Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

09/10/2025, Week 5

练习 1 (隐函数定理的应用)**.**

(1) 对任意的 $c \in \mathbb{R}^n$，我们可以定义一个次数为 n 的实系数多项式 P_c，即我们有映射

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}[X], \quad c \mapsto X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n.$$

给定 $b \in \mathbb{R}^n$，我们假设 P_b 有一个实数根 $x_b \in \mathbb{R}$ 并且这个根的重数是 1。证明，存在 b 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 U 和 x_b 在 $\mathbb{R}$ 中的开邻域 V, 使得对任意的 $c \in U$, P_c 在 V 中恰有一个根 $z(c)$ 并且重数是 1, 并且 $z(c)$ 是光滑的.

(2) 考虑实系数多项式 $P(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n$. 如果对 $(c_1^*, \ldots, c_n^*) \in \mathbb{R}^n$, $P(X)$ 恰好有 n 个两两不同的实根

$$z_1(c_1^*, \ldots, c_n^*) < z_2(c_1^*, \ldots, c_n^*) < \cdots < z_n(c_1^*, \ldots, c_n^*).$$

证明, 存在 $(c_1^*, \ldots, c_n^*) \in \mathbb{R}^n$ 的开邻域 Ω 和 Ω 上的光滑函数 $z_1, \ldots, z_n$, 使得对任意的 $(c_1, \ldots, c_n) \in \Omega$, 我们有

$$z_1(c_1, \ldots, c_n) < z_2(c_1, \ldots, c_n) < \cdots < z_n(c_1, \ldots, c_n)$$

并且

$$P(z_i(c_1, \ldots, c_n)) = 0 \quad \text{对于} i = 1, \ldots, n.$$

(3) 考虑 $n \times n$ 的实矩阵 $A = (A_{ij})_{i,j \le n}$, 假设 A 有 n 个不同的实特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. 证明, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $n \times n$ 的实矩阵 $B = (B_{ij})_{i,j \le n}$, 如果对每对指标 (i,j), $|A_{ij} - B_{ij}| < \varepsilon$, 那么 B 有 n 个不同的实特征值 $\lambda_1(B) < \lambda_2(B) < \cdots < \lambda_n(B)$. 进一步证明, 如果将每个 λ_i 看做是 B 的系数 B_{ij} 的函数, 这些函数在区域 $|B_{ij} - A_{ij}| < \varepsilon$ (其中 $i,j \le n$) 上是光滑的.

解答 2.

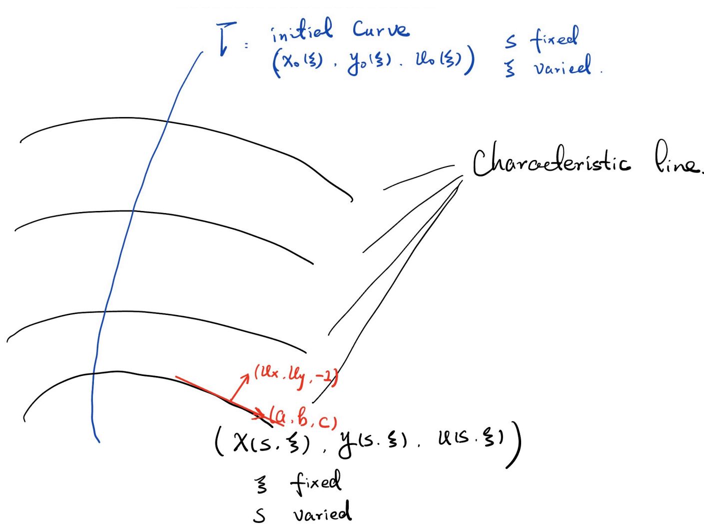
注记 3. 在大家学过复分析和复变函数, 掌握 “解析性” 的相关概念后, 可以回来看看这道练习题目的结论是否可以推广到复系数的多项式和复系数的矩阵上去.

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

练习 4 (偏导数的一个简单几何应用: 特征线法求解 (拟) 线性偏微分方程)**.**
一阶 PDE: $F(u, u_x, u_y, x, y) = 0$, $u = u(x, y)$.

- 线性 (linear) 方程
$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u,$$
其中 a, b, c 是光滑函数. 例如: $u_x + u_y = 2$.

- 拟线性 (quasi-linear) 方程, 如果它关于未知函数的最高阶偏导数是线性的, 但系数可以依赖于未知函数本身.
$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u).$$
例如著名的 Hopf 方程: $u_t + 6uu_x = 0$, 这里 $u = u(x,t)$.



特征线法示意图

特征线法求解拟线性方程的一般思想:
$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c.$$
初始条件: $x(s=0,\xi) = x_0(\xi)$, $y(s=0,\xi) = y_0(\xi)$, $u(s=0,\xi) = u_0(\xi)$.

(1) 考虑 $u_x + u_y = 2$, 并给出初始条件 $u_0(x) := u(x, y=0) = x^2$. 使用特征线法求解该初值问题.

(2) 考虑 Hopf 方程 $u_t + 6uu_x = 0$, 并给出初始条件 $u_0(x) := u(x, t=0)$. 使用特征线法求解该初值问题. 请问 Hopf 方程的解是否光滑? 并说明其原因 (提示: 你可以考虑 $u_x(x,t)$).

解答 5.