

CMB

2025 年 12 月 2 日

目次

1	相対論的運動学	2
1.1	相対論的分布関数	2
1.2	ボルツマン方程式	4
2	宇宙の熱史 (再)	21
3	ビッグバン元素合成	22
4	宇宙の晴れ上がり	23
4.1	水素原子の形成	24
付録 A	不変散乱断面積	25

1 相対論的運動学

1.1 相対論的分布関数

考えている粒子の質量を m 、4 元運動量を P^μ とすると

$$P^\mu P_\mu + m^2 = 0 \quad (1)$$

が成り立つ。(粒子のエネルギー $E = P^0$ は正であるとする。) 4 元運動量空間を考えると、式 (1) で定義される質量殻上に粒子が存在することになる。分布関数は (x, P) の 8 次元相空間で定義されるが、質量殻条件 (1) により実際には 7 次元である。

計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式を $g = \det(g_{\mu\nu})$ とすると、時空の不変体積要素は $\sqrt{-g} d^4x$ である。また、4 元運動量空間についても不変体積要素は $\sqrt{-g} d^4P$ である。したがって、位相空間の不変体積要素は

$$\sqrt{-g} d^4x \sqrt{-g} d^4P = -g d^4x d^4P \quad (2)$$

となる。

ここで、エネルギーが正であることから運動量空間の物理的な 3 次元不変体積要素として

$$d\Pi = \frac{\sqrt{-g} d^4P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^\mu P_\mu + m^2) \quad (3)$$

を定義する。ただし、 Θ はヘヴィサイドの階段関数、 δ_D はディラックのデルタ関数である。この量は不変なスカラー量である。

質量殻条件 (1) から

$$g_{00}(P^0)^2 + 2g_{0i}P^0P^i + g_{ij}P^iP^j + m^2 = 0 \quad (4)$$

が成り立つ。この二次方程式を P^0 について解くと $P^0 > 0$ ^{*1} に対して

$$P^0 = \frac{-g_{0i}P^i - \sqrt{(g_{0i}P^i)^2 - g_{00}(g_{ij}P^iP^j + m^2)}}{g_{00}} \quad (5)$$

となる。したがって、ディラックのデルタ関数の性質^{*2} を用いると

$$\delta_D(P^\mu P_\mu + m^2) = \frac{\delta_D(P^0 - P_+^0)}{2\sqrt{(g_{0i}P^i)^2 - g_{00}(g_{ij}P^iP^j + m^2)}} \quad (7)$$

^{*1} 物理的な時空では、 $g_{00} < 0$ である。

^{*2} $f(x) = 0$ の解が $x = x_p$ とするとき、

$$\delta_D(f(x)) = \sum_p \frac{\delta_D(x - x_p)}{|f'(x_p)|} \quad (6)$$

が成り立つ。

となる。ここで、 P_+^0 は上記の P^0 の式である。したがって、不変な 3 次元運動量空間要素は P^0 について積分することで

$$d\Pi = \frac{\sqrt{-g}}{(2\pi)^3} \frac{d^3P}{2\sqrt{(g_{0i}P^i)^2 - g_{00}(g_{ij}P^iP^j + m^2)}} \quad (8)$$

となる。局所慣性座標系では $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ であるから、

$$d\Pi = \frac{d^3P}{(2\pi)^3 2E} \quad (9)$$

となる。

■エネルギー運動量テンソル

密度や圧力などは、巨視的な量であり、分布関数 $f(x, P)$ を用いて表現される。まず粒子の数密度 n について考える。局所慣性座標系において、ある時刻 t における粒子の数密度は

$$n(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} f(x, P) \quad (10)$$

である。一般の座標系においては、式 (9) とのアナロジーから

$$n(\mathbf{x}, t) = 2 \int d\Pi P^0 f(x, P) \quad (11)$$

となる。次に、

$$N^\mu = 2 \int d\Pi P^\mu f(x, P) \quad (12)$$

を考える。これを粒子 4 元流束という。成分表示で

$$(N^\mu) = (n, \mathbf{j}) \quad (13)$$

と表すことにする。空間成分 \mathbf{j} を局所慣性座標系で考えると

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{P}}{E} f(x, P) \quad (14)$$

となる。 \mathbf{P}/E は粒子の速度であるから、 \mathbf{j} は単位体積あたりの粒子の平均速度を表していることがわかる。このように、4 元流束 N^μ は粒子の数密度と平均速度をまとめて表現していることがわかる。

さらに、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ と分布関数の関係を考える。これについても、局所慣性座標系での表現から一般座標系への拡張として考える。エネルギー運動量テンソルの物理的な意味は、

$$T^{00} = \text{「エネルギー密度」}$$

$$T^{0i} = \text{「エネルギー流束の } i \text{ 成分」}$$

$$T^{i0} = \text{「運動量 } i \text{ 成分の密度」}$$

$$T^{ij} = \text{「運動量 } i \text{ 成分に関する流束の } j \text{ 成分」} = \text{「応力テンソルの } ij \text{ 成分」}$$

であった。まずは、局所慣性座標系におけるエネルギー密度 T^{00} はエネルギー P^0 を分布関数で平均したものであるから、

$$T^{00}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^0 f(\boldsymbol{x}, P) \quad (15)$$

となる。さらに、エネルギー流束 T^{0i} 空間座標 x^i が一定の面を単位時間あたりに通過するエネルギー量であるから、エネルギー P^0 に速度 P^i/P^0 をかけて分布関数で平均したものであるので、

$$T^{0i}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^0 \frac{P^i}{P^0} f(\boldsymbol{x}, P) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^i f(\boldsymbol{x}, P) \quad (16)$$

となる。同様にして、運動量密度 T^{i0} は

$$T^{i0}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^i f(\boldsymbol{x}, P) \quad (17)$$

となる。最後に、応力テンソル T^{ij} は運動量 P^i に速度 P^j/P^0 をかけて分布関数で平均したものであるから、

$$T^{ij}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^i \frac{P^j}{P^0} f(\boldsymbol{x}, P) \quad (18)$$

となる。これらをまとめると、局所慣性座標系におけるエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{P^\mu P^\nu}{P^0} f(\boldsymbol{x}, P) \quad (19)$$

となる。一般座標系においては、式 (9) とのアナロジーから

$$T^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = 2 \int d\Pi P^\mu P^\nu f(\boldsymbol{x}, P) \quad (20)$$

となる。[1]

1.2 ボルツマン方程式

分布関数の時間発展を考える。

1.2.1 リュービル方程式

粒子が重力のみを受けて運動している場合を考える。^{*3}このとき、粒子は測地線方程式

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \quad (21)$$

に従って運動する。ここで、

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (22)$$

^{*3} 粒子間の衝突などが無視できる場合。

であり、 λ はアフィンパラメータである。

ここで、8 次元位相空間の不変体積要素

$$d\Omega = -g d^4x d^4P \quad (23)$$

に注目する。この微小体積要素に含まれる粒子の集団について考える。この粒子の集団は、測地線方程式 (21) に従って運動する。このとき、粒子の集団が占める位相空間体積要素 $d\Omega$ は、時間発展に伴って変化しない。これは、普通自明なことではなく、リュービルの定理と呼ばれる重要な結果である。

■リュービルの定理

まず、粒子の微小運動によるアフィンパラメータの変化を $\delta\lambda$ とする。このとき、 x, P の変化は

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + P^\mu \delta\lambda \quad (24)$$

$$P'^\mu = P^\mu + \delta P^\mu = P^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \delta\lambda \quad (25)$$

である。変換のヤコビアン J を用いて

$$\delta(d^4x d^4P) = (|J| - 1) d^4x d^4P \quad (26)$$

となる。このときのヤコビアンは

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(x', P')}{\partial(x, P)} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} & \frac{\partial x'^\mu}{\partial P^\beta} \\ \frac{\partial P'^\nu}{\partial x^\alpha} & \frac{\partial P'^\nu}{\partial P^\beta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \delta_\alpha^\mu & \delta\lambda \delta_\beta^\mu \\ 0 & \delta_\beta^\nu - 2\Gamma_{\beta\rho}^\nu P^\rho \delta\lambda \end{pmatrix} \\ &= 1 - 2\Gamma_{\mu\rho}^\mu P^\rho \delta\lambda \end{aligned}$$

が成り立つ。 $2\Gamma_{\mu\rho}^\mu P^\rho \delta\lambda$ について考える。式 (24) を用いて

$$P^\rho \delta\lambda = \delta x^\rho$$

と表せる。また、*4

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\rho}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\mu,\rho} + g_{\sigma\rho,\mu} - g_{\mu\rho,\sigma}) = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\sigma\mu,\rho} \\ &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \end{aligned}$$

*4

$$\begin{aligned} dg &= g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \\ \Gamma_{\nu\lambda}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$2\Gamma_{\mu\rho}^{\mu}P^{\rho}\delta\lambda = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\rho}}\delta x^{\rho} = \frac{\delta g}{g} \quad (27)$$

となるので、

$$\delta(d^4x d^4P) = -\frac{\delta g}{g}d^4x d^4P \quad (28)$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \delta(-g d^4x d^4P) &= -g \delta(d^4x d^4P) - \delta g d^4x d^4P \\ &= -g \left(-\frac{\delta g}{g} d^4x d^4P \right) - \delta g d^4x d^4P = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、位相空間の不変体積要素 $d\Omega = -g d^4x d^4P$ は粒子の運動に対して不変であることが示された。

次に、時空のある点に $n_{\mu}n^{\mu} = -1$ を満たす時空の法線ベクトル n^{μ} を考える。この n^{μ} に直交する空間的な3次元体積要素 dV を考える。^{*5} この dV の中において、4元運動量 P^{μ} を持つ粒子群を考える。

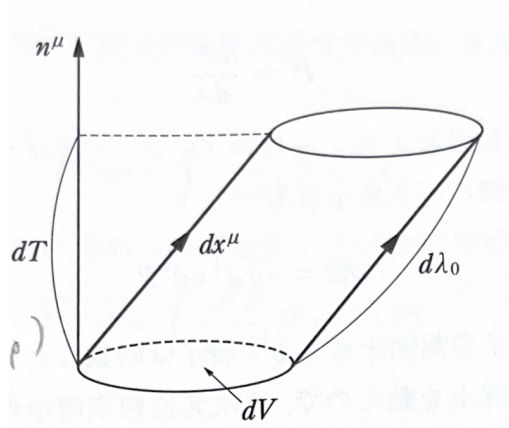


図1 時空の法線ベクトル n^{μ} に直交する3次元体積要素 dV の中における4元運動量 P^{μ} を持つ粒子群の様子。

$d\lambda_0$ だけアフィンパラメータが変化したとき、粒子群は図1のように dV を通過する。 n^{μ} 方向に対する時間間隔 dT は射映することで

$$dT = -n_{\mu}dx^{\mu} = -n_{\mu}P^{\mu}d\lambda_0$$

となるので、4次元不変体積要素

$$\sqrt{-g} d^4x = dTdV = -n_{\mu}P^{\mu}d\lambda_0dV \quad (29)$$

^{*5} この量は n^{μ} という4元速度を持つ観測者にとっての空間的な3次元体積要素である。

が成り立つ。この式に対して、 $d\Pi$ をかけると

$$\sqrt{-g} d^4x d\Pi = -n_\mu P^\mu d\lambda_0 dV d\Pi = \frac{-gd^4x d^4P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^\mu P_\mu + m^2) \quad (30)$$

となる。

ここで不変な量は $-gd^4x d^4P$, $P_\mu P^\mu$, $d\lambda_0$ である。したがって、式 (30) に対して $2/d\lambda_0$ 倍した

$$-2n_\mu P^\mu dV d\Pi \quad (31)$$

についても不変量である。この性質を**リュービルの定理 (Liouville's theorem)** という。リュービルの定理は粒子群の占める 6 次元位相空間体積要素が測地線運動に対して不変であることを意味している。

1.2.2 ボルツマン方程式

■リュービル演算子

4 元流速の定義式 (12) から

$$dN^\mu = 2P^\mu f(x, P) d\Pi \quad (32)$$

である。4 元流速の時間成分が粒子数密度であったので、 dV に垂直な時間的単位ベクトル n_μ の方向に射映すると粒子数密度が得られる。 $dV d\Pi$ に含まれる粒子数 dN は

$$dN = -n_\mu dN^\mu dV = -2n_\mu P^\mu f(x, P) dV d\Pi \quad (33)$$

である。粒子に固定された位相空間の微小体積が測地線に沿って動く時を考える。リュービルの定理より f 以外は不変に保たれる。したがって、微小体積中の粒子数の変化は

$$\delta(dN) = \delta f (-2n_\mu P^\mu) dV d\Pi = \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dP^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \right) \delta\lambda (-2n_\mu P^\mu) dV d\Pi \delta\lambda \quad (34)$$

$$= \left(P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \right) \delta\lambda (-2n_\mu P^\mu) dV d\Pi \quad (35)$$

となる。

$\delta(dN)$ は $dV d\Pi$ に含まれる粒子数の変化である。重力以外の直接的な相互作用がない場合は、すべての粒子は測地線に沿って運動するので、 $\delta(dN) = 0$ となる。したがって、

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^\mu} = 0 \quad (36)$$

が成り立つ。この方程式を**ブラソフ方程式 (Vlasov equation)** あるいは **aruiha 無衝突ボルツマン方程式 (collisionless Boltzmann equation)** という。また、演算子

$$L := P^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial}{\partial P^\mu} \quad (37)$$

を定義する。この演算子をリュービル演算子 (Liouville operator) という。この演算子を用いると、無衝突ボルツマン方程式は

$$L[f] = 0 \quad (38)$$

と表される。

このリュービル演算子は 8 次元位相空間上の微分演算子である。しかし、この演算子は質量殻条件 (1) を満たす 7 次元位相空間に接する方向への演算子になっている。実際、*6

$$\begin{aligned} L[g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu] &= P^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu) - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha P^\beta P^\gamma \frac{\partial}{\partial P^\alpha} (g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu) \\ &= P^\alpha P^\mu P^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - 2\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha P^\beta P^\gamma g_{\alpha\nu} P^\nu \\ &= P^\alpha P^\mu P^\nu \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - g_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

となる。したがって、 L は質量を変化させるような方向への微分演算子ではないことがわかる。よって、質量殻上に接する方向への演算子として考えてよい。

ここで、質量殻上に制限した 7 次元分布関数を $\tilde{f}(x^\mu, P^i)$ とする。*7 これに作用するリュービル演算子を考える。このとき、

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial P^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial P^0}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P^i} = \frac{\partial f}{\partial P^i} + \frac{\partial P^0}{\partial P^i} \frac{\partial f}{\partial P^0} \quad (40)$$

が成り立つ。ここで、 P^0 を (x^μ, P^i) の関数として考えると、

$$g_{00}(P^0)^2 + 2g_{0i}P^0 P^i + g_{ij}P^i P^j + m^2 = 0$$

を P^0 について x^μ で微分することで、

$$\begin{aligned} 2g_{00}P^0 \frac{\partial P^0}{\partial x^\mu} + (P^0)^2 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} + 2g_{0i}P^i \frac{\partial P^0}{\partial x^\mu} + 2P^0 P^i \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^\mu} + P^i P^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} &= 0 \\ (2g_{00}P^0 + 2g_{0i}P^i) \frac{\partial P^0}{\partial x^\mu} &= -(P^0)^2 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} - 2P^0 P^i \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^\mu} - P^i P^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \\ \frac{\partial P^0}{\partial x^\mu} &= -\frac{1}{2g_{0\mu}P^\mu} P^\alpha P^\beta \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \\ &= -\frac{1}{2P_0} P^\alpha P^\beta g_{\alpha\beta,\mu} \end{aligned} \quad (41)$$

となる。

$$\begin{aligned} P^\alpha P^\beta g_{\alpha\beta,\mu} &= P^\alpha P^\beta (g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\beta\mu}^\lambda + g_{\beta\lambda} \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda) \\ &= 2\Gamma_{\beta\mu}^\lambda g_{\lambda\alpha} P^\alpha P^\beta = 2\Gamma_{\beta\mu}^\lambda P_\lambda P^\beta \end{aligned}$$

*6 計量について成り立つ式

$$g_{\mu\nu,\alpha} = g_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda + g_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda$$

を使う。

*7 8 次元分布関数 $f(x^\mu, P^\mu)$ に対して、質量殻条件 (1) を満たすように P^0 を代入することで P^i の関数として定義し直したものである。

が成り立つので、

$$\frac{\partial P^0}{\partial x^\mu} = -\frac{P^\nu P_\lambda}{P_0} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (42)$$

となる。同様に、 P^i で微分すると、

$$\begin{aligned} 2g_{00}P^0 \frac{\partial P^0}{\partial P^i} + 2g_{0i}P^0 + 2g_{0j}P^j \frac{\partial P^0}{\partial P^i} + 2g_{ij}P^j &= 0 \\ (2g_{00}P^0 + 2g_{0j}P^j) \frac{\partial P^0}{\partial P^i} &= -2g_{0i}P^0 - 2g_{ij}P^j \\ \frac{\partial P^0}{\partial P^i} &= -\frac{g_{i\mu}P^\mu}{g_{0\mu}P^\mu} \\ &= -\frac{P_i}{P_0} \end{aligned} \quad (43)$$

となる。まとめると、

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \frac{P^\nu P_\lambda}{P_0} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^0}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P^i} = \frac{\partial f}{\partial P^i} - \frac{P_i}{P_0} \frac{\partial f}{\partial P^0}$$

が成り立つ。したがって、 \tilde{f} に L を作用させると

$$\begin{aligned} L[\tilde{f}] &= P^\mu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P^\mu} \\ &= P^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \frac{P^\nu P_\lambda}{P_0} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^0} \right) - \Gamma_{\nu\rho}^i P^\nu P^\rho \left(\frac{\partial f}{\partial P^i} - \frac{P_i}{P_0} \frac{\partial f}{\partial P^0} \right) \\ &= P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^i P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^i} - \left(\frac{P^\mu P^\nu P_\lambda}{P_0} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{P_i}{P_0} \Gamma_{\nu\rho}^i P^\nu P^\rho \right) \frac{\partial f}{\partial P^0} \\ &= P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^i P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^i} - \frac{P^\mu P^\nu}{P_0} (P_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - P_i \Gamma_{\mu\nu}^i) \frac{\partial f}{\partial P^0} \\ &= P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^i P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^i} - \frac{P^\mu P^\nu}{P_0} P_0 \Gamma_{\mu\nu}^0 \frac{\partial f}{\partial P^0} \\ &= P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \end{aligned} \quad (44)$$

となる。したがって、質量殻上に制限した分布関数 \tilde{f} に対しても無衝突ボルツマン方程式が成り立つことがわかる。これは、質量殻条件を満たす方向への微分がリユービル演算子に含まれていないためである。

■ボルツマン方程式

次に、粒子間の衝突や生成消滅などの相互作用が存在する場合を考える。この場合については、 dN が一定に保たれない。そこで、 $\delta\lambda$ だけ変化したときの $dV d\Pi$ 中の粒子数の変化率を

$$\delta(dN) = 2\mathcal{C}[f] (-n_\mu P^\mu) dV d\Pi \delta\lambda \quad (45)$$

と表す。この $\mathcal{C}[f]$ は位相空間体積中の粒子数が増える率を表している。したがって、相互作用が存在する場合は、式 (35) と比較して

$$L[f] = P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^\mu} = \mathcal{C}[f] \quad (46)$$

となる。この式を**ボルツマン方程式 (Boltzmann equation)** という。 \tilde{f} に対しても同様に

$$L[\tilde{f}] = P^\mu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P^\mu} = \mathcal{C}[\tilde{f}] \quad (47)$$

が成り立つ。

■4 元流束とエネルギー運動量テンソル

4 元流束 N^μ とエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ について発散をとることを考える。

$$N^\mu = 2 \int d\Pi P^\mu f, \quad d\Pi = \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2)$$

であり、

$$\partial_\mu \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\mu}^\nu \quad (48)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} N^\mu_{;\mu} &= N^\mu_{,\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\mu N^\nu \\ &= 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \left[\delta_D(P^2 + m^2) P^\mu f_{,\mu} + \frac{\partial \delta_D(P^2 + m^2)}{\partial x^\mu} P^\mu f + \delta_D(P^2 + m^2) \Gamma_{\mu\nu}^\mu P^\nu f \right] + \Gamma_{\mu\nu}^\mu N^\nu \\ &= 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \left[\delta_D(P^2 + m^2) P^\mu f_{,\mu} + \delta'_D(P^2 + m^2) g_{\alpha\beta,\mu} P^\alpha P^\beta P^\mu f \right] + 2 \Gamma_{\mu\nu}^\mu N^\nu \end{aligned}$$

となる。ここで、第一項について

$$\begin{aligned} &2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) P^\mu f_{,\mu} \\ &= 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) \left[L[f] + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu P^\nu P^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \right] \end{aligned}$$

となる。さらにこの式の第二項について

$$\begin{aligned} &2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu P^\nu P^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \\ &= -2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \left[\delta'_D(P^2 + m^2) 2 P_\mu P^\nu P^\lambda + \delta_D(P^2 + m^2) (\delta_\mu^\nu P^\lambda + P^\nu \delta_\mu^\lambda) f \right] \\ &= -2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta'_D(P^2 + m^2) \mathbf{2 \Gamma_{\nu\lambda}^\mu P_\mu P^\nu P^\lambda f} \\ &\quad - 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) \mathbf{2 \Gamma_{\mu\nu}^\mu P^\nu f} \\ &= -2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta'_D(P^2 + m^2) \mathbf{g_{\nu\lambda,\mu} P^\mu P^\nu P^\lambda f} - 2 \Gamma_{\mu\nu}^\mu N^\nu \end{aligned}$$

となる。ここで、赤字の部分は

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu\lambda}^\mu P_\mu P^\nu P^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) P_\mu P^\nu P^\lambda \\ &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) P^\alpha P^\nu P^\lambda \\ &= \frac{1}{2} g_{\nu\lambda,\alpha} P^\alpha P^\nu P^\lambda\end{aligned}$$

と計算した。結局、 $N_{;\mu}^\mu$ は

$$N_{;\mu}^\mu = 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) L[f] \quad (49)$$

$$= 2 \int d\Pi L[f] = 2 \int d\Pi \mathcal{C}[f] \quad (50)$$

となる。

同様にして、エネルギー運動量テンソルの発散も計算できる。

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}_{;\nu} &= T^{\mu\nu}_{,\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \\ &= 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \left[\delta_D(P^2 + m^2) P^\mu P^\nu f_{,\nu} + \frac{\partial \delta_D(P^2 + m^2)}{\partial x^\nu} P^\mu P^\nu f + \delta_D(P^2 + m^2) \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda P^\mu P^\nu \right] \\ &\quad + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \\ &= 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) [\delta_D(P^2 + m^2) P^\nu f_{,\nu} + \delta'_D(P^2 + m^2) g_{\alpha\beta,\nu} P^\alpha P^\beta P^\nu f] P^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + 2\Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}\end{aligned}$$

である。第一項は

$$\begin{aligned}&2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) P^\mu P^\nu f_{,\nu} \\ &= 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) \left[L[f] + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu P^\alpha P^\beta \frac{\partial f}{\partial P^\nu} \right] P^\mu\end{aligned}$$

となる。この式の第二項について

$$\begin{aligned}&2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) \Gamma_{\alpha\beta}^\nu P^\alpha P^\beta \frac{\partial f}{\partial P^\nu} P^\mu \\ &= -2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \Gamma_{\alpha\beta}^\nu [\delta'_D(P^2 + m^2) 2P_\nu P^\alpha P^\beta P^\mu + \delta_D(P^2 + m^2) (\delta_\nu^\alpha P^\beta P^\mu + P^\alpha \delta_\nu^\beta P^\mu + P^\alpha P^\beta \delta_\nu^\mu)] f \\ &= -2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta'_D(P^2 + m^2) 2\Gamma_{\alpha\beta}^\nu P_\nu P^\alpha P^\beta P^\mu f \\ &\quad - 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) 2\Gamma_{\nu\alpha}^\nu P^\alpha P^\mu f - 2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P^2 + m^2) \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta f \\ &= -2 \int \frac{\sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta'_D(P^2 + m^2) g_{\alpha\beta,\nu} P^\nu P^\alpha P^\beta P^\mu f - 2\Gamma_{\nu\alpha}^\nu T^{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu T^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

と計算できるので、結局、

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2 \int \frac{\sqrt{-g}d^4P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0)\delta_D(P^2 + m^2)L[f]P^\mu \quad (51)$$

$$= 2 \int d\Pi L[f]P^\mu = 2 \int d\Pi \mathcal{C}[f]P^\mu \quad (52)$$

となる。まとめると、

$$N^\mu{}_{;\mu} = 2 \int d\Pi \mathcal{C}[f], \quad T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2 \int d\Pi \mathcal{C}[f]P^\mu$$

である。

1.2.3 短距離相互作用による衝突項

■場の量子論の準備

ボルツマン方程式における衝突項 $\mathcal{C}[f]$ について具体的な形を考える。重力のみが長距離相互作用として働き、その他の短距離相互作用は瞬間的に働くものとする。^{*8}

一般的な衝突項を考えるために、場の量子論に基づいた粒子の相互作用を考える。相互作用に関係する粒子の生成消滅演算子を $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ 、 $a_r(\mathbf{k})$ とする。ここで、 r は粒子の種類と内部自由度を表す添字である。^{*9}

これらの演算子については、交換関係

$$[a_r(\mathbf{k}), a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')]_{\mp} = \delta_{rr'}(2\pi)^3 2k^0 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (53)$$

$$[a_r(\mathbf{k}), a_{r'}(\mathbf{k}')]_{\mp} = [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')]_{\mp} = 0 \quad (54)$$

を満たす。ここで、 $-$ はボース粒子、 $+$ はフェルミ粒子の場合を表す。また、 $k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m_r^2}$ である。

周期境界条件を仮定して、体積 V 中に粒子が存在するとする。このとき、波数空間は離散化されて

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}, \quad \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (55)$$

となる。離散化された波数空間における生成消滅演算子は

$$a_r(\mathbf{k}) \rightarrow \sqrt{2k^0 V} a_{r,k} := \sqrt{2k^0 V} a_i \quad (56)$$

$$a_r^\dagger(\mathbf{k}) \rightarrow \sqrt{2k^0 V} a_{r,k}^\dagger := \sqrt{2k^0 V} a_i^\dagger \quad (57)$$

と変換される。ここで、 i は粒子の種類と波数をまとめた添字を導入する。このようにすることで、交換関係は

$$[a_i, a_j^\dagger]_{\mp} = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j]_{\mp} = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_{\mp} = 0 \quad (58)$$

^{*8} この仮定は、強い相互作用や弱い相互作用は非常に短い距離にしか働かないので妥当である。また、宇宙は全体として電氣的に中性であるため、実質的には電磁相互作用も短距離相互作用として扱える。

^{*9} 例えば、スカラー粒子、ヘリシティ $s = \pm 1$ の電子、偏極状態 $\lambda = 1, 2$ の光子などはすべて異なる r で表される。

となる。

状態 i に n_i 個の粒子が存在する状態は

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle \quad (59)$$

で表される。この状態に対して、生成消滅演算子が作用すると

$$a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |\dots, n_i - 1, \dots\rangle \quad (60)$$

$$a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i \pm 1} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (61)$$

が成り立つ。符号については、 $+$ はボース粒子、 $-$ はフェルミ粒子の場合を表す。以下では、符号の上側がボース粒子、下側がフェルミ粒子の場合を表すことにする。

■衝突項の導出

次に、粒子の相互作用を考える。そこで、時空中において体積 V , 時間間隔 T の領域 D を考える。この領域 D では曲率が無視できて、上で述べたような平坦時空における量子論が適用できるとする。^{*10} 領域 D では衝突過程

$$i + j + \dots \rightarrow k + l + \dots \quad (62)$$

が起こるとする。始状態として

$$|\alpha\rangle = |n_i, n_j, n_k, n_l \dots\rangle \quad (63)$$

であり、終状態として

$$|\beta\rangle = |n_i - 1, n_j - 1, n_k + 1, n_l + 1, \dots\rangle \quad (64)$$

であるとする。ただし、始状態も終状態も漸近場であるとする。このとき、始状態から終状態への散乱行列要素

$$S_{\beta\alpha} = \langle\beta| S |\alpha\rangle \quad (65)$$

を用いると、衝突の遷移確率は $|S_{\beta\alpha}|^2$ で与えられる。

散乱行列演算子はダイソンの公式より

$$S = T \exp \left[-i \int_D d^4x \mathcal{L}_I(x) \right] \quad (66)$$

と表される。ここで、 \mathcal{L}_I は相互作用ラグランジアン密度、 T は時間順序演算子である。さらに、ウィックの定理を用いると、散乱行列要素は

$$S_{\beta\alpha} = \langle\beta| : \exp \left[i \int_D d^4x \mathcal{L}_I(x) \right] : |\alpha\rangle \quad (67)$$

^{*10} 時空の曲率半径よりも十分小さな領域を考える。

と書ける。ここで、 $::$ は正規順序演算子を表す。一般には、連続表示では

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdots \frac{d^3 k_m}{(2\pi)^3 2E_m} \cdots \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \cdots \frac{d^3 k'_n}{(2\pi)^3 2E'_n} \\ \times W_{r'_1 \cdots r'_n; r_1 \cdots r_m}(\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_n; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) \\ \times a_{r'_1}^\dagger(\mathbf{k}'_1) \cdots a_{r'_n}^\dagger(\mathbf{k}'_n) a_{r_1}(\mathbf{k}_1) \cdots a_{r_m}(\mathbf{k}_m) \quad (68)$$

で表される。ここで、 $E_i = k_i^0 = \sqrt{|\mathbf{k}_i|^2 + m_i^2}$ であり、積分核 $W_{r'_1 \cdots r'_n; r_1 \cdots r_m}$ は、相互作用ラグランジアン密度 \mathcal{L}_I が与えられれば一意的に決定され、一般的には

$$W_{r'_1 \cdots r'_n; r_1 \cdots r_m}(\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_n; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) \\ = \langle 0 | a_{r'_n}(\mathbf{k}'_n) \cdots a_{r'_1}(\mathbf{k}'_1) S a_{r_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a_{r_m}^\dagger(\mathbf{k}_m) | 0 \rangle \quad (69)$$

と表される。

離散的な波数空間においては、

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \sum_{i_1, \dots, i_m} \sum_{j_1, \dots, j_n} w_{j_1 \cdots j_n; i_1 \cdots i_m} a_{j_1}^\dagger \cdots a_{j_n}^\dagger a_{i_1} \cdots a_{i_m} \quad (70)$$

と表される。ただし、

$$W_{r'_1 \cdots r'_n; r_1 \cdots r_m}(\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_n; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) \\ = (2V)^{(m+n)/2} \left(\prod_{s=1}^m \sqrt{E_{i_s}} \right) \left(\prod_{t=1}^n \sqrt{E_{j_t}} \right) w_{j_1 \cdots j_n; i_1 \cdots i_m} \quad (71)$$

である。これを使うと

$$w_{r'_1 \cdots r'_n; r_1 \cdots r_m} = \langle 0 | a_{j_n} \cdots a_{j_1} S a_{i_1}^\dagger \cdots a_{i_m}^\dagger | 0 \rangle \quad (72)$$

と表される。つまり、 $w_{j_1 \cdots j_n; i_1 \cdots i_m}$ は、始状態に m 個の粒子、終状態に n 個の粒子が存在する散乱行列要素を表している。

今の場合は、 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ の表式と (70) を用いると、

$$S_{\beta\alpha} = \langle n_i - 1, n_j - 1, n_k + 1, n_l + 1, \dots | a_k^\dagger a_l^\dagger \cdots a_j a_i \cdots | n_i, n_j, n_k, n_l, \dots \rangle w_{k,l,\dots; i,j,\dots} \\ = \sqrt{n_i n_j \cdots (1 \pm n_k)(1 \pm n_l) \cdots} w_{k,l,\dots; i,j,\dots} \quad (73)$$

となる。したがって、衝突の遷移確率は

$$P_D(\alpha \rightarrow \beta) = |S_{\beta\alpha}|^2 = n_i n_j \cdots (1 \pm n_k)(1 \pm n_l) \cdots |w_{k,l,\dots; i,j,\dots}|^2 \quad (74)$$

で与えられる。^{*11}

^{*11} ここで、このような遷移確率が与えられる物理的な描像を考えてみる。まず、始状態の粒子数 n_i, n_j, \dots に比例していることは、最初の粒子数が多いほど反応は起こりやすいことを意味している。また、終状態の粒子数 n_k, n_l, \dots

ここで求めた遷移確率に現れる粒子数を分布関数によって表す。領域 D は局所ミンコフスキー時空とみなせる。したがって、運動量要素 $d\Pi$ は (9) で与えられ

$$d\Pi = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}$$

であり変換則 (55) を用いると、

$$d\Pi \rightarrow \frac{1}{2EV} \sum_{\mathbf{k}} \quad (75)$$

となる。分布関数を運動量で積分すると、単位体積あたりの粒子数が得られるので、

$$\frac{n_i}{V} = 2 \int d\Pi P^0 f_i \rightarrow \frac{2}{2E_i V} \sum_{\mathbf{k}_i} E_i f_i = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_i} f_i \quad (76)$$

となる。領域 D における粒子数 n_i は $n_i = f_i$ という関係にあることが分かる。したがって、領域 D における単位時間あたりの遷移確率は

$$P_D(\alpha \rightarrow \beta) = f_i f_j \cdots (1 \pm f_k)(1 \pm f_l) \cdots |w_{k,l,\dots;i,j,\dots}|^2 \quad (77)$$

となる。

領域 D における一度の衝突過程で量子状態 a の粒子変化を ΔN_a とする。その期待値は、終状態に a が現れる過程から始状態に a が現れる過程を引いたもので与えられる。

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_a \rangle = & \sum_{i,j,\dots,k,l,\dots} P_D(i+j+\dots \rightarrow a+k+l+\dots) \\ & - \sum_{i,j,\dots,k,l,\dots} P_D(a+k+l+\dots \rightarrow i+j+\dots) \end{aligned} \quad (78)$$

である。ここで、 $\sum_{i,j,\dots,k,l,\dots}$ は、始状態と終状態に現れるすべての粒子状態についての和を表している。

粒子のアフィンパラメータが $\Delta\lambda$ だけ変化するとき、時空座標の変化は

$$\Delta x^\mu = P^\mu \Delta\lambda$$

である。量子状態 a に対応する $\Delta\lambda$ は時間成分を考えると

$$\Delta\lambda = \frac{T}{E_a}$$

に関しては、ボース粒子の場合は $(1+n_k)(1+n_l)\cdots$ となっており、終状態の粒子数が多いほど反応が起こりやすいことを意味している。一方、フェルミ粒子の場合は $(1-n_k)(1-n_l)\cdots$ となっている。フェルミ粒子では、 $n=0,1$ をとる。したがって、終状態にすでに粒子が存在する場合 ($n_k=1$ など) には反応が起こらないことを意味している。これは、パウリの排他原理によるもので、そのような効果によって反応確率が抑制されることを表している。ボース粒子はこれと違い、そのような規則は存在しないため、終状態に粒子が多いほど反応確率が増加することを意味している。ボース粒子の例としては光子がある。放射場におけるこのような性質は、誘導放射として知られている。よくレーザーやメーザーの動作原理として説明されるものである。

となる。ただし、 T は $\Delta\lambda$ に対応する領域 D の時間間隔である。 $dV d\Pi$ あたりの粒子数変化は式 (45) より

$$\delta(dN) = 2\mathcal{C}[f] (-n_\mu P^\mu) dV d\Pi \delta\lambda$$

であったが、これを離散化した場合の対応を考えると

$$\langle \Delta N_a \rangle = 2\mathcal{C}[f_a] E_a V \frac{1}{2E_a V} \Delta\lambda = \mathcal{C}[f_a] \frac{T}{E_a} \quad (79)$$

となる。したがって、式 (78) と比較して、遷移確率 (77) を用いると、衝突項は

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[f_a] = \frac{E_a}{T} \sum_{i,j,\dots,k,l,\dots} & \left[f_i f_j \cdots (1 \pm f_a)(1 \pm f_k)(1 \pm f_l) \cdots |w_{a,k,l,\dots;i,j,\dots}|^2 \right. \\ & \left. - f_a f_k f_l \cdots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots |w_{i,j,\dots;a,k,l,\dots}|^2 \right] \end{aligned} \quad (80)$$

となる。これを連続表示 (55),(71) に戻すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[f_a] = \frac{E_a}{T} \sum_{r_i, r_j, \dots, r_k, r_l, \dots} & \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3 2E_j} \cdots \frac{d^3 k_k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3 k_l}{(2\pi)^3 2E_l} \cdots \\ & \times \left[f_i f_j \cdots (1 \pm f_a)(1 \pm f_k)(1 \pm f_l) \cdots |S_{i+j+\dots \rightarrow a+k+l+\dots}|^2 \right. \\ & \left. - f_a f_k f_l \cdots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots |S_{a+k+l+\dots \rightarrow i+j+\dots}|^2 \right] \end{aligned} \quad (81)$$

となる。ただし、 $S_{i+j+\dots \rightarrow k+l+\dots}$ は不変規格化された連続表示での散乱行列要素である。

ここで、不変散乱振幅について

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = i(2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(P_\beta - P_\alpha) \mathcal{M}_{\alpha \rightarrow \beta}$$

が成り立つ。^{*12}

$$[(2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(P_\beta - P_\alpha)]^2 = [(2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(P_\beta - P_\alpha)] [(2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(0)]$$

であり、 $(2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(0)$ は発散してしまう。今の場合は、領域 D の時間間隔 T と体積 V としているので

$$(2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(0) = \int_D d^4 x e^{-ik \cdot x} \Big|_{k=0} = TV$$

となる。したがって、今の場合は

$$|S_{i+j+\dots \rightarrow a+k+l+\dots}|^2 = TV (2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(P_k + P_l + \cdots - P_i - P_j - \cdots) |\mathcal{M}_{i+j+\dots \rightarrow k+l+\dots}|^2 \quad (82)$$

^{*12} 詳しい議論は付録付録 A を参照のこと。

である。ここで、散乱行列要素が内部自由度について平均されているものとする。さらに、分布関数 f_i が内部自由度の変数に依存しない場合を考える。すると、式 (81) の内部自由度に関する和は積 $g_i g_j \cdots g_k g_l \cdots$ に置き換えることができる。以下では、

$$d\Pi_i = \frac{g_i d^3 P_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (83)$$

と書くことにする。この表記に従うと一般座標では、

$$d\Pi_i = \frac{g_i \sqrt{-g} d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta(P^0) \delta_D(P_i^2 + m_i^2)$$

となる。

4次元デルタ関数 $\delta_D^{(4)}$ と $d^4 P$ が同居していてそれら単体では不変量ではない。したがって、これらが同居しながら不変量となるように正規化する必要がある。

まず、 $\delta_D^{(4)}$ は $\delta_D^{(4)} d^4 P$ が不変量となる。一方で、 $d^4 P$ は $\sqrt{-g} d^4 P$ が不変量となる。つまり、スカラー不変量として

$$\underline{\delta_D^{(4)} d^4 P} = \frac{\delta_D^{(4)}}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g} d^4 P$$

となるので、デルタ関数に関しては $\delta_D^{(4)} / \sqrt{-g}$ が不変量となる。

これらを用いると、衝突項は

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[f_a] = & \frac{1}{2} \int d\Pi_i d\Pi_j \cdots d\Pi_k d\Pi_l \cdots \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{-g}} \delta_D^{(4)}(P_k + P_l + \cdots - P_i - P_j - \cdots) \\ & \times \left[f_i f_j \cdots (1 \pm f_a)(1 \pm f_k)(1 \pm f_l) \cdots |\mathcal{M}_{i+j+\cdots \rightarrow a+k+l+\cdots}|^2 \right. \\ & \left. - f_a f_k f_l \cdots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots |\mathcal{M}_{a+k+l+\cdots \rightarrow i+j+\cdots}|^2 \right] \end{aligned} \quad (84)$$

となる。これで、相互作用ラグランジアンが与えられれば、不変散乱振幅が計算できるので衝突項を具体的に計算できるようになった。

特別な場合として、相互作用が時間反転対称性を持ち、分布関数が古典統計で与えられる場合を考える。まず、時間反転対称性により、

$$|\mathcal{M}_{i+j+\cdots \rightarrow a+k+l+\cdots}|^2 = |\mathcal{M}_{a+k+l+\cdots \rightarrow i+j+\cdots}|^2 \quad (85)$$

である。また、古典統計性 $f_i \ll 1$ が成り立つときはフェルミ粒子とボース粒子についての効果が無視できるようになる。つまり、

$$(1 \pm f_i) \simeq 1 \quad (86)$$

となる。したがって、衝突項は

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[f_a] = & \frac{1}{2} \int d\Pi_i d\Pi_j \cdots d\Pi_k d\Pi_l \cdots \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{-g}} \delta_D^{(4)}(P_k + P_l + \cdots - P_i - P_j - \cdots) \\ & \times (f_i f_j \cdots - f_a f_k f_l \cdots) |\mathcal{M}_{i+j+\cdots \rightarrow a+k+l+\cdots}|^2 \end{aligned} \quad (87)$$

と簡単化される。

1.2.4 一様等方宇宙におけるボルツマン方程式

一般に分布関数は $f(x, P)$ であり、位置と運動量の両方に依存する。今の場合は一様等方を仮定しているので、位置依存性は消え、運動量は大きさのみに依存することになる。したがって、分布関数は運動量の大きさと時間の関数 $f(P, t)$ となる。さらに、

$$E^2 = |\mathbf{P}|^2 + m^2$$

$$|P| = \sqrt{g_{ij}P^iP^j} = a\sqrt{\gamma_{ij}P^iP^j}$$

のような関係がある。したがって、分布関数は $f(E, t)$ と書くこともできる。

ボルツマン方程式は、式 (46) より

$$L[f] = P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^\mu} = \mathcal{C}[f]$$

であった。ここで、 P^i についてはエネルギー E に陽に依存しない。したがって、左辺は^{*13}

$$\begin{aligned} L[f] &= E \frac{\partial f}{\partial t} - a\dot{a}\gamma_{ij}P^iP^j \frac{\partial f}{\partial E} = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}|\mathbf{P}|^2 \frac{\partial f}{\partial E} \\ &= E \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{E^2 - m^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} \right) \end{aligned} \quad (88)$$

となる。さらに、衝突項も E, t の関数となるので、ボルツマン方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{E^2 - m^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{E} \mathcal{C}[f] \quad (89)$$

となる。

粒子数密度についても考える。4 元流速 N^μ の空間成分は一様等方性よりゼロである。また、時間成分である粒子数密度は式 (11) より

$$n(t) = 2 \int d\Pi E f \quad (90)$$

*13 計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j$$

であり、クリストッフェル記号の $\Gamma_{\mu\nu}^0$ 成分は

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{0\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{00}(g_{0\mu,\nu} + g_{0\nu,\mu} - g_{\mu\nu,0})$$

となるので、非ゼロ成分は

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}g_{ij,0} = a\dot{a}\gamma_{ij}$$

である。

となる。ただし、内部自由度については上で述べたように $d\Pi$ に含めてあるとする。 N^μ の発散は (53) より^{*14}

$$\begin{aligned} N^\mu_{;\mu} &= N^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} N^\lambda = \frac{dn}{dt} + \Gamma^\mu_{\mu 0} n \\ &= \frac{dn}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = 2 \int d\Pi \mathcal{C}[f] \end{aligned} \quad (91)$$

となる。左辺の第 2 項は宇宙膨張による希釈を表している。共動体積あたりの粒子数密度 na^3 を考えると、宇宙膨張による希釈効果が打ち消される。実際、簡単な変形をすると

$$\frac{d}{dt}(na^3) = 2a^3 \int d\Pi \mathcal{C}[f] \quad (92)$$

この式は共動体積あたりの粒子数変化率を表している。右辺は反応によって粒子数が増減する効果を表している。衝突項がゼロであれば、共動体積あたりの粒子数は保存されることが分かる。

■一様等方宇宙におけるボルツマン方程式 (運動量による記述)

上では、エネルギーによる記述を与えたが、運動量による記述も与えておく。つまり、分布関数 $f(|\mathbf{P}|, t)$ を考える。今度は、 E が陽に依存しないので、ボルツマン方程式の左辺は曲率がゼロの場合に^{*15}

$$\begin{aligned} L[f] &= E \frac{\partial f}{\partial t} - \Gamma^\mu_{\mu\nu} P^\mu P^\nu \frac{\partial f}{\partial P^i} \\ &= E \frac{\partial f}{\partial t} - 2\Gamma^i_{0j} P^0 P^j \frac{\partial f}{\partial P^i} \\ &= E \left(\frac{\partial f}{\partial t} - 2\frac{\dot{a}}{a} P^i \frac{\partial f}{\partial P^i} \right) \end{aligned} \quad (93)$$

となる。もちろん、先の E による記述と同じ結果が得られる。 $|\mathbf{P}| := P$ として実際に、 $(t, P^i) \rightarrow (t, P)$ と変数変換をすると

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P}, \quad P^i \frac{\partial}{\partial P^i} \rightarrow P^i \frac{\partial P}{\partial P^i} \frac{\partial}{\partial P} \quad (94)$$

^{*14} クリストッフェル記号の $\Gamma^\mu_{\nu 0}$ 成分は

$$\Gamma^\mu_{\nu 0} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,0} + g_{\lambda 0,\nu} - g_{\nu 0,\lambda}) = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu,0}$$

時間成分は存在しないので、

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2} g^{ik} g_{kj,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2} \gamma^{ik} 2a\dot{a}\gamma_{kj} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j$$

^{*15} Γ^i_{jk} は

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{i\lambda} (g_{\lambda j,k} + g_{\lambda k,j} - g_{jk,\lambda}) = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \\ &= \frac{1}{2} \gamma^{il} (\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l}) \end{aligned}$$

曲率がゼロの場合は $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ なので $\Gamma^i_{jk} = 0$ である。

であるが、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \dot{a} \sqrt{\gamma_{ij} P^i P^j} = \frac{\dot{a}}{a} P, \quad P^i \frac{\partial P}{\partial P^i} = P^i a \frac{\gamma_{ij} P^j}{\sqrt{\gamma_{jk} P^j P^k}} = P$$

と計算できるので、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} P \frac{\partial}{\partial P}, \quad P^i \frac{\partial}{\partial P^i} \rightarrow P \frac{\partial}{\partial P} \quad (95)$$

となる。したがって、ボルツマン方程式の左辺は

$$L[f] = E \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} P \frac{\partial f}{\partial P} \right) \quad (96)$$

となり、 E による記述と同じ結果が得られる。よって、運動量による記述での一様等方宇宙におけるボルツマン方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} P \frac{\partial f}{\partial P} = \frac{\mathcal{C}[f]}{\sqrt{P^2 - m^2}} \quad (97)$$

となる。

2 宇宙の熱史 (再)

3 ビッグバン元素合成

4 宇宙の晴れ上がり

宇宙は灼熱の火の玉宇宙であった。^{*16}そして、光と電子の頻繁な散乱によって不透明な状態であった。これは、水蒸気中の水滴が光を散乱するために霧がかかったように見えるのと似ている。温度が 3000K 程度まで下がると、9 割の自由電子はヘリウム原子核と陽子に捕獲されて光は電子に散乱されずに真っ直ぐ進めるようになる。このときを宇宙の晴れ上がり (recombination) と呼ぶ。^{*17} CMB はこのときの光が冷えたもので、当時の宇宙の様子を映し出している。

■晴れ上がりの概算

詳しい議論は後ですが、晴れ上がりがいづ起こるのかを概算してみる。光が散乱されて次に散乱されるまでに進める平均的な距離を平均自由距離と呼ぶ。これは、電子数密度 n_e とトムソン散乱断面積 σ_T を用いて

$$\lambda_{\text{mfp}} = \frac{1}{n_e \sigma_T} \quad (98)$$

で与えられる。平均自由距離を光が移動するのにかかる時間を平均自由時間と呼ぶ。先ほどの式 (98) より

$$t_{\text{mfp}} = \frac{\lambda_{\text{mfp}}}{c} = \frac{1}{n_e \sigma_T c} \quad (99)$$

で与えられる。この平均自由時間がハッブル時間 H^{-1} よりも長くなると、光はほとんど散乱されずに真っ直ぐ進めるようになる。

等密度期は約 9000K で起こる。晴れ上がりは 3000K 程度で起こる。したがって、物質密度は放射密度の約 3 倍であると考えられる。よって、完全な物質優勢期ではないが、簡単化のために物質優勢期であると仮定する。このとき、ハッブルパラメータは

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3}, \quad \Omega_{m,0} = \frac{8\pi G \rho_{m,0}}{3H_0^2} \quad (100)$$

であった。したがって、平均自由時間とハッブル時間との比は

$$\frac{H}{t_{\text{mfp}}} \simeq 0.8 \times 10^{-2} \left(\frac{1+z}{1000} \right)^{3/2} \left(\frac{n_\gamma/n_e}{2 \times 10^9} \right) \left(\frac{\Omega_{m,0} h^2}{0.14} \right)^{1/2} \quad (101)$$

となる。もし、数密度が共に $(1+z)^3$ に比例するとすると、 n_γ/n_e は一定である。したがって、 $H/t_{\text{mfp}} \simeq 1$ となる赤方偏移は

$$z \simeq 42 \quad (102)$$

^{*16} このようにいうと、I 先生からのツッコミが入りそうである。「火の玉とはなんですか?」「そもそも宇宙が火の玉であった保証はどこにあるのですか?」

^{*17} このような呼び方は佐藤文隆氏によるものである。カッコいい。また、この導入の文章は小松英一郎氏の著書から拝借している。[2]

となる。このときの CMB の温度は 120K 程度である。

実際は、温度が 4000K になると電子と陽子が結合して中性水素原子を形成し始める。このとき、 n_e は $(1+z)^3$ には比例せずに急激に減少する（指数関数）。したがって、 H/t_{mfp} は指数関数的に大きくなる。これを考慮すると、晴れ上がりは $z \simeq 1100$, 約 3000K で起こることになる。

4.1 水素原子の形成

自由電子が陽子に捕獲されると、中性水素原始ができる。この仮定を**再結合 (recombination)**と呼ぶ。水素原子の基底状態の結合エネルギーは 13.6eV である。

これを超えるエネルギーを持つ光子に衝突すると、電子は再び陽子から解放される（光電離）。さらに、光子だけでなく他の物質粒子が高い運動エネルギーを持って衝突すると、電子は再び陽子から解放される（衝突電離）。実際は、光子の数密度はバリオンや電子の数密度よりもはるかに大きいので、光電離が主な電離過程となる。

このような考察から、宇宙の温度が束縛エネルギーの温度換算で 16 万 K 程度を下回ると、再結合が進み始めると予想される。実際は、温度が 4000K 程度まで下がらないと再結合は進まない。これは、光子の数が非常に多いためである。光の温度が 16 万 K を下回ると、13.6eV を超えるエネルギーを持つ光子数は指数関数的に減少する。しかし、光子数はバリオン数の約 10 億倍もあるため、温度が 4000K 程度まで下がらないと、まだ十分な数の高エネルギー光子が存在して再電離が起こってしまうのである。

■水素原子の形成以前

水素原子の形成以前には、ヘリウム原子核と電子が再結合が起こる。中性ヘリウムには 2 つの電子が結合している。1 つ目の電子が結合する際の結合エネルギーは 24.6eV であり、2 つ目の電子が結合する際の結合エネルギーは 54.4eV である。それぞれの電離には約 17000K, 約 7000K で起こる。詳しい議論は、後で述べる。

陽子とヘリウム原子核の数密度を n_p, n_{He} とする。このとき、電子数密度 n_e は

$$n_e = n_p + 2n_{\text{He}} \quad (103)$$

である。 n_p は大きいため、ヘリウム原子核が再結合しても晴れ上がりはなかなか起こらない。

4.1.1 電離平衡近似

水素原子と光子が熱平衡にあるとき、

付録 A 不変散乱断面積

参考文献

- [1] 宇宙論の物理. 宇宙論の物理, 第 2 巻. 東京大学出版会, 2014.
- [2] 宇宙マイクロ波背景放射. 新天文学ライブラリー. 日本評論社, 2019.