Intelligent Control Laboratory

淡江大學電機工程學系
Department of Electrical and Computer Engineering

手臂運動學

空間描述與座標轉換

報 告 人：簡宇德
指導老師：翁慶昌 教授

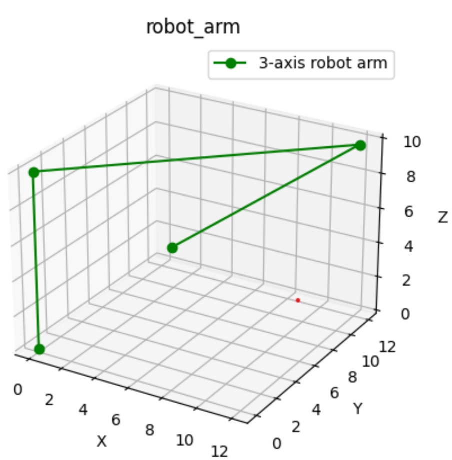
日　　期：2022/11/29

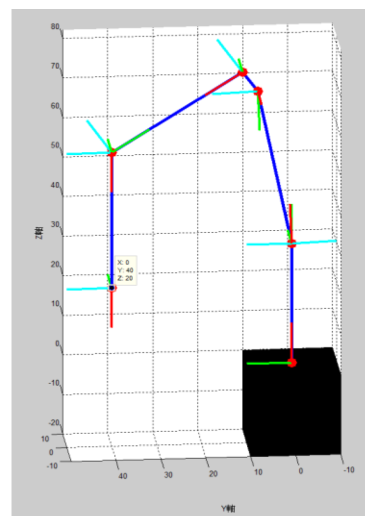
大綱

- 學習目的與用途
- 位置與姿態描述
- 座標轉換
- 齊次座標轉換
- 齊次旋轉矩陣
- 齊次轉換矩陣
- 機械手臂運動學
- 串聯式三軸機械手臂運動學
- Python語法教學
- 關鍵字中英文對照表

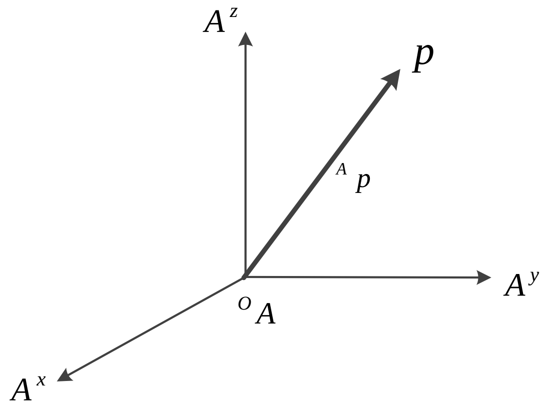
學習目的與用途

- 空間描述 (Space description)
  - 理解機械手臂在空間中**位置向量與姿態**
- 座標轉換 (Coordinate transformation)
  - 藉由**定義及解析手臂各關節的座標**推導手臂運動學
- Python語法教學
  - 如下圖，為課程所要達到的目的**模擬機械手臂運動**





- 位置描述 (Position description)
  - 空間中任一點P的位置可用如下的列向量 (column) 表示



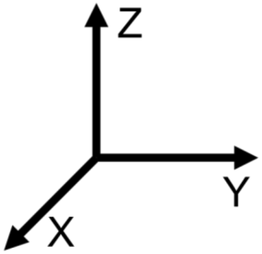
$$
{}^A P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}
$$

- ${}^A P$：座標系{A}中，點P的位置向量
- P_x：座標系{A}中，X的分量
- P_y：座標系{A}中，Y的分量
- P_z：座標系{A}中，Z的分量

位置與姿態描述 (2/3)

姿態描述(旋轉矩陣)—Posture description(Rotation matrix)

- 大地座標：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



- 表示法：$\begin{bmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma \end{bmatrix}$

  - 紅色為x軸向量表示法
  - 綠色為y軸向量表示法
  - 藍色為z軸向量表示法

位置與姿態描述 (3/3)

位置姿態描述

- 位置表示：^{A}P

$$^{A}P=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

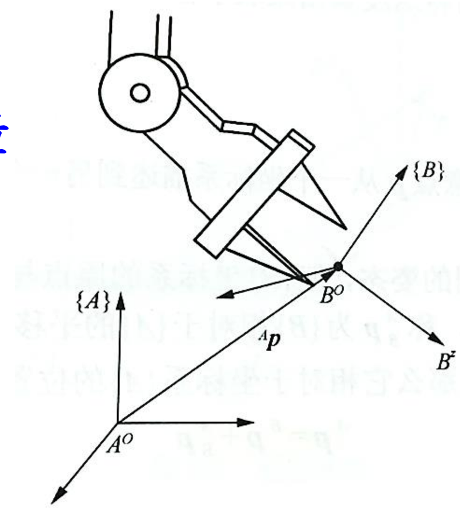
- 姿態表示：$^{A}_{B}R$

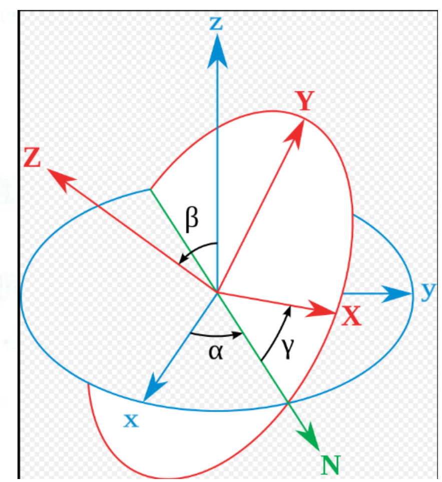
$$^{A}_{B}R=[\,^{A}_{B}x \quad ^{A}_{B}y \quad ^{A}_{B}z\,]=\begin{bmatrix} \cos\alpha_x & \cos\alpha_y & \cos\alpha_z \\ \cos\beta_x & \cos\beta_y & \cos\beta_z \\ \cos\gamma_x & \cos\gamma_y & \cos\gamma_z \end{bmatrix}$$

- 位置與姿態表示：$^{A}_{B}T$

方位矩陣　　位置向量

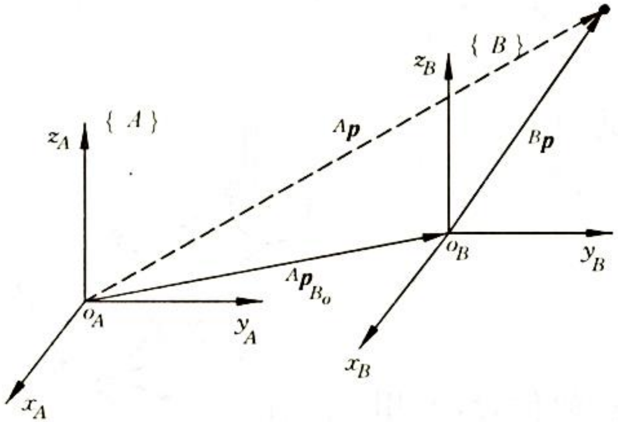
$$^{A}_{B}T=\begin{bmatrix} \cos\alpha_x & \cos\alpha_y & \cos\alpha_z & p_x \\ \cos\beta_x & \cos\beta_y & \cos\beta_z & p_y \\ \cos\gamma_x & \cos\gamma_y & \cos\gamma_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



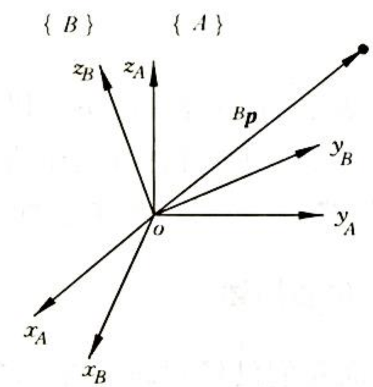


座標轉換 (1/2)

- 座標轉換 (coordinate transformmation)
  - 空間中任意點P從一個座標系移動到另一個座標系之間的映射關係分為 **座標平移 (translation)**與**座標旋轉 (rotation)**
- 座標平移
  - 姿態相同，但座標系{A}與座標系{B}原點不重合
  - 公式：${}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{B_o}$

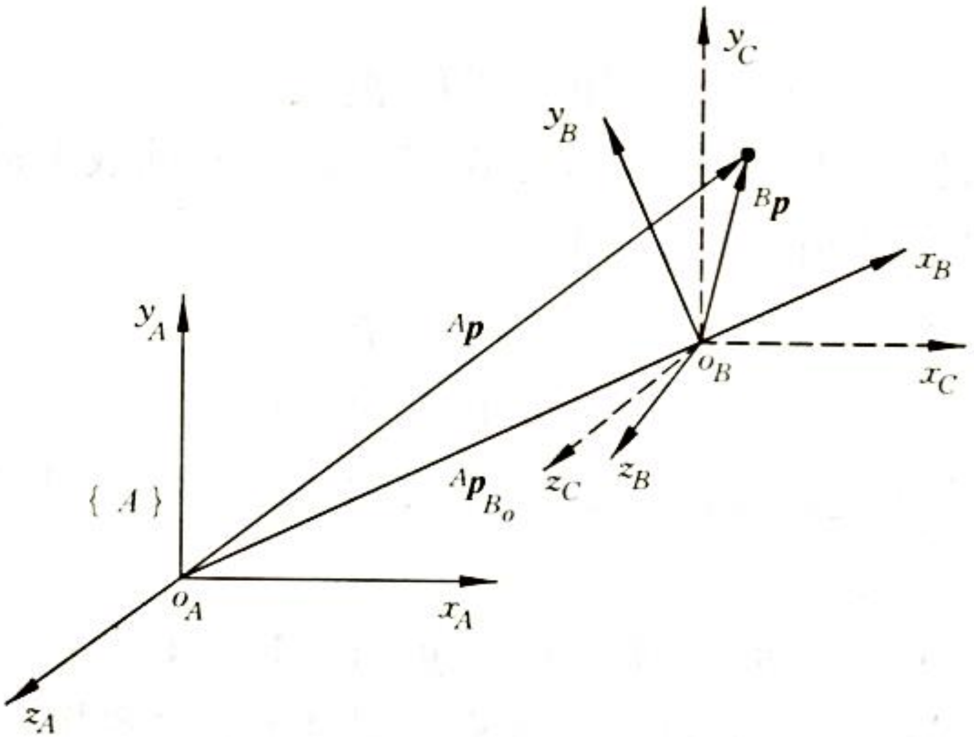


- 座標旋轉
  - 位置及座標原點相同，但姿態不同
  - 公式：${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P$



座標轉換 (2/2)

- 座標的複合轉換
  - 座標系{A}與座標系{B}原點不重合，姿態也不同
  - 公式：${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P + {}^{A}P_{B_o}$



齊次座標轉換 (1/3)

- 齊次座標轉換 (Homogeneous Coord. Trans.) $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $P' = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix}$
  - 方便將空間的座標系**平移、縮放、旋轉**
  - 機械手臂等連桿配置，可透過齊次座標轉換矩陣得出
  - 使用四個元素(x, y, z, w)來表示
    - w代表座標軸的遠近參數，通常設為1
    - w用來表示遠近感時，會設定為距離的倒數（1/距離）
      - 例如：表示一個無限遠的距離時，我們會將w 設定為0

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P + {}^{A}P_{B_o} \Rightarrow \begin{bmatrix} ^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^{A}_{B}R & ^{A}P_{B_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{A}P = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}P$$

$$\boxed{{}^{0}_{n}T = A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

齊次座標轉換 (2/3)

- 齊次座標平移
  - 由向量 $ai+bj+ck$ 來描述空間點，i, j, k 代表x, y, z之單位向量
  - $Trans$ 代表平移轉換

$$Trans(a,b,c)=\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

  - 向量$xi+yj+zk$經向量$ai+bj+ck$平移轉換後所得到的向量可表示如下

$$v=\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+aw\\y+bw\\z+cw\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x/w+a\\y/w+b\\z/w+c\\1\end{bmatrix}$$

- 範例(座標平移轉換)
  - 求向量$5i+3j+9k$被向量$4i-3j+8k$平移轉換後得到的向量
- 解：

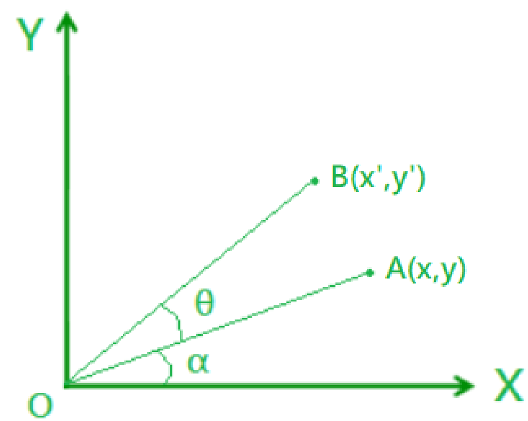
$$\because v=\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+aw\\y+bw\\z+cw\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x/w+a\\y/w+b\\z/w+c\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore v=\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&8\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\\9\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\0\\17\\1\end{bmatrix}$$

齊次旋轉矩陣 (1/3)

- 平面中旋轉
  - 假設在平面上有一點 A(x, y)，則以原點為中心，逆時針方向旋轉 θ 後，其座標 B(x', y') 與 原座標點 A(x, y) 的關係
    - $x' = r\cos(\alpha+\theta)$
    - $y' = r\sin(\alpha+\theta)$
  - 展開上述關係式可得
    - $x' = r\,(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$
    - $y' = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = y\cos\theta + x\sin\theta$
  - 結合上式可得
    - $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\cos\theta} & \boldsymbol{-\sin\theta} \\ \boldsymbol{\sin\theta} & \boldsymbol{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$



齊次旋轉矩陣 (2/3)

- 空間中旋轉

$$s \equiv \sin$$
$$c \equiv \cos$$

$$R_x = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0} & 0 \\ 0 \quad c\theta \quad -s\theta & 0 \\ 0 \quad s\theta \quad c\theta & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

對x軸旋轉$\boldsymbol{\theta}$

$$R_y = \begin{bmatrix} c\theta \quad 0 \quad s\theta & 0 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0} & 0 \\ -s\theta \quad 0 \quad c\theta & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

對y軸旋轉$\boldsymbol{\theta}$

$$R_z = \begin{bmatrix} c\theta \quad -s\theta \quad 0 & 0 \\ s\theta \quad c\theta \quad 0 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

對z軸旋轉$\boldsymbol{\theta}$

齊次旋轉矩陣 (3/3)

- 範例：求向量 $7i+3j+2k$ 繞z軸旋轉90度後的向量w

$$\because \theta = 90^\circ \; ; \sin\theta = 1 \; ; \cos\theta = 0$$

$$\therefore Rot(z,90) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \therefore v = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 將D-H參數表代入齊次轉換矩陣，得出末端點位置及姿態矩陣

$s \equiv \sin$

$c \equiv \cos$

D-H Table

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方位矩陣 位置向量

$$T_n^0 = A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{bmatrix} \boxed{R_n^0} & \boxed{o_n^0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

齊次轉換矩陣 (2/6)

- Rot_{x,a_i}
  - 第〈i-1〉個座標系沿著X_i軸旋轉角度α_i，使得兩個座標系統重合在一起。其轉換矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

齊次轉換矩陣 (3/6)

- $Trans_{x,a_i}$
  - 第〈i-1〉個座標系沿著X_i軸位移距離a_i，使得O_{i-1}軸與O_i軸重合在一起。其轉換矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

齊次轉換矩陣 (4/6)

- $Trans_{z,d_i}$
  - 第〈i-1〉個座標系沿著Z_{i-1}軸位移距離d_i ，使得X_{i-1}軸與X_i軸同在一直線上。其轉換矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

齊次轉換矩陣 (5/6)

- Rot_{z,θ_i}
  - 第〈i-1〉個座標系沿著Z_{i-1}軸旋轉角度θ_i，使得X_{i-1}軸與X_i軸平行在同一平面上。其轉換矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

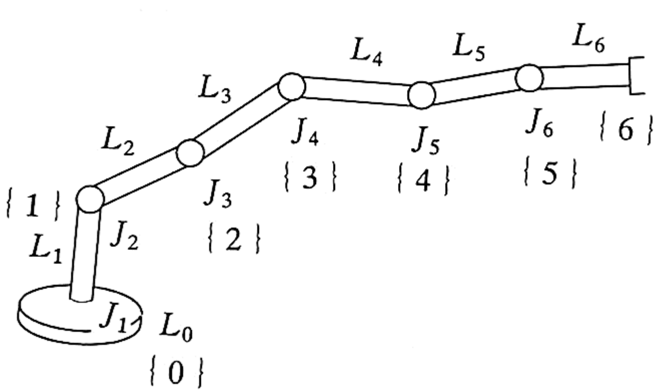
齊次轉換矩陣 (6/6)

D-H連桿座標系轉換

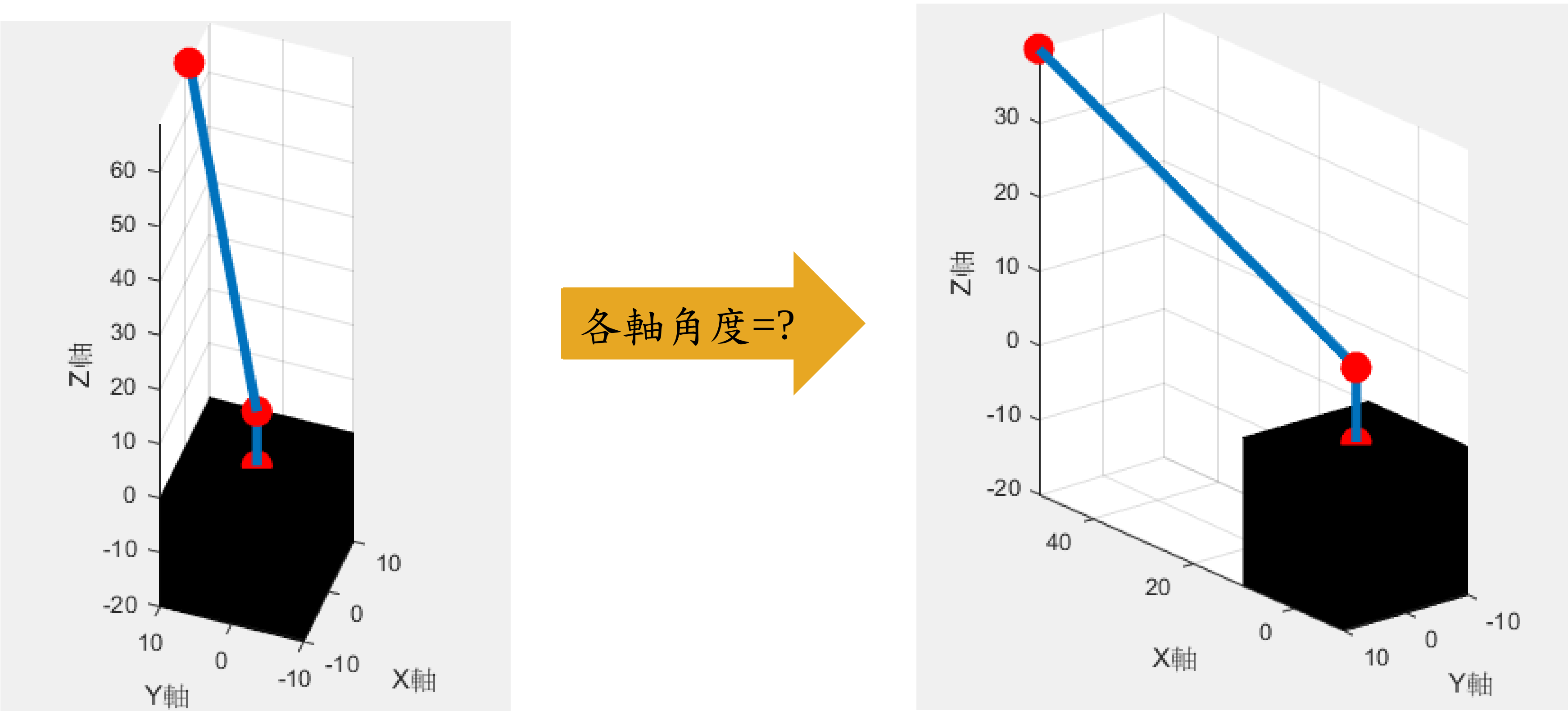
- ${}^0_1T(A_1)$：第2軸(第{1}系)相對於第1軸(第{0}系)的位置姿態
- ${}^1_2T(A_2)$：第3軸(第{2}系)相對於第2軸(第{1}系)的位置姿態
- ${}^2_3T(A_3)$：第4軸(第{3}系)相對於第3軸(第{2}系)的位置姿態
- ${}^3_4T(A_4)$：第5軸(第{4}系)相對於第4軸(第{3}系)的位置姿態
- ${}^4_5T(A_5)$：第6軸(第{5}系)相對於第5軸(第{4}系)的位置姿態
- ${}^5_6T(A_6)$：手臂夾爪(第{6}系)相對於第6軸(第{5}系)的位置姿態

機械手臂末端點夾爪位姿

$$T_6 = {}^0_6T = {}^0_1T\ {}^1_2T\ {}^2_3T\ {}^3_4T\ {}^4_5T\ {}^5_6T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



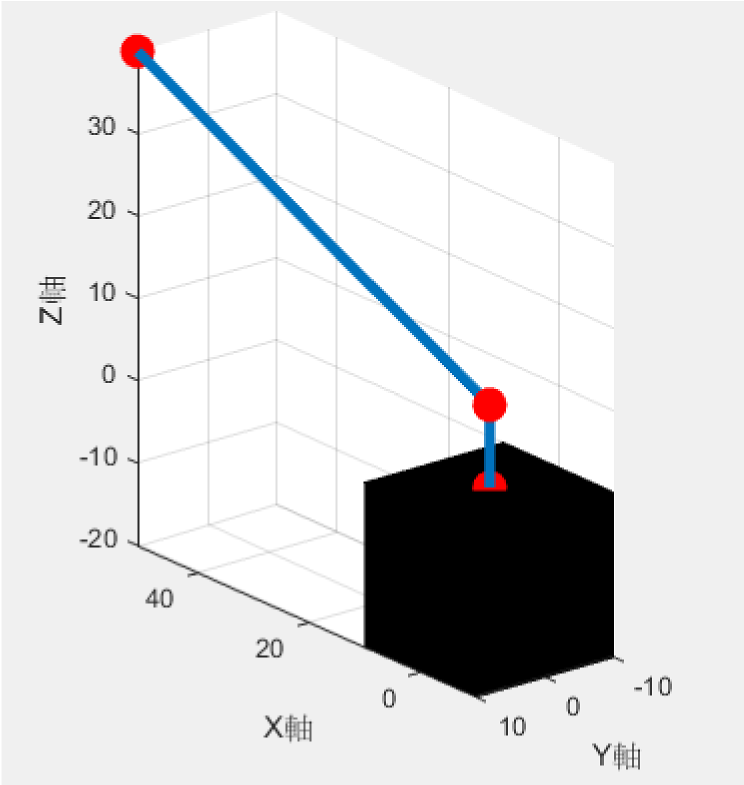
- 機器手臂運動學的用途



Z軸
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
Y軸
10
0
-10
X軸
10
0
-10
各軸角度=?
Z軸
30
20
10
0
-10
-20
X軸
40
20
0
Y軸
10
0
-10

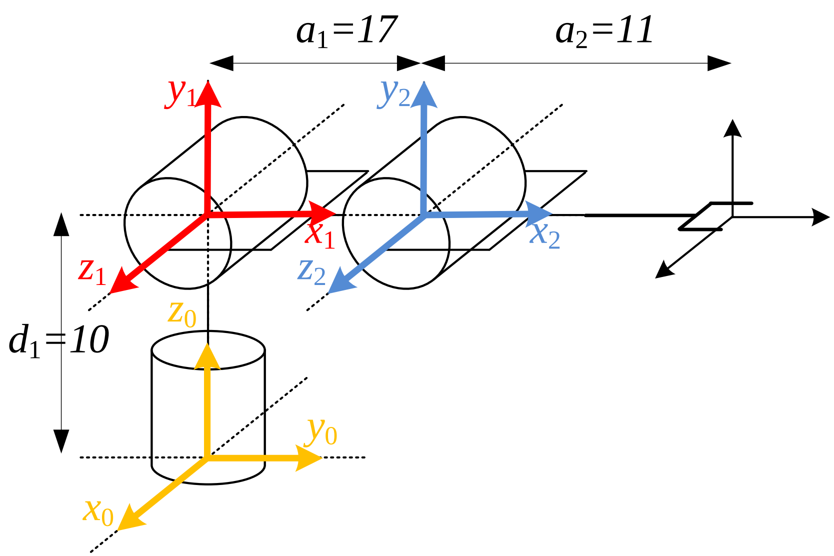
機械手臂運動學 (2/2)

- 正運動學 (Forward Kinematics)
  - $x = f(\theta)$
  - 輸入：各關節角度(θ)
  - 輸出：各關節位置(x)
- 逆運動學 (Inverse Kinematics)
  - $\theta = f^{-1}(x)$
  - 輸入：末端點位置(x)
  - 輸出：各關節角度(θ)
  - 可能包含多個解或無解



串聯式三軸機械手臂-正運動學 (Forward Kinematics)

- 透過D-H連桿座標系計算終端效應器之位置及姿態



$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,a_i}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Link	a_i (mm)	α_i (deg)	d_i (mm)	θ_i (deg)
1	0	90	10	90
2	17	0	0	0
3	11	0	0	0

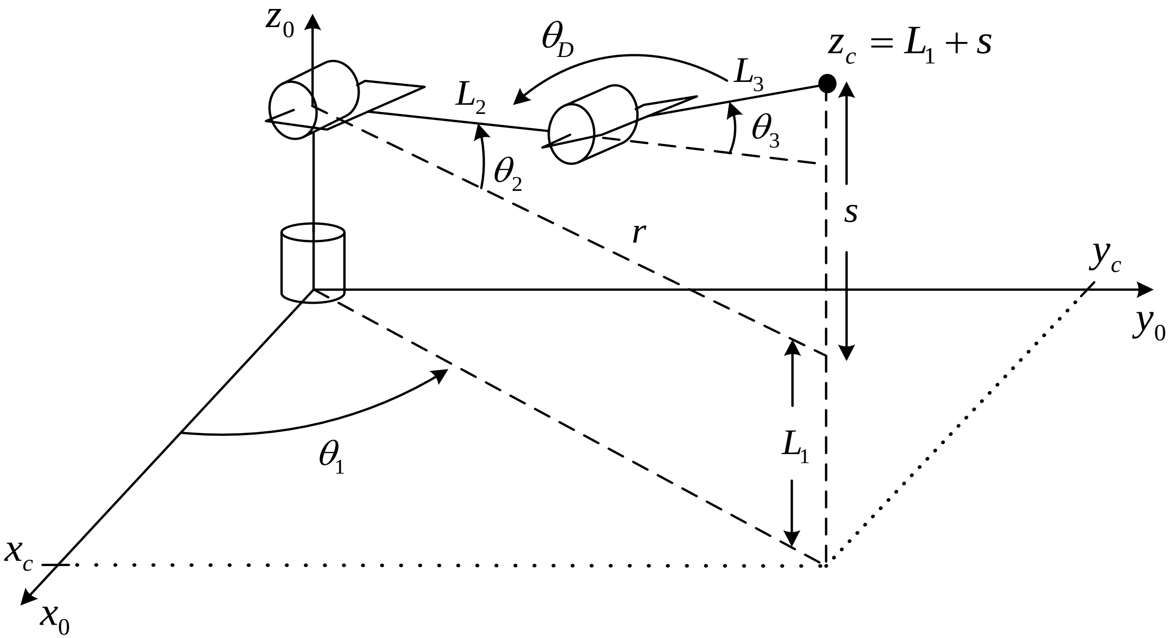
a_i =沿著X_i軸位移距離

α_i =沿著X_i軸旋轉角度

d_i =沿著Z_{i-1}軸位移距離

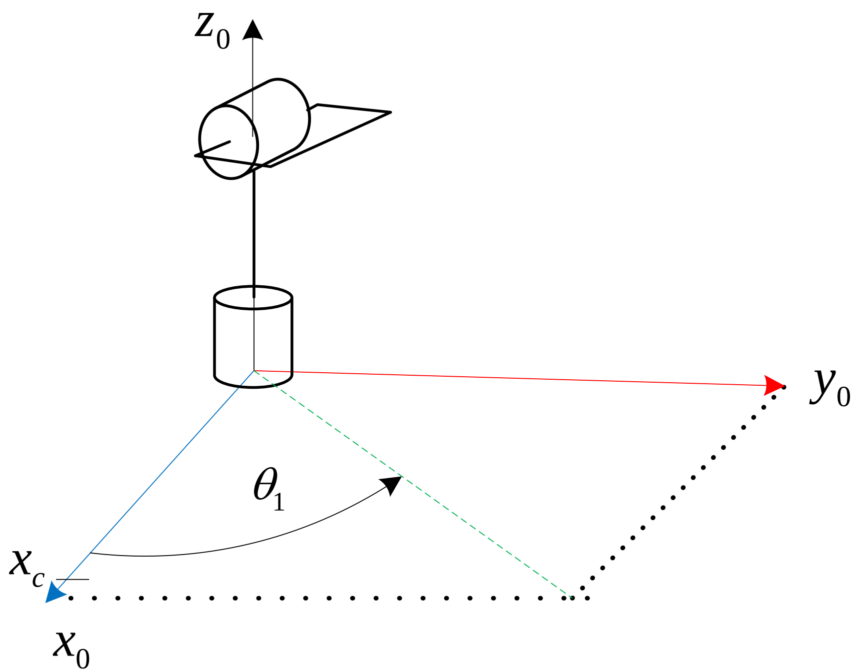
θ_i =沿著Z_{i-1}軸旋轉角度

- 串聯式三軸機械手臂-逆運動學(Inverse Kinematics)
  - 使用三角函數解析第1、2、3軸

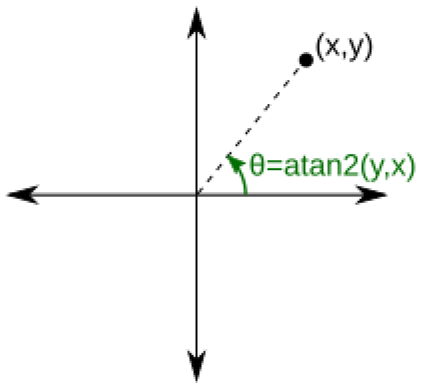


分解後逆運動學之連桿與角度關係圖

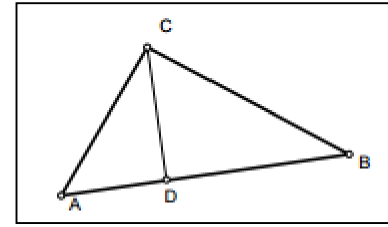
- 串聯式三軸機械手臂-逆運動學
  - 解析第1軸之角度



$$\theta_1 = atan2\left(y_c, x_c\right)$$



串聯式三軸機械手臂運動學(4/5)



☐ 串聯式三軸機械手臂-逆運動學

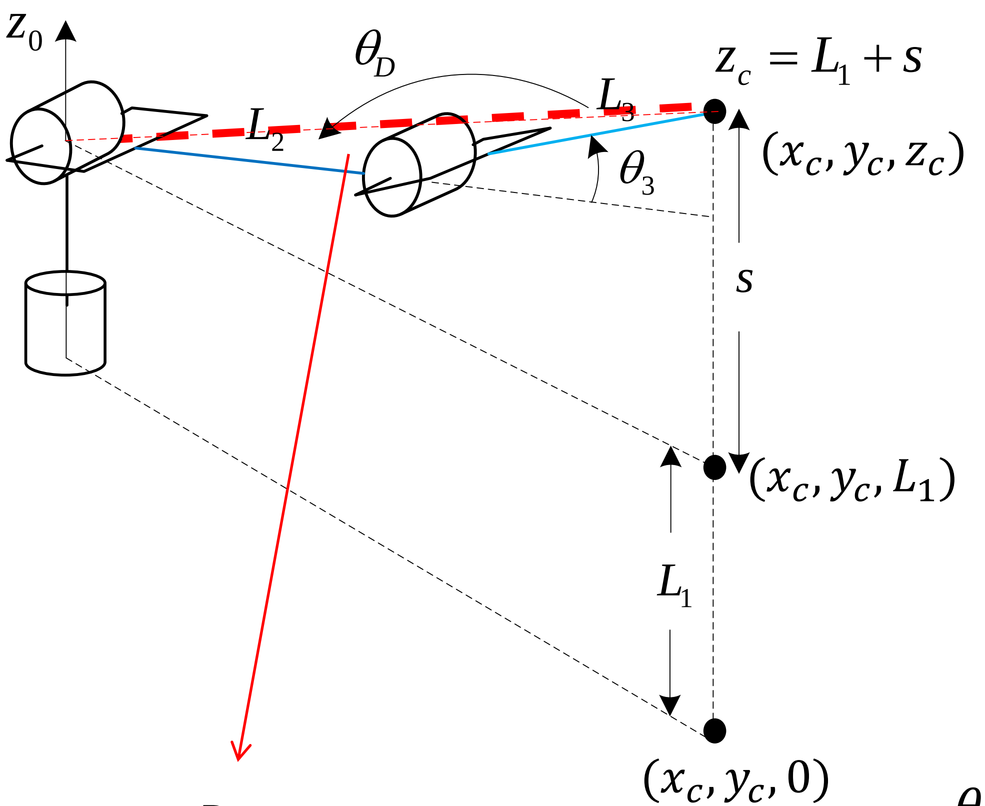
■ 解析第3軸之角度

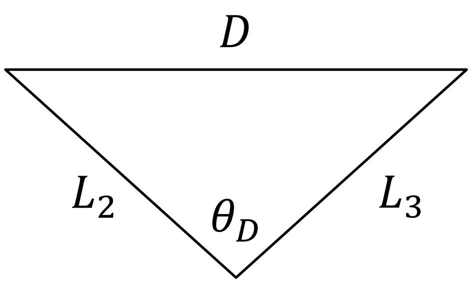
餘弦定理：在ΔABC中，若a,b,c為∠A，∠B，∠C之對邊長，則

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$





$$D = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + (z_c - L_1)^2}$$

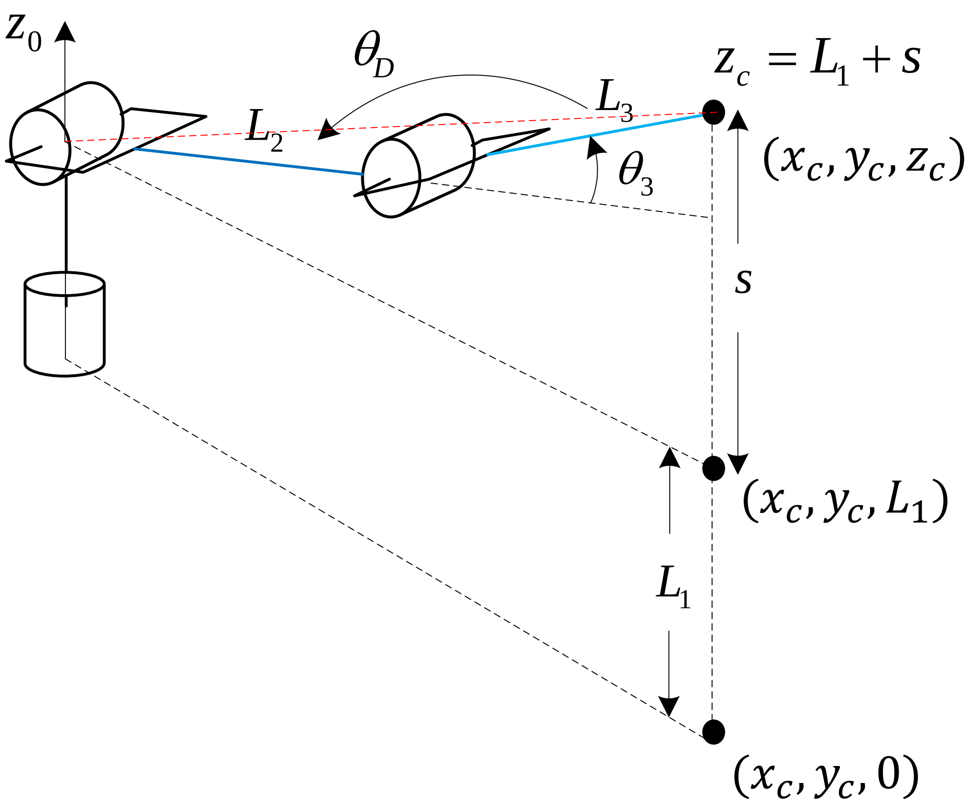
$$cos\theta_D = \frac{L_2^2 + L_3^2 - D^2}{2L_2L_3}$$

$$\theta_D = 180 - \theta_3$$

$$\theta_3 = atan2\left(\pm\sqrt{1-\cos{\theta_D}^2}, \cos\theta_D\right)$$

串聯式三軸機械手臂運動學(5/5)

- 串聯式三軸機械手臂-逆運動學
  - 解析第2軸之角度



$$\theta_2 = atan2\left(z_c - L_1, \sqrt{x_c{}^2 + y_c{}^2}\right)$$

$$-atan2\left(L_3 \sin\theta_3, L_2 + L_3 \cos\theta_3\right)$$

Python語法教學(1/4)-模組

- 模組的匯入
  - 語法:
  - **import** numpy **as** np
  - **from** math **import** cos ,sin, acos ,pi, radians, degrees
  - **from** matplotlib **import** pyplot **as** plt
  - https://docs.python.org/zh-tw/3/library/math.html

Python語法教學(2/4)-Numpy

- 二維陣列
  - 語法:
  - np.array([[X1 , Y1 , Z1],
    [X2 , Y2 , Z2],
    [X3 , Y3 , Z3]])

- 矩陣乘法
  - 語法:
  - MatrixC=np.dot(MatrixA, MatrixB)

Python語法教學(3/4)-Math

- 三角函數
  - 語法:
  - sin(弧度)
  - cos(弧度)
  - acos(弧度)
  - atan2(弧度)
- 弧度角度轉換
  - degrees(弧度)
  - radians(角度)

基本繪圖

- 語法:
- fig = plt.figure()
- ax = plt.subplot(111, projection=‘3d’)
- plt.plot(X,Y,Z,”go-”,label=‘3-axis robot arm’)
- ax.set_zlabel(‘Z’)
- Ax.set_ylabel(‘Y’)
- ax.set_xlabel(‘X’)
- plt.title(‘標題’)
- plt.show()

3軸.tx　附錄:3軸整體程式

關鍵字中英文對照表

中文	英文
空間描述	space description
座標轉換	coordinate transformation
旋轉矩陣	rotation matrix
平移	translation
旋轉	rotation
串聯式	tandem
三軸機械手臂	three-axis robot manipulator
正運動學	kinematics
逆運動學	Inverse Kinematics
終端效應器	end-effector
齊次座標	homogeneous coordinate

謝 謝 指 教