

Compte-rendu de TP - Méthodes de Montecarlo

Taj FAROUI

Février 2017

Contents

1	Introduction	5
2	TP1 - Simulation de variables aléatoires	6
2.1	Loi uniforme sur $[0,1]$	6
2.1.1	1. Simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner d'abord les sept premières réalisations que vous obtenez	6
2.1.2	2. Simuler à nouveau sans changer la graine (seed) et donner de nouveau les sept premières réalisations	6
2.1.3	3. Changez la graine et recommencez	6
2.1.4	4. Donner une représentation de la distribution empirique d'un échantillon de taille entre 1000 et 10000	7
2.2	Loi exponentielle	8
2.2.1	Simuler N_{MC} réalisations indépendantes d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.	8
2.2.2	Représenter sur une même figure la densité de la loi exponentielle et une approximation obtenue à l'aide des réalisations précédentes	8
2.2.3	Estimer la moyenne et la variance de l'échantillon	9
2.3	Loi de Bernoulli	9
2.3.1	Simuler \tilde{N}_{MC} réalisations indépendantes d'une variable aléatoire Z de Bernoulli de paramètre p	9
2.3.2	Donner un estimateur \hat{p} du paramètre p . Justifier la convergence asymptotique de cet estimateur	9
2.3.3	Donner une représentation de la distribution empirique de \hat{p}	10
2.4	Loi normale	10
2.4.1	Simuler une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ suivant la méthode de <i>Box – Muller</i> puis la méthode de <i>Marsiglia</i> (rejet-polaire)	10
2.4.2	Comparer les temps de simulation des deux méthodes en fonction du nombre de gaussiennes à simuler. Justifier ces différences de temps.	12
2.4.3	Simuler \bar{N}_{MC} réalisations indépendantes d'une variable aléatoire de loi $N(\mu, \sigma^2)$ avec $(\mu, \sigma^2) \neq (0, 1)$	13
2.4.4	On considère $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\tilde{X} \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ et $Y \sim B(p)$ trois variables aléatoires indépendantes	14
2.4.5	Approcher $\mathbb{E}[A]$ par une méthode de Monte Carlo	15
2.4.6	Mettez en évidence la vitesse de convergence	16
3	TP 2	17
3.1	Choisissez individuellement des coefficients $A_0 > 0$, $A_1 \in \mathbb{R}$, A_2 , A_3 , $A_4 > 0$ et considérez le processus $X_t, 0 \leq t \leq T$ solution de l'EDS :	17
3.1.1	Rappeler la définition du schéma d'Euler de pas δ	17

3.1.2	Préciser les intervalles de confiance de vos approximations	17
3.1.3	Illustrer comment évolue votre approximation en fonction du pas de discrétisation δ	18
3.1.4	Illustrer l'effet de l'extrapolation de Romberg	19
4	TP3 - Méthodes de réduction de variance	20
4.1	Partie 1	20
4.1.1	Rappelez la solution explicite de l'équation suivante :	20
4.1.2	Expliquez comment évaluer le prix d'un call européen grâce à une méthode de Monte-Carlo	20
4.1.3	Vous choisirez alors personnellement les paramètres du modèle et donnerez une estimation du prix avec un intervalle de confiance à 95%	20
4.1.4	Rappelez la formule de parité call-put. Utilisez-la pour proposer un algorithme alternatif à l'évaluation du prix du call	21
4.2	Partie 2	21
4.2.1	Évaluez $\mathbb{E}[X^\lambda]$	21
4.2.2	Évaluez $Var(X^\lambda)$	22
4.2.3	Trouvez la valeur λ_{min} qui minimise $Var(X^\lambda)$. Donnez la variance correspondante σ_{min}^2	22
4.2.4	Donnez les comportements asymptotiques de A_{NMC} , B_{NMC} et λ_{NMC}	23
4.2.5	Donnez la limite de \hat{m}^{NMC} . Vous préciserez le type de convergence	23
4.2.6	Donnez la limite de $\sqrt{N_{MC}}(\hat{m}^{NMC} - m)$	23
4.2.7	Vous évalueriez la variance de votre estimateur pour quelques valeurs de λ	23
4.2.8	Illustrez dans ce cas la réponse à la question 10)	24
4.3	Partie 3 : Fonction d'importance	25
4.3.1	Montrer que $\mathbb{E}[\psi(G)] = \mathbb{E}[\psi(a + G)\exp(-aG - \frac{a^2}{2})]$	25
4.3.2	En déduire une méthode de réduction de variance pour le calcul de $\mathbb{E}[\psi(G)]$. Vous illustrerez numériquement avec la fonction ψ de votre choix.	26
4.3.3	Vous appliquerez ensuite cette méthode pour le calcul du Call avec les mêmes paramètres qu'à la question 3)	27
4.4	Partie 4 : Variable antithétique	28
4.4.1	Montrer que : $\mathbb{E}[\psi(G)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\psi(G) + \psi(-G)]$	28
4.4.2	En déduire une méthode de réduction de variance pour le calcul de $\mathbb{E}[\psi(G)]$. Vous illustrerez numériquement avec la fonction ψ de votre choix.	28
4.4.3	Vous appliquerez ensuite cette méthode pour le calcul du Call avec les mêmes paramètres qu'à la question 3)	29
4.5	Conclusion	29

4.5.1	En combinant astucieusement les différentes méthodes étudiées dans les parties précédentes, vous proposerez une méthode efficace de calcul du prix de call	29
4.5.2	Gain en temps de calcul	30
5	Conclusion	31

1 Introduction

Ce compte rendu de TP regroupe les résultats rassemblés des TP 1, 2 et 3. J'ai choisi d'utiliser le langage de programmation Python pour sa facilité d'utilisation et sa simplicité de déclaration de fonctions et de variables afin de produire mes résultats.

Au cours des TP, il a été question de simuler des variables aléatoires de lois différentes, d'observer et de conclure quant aux résultats obtenus. Nous avons pour cela fait appel à l'algorithme de génération aléatoire *Mersenne – Twister* (implémenté par défaut sur Python).

Cet algorithme est extrêmement efficace. A partir d'une graine, il est capable de calculer un nombre entre 0 et 1 en suivant une loi uniforme. Sa période est de $2^{19937} - 1$. Si nous ne lui donnons pas de graine, il prend celle-ci comme étant une représentation numérique de la valeur de l'horloge interne de l'ordinateur au moment du lancement du calcul.

Dans le premier TP, il est question de simuler différentes variables aléatoires de lois différentes à partir de la simulation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme. Nous obtenons ainsi une loi exponentielle, une loi de Bernoulli, une loi Normale et enfin une somme de lois Normales conditionnées par une loi de Bernoulli de paramètre p .

Au cours du second TP, il a été question de faire l'approximation d'un processus de diffusion dans lequel il était demandé d'estimer le prix d'un call européen à l'aide d'un schéma d'Euler de pas δ . Il est demandé de conclure quant à la précision de l'approximation en fonction de la valeur de δ puis d'illustrer l'effet d'extrapolation de Romberg.

Enfin, le troisième TP consistait à mettre en oeuvre des méthodes de réduction de variance dans le but d'optimiser des temps de calcul. Nous avons calculé le prix d'un Call de plusieurs façons différentes dans le but de combiner toutes ces méthodes (Parité Call-Put, Variables de contrôle, Fonctions d'importance, Variables antithétiques) dans un méta-algorithme afin de réduire la variance au maximum.

2 TP1 - Simulation de variables aléatoires

2.1 Loi uniforme sur $[0,1]$

2.1.1 1. Simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner d'abord les sept premières réalisations que vous obtenez

Pour une graine fixée à 0.13061993 nous obtenons les sept valeurs suivantes :

```
0.7484473900172613
0.30065959922731433
0.16787065242421706
0.773570125398269
0.4794342895399887
0.404269314935518
0.6467708227166673
```

Figure 1: Génération de 7 chiffres aléatoires entre 0 et 1

2.1.2 2. Simuler à nouveau sans changer la graine (seed) et donner de nouveau les sept premières réalisations

Pour la même graine, nous obtenons exactement le même résultat, soit :

```
0.7484473900172613
0.30065959922731433
0.16787065242421706
0.773570125398269
0.4794342895399887
0.404269314935518
0.6467708227166673
```

Figure 2: Seconde génération de 7 chiffres aléatoires entre 0 et 1

Ceci confirme que pour une graine donnée, on obtient le même cycle de générations par l'algorithme de Mersenne Twister.

2.1.3 3. Changez la graine et recommencez

Pour une graine de 0.314159 nous obtenons les résultats suivants :

```
0.721180459713126
0.724190555721953
0.8066946645018117
0.4988642564769842
0.9219795110381481
0.3131352699332466
0.2155156324809413
```

Figure 3: Génération de 7 chiffres aléatoires entre 0 et 1 pour une autre graine

On remarque que l'on génère 7 chiffres différents.

2.1.4 4. Donner une représentation de la distribution empirique d'un échantillon de taille entre 1000 et 10000

Pour un échantillon de 10000 tirages nous avons l'histogramme suivant :

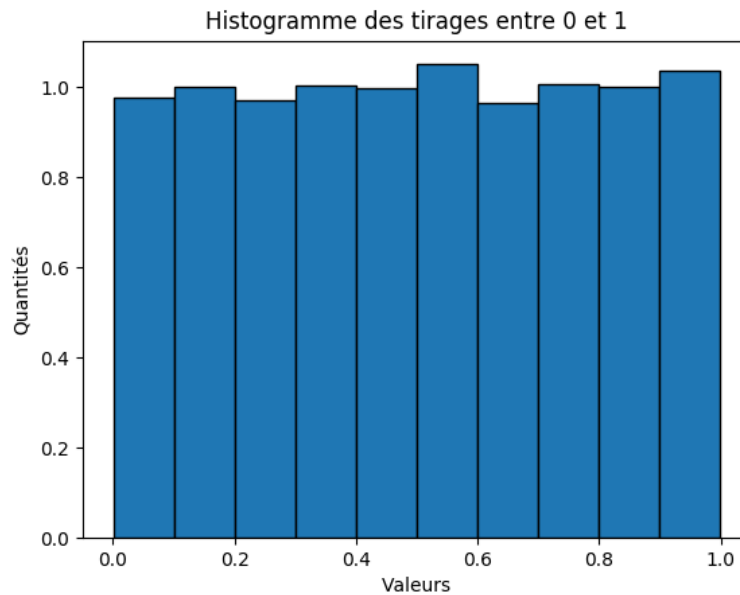


Figure 4: Histogramme de 10000 tirages aléatoires entre 0 et 1

Pour cet échantillon de tirages et un pas de 0.1 , la distribution était la suivante : [974, 999, 971, 1002, 996, 1050, 965, 1006, 1003, 1034]

2.2 Loi exponentielle

2.2.1 Simuler N_{MC} réalisations indépendantes d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour 15000 réalisations nous simulons une loi exponentielle à l'aide de la formule qui nous permet de passer de loi uniforme à exponentielle. Il s'agit de la formule suivante : Pour U loi uniforme, $-\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$ suit une loi exponentielle. Comme la loi de U est la même que celle de $1 - U$, nous utilisons plutôt la loi suivante : $-\frac{\ln(U)}{\lambda}$

2.2.2 Représenter sur une même figure la densité de la loi exponentielle et une approximation obtenue à l'aide des réalisations précédentes

Nous voulons tracer sur un même graphique la densité de la loi exponentielle de formule $\lambda e^{-\lambda x}$ (en rouge), et un histogramme de nos réalisations (en bleu). Après avoir mis les deux graphiques sur une même échelle pour pouvoir mieux les comparer, nous observons pour 15000 tirages et $\lambda = 7$ le résultat suivant :

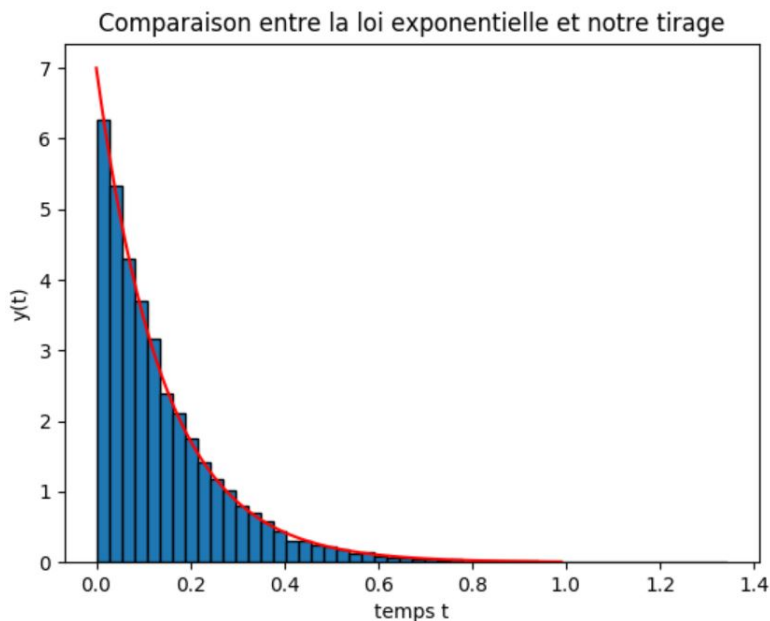


Figure 5: Comparaison entre la densité de la loi exponentielle et nos réalisations

2.2.3 Estimer la moyenne et la variance de l'échantillon

Nous calculons l'espérance par la formule $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ où X_i est notre $i^{\text{ème}}$ réalisation. Par ailleurs, nous calculons la variance sans biais à l'aide de la formule suivante : $VAR(X) = \frac{N}{N-1} * (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2)$.

Pour les 15000 tirages précédents, nous obtenons à l'aide de ces formules les valeurs suivantes : $\mathbb{E}[X] = 0.141867$ et $VAR(X) = 0.019777$.

Afin de construire à présent un intervalle de confiance, nous choisissons un α valant 95%. Ce qui nous donne un coefficient $y_\alpha = 1.96$.

Notre intervalle de confiance se construit donc de la sorte :

$$[\mathbb{E}[X] - \frac{y_\alpha \sqrt{VAR(X)}}{\sqrt{N}}; \mathbb{E}[X] + \frac{y_\alpha \sqrt{VAR(X)}}{\sqrt{N}}]$$

Nous obtenons donc l'intervalle de confiance suivant : $[0.1418; 0.1419]$

2.3 Loi de Bernoulli

2.3.1 Simuler \tilde{N}_{MC} réalisations indépendantes d'une variable aléatoire Z de Bernoulli de paramètre p

Pour $p = 0.45$ et $\tilde{N}_{MC} = 1200$ nous obtenons la distribution des réalisations suivante : $[543; 657]$ avec la première valeur du tableau qui représente le nombre de valeurs inférieures ou égales à p , et la deuxième valeur le nombre de valeurs tirées supérieures à p .

2.3.2 Donner un estimateur \hat{p} du paramètre p . Justifier la convergence asymptotique de cet estimateur

On obtient facilement \hat{p} en divisant la première valeur du tableau des réalisations par le nombre de tirages. On obtient ici : $\hat{p} = 0.4525$

On justifie la convergence asymptotique de cet estimateur par la loi des grands nombres. En effet, \hat{p} converge vers p quand N tend vers l'infini comme illustré ci-dessous :

2.3.3 Donner une représentation de la distribution empirique de \hat{p}

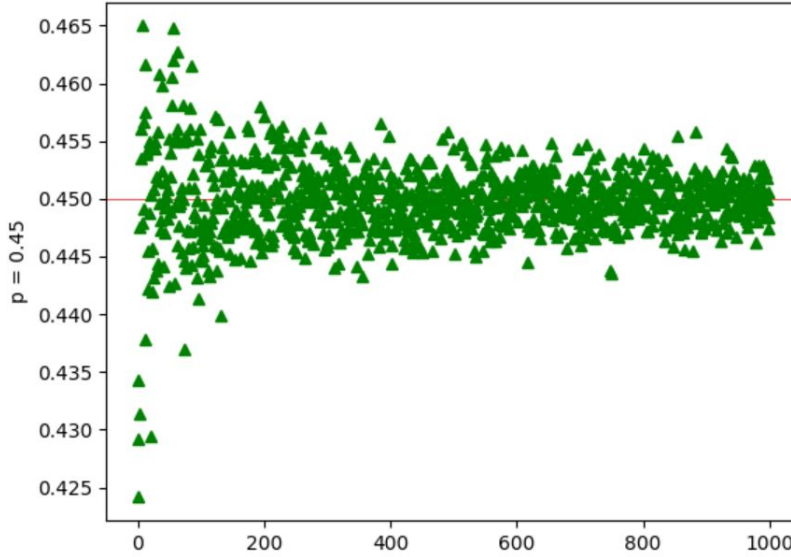


Figure 6: Convergence de \hat{p} vers p quand N augmente

2.4 Loi normale

2.4.1 Simuler une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ suivant la méthode de *Box – Muller* puis la méthode de *Marsaglia* (rejet-polaire)

Les méthodes de Box-Muller et Marsiglia permettent de simuler une loi normale à partir d'une loi uniforme respectivement entre 0 et 1, et -1 et 1.

La méthode de Box-Muller prend en entrée deux lois uniformes entre 0 et 1, U_1 et U_2 et renvoie deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit G_1 et G_2 de la sorte :

$$\begin{cases} G_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ G_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2) \end{cases}$$

Pour 50000 tirages, on compare la densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite (en rouge) et l'histogramme de nos réalisations (en bleu après ajustement d'échelle) obtenues à l'aide de la méthode de Box-Muller. On obtient ce graphique :

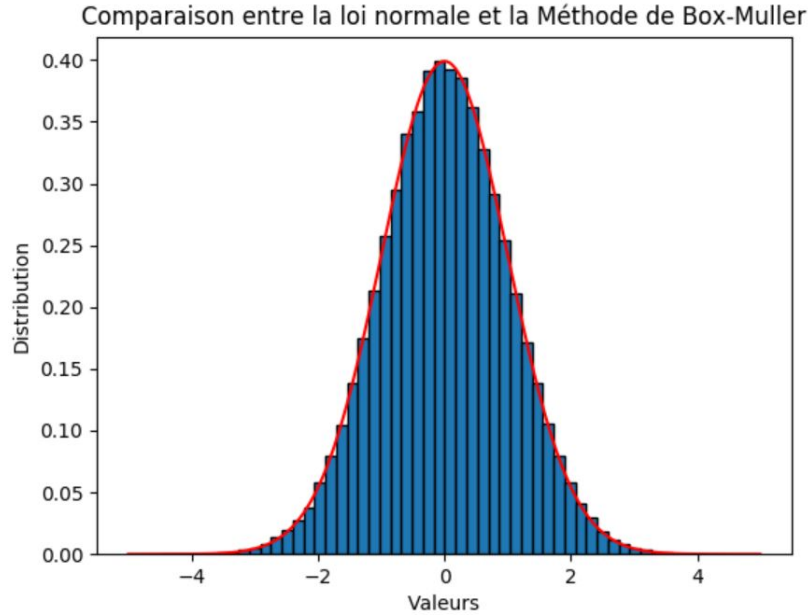


Figure 7: Comparaison entre densité de $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et nos réalisations à l'aide de la méthode de Box-Muller

Nous passons à présent à la méthode de Marsiglia ou de rejet polaire. Tout comme la méthode de Box-Muller, elle prend en entrée deux variables aléatoires uniformes X et Y au détail près qu'elle sont prises entre -1 et 1 . L'idée est de considérer la somme $S = X^2 + Y^2$ et de vérifier que $\sqrt{S} \leq 1$. Si cette condition est vérifiée, alors les variables aléatoires suivantes sont indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite :

$$\begin{cases} G_1 = \sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}} X \\ G_2 = \sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}} Y \end{cases}$$

Pour 50000 tirages, on compare la densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite (en rouge) et l'histogramme de nos réalisations (en bleu après ajustement d'échelle) obtenues à l'aide de la méthode de Marsiglia. On obtient ce graphique :

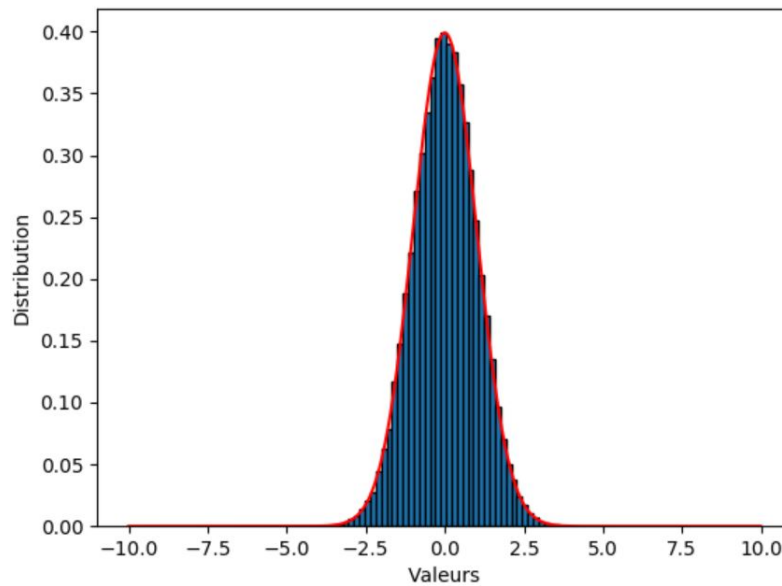


Figure 8: Comparaison entre densité de $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et nos réalisations à l'aide de la méthode de Marsiglia

2.4.2 Comparer les temps de simulation des deux méthodes en fonction du nombre de gaussiennes à simuler. Justifier ces différences de temps.

A l'aide du package *time* de Python, nous pouvons comparer les temps d'exécution des deux méthodes. Nous ferons varier le nombre de tirages à réaliser. Pour obtenir les meilleurs temps possibles, nous pensons à mettre en commentaire les instructions d'affichage de courbe.

Pour $n = 500$ tirages :

```
Temps d'execution Box-Muller : 0.005003452301025391 secondes  
Temps d'execution Marsiglia : 0.004000663757324219 secondes
```

Pour $n = 5000$ tirages :

```
Temps d'execution Box-Muller : 0.03602170944213867 secondes  
Temps d'execution Marsiglia : 0.03602409362792969 secondes
```

Pour $n = 50000$ tirages :

```
Temps d'execution Box-Muller : 0.41531825065612793 secondes  
Temps d'execution Marsiglia : 0.36525726318359375 secondes
```

Dans le cas des 500 tirages, la méthode de Marsiglia est la plus rapide. Par contre, pour 5000 tirages, La méthode de Box-Muller est légèrement plus rapide. Enfin, dans le cas 50000 tirages, Marsiglia est de nouveau plus rapide. Cette différence est probablement due à la machine qui exécute le code, voire le langage de programmation. En effet, les deux algorithmes sont pourtant de même complexité, et donc leurs temps d'exécution devraient être sensiblement similaires.

2.4.3 Simuler \overline{N}_{MC} réalisations indépendantes d'une variable aléatoire de loi $N(\mu, \sigma^2)$ avec $(\mu, \sigma^2) \neq (0, 1)$

Pour $\overline{N}_{MC} = 20000$ tirages, $\mu = 1$ et $\sigma = 3$ on compare la densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ (en rouge) et l'histogramme de nos réalisations à l'aide de la méthode de rejet polaire (en bleu) et obtient la représentation graphique suivante :

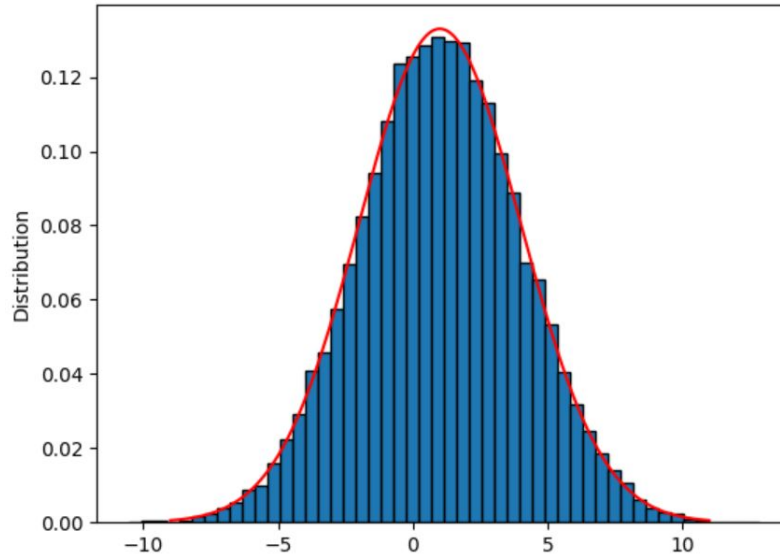


Figure 9: $\bar{N}_{MC} = 20000$ tirages, $\mu = 1$ et $\sigma = 3$

2.4.4 On considère $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\tilde{X} \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ et $Y \sim B(p)$ trois variables aléatoires indépendantes

On définit la variable aléatoire A comme suit : $A = X1_{Y=0} + \tilde{X}1_{Y=1}$ où 1 est la fonction indicatrice.

On simule 10000 réalisations indépendantes de la variable A . On choisit $p = 0.6$, $\mu = 1$, $\sigma = 2$, $\tilde{\mu} = 10$ et $\tilde{\sigma} = 2$.

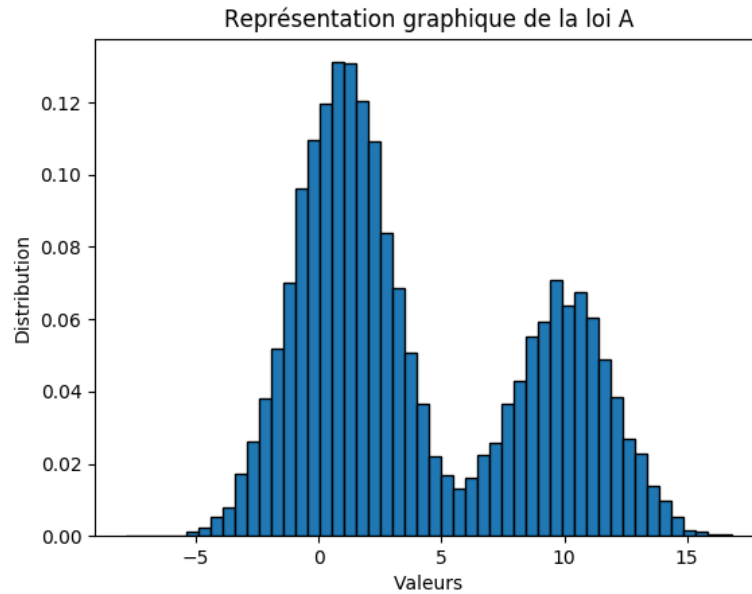


Figure 10: Représentation de la variable aléatoire A

2.4.5 Approcher $\mathbb{E}[A]$ par une méthode de Monte Carlo

Par le théorème central limite, on approche $\mathbb{E}[A]$ en faisant tendre le nombre de réalisations vers l'infini. Par un raisonnement analogue à ce qui a été vu pour la loi exponentielle, on obtient les résultats suivants pour des paramètres identiques à ceux de la question précédente :

```

Esperance : 7.4447440772909
Variance : 16.238085140276674
Intervalle de confiance pour alpha=95% : [ 7.3658 ; 7.5237 ]

```

Figure 11: Estimation de $\mathbb{E}[A]$, $VAR[A]$ et l'intervalle de confiance

2.4.6 Mettez en évidence la vitesse de convergence

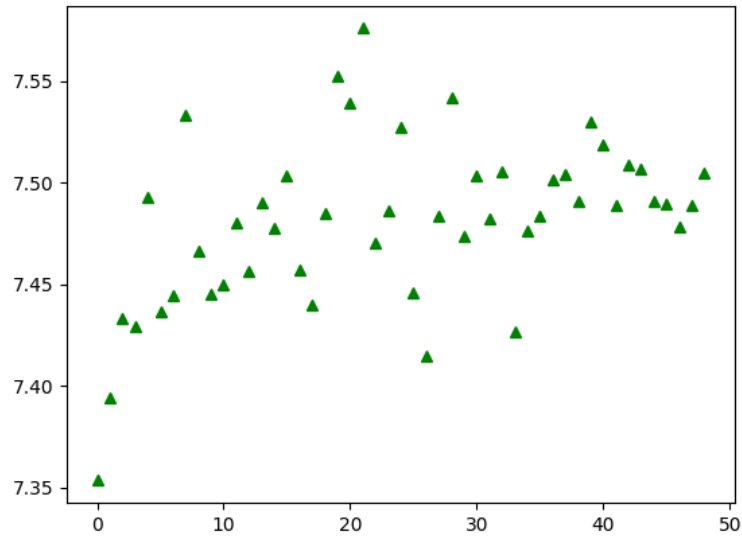


Figure 12: Vitesse de convergence de $\mathbb{E}[A]$

$\mathbb{E}[A]$ converge en $\sqrt{\hat{N}_{MC}}$ d'après le théorème central limite. Ce graphe montre la valeur de l'espérance en fonction de $2500x$ réalisations. x étant en abscisse.

3 TP 2

3.1 Choisissez individuellement des coefficients $A_0 > 0$, $A_1 \in \mathbb{R}$, $A_2, A_3, A_4 > 0$ et considérez le processus $X_t, 0 \leq t \leq T$ solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t &= A_0(A_1 - X_t)dt + \frac{A_2 + A_3 X_t^2}{A_4 + A_3 X_t^2} dB_t \\ X_0 &= x \end{cases}$$

où $(B_t, 0 \leq t \leq T)$ désigne un mouvement Brownien standard. Evaluer le prix d'un call européen : $P(T, x) = \mathbb{E}[(K - X_T)_+]$ avec une méthode de Monte Carlo

3.1.1 Rappeler la définition du schéma d'Euler de pas δ

Un schéma d'Euler se caractérise par le calcul itératif de la valeur d'une dérivée par une discrétisation d'un pas δ . La seule valeur qui nous intéresse est celle que l'on obtient au bout du calcul récurrent; les valeurs de la trajectoire n'importent pas.

3.1.2 Préciser les intervalles de confiance de vos approximations

Nous avons les paramètres A_i suivants : $A_0 = 1$, $A_1 = -5$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$ et $A_4 = 5$. Pour $x_0 = 1$, $n = 1000$, $N_{MC} = 10000$, $K = 5000$ et $\delta = 0.1$, nous obtenons le prix moyen du call européen et l'intervalle suivants :

```
P(T,x) = 5005.268929250568
Intervalle de confiance à 95% = [ 5005.2688715 ; 5005.268987 ]
```

Figure 13: Prix du call européen et intervalle de confiance

3.1.3 Illustrer comment évolue votre approximation en fonction du pas de discrétisation δ

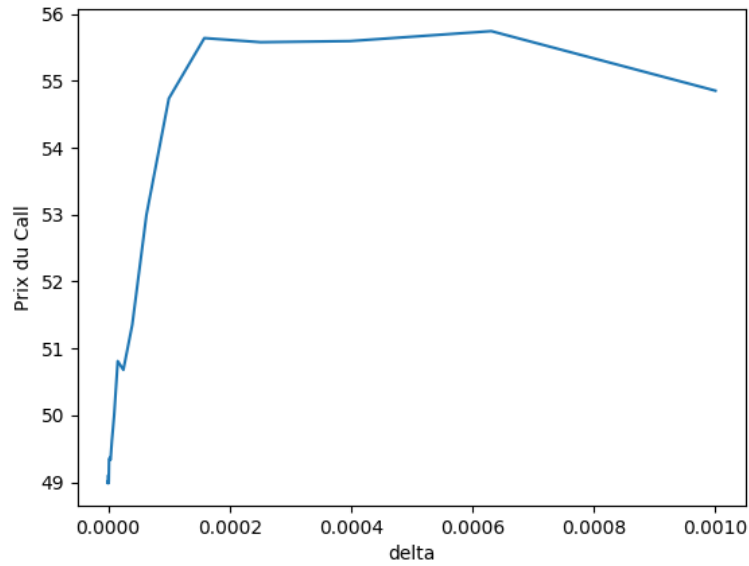


Figure 14: Vitesse de convergence de notre algorithme en fonction de $\delta = 10^{-x}$

On observe que la valeur de notre approximation converge en $\frac{1}{\sqrt{N_{MC}}}$ vers la valeur réelle. En ordonnées nous avons la valeur de $P(T, x) = \mathbb{E}[(K - X_T)_+]$ selon $\delta = 10^{-x}$, le pas de discrétisation.

3.1.4 Illustrer l'effet de l'extrapolation de Romberg

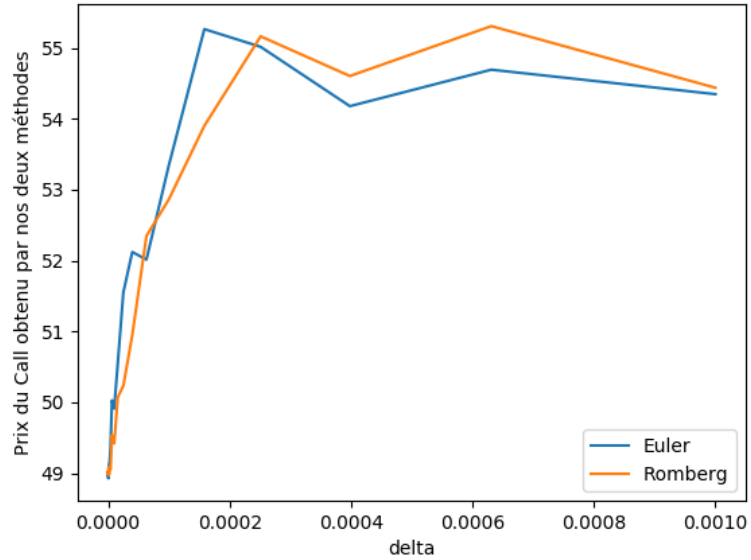


Figure 15: Illustration de l'accélération de convergence par effet de l'extrapolation de Romberg

Nous observons sur cette figure que plus δ est petit, mieux nos méthodes convergent vers la vraie valeur. La méthode qui utilise l'effet d'extrapolation de Romberg converge tout de même plus vite vers la vraie valeur. Nous avons pris comme paramètres $x_0 = 1$, $n = 10000$ (nombre de points de notre schéma), $N_{MC} = 10000$ et $K = 50$.

4 TP3 - Méthodes de réduction de variance

4.1 Partie 1

4.1.1 Rappelez la solution explicite de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 &= x \end{cases}$$

Cette équation a pour solution explicite $S_t = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$.

4.1.2 Expliquez comment évaluer le prix d'un call européen grâce à une méthode de Monte-Carlo

Pour calculer une seule instance du prix d'un call européen, nous devons calculer $S_T = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T)$ puis nous remplaçons W_T par $\sqrt{T} \times G$ où G est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée, réduite.

Ensuite, nous effectuons N_{MC} tirages de $e^{-rT}(S_T - K)_+$ (e^{-rT} représente ici le facteur d'actualisation) que nous sommions et divisons ensuite par N_{MC} . En effet par la loi des grands nombres, $\frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} e^{-rT}(S_T - K)_+$ converge vers $e^{-rT}\mathbb{E}[(S_T - K)_+]$ quand N_{MC} tend vers l'infini. $e^{-rT}\mathbb{E}[(S_T - K)_+]$ est le prix de notre Call que nous cherchons à estimer.

4.1.3 Vous choisirez alors personnellement les paramètres du modèle et donnerez une estimation du prix avec un intervalle de confiance à 95%

Pour $N_{MC} = 10000$ tirages, $S_0 = 80$, $K = 80$, $r = 0.05$, $T = 1$ et $\sigma = 0.3$, nous obtenons le résultat suivant :

```
Prix du Call Européen = 11.25416862525391
Variance = 311.3895695853735
Intervalle de confiance à 95% = [ 10.91 ; 11.6 ]
```

Figure 16: Estimation du prix du call européen, Variance et intervalle de confiance à 95%

4.1.4 Rappelez la formule de parité call-put. Utilisez-la pour proposer un algorithme alternatif à l'évaluation du prix du call

On rappelle que le Call peut aussi se calculer de la façon suivante :

$$Call(t) = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S_T)_+] + S_0 - Ke^{-r(T-t)}$$

$e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S_T)_+]$ représente le Put actualisé. On remplace donc notre ancien call par cette nouvelle formule dans notre algorithme et nous obtenons le résultat suivant :

```
Prix du Call Européen = 11.410770776628576
Variance = 108.27204796826547
Intervalle de confiance à 95% = [ 11.21 ; 11.61 ]
```

Figure 17: Estimation du prix du call européen par la formule de parité Call-Put, Variance et intervalle de confiance à 95%

Pour les mêmes paramètres, nous avons réussi à réduire la variance de manière conséquente.

4.2 Partie 2

On suppose que l'on connaît deux variables aléatoires X et Y telles que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = m$, et $VAR(X), VAR(Y) > 0$.

On suppose également que $\mathbb{P}(X \neq Y) > 0$. Le but de cette partie est d'estimer m .

On note $Z = X - Y$ et $X^\lambda = X - \lambda Z$

4.2.1 Évaluez $\mathbb{E}[X^\lambda]$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^\lambda] &= \mathbb{E}[X] - \lambda \mathbb{E}[Z] \\ &= \mathbb{E}[X] - \lambda \mathbb{E}[X] + \lambda \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

et comme $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, donc

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[X] \\ &= m \end{aligned}$$

4.2.2 Évaluez $Var(X^\lambda)$

On a :

$$\begin{aligned} Var(X^\lambda) &= \mathbb{E}[(X - \lambda Z)^2] - (\mathbb{E}[X - \lambda Z])^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2\lambda XZ + \lambda^2 Z^2] - m^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - m^2 - 2\lambda \mathbb{E}[XZ] + \lambda^2 \mathbb{E}[Z^2] \\ &= Var(X) - 2\lambda cov(X, Z) + \lambda^2 Var(Z) \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}[Z]=0$

4.2.3 Trouvez la valeur λ_{min} qui minimise $Var(X^\lambda)$. Donnez la variance correspondante σ_{min}^2

En réécrivant $Var(X^\lambda)$ comme un polynôme du second degré en λ on obtient :

$$Var(X^\lambda) = Var(Z)\lambda^2 - 2cov(X, Z)\lambda + Var(X)$$

On en déduit aisément que :

$$\lambda_{min} = \frac{cov(X, Z)}{Var(Z)}$$

En effet, $\frac{-b}{2a}$ minimise un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ possédant au moins une solution et où $a > 0$. En remplaçant λ par λ_{min} dans l'expression de $Var(X^\lambda)$, on obtient :

$$\sigma_{min}^2 = Var(X) - \frac{cov(X, Z)^2}{Var(Z)}$$

On définit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{N_{MC}} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} Z_i^2 \\ B_{N_{MC}} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} X_i Z_i \\ \lambda_{N_{MC}} = \frac{B_{N_{MC}}}{A_{N_{MC}}} \end{array} \right.$$

4.2.4 Donnez les comportements asymptotiques de $A_{N_{MC}}$, $B_{N_{MC}}$ et $\lambda_{N_{MC}}$

Par la loi des grands nombres, $A_{N_{MC}}$ converge vers $\mathbb{E}[Z^2]$ presque sûrement. C'est-à-dire vers $Var(Z)$.

Par le même raisonnement, on déduit que $B_{N_{MC}}$ converge vers $cov(X, Z)$ presque sûrement.

Enfin on conclut que $\lambda_{N_{MC}}$ converge vers λ_{min} .

On considère l'estimateur de m :

$$\hat{m}^{N_{MC}} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} X_i^{\lambda_{N_{MC}}}$$

4.2.5 Donnez la limite de $\hat{m}^{N_{MC}}$. Vous préciserez le type de convergence

$\hat{m}^{N_{MC}}$ converge vers m de façon presque sûre. En effet, à la question 5) nous avons établi que $\mathbb{E}[X^\lambda] = m$. Or $\hat{m}^{N_{MC}}$ converge vers $\mathbb{E}[X^\lambda]$.

4.2.6 Donnez la limite de $\sqrt{N_{MC}}(\hat{m}^{N_{MC}} - m)$

Par le théorème central limite (TCL) nous pouvons dire que $\frac{\sqrt{N_{MC}}}{\sigma_{min}^2}(\hat{m}^{N_{MC}} - m)$ converge presque sûrement en loi vers une loi normale centrée réduite, par la loi des grands nombres. On en déduit simplement que $\sqrt{N_{MC}}(\hat{m}^{N_{MC}} - m)$ converge vers $\mathcal{N}(0, \sigma_{min}^2)$, loi normale.

On applique numériquement cette méthode pour évaluer d'une autre manière le prix du Call estimé dans la partie 1. On pose :

$$X = e^{-rT}(S_T - K)_+ \text{ et } Y = x - Ke^{-rT} + e^{-rT}(K - S_T)_+$$

4.2.7 Vous évaluez la variance de votre estimateur pour quelques valeurs de λ

Pour $S_0 = 80$, $r = 0.05$, $K = 80$, $T = 1$, $\sigma = 0.3$, $\lambda = 0.67$ et $N_{MC} = 10000$, on observe que la variance est drastiquement réduite :

```
lambdaNMC= 0.6741398235713253
VAR(X)= 328.45466533240534
VAR(X^lambda)= 47.16828063153869
```

Figure 18: Comparaison des variances de X et $X^{\lambda_{N_{MC}}}$

En faisant varier λ , il semble bien que notre λ_{min} à l'origine de notre σ_{min}^2 soit proche de λ_{NMC} comme observé sur ce graphe :

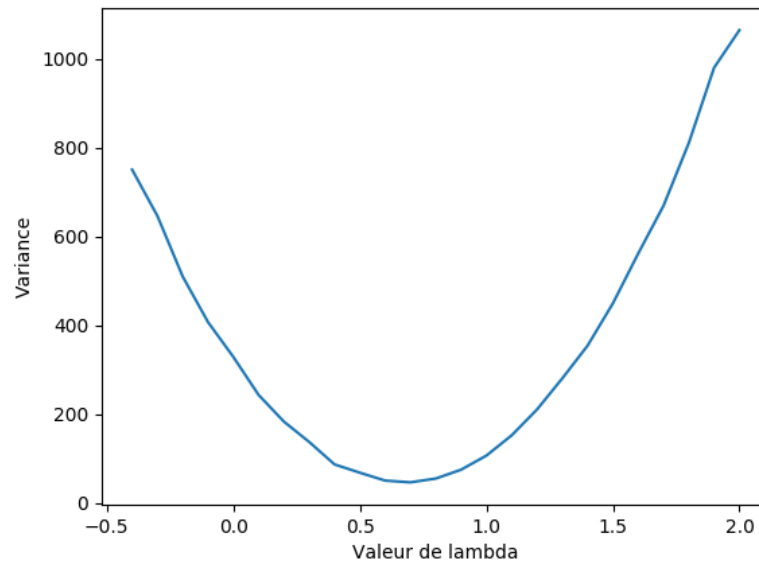


Figure 19: Comparaison des variances de X^λ selon λ

On observe bien que la variance est minimale pour un λ donné. En l'occurrence, ici, λ_{min} est autour de 0,67.

4.2.8 Illustrez dans ce cas la réponse à la question 10)

La convergence de $\hat{m}^{N_{MC}}$ vers m selon l'augmentation de N_{MC} prend la forme d'une gaussienne penchée de 90 degrés de paramètre $\sigma^2 = \sigma_{min}^2$ comme illustré ci-dessous. Ceci confirme le théorème central limite.

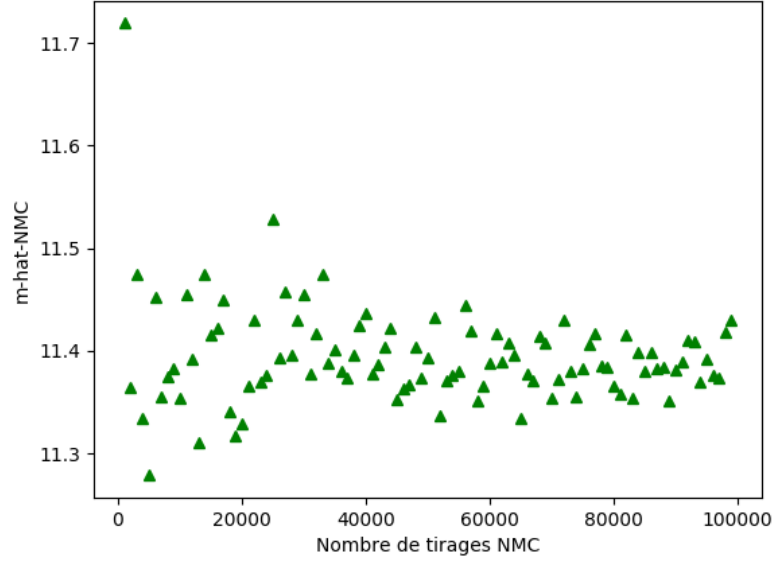


Figure 20: Convergence de \hat{m}^{NMC} vers m

4.3 Partie 3 : Fonction d'importance

Soit G une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite en dimension 1. On cherche à évaluer la quantité $\mathbb{E}[\psi(G)]$.

4.3.1 Montrer que $\mathbb{E}[\psi(G)] = \mathbb{E}[\psi(a + G)\exp(-aG - \frac{a^2}{2})]$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi(G)] &= \int \psi(\theta) f_G(\theta) d\theta \\ &= \int \psi(\theta) \frac{f_G(\theta)}{f_H(\theta)} f_H(\theta) d\theta \\ &= \mathbb{E}[\psi(H) \frac{f_G(\theta)}{f_H(\theta)}]\end{aligned}$$

où $f_G(\theta)d\theta$ et $f_H(\theta)d\theta$ sont les lois de G et H

On choisit à présent :

$$G \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ et } H \sim \mathcal{N}(a, 1)$$

On obtient respectivement :

$$f_G(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \text{ et } f_H(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-a)^2}{2}}$$

On retrouve donc :

$$\frac{f_G(\theta)}{f_H(\theta)} = \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} + \frac{(\theta-a)^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{a^2}{2} - \theta a\right)$$

Et donc, dans notre cas gaussien :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi(G)] &= \mathbb{E}[\psi(H) \exp(\frac{a^2}{2} - aH)] \\ &= \mathbb{E}[\psi(a + G) \exp(\frac{a^2}{2} - a(a + G))] \\ &= \mathbb{E}[\psi(a + G) \exp(-\frac{a^2}{2} - aG)] \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

4.3.2 En déduire une méthode de réduction de variance pour le calcul de $\mathbb{E}[\psi(G)]$. Vous illustrerez numériquement avec la fonction ψ de votre choix.

Nous choisissons la fonction $\psi(x) = e^x + 1$. Pour $a = 1$, et $N_{MC} = 10000$ tirages, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{VAR}(G) &= 4.972793869105239 \\ \text{VAR}(H) &= 1.7257847526141743 \end{aligned}$$

Figure 21: Observation de la réduction de variance par fonction d'importance

Nous observons à nouveau une diminution conséquente de la variance.

4.3.3 Vous appliquerez ensuite cette méthode pour le calcul du Call avec les mêmes paramètres qu'à la question 3)

Pour $S_0 = 80$, $r = 0.05$, $K = 80$, $T = 1$, $\sigma = 0.3$, $a = 1$ et $N_{MC} = 10000$ tirages, on observe que la variance est drastiquement réduite d'un facteur 10 :

```
VAR_G = 322.9  
VAR_(a+G) = 35.14
```

Figure 22: Observation de la réduction de variance par fonction d'importance appliqué au cas du prix du Call

Comment choisir le bon paramètre a ? Nous affichons graphiquement la valeur de la variance en fonction du paramètre a :

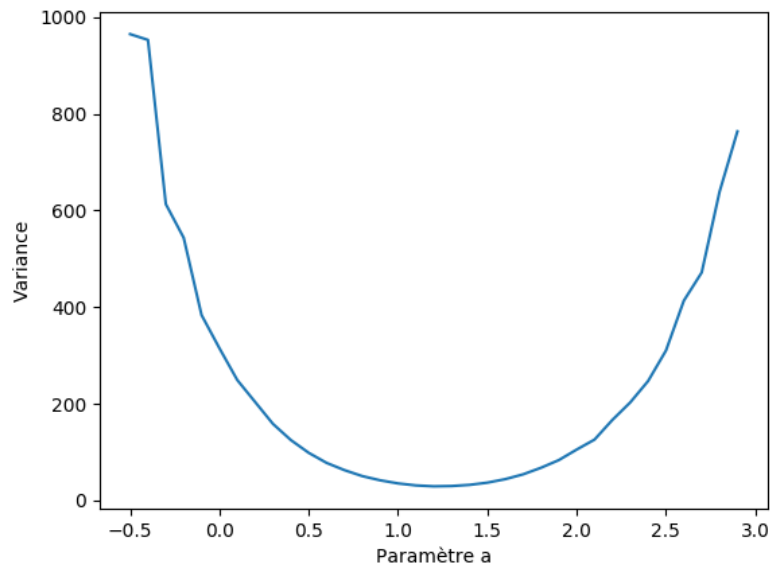


Figure 23: Recherche du a optimal pour obtenir la plus petite variance possible

D'où notre choix de $a = 1$.

4.4 Partie 4 : Variable antithétique

Soit G une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite en dimension 1. On cherche toujours à évaluer la quantité $\mathbb{E}[\psi(G)]$.

4.4.1 Montrer que : $\mathbb{E}[\psi(G)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\psi(G) + \psi(-G)]$

Pour $G \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors $-G \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ par symétrie d'une gaussienne. Donc pour toute fonction ψ on en déduit que $\mathbb{E}[\psi(G)] = \mathbb{E}[\psi(-G)]$. Le reste de la démonstration est trivial :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi(G)] &= \mathbb{E}[\psi(-G)] \\ \mathbb{E}[\psi(G)] + \mathbb{E}[\psi(G)] &= \mathbb{E}[\psi(-G)] + \mathbb{E}[\psi(G)] \\ 2\mathbb{E}[\psi(G)] &= \mathbb{E}[\psi(G) + \psi(-G)]\end{aligned}$$

et enfin :

$$\mathbb{E}[\psi(G)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\psi(G) + \psi(-G)]$$

4.4.2 En déduire une méthode de réduction de variance pour le calcul de $\mathbb{E}[\psi(G)]$. Vous illustrerez numériquement avec la fonction ψ de votre choix.

Comme précédemment, nous choisissons $\psi(x) = e^x + 1$. Pour $N_{MC} = 10000$ tirages on observe le résultat suivant :

```
VAR_normale = 4.913053824981536
VAR_antithe = 1.6246456110874115
```

Figure 24: Comparaison entre les variances de $\psi(G)$ et de $\frac{1}{2}[\psi(G) + \psi(-G)]$

Une fois de plus, une claire réduction de la variance est observée.

4.4.3 Vous appliquerez ensuite cette méthode pour le calcul du Call avec les mêmes paramètres qu'à la question 3)

Pour $S_0 = 80$, $r = 0.05$, $K = 80$, $T = 1$, $\sigma = 0.3$ et $N_{MC} = 10000$ tirages, on a :

```
VAR_normale = 296.116091007772  
VAR_antithe = 93.84368882860232
```

Figure 25: Comparaison entre les variances du prix du Call par un calcul normal et par influence de variables antithétiques.

4.5 Conclusion

4.5.1 En combinant astucieusement les différentes méthodes étudiées dans les parties précédentes, vous proposerez une méthode efficace de calcul du prix de call

Nous combinons les méthodes vues de la sorte : Premièrement, nous changeons notre formule du call et la remplaçons par $X - \lambda Y$ avec X la formule du prix du call et Y la formule du prix du call obtenue par la formule de la parité call-put : $e^{-rT}(K - S_T)_+ + S_0 - Ke^{-rT}$. $\psi(G)$ n'est plus $e^{-rT}(S_T - K)_+$ mais devient :

$$\psi(G) = X(G) - \lambda Z(G) \text{ avec } Z(G) = X(G) - Y(G)$$

Puis nous cherchons un a optimal pour notre fonction d'importance :

$$\hat{\psi}(G) = \psi(a + G) \exp(-aG - \frac{a^2}{2})$$

Ensuite nous profitons de la symétrie d'une gaussienne pour définir une nouvelle fonction $\tilde{\psi}$:

$$\tilde{\psi}(G) = \frac{1}{2}(\hat{\psi}(G) + \hat{\psi}(-G))$$

Après avoir cherché les paramètres λ et a qui permettent de réduire le plus la variance ($S_0 = 80$, $r = 0.05$, $K = 80$, $T = 1$, $\sigma = 0.3$, $\lambda = 1.11$, $a = -0.29$), pour $N_{MC} = 10000$ tirages nous obtenons :

```
VAR1 = 329.29405064450197
VAR2 = 1.6481277480272822
```

Figure 26: Comparaison de la variance avant et après méthodes de réduction de variance

La variance obtenue après l'algorithme combinant les méthodes de réduction de variance constitue 0.49% de la première !

Je tiens à noter toutefois que nous parvenons à obtenir une variance encore plus faible si nous n'incorporons pas dans l'algorithme la méthode qui transforme X en X^λ . En effet, pour des paramètres identiques et $a = -0.5$, on obtient :

```
VAR1 = 332.8078145580928
VAR2 = 0.43039968923137284
```

Soit 0.13% de la première.

4.5.2 Gain en temps de calcul

```
Temps d'execution Call Normal : 0.138 secondes
Produit VAR*Temps_execution = 62.97
Temps d'execution Variance Réduite : 0.385 secondes
Produit VAR*Temps_execution = 0.655
```

Figure 27: Comparaison des temps d'exécution et des produits $\sigma^2\tau$

On remarque que le temps d'exécution est 3 fois plus long pour l'algorithme de réduction de variance, mais par contre, le produit $\sigma^2\tau$ est 100 fois plus petit. Nous obtenons un gain en efficacité très conséquent. Ces chiffres permettent de conclure quant à l'importance des méthodes de réduction de variance.

5 Conclusion

Ces trois TP nous ont permis de nous familiariser avec des outils de génération de nombres aléatoires. En effet, il a été question dans un premier temps de jouer avec notre générateur afin de comprendre les mécanismes de générations de nombres puis d'apprendre à convertir une loi uniforme en d'autres lois, telle que la loi exponentielle, la loi de Bernoulli, ou encore, de façon plus importante pour les TPs suivants, une loi normale.

Il a été question dans un second temps d'apprendre à résoudre une équation différentielle stochastique à l'aide d'un schéma d'Euler, par discrétisation des étapes de calcul. Nous avons également observé comment nous pouvions faire converger notre approximation plus vite par l'effet d'extrapolation de Romberg.

Enfin, toujours dans un souci de gain d'efficacité, nous avons découvert et travaillé sur les différentes méthodes permettant de réduire la variance lors du calcul du prix d'un Call. De loin le plus intéressant et le plus chronophage des trois TP, celui-ci nous a permis de mettre en évidence l'importance de la mise en place du bon algorithme, et l'importance de la réduction des erreurs. Ces notions resteront présentes tout au long de nos carrières d'ingénieurs.