

第 2 章 感应电动机的数学模型

感应电动机（又称为异步电动机）的数学模型^{[34][35]}是一个高阶、非线性、强耦合的多变量系统。在研究异步电动机的多变量数学模型时，常作如下的假设：

（1）忽略空间谐波；（2）忽略磁路饱和，各绕组的自感和互感都是恒定的；（3）忽略铁芯损耗；（4）不考虑频率和温度变化对绕组电阻的影响。无论电机转子是绕线式还是鼠笼式的，都将它等效成绕线转子，并折算到定子侧，折算后的每相匝数都相等，这样，实际电机绕组就被等效为图 2.1 所示的三相感应电机的物理模型。图中，定子三相绕组轴线 A、B、C 在空间是固定的，以 A 轴为参考坐标轴，转子绕组轴线 a、b、c 随转子旋转，转子 a 轴和定子 A 轴间的电角度 θ 为空间角位移变量。并规定各绕组电压、电流、磁链的正方向符合电动机惯例和右手螺旋定则。这样，异步电动机的数学模型由电压方程、磁链方程、转矩方程和运动方程组成。

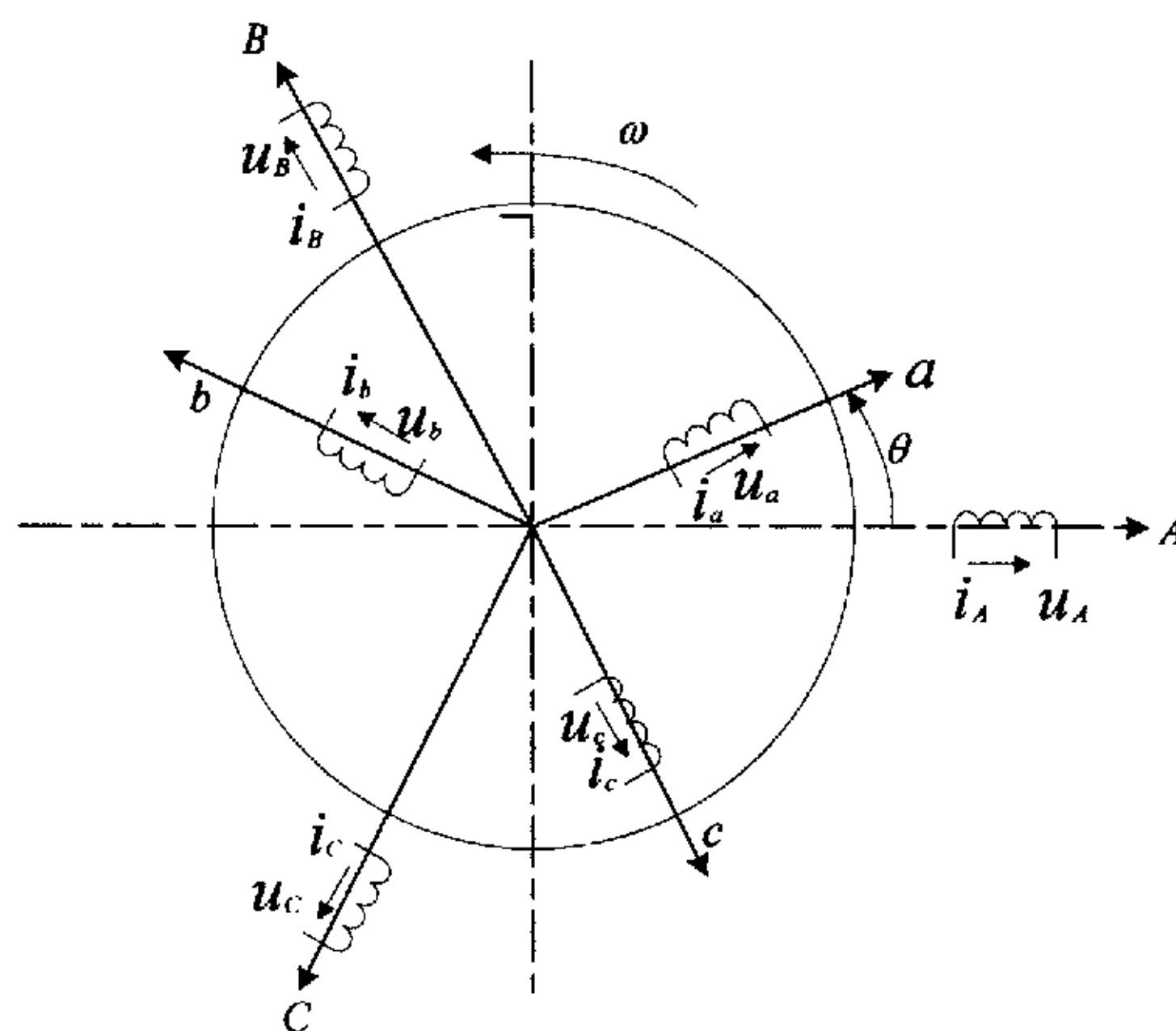


图 2.1 三相感应电机的物理模型

2.1 感应电机的数学模型

1. 电压方程

三相定子绕组的电压平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} u_A &= R_1 i_A + \rho \psi_A \\ u_B &= R_1 i_B + \rho \psi_B \\ u_C &= R_1 i_C + \rho \psi_C \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 $\rho = d/dt$ ；相应的，三相转子绕组折算到定子侧后的电压方程为

$$\begin{cases} u_a = R_2 i_a + \rho \psi_a \\ u_b = R_2 i_b + \rho \psi_b \\ u_c = R_2 i_c + \rho \psi_c \end{cases} \quad (2.2)$$

式中 $u_A, u_B, u_C, u_a, u_b, u_c$ 表示定子和转子相电压的瞬时值；

$i_A, i_B, i_C, i_a, i_b, i_c$ 表示定子和转子相电流的瞬时值；

$\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_a, \psi_b, \psi_c$ 表示各相绕组的全磁链；

R_1, R_2 表示定子和转子绕组电阻。

上述各量都已折算到定子侧。

2. 磁链方程

每个绕组的磁链是它本身的自感磁链和其他绕组对它的互感磁链之和，因此，六个绕组的磁链可表达为

$$\begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \\ \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} & L_{Aa} & L_{Ab} & L_{Ac} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} & L_{Ba} & L_{Bb} & L_{Bc} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} & L_{Ca} & L_{Cb} & L_{Cc} \\ L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} & L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} & L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} & L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

或写成：

$$\psi = Li \quad (2.3a)$$

式中 L 是 6×6 电感矩阵，其中对角线元素 $L_{AA}, L_{BB}, L_{CC}, L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}$ 是各有关绕组的自感，其余各项则是绕组间的互感。

实际上，与电机绕组交链的磁通主要有两类：一类是只与某一相绕组交链而不穿过气隙的漏磁通。另一类是穿过气隙的相间互感磁通，后者是主要的。定子各相漏磁通所对应的电感称作定子漏感 L_{l1} ，由于各相的对称性，各相漏感值均相等；同样，转子各相漏磁通则对应于转子漏感 L_{l2} 。与定子一相绕组交链的最大互感磁通对应于定子互感 L_{m1} ，与转子一相绕组交链的最大互感磁通对应于转子互感 L_{m2} ，由于折算后定、转子绕组匝数相等，且各绕组间互感磁通都通过气隙，磁阻相同，故可认为 $L_{m1} = L_{m2}$ 。

3. 运动方程

在一般情况下，电力拖动系统的运动方程式是

$$T_e = T_L + \frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt} + \frac{D}{n_p} \omega + \frac{K}{n_p} \theta \quad (2.4)$$

式中 T_L 表示负载阻转矩； J 表示机组的转动惯量； D 表示与转速成正比的阻转矩阻尼系数； K 表示扭转弹性转矩系数； n_p 表示极对数。

对于恒转矩负载, $D=0$, $K=0$, 则

$$T_e = T_L + \frac{J}{n_p} \frac{d\omega}{dt} \quad (2.5)$$

4. 转矩方程

根据载流导体在磁场中受力的基本公式可以得到电机电磁转矩的公式为:

$$T_e = -n_p L_m [(i_A i_a + i_B i_b + i_C i_c) \sin \theta + (i_A i_b + i_B i_c + i_C i_a) \sin(\theta + 120^\circ) + (i_A i_c + i_B i_a + i_C i_b) \sin(\theta - 120^\circ)] \quad (2.6)$$

应该指出, 上述公式是在磁路为线性、磁场在空间按正弦分布的假定条件下得出的, 但对定、转子电流的波形并没有作任何假定, 它们可以是任意的。因此, 上述电磁转矩公式对研究由变频器供电的三相感应电动机调速系统很有实用意义。

2.2 坐标变换和变换阵

上节虽然已推导出感应电机的动态数学模型, 但是, 要分析和求解这组非线性方程显然是十分困难的, 即使要画出很清晰的结构图也并非易事。通常须采用坐标变换的方法加以改造, 使坐标变换后的数学模型容易处理一些。

以产生同样的旋转磁动势为准则, 图 2.2a 的三相交流绕组、图 2.2b 的两相交流绕组和图 2.2c 中整体旋转的直流绕组彼此等效。或者说, 在三相坐标系下的 i_A , i_B , i_C 和在两相坐标系下 i_α , i_β 和在旋转两相坐标系下的直流电流 i_m , i_l 是等效的, 它们能产生相同的旋转磁动势。对图 2.2c 的 M、T 两个绕组而言, 当观察者站在地面看上去, 它们是与三相交流绕组等效的旋转直流绕组; 如果跳到旋转着的铁心上看, 它们其实就是一个直流电机的物理模型了。这样, 通过坐标系的变换, 可以找到与交流三相绕组等效的直流电机模型。现在的问题是, 如何求出 i_A , i_B , i_C 和 i_m , i_l 之间准确的等效关系, 这就是坐标变换的任务。

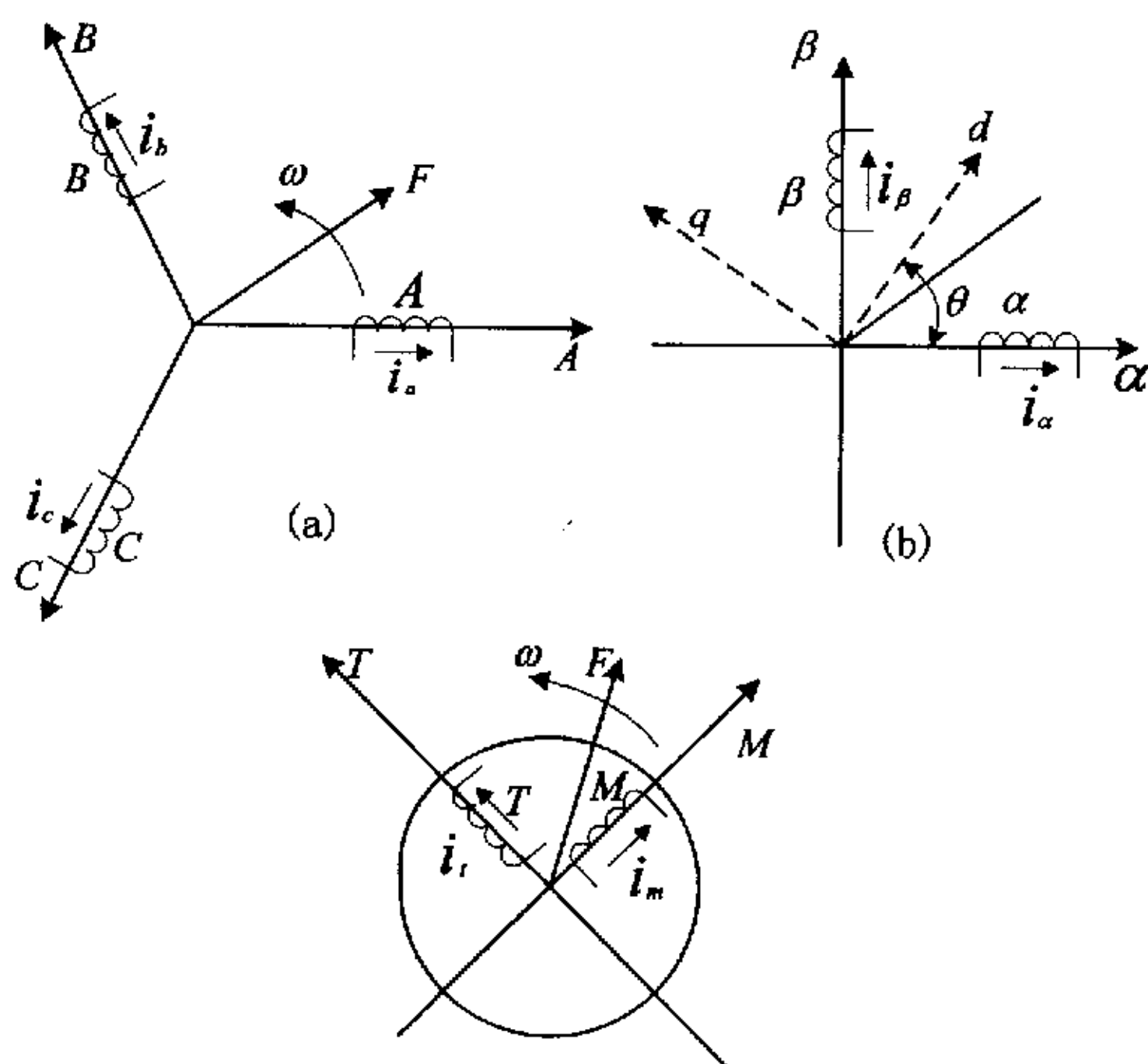


图 2.2 等效的交流电机绕组和直流电机绕组物理模型

(a) 三相交流绕组 (b) 两相交流绕组 (c) 旋转的直流绕组

1. 三相/二相变换

在三相静止坐标系 A、B、C 和二相静止坐标系 α 、 β 之间的变换，简称 3/2 变换。令该变换服从于功率不变约束条件。得到变换阵为：

$$C_{3/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

反之，如果要从二相坐标系变换得到三相坐标系，可求其反变换阵，得

$$C_{2/3} = C_{3/2}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

在实际电机中没有零轴电流，因此实际的电流变换式为：

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2. 二相/二相旋转变换

在图 2.2b (虚线) 中, 定义同步旋转的两相坐标系 d、q, 其中 θ_1 角是旋转坐标系 d 轴和静止坐标系 α 轴之间的电角度。并令静止的二相系统与旋转的二相系统绕组匝数相同, 磁势相等。可以得到二相/二相旋转变换 (也即 Park 变换) 关系式如下:

$$C_{2S-2r} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.10a)$$

$$C_{2r-2S} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.10b)$$

经过如上的坐标变换就可以将电机的数学模型从三相坐标系统转到二相坐标系统下, 从而大大简化了电机的模型, 使得对其的分析不再复杂。

2.3 α 、 β 系统中的感应电机数学模型

利用式 (2.7), (2.8), (2.9) 对进行变换就可以得到 α 、 β 系统感应电机数学模型如下:

1. 电压方程

$$\begin{cases} u_{\alpha 1} = R_1 i_{\alpha 1} + p \psi_{\alpha 1} \\ u_{\beta 1} = R_1 i_{\beta 1} + p \psi_{\beta 1} \\ u_{\alpha 2} = R_2 i_{\alpha 2} + p \psi_{\alpha 2} + \omega \psi_{\beta 2} \\ u_{\beta 2} = R_2 i_{\beta 2} + p \psi_{\beta 2} + \omega \psi_{\alpha 2} \end{cases} \quad (2.11)$$

2. 磁链方程

$$\begin{cases} \psi_{\alpha 1} = L_s i_{\alpha 1} + L_m i_{\alpha 2} \\ \psi_{\beta 1} = L_s i_{\beta 1} + L_m i_{\beta 2} \\ \psi_{\alpha 2} = L_m i_{\alpha 1} + L_r i_{\alpha 2} \\ \psi_{\beta 2} = L_m i_{\beta 1} + L_r i_{\beta 2} \end{cases} \quad (2.12)$$

3. 电磁转矩方程

$$T_e = n_p L_m (i_{\beta 1} i_{\alpha 2} - i_{\alpha 1} i_{\beta 2}) \quad (2.13)$$

4. α 、 β 系统中定子磁链模型

$$\psi_{\alpha s} = \int (U_{\alpha s} - i_{\alpha s} r_s) dt \quad (2.14a)$$

$$\psi_{\beta s} = \int (U_{\beta s} - i_{\beta s} r_s) dt \quad (2.14b)$$

5. α 、 β 系统中转子磁链模型

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{r\beta} \end{bmatrix} = \frac{L_r}{L_m} \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} - R_s \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} - \sigma L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{其中 } \sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$$

2.4 本章小结:

本章建立了三相感应电机在三相系统中的数学模型, 通过所介绍的变换矩阵得到了感应电机在二相静止坐标系下的数学模型。并经由数学推导得出感应电机的电磁转矩与电机定、转子磁链及其交角的关系。最后本章建立了鼠笼型感应电机在 α 、 β 、0 系统中的状态方程。它们是后续理论分析和实验的基础。在以后的分析中如不加说明都是在 α 、 β 、0 静止坐标系下进行的。