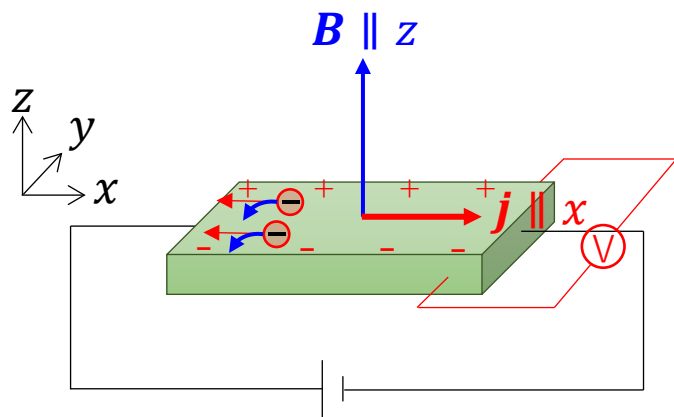


電子物性2 第2回目

1-2 Hall効果



q が電子であろうが正孔であろうが
 y のマイナスの方に曲げられる。

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{電流密度}\mathbf{j}\text{の定常電流} & \rightarrow x\text{方向} \\ \text{磁束密度}\mathbf{B}\text{の磁場} & \rightarrow z\text{方向}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, B) \end{array} \right.$
 \rightarrow 電荷 q にローレンツ力 $\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (1.13) $\rightarrow y$ 方向
 が働く。

$$\begin{aligned}
 \text{Ex. } q = -e (e > 0) \text{ の時、 } \mathbf{F}_L &= (-e) \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \\
 &= (-e) \times (-1) \begin{vmatrix} -v & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \mathbf{e}_y = -evB \mathbf{e}_y
 \end{aligned}$$

結果として、 y 方向にホール電場 \mathbf{E}_H が生じる。

$$\mathbf{E}_H = R_H \mathbf{B} \times \mathbf{j} \quad (1.14)$$

↑
ホール係数

磁場があるときのキャリアの運動方程式は、

$$m^* \left(\frac{d\mathbf{v}_D}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_D \right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) \quad (1.15)$$

Hall効果を考慮すると

電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$

磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$

粒子の速度 $\mathbf{v}_D = (v_{Dx}, v_{Dy}, 0)$


の様に考えればよいから

(Hall効果では E_z は考慮しないが一般化のため)

とすると、仮に $\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tau \rightarrow \infty$ なら

$$\left(m^* \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = qv_{Dy}B\mathbf{e}_x - qv_{Dx}B\mathbf{e}_y \right)$$

角振動数 $\omega_c = \frac{|q|B}{m^*}$: サイクロトロン角振動数


$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ v_{Dx} & v_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = v_{Dy}B\mathbf{e}_x - v_{Dx}B\mathbf{e}_y$$

$$\left. \begin{aligned} v_{Dx} &= v_0 \sin\left(\frac{qB}{m^*}t + \phi\right) \\ v_{Dy} &= v_0 \cos\left(\frac{qB}{m^*}t + \phi\right) \end{aligned} \right\}$$

等速円運動

↓
サイクロトロン運動

定常状態では $\frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = \mathbf{0}$ となるから(1.15)は

$$x\text{方向} \quad \frac{m^*}{\tau} v_{Dx} = q(E_x + v_{Dy}B)$$

$$y\text{方向} \quad \frac{m^*}{\tau} v_{Dy} = q(E_y - v_{Dx}B)$$

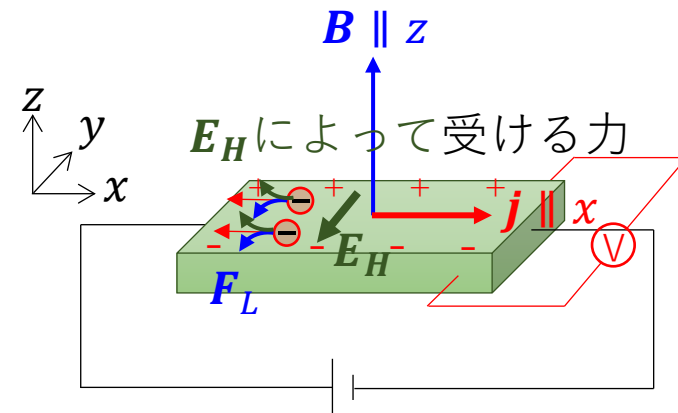
$$z\text{方向} \quad \frac{m^*}{\tau} v_{Dz} = qE_z \quad (B \parallel z \text{ では、磁場の影響はない})$$

→ v_{Dx} と v_{Dy} について解く

$$v_{Dx} = \frac{\frac{q\tau}{m^*}(E_x + \frac{qB}{m^*}\tau E_y)}{1 + \frac{q^2 B^2 \tau^2}{m^{*2}}} = \frac{\frac{q\tau}{m^*}(E_x + \omega_c \tau E_y)}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad (1.16)$$

$$v_{Dy} = \frac{\frac{q\tau}{m^*}(E_y - \frac{qB}{m^*}\tau E_x)}{1 + \frac{q^2 B^2 \tau^2}{m^{*2}}} = \frac{\frac{q\tau}{m^*}(E_y - \omega_c \tau E_x)}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad (1.17)$$

$$v_{Dz} = \frac{q\tau}{m^*} E_z$$



キャリア密度を n とすると電流密度 \mathbf{j} は、

$$j_x = nqv_{Dx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x + \omega_c \tau E_y) \quad (1.18)$$

$$j_y = nqv_{Dy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_y - \omega_c \tau E_x) \quad (1.19)$$

$$j_z = nqv_{Dz} = \frac{nq^2 \tau}{m^*} E_z = \sigma_0 E_z$$

ここで、 $\sigma_0 = \frac{nq^2 \tau}{m^*}$ は磁場の無い時の電気伝導率

電気伝導度をオームの法則が成り立つ範囲で
 $\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}$ とする、 $\boldsymbol{\sigma}$ は行列（テンソル）の形で書かれる。



$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau & 0 \\ -\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

電子とホールではこの部分の符号が変わります。

$$\sigma_{xx}(B) = \sigma_{yy}(B) = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{qB}{m^*}\tau\right)^2} \Rightarrow \sigma_{xx}(B), \sigma_{yy}(B) \text{は } \frac{\sigma_0}{1 + AB^2} \text{の形：対角項は} B \text{の増加とともに単調減少}$$

$$\sigma_{xy}(B) = -\sigma_{yx}(B) = \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \sigma_0 \Rightarrow \sigma_{xy}(B), \sigma_{yx}(B) \text{は } \frac{DB}{1 + AB^2} \text{の形： } \frac{DB}{1 + AB^2} = \frac{D}{\frac{1}{B} + AB} \Rightarrow B \text{が小さいとき } B \text{に比例}$$


$B \text{が大きいとき } \frac{1}{B} \text{に比例}$

$$\sigma_{zz}(B) = \sigma_0$$

Hall効果の現象に沿って考える。

y 方向は試料の端で電流が制限されて流れないから $j_y = 0$ より(1.19)から

$$\underline{E_y} = \omega_c \tau E_x \quad (1.20)$$

 y 方向に電場が生じる。⇒ Hall効果

この(1.20)に(1.18)を代入する。

$$j_x = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x + \omega_c^2 \tau^2 E_x) = \sigma_0 E_x \quad (1.21)$$

(1.21)は結局 x 方向の電流密度 j_x は磁束密度 B を加えても変化しないことを意味している。

(1.14)より $\mathbf{E}_H = R_H \mathbf{B} \times \mathbf{j}$

$E_y \mathbf{e}_y = R_H (-j_y B \mathbf{e}_x + j_x B \mathbf{e}_y)$ なので

(1.20)

$$\underline{R_H} = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{\omega_c \tau E_x}{\sigma_0 E_x B} = \frac{m^*}{n q^2 \tau} \times \omega_c \tau \times \frac{q}{m^* \omega_c} \times \frac{E_x}{E_x} = \frac{1}{n q} \quad (1.22)$$

Hall係数

$\frac{1}{\sigma_0}$

B

電子の時 $q = -e$ より $R_H < 0$
 キャリアが
 正孔の時 $q = +e$ より $R_H > 0$

→ キャリアの符号の判定ができる。

R_H の大きさからキャリア密度 n が求まる。

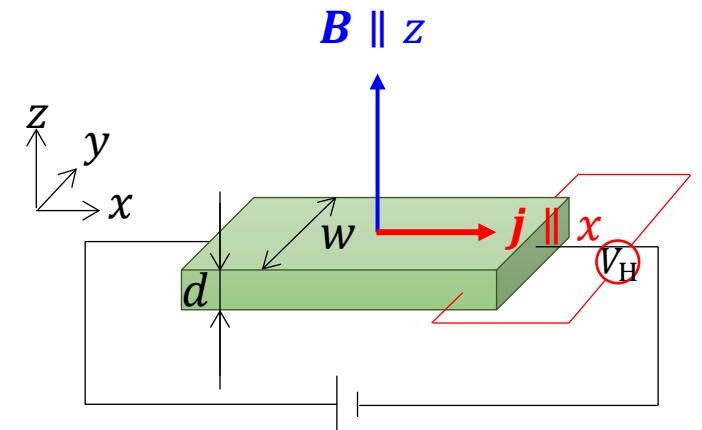
実験的には、

$E_y = -\frac{V_H}{w}$ ← Hall電圧 (測定値)

$j_x = \frac{I}{wd}$ ← 測定電流 (設定値)

を(1.22)に代入

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{V_H}{w} \times \frac{wd}{I} \times \frac{1}{B} = -\frac{V_H d}{I B}$$



Hall角とHall移動度 μ_H

(1.18)と(1.19)をテンソルの成分で書くと

$$j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y \quad (1.23)$$

$$j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y = -\sigma_{xy}E_x + \sigma_{yy}E_y \quad (1.24)$$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ は B に依存する。

Hall効果の実験では、 $j_y = 0$ より(1.24)は、

$$E_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}}E_x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}E_x \quad (1.25)$$

(1.23)に(1.25)を代入すると、磁場下での x 方向の電気伝導率は、

$$j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}E_x = \frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}}E_x = \sigma(B)E_x \quad (1.26)$$

の様にかける。

Hall係数 R_H は、(1.25)と(1.26)より

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (1.27)$$

と書ける。

(Hall係数を電気伝導率のテンソルで表した一般式)

磁場下のHall移動度 μ_H

$\mu_H \equiv R_H \sigma(B)$ (1.28)で定義すると、

(1.26)と(1.27)から

$$\mu_H = \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \times \frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}} = \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \quad (1.29)$$

(1.25)を用いると $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{E_y}{E_x}$ だから

(1.29)は、

$$\mu_H = \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{1}{B} \frac{E_y}{E_x} \quad (1.30)$$

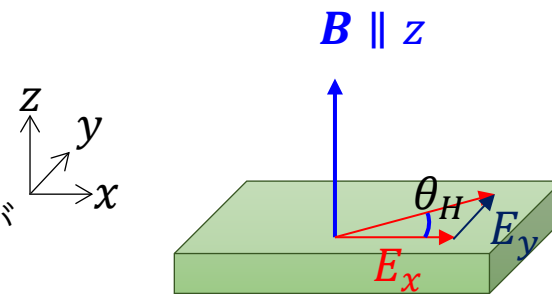
$$\tan \theta_H = \frac{E_y}{E_x} \quad (1.31)$$

としてHall角 θ_H を定義すると、 θ_H はローレンツ力によりキャリアの軌道が曲げられる角度を表している。

$$\tan \theta_H = \mu_H B \quad (1.32)$$

移動度 μ_H は、金属で $10 \sim 50 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, 半導体のSiでは $1000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, InSbで $10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ に達する

Hall電場 (x方向) とドリフト方向 (y方向) の電場の比



1-3 交流導電率

交流電場が存在するときの電流の応答を示す。

$$\text{交流電場を } \mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}] \cdots (1.33)$$

とする。

同様に

$$\text{運動量 } \mathbf{p}(t) = \text{Re}[\mathbf{p}(\omega)e^{i\omega t}] \cdots (1.34),$$

$$\text{電流密度 } \mathbf{j}(t) = \text{Re}[\mathbf{j}(\omega)e^{i\omega t}] \cdots (1.35)$$

とする。

Drudeモデルの運動方程式(1.1)より

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{\mathbf{p}}{\tau}$$

(1.33)~(1.35)を代入すると

$$i\omega\mathbf{p}(\omega) = -e\mathbf{E}(\omega) - \frac{\mathbf{p}(\omega)}{\tau} \cdots (1.36)$$

より、

$$\mathbf{p}(\omega) = -\frac{e\tau}{1+i\omega\tau}\mathbf{E}(\omega) \cdots (1.37)$$

$$\mathbf{j}(\omega) = -\frac{ne}{m^*}\mathbf{p}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega) \cdots (1.38)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{1+i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau} \cdots (1.39)$$

ω が増加すると $\sigma(\omega)$ は減少し、**表皮効果**が表れ、さらに周波数が高くなると、**光学伝導度**となり複素誘電率を介して光の屈折率とつながる。

高周波になると金属の表面にしか電流が流れなくなる現象



磁場中の交流伝導率

定常磁場中における交流電場の下での電子の運動方程式は、

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = (-e)\mathbf{E}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} + \frac{(-e)}{m^*}\mathbf{p}(t) \times \mathbf{B} \cdots (1.40)$$

電流密度 $\mathbf{j} = \frac{n(-e)\mathbf{p}}{m^*}$ より、 \mathbf{j} を用いて表すと、両辺に $-\tau \frac{n(-e)}{m^*}$ を掛けて

$$\begin{aligned} -\tau \frac{d\mathbf{j}(t)}{dt} &= -\frac{n(-e)^2\tau}{m^*}\mathbf{E}(t) + \mathbf{j}(t) - \frac{(-e)\tau}{m^*}\mathbf{j}(t) \times \mathbf{B} \\ \Rightarrow -i\omega\tau\mathbf{j}(\omega) &= -\frac{ne^2\tau}{m^*}\mathbf{E}(\omega) + \mathbf{j}(\omega) + \frac{e\tau}{m^*}\mathbf{j}(\omega) \times \mathbf{B} \\ \Rightarrow \sigma_0\mathbf{E}(\omega) &= \mathbf{j}(\omega) + i\omega\tau\mathbf{j}(\omega) - \mu\mathbf{B} \times \mathbf{j}(\omega) \cdots (1.41) \end{aligned}$$

磁場 \mathbf{B} のベクトル積をテンソルにすることにより、

$$\sigma_0\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{j}(\omega) + i\omega\tau\mathbf{j}(\omega) - \mu \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{j}(\omega) \cdots (1.42)$$

磁場がz軸方向にある場合を考える。 $\rho_0 = \frac{1}{\sigma_0}$ として、これから抵抗率テンソル $\tilde{\rho}$ が得られる。

$$\tilde{\rho} = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 + i\omega\tau & \omega_c\tau & 0 \\ -\omega_c\tau & 1 + i\omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 + i\omega\tau \end{pmatrix} \dots (1.43)$$

これから導電率テンソル $\tilde{\sigma}$ を求めると、

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2} \begin{pmatrix} 1 + i\omega\tau & -\omega_c\tau & 0 \\ \omega_c\tau & 1 + i\omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 + i\omega\tau \end{pmatrix} \dots (1.44)$$

が得られる。テンソルの前の因子の分母に注目すると、 $\omega_c \cong \omega$ の時に交流伝導度が大きくなる。

マイクロ波の吸収は導電率に比例するので、この条件の時にマイクロ波の吸収は大きくなる。（**サイクロトロン共鳴**）

$\omega_c = \frac{eB}{m^*}$ の関係から半導体などの有効質量を求めることが可能

Ex. SiやGe

24GHzの周波数,0.1~0.6Tの磁場に対応した吸収ピークがみられる。

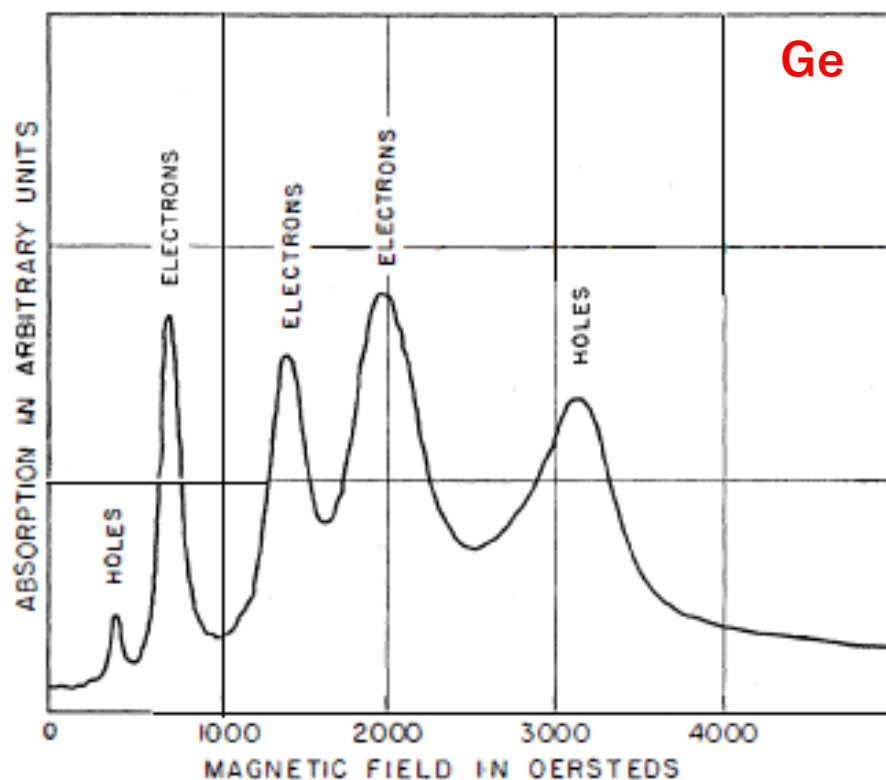


FIG. 2. Typical cyclotron resonance results in germanium near 24 000 Mc/sec and 4°K: direct copy from a recorder trace of power absorption vs static magnetic field in an orientation in a (110) plane at 60° from a [100] axis.

Geのサイクロトロン共鳴結果

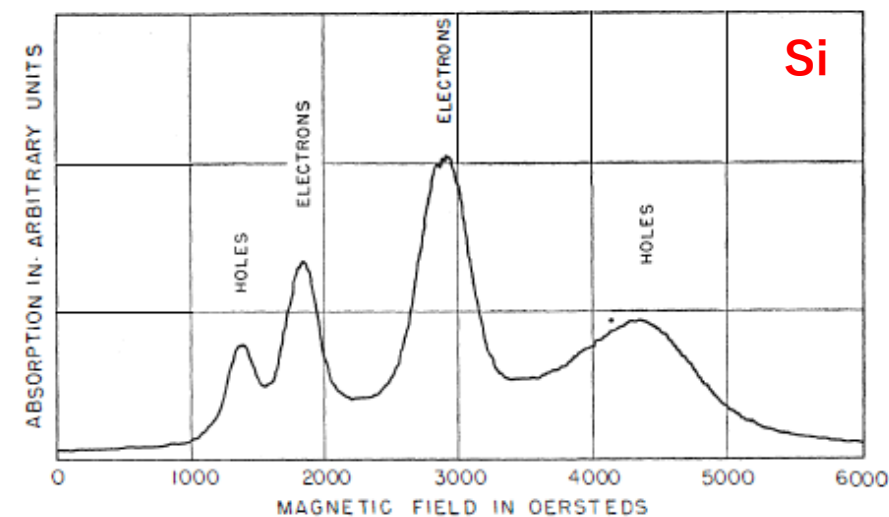


FIG. 3. Typical cyclotron resonance results in silicon near 24 000 Mc/sec and 4°K: static magnetic field orientation in a (110) plane at 30° from a [100] axis.

Siのサイクロトロン共鳴結果