Exercise Sheet – Advanced Calculus III

Taiyang Xu*

16/10/2025, Week 6

练习 1 (本练习涉及凸区域、凸函数、中值定理和多元 Taylor 公式等内容)**.** 完成以下题目

(1) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为凸的有界闭区域, f 在 D 上有连续的一阶偏导数。试证明 f 在 D 上满足如下的 Lipschitz 条件: 存在常数 $M > 0$, 使得对任意的 $x, y \in D$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

(2) 设 $F(x, y, z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, 并满足不等式:

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} \geq \alpha > 0, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

证明: 当 (x, y, z) 沿着曲线 $\Gamma = (x(t), y(t), z(t))$, $x(t) = -\cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$, $t \geqslant 0$ 趋向 ∞ 时, $F(x, y, z)$ 趋向 $+\infty$.

(3) 设 f 在凸区域 $D \in \mathbb{R}^n$ 上具有连续的一阶偏导数, 则 f 在 D 上为凸函数的充分必要条件是:

$$\forall x, y \in D, \quad f(y) - f(x) \geqslant \nabla f(x) \cdot (y - x).$$

(4) 设 $f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在凸区域 D 上具有连续的二阶偏导数, 则 f 在 D 上为凸函数的充分必要条件是 Hesse 矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ 在 D 上的任意点均为半正定矩阵.

解答 2.

练习 3 (本题训练 Lagrange 乘子法求极值问题)**.** (1) 求解以下约束问题

(a) 求函数 $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ 在约束条件 $xyz = 1$, $x, y, z > 0$ 下的条件极值.

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

(b) 求函数 $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$ 在约束条件 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, $x,y,z>0$ 下的条件极值.

(c) 求二次型 $f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ (其中 $a_{ij}=a_{ji}$) 在单位球面 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 上的极值.

(2) 求椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的最大体积的内接长方体.

(3) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$. 假设区间 $[a,b]$ 是使得 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}$ 的长度最短的区间. 证明 $f(a)=f(b)$.

(4) 求函数 $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k\log x_k$ 在约束 $x_1+\cdots+x_n=a$ (其中 $a>0$) 下的最大值.

(5) 给定正实数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$. 利用 Lagrange 乘数法证明: 对任意正实数 $x_1,\ldots,x_n$, 有

$$\prod_{k=1}^{n}x_k^{\alpha_k}\leq\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k.$$

解答 4.