電子物性 2 レポート解答例

2025 年 12 月 19 日

1. 電子が電場中で運動しているとする。電子は平均自由時間（緩和時間） τ で運動量を失い，散乱と散乱の間は力学方程式に従って加速されると仮定する。

(a)時刻 tに運動量 $p(t)$を持つ電子が，時刻 $t+dt$に運動量

$$p(t+dt) = \begin{cases} 0 & (\text{確率 } dt/\tau) \\ p(t) + F\,dt & (\text{確率 } 1 - dt/\tau) \end{cases}$$

となることから，運動量の平均 $\langle p(t)\rangle$が満たす微分方程式を示せ。

(a)時刻 t に運動 $\boldsymbol{p}$ を持つ電子について、時刻 $t+dt$ にどの運動量を持つかを考える。時間 dt の間に、確率 dt/τ で電子は散乱して運動量 0 に落ちる。散乱しない場合（確率 $1-dt/\tau$）には、通常の運動方程式 $d\boldsymbol{p}/dt = F$ に従って加速する。

したがって

$$\langle \boldsymbol{p}(t+dt)\rangle = (1-\frac{dt}{\tau})(\boldsymbol{p}(t) + Fdt)$$

ゆえに

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{\boldsymbol{p}}{\tau} \qquad (3.1)$$

ここで電子に作用する力 F はローレンツ力$\boldsymbol{F} = -e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$である。

(b) 磁場がないときローレンツ力は

$$F = -eE$$

である。（a）で求めた方程式を用いて，定常状態における平均運動量 pを求めよ。

磁場がない場合

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{p}}{\tau}$$

定常状態では $d\boldsymbol{p}/dt = 0$ なので

$$m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} = -e\tau\boldsymbol{E}$$

mは電子の質量、$\boldsymbol{v}$はその速度である。

(c) 電子の質量を m，電子密度を nとする。平均速度 $v = p/m$を用いて電流密度

$$j = -env$$

を求め，電気伝導率の Drude の式

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

を導け。

金属中に電子密度がnあるとすると、全ての電子が速度$\boldsymbol{v}$で動くので電流は

$$\boldsymbol{j} = -en\boldsymbol{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\boldsymbol{E}$$

したがって金属の伝導率は

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

2. 金属中の電子が電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$と磁場$\mathbf{B} = (0,0,B)$の中で運動する場合，Drude 理論の定常状態では

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{m}{\tau}\mathbf{v} \qquad (1)$$

が成り立つ。電流密度は $\mathbf{j} = -ne\,\mathbf{v}$とする。

この関係式から，電場と電流の関係式

$$\boldsymbol{E} = \rho_e \boldsymbol{j} \qquad (2)$$

によって定義される　3×3 の行列である抵抗率テンソル ρ_eを求め，さらにその逆行列として伝導率テンソル σ_eを求める。

(i) まず運動方程式（1）を 電場ベクトル$\boldsymbol{E}$の x, y, z 成分で具体的に書きなさい。

磁場が $(0,0,B)$なので

$$\mathbf{v}\times\mathbf{B}=(v_yB,\ -v_xB,0)$$

これを用いて、

$$0=-eE_x-ev_yB-\frac{m}{\tau}v_x\rightarrow E_x=-\frac{m}{e\tau}v_x-Bv_y$$

$$0=-eE_y+ev_xB-\frac{m}{\tau}v_y\rightarrow E_y=Bv_x-\frac{m}{e\tau}v_y$$

$$0=-eE_z-\frac{m}{\tau}v_z\rightarrow E_z=-\frac{m}{e\tau}v_z$$

(ii) 電場ベクトル$\boldsymbol{E}$と電場と電流の関係式(2)をつかって抵抗率テンソル $\boldsymbol{\rho}_e$を求めなさい。ただし，$\omega_c=\frac{eB}{m}$としてまとめること。

$$\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{m}{e\tau}&-B&0\\B&-\frac{m}{e\tau}&0\\0&0&-\frac{m}{e\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=-\frac{m}{e\tau}\begin{pmatrix}1&\omega_c\tau&0\\-\omega_c\tau&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$$

であるから，$\mathbf{j}=-ne\,\mathbf{v}$の関係式を利用すると，

$$\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}=-\frac{m}{e\tau}\times\left(-\frac{1}{ne}\right)\begin{pmatrix}1&\omega_c\tau&0\\-\omega_c\tau&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}=\frac{m}{ne^2\tau}\begin{pmatrix}1&\omega_c\tau&0\\-\omega_c\tau&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}$$

と書けるので，抵抗率テンソル $\boldsymbol{\rho}_e$は

$$\boldsymbol{\rho}_e=\frac{m}{ne^2\tau}\begin{pmatrix}1&\omega_c\tau&0\\-\omega_c\tau&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_{xx}&\rho_{xy}&\rho_{xz}\\\rho_{yx}&\rho_{yy}&\rho_{yz}\\\rho_{zx}&\rho_{zy}&\rho_{zz}\end{pmatrix}$$

(iii) 伝導率テンソル$\boldsymbol{\sigma}_e=\boldsymbol{\rho}_e^{-1}$を求めなさい。

逆行列を求めると，

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} & -\frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & 0 \\ \frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

(iv)ナトリウムの棒状試料（断面 5 mm × 5 mm）に電流 1A を流し，長手方向と垂直な方向に 1 T の磁場がかかったときのホール電圧の大きさを求めなさい。

ナトリウムの原子密度は約 1 g/cm^3、原子量は約 23 とする。ナトリウムは価数 1 で、1 原子あたり自由電子数は 1 と仮定してよい。

ホール係数は

$$R_H = \rho_{yx}/B = -\frac{1}{ne}$$

ナトリウムの密度が 1 g/cm^3、原子量が 23 のとき、原子密度は

$$n = N_A\frac{1}{23} = 2.6 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$$

価電子が 1 個なので電子密度も同じである。

棒の断面は L×L（L = 5 mm）なので電流密度は

$$j = \frac{I}{L^2}$$

ホール抵抗率は ρ_{yx} = B/(ne)だから、ホール電圧は

$$V = j\rho_{xy}L = \frac{IB}{Lne} = 4.8 \times 10^{-8}\ \mathrm{V}$$

3. 次の表は、金属 **銀（Ag）** と **リチウム（Li）** の電気抵抗率 ρ，密度 n（g/cm^3）,原子量 w を示している：

金属	ρ（Ω·m）	密度 n (g/cm^3)	原子量 w
Ag	1.59×10^{-8}	10.5	107.8

金属	ρ（Ω·m）	密度 n (g/cm³)	原子量 w
Li	9.28×10^{-8}	0.53	6.94

Ag と Li の両方は 1 価（金属 1 原子あたり自由電子 1 個）であるとして、Drude 模型による電子の散乱時間 τ を計算せよ。

Drude 模型の式

$$\sigma = \rho^{-1} = \frac{Ne^2\tau}{m}$$

から τ を求める。

ここでm：電子質量, N：電子密度（＝原子密度、1 価なので電子 1 個/原子）

電子密度 N は

$N = n \times \frac{\text{アボガドロ数}}{\text{モル質量 (g/mol)}} \times 10^6$（密度 n は g/cm³ なので m³ への変換で 10^6 を掛ける）

τ を解くと

$$\tau = \frac{m}{Ne^2}\frac{1}{\rho}$$

これに値を代入すると：

$$\tau_{\mathrm{Ag}} = 3.8\times10^{-14}\ \mathrm{sec}$$
$$\tau_{\mathrm{Li}} = 8.3\times10^{-15}\ \mathrm{sec}$$

4. 金(面心立方格子，格子定数 0.408nm)は 1 価の金属であると考えられ、伝導電子は自由電子とみなすことができるものとする。以下の値を求めよ。

(i)フェルミエネルギー(単位は[eV]で)、(ii)フェルミ速度(iii)モル当たりの電子比熱係数γ

(i) $E_F = \frac{\hbar^2 {k_F}^2}{2m}$、$k_F = \left[3\pi^2\frac{N}{V}\right]^{\frac{1}{3}} = [3\pi^2 n]^{\frac{1}{3}}$

金は面心立方格子をとるので、単位格子中に 4 個の原子が含まれる。１価の金属は 1 原子あたり 1 個の伝導電子をもっているので、電子密度$n = 4/(0.408 \times 10^{-9})^3 = 5.89 \times 10^{28}[m^{-1}]$より$k_F = [3\pi^2 n]^{\frac{1}{3}} = 1.20 \times 10^{10}[m^{-1}]$、$E_F = \frac{\hbar^2 {k_F}^2}{2m} = \frac{(1.05\times10^{-34})^2 \times (1.20\times10^{10})^2}{2\times9\times10^{-31}} = 8.90 \times 10^{-19}[J] = 5.51[eV]$

(ii)$|\ v_F| = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k_F}{m} = \frac{1.05\times10^{-34}\times1.20\times10^{10}}{2\times9\times10^{-31}} = 1.40 \times 10^6[m/s]$

(iii)$\gamma = \frac{\pi^2}{3} N(E_F) {k_B}^2$、状態密度$N(E_F)$は自由電子近似の範囲で、$N(E_F) = \left(\frac{V}{2\pi^2}\right)\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_F} = \frac{3N}{2E_F} = 1.02041 \times 10^{42}$、よって$\gamma = \frac{\pi^2}{3} N(E_F) {k_B}^2 = 0.639[\mathrm{mJ \cdot mol^{-1} K^{-2}}]$

5. クローニッヒ・ペニー模型において、伝導電子の取りうるエネルギーEと波数kの関係は、

$$P\frac{\sin\alpha a}{\alpha a} + \cos\alpha a = \cos ka \cdots (3.21)$$

であった。(講義 6 回目で与えられた式の番号に等しい)

ここで$P = \frac{mV_0 ba}{\hbar^2}$であるが、$P \ll 1$の条件が与えられたとき、$k = 0$に対してエネルギーの最も低いエネルギーバンド（許容帯）のエネルギーを求めなさい。

$k = 0$のとき、(3.21)式は

$$P\frac{\sin\alpha a}{\alpha a}+\cos\alpha a=1$$

となるから、$P \ll 1$の条件のもとで解を持つには$\alpha a \ll 1$を満たさなければならない。

この時、

$$\sin\alpha a \approx \alpha a$$

$$\cos\alpha a \approx 1-\frac{1}{2}(\alpha a)^2$$

だから、上の式に代入すると、$P \cong \frac{1}{2}(\alpha a)^2$

ここで、$\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$より、

$$E=\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} \cong \frac{\hbar^2}{2m}\times\frac{2P}{a^2}=\frac{\hbar^2 P}{ma^2}$$

6. 銅（Cu）の室温（300K）での抵抗率が$1.7\times10^{-8}\Omega\cdot\mathrm{m}$であるとする。Cu の室温（300K）の熱伝導率を推定しなさい。

電気伝導度$\sigma=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{1.7\times10^{-8}}=5.9\times10^{7}\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$を用いて、ヴィーデマンフランツ側を用いると。

$$\kappa=\sigma\times L\times T=5.9\times10^{7}\times2.45\times10^{-8}\times300=434\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$$

実測値は$403 \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$であり近い値をとる。