{ph}} < L_H$ の領域に入り、因果関係を持っていたことになる。したがって、現在のハッブル半径 cH_0^{-1} の大スケールで過去に因果関係を持っていたことになり、ホライズン問題が解決される。

ホライズン問題が解決されるためには、どの程度のインフレーションが必要かを考える。インフレーション中の任意の時刻を t から終了時刻を t_f までの e-folding 数を

$$N(t) = \ln \frac{a(t_f)}{a(t)} \quad (29)$$

と定義する。

CMB で観測されている最大スケールは $cH_0^{-1} \simeq 10^{26} \text{ m}$ 程度である。このスケールに等しい物理的スケール $\lambda_{\text{ph}1} = \lambda_1 a_0$ がインフレーション中に1回目のハッブル半径の横断をしたときの e-folding 数 N_{CMB} を評価する。このスケールは、共動波数 k_1 では $cH_0^{-1} = a_0/k_1$ より

$$ck_1 = a_0 H_0$$

を満たす。1回目のハッブル半径の横断時のスケール因子を a_{inf} 、ハッブルパラメータを H_{inf} とする、

$$ck_1 = a_{\text{inf}} H_{\text{inf}}$$

である。したがって、

$$1 = \frac{ck_1}{a_0 H_0} = \frac{a_{\text{inf}} H_{\text{inf}}}{a_0 H_0} = \frac{a_{\text{inf}}}{a_f} \frac{a_f}{a_{\text{eq}}} \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} \frac{H_{\text{inf}}}{H_0} \quad (30)$$

が成り立つ。 a_f はインフレーション終了時のスケール因子、 a_{eq} は等密度時のスケール因子である。ここで、 $N_{\text{CMB}} = \ln(a_f/a_{\text{inf}})$ であるので、式(30)より

$$N_{\text{CMB}} = \ln \frac{a_f}{a_{\text{eq}}} + \ln \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} + \ln \frac{H_{\text{inf}}}{H_0} \quad (31)$$

を得る。インフレーション期の後に再加熱期があるが、ここでは無視をしてインフレーション終了から RD 期まで、 $a(t) \propto t^{1/2}$ で与えられるとする。したがって、等密度時の赤方偏移を z_{eq} とすると

$$\frac{a_f}{a_{\text{eq}}} = \left(\frac{t_f}{t_{\text{eq}}} \right)^{1/2}, \quad \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} = \frac{1}{1+z_{\text{eq}}}$$

が成り立つので

$$N_{\text{CMB}} \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{t_f}{t_{\text{eq}}} - \ln(1+z_{\text{eq}}) + \ln \frac{H_{\text{inf}}}{H_0} \quad (32)$$

となる。

t_{eq} を見積もる。 t_{eq} は等密度時のハッブルパラメータ H_{eq} の逆数のオーダーである。等密度時には

$$\Omega_r^{(0)}(1+z_{\text{eq}})^4 = \Omega_m^{(0)}(1+z_{\text{eq}})^3$$

が成り立つ。一般には

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)} + \Omega_K^{(0)}(1+z)^2}$$

であるが、この時期は暗黒エネルギーと空間曲率は無視できるので

$$H_{\text{eq}} = H_0 \sqrt{2\Omega_m^{(0)}(1+z_{\text{eq}})^3} \quad (33)$$

となる。CMB 観測から $H_0^{-1} = 1.45 \times 10^{10} \text{ yr}$, $\Omega_m^{(0)} = 0.315$, $z_{\text{eq}} = 3400$ であるので、を用いると

$$t_{\text{eq}} \simeq H_{\text{eq}}^{-1} \simeq 10^{12} \text{ s} \quad (34)$$

と評価できる。後に述べるが、CMB の温度ゆらぎの観測から H_{inf} の制限がつく。 H_{inf}^{-1} はインフレーションが起こり始める時刻を特徴づけており、 $H_{\text{inf}}^{-1} \simeq 10^{-38} \text{ s}$ 程度である。インフレーションが終了する時刻は $\sim 100H_{\text{inf}}^{-1}$ 程度が典型的な値である。

これらを用いると、

$$N_{\text{CMB}} \simeq 65 \quad (35)$$

程度になる。つまり、インフレーションの始まりから終わりまでの e-folding 数が

$$N > 65 \quad (36)$$

を満たせば、ホライズン問題が解決される。ただし、再加熱の過程を考慮したり、インフレーション模型によって H_{inf} が異なったりするので、 N_{CMB} は 55 から 65 程度である。

3.2 平坦性問題の解決

平坦性問題は過去に遡るほどに曲率の密度パラメータが小さくなる。しかし、現在の宇宙は非常に平坦であるので初期宇宙がたまたま平坦であるということは不自然であることが問題であった。この問題もインフレーションによって解決される。

前章で見たように、 $\Omega_K \propto t^{2(1-p)}$ である。インフレーション期では $p > 1$ であるので、 Ω_K は時間とともに減少する。さらに、 $p \gg 1$ であれば、 Ω_K は非常に早く減少する。インフレーションが終わると、 Ω_K は再び増加し始める。しかし、インフレーションが十分に長く続ければ、現在の宇宙が非常に平坦であることは自然に説明できる。

地平線問題はどの程度の e-folding 数があれば解決されるかを考える。インフレーションの開始時刻を t_i 、終了時刻を t_f とする。この終了時の e-folding 数を

$$N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \quad (37)$$

とする。ハッブル半径 L_H と H は $L_H \propto a^{1/p}$, $H \propto a^{-1/p}$ であった。したがって、 $p \gg 1$ のときは近似的に一定とすることができる。つまり、 Ω_K の変化は

$$\Omega_K \propto \frac{1}{a^2 H^2} \propto \frac{1}{a^2} \quad (38)$$

となる。よって、インフレーション終了直後の Ω_K は

$$|\Omega_K(t_f)| = \left(\frac{a(t_i)}{a(t_f)} \right)^2 |\Omega_K(t_i)| = e^{-2N} |\Omega_K(t_i)| \quad (39)$$

となる。

以下では、 $|\Omega_K(t_i)| = \mathcal{O}(1)$ としたときに N の下限を評価する。CMB 観測では曲率について式 (21)

$$|\Omega_K| \lesssim 10^{-6} \left(\frac{a}{a_{\text{eq}}} \right)^2$$

のような制限がついている。インフレーション直後に RD 期 ($a \propto t^{1/2}$ が始まるとすると、 $t = t_f$ 時点で

$$|\Omega_K(t_f)| \lesssim 10^{-6} \left(\frac{a(t_f)}{a_{\text{eq}}} \right)^2 = 10^{-6} \frac{t_f}{t_{\text{eq}}} \quad (40)$$

となる。 $t_{\text{eq}} \simeq 10^{12}$ s, $t_f \simeq 10^{-36}$ s であるので

$$|\Omega_K(t_f)| \lesssim 10^{-54} \quad (41)$$

となる。 $|\Omega(t_f)| = 1$ とすると式 (39) より

$$e^{-2N} \lesssim 10^{-54}$$

より

$$N > 62 \quad (42)$$

であれば平坦性問題が解決される。ホライズン問題の解決に必要な e-folding 数と合わせると $N > 65$ 程度であれば 2 つの問題は同時に解決できる。

つまり、 $10^{-36} \text{ s} \lesssim t \lesssim 10^{-34} \text{ s}$ の間にスケールファクターが初期の値の $e^{65} \simeq 10^{28}$ 倍に増加するようなインフレーションが起こっていれば、標準ビッグバン理論の問題は解決される。スケール的には 10^{-30} m 程度の大きさが 1cm 程度にまで膨張することになる。

4 インフレーションの模型

インフレーションの模型は一口に言っても様々なものがある。^{*2}

- 4.1 スカラー場によるインフレーション
- 4.2 スローロールインフレーション
- 4.3 カオス的インフレーション

^{*2} さまざまなインフレーション模型については、[3] が詳しい。めちゃくちゃ容量が多いので、開くときは注意。

5 加速膨張の機構

5.1 スカラー場による加速膨張

■スカラー場の方程式

インフレーションを起こす起源である場のことをインフラトンと呼ぶ。以下では、インフラトンがスカラー場である場合を考える。スカラー場は作用を S_m として

$$S_m = \int d^4 \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (43)$$

と表される。

一般にスカラー場は時間と空間の関数であるが、曲率が無視できる一様等方宇宙では ϕ は x^i に依存せず、 t のみの関数となる。

$$\phi = \phi(t) \quad (44)$$

インフレーションが始まると曲率は急速に減少するので曲率を無視したときのインフレーション機構を考える。^{*3}このときの計量は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2$$

であった。したがって、

$$\sqrt{-g} = a^3(t)$$

より

$$L := \sqrt{-g} \mathcal{L} = a^3(t) \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \quad (45)$$

となる。オイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (46)$$

を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{a^3(t)}{c^2} \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{3a^2(t)\dot{a}(t)}{c^2} \dot{\phi} + \frac{a^3(t)}{c^2} \ddot{\phi} = \frac{3a^3(t)H}{c^2} \dot{\phi} + \frac{a^3(t)}{c^2} \ddot{\phi} \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -a^3(t)V'(\phi) \end{aligned}$$

^{*3} 詳しい議論は次の節で行う。時間がない場合は、この節を読んで物足りない場合は、次の節を読むのが良いだろう。

より

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + c^2V'(\phi) = 0 \quad (47)$$

となる。

この方程式を見ると、 $c^2V'(\phi)$ はポテンシャルの勾配によってスカラー場に働く力を表している。 $3H\dot{\phi}$ は $\dot{\phi}$ に比例する項であり、摩擦のような役割を果たしている。

また、ハミルトニアンを求めると

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^3(t)}{c^2}\dot{\phi}$$

より

$$\mathcal{H} = p\dot{\phi} - L = a^3 \left[\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (48)$$

となる。スカラー場のエネルギー密度 ε_ϕ は

$$\varepsilon_\phi = \frac{\mathcal{H}}{a^3} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (49)$$

となる。これを時間微分すると式 (47) を用いて

$$\dot{\varepsilon}_\phi = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi} = \dot{\phi} \left(\frac{1}{c^2}\ddot{\phi} + V'(\phi) \right) = -3H\frac{\dot{\phi}^2}{c^2} \quad (50)$$

一様等方宇宙ではエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (51)$$

で与えられる。^{*4}したがって、今の場合の $T_{\mu\nu}$ は

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 - c^2 \left(-\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + c^2V(\phi) = c^2\varepsilon_\phi \quad (52)$$

$$T_{0i} = 0 \quad (53)$$

$$T_{ij} = \delta_{ij} \left(-\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \quad (54)$$

となる。よって、スカラー場の圧力 p_ϕ は

$$p_\phi = \frac{1}{3}T_{ii} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (55)$$

となる。^{*5}

^{*4} 詳しい議論は付録を参照。

^{*5} 一様等方宇宙論においてのエネルギー保存則

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p_\phi) = 0 \quad (56)$$

が成り立っている。

スカラー場の方程式 (47) を解くには、ハップルパラメータ H を知る必要がある。 $K = 0$ のフリードマン方程式は

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2}\varepsilon$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p) = -\frac{1}{6M_{\text{pl}}^2}(\varepsilon + 3p)$$

であった。ここで、 $M_{\text{pl}} = c/\sqrt{8\pi G}$ を用いた。これらを用いると

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2}\varepsilon_\phi = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2}\left(\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{\text{pl}}^2}(\varepsilon_\phi + 3p_\phi) = -\frac{1}{6M_{\text{pl}}^2}\left(\frac{2}{c^2}\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)\right)$$

より

$$3H^2 M_{\text{pl}}^2 = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (57)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2}\left(V(\phi) - \frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2\right) \quad (58)$$

を得る。

■スローロール近似

インフレーションは $\ddot{a} > 0$ であるので、

$$V(\phi) > \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} \quad (59)$$

を満たす必要がある。つまり、式 (55) で与えられているスカラー場の圧力は負である必要がある。この条件はスカラー場のポテンシャルエネルギーが運動エネルギーよりも大きいことを意味している。したがって、ポテンシャル V は十分に平らであ離、スカラー場がその領域をゆっくりと動いているということである。特に、 $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2/c^2$ であれば、 $\ddot{\phi}$ は無視できるので、式 (47) は

$$3H\dot{\phi} + c^2V'(\phi) \simeq 0 \quad (60)$$

となる。このことは、ポテンシャルの勾配と摩擦が釣り合っていることを意味している。また、式 (57) は

$$3H^2 M_{\text{pl}}^2 \simeq V(\phi) \quad (61)$$

となる。この式を t で微分すると

$$6H\dot{H}M_{\text{pl}}^2 \simeq V'(\phi)\dot{\phi}$$

であり、式(60)を用いると

$$6H\dot{H}M_{\text{pl}}^2 \simeq -\frac{3H}{c^2}\dot{\phi}^2$$

$$\dot{H}M_{\text{pl}}^2 \simeq -\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2}$$

より

$$\dot{H} \simeq -\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2M_{\text{pl}}^2} \quad (62)$$

を得る。このようなスカラー場の運動エネルギーがポテンシャルエネルギーよりも十分に小さいとする近似のことを**スローロール近似**と呼ぶ。

■スローロールパラメータ

この近似の下で、e-folding数 N をスカラー場のポテンシャル $V(\phi)$ を用いて表すことを考える。 $N(t) = \ln(a(t_f)/a(t))$ を t で微分すると $\dot{N} = -H$ となるので、

$$N = - \int_{t_f}^t dt' H = - \int_{\phi_f}^{\phi} d\phi' \frac{H}{\dot{\phi}'} \quad (63)$$

となる。ここで、式(60)と(61)を用いると

$$\frac{H}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{V}{c^2 M_{\text{pl}}^2 V'}$$

となるので、 N は

$$N \simeq \frac{1}{c^2 M_{\text{pl}}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} d\phi \frac{V}{V'}$$

と表される。したがって、各インフレーションモデルによって与えられたポテンシャルを用いることによって、 N は ϕ の関数として評価できる。このとき、 ϕ_f を決定する必要がある。

ϕ_f を決定する方法を考える。 $w = p/\epsilon c^2$ を用いてフリードマン方程式を考えると $a(t) \propto t^{2/3(1+w)}$ となるのであった。したがって、宇宙が加速膨張をしているためには $w < -1/3$ である必要がある。ここで、

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (64)$$

を定義する。この量を**(第一)スローロールパラメータ**と呼ぶ。 w は H を用いて

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p)$$

より $H^2 = (8\pi G/3c^2)\varepsilon$ を用いると

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 = -\frac{1}{2}(1 + 3w)$$

となるので、

$$w = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} = -1 + \frac{2}{3} \epsilon_H$$

と表される。インフレーションが起こるためには $w < -1/3$ である必要があるので、 $\epsilon_H < 1$ となれば良い。特に、 $\epsilon_H \ll 1$ であれば、 $w \simeq -1$ となり、 $a(t)$ の時間変化は指数関数的になる。インフレーションが終わりに近づくと ϵ_H は 1 に近づき、加速膨張期は終了する。スローロール近似の式を用いると、

$$\epsilon_H \simeq \frac{3\dot{\phi}^2}{2c^2V} \simeq \frac{c^2V'^2}{6H^2V} \simeq \frac{c^2M_{\text{pl}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (65)$$

となる。したがって、インフレーション終了時のスカラー場の値 ϕ_f は、条件 $\epsilon_H(\phi_f) = 1$ を満たす ϕ_f として決定できる。

5.2 スローロールパラメータの計算例

6 原始密度ゆらぎの生成

6.1 インフレーション期のスカラー場の摂動の進化

以下では、自然単位系を用いる。前節では、スカラー場 ϕ によるインフレーションを考えた。その節では、スカラー場は時間にのみ依存する一様な場であるとした。しかし、実際にはスカラー場は完全に一様ではなく、微小なゆらぎ $\delta\phi(t, x)$ が存在する。背景時空でのスカラー場を $\phi_0(t)$ とすると、スカラー場は

$$\phi(t, x) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, x) \quad (66)$$

と表される。ただし、 $|\delta\phi| \ll |\phi_0|$ であるとする。このとき、 ϕ のポテンシャルを泰ラー展開すると

$$V(\phi) = V(\phi_0) + V'(\phi_0)\delta\phi + \frac{1}{2}V''(\phi_0)\delta\phi^2 + \mathcal{O}(\delta\phi^3) \quad (67)$$

となる。以下では、簡単のために $\phi_0(t)$ を $\phi(t)$ と書く。ラグランジアンは

$$L = \sqrt{-g}\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right]$$

であり、計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2$$

である。ここに $\phi = \phi(t) + \delta\phi(t, x)$ を代入し、 $\delta\phi$ について 2 次まで展開すると

$$\begin{aligned} L &= a^3\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right] + a^3\left[\dot{\phi}\delta\phi - V'(\phi)\delta\phi\right] \\ &\quad + a^3\left[\frac{1}{2}\delta\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2a^2(t)}(\nabla\delta\phi)^2 - \frac{1}{2}V''(\phi)\delta\phi^2\right] + \mathcal{O}(\delta\phi^3) \end{aligned}$$

を得る。 $\delta\phi$ に関するオイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\delta\phi}}\right) + \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_i\delta\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\delta\phi} = 0$$

より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\delta\phi}} &= a^3\left(\dot{\phi} + \delta\dot{\phi}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\delta\phi}}\right) = 3a^2\dot{a}(\dot{\phi} + \delta\dot{\phi}) + a^3(\ddot{\phi} + \delta\ddot{\phi}) \\ &\quad = 3a^3H(\dot{\phi} + \delta\dot{\phi}) + a^3(\ddot{\phi} + \delta\ddot{\phi}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\partial_i\delta\phi} = -a\partial_i\delta\phi, \quad \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_i\delta\phi}\right) = -a\partial^2\delta\phi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta\phi} = -a^3(V' + V''\delta\phi)$$

となるので、

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \frac{1}{a^2}\partial^2\delta\phi + V''\delta\phi = 0 \quad (68)$$

が得られる。このままでは解析が難しいので、 $\delta\phi$ をフーリエ変換する。

$$\delta\phi(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta\phi_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (69)$$

とすると、

$$\ddot{\delta\phi}_k + 3H\dot{\delta\phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + V''\right)\delta\phi_k = 0 \quad (70)$$

となる。

$\delta\phi$ の運動方程式に寄与するラグランジアンはフーリエ空間では

$$L_{\delta\phi_k} = a^3 \left[\frac{1}{2}\dot{\delta\phi}_k^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{a^2} + V''\right)\delta\phi_k^2 \right] \quad (71)$$

である。したがって、 $\delta\phi_k$ のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = p_{\delta\phi_k}\dot{\delta\phi}_k - L_{\delta\phi_k} = a^3 \left[\frac{1}{2}\dot{\delta\phi}_k^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{a^2} + V''\right)\delta\phi_k^2 \right] \quad (72)$$

となる。ここで、

$$p_{\delta\phi_k} = \frac{\partial L_{\delta\phi_k}}{\partial \dot{\delta\phi}_k} = a^3\dot{\delta\phi}_k \quad (73)$$

である。前に述べたように、インフレーションが起こるときはスカラー場のポテンシャルは平坦に近い。つまり、 $V'' \ll H^2$ であると考えられる。以下では、この項を無視する。

インフレーションの始まりの頃のハッブル半径 H^{-1} よりも十分内側にある量子ゆらぎを考える。その物理的波長 a/k は H^{-1} よりも十分小さいので、

$$\omega := \frac{k}{a} \gg H \quad (74)$$

を満たす。この領域では、式 (70) は

$$\ddot{\delta\phi}_k + \omega^2\delta\phi_k \simeq 0 \quad (75)$$

となる。この方程式の解は

$$\delta\phi_k(t) \simeq A \cos\left(\int \omega dt\right) \quad (76)$$

である。この解は

$$\left| \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right| = \frac{aH}{k} \ll 1 \quad (77)$$

という条件を満たすので、2回微分を計算すると

$$\ddot{\delta\phi}_k = -\omega^2\delta\phi_k + \frac{\dot{\omega}}{\omega}\delta\dot{\phi}_k \simeq -\omega^2\delta\phi_k$$

となるので、解(77)は近似的に成り立つ。このときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H} \simeq a^3 \left[\frac{1}{2}\delta\dot{\phi}_k^2 + \frac{1}{2}\omega^2\delta\phi_k^2 \right] \quad (78)$$

となる。

インフレーション期に生成されるゆらぎの振幅を評価するには、量子論的な扱いが必要になる。

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{m}}\delta\phi_k \quad (79)$$

と定義する。また、時間で微分すると

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{a^3}{m}} \left(\delta\dot{\phi}_k + \frac{3}{2}H\delta\phi_k \right) \quad (80)$$

となる。式(76)より $\delta\dot{\phi}_k \simeq \omega A \sin(\int \omega dt)$ であるので、 $\delta\dot{\phi}_k$ は $\omega\delta\phi_k$ のオーダー程度である。つまり、

$$\dot{x} \simeq \sqrt{\frac{a^3}{m}}\delta\dot{\phi}_k \quad (81)$$

となる。したがって、 $\omega \gg H$ であることから、 H の項は無視できる。したがって、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} \simeq \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

となる。また、 $p = m\dot{x}$ とすると、

$$\mathcal{H} \simeq \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (82)$$

となる。このハミルトニアンは質量 m 、角振動数 ω の調和振動子のハミルトニアンと同じ形をしている。よって、生成演算子 a^\dagger 、消滅演算子 a

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - \frac{i}{m\omega}p \right), \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + \frac{i}{m\omega}p \right) \quad (83)$$

を導入すると、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (84)$$

と表すことができる。 x, p と固有状態 $|n\rangle$ は

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger) \quad (85)$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (86)$$

となる。これを用いて基底状態における x^2 の期待値を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle 0 | x^2 | 0 \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | (a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2) | 0 \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | (aa^\dagger) | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \end{aligned}$$

となる。また、 p^2 の期待値についても同様に計算すると、

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \langle 0 | p^2 | 0 \rangle \\ &= -\frac{m\omega\hbar}{2} \langle 0 | (a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + (a^\dagger)^2) | 0 \rangle \\ &= -\frac{m\omega\hbar}{2} \langle 0 | (-aa^\dagger) | 0 \rangle = \frac{m\omega\hbar}{2} \end{aligned}$$

となる。

$x = \sqrt{a^3/m}\delta\phi_k$ であるので、 $\delta\phi_k^2$ における期待値は

$$\langle \delta\phi_k^2 \rangle = \frac{m}{a^3} \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2a^3\omega} = \frac{\hbar}{2a^2k} \quad (87)$$

となる。また、 $\delta\phi_k$ の共役運動量 $p_{\delta\phi_k}$ は $p_{\delta\phi_k} = a^3\dot{\delta\phi}_k$ である。さらに、 $\dot{\delta\phi}_k = \dot{x}\sqrt{m/a^3} = p/\sqrt{ma^3}$ であったので、

$$\langle p_{\delta\phi_k}^2 \rangle = a^6 \langle \dot{\delta\phi}_k^2 \rangle = \frac{a^3}{m} \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar a^3 \omega}{2} = \frac{\hbar a^2 k}{2} \quad (88)$$

が得られる。これらは不確定性関係

$$\sqrt{\langle \delta\phi_k^2 \rangle \langle p_{\delta\phi_k}^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2} \quad (89)$$

を満たしている。

これまでの議論は量子力学の調和振動子と実スカラー場のハミルトニアンとの対応に基づいている。実際は、 $\delta\phi$ 時間の 2 回微分を含んだクライン-ゴルドン方程式を満たしている。さらに、スカラー場の量子化は第二量子化をすることによって行われる。つまり、場 $\delta\phi_k$ を演算子に昇格させる。モード関数 $u(t, \mathbf{k})$ を用いて、

$$\delta\phi_k(t) = u(t, \mathbf{k})a(\mathbf{k}) + u^*(t, -\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k}) \quad (90)$$

と表される。ここで、 $a(\mathbf{k})$ 、 $a^\dagger(\mathbf{k})$ は

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (91)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (92)$$

を満たす。これらを用いて計算することができる。

CMB 観測に関係する量を考える。これが、2 点相関関数の真空期待値 $\langle 0 | \delta\phi_k(t)\delta\phi_{k'}(t) | 0 \rangle$ である。スカラー場のパワースペクトル $P_{\delta\phi}(k)$ を

$$\langle 0 | \delta\phi_k(t)\delta\phi_{k'}(t) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\delta\phi}(t, k) \quad (93)$$

と定義する。宇宙の等方性のために、 $P_{\delta\phi}$ は t と $k = |\mathbf{k}|$ のみに依存する。

左辺は、

$$\begin{aligned} \langle 0 | \delta\phi_k(t)\delta\phi_{k'}(t) | 0 \rangle &= \langle 0 | (u(t, \mathbf{k})a(\mathbf{k}) + u^*(t, -\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k})) (u(t, \mathbf{k}')a(\mathbf{k}') + u^*(t, -\mathbf{k}')a^\dagger(-\mathbf{k}')) | 0 \rangle \\ &= u(t, \mathbf{k})u^*(t, -\mathbf{k}') \langle 0 | a(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k}') | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') |u(t, \mathbf{k})|^2 \end{aligned}$$

である。したがって、パワースペクトルは

$$P_{\delta\phi}(t, k) = |u(t, k)|^2 \quad (94)$$

と表される。

モード関数 $u(t, k)$ は式 (70) を満たす。したがって、上の近似を使った式と同じ形になり

$$\ddot{u} + \omega^2 u \simeq 0 \quad (95)$$

となる。したがって、上の議論と同じように解は

$$u = A e^{-i \int \omega dt} \quad (96)$$

が存在する。 $(A$ は正の実定数) $E = i\hbar\partial/\partial t$ を用いて、この解のエネルギーを計算すると、

$$Eu = \hbar\omega u$$

となる。 u は 2 回微分方程式なので、もう一つの解が存在し $u = B e^{i \int \omega dt}$ である。これについてもエネルギーを計算すると、

$$Eu = -\hbar\omega u$$

となる。したがって、 $u = B e^{i \int \omega dt}$ の負のエネルギー解であり、 $u = A e^{-i \int \omega dt}$ は正のエネルギー解である。ここでは、正のエネルギー解のみを考える。

u の共役運動量は $\delta\phi_k$ の共役運動量と同様に

$$p_u = a^3 \dot{u} = -i a^3 \omega u \quad (97)$$

である。不確定性原理(式(89))は u についても成り立つので

$$\sqrt{|u^2||p_u^2|} = \frac{\hbar}{2} \quad (98)$$

を満たす。したがって、 $|u|^2 = A^2$ は

$$A^2 a^3 \omega = \frac{\hbar}{2}$$

となるので、

$$A = \sqrt{\frac{\hbar}{2a^2 k}} \quad (99)$$

が得られる。したがって、パワースペクトルは

$$P_{\delta\phi}(t, k) = |u(t, k)|^2 = \frac{\hbar}{2a^2 k} \quad (100)$$

となる。

ここまで議論は $\omega = k/a \gg H$ を満たす必要があった。インフレーション中は H はほぼ一定である。しかし、 k/a は急激に減少するのでいざれ

$$\omega = \frac{k}{a} \ll H \quad (101)$$

となる。この領域では、式(70)は

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k \simeq 0 \quad (102)$$

となる。つまり、1回目のハップル半径の横断の前後で $\delta\phi_k$ の解の振る舞いが変わる。 u についても同じ方程式 $\ddot{u} + 3Hu$ を満たす。この方程式は

$$\frac{d}{dt}(a^3 u) = 0$$

と変形できるので、

$$u = C_1 + C_2 \int_{t_k}^t \frac{dt'}{a^3(t')} \quad (103)$$

と表される。ただし、 t_k は $k/a = H$ を満たす時刻である。インフレーション中は H が近似的に一定で、 $a(t) \simeq a_i e^{Ht}$ と変化するので、

$$u \simeq C_1 + \frac{C_2}{3Ha_i^3} (e^{-3Ht_k} - e^{-3Ht}) \quad (104)$$

となる。 $t \gg t_k$ であれば、 $u \simeq C_1 + C_2 e^{-3Ht_k}/(3a_i^3 H)$ となるので一定値に近づく。つまり、 $k/a \gg H$ で零点振動をしていた量子ゆらぎはインフレーションによって $k/a \ll H$ の領域に入るとな古典的なゆらぎに変化し、その振幅は一定になり凍結される。

ここで、 $t > t_k$ となった瞬間に u が凍結されると近似する。したがって、 $t > t_k$ での u は $t = t_k$ での $u(t_k) = C_1$ に等しいと考える。つまり、 $t > t_k$ におけるパワースペクトルは

$$P_{\delta\phi}(t > t_k, k) = |C_1|^2 \quad (105)$$

となる。また、 $t = t_k$ におけるパワースペクトルは式 (100) で与えられるので、 $a(t_k) = k/H_k$ を用いて

$$|C_1|^2 = \frac{\hbar}{2a^2(t_k)k} = \frac{\hbar H_k^2}{2k^3} \quad (106)$$

となる。したがって、 $\hbar = 1$ としてパワースペクトルは

$$P_{\delta\phi}(t \geq t_k, k) = \frac{H_k^2}{2k^3} \quad (107)$$

と表される。CMB の観測から H_k の情報を得ることができる。したがって、インフレーション期の宇宙の膨張率を知ることができる。この値は $\delta\phi_k^2$ が不確定性関係から期待値が 0 ではないことから決まっている。

6.2 曲率ゆらぎのパワースペクトル

インフレーション期で生成される原始密度ゆらぎの中で CMB 観測に関係するものは、スカラー型の摂動の曲率ゆらぎ \mathcal{R} とテンソル型の摂動である。この節では、スカラー摂動である曲率ゆらぎ \mathcal{R} のパワースペクトルを求める。

3 次元空間の線素は

$$ds_{(3)}^2 = a^2(t)(1 + 2\mathcal{R})\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (108)$$

で与えられる。ここで、 \mathcal{R} は t, x^i の関数である。この摂動を含めた空間体積は

$$V = a^3(t)(1 + 2\mathcal{R})^{3/2} \simeq a^3(t)(1 + 3\mathcal{R}) \quad (109)$$

となる。ここで、 $|\mathcal{R}| \ll 1$ であるとした。このとき、 V の時間変化に関して

$$\theta := \frac{\dot{V}}{3V} \quad (110)$$

を定義すると

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{3a^3(1 + 3\mathcal{R})}[3a^2\dot{a}(1 + 3\mathcal{R}) + 3a^3\dot{\mathcal{R}}] \\ &= H + \frac{\dot{\mathcal{R}}}{1 + 3\mathcal{R}} \simeq H + \dot{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

が成り立つ。この関係式を用いて、 θ を時間積分すると

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \int_{t_i}^{t_f} dt \theta \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt H + \mathcal{R}(t_f) - \mathcal{R}(t_i) = \mathcal{N}_0 + \mathcal{R}(t_f) - \mathcal{R}(t_i) \end{aligned} \quad (111)$$

となる。ここで、 $\mathcal{N}_0 = \int_{t_i}^{t_f} dt H$ であり、時刻 t_i から t_f までの e-foldings 数を表しており、式 (??) との定義と整合的である。4 次元空間は、時刻 t が一定の 3 次元超曲面の集合に分割できる。そして、時刻 t_1 で $\mathcal{R}(t_1) = 0$ となる超曲面を取ることができる。摂動があるときの \mathcal{N} と背景時空の \mathcal{N}_0 との差 $\delta\mathcal{N} = \mathcal{N} - \mathcal{N}_0$ とすると

$$\mathcal{R}(t_f) = \delta\mathcal{N} \quad (112)$$

を得る。

スカラー場の摂動 $\delta\phi$ があるとき、各点 x^i で e-foldings 数が平均値 \mathcal{N}_0 からズレる。場の平均値 ϕ_0 からのズレ $\delta\phi$ によって、各点で、一様等方宇宙での平均時間からの違い

$$\delta t = \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (113)$$

が生じる。e-foldings 数のズレは定義から $\delta\mathcal{N} = H\delta t$ なので、曲率ゆらぎは

$$\mathcal{R}(t_f) = H\delta t = \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi \quad (114)$$

のように $\delta\phi$ で与えられる。

フーリエ変換を

$$\mathcal{R}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathcal{R}_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (115)$$

と表す。

付録 A 重力場に対する最小作用の原理

参考文献

- [1] D. Baumann. Tasi lectures on inflation, 2012.
- [2] D. Baumann. Cosmology: Part iii mathematical tripos lecture notes, 2022. University of Cambridge, DAMTP. Lecture notes accessed 15 Oct 2025.
- [3] J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin. Encyclopaedia inflationaris, dec 2024. Opiparous Edition; last revised 17 Dec 2024.