1 Messtechnik – Einführung

1.1 Aufgabe und Gegenstand der Messtechnik

1.1.1 Wozu Messen?

Messen ist fachgerechtes Einsetzen von Messinstrumenten und Messmethoden und zielgerichtetes, nachvollziehbares Verarbeiten der Ergebnisse.

Wer misst will

A) etwas untersuchen → Basis schaffen für das Aufstellen einer Hypothese

B) etwas beweisen → Belegen oder Widerlegen einer Hypothese

C) etwas wissen, um darauf zu reagieren → Regelung, Feedback

Das erfordert immer strukturiertes Vorgehen und Sorgfalt in Durchführung und Ergebnisverarbeitung.

Messen ist die grundlegende Methode der Wissenschaft.

1.1.2 Was wird gemessen?

Beispiele für das durch A) bis C) motivierte Messen finden sich auf allen Gebieten:

Untersuchen / Beweisen (A + B):

- Meinungsumfragen;
- Forschungslabor: Test oder Präzisieren einer Hypothese,,Unterstützung für eine Theorie;
- Entwicklungslabor: Funktionsprüfung von Prototypen;
- Fertigung: Qualitätssicherung, Produktkontrolle (Prüffeld) …

Prozessbezogenes Messen (C):

- Regelkreise: Raumtemperatur, Einparkhilfe, Bioreaktor, Braukessel, … ;
- Produktionsplanung: Bestandserfassung, Produktverfolgung;
- Workload Balancing bei Server-Clustern in Rechenzentren;
- …

Beliebig fortsetzbar!

Messtechnische Methoden kommen nicht nur in der Technik zum Einsatz sondern **in allen Disziplinen** und überall, wo Daten erhoben werden.

1.2 Grundbegriffe

1.2.1 Messen heißt Vergleichen

Ein **Messwert** ist die Darstellung einer physikalischen Größe als Vielfaches einer Einheit, die durch internationale Vereinbarung festgelegt und durch ein **Messnormal** gegeben ist. Er ergibt sich also aus dem Vergleich der Größe mit einer **Maßverkörperung** dieser Einheit, die in möglichst guter Übereinstimmung mit dem Normal hergestellt wurde. Anschaulich z. B.: Längenmessung mit einem Lineal.

Normale werden durch staatliche Institutionen festgelegt bzw. bereitgestellt, in Deutschland durch die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) und den Deutschen Kalibrierdienst (DKD). Ein Beispiel ist die Zeit, die die PTB in Braunschweig mit mehreren "Atomuhren" bestimmt. Stoppuhren, Quarztimer u. ä. sind Maßverkörperungen der Messgröße "Zeit". Ihre Genauigkeit wird durch Vergleich mit dem Normal der PTB bestimmt.

Die folgende Abbildung zeigt am Beispiel der Längenmessung den Bezug betrieblich eingesetzter Messeinrichtungen zu dem zugehörigen Normal: **"Kette der Rückführung"**.

Seit dem 19. Jahrhundert haben sich Parallelendmaße als Maßverkörperungen etabliert, mit denen sich bis heute eine Vielzahl von Längenmessmitteln kalibrieren lassen. Mit einem 103-teiligen Parallelendmaßsatz aus Stahl lassen sich durch Kombination von Endmaßen über 20.000 Maße zwischen 1 mm und 201 mm mit einer Stufung von 0,005 mm realisieren.

Die Länge von Parallelendmaßen lässt sich, wie oben beschrieben, mittels optischer Interferometrie auf die SI-Einheit Meter zurückführen. Die genauesten Parallelendmaße dienen als Bezugsnormale in mechanischen Unterschiedsmessungen, die als Dienstleistung von akkreditierten Kalibrierlaboratorien für Längenmessung angeboten werden.

Bild 18:
Parallelendmaßsatz aus Stahl, 103-teilig

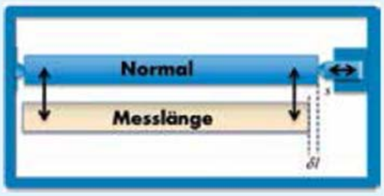


Bild 19:
Prinzip der mechanischen Unterschiedsmessungen von Parallelendmaßen

Bild 20:
Kette der Rückführung auf die SI-Einheit Meter am Beispiel von Parallelendmaßen, DAkkS: Deutsche Akkreditierungsstelle, NMI: Nationales Metrologieinstitut (in Deutschland die PTB)

Messen ist also der experimentelle Vorgang, bei dem eine Messgröße mit einer Maßverkörperung verglichen und auf diese Weise ein Messwert bestimmt wird.

Das **Messergebnis** kann der Messwert selbst sein, ein aus diesem abgeleiteter, berechneter Wert oder eine Verknüpfung oder der Verlauf mehrerer Messwerte.

Jede Messung ist mit einer **Messabweichung** (auch "Messfehler") behaftet, die sich durch Präzisions-Messverfahren zwar verringern, aber nie ganz vermeiden lässt.

Zu einem Messergebnis gehört deshalb immer die Angabe der **Messunsicherheit**.

Messreihen, d. h. mehrere Messwerte, die sukzessiv am gleichen Objekt gewonnen werden, liefern einen Werteverlauf oder mehrere Messwerte für ein und dieselbe Größe. Wird aus N Messungen einer bestimmten Größe ein **Mittelwert** gebildet, so ist dessen Messunsicherheit gegenüber der Einzelmessung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ geringer (**Kapitel 6**).

1.2.2 Das SI-Einheitensystem

Die Darstellung von Messwerten und Messergebnissen erfolgt heute im Internationalen Einheitensystem (SI, 1960 festgelegt).

Es fußt auf den **SI-Basiseinheiten**

Länge	m	Meter
Zeit	sec	Sekunde
Masse	kg	Kilogramm
Elektrische Stromstärke	A	Ampere
Temperatur	K	Kelvin
Stoffmenge	mol	Mol
Lichtstärke	cd	Candela

Am **20.5.2019 (Weltmetrologietag)** traten für die obigen Einheiten **neue Definitionen** in Kraft, die vollständig auf Naturkonstanten basieren. So wird z. B. das Kilogramm nun nicht mehr durch einen Prototypen, das "Urkilogramm", definiert, sondern unter anderem durch das Planck'sche Wirkungsquantum h. Siehe auch

https://www.ptb.de/cms/de/forschung-entwicklung/forschung-zum-neuen-si.html

(Die wichtigsten Informationen, auch eine Posterdarstellung, sind als PDF-Dokumente im Ordner "Das neue SI-Einheitensystem" in der ELMESS-AULIS-Gruppe verfügbar.)

Kilogramm

Das Kilogramm, Einheitenzeichen kg, ist die SI-Einheit der Masse. Es ist definiert, indem für die Planck-Konstante h der Zahlenwert $6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit J s, die gleich kg m² s⁻¹ ist, wobei der Meter und die Sekunde mittels c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Diese Definition gibt h den Wert $6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ kg m² s⁻¹. Löst man diese Beziehung nach der Einheit kg auf, so ergibt sich:

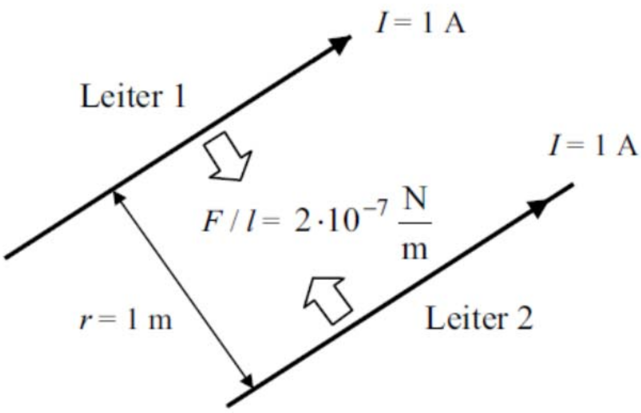
$$1\,\mathrm{kg} = \left(\frac{h}{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}}\right) \mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}$$

$$= \frac{(299\,792\,458)^2}{(6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34})\,(9\,192\,631\,770)} \frac{h\,\Delta\nu}{c^2} \approx 1{,}475\,5214 \cdot 10^{40} \frac{h\,\Delta\nu}{c^2}$$

Das heißt, die Einheit kg wird mit der Wirkung (Einheit: kg m² s⁻¹) verknüpft, einer physikalischen Größe in der theoretischen Physik. Zusammen mit der Definition für die Sekunde und den Meter ergibt sich die Definition für das Kilogramm als Funktion des Planck'schen Wirkungsquantums h.

Beispiel:

Einheit der Stromstärke – alt / neu



Ampere

Beispiel/Übung (Umrechnen von Einheiten)

Bei einem Radrennen bringt eine Radfahrerin bei $120\ \mathrm{U/min}$ ein Drehmoment von $\mathrm{M} = 20\ \mathrm{Nm}$ in die Pedale.

a) Welche mittlere Leistung $\mathrm{P} = \mathrm{M} \cdot \omega$ bringt sie dabei auf? (Angabe in Watt)

b) Sie benötigt für die Strecke exakt eine Stunde. Zum Ausgleich der eingesetzten Energie muss die Fahrerin das Achtfache davon in Form von Nudeln wieder zu sich nehmen. Wieviel Gramm sind das, wenn der Brennwert von Nudeln mit 6,65 kJ/g angegeben wird?

1.3 Übungen "Begriffe, SI-Einheiten"

1.3.1 SI-Basiseinheiten

Recherche unter http://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44.html

a) Die "Atomuhren" der PTB sind das deutsche Normal für die Messung der Zeit. Welche andere Messgröße leitet sich unmittelbar aus der Zeit ab? Hinweis: siehe Bezeichnung des zuständigen Fachbereichs der PTB.

b) Welche Definition der SI-Einheit für die Strecke gab es früher? Warum musste sie ersetzt werden? Wie lautet sie jetzt?

c) Welche Naturkonstanten – neben der Cäsium-Strahlungsfrequenz, der Lichtgeschwindigkeit und dem photometrischen Strahlungsäquivalent K_{cd} – definieren heute die Basiseinheiten des SI (Kürzel und volle Bezeichnung angeben).

d) Welche Rolle spielt die Zahl 9.192.631.770 für die Länge einer Strecke von 1000 m?

e) Wie wird die unten in Übung 1.3.3 verwendete Einheit für den Druck (= Kraft pro Fläche), "1 mbar", in SI-Einheiten umgerechnet?

1.3.2 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen I

a) Geben Sie 1 J (Joule), 1 V (Volt), 1 H (Henry) in SI-Basiseinheiten an.

b) Ein Kran hebt das Rotorblatt einer Windenergieanlage (Gewicht: 8 t) 80 m hoch. Welche elektrische Energie ist bei Vernachlässigung von Reibungs- und sonstigen Verlusten für den Antriebsmotor mindestens erforderlich? (Angabe in kWh!)

1.3.3 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen II

An einem Wärmetauscher tritt bei einem Volumenstrom von $q_V = 10{,}8$ m³/h eine Druckdifferenz (Druckverlust) von $\Delta p = 200$ mbar auf.

a) Geben Sie die entsprechende von der Pumpe aufzubringende Leistung $P = q_V \cdot \Delta p$ in Nm/sec an.

b) Wie groß ist bei ununterbrochenem Dauerbetrieb die pro Tag eingesetzte elektrische Energie (in kWh), wenn die Pumpe mit einem Wirkungsgrad von 40 % arbeitet?

2 Auswertung von Messdaten

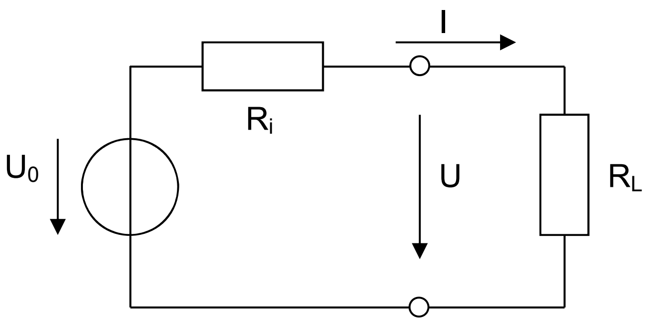
2.1 Messreihendarstellung, Regression und Parameterbestimmung

2.1.1 Beispiel "Belastungskennlinie"

Die Belastungskennlinie ist kennzeichnend für die Qualität einer Spannungsquelle. Aus ihr lassen sich die Leerlaufspannung, der Innenwiderstand und der Kurzschlussstrom entnehmen.

Messtechnisch wird die Belastungskennlinie bestimmt, indem eine variable Last an die Klemmen der Spannungsquelle angeschlossen wird. Durch Verändern der Last werden unterschiedliche Lastströme eingestellt und die jeweils zugehörigen Klemmenspannungen der Quelle gemessen.

Messschaltung und beispielhafte Messreihe:



Laststrom I [A]	Spannung U [V]
0,4	13,9
0,8	13,6
1,2	13,4
2,0	13,3
3,0	12,7
4,5	12,3

Der Schaltung entnimmt man die Gleichung

$U = U_0 - R_i \cdot I$

Bei der graphischen Darstellung wird man die Messwerte also auf einer Geraden

$U(I) = m \cdot I + b$

erwarten. Dabei ist die Steigung gleich dem negativen Innenwiderstand

$m = -R_i$ bzw. $R_i = -m$

und der y-Achsabschnitt gleich der Leerlaufspannung

$U_0 = b$.

Theoretisch genügen schon zwei Messungen für die Bestimmung einer Geradengleichung. Aber bei jeder praktischen Messung weichen die Messwerte vom idealen Verlauf ab. Die Aufgabe ist dann, eine Gerade zu suchen, die "irgendwie bestmöglich" zu den aufgenommenen Messwerten passt.

Dazu bildet man die Differenzen zwischen den gemessenen Spannungen U_i und den Spannungswerten, die die Geradengleichung bei dem entsprechenden Strom I_i liefert, also

$$\Delta U_i = U_i - (m \cdot I_i + b)$$

m und b werden dann so bestimmt, dass

$$\sum_i (\Delta U_i)^2$$

also die Summe der Quadrate dieser Differenzen minimal wird. Dieses Verfahren heißt lineare Regression und die so bestimmte Gerade heißt **Ausgleichsgerade**.

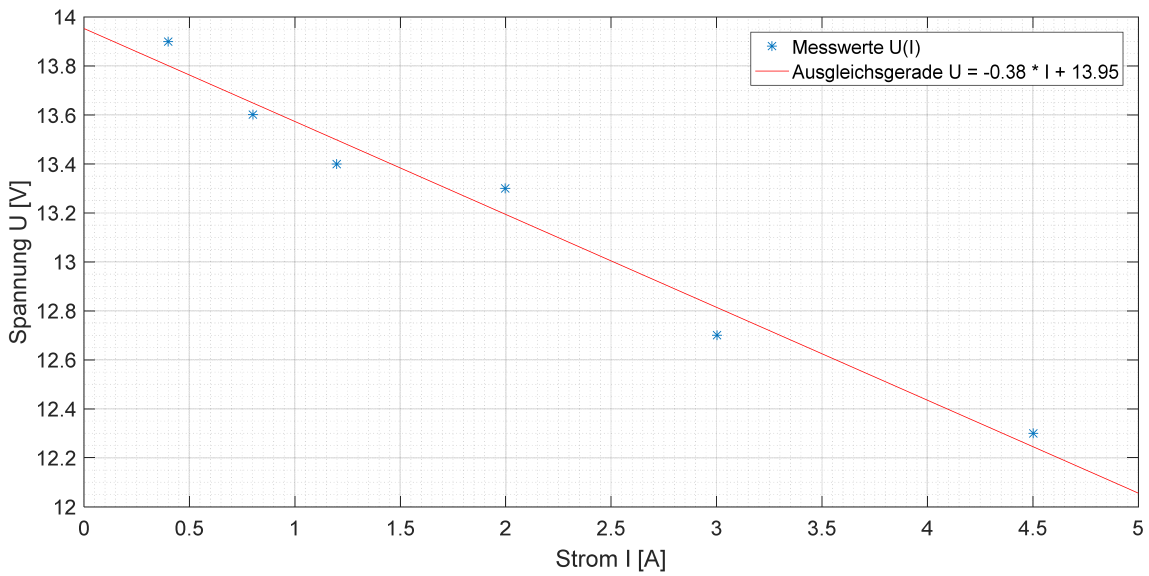
Die Suche nach Funktionen, die Datenreihen bestmöglich approximieren – engl.: "best fit" – ist nicht auf Geraden beschränkt. Mit der MATLAB-Function **`polyfit`** lassen sich Datenreihen beispielsweise durch **beliebige Polynome** annähern.

Zur obigen Messaufgabe lässt sich die Ausgleichsgerade mit folgendem MATLAB-Code berechnen und darstellen.

```
%% Messwertpaare (Strom, Spannung) als Spaltenvektoren
I = [0.4; 0.8; 1.2; 2.0; 3.0; 4.5];
U = [13.9; 13.6; 13.4; 13.3; 12.7; 12.3];

%% Ausgleichsgerade mittels polyfit
p = polyfit(I,U,1);
m = p(1), b = p(2)

%% Grafik
plot(I,U,'*', [0;5],polyval(p,[0;5]),'r')
grid
set(gca,'xminorgrid','on','yminorgrid','on')
xlabel('Strom I [A]'), ylabel('Spannung U [V]')
legend('Messwerte U(I)',sprintf('Ausgleichsgerade U = %0.2f * I + %0.2f',m,b))
```



Aus der Messung ermittelt man auf diese Weise also die Leerlaufspannung $U_0 \approx 13{,}95\,V$ und den Innenwiderstand $R_i \approx 0{,}38\,\Omega$.

Die Streuung der Messwerte um die gesuchte Gerade bedeutet, dass diese Werte – wie alle Messwerte – eine Unsicherheit aufweisen.

Hier: $\Delta U_0 \approx 0{,}08\,V$ und $\Delta R_i \approx 0{,}032\,\Omega$

(Berechnung siehe nächste Seite)

2.1.2 "Best Fit", Lineare Regression, Ausgleichsgerade

Aufgabenstellung:

Sei eine Menge von N Wertepaaren (x_i, y_i) gegeben, wobei weder die x_i noch die y_i jeweils alle untereinander gleich sind.

Bestimme die Koeffizienten des Polynoms

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

so, dass der Graph des Polynoms möglichst gut zu den Wertepaaren "passt".

Das geschieht durch Minimieren des Gütemaßes

$$P = \sum_{i=1}^{N} (y(x_i) - y_i)^2$$

"Methode der kleinsten Quadrate" / "Least Squares" (C. F. Gauss, 1777 – 1855).

1.) Ausgleichsgerade

Für eine Ausgleichsgerade

$$y = mx + b$$

ist dies eine Optimierungsaufgabe mit 2 Variablen mit den Lösungen

$$\boxed{\begin{gathered} m = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \\ b = \bar{y} - m\bar{x} \end{gathered}}$$

Diese Berechnung verwendet die **Mittelwerte**

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \ , \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ ,$$

die **Kovarianz**

$$s_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

und die **Varianz** der x-Werte

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 .$$

Die Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} .$$

Die Ausgleichsgerade hat damit einen starken Bezug zu klassischen Kenngrößen der Statistik.

Unsicherheiten

Da die Wertepaare um die Ausgleichsgerade streuen, werden auch die Steigung und der Achsabschnitt als Zufallsgrößen mit einer Standardabweichung aufgefasst.

Es gilt

$$s_m = \frac{s_y}{s_x}\sqrt{\frac{1 - B_{xy}}{N-2}}$$

$$s_b = s_m\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2} .$$

Dabei werden zusätzlich die Standardabweichung der y-Werte

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$

der **Korrelationskoeffizient**

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

und das **Bestimmtheitsmaß**

$$B = r_{xy}^2$$

benötigt.

2.) Kurvenapproximation durch beliebige Polynome

Die Forderung, dass die Messpunkte $(x_i\,, y_i\,)$ alle die Polynomgleichung erfüllen sollen, liefert ein – in der Regel überbestimmtes – Gleichungssystem.

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_N^n & x_N^{n-1} & \cdots & x_N & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Das lässt sich kurz in der Form

$$X \cdot \vec{a} = \vec{y}$$

schreiben und das Gütemaß lautet dann

$$P = \sum_{i=1}^{N} (y(x_i) - y_i)^2 = (X \cdot \vec{a} - \vec{y})^T (X \cdot \vec{a} - \vec{y})$$

$$= \vec{a}^T \cdot X^T X \cdot \vec{a} - 2\vec{a}^T \cdot X \cdot \vec{y} + \vec{y}^T \vec{y}$$

Durch mehrdimensionales (vektorielles) Ableiten nach $\vec{a}$ und Nullsetzen erhält man für den optimalen Koeffizientenvektor das (eindeutig lösbare) Gleichungssystem

$$X^T X \cdot \vec{a} = X^T \vec{y}\,.$$

Diese Methode benutzt zum Beispiel die MATLAB-Funktion `polyfit`.

Für das Polynom 1. Ordnung liefert diese Rechnung die Parameter der Ausgleichsgerade wie oben.

2.1.3 Approximation von Messreihen durch allgemeine Funktionen

Viele Zusammenhänge lassen sich nicht sinnvoll durch Polynome annähern. Man kann dann auch andere Funktionsansätze wählen und die Parameter durch numerische Optimierung so bestimmen, dass die Funktion die Menge der Wertepaare im Sinne eines "best fit" möglichst gut annähert.

Beispiel:

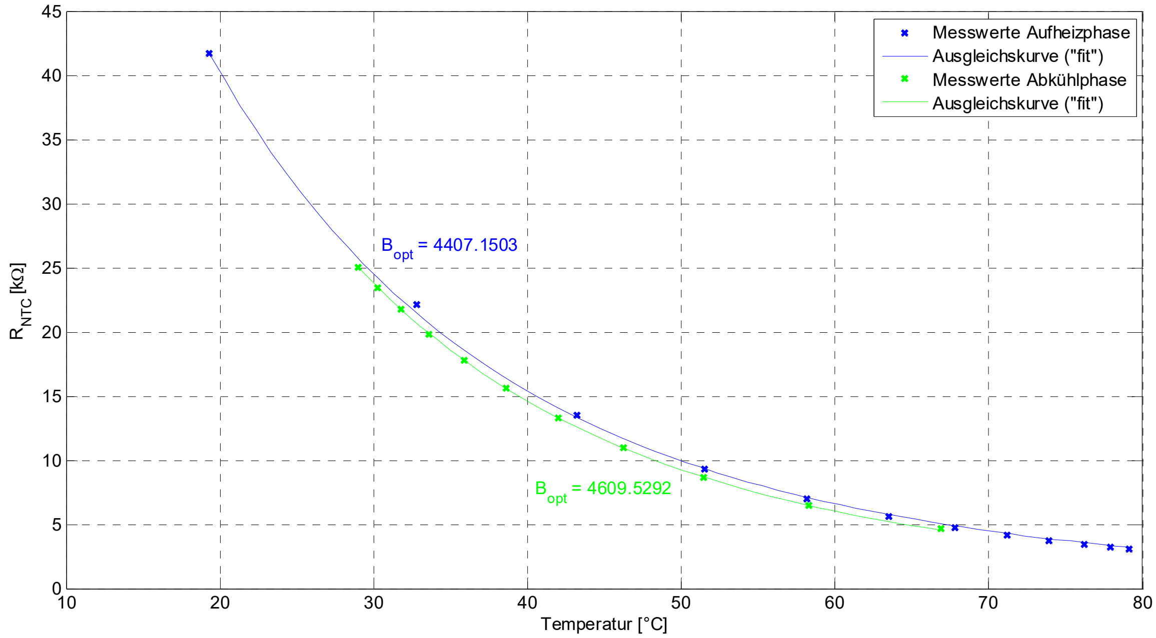
Laut Theorie folgt die Temperaturabhängigkeit eines NTC (Widerstand mit negativem Temperaturkoeffizienten) der Funktion

$$R(T) = R(T_0) \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

mit Angabe der Temperaturen jeweils in Kelvin.

Der Widerstand $R(T_0)$ bei der Temperatur T_0 und eine Reihe weiterer Wertepaare (T_i, R_i) sei gegeben. Dann kann der Parameter B durch Optimierung so bestimmt werden, dass die Funktion $R(T)$ die Wertepaare bestmöglich wiedergibt.

In MATLAB ist dies z. B. mit der Funktion `lsqcurvefit` möglich. Für die obige Aufgabe erhält man bei einer typischen Messreihe die unten stehende Lösung.



Dieses Beispiel (`rntc_lsqfit.m`) und diverse weitere sind in AULIS bereitgestellt.

`lsqcurvefit` bestimmt durch einen Optimierungsalgorithmus die freien Parameter in dem gewählten Funktionsansatz so, dass der Graph der Funktion sich bestmöglich (im Sinne kleinster Abweichungsquadrate) an die Messpunkte anpasst.

Die Optimierung führt umso sicherer zum Erfolg je bessere, vorab geschätzte Startwerte für die gesuchten Parameter angegeben werden.

2.2 Übungen "Ausgleichsgerade, Kurvenapproximation (Fit)"

2.2.1 Erstellen von Diagrammen

Die Datei "Temperaturmessung-10-2008.dat" enthält (fiktive) Messdaten eines Temperaturmessversuchs..

```
# Temperaturmessung 10/2008
# Zeit    T_Diode        R_NTC         T_U
# (min)     (°C)         (OHM)         (C)
   0       19.30       41735.0       21.09
   5       32.79       22142.0       22.63
  10       43.23       13503.0       23.85
```

etc.

Das Format ist für die Speicherung von Messreihen typisch. Jede Zeile besteht aus dem Zeitpunkt und den zu diesem Zeitpunkt erfassten Werten verschiedener Messgrößen. Alle Einträge sind durch Tabulator, Komma, Semikolon oder einfach durch Leerzeichen getrennt. Für jede Messgröße finden sich die aufgenommenen Werte also in einer Spalte der Datei wieder. Am Dateianfang kann es beschreibende Textzeilen geben, die mit einem Kommentarzeichen (//, #, %, …) beginnen.

MATLAB bietet für das Einlesen der Daten die Funktion `textscan.` (In einigen bereitgestellten Beispielen wurde allerdings das ältere `textread` verwendet.)

Übung:

Erzeugen Sie zur oben genannten Datendatei ein Diagramm, in dem die zweite und die vierte Spalte über der Zeit dargestellt werden.

Das Diagramm soll üblichen messtechnischen Anforderungen genügen, also mit **Raster, Achsbeschriftungen und aussagekräftige Legende** (in MATLAB: `xlabel, ylabel, legend` und `grid` oder auch `grid minor`.

2.2.2 "Fit", Ausgleichsfunktion zu einer Messreihe

Aufgabe: Es ist ein Diagramm zu erstellen, in dem der ansteigende Teil des Temperaturverlaufs "T_Diode" dargestellt und durch den Graphen einer Funktion angenähert wird, die dem theoretisch zu erwartenden Verlauf

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + (\vartheta_{end} - \vartheta_0)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

entspricht.

Anmerkungen:

- Dies gehört auch zu den Auswertungen im Labor.
- Eine Lösung dieser Aufgabe in MATLAB finden Sie auf AULIS in "`Theta_lsqfit.m`". Benutzt wird die Funktion `lsqcurvefit` aus der Optimization Toolbox.

2.2.3 Belastungskennlinie, Innenwiderstand

Untersucht wird eine nicht-ideale Spannungsquelle (vergl. Kap. 2.1.1).

a) Warum eignet sich die Formel $R_i = U_0 / I_k$ (Verhältnis von Leerlaufspannung zu Kurzschlussstrom) in der Praxis kaum zur Bestimmung des Innenwiderstands?

b) Wie geht man stattdessen vor, um mit einer minimalen Zahl von Messungen die nötigen Informationen zur Bestimmung des Innenwiderstands zu bekommen? Wie wird der Innenwiderstand dann berechnet?

c) Wenn mehr Messungen vorliegen, ist die Bestimmung des Innenwiderstandes mittels Ausgleichsgerade die Methode der Wahl. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade zur folgenden Messreihe:

   I = 0,2 / 0,3 / 0,5 / 0,7 / 0,8 / 1,0 A

   U = 33 / 31 / 29 / 27 / 25 / 23 V

d) Wie errechnet sich hieraus der Innenwiderstand? Wie groß ist er?

e) Geben Sie ein Maß für die Unsicherheit des berechneten Wertes an.

f) Wie groß ist die Leerlaufspannung? Unsicherheit?

2.2.4 Leerlaufspannung und Innenwiderstand einer Spannungsquelle

An einer Spannungsquelle wird die Spannung bei verschiedenen Strömen wie folgt ermittelt:

Strom I [A]	4	12	16	28
Spannung U [V]	10	8,5	7,5	6

Bestimmen Sie anhand der Ausgleichsgeraden die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand. (Empfehlung zur eigenen Übung: Handrechnung OHNE PC oder Taschenrechner!)

2.2.5 Kurzschlussstrom einer Solarzelle

Eine Solarzelle liefert bei den aufgeführten Bestrahlungsstärken die Kurzschlussströme

E_e [W/m²]	1000	750	500	250	100
I_{SC} [A]	2.5	1.8	1.3	0.6	0.2

a) Welche mittlere Empfindlichkeit in [A/(W/m²)] lässt sich daraus bestimmen?

b) Geben Sie ein Maß für die Unsicherheit dieses Wertes an. (siehe S. 39)

2.2.6 Ausgleichsgerade, Bestimmtheitsmaß, Unsicherheit der Steigung

Ein Messverstärker habe ein Übertragungsverhalten entsprechend der Kennlinie $U_a = 5 \cdot \sin(U_e)$, $0 \leq U_e \leq 1$. Bestimmen Sie U_a bei $U_e = \{0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1\}\,V$.

a) Skizzieren Sie den Verlauf.

b) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade.

c) Vergleichen Sie mit einer geeigneten Berechnung in Matlab

(z. B. Funktion `polyfit`).

d) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß, die statistische Standardabweichung der Steigung absolut und relativ als Maß der Unsicherheit sowie die Unsicherheit des Achsabschnitts.

e) Skizzieren Sie den Verlauf mit Ausgleichsgerade und zeichnen Sie auch die im Rahmen der berechneten Unsicherheiten maximal abweichenden Geraden ein.

2.2.7 Trendfestellung (Korrelation / Signifikanz)

Im Verlauf einer Woche wurden für die Tagesproduktion eines bestimmten Kontaktschalters jeweils folgende Mittelwerte der Schaltabstände registriert:

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6
Schaltweg [µm]	35	32	29	27	31	30

Lässt sich aus dieser Messreihe bereits eine Aussage über einen Trend bezüglich der Veränderung der Schaltabstände dieser Produktion ableiten?

Hinweis: Ein Trend liegt vor, wenn für das Bestimmtheitsmaß $B > 0{,}5$ gilt.

2.3 Auswertung mit Ausgleichsgeraden bei nichtlinearen Zusammenhängen

Ob die Approximation einer Messreihe durch eine Ausgleichsgerade sinnvoll ist, hängt ab vom

- zugrunde liegenden theoretischen Zusammenhang
- vom Ziel der Auswertung.

2.3.1 Abschnittsweise Annäherung durch Ausgleichsgeraden

Ist trotz eines offensichtlich nicht linearen Zusammenhangs eine Geradennäherung gewünscht (z. B. weil bei einer nichtlinearen Sensorkennlinie die Empfindlichkeit des Sensors in einem bestimmten Messbereich gefragt ist), so teilt man die Messreihe geeignet in Abschnitte auf und bestimmt eine Ausgleichsgerade für jeden der Abschnitte. Die Geraden werden dann i. d. R. unterschiedliche Steigung und unterschiedliche Achsabschnitte aufweisen.

2.3.2 Halblogarithmische Darstellung

Der Zeitverlauf der Temperatur bei der Abkühlung eines Bauteils auf die Umgebungstemperatur ϑ_U ist exponentiell abfallend:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta(0) - \vartheta_U) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{1}$$

Diese Temperaturdynamik wird gekennzeichnet durch die Zeitkonstante τ. Wie lässt sich diese aus vorliegenden Messwerten ϑ_i zu Zeitpunkten t_i bestimmen?

1.) Approximation durch eine nach (1) angesetzte Funktion mit Hilfe eines Optimum-Suchverfahrens (z. B. MATLAB `lsqcurvefit`)

2.) Ausgleichsgerade für die halblogarithmisch dargestellte Messreihe

Diese Methoden ersetzen die früher üblichen Skizzen auf halblogarithmischem Papier.

Ausgleichsgerade in der halblogarithmischen Messwertdarstellung

Zu 2.) geht man wie folgt vor:

Man stellt um und dividiert in (1) durch $(\vartheta(0) - \vartheta_U)$, um dimensionslose Größen zu bekommen. Anschließend wird der natürliche Logarithmus gebildet, so dass

$$\ln\left(\frac{\vartheta(t) - \vartheta_U}{\vartheta(0) - \vartheta_U}\right) = \ln\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{1}{\tau} \cdot t$$

Wird also $\ln\left(\frac{\vartheta(t)-\vartheta_U}{\vartheta(0)-\vartheta_U}\right)$ über den Zeitpunkten t_i aufgetragen, so ergeben sich Wertepaare, die theoretisch auf einer Geraden mit der Steigung $m = -1/\tau$ liegen.

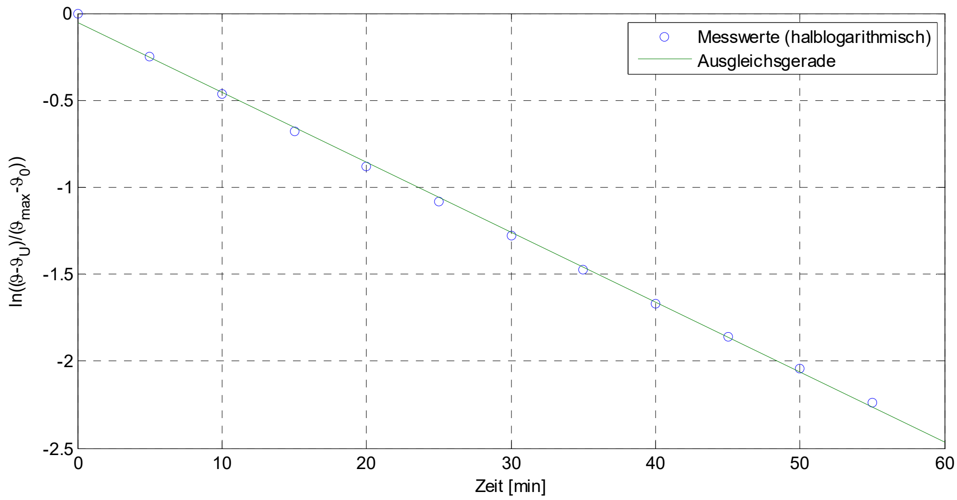
m erhält man durch Berechnung der Ausgleichsgerade. Die Zeitkonstante ergibt sich dann aus $\tau = -1/m$.

Beispiel (MATLAB):

```
y = log((theta-TU) ./ (theta(1)-TU)); % theta = Temperaturmesswerte
p = polyfit(t,y,1);
t_ag = [0; 60]; y_ag = p(1)*t_ag + p(2);
plot(t, y, 'o', t_ag, y_ag, 'g')
tau = -1/p(1)
```

liefert

```
tau =
      24.89
```



2.3.3 Doppelt-logarithmische Darstellung

Hängt eine Messgröße – vermutet oder theoretisch begründet – von einer Potenz einer anderen Größe ab, so ist in der Regel der Exponent dieser Potenz die wesentliche charakterisierende Größe. Er lässt sich mit Hilfe einer Ausgleichsgeraden bestimmen, wenn eine doppelt-logarithmische Darstellung der Größen gewählt wird. Verwendet wird dabei meistens der Zehnerlogarithmus "$\log_{10}$" bzw. "lg".

Beispiel:

Der Windwiderstand beim Fahrradfahren ist geschwindigkeitsabhängig und zwar so, dass er überproportional mit der Geschwindigkeit zunimmt. Es gilt

$$F_{Pedal} = c \cdot v^x$$

wobei c eine Proportionalitätskonstante, v die effektive Windgeschwindigkeit und x der Exponent ist, der aus einer Messreihe ermittelt werden soll.

Durch Logarithmieren erhält man die Geradengleichung

$$\lg(F_{Pedal}) = \lg(c) + x \cdot \lg(v),$$

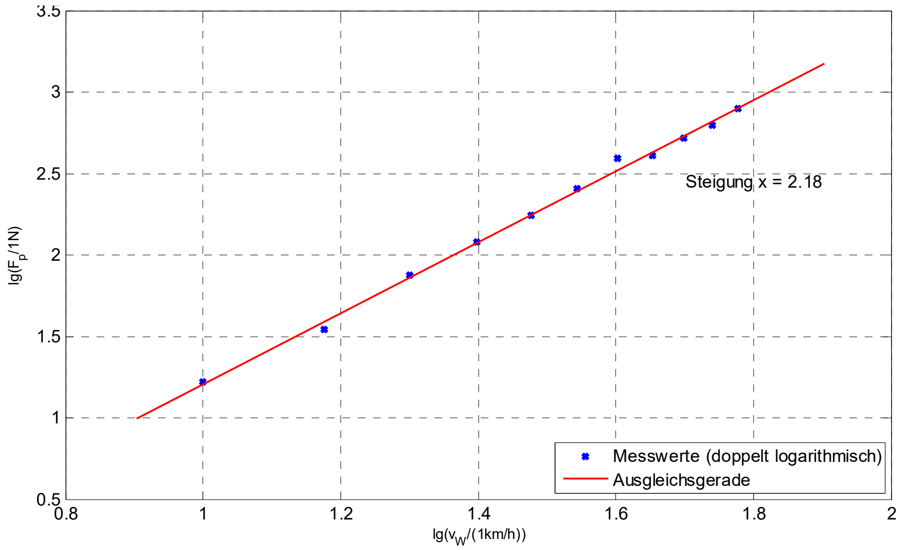
in der die Steigung gleich der gesuchten Potenz x ist (siehe Abbildung unten).

Die Konstante c ergibt sich aus dem Achsabschnitt b der Ausgleichsgerade.

Übung: Wie lautet die Gleichung dafür?

Messreihe:

v	F_P
10.0	16.61
15.0	34.74
20.0	75.36
25.0	119.26
30.0	175.18
35.0	253.56
40.0	393.80
45.0	406.13
50.0	525.20
55.0	622.35
60.0	787.57



2.4 Übungen "Ausgleichsgeraden bei logarithmischer Skalierung"

2.4.1 Zeitkonstante einer Bauteilabkühlung

Die Datei `Temperaturmessung-10-2008.dat` enthält eine Messreihe, in der Spalte 2 den Temperaturverlauf eines Bauteils wiedergibt, das zunächst erhitzt wurde und ab dem Zeitpunkt t = 55 min wieder auf Umgebungstemperatur (T_U = 23 °C) abkühlt.

Bestimmen Sie die Zeitkonstante dieses Abkühlvorgangs mittels einer Ausgleichsgeraden in der halblogarithmischen Darstellung des Temperaturverlaufs.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist "`tau_Bauteil_Lsg.m`"

2.4.2 Parameter B eines NTC

Die Datei `Temperaturmessung-10-2008.dat` enthält in Spalte 3 die Messreihe des Widerstands eines NTC, der zunächst (bis t = 55 min) erhitzt und dann abgekühlt wird. Die zugehörigen Temperaturen sind in Spalte 2 aufgelistet.

Laut Theorie wird die Temperaturabhängigkeit eines NTC beschrieben durch

$R(T) = R(T_0) \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$ (T und T_0 in [K] !)

a) Was muss in einem Diagramm auf der x- und auf der y-Achse aufgetragen werden, damit diese Temperaturabhängigkeit als Gerade mit der Steigung B erscheint?

b) Bestimmen Sie B, indem Sie für die gegebenen Messwerte diese Darstellung erzeugen und die Messpunkte durch eine Ausgleichsgerade approximieren.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist "`B_NTC_fit.m`"

2.4.3 Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers

Für die Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers mit Dimmer erhält man in Abhängigkeit vom Dimmlevel (100% = volle Betriebsspannung) folgende Werte:

D [%]	100	80	60	40	20
Φ_e [W]	51	33	19	10	3

Es wird ein Zusammenhang der Form $\Phi_e = c \cdot D^x$ vermutet. Ermitteln Sie den Exponenten x durch eine Ausgleichsgerade in einer geeigneten grafischen Darstellung der Abhängigkeit beider Größen.

An der Stelle $D = 1$ lässt sich aus dieser Darstellung auch der Koeffizient $c = \Phi_e\ (D = 1)$ entnehmen. Welchen Wert hat c?

(Hinweis zum Umgang mit Prozentwerten: ein Prozentwert von z. B. 80 muss als $D = 0.8$ eingesetzt werden!)

Zusatz: Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie die Parameter c und x direkt aus dem nichtlinearen Funktionsansatz mittels `lsqcurvefit` bestimmen? Wie lassen sich die Unterschiede der beiden Ergebnisse erklären?

2.4.4 Leistung einer Windkraftanlage

An einer Windkraftanlage werden die Windgeschwindigkeit und die ins Netz eingespeiste elektrische Leistung gemessen. Es ergibt sich folgende Messreihe:

v_W [m/s]	3	4	5	6	8	10	12
$P_{el.}$ [kW]	35	80	140	250	600	900	1500

Mit welcher Potenz der Windgeschwindigkeit steigt demnach die Leistung der Windkraftanlage?

Hinweis: Unterstellt wird ein Zusammenhang der Form

$$P = c \cdot v_W^x$$

c und der Exponent x, der hier vorrangig von Interesse ist, sind unbekannt. x ist zu ermitteln. Welche Darstellung (halb- oder doppelt-logarithmisch) ist zu wählen, damit x als Steigung einer Ausgleichsgeraden bestimmt werden kann?

2.4.5 Fischbestand

Der Kabeljau ist durch Überfischung und durch die Erwärmung der Arktis in seinem Bestand bedroht. Nach einem Fangverbot wird erwartet, dass der verbliebene Bestand in der Folge wieder exponentiell anwächst. In den ersten Jahren nach dem Stopp der Kabeljaufischerei werden folgende Bestände ermittelt:

Jahr	0	1	2	3	4
Bestand [Mio]	0.5	0.7	1.2	1.8	2.6

Alle wieviel Jahre darf demnach mit einer Verdoppelung des Bestands gerechnet werden?