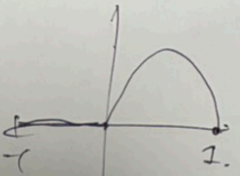
2024過去問

1. $-1 \leq t \leq 1$ の形状が以下の式で与えられる周期 2 の周期連続時間信号 $x(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq t < 0) \\ \sin(\pi t) & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$\boxed{2024-1}$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq t \leq 0) \\ \sin(\pi t) & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$



$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) \right), \quad T = 2$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t)\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}}$$

$c(\alpha+\beta) = c\alpha c\beta - s\alpha s\beta$

$c(\alpha-\beta) = c\alpha c\beta + s\alpha s\beta$

$-\frac{1}{2}\{c(\alpha+\beta) - c(\alpha-\beta)\} = s\alpha s\beta$

$s(\alpha+\beta) = s\alpha c\beta + s\beta c\alpha$

$s(\alpha-\beta) = s\alpha c\beta - s\beta c\alpha$

$s\alpha c\beta = \frac{1}{2}\left(s(\alpha+\beta) + s(\alpha-\beta)\right)$

$$a_n = \int_0^1 \sin(\pi t)\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(1+n)\pi t + s(1-n)\pi t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(1+n)\pi t}{(1+n)\pi} + \frac{-\cos(1-n)\pi t}{(1-n)\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-\cos(1+n)\pi}{(1+n)\pi} + \frac{-\cos(1-n)\pi}{(1-n)\pi} \right) - \left(\frac{-1}{(1+n)\pi} + \frac{-1}{(1-n)\pi} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(1+n)\pi}{(1+n)\pi} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{(1-n)\pi} \right) = \begin{cases} 0 & (n = 2k+1) \quad (a_0 = 0) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1+n)\pi} + \frac{2}{(1-n)\pi} \right) = \frac{2}{(1-n^2)\pi} & (n = 2k) \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^1 \sin(\pi t)\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \cos(n+1)\pi t - \cos(1-n)\pi t\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+1)\pi t}{(n+1)\pi} - \frac{\sin(1-n)\pi t}{(1-n)\pi} \right]_0^1$$

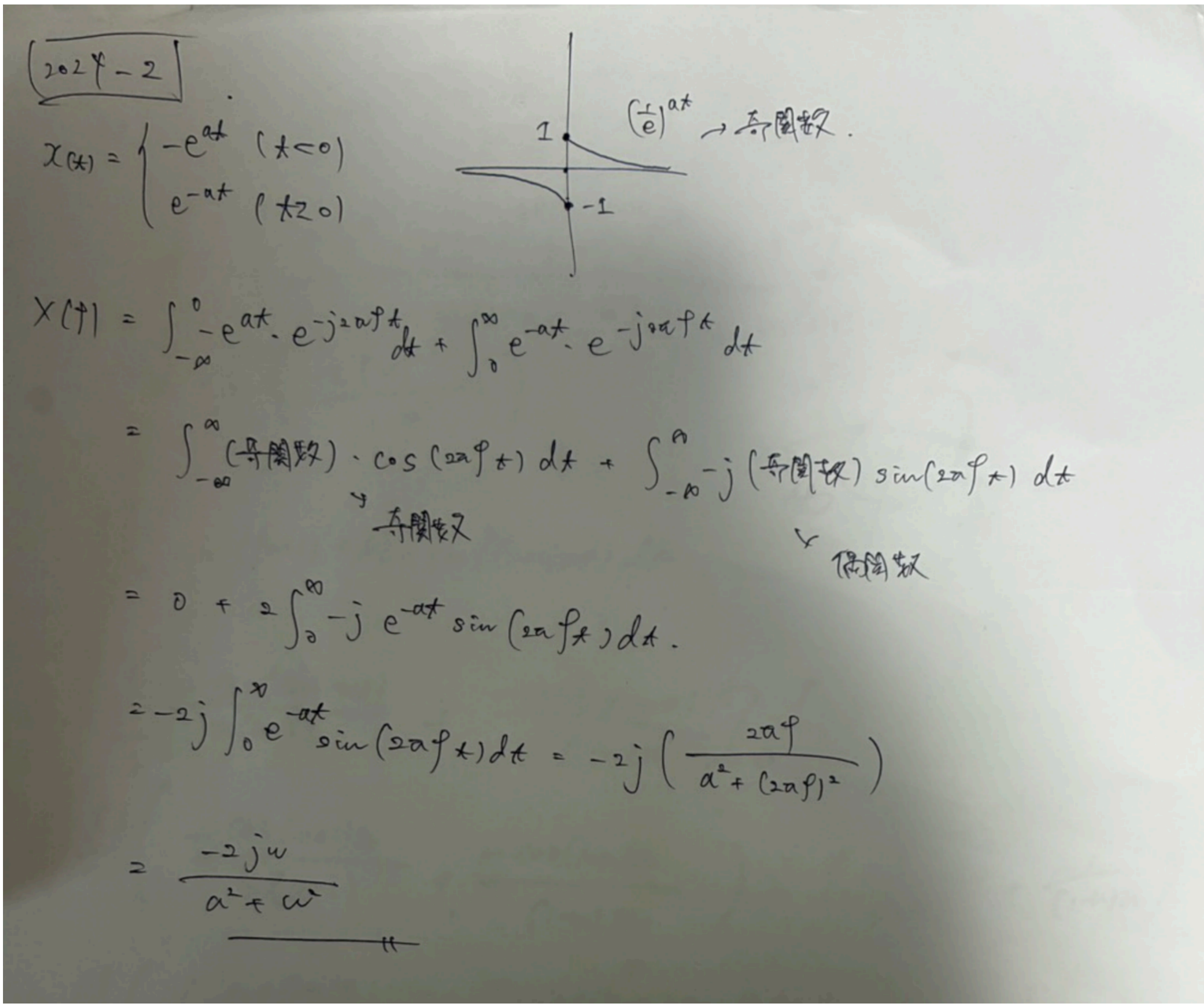
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\pi}{(n+1)\pi} - \frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\pi} \right) = 0$$

$$b_1 = \int_0^1 \sin^2(\pi t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x(t) \approx \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(1-4k^2)\pi}\cos(2k\pi t) \right) + \frac{1}{2}\sin(\pi t)$$

2. 以下の非周期連続時間信号 $x(t)$ のフーリエ変換を求めよ．ただし $a > 0$ である．

$$x(t) \quad = \begin{cases} -e^{at} & (t < 0) \\ e^{-at} & (t \geq 0) \end{cases}$$



$\boxed{2024年-2}$

$$x(t) = \begin{cases} -e^{at} & (t<0) \\ e^{-at} & (t \geq 0) \end{cases}$$

1

-1

$\left(\frac{1}{e}\right)^{at} \to$ 奇関数．

$$X(f) = \int_{-\infty}^{0} -e^{at} \cdot e^{-j2\pi f t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (奇関数) \cdot \cos(2\pi f t)\, dt}_{奇関数} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -j\,(奇関数) \sin(2\pi f t)\, dt}_{偶関数}$$

$$= 0 + 2\int_{0}^{\infty} -j\, e^{-at} \sin(2\pi f t)\, dt.$$

$$= -2j \int_{0}^{\infty} e^{-at} \sin(2\pi f t)\, dt = -2j \left(\frac{2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2} \right)$$

$$= \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

3. フーリエ変換が以下の $X(f)$ で表される非周期連続時間信号 $x(t)$ を求めよ．

$$X(f) \quad = \begin{cases} 0 & (f < -1, f > 1) \\ 1 & (-1 \leq f \leq 1) \end{cases}$$

$\boxed{2024-3}$

$$X(f) = \begin{cases} 0 & (f < -1,\ f > 1) \\ 1 & (-1 \leq f \leq 1) \end{cases}$$

$$x(t) = \int_{-1}^{1} e^{j2\pi f t}\, df = \left[\frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \right]_{-1}^{1} = \frac{e^{j2\pi t}}{j2\pi t} - \frac{e^{-j2\pi t}}{j2\pi t}$$

$$= \frac{1}{j2\pi t}\left(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t} \right) \rightarrow \cos(2\pi t) + j\sin(2\pi t) - (\cos(2\pi t) - j\sin(2\pi t))$$

$$= \frac{1}{j2\pi t}\left(2j \sin(2\pi t) \right) = \frac{1}{\pi t}\sin(2\pi t)$$

$$= \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \quad (= 2\,\mathrm{sinc}(2t))$$

4.　以下の式で与えられる非周期離散時間信号 $\tilde{x}(t)$ のスペクトルは周期スペクトルであることを示せ．ただし $x(nT_s)$ は非周期連続時間信号 $x(t)$ の $t = nT_s$ における標本値であり，T_s は標本化周期である．

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$\boxed{2024-4}$

$\tilde{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)$ のスペクトルが周期スペクトルであることを示す。

つまり、$\tilde{x}(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{X}(f)$ が周期性を持っていれば良い。

まず、$\tilde{x}(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{X}(f)$ を求める。

$$\tilde{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\cdot e^{-j2\pi fnT_s} \quad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)f(t)\,dt = f(a)\right)$$

また、周期性を持つことは、$\tilde{X}(f) = \tilde{X}(f+\frac{1}{T_s})$ であることから示せる。

T_s（1周期分後でも同じ）

$\frac{1}{T_s}$（1周波数分後でも同じ）

$$\tilde{X}\left(f+\frac{1}{T_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\cdot e^{-j2\pi\left(f+\frac{1}{T_s}\right)\cdot nT_s}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,e^{-j2\pi fnT_s}\cdot e^{-j2\pi n} \rightarrow \cos(2\pi n) - j\sin(2\pi n) = 1.$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,e^{-j2\pi fnT_s} = \tilde{X}(f)$$

上記より、$\tilde{x}(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{X}(f)$ が周期性を持つので、題意は示された。■

5. 非周期連続時間信号 $s(t)$ のフーリエ変換を $S(f)$ とするとき，以下の信号のフーリエ変換を $S(f)$ を用いて表せ．ただし f_c は実定数である．

$$s(t)\cos^2(2\pi f_c t)$$

$\boxed{2024\text{-}5}$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}.$$

sにj

$$c - js = e^{-jt}$$

$$c + js = e^{jt}$$

$$2c = (e^{-jt} + e^{jt})$$

$$s(t)\cos^2(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow s(t)\cdot\left(\frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2}\right) \qquad \cos 2(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}s(t)\cdot\left(e^{-j2\pi(2f_c)t} + e^{j2\pi(2f_c)t}\right) + \frac{1}{2}s(t)$$

~~平~~行移動成分をかける。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S(f) + \frac{1}{4}\left(S(f+2f_c) + S(f-2f_c)\right)$$

― 別解（代数のゴリ押し）―

$$\Rightarrow \frac{1}{4}s(t)\cdot\left(e^{-j2\pi(2f_c)t} + e^{j2\pi(2f_c)t}\right) + \frac{1}{2}s(t)$$ をフーリエ変換．

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j2\pi ft}\cdot e^{-j2\pi(2f_c)t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}\cdot e^{j2\pi(2f_c)t}\,dt\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j2\pi(f+2f_c)t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi(f-2f_c)t}\,dt\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(S(f-2f_c) + S(f+2f_c)\right) + \frac{1}{2}S(f)$$