1. 電子が電場中で運動しているとする。電子は平均自由時間（緩和時間） τ で運動量を失い，散乱と散乱の間は力学方程式に従って加速されると仮定する。

(a)時刻 tに運動量 $p(t)$を持つ電子が，時刻 $t+dt$に運動量

$$p(t+dt)=\begin{cases}0 & (\text{確率 } dt/\tau)\\ p(t)+F\,dt & (\text{確率 } 1-dt/\tau)\end{cases}$$

となることから，運動量の平均 $\langle p(t)\rangle$が満たす微分方程式を示せ。

全体像：電子は電場中で力(F)を受けて加速する。
しかし⟹実際には、平均時間でごとに散乱する。
⟹散乱して運動量を失う。

☆結果として、dt後に電子が加速するか、散乱するかは確率。
⟹その確率を考慮して、平均運動量を求める。

$$p(t+dt)=\begin{cases}0 & \left(p=\frac{dt}{\tau}\right) \text{：散乱が起きる。}\\ p(t)+F\,dt & \left(p=1-\frac{dt}{\tau}\right) \text{：起きないで加速。}\end{cases}$$

$$\langle p(t+dt)\rangle = 0\cdot\frac{dt}{\tau}+\left(p(t)+F\,dt\right)\left(1-\frac{dt}{\tau}\right)$$

期待値

$$= p(t)-\frac{dt}{\tau}p(t)+F\,dt-F\frac{dt}{\tau}\cdot dt$$

$$= p(t)-\frac{dt}{\tau}p(t)+F\,dt \quad (dt^2 \text{は} 0 \text{と近似})$$

$$\Rightarrow \langle p(t+dt)\rangle - p(t) = F\,dt-\frac{dt}{\tau}p(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\langle p(t+dt)\rangle - p(t)}{dt} = F-\frac{p(t)}{\tau}$$

$$\Rightarrow \lim_{dt \to 0} \frac{\langle p(t+dt) \rangle - p(t)}{dt} = F - \frac{p(t)}{\tau}$$

→ 微分の定義 $\left(= \frac{dp}{dt}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = F - \frac{p}{\tau}$$ //

(b) 磁場がないときローレンツ力は

$$F = -eE$$

である。(a) で求めた方程式を用いて，定常状態における平均運動量 pを求めよ。

前提：定常状態 ⇒ 運動量が t によって変化しない。

⇒ $\frac{dp}{dt} = 0$ を用いる。

$$\Rightarrow 0 = F - \frac{p}{\tau} \Rightarrow -eE - \frac{p}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow p = -\tau eE$$ //

(c) 電子の質量を m，電子密度を nとする。平均速度 $v = p/m$を用いて電流密度

$$j = -env$$

を求め，電気伝導率の Drude の式

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

を導け。

平均速度 → 電流密度 → 伝導率 の順で求める。

平均速度 $v = -\frac{\tau e E}{m}$

電流密度 $j = -en \cdot \left(-\frac{\tau e E}{m}\right) = \frac{n\tau e^2 E}{m}$

電気伝導率の式：$j = \sigma E$

$\Rightarrow \sigma E = \frac{n\tau e^2}{m} E \Rightarrow \sigma = \frac{n\tau e^2}{m}$

2. 金属中の電子が電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ と磁場$\mathbf{B} = (0,0,B)$の中で運動する場合，Drude 理論の定常状態では

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{m}{\tau}\mathbf{v} \qquad (1)$$

が成り立つ。電流密度は $\mathbf{j} = -ne\,\mathbf{v}$とする。

この関係式から，電場と電流の関係式

$$\boldsymbol{E} = \rho_e \boldsymbol{j} \qquad (2)$$

によって定義される 3×3 の行列である抵抗率テンソル ρ_eを求め，さらにその逆行列として伝導率テンソル σ_eを求める。

(i) まず運動方程式（1）を 電場ベクトル$\boldsymbol{E}$の x, y, z 成分で具体的に書きなさい。

☆ 前提：①をプラスして、磁場が絡むと金属中の電子の運動がどうなり、それによって、抵抗と伝導率がどうなるか。

(解) では、$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{m}{\tau}\mathbf{v}$

$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$、$\mathbf{B} = (0, 0, B)$ なので、

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$ なので。

(x成分) $= -e(E_x + v_y B) - \frac{m}{\tau} v_x = 0$、$E_x = -v_y B - \frac{m}{e\tau} v_x$

(y成分) $= -e(E_y - v_x B) - \frac{m}{\tau} v_y = 0$、$E_y = v_x B - \frac{m}{e\tau} v_y$

(z成分) $= -e(E_z + 0) - \frac{m}{\tau} v_z = 0$、$E_z = -\frac{m}{e\tau} v_z$

(ii) 電場ベクトル$\boldsymbol{E}$と電場と電流の関係式(2)をつかって抵抗率テンソル $\boldsymbol{\rho_e}$を求めなさい。ただし，$\omega_c = \frac{eB}{m}$としてまとめること。

☆ 抵抗率テンソル：$E = \rho_e j$ の ρ_e のこと。

⇒ 目標 $E = (\ )v$ を、$E = (\ )j$ にする。

⇒ $j = -env$（電流密度の式）を用いる。

$$(x\text{成分}) = -e(E_x + v_y B) - \frac{m}{\tau} v_x = 0, \quad E_x = -v_y B - \frac{m}{e\tau} v_x$$

$$(y\text{成分}) = -e(E_y - v_x B) - \frac{m}{\tau} v_y = 0, \quad E_y = v_x B - \frac{m}{e\tau} v_y$$

$$(z\text{成分}) = -e(E_z + 0) - \frac{m}{\tau} v_z = 0, \quad E_z = -\frac{m}{e\tau} v_z$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m}{e\tau} & -B & 0 \\ B & -\frac{m}{e\tau} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{e\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{m}{e\tau} \begin{pmatrix} 1 & \frac{e\tau B}{m} & 0 \\ -\frac{e\tau B}{m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = -\frac{m}{e\tau} \begin{pmatrix} 1 & \tau\omega_c & 0 \\ -\tau\omega_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

$j = -env \Rightarrow v = -\frac{1}{en} j$ を用いて、

$$E = \frac{m}{e^2 n\tau} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau & 0 \\ -\omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} j, \quad \rho_e = \frac{m}{e^2 n\tau} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau & 0 \\ -\omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

//

(iii) 伝導率テンソル$\boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\rho}_e^{-1}$を求めなさい。

☆ シンプルな逆行列。

$$\rho_e^{-1} = \frac{ne^2\tau}{m}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} & -\frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & 0 \\ \frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_e$$

(iv)ナトリウムの棒状試料（断面 5 mm × 5 mm）に電流 1A を流し，長手方向と垂直な方向に 1 T の磁場がかかったときのホール電圧の大きさを求めなさい。

ナトリウムの原子密度は約 1 g/cm³、原子量は約 23 とする。ナトリウムは価数 1 で、1 原子あたり自由電子数は 1 と仮定してよい。

☆ 重要公式。

電流密度 $\left(j = \frac{I}{(\text{断面積})^2}\right)$，電子密度 $\left(n = \frac{\rho}{M} N_A Z\right)$

ホール電圧：$\left(V = \frac{IB}{Lne}\right)$

ρ = 密度 (kg/m³)，M = モル質量 (kg/mol)

N_A = アボガドロ数，Z = 原子中の価電子。

$$j = \frac{1}{(5.0\times10^{-3})^2} = 4.0\times10^{4}\ [\mathrm{A/m^2}].$$

$$n = \frac{1}{23}\cdot 6.02\times10^{23}\cdot 1 = 2.6\times10^{28}\ [\mathrm{m^{-3}}].$$

$$V = \frac{1\cdot1}{5.0\times10^{-3}\cdot2.6\times10^{28}\cdot1.602\times10^{-19}} = 4.8\times10^{-8}\ [\mathrm{V}]$$

3. 次の表は、金属 **銀**（Ag）と **リチウム**（Li）の電気抵抗率 ρ，密度 n（g/cm³），原子量 w を示している：

金属	**ρ（Ω·m）**	**密度 n (g/cm³)**	**原子量 w**
Ag	1.59×10^{-8}	10.5	107.8

金属	**ρ（Ω·m）**	**密度 n (g/cm³)**	**原子量 w**
Li	9.28×10^{-8}	0.53	6.94

Ag と Li の両方は 1 価（金属 1 原子あたり自由電子 1 個）であるとして、Drude 模型による電子の散乱時間 τ を計算せよ。

＊重要公式。

$\tau = \dfrac{m}{ne^2\rho}$ （m：電子の質量 $(9.11\times10^{-31}$ kg$)$） $n = \dfrac{\rho}{\mu} N_A Z$

$$n_{Ag} = \frac{10.5}{107.8} \times 6.02\times10^{23} \times 1 = 5.9\times10^{22}\ [\mathrm{cm^{-3}}]$$

$$\Rightarrow n_{Ag} = 5.9\times10^{22}\times10^{28} = 5.9\times10^{28}\ [\mathrm{m^{-3}}].$$

$$n_{Li} = \frac{0.53\times10^{3}}{6.94} \times 6.02\times10^{23} \times 1 = 4.6\times10^{22}\ [\mathrm{cm^{-3}}]$$

$$\Rightarrow n_{Li} = 4.6\times10^{22}\ [(\tfrac{1}{100}\mathrm{m})^{-3}] = 4.6\times10^{28}\ [\mathrm{m^{-3}}]$$

$$\tau_{Ag} = \frac{9.11\times10^{-31}}{(5.9\times10^{28})(1.60\times10^{-19})^2(1.59\times10^{-8})} = 3.8\times10^{-14}\ [\mathrm{s}]$$

$$\tau_{Li} = \frac{9.11\times10^{-31}}{(4.6\times10^{28})(1.60\times10^{-19})^2(9.28\times10^{-8})} = 8.3\times10^{-15}\ [\mathrm{s}]$$

//

4. 金(面心立方格子，格子定数 0.408nm)は 1 価の金属であると考えられ、伝導電子は自由電子とみなすことができるものとする。以下の値を求めよ。

(i)フェルミエネルギー(単位は[eV]で)、(ii)フェルミ速度(iii)モル当たりの電子比熱係数 γ

$\frac{1}{2}mv^2$ を用いれば覚えるのはどっちか

☆重要公式.

$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}$ フェルミ波数、$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ フェルミエネルギー、$v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$ フェルミ速度、$\gamma = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{N_A k_B^2}{E_F}\right)$ 電子比熱係数.

FCC格子の原子数、角8個 $\times \frac{1}{8}$ + 面に6個 $\times \frac{1}{2}$ $= 4$ (個)

$a = 0.408$ [nm] $= 4.08 \times 10^{-10}$ [m].(格子定数)

$V = (4.08 \times 10^{-10})^3 = 6.79 \times 10^{-29}$ [m^{-3}].

n(電子数密度) $= \frac{N}{V}$(価電子数) $= \frac{4 \times 1}{6.79 \times 10^{-29}} = 5.89 \times 10^{28}$ [m^{-3}]

(i) $k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}$

$= (3 \cdot \pi^2 \cdot 5.89 \times 10^{28})^{\frac{1}{3}} = 1.20 \times 10^{10}$ [m^{-1}].

$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{(1.055 \times 10^{-34})^2}{2 \cdot 9.11 \times 10^{-31}} (1.20 \times 10^{10})^2$

$= 8.90 \times 10^{-19}$ [J].

$1\,\mathrm{J} = 1.602 \times 10^{-19}$ eV なので.

$8.9 \times 10^{-19} \div 1.602 \times 10^{-19} = 5.51$ [eV]

(ii) フェルミ速度: $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$

$$\frac{1.050\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}}\times 1.20\times10^{10} = 1.40\times10^{6}\ [\mathrm{m/s}].$$

(iii) 電子比熱係数 $= \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{N_A \cdot k_B^2}{E_F} z\right)$ (z = 自由電子の数/原子の数)

k_B(ボルツマン定数) $= 1.38\times10^{-23}$ [J/K].

$$\frac{\pi^2}{2}\cdot\left(\frac{6.02\times10^{23}\times(1.38\times10^{-23})^2}{8.9\times10^{-19}}\right) = 0.629\ [\mathrm{mJ/mol\,K^2}].$$