# 数値計算法過去問

$$-\lambda\frac{d^2T}{dx^2}=Q$$

### ①上記の基礎式について考える。この基礎式を離散化して $AiTi-1+BiTi+CiTi+1=Di$ のように書かれるとき、AiからDiに入る値を計算せよ。

### ②以下全ての手法を英語の正式名称にせよ。

(1)分子動力学法
(2)有限差分法
(3)有限要素法
(4)有限体積法
(5)境界要素法
(6)移動粒子半陰解法
(7)平滑化粒子法

### ③いかに与えられる偏微分方程式が、放物型、楕円型、双曲線型のどれに当てはまるのかそれぞれ答えよ。

(1)1次元波動方程式:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

(2)1次元拡散方程式（熱伝導方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

(3)2次元ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

## ④以下に与える誤差の種類に関して、その特徴をそれぞれ答えよ。またその誤差を計算する式があるものは式もセットで答えよ。

(1)データ誤差

(2)打ち切り誤差 (差分式と辺微分方程式の式も書け)

(3)丸めの誤差
(4)桁落ちと情報落ち

(5)離散化誤差と安定性誤差（Uとnで表された「全誤差」の式を答え、離散化誤差と安定化誤差の項がどこに当たるかも書け。）

(6)絶対誤差と相対誤差(uを用いた定義式をそれぞれ書け)

## ⑤1次元定常熱伝導を考える。計算領域は$0 \le x \le LX$。格子は等間隔で$\Delta x$とする。この時、以下の問いに答えよ。

(1) 境界の情報が温度で与えられている時、以下の問いに答えよ。

(i)x=0の境界が T = T_B1 で与えられる時の、T0を求める式を求めよ。

(ii)x=LXの境界が T = T_B2 で与えられる時の、T_N+1を求める式を求めよ。

(2)境界の情報が熱収束で与えられている時、以下の問いに答えよ。

(i)x=0の境界が q = q_B1 で与えられる時の、偏微分方程式を求めよ。
(ii) (i)を差分近似することによって得られる、T0を求める式を求めよ。
(iii)x=LXの境界が q = q_B2で与えられる時、差分近似を用いて、T_N+1を求める式を求めよ。

## ⑥下記に示した式は、上がナビエストークス方程式であり、下の式は、NS式の対流項に着目した時、変数をスカラー化したものである（スカラー化した対流項の式)。この時以下の問いに答えよ。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u}$$

$$u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

(1)対流の変数である u, vをθ、V（大きさ）で表した時のスカラー化した対流項の式を書け。

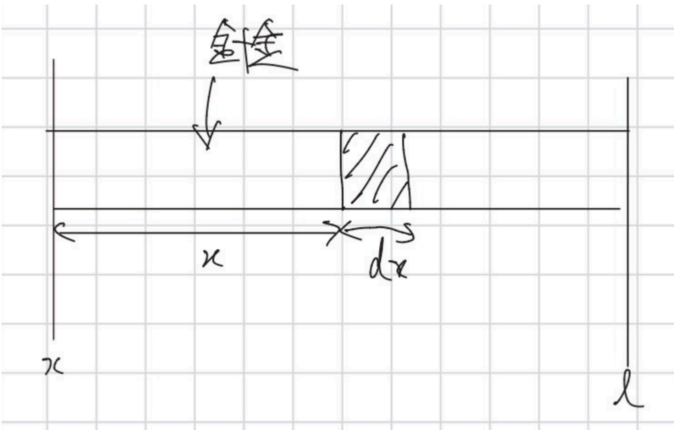
(2)対流輸送の際用いられる、一次風上差分の定義式をx軸に着目して書け。

(3)対流輸送の際用いられる、二次風上差分の定義式をx軸に着目して書け。

(4) (2), (3)より精度が上がるとされている差分法の名前を書け。

(5) (1)で求めた式に一次風上差分を適用することによって、ø_i,j を求めよ。

## ⑦下記に示した図を基に、放物方偏微分方程式を考え、熱伝導熱伝導方程式を導くとき、以下の問いに答えよ。




(1)  微小時間dtにて断面積Sの針金に流入する熱量をQ(-)とした時、Q(-)の式を書け。

(2) 流出する熱量をQ(+)とした時、ΔQとQ(-), Q(+)の関係式、ΔQの式を示せ。

(3)針金の密度をρ、非熱をcとした時、微小幅dxでの熱量変化を表すΔQの式を示せ。

(4) (2), (3)の関係から、熱伝導熱伝導方程式を求めよ。

(5) (4) の熱伝導熱伝導方程式の物性が一定であると考えた時、どのような方程式になるかを示し、その時現れる定数が何を表すかを答えよ。

▼ 回答

**① $-\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = Q$ を離散化して $A_iT_{i-1} + B_iT_i + C_iT_{i+1} = D_i$**

2階微分の中心差分,

$$\frac{d^2T}{dx^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

よって,

$$-\lambda \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = Q$$

係数は,

$$A_i = -\frac{\lambda}{\Delta x^2}, \quad B_i = \frac{2\lambda}{\Delta x^2}, \quad C_i = -\frac{\lambda}{\Delta x^2}, \quad D_i = Q.$$

---

**② 手法の英語正式名称**

1. 分子動力学法: **Molecular Dynamics Method**
2. 有限差分法: **Finite Difference Method**
3. 有限要素法: **Finite Element Method**
4. 有限体積法: **Finite Volume Method**
5. 境界要素法: **Boundary Element Method**
6. 移動粒子半陰解法: **Moving Particle Semi-implicit Method**
7. 平滑化粒子法: **Smoothed Particle Hydrodynamics**

---

**③ PDEの型(放物型, 楕円型, 双曲型)**

1. 1次元波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$: **双曲型**
2. 1次元拡散方程式 $u_t = \alpha u_{xx}$: **放物型**
3. 2次元ポアソン方程式 $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$: **楕円型**

---

**④ 誤差の種類, 特徴, 式(あるものは式も)**

**(1) データ誤差**

入力データ(初期条件, 境界条件, 物性値, 観測値など)の誤差.

**(2) 打ち切り誤差(truncation error)**

差分近似で高次項を切り捨てた誤差.
例(2階微分の中心差分):

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = u_{xx}(x_i) + O(\Delta x^2)$$

したがって打ち切り誤差は $O(\Delta x^2)$.

**(3) 丸め誤差(round-off error)**

有限桁の浮動小数演算による誤差(各演算で生じる).

**(4) 桁落ち, 情報落ち**

- 桁落ち: 近い数の減算で有効桁が失われる(例, $a - b$ で $a \approx b$).
- 情報落ち: 大小が極端に違う数の加算で小さい方が無視される(例, $a + b$ で $|a| \gg |b|$).

**(5) 離散化誤差と安定性誤差(全誤差の式, どれがどれか)**

- $u$: 元の微分方程式の真の解
- $u^h$: 差分方程式を"厳密に"満たす解(格子解)
- $\tilde{u}$: 実際に計算で得た解

全誤差:

$$u - \tilde{u} = (u - u^h) + (u^h - \tilde{u})$$

- 離散化誤差: $u - u^h$
- 安定性誤差(数値誤差の増幅を含む): $u^h - \tilde{u}$

**(6) 絶対誤差と相対誤差(定義式)**

数値解を $\tilde{u}$, 真値を $u$ とすると,

$$絶対誤差\ e = \tilde{u} - u$$

$$相対誤差\ e_r = \frac{|\tilde{u} - u|}{|u|}$$

---

⬇⑤以降の解答

attachment:37887a48-67c9-44fb-9e6c-8b04683a0881:月1追加回答_4.pdf