

# 感应电动机的数学模型

感应电动机(又称为异步电动机)的数学模型是一个高阶、非线性、强耦合的多变量系统。在研究异步电动机的多变量数学模型时，常作如下的假设：

- 1. 忽略空间谐波;
- 2. 忽略磁路饱和，各绕组的自感和互感都是恒定的;
- 3. 忽略铁芯损耗;
- 4. 不考虑频率和温度变化对绕组电阻的影响。

无论电机转子是绕线式还式鼠笼式的，都将它等效成绕线转子，并折算到定子侧(定子部分)，折算后的每相匝数都相等，这样，实际电机绕组就被等效为图2.1所示的三相感应电机的物理模型。图中，定子三相绕组轴线 A, B, C在空间是固定的，以A轴为参考坐标轴，转子绕组轴线a, b, c随转子旋转，转子a轴和定子A轴间的电角度 $\theta$ 为空间角位移变量。并规定各绕组电压、电流、磁链的正方向符合电动机惯例和右手螺旋定则。这样，异步电动机的数学模型由电压方程、磁链方程、转矩方程和运动方程组成。

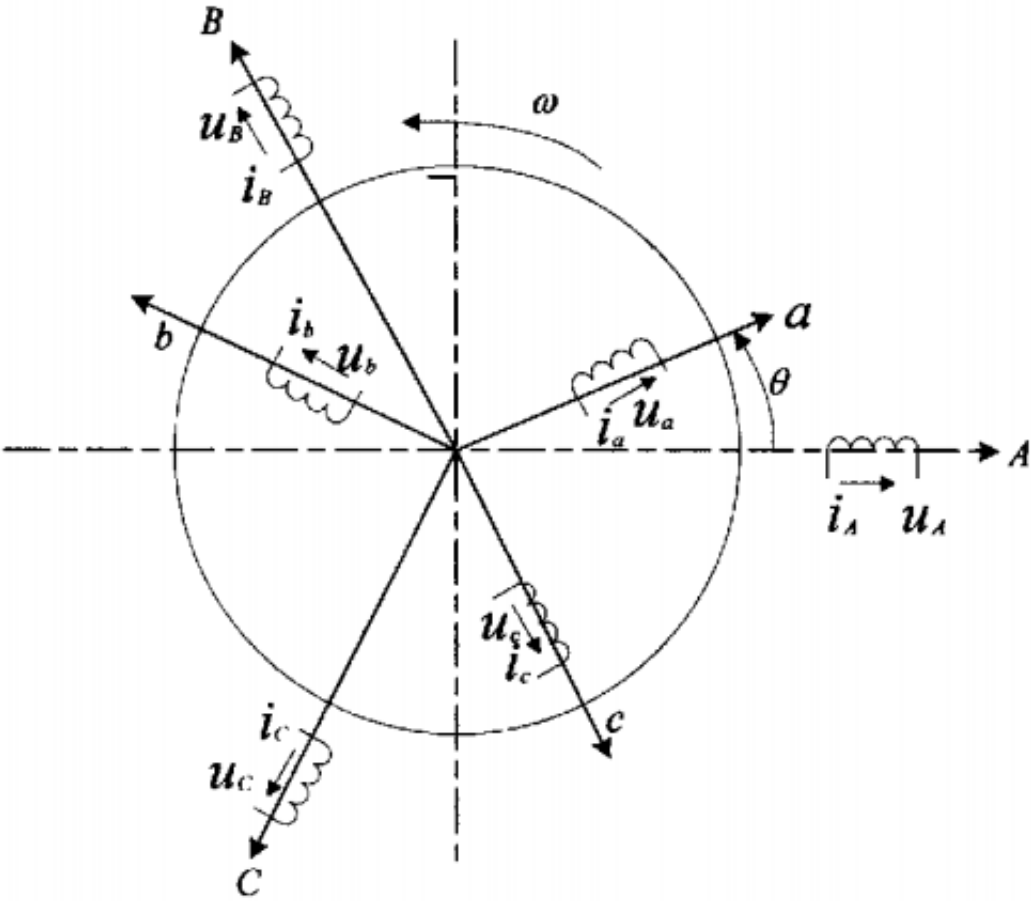


图 2.1 三相感应电机的物理模型

## 1 感应电机的数学模型

### 1.电压方程

三相定子绕组的电压平衡方程为:

$$\left. \begin{aligned} u_A &= R_1 i_A + p \psi_A \\ u_B &= R_1 i_B + p \psi_B \\ u_C &= R_1 i_C + p \psi_C \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中  $p = d/dt$ ;

相应的,三相转子绕组折算到定子侧后的电压方程为:

$$\left. \begin{aligned} u_a &= R_2 i_a + p \psi_a \\ u_b &= R_2 i_b + p \psi_b \\ u_c &= R_2 i_c + p \psi_c \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中  $u_a, u_b, u_c, u_A, u_B, u_C$  表示定子和转子相电压的瞬时值

$i_A, i_B, i_C, i_a, i_b, i_c$  表示定子和转子相电流的瞬时值;

$\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_a, \psi_b, \psi_c$  表示各相绕组的全磁链;

$R_1, R_2$  表示定子和转子绕组电阻。

上述各量都已折算到定子侧。

根据法拉第电磁感应定律,当磁通随时间变化时,在线圈中将产生感应电动势;该电动势  $\xi$  等于磁链随时间变化率的负值:

$$\xi = -d\Psi/dt$$

## 2.磁链方程

磁链( $\psi$ ):导电线圈或电流回路所链环的磁通量。磁链等于导电线圈匝数  $N$  与穿过该线圈各匝的平均磁通量  $\phi$  的乘积,故又称磁通匝。

$$\psi = N\phi = Li$$

式中:比例系数  $L$  与电流无关,取决于线圈的大小、形状、匝数以及周围(特别是线圈内部)磁介质的磁导率(若为铁磁质,则  $L$  还与电流  $I$  有关)。对于相同的电流变化率,  $L$  越大,自感电动势越大,即自感作用越强。 $L$  称为自感系数,简称自感或电感,单位是亨利(H) 如果通过线圈的电流在1秒钟内改变1安时产生的自感电动势是1伏,这个线圈的自感系数就是1亨。常用的较小的单位有毫亨(mH)和微亨( $\mu H$ )。自感系数的计算比较复杂,常用实验方法测定,简单情形则可由毕-萨-拉定律和  $\Psi = Li$  计算。

**自感:**当导体中的电流发生变化时,它周围的磁场就随着变化,并由此产生磁通量的变化,因而在导体中就产生感应电动势,这个电动势总是阻碍导体中原来电流的变化,此电动势即自感电动势。这种现象就叫做自感现象。

**互感:**当一线圈中的电流发生变化时,在临近的另一线圈中产生感应电动势,叫做互感现象。互感现象是一种常见的电磁感应现象,不仅发生于绕在同一铁芯上的两个线圈之间,而且也可以发生于任何两个相互靠近的电路之间。

每个绕组的磁链是它本身的自感磁链和其他绕组对它的互感磁链之和,因此,六个绕组的磁链可表达为:

$$\begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \\ \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} & L_{Aa} & L_{Ab} & L_{Ac} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} & L_{Ba} & L_{Bb} & L_{Bc} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} & L_{Ca} & L_{Cb} & L_{Cc} \\ L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} & L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} & L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} & L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

或写成:

$$\psi = Li$$

实际上，与电机绕组交链的磁通主要有两类:一类是只与某一相绕组交链而不穿过气隙的漏磁通。另一类是穿过气隙的相间互感磁通，后者是主要的。

### 3.运动方程

在一般情况下，电力拖动系统的运动方程式是:

$$T_e = T_L + \frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt} + \frac{D}{n_p} \omega + \frac{K}{n_p} \theta \quad (2.4)$$

式中:

- $T_L$ :表示负载阻转矩;
- $J$ 表示机组的转动惯量;
- $D$ 表示与转速成正比的转矩阻尼系数;
- $K$ 表示扭转弹性转矩系数;
- $n_p$ 表示极对数。

对于恒转矩负载， $D=0$ ,  $K=0$ ，则:

$$T_e = T_L + \frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt} \quad (2.5)$$

### 4.转矩方程

根据载流导体在磁场中受力的基本公式可以得到电机电磁转矩的公式为:

$$T_e = -n_p L_m [(i_A i_a + i_B i_b + i_C i_c) \sin \theta + (i_A i_b + i_B i_c + i_C i_a) \sin(\theta + 120^\circ) + (i_A i_c + i_B i_a + i_C i_b) \sin(\theta - 120^\circ)] \quad (2.6)$$

应该指出，上述公式是在磁路为线性、磁场在空间按正弦分布的假定条件下得出的，但对定、转子电流的波形并没有作任何假定，它们可以是任意的。因此，上述电磁转矩公式对研究由变频器供电的三相感应电动机调速系统很有实用意义。

## 2 坐标变换和变换阵

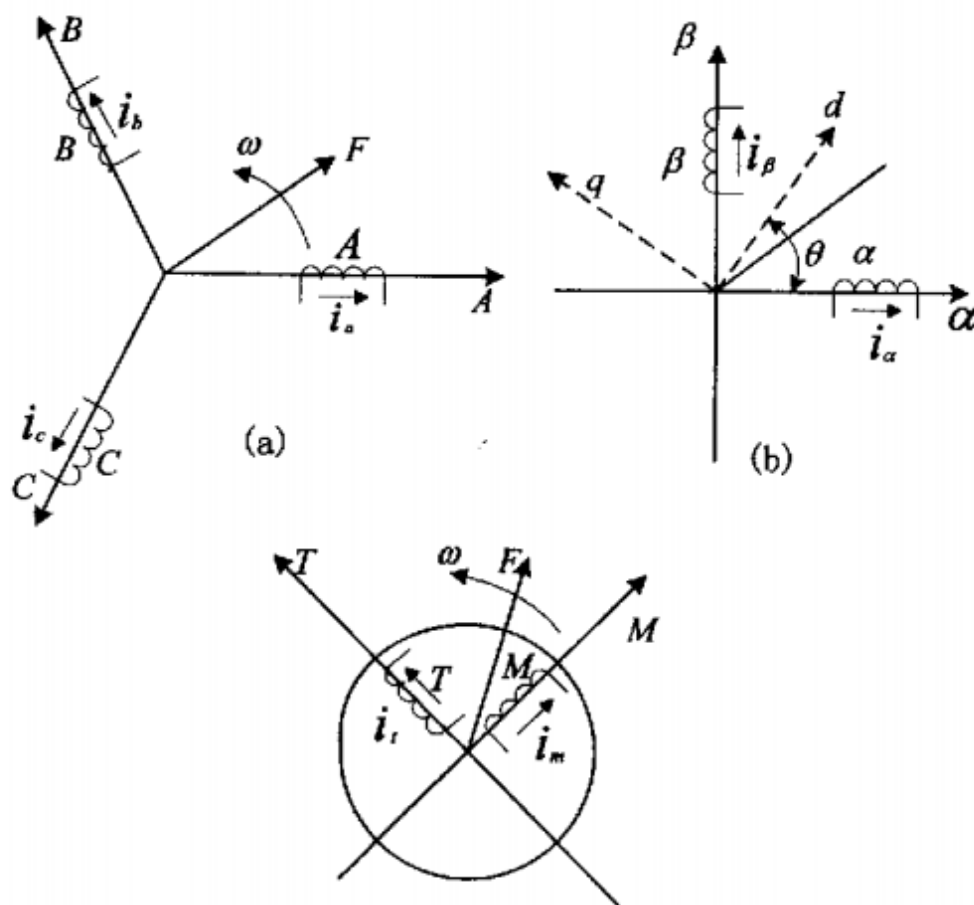


图 2.2 等效的交流电机绕组和直流电机绕组物理模型

(a) 三相交流绕组 (b) 两相交流绕组 (c) 旋转的直流绕组

### 1. 三相/二相变换

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 2. 二相/二相旋转变换(Park变换)

$$C_{2S-2r} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.10a)$$

$$C_{2r-2S} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.10b)$$

### 3 $\alpha, \beta$ 坐标系感应电机数学模型

三相感应电动机在d-q坐标下的电压方程如下：

$$\begin{cases} u_{sd} = R_s i_{sd} + p \Psi_{sd} - \omega_{dqs} \Psi_{sq} \\ u_{sq} = R_s i_{sq} + p \Psi_{sq} + \omega_{dqs} \Psi_{sd} \\ u_{rd} = R_r i_{rd} + p \Psi_{rd} - \omega_{dqr} \Psi_{rq} \\ u_{rq} = R_r i_{rq} + p \Psi_{rq} + \omega_{dqr} \Psi_{rd} \end{cases}$$

式中：

- $p$  是微分算子
- $\omega_{dqs}$  是 d - q 坐标系相对于定子的角转速
- $\omega_{dqr}$  是 d - q 坐标系相对于转子的角转速

三相感应电动机在d-q坐标下的磁链方程如下：

$$\begin{cases} \Psi_{sd} = L_s i_{sd} + L_m i_{rd} \\ \Psi_{sq} = L_s i_{sq} + L_m i_{rq} \\ \Psi_{rd} = L_m i_{sd} + L_r i_{rd} \\ \Psi_{rq} = L_m i_{sq} + L_r i_{rq} \end{cases}$$

式中：

- $L_s$  是定子等效两相绕组的自感
- $L_r$  是转子等效两相绕组的自感
- $L_m$  是定子与转子同轴等效绕组间的互感

三相感应电动机在d-q坐标下的电磁转矩方程如下：

$$T_e = n_p L_m (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq})$$

式中：

- $n_p$  为电机极对数

三相感应电动机在d-q坐标下的运动方程如下：

$$T_e = T_L + \frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt}$$

式中：

- $T_L$  是负载转矩
- $\omega$  是转子角速度

由定子电压方程可得：

$$\begin{cases} p\Psi_{sd} = u_{sd} - R_s i_{sd} + \omega_{dqs} \Psi_{sq} \\ p\Psi_{sq} = u_{sq} - R_s i_{sq} - \omega_{dqs} \Psi_{sd} \end{cases}$$

上式构成三相感应电动机的定子模型。

由转子电压方程可得：

$$\begin{cases} p\Psi_{rd} = u_{rd} - R_r i_{rd} + \omega_{dqr} \Psi_{rq} \\ p\Psi_{rq} = u_{rq} - R_r i_{rq} - \omega_{dqr} \Psi_{rd} \end{cases}$$

上式构成三相感应电动机的转子模型。

由磁链方程可得：

$$\begin{cases} i_{rd} = \frac{\Psi_{sd} - L_s i_{sd}}{L_m} \\ i_{sd} = \frac{\Psi_{rd} - L_r i_{rd}}{L_m} \\ i_{rq} = \frac{\Psi_{sq} - L_s i_{sq}}{L_m} \\ i_{sq} = \frac{\Psi_{rq} - L_r i_{rq}}{L_m} \end{cases}$$

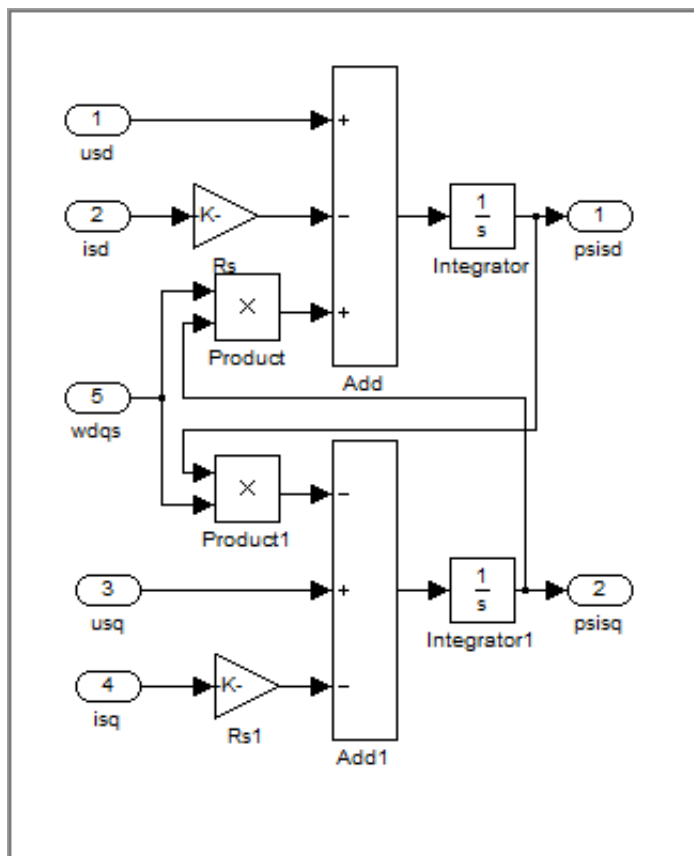
上式构成三相感应电动机的磁链模型。

转矩方程构成三相感应电动机的转矩模型。

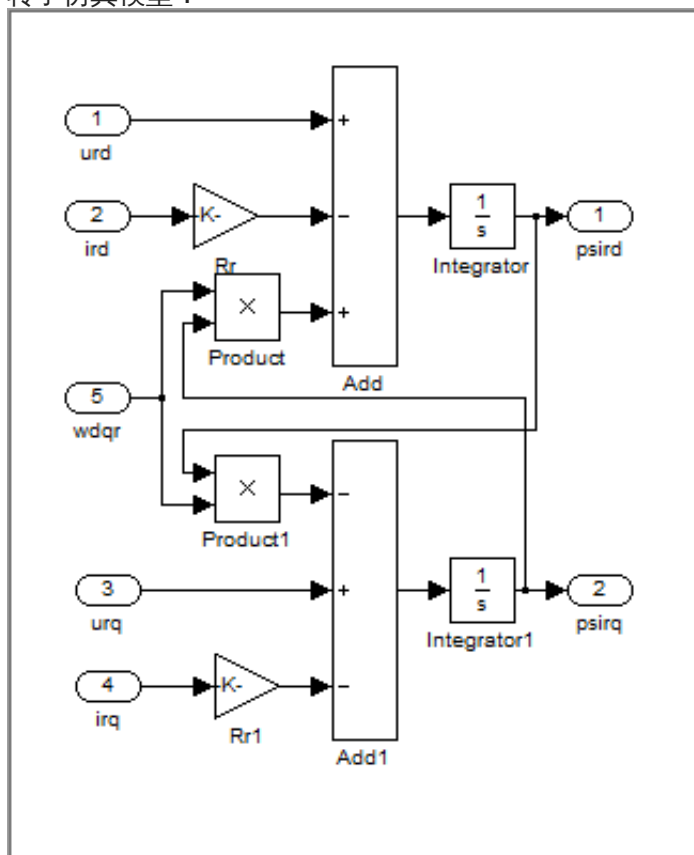
### 3 电机仿真模型

在Simulink环境下，分别建立三相感应电动机的定子模型、转子模型、磁链模型和转矩模型，然后将四个模型组合起来构成三相感应电动机的仿真模型。

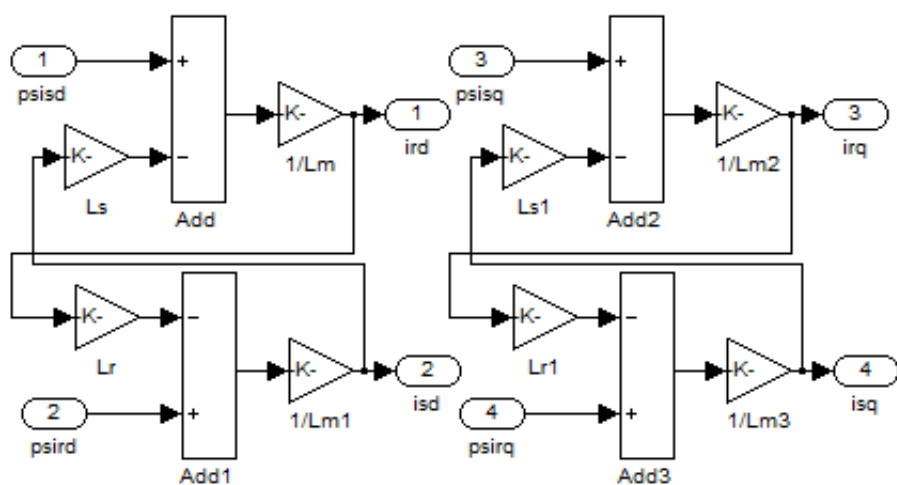
定子仿真模型：



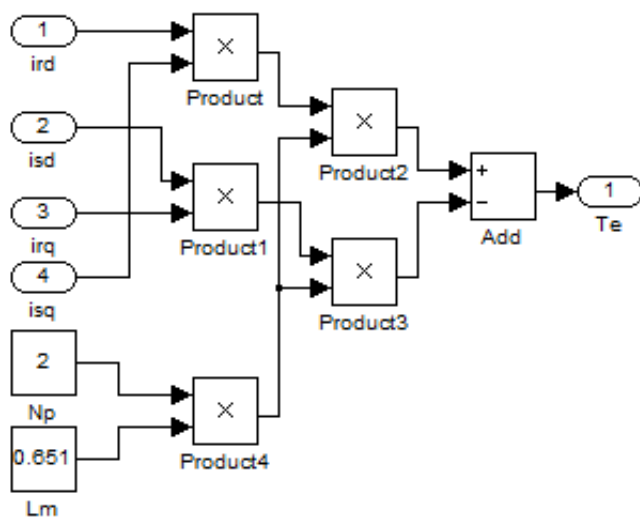
转子仿真模型：



磁链仿真模型：

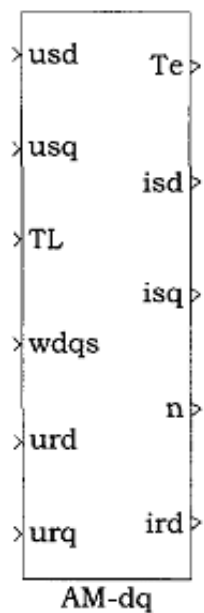
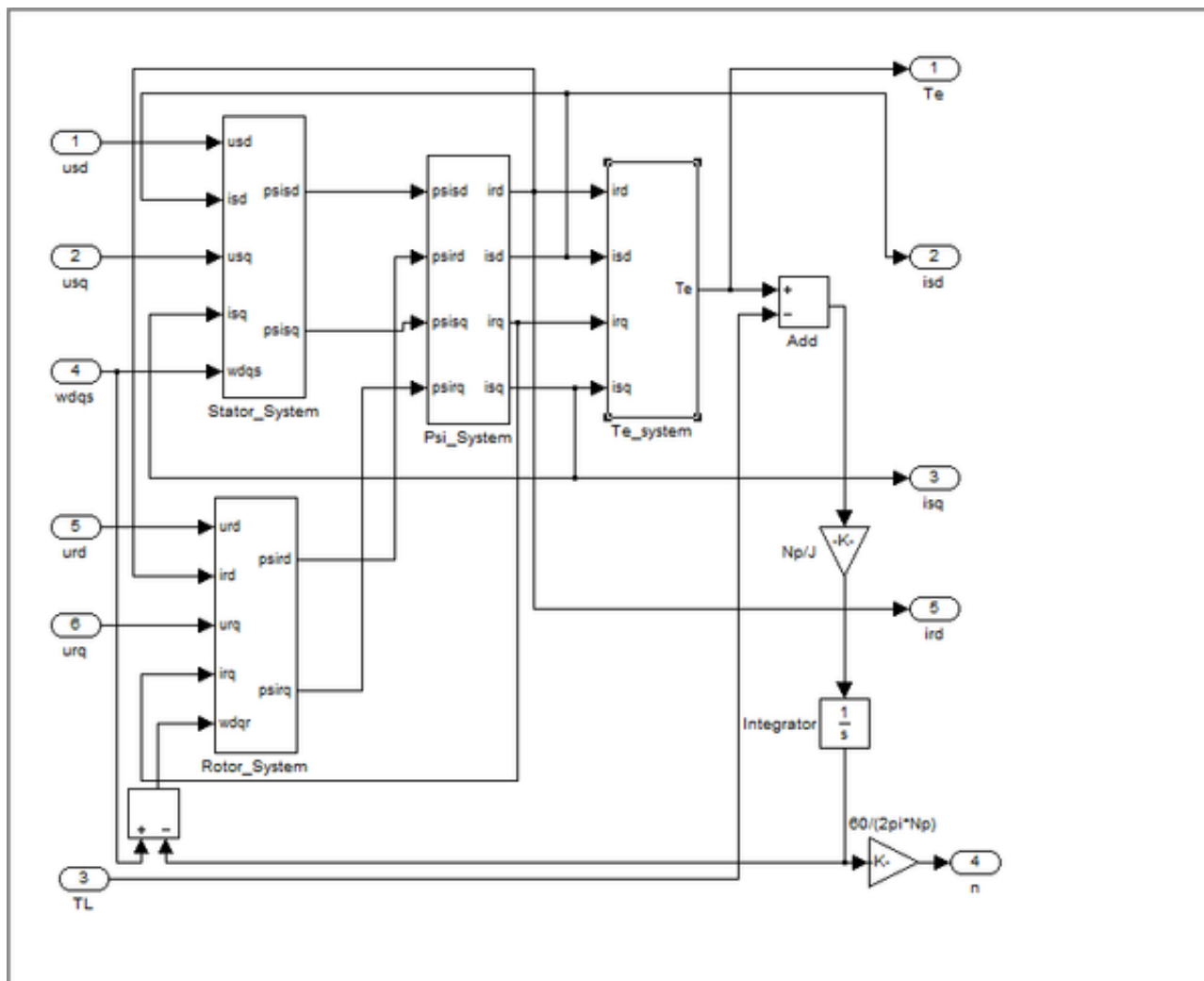


转矩仿真模型：



三相感应电动机仿真模型及其封装：





在simulink中有直接的对应三相感应电动机的模块直接可以调用:

