6 Wer misst, misst Mist – Messabweichungen, Messunsicherheit

Kein Messwert ohne Messabweichung,

kein Messergebnis ohne Messunsicherheit!

6.1 Normen, Definitionen, Begriffe zur Messunsicherheit

6.1.1 Normen

Festlegungen zu Vorgehensweisen und Begriffen der Messtechnik finden sich in der **DIN 1319, Blatt 1-4**. Dabei behandeln die Blätter 3 und 4 die Themen Messabweichung und Messunsicherheit (Umfang ca. 60 Seiten). Daneben ist international der "GUM"-Leitfaden **"Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement"** gebräuchlich, 1995 vom DIN-Institut unter dem Titel "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" veröffentlicht. Die folgende Tabelle stellt die Gliederung dieser Normwerke gegenüber.

Tabelle 6.1: Gliederung der wesentlichen Normwerke für die Messtechnik [5]

DIN 1319	Teil 1: Grundbegriffe Teil 2: Begriffe für die Anwendungen von Messgeräten Teil 3: Einzelne Messgröße; Messunsicherheit Teil 4: Auswertung von Messungen; Messunsicherheit
GUM	Kapitel 1: Messunsicherheit Kapitel 2: Messabweichungen, Einflüsse und Korrektionen Kapitel 3: Ermittlung der Standardunsicherheit (A und B) Kapitel 4: Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit Kapitel 5: Ermittlung der erweiterten Standardunsicherheit Kapitel 6: Angabe der Unsicherheit

Während es in einigen Details und der Verwendung einiger Begriffe zwischen GUM und DIN-Norm Unterschiede gibt, sind die grundsätzlichen Vorgaben zur Bestimmung und Angabe der Messunsicherheit weitestgehend gleich.

6.1.2 Begriffe

Messwert m

absolute Messabweichung Δm (Abweichung vom wahren Wert m^*)

relative Abweichung $\frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m}}$ (dimensionslos, Angabe meist in %)

(bzw. $\Delta m/m^*$, falls der wahre (oder ein "richtiger") Wert m^* bekannt ist.)

Beispiel: Zur Prüfung eines Ohmmeters wird ein Kalibrierwiderstand von 250 Ω eingesetzt. Dabei wird der Messwert $R = 248{,}6\,\Omega$ angezeigt.

Absolute Abweichung $\Delta R = -1{,}4\,\Omega$,

relative Abweichung $\left|\Delta R / R^*\right| = 1{,}4\,\Omega / 250\,\Omega = 5.6 \cdot 10^{-3} = 0.56\,\%$

Messunsicherheit Δm (wird immer als positiver Wert angegeben)

Da bei jeder Messung Messabweichungen auftreten, muss zu jedem Messwert auch seine Messunsicherheit angegeben werden.

Die Messunsicherheit setzt sich u. a. zusammen aus

- Bauteil- oder Messgerätetoleranzen,
- Mess-Rauschen
- Unsicherheiten der Ablesung.

Messergebnis $\widehat{m} = m \pm \Delta m$

Zusätzlich kann die Wahrscheinlichkeit, mit der sich der wahre Wert in dem hier angegebenen Intervall befindet, berechnet werden. Dieses **Vertrauensniveau** wird in **Kapitel 6.5** behandelt.

6.1.3 Fehlerquellen

Die Bestimmung der Messunsicherheit einer Messung geht aus von der Analyse aller Einflussfaktoren, die bei der Durchführung einer Messung zu Messabweichungen führen können. Beispiele sind in der folgenden Tabelle 2.1 aufgelistet.

Tabelle 2.1: Beispiele typischer Ursachen für Messabweichungen

Maßverkörperung (Sensorelement)	Kennlinienfehler (Nullpunktverschiebung / Offset, Nichtlinearität)
Messgerät	Trägheit (Verzögerungsverhalten), Spiel (Lose)
Messaufbau	Fehler der Signalumsetzung (Verstärkung) in einer Messkette, Übertragungsfehler, Rauschen
Messobjekt	Verformbarkeit bei Dickenmessungen, Fehler der lokalen Temperaturmessung in einem Behälter, dessen Inhalt ungleichmäßige Temperaturverteilung aufweist
Messperson	Parallaxenfehler (nicht-senkrechtes Ablesen eines Zeigerinstruments), Berührung, Stoß, Erschütterung
Umgebung	Temperaturschwankungen, Luftdruck, Luftfeuchte, Strahlung, Staub, elektrische und magnetische Felder

Bei fast allen Messaufgaben sind **Temperatureinflüsse** als Quelle möglicher Messabweichungen zu beachten. Meist wird die Abhängigkeit der interessierenden Größen von der Temperatur dabei durch eine lineare Abhängigkeit berücksichtigt.

So werden z. B. temperaturbedingte Längenänderungen durch den Wärmeausdehnungskoeffizienten α_1 beschrieben:

$$l(\vartheta) = l(\vartheta_0) \cdot \big(1 + \alpha_l(\vartheta - \vartheta_0)\big) .$$

Ebenso geht man oft von einer linearen Abhängigkeit des elektrischen Widerstands von der Temperatur aus, d. h.

$$R(\vartheta) = R(\vartheta_0) \cdot \big(1 + \alpha_R(\vartheta - \vartheta_0)\big).$$

Temperaturkoeffizient

6.1.4 Fehlerarten[1]

Man unterscheidet bei der Bestimmung der Messunsicherheit die folgenden unterschiedlichen Arten von Messabweichungen:

- **bekannte systematische Fehler: $+\Delta m$ oder $-\Delta m$**
- **unbekannte systematische Fehler: $\pm\Delta m$**
- **zufällige Fehler**
- **grobe Fehler.**

systematisch: Fehler liegt im Messaufbau begründet

6.1.5 Grobe Fehler

Beispiele:

Grobe Fehler sind große Abweichungen ("Ausreißer"), die entstehen durch

- Messperson (Bedienfehler, grobe Ablese- bzw. Protokollierungsfehler)
- Messaufbau (z.B. Wackelkontakt, Bauteilversagen)

Maßnahmen:

Grobe Fehler werden aus der Messreihe eliminiert und gehen nicht in die Messunsicherheit ein.

In der digitalen Messdatenverarbeitung geschieht das automatische Erkennen und Eliminieren von Ausreißern in Messreihen durch

a) Plausibilitätsprüfung, z. B. Ausschließen der Werte außerhalb eines „Schlauchs“ der Breite $3s$ um den mittleren Verlauf der Messgröße (s: Standardabweichung)

b) gleitende Medianfilterung (siehe z. B. `doc median` in MATLAB)

Laborbeispiel:

Um grobe Fehler schon während der Messung zu erkennen, sollte **vor der Messung** klar sein, in welcher **Größenordnung** die Messwerte zu erwarten sind! Zusätzlich schafft die frühzeitige, skizzenhafte grafische **Darstellung der Messwerte während der Messung** Klarheit.

Gegebenenfalls hat man dann noch die Möglichkeit, die betreffende Messung zu wiederholen.

[1] Grundsätzlich sollte der Begriff **Messabweichung** verwendet werden. Es hält sich aber hartnäckig auch die (von C. F. Gauß eingeführte) Bezeichnung **"Fehler"**, obwohl dieser Begriff in technischen Systemen das nicht mehr ordnungsgemäße Funktionieren einer Einheit bezeichnet. Auch in diesem Skript wird diese Unterscheidung nicht streng gehandhabt, sondern es werden beide Bezeichnungen verwendet.

6.1.6 Zufällige Messabweichungen

Zufällige Fehler äußern sich in der Streuung der Messwerte, wenn eine Messung unter gleichen Bedingungen mehrfach wiederholt wird.

Sie sind **nicht reproduzierbar.**

Darstellung: $m \pm \Delta m$

Beispiele:

- Messrauschen,
- Unsicherheit der Ablesung

Maßnahmen:

Die Größe der zufälligen Abweichungen ist abzuschätzen (z. B. in Bezug auf die Unsicherheit der Ablesung) oder anhand der statistischen Standardabweichung zu berechnen (siehe Kapitel 6.5). Das Ergebnis geht in die Berechnung der **Messunsicherheit** mit Hilfe der Fehlerfortpflanzungsgesetze ein.

Laborbeispiel:

In allen Versuchen sind Ableseunsicherheiten zu quantifizieren.

Bei der Widerstandsbestimmung mit Hilfe einer Ausgleichsgerade liefert der Betrag der Steigung den Widerstandswert. Die **Standardabweichung der Steigung** kann hier als Maß der Messunsicherheit verwendet werden.

6.1.7 Bekannte systematische Messabweichungen

Fehler, die - bedingt durch den Messaufbau oder das verwendete Messprinzip - in immer gleicher Weise die Messung beeinflussen, heißen systematische Fehler.

Systematische Fehler sind reproduzierbar. Sie können durch Mittelwertbildung mehrerer Werte einer Messreihe **nicht** verringert werden.

Als **bekannte** systematische Fehler bezeichnet man Abweichungen, die hinsichtlich Größe und Vorzeichen (bzw. Richtung) bestimmbar und damit **korrigierbar** sind.

"bekannt" heißt: die Abweichung lässt sich ermitteln

Beispiele: (Sorgfalt und Fachkenntnis erforderlich)

- bekannte Offset- oder Skalenfehler ("Tacho zeigt 5 km/h zuviel"),
- temperaturabhängige Ausdehnung bzw. Widerstandsänderung bei bekannter Temperatur,
- Auswirkungen des Innenwiderstands einer Signalquelle auf die Messung.

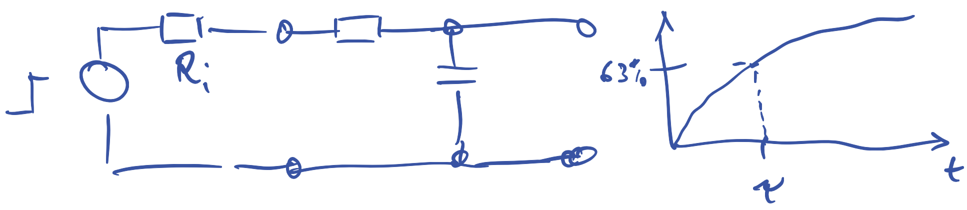
Maßnahmen:

Die Abweichung ist zu bestimmen und **der korrigierte Messwert** ist gemäß

$m' = m + \Delta m$ bzw. $m' = m - \Delta m$

zu berechnen. Der korrigierte Wert liegt statistisch gesehen näher am "wahren Wert" als der unkorrigierte Messwert.

Beispiel aus OSZ und DAQ-USB



$\tau \neq RC$!

$\tau = (R_i + R)C$

$C = \frac{\tau}{R + R_i}$

zur Korrektur des systematischen Fehlers.

6.1.8 Unbekannte systematische Fehler

Unbekannte systematische Fehler sind Messabweichungen mit unbekanntem Vorzeichen und unbekanntem, aber festem, immer gleichem Betrag. Bezüglich des Betrags sind nur obere und untere Schranken bekannt, der sogenannte Toleranzbereich (oder „die Toleranz“).

Unbekannte systematische Fehler heißen auch **Toleranzfehler**.

Darstellung: $m \pm \Delta m$

Beispiele:

- Toleranzen von Widerstandswerten werden meist als relative Unsicherheit in Prozent angegeben. Hieraus werden die Nennwerte (Normreihen) abgeleitet, siehe Anhang A).
- Toleranzangaben von Sensoren und Messgeräten in Datenblättern,
- Wenn bei einer Messung die aktuelle Temperatur nur geschätzt werden kann $\vartheta = \vartheta_U \pm \Delta\vartheta$, so lässt sich die eventuell auftretende temperaturabhängige Messabweichung als zum Teil bekannter und zum Teil unbekannter systematischer Fehler charakterisieren.

Maßnahmen:

Unbekannte systematische Fehler gehen wie die zufälligen Fehler in die Berechnung der **Messunsicherheit** mit Hilfe der Fehlerfortpflanzungsgesetze ein.

Laborbeispiel:

In allen Versuchen sind die in den Datenblättern angegebenen Toleranzen der verwendeten Bauteile und Messgeräte zu ermitteln und ihr Einfluss auf das jeweilige Messergebnis durch Fehlerfortpflanzungsrechnung zu bestimmen.

Zur Toleranz gehört in aller Regel auch ein vom Messbereich abhängiger Anteil, etwa der Anteil "+5D" in einer Angabe "0,2%vM+5D". Auch die Genauigkeitsklasse macht eine solche Angabe ($\Delta m = K/100 \cdot M$, wobei M der Messbereichsendwert ist).

Der Messbereich sollte also nach Möglichkeit immer so gewählt werden, dass der Messwert in der oberen Hälfte – besser: im oberen Drittel – des Messbereichs liegt.

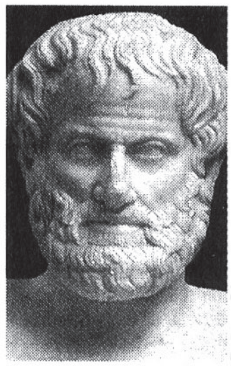
z.B. Ablesung 1002,3 Ω
± 0,1 bei wechselnder Anzeige der letzten Ziffer
Gerätetoleranz: $\Delta R = 0{,}002 \cdot 1002{,}3\,\Omega + 0{,}5\,\Omega$
$= 2{,}5\cancel{046}$
Keine überflüssigen Dezimalstellen mitführen

$\Delta R_{Ges} = \sqrt{0{,}1^2 + 2{,}5^2}\,\Omega \approx 2{,}5\,\Omega$

z.B. K = 1,5 bei Voltmeter im Messbereich 10 V
bedeutet $\Delta U = 0{,}015 \cdot 10\,V = 0{,}15\,V$
unabhängig vom Messwert
z.B. U = 3 V: $\frac{\Delta U}{U} = \frac{0{,}15}{3} = 0{,}05$
$U = 7{,}5\,V$: $\frac{\Delta U}{U} = \frac{0{,}15}{7{,}5} = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02$

6.1.9 Zahl der Dezimalstellen

Bei der Darstellung von Messergebnissen ist die Zahl der Dezimalstellen sinnvoll zu wählen. Sie sollte nicht größer sein, als dies durch die Größenordnung der Messunsicherheit gerechtfertigt ist. Andernfalls wird eine Präzision suggeriert, die tatsächlich nicht gegeben ist.



»Der Gebildete treibt die Genauigkeit nicht weiter, als es der Natur der Sache entspricht.«

Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.)

Eine Angabe $x = 2{,}13\cancel{45}\,cm \pm 0{,}1\,cm$ ist somit kaum sinnvoll.

6.2 Übungen "Messabweichungen"

6.2.1 Genauigkeitsklasse

Ein Amperemeter habe die Genauigkeitsklasse 2.

a) Welche Messunsicherheit besteht bei einem Ablesewert von 15 mA im Messbereich 200 mA?

b) Wie groß ist der relative Fehler?

c) Bestimmen Sie die entsprechenden Größen bei einem Ablesewert von 175 mA.

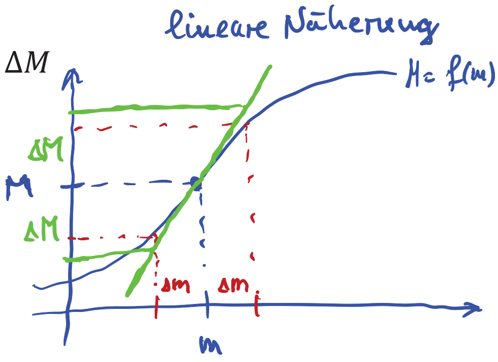
6.3 Fortpflanzung zufälliger und unbekannter systematischer Abweichungen

Hat ein Messwert m eine Messunsicherheit Δm, und geht m im Zuge der Auswertung in die Berechnung einer weiteren Größe M ein, das heißt

$M = f(m)\,,$

so weist auch M eine Unsicherheit auf. Es gilt (Tangentennäherung, Taylorreihe)

$$f(m+\Delta m) \approx f(m) + \left.\frac{df}{dm}\right|_m \cdot \Delta m = M + \Delta M$$



Also

$$\boxed{\Delta M = \left.\frac{df}{dm}\right|_m \cdot \Delta m}$$

Definition:

Hängt ein Messergebnis M von einer Messung m ab, so bezeichnet man den Einfluss der Messunsicherheit Δm dieser Messung auf das Ergebnis als **Fehlerfortpflanzung**.

Aus $m \pm \Delta m$ ergibt sich $M \pm \Delta M = M \pm \left|\frac{df}{dm} \cdot \Delta m\right|$

↓

Angabe immer als positiver Wert.

Beispiele:

a) $U = R \cdot I$, $R = 100\,\Omega$ präzise bekannt, $I = 2A \pm 0{,}05A$

$$U = 100\,\Omega \cdot 2A = 200\,V\ ,\quad \Delta U = \left.\frac{dU}{dI}\right|_{I=2A} \cdot \Delta I = R \cdot \Delta I = 5\,V$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{5\,V}{200\,V} = 2{,}5\% \qquad \left(= \frac{\Delta I}{I}\right)$$

b) $P = R \cdot I^2$, $R = 100\,\Omega$ präzise bekannt, $I = 2A \pm 0{,}05A$

$$P = 100\,\Omega \cdot (2A)^2 = 400\,W$$

$$\Delta P = \left.\frac{dP}{dI}\right|_{I=2A} \cdot \Delta I = 2RI|_{I=2A} \cdot \Delta I = 400\,V \cdot 0{,}05A = 20W$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{20\,V}{400\,V} = 5\% \qquad \left(= 2 \cdot \frac{\Delta I}{I}\right)$$

Allgemein gilt:

Geht ein fehlerbehafteter Messwert mit einer Potenz r $(\neq 0)$ in eine Berechnung ein, so beträgt die relative Unsicherheit des berechneten Wertes das $|r|$-fache der relativen Unsicherheit des Messwerts.

Fehlerfortpflanzung bei mehreren fehlerbehafteten Größen

Häufig ist ein Messwert M aus mehreren fehlerbehafteten oder unsicheren Teilmessungen, Größen oder Parametern m_i zu bestimmen, also

$$M = f(m_1, m_2, \cdots, m_n)$$

Jede Unsicherheit Δm_i ($i = 1, \cdots, n$) trägt dann mit einem Anteil

$$\Delta M_{m_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial m_i}\right|_{m_i} \cdot \Delta m_i$$

zur Gesamt-Messunsicherheit

$$\Delta M = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_1}\right|_{m_1} \cdot \Delta m_1\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_2}\right|_{m_2} \cdot \Delta m_2\right)^2 + \cdots + \left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_n}\right|_{m_n} \cdot \Delta m_n\right)^2} \qquad (1)$$

bei. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial M}{\partial m_i}$ beschreiben dabei, wie empfindlich M von den jeweiligen Größen m_i abhängt, also die **Sensitivität** von M bezüglich m_i.

Anmerkung: Die Formel (1) für ΔM gilt nur, falls die Unsicherheiten Δm_i voneinander statistisch unabhängig sind. In den Laborversuchen setzen wir dies i. d. R. voraus.

Beispiele:

a) Unsicherheiten von Summe, Differenz, Produkt und Quotient

Seien m_1 und m_2 zwei Messwerte mit Messabweichungen Δm_1 und Δm_2, von denen nur der Betrag bekannt ist bzw. abgeschätzt wurde und von denen wir annehmen, dass sie voneinander statistisch unabhängig sind.

Dann führt (1) zu folgenden Berechnungsvorschriften (bei denen keine Ableitungen berechnet werden müssen):

1.) Addition und Subtraktion der Messwerte

$$M = m_1 \pm m_2 \qquad \Delta M = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2}$$

Wurzel aus der Quadratsumme der **absoluten** Messabweichungen.

2.) Multiplikation mit einem konstanten Faktor

$$M = k_1 \cdot m_1 \pm k_2 \cdot m_2 \qquad \Delta M = \sqrt{(k_1 \cdot \Delta m_1)^2 + (k_2 \cdot \Delta m_2)^2}$$

3.) Multiplikation der Messwerte

$$M = m_1 \cdot m_2 \qquad \frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$$

Wurzel aus der Quadratsumme der **relativen** Messabweichungen.

$$\Delta M_{m_1} = \frac{\partial M}{\partial m_1} \cdot \Delta m_1 = m_2 \cdot \Delta m_1 \qquad \frac{\Delta M}{M} = \frac{\sqrt{m_2^2 \Delta m_1^2 + m_1^2 \Delta m_2^2}}{m_1 \cdot m_2}$$

$$\Delta M_{m_2} = \frac{\partial M}{\partial m_2} \cdot \Delta m_2 = m_1 \cdot \Delta m_2 \qquad = \sqrt{\frac{\Delta m_1^2}{m_1^2} + \frac{\Delta m_2^2}{m_2^2}}$$

4.) Division der Messwerte

$$M = \frac{m_1}{m_2} \qquad \frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$$

Wurzel aus der Quadratsumme der **relativen** Messabweichungen.

(gleiches Maß der relativen Abweichung wie bei Multiplikation).

Insbesondere hat der **Kehrwert** eines Messwerts **die gleiche relative Abweichung** wie der Messwert selbst.

Diese Berechnungen gelten entsprechend auch bei mehr als zwei fehlerbehafteten Größen.

z. B.:

$$\hat{R} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_0}, \quad R_a = 5\ k\Omega \pm 50\ \Omega, \qquad R_b = 200\ k\Omega \pm 2\ k\Omega, \quad R_0 = 2{,}5\ k\Omega \pm 40\ \Omega$$

$$\frac{\Delta\hat{R}}{\hat{R}} = \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{200}\right)^2 + \left(\frac{40}{2500}\right)^2} \approx 0{,}0213 = 2{,}13\%$$

b) $U = R \cdot I, \quad R = 100\ \Omega\ \underbrace{(\pm 2\%)}_{\hat{=} \pm 2\,\Omega}, \quad I = 2\ A \pm \underbrace{0{,}05\ A}_{\hat{=}\, 2{,}5\,\%}$

$$U = 100\Omega \cdot 2A = 200V,$$

$$\Delta U_R = \left.\frac{dU}{dR}\right|_{\substack{R=100\Omega \\ I=2A}} \cdot \Delta R = 2A \cdot 2\Omega = 4V, \quad \Delta U_I = \left.\frac{dU}{dI}\right|_{\substack{R=100\Omega \\ I=2A}} \cdot \Delta I = 100\Omega \cdot 0{,}05A = 5V$$

$I \cdot \Delta R$

$$\Delta U = \sqrt{\Delta U_R^2 + \Delta U_I^2} = \sqrt{4^2 + 5^2}\ V \approx 6{,}4V, \quad \frac{\Delta U}{U} = \frac{6{,}4V}{200V} = 0{,}032 = 3{,}2\%$$

oder einfacher (s. o.)

$$\frac{\Delta U}{U} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}025^2} \approx 0{,}032 = 3{,}2\%,$$

$$\Delta U \approx 0{,}032 \cdot 200V = 6{,}4\ V$$

c) $P = R \cdot I^2, \quad R = 100\ \Omega\ (\pm 2\%), \quad I = 2\ A \pm 0{,}05\ A$

$$P = 100\ \Omega \cdot (2A)^2 = 400\ W$$

$$\Delta P_R = \left.\frac{\partial P}{\partial R}\right|_{\substack{R=100\Omega \\ I=2A}} \cdot \Delta R = (2A)^2 \cdot 2\Omega = 8\ W$$

$$2RI\Big|_{\substack{R=100\Omega\\ I=2A}} = 400V$$

$$\Delta P_I = \frac{\partial P}{\partial I}\Big|_{\substack{R=100\Omega\\ I=2A}} \cdot \Delta I = 400\,V \cdot 0{,}05A = 20\,W$$

$$\Delta P = \sqrt{\Delta P_R^2 + \Delta P_I^2} = \sqrt{8^2 + 20^2}\;W \approx 21{,}54W \quad , \quad \frac{\Delta P}{P} = \frac{21{,}54W}{400W} \approx 0{,}054 = 5{,}4\%$$

d) Parallelschaltung zweier Widerstände

$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, $R_1 = 12\ \Omega$ (±5%), , $R_2 = 18\ \Omega$ (±5%)

$\hat{R} = 7{,}2\Omega \pm 0{,}26\Omega$ (3,6%) (Nachrechnen! Übung 6.4.4a)

1.) Messwert

$$R = \frac{12\Omega \cdot 18\Omega}{(12+18)\Omega} = \frac{12 \cdot \cancel{18}^{\,3}}{\cancel{30}_{\,5}}\Omega = \frac{36}{5}\Omega = 7{,}2\,\Omega$$

2.) Unsicherheit

$$\Delta R_{R_1} = \left| \frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 \right| = \frac{R_2(R_1+R_2) - R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} \cdot \Delta R_1 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2 \cdot \Delta R_1$$

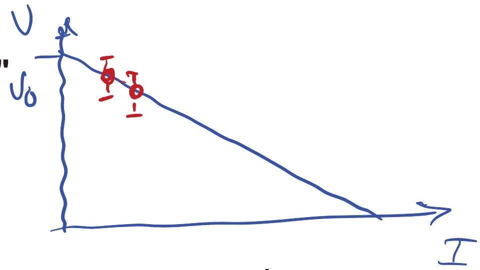
$$= \left(\frac{18}{30}\right)^2 \cdot 0{,}05 \cdot 12\Omega = \frac{9}{25} \cdot 0{,}6\,\Omega \approx 0{,}216\,\Omega$$

$$\Delta R_{R_2} = \left| \frac{\partial R}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2 \right| = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 \cdot \Delta R_2$$

$$= \ldots$$

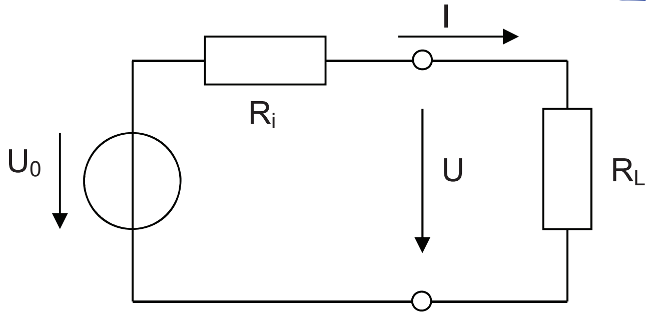
$$\Delta R = \sqrt{\Delta R_{R_1}^2 + \Delta R_{R_2}^2}$$

6.4 Übungen "Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzung"



6.4.1 Innenwiderstand mit Messunsicherheit

In der abgebildeten Schaltung lässt sich durch Änderung von R_L der Strom I einstellen. Für zwei geeignete Einstellungen wurden folgende Ströme und Spannungen gemessen:



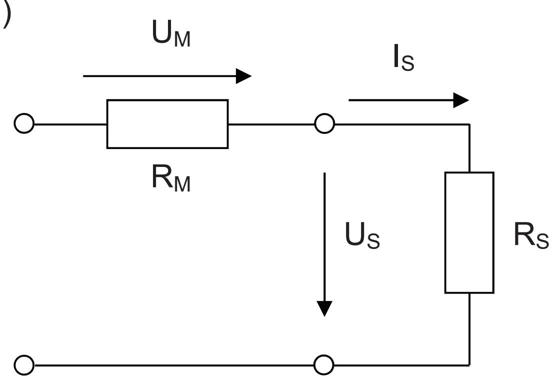
$I_1 = 1{,}0\ \text{A} \pm 0{,}02\ \text{A}$ $\qquad U_1 = 36{,}6\ \text{V} \pm 0{,}1\ \text{V}$

$I_2 = 0{,}8\ \text{A} \pm 0{,}02\ \text{A}$ $\qquad U_2 = 36{,}8\ \text{V} \pm 0{,}1\ \text{V}$

Welches Ergebnis erhält man hieraus für den Innenwiderstand R_i? Beachte auch $\frac{\Delta R_i}{R_i}$!

6.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

In der abgebildeten Schaltung ist $R_M = 0{,}1\ \Omega$ ($\pm$ 0,1%) ein Messwiderstand. R_S soll bestimmt werden.



Gemessen wird

$U_M = 0{,}14\ \text{V} \pm 0{,}01\ \text{V}$

$U_S = 14{,}3\ \text{V} \pm 0{,}3\ \text{V}$.

Welches Ergebnis erhält man für R_S?

Anmerkung: Diese Anordnung ist eine typische Schaltung zur Widerstandsbestimmung mit Hilfe einer Spannungs- und einer (indirekten) Strommessung.

6.4.3 Füllfaktor einer Solarzelle

Der Füllfaktor, eine wichtige Kenngröße von Solarzellen, wird gemäß

$$FF = \frac{P_{MPP}}{U_{oc} \cdot I_{sc}}$$

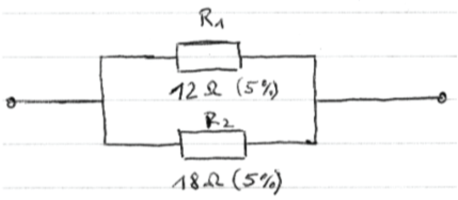
berechnet.

Aus den Messwerten $U_{oc} = 0{,}6\ \text{V} \pm 0{,}02\ \text{V}$, $I_{sc} = 0{,}3\ \text{A} \pm 0{,}02\ \text{A}$, $P_{MPP} = 0{,}13\ \text{W} \pm 0{,}01\ \text{W}$ ist der Füllfaktor einschließlich der absoluten und relativen Messunsicherheit zu bestimmen.

6.4.4 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

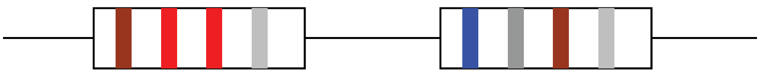
Bestimmen Sie jeweils den Gesamtwiderstand der folgenden Widerstands-kombinationen und dessen Toleranz (absolut und relativ).

a)

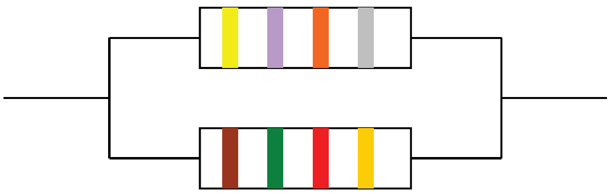


b)

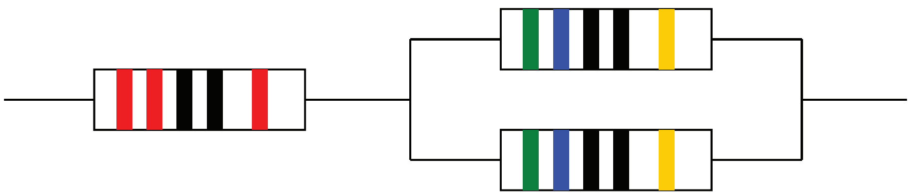
1.



2.



3.



Farbcodierung von Widerständen siehe Anhang A.

in der Komplettversion des Skripts

6.4.5 Fehlerfortpflanzung bei der Division

Leiten Sie die Fehlerfortpflanzung der Division ($M = \frac{m_1}{m_2}$, $\frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$) mit Hilfe von

$$\Delta M = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_1}\right|_{m_1} \cdot \Delta m_1\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_2}\right|_{m_2} \cdot \Delta m_2\right)^2 + \cdots + \left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_n}\right|_{m_n} \cdot \Delta m_n\right)^2}$$

her.

6.5 Vertrauensniveau und vollständiges Messergebnis

6.5.1 Messunsicherheit, Vertrauensniveau - Das vollständige Messergebnis

Der "wahre" Wert einer Messgröße kann nie bestimmt werden, da Messabweichungen grundsätzlich nicht vollständig ausgeschlossen werden können.

Die Angabe der **Messunsicherheit** Δm einer Messung m geschieht in der Form "$m \pm \Delta m$" und liefert eine Aussage über den Bereich, in dem der "wahre" Wert m^* zu erwarten ist.

Das **Vertrauensniveau "(1-α)"** gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Erwartung zutrifft:

$|m^* - m| < \Delta m$ gilt mit Wahrscheinlichkeit 1-α .

Erst mit Angabe der Messunsicherheit liefert ein Messwert oder eine Messreihe eine verwertbare Aussage.

Wird zusätzlich das Vertrauensniveau angegeben, so erhält man das **vollständige Messergebnis.** Es hat die Form

$$l = \underbrace{33{,}333\ \mathrm{mm}}_{\text{Messwert}} \quad \underbrace{\pm 2\ \mu\mathrm{m}}_{\text{Messunsicherheit}} \quad \boxed{\underbrace{(1-\alpha) = 95\ \%}_{\text{Vertrauensniveau}}}$$

Bedeutung: Der wahre Wert liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall [33,333 − 0,002 , 33,333 + 0,002] mm

6.5.2 Messen als Zufallsprozess

Jede Messung ist mit zufälligen Messabweichungen behaftet. Sie bewirken, dass sich bei der Wiederholung einer Messung auch bei sonst gleichen Messbedingungen jeweils leicht voneinander abweichende Messwerte ergeben.

Eine Messung ist insofern ein Zufallsprozess im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie kann durch eine Verteilungsfunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit **Erwartungswert μ** und **Standardabweichung σ** beschrieben werden.

Die **Verteilungsfunktion** beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable Werte annimmt, die kleiner als x sind:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

Dazu gehört die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

"$f(x)\, dx$" ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen x und $x + dx$ annimmt. Wahrscheinlichkeit kann also als **Fläche unter dem Graphen von $F(x)$** dargestellt werden.

Der Erwartungswert ist definiert als

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx\,.$$

Die **Varianz** ist der Erwartungswert des Quadrates der Abweichungen vom Erwartungswert μ:

$$D(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx$$

Die Standardabweichung σ ist die Quadratwurzel der Varianz.

Für die Summe mehrerer unabhängiger Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu_i$ und $D(X_i) = \sigma_i^2$ gilt

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

$D(\underbrace{X_1 + X_2}_{X}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

$\sigma_X = D(X) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

vergleiche: $\Delta M = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2}$

$D(a \cdot X) = a^2 D(x)$

Anwendung

Verringerung der Unsicherheit durch Mehrfachmessung und Mittelwertbildung

Wir führen n Messungen einer Größe am gleichen Aufbau unter gleichen Bedingungen aus.

Alle Messungen sehen wir als unabhängige Zufallsprozesse mit Zufallsvariablen $X_1,\ X_2, \cdots, X_n$ an. Alle haben den gleichen Erwartungswert $\mu = E(X_i)$ und weisen die gleiche Streuung auf (Varianz $\sigma^2 = D(X_i)$).

Die Standardabweichung σ ist dabei ein Maß für die Unsicherheit einer einzelnen Messung.

Durch Mittelwertbildung entsteht eine neue Zufallsvariable

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

Sie hat den gleichen Erwartungswert wie die Einzelmessungen X_i, denn

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \cdots + E(X_n)) = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \mu) = \mu$$

Die Varianz von $\bar{X}$ ist allerdings geringer, denn

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(D(X_1) + \cdots + D(X_n)) = \frac{1}{n^2}(n \cdot \sigma^2) = \frac{1}{n}\sigma^2$$

Die Standardabweichung und damit die Unsicherheit des Messergebnisses verringert sich um den Faktor $1/\sqrt{n}$

$$\boxed{\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma}$$

Streuung des Mittelwertes ist um $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kleiner als die Streuung der Einzelwerte.

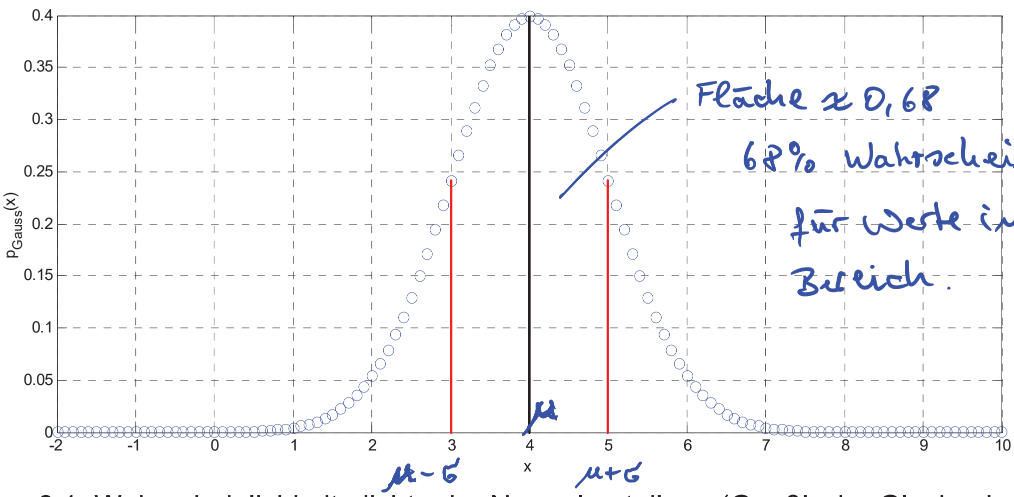
siehe auch Anhang B von TEMP: "noise" beim Mitteln über 100 Werte

6.5.3 Normalverteilung, Gauß'sche "Glockenkurve"

In der Messtechnik geht man grundsätzlich davon aus, dass zufällige Messabweichungen einer Gauß'sche Normalverteilung entsprechen, der sogenannten **„Glockenkurve“**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ Fläche unter der Kurve ($P(X < \infty)$)



Fläche ≈ 0,68
68% Wahrscheinlichkeit für Werte in diesem Bereich.

Abbildung 6.1: Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung (Gauß'sche Glockenkurve), hier mit Erwartungswert μ = 4 und Standardabweichung σ = 1.

Die Fläche unter der Glockenkurve in einem Intervall $[\mu - \Delta x\,,\ \mu + \Delta x]$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen X in diesem Intervall liegt.

Die Gauß'sche Normalverteilung hat u. a. folgende Eigenschaften:

- Maximum liegt bei $x = \mu$ (Max = $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0{,}4}{\sigma}$)
- Symmetrisch bzgl. $x = \mu$
- Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$
- Wendetangente schneidet die x-Achse bei $\mu \pm 2\sigma$

Mit diesen Angaben lässt sich die Glockenkurve leicht skizzieren, wenn μ und σ bekannt sind.

Die Gesamtfläche unter der Kurve ist 1. Das entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable überhaupt irgendeinen Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt.

Häufig verwendet wird:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}68$

$P(\mu - 1{,}96\,\sigma < X < \mu + 1{,}96\,\sigma) \approx 0{,}95$

$P(\mu - 3\,\sigma < X < \mu + 3\,\sigma) \approx 0{,}997$ z.B. verwendet bei Ausreißererkennung

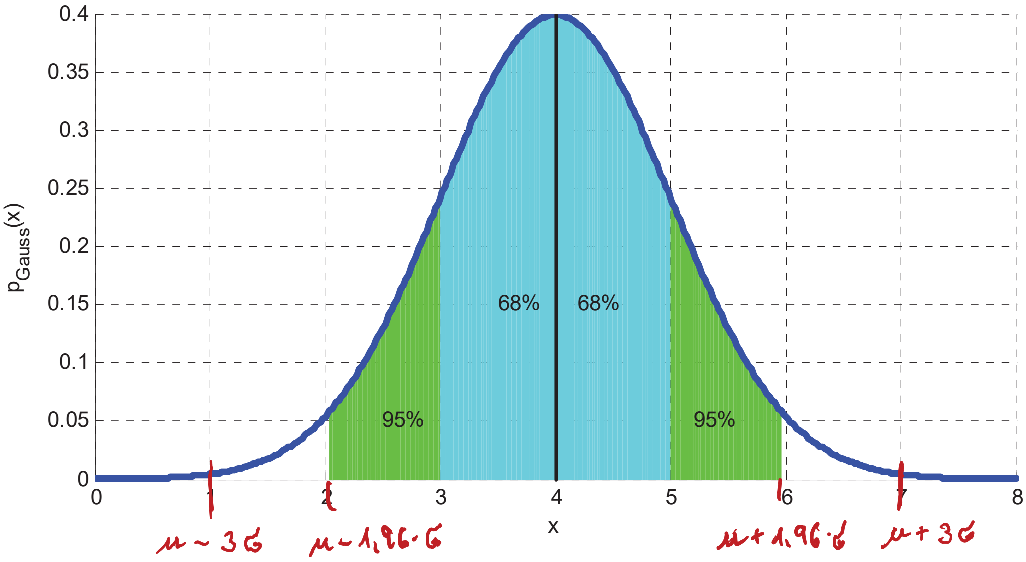


Abbildung 6.2: Normalverteilung ($\mu = 4\,,\ \sigma = 1$) mit 68%- bzw. 95%-"Vertrauensbereichen"

Damit gilt also z. B. mit einer Wahrscheinlichkeit von 68%, dass der Abstand "zufällig" (normalverteilt) streuender Werte vom Erwartungswert nicht größer als die Standardabweichung ist (vergl. Abb. 6.2).

Mit ca. 95% Wahrscheinlichkeit sind die Werte in einem Abstand von etwas weniger als der doppelten Standardabweichung zu erwarten.

Im Umkehrschluss gehen wir davon aus, dass der **wahre Wert** einer Messaufgabe mit 95% Wahrscheinlichkeit in einem solchen Intervall um einen gemessenen Wert liegt.

6.5.4 Häufigkeitsverteilung von Messwerten, Histogramm

Bei mehrfacher Wiederholung einer Messung werden aufgrund der zufälligen Fehler die Messwerte um ihren Mittelwert streuen. Die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Messwerte wird einen Verlauf ähnlich der Glockenkurve zeigen. Die Häufigkeitsverteilung bezeichnet man auch als **Histogramm**.

Beispiel: 10 Personen bestimmen nacheinander und unabhängig voneinander am gleichen Messaufbau die Grenzfrequenz einer Filterschaltung. Aus den 10 Werten (siehe Tabelle) ergibt sich **der statistische Mittelwert**

$$\bar{f} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} f_k = 16{,}0\ kHz.$$

Messwerte:

Nr. k	f_k [kHz]
1	15.87
2	15.63
3	16.45
4	16.35
5	16.15
6	16.03
7	15.96
8	16.15
9	15.45
10	15.96

Die **statistische Standardabweichung**

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2}$$

ergibt sich hier zu $s_f \approx 0{,}304\ kHz$.

Sie ist ein **Maß für die Größe der zufälligen Messabweichungen einer Messung**. Die Messunsicherheit einer Messung bezogen auf ein bestimmtes Vertrauensniveau lässt sich aus der Standard-abweichung berechnen (siehe unten).

In Abbildung 6.3 sind die Häufigkeitsverteilung der obigen Messung und eine Normalverteilung mit gleichem Mittelwert und gleicher Standardabweichung gegenübergestellt. Je größer die Stichprobe, desto besser wird die Häufigkeitsverteilung die "Glockenkurve" approximieren.

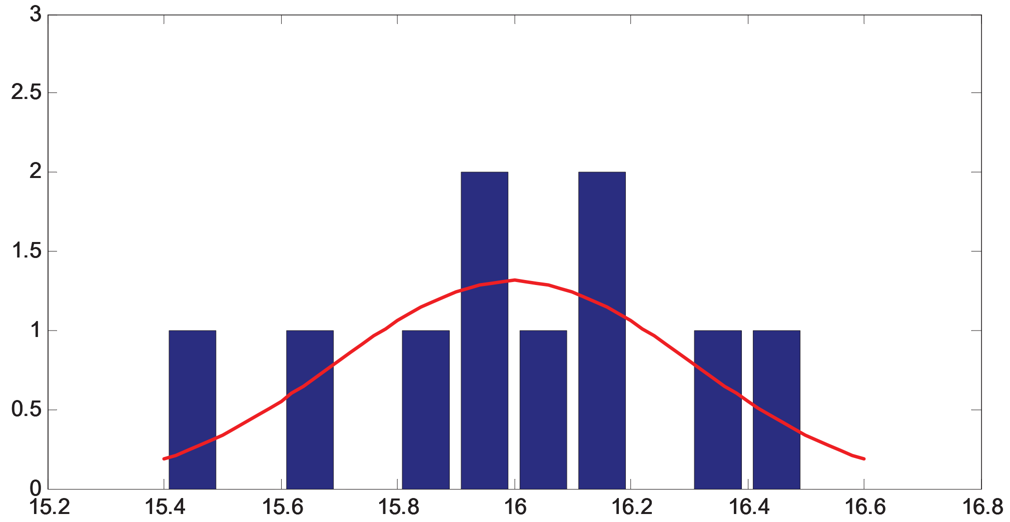


Abbildung 6.3: Histogramm der Frequenzmessreihe mit zugehöriger Normalverteilung

Die Messreihe stellt eine **Stichprobe** des Zufallsprozesses „Messung von f“ dar, von dem wir annehmen, dass er einer Normalverteilung mit einem Erwartungswert μ und einer Standardabweichung σ folgt. Allerdings sind μ (der "wahre Wert") und σ nicht bekannt. Der statistische Mittelwert $\bar{x}$ und die statistische Standardabweichung s der Stichprobe liefern jedoch **Schätzwerte** für diese Kenngrößen.

Sind die Kenngrößen bekannt, so lässt sich das Vertrauensniveau, die Wahrscheinlichkeit mit der sich der wahre Wert in einer bestimmten Umgebung des berechneten Mittelwerts befindet, anhand der Gauß'schen Glockenkurve bestimmen.

6.5.5 Das vollständige Messergebnis

Der Bezug auf die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung ermöglicht die **Angabe der Messunsicherheit mit Vertrauensniveau $(1-\alpha)$** wie folgt:

- Eine Messung wird als (normalverteilter) Zufallsprozess gesehen, dessen (unbekannter) Erwartungswert μ der **"wahre Wert"** der Messgröße ist.

  Eine konkrete Messreihe $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ ist eine **Stichprobe** dieses Zufallsprozesses.

  $\frac{1}{n} \sum x_i$

  Der statistische Mittelwert $\bar{x}$ ist die – bestmögliche – Schätzung für den "wahren Wert", die wir aus der Messreihe gewinnen können.

  $= \sqrt{1/(n-1) \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2}$

- Die statistische Standardabweichung s liefert einen Schätzwert für die Standardabweichung σ der Normalverteilung. Diese ermöglicht die Angabe von Fehlergrenzen mit definiertem Vertrauensniveau. Das heißt, wir können sagen, dass die Werte der aufgenommenen Messreihe mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ und mit 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\mu - 1{,}96\,\sigma < x < \mu + 1{,}96\,\sigma$ liegen.

- s ist nur bei großer Zahl n der Messwerte ein guter Schätzwert für die Standardabweichung σ. Bei kleineren Stichproben ergeben sich im Mittel zu kleine Werte $s < \sigma$. Die Angabe $\mu - s < x < \mu + s$ (d.h. die Aussage "Meine Messwerte haben maximal den Abstand s vom wahren Wert." hat daher ein geringeres Vertrauensniveau als 68%).

  Deshalb ist die statistische Standardabweichung um den **"Vertrauensfaktor t"** zu korrigieren. Man erhält $t_{n,1-\alpha} \cdot s$ als korrigierte Schätzung. Der Vertrauensfaktor kann aus Tabellen (DIN 1319, s. u.) entnommen werden.

  Man erhält z. B. für das Vertrauensniveau 68% im Fall $n = 10$ den Vertrauensfaktor $t_{10,95} = 1{,}06$ und damit den korrigierten Schätzwert $\sigma = 1{,}06\,s$.

  Für das Vertrauensniveau 95% ergibt sich mit dem Vertrauensfaktor $t_{10,95} = 2{,}26$ die korrigierte Schätzung $1{,}96\,\sigma = 2{,}26\,s$.

gegeben $\bar{x}$, s, $n = 10$, dann gilt z.B.: "Die Messwerte am gegebenen Aufbau liegen mit 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - 2{,}26 \cdot s\,,\ \bar{x} + 2{,}26 \cdot s]$"
(Streuung der Einzelmessungen)

- Der statistische Mittelwert der Messreihe, der unsere Schätzung des wahren Wertes ist, hat – wie oben gezeigt – eine um $\frac{1}{\sqrt{n}}$ geringere Standardabweichung als die Einzelmessungen.

  Aus der Messreihe kann deshalb auf die Messunsicherheit aufgrund der zufälligen Abweichungen, bestimmt aus einer Stichprobe von n Messungen

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n,1-\alpha} \cdot s}$$

  geschlossen werden. Der wahre Wert liegt demnach mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ im Intervall $[\bar{x} - \Delta x,\ \ \bar{x} + \Delta x]$.

- **Das vollständige Messergebnis** lässt sich damit wie folgt angeben:

$$\boxed{\hat{x} = \bar{x} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n,1-\alpha} \cdot s}$$

mit Vetrauensniveau $(1-\alpha)$

  wobei $t_{n,1-\alpha}$ entsprechend dem einzuhaltenden Vertrauensniveau und der Zahl der aufgenommenen Messwerte zu wählen ist (Tabelle 6.2).

Anzahl Messungen in der Messreihe n	Vertrauensfaktor t						
	$(1-\alpha)$ = 68,27 %	$(1-\alpha)$ = 90,00 %	$(1-\alpha)$ = 95,00 %	$(1-\alpha)$ = 95,45 %	$(1-\alpha)$ = 99,00 %	$(1-\alpha)$ = 99,73 %	$(1-\alpha)$ = 99,98 % *
2	1,84	6,31	12,71	18,44	63,66	235,80	761,40
3	1,32	2,92	4,30	4,93	9,93	19,21	42,30
4	1,20	2,35	3,18	3,48	5,84	9,22	19,77
5	1,15	2,13	2,78	2,98	4,60	6,62	12,48
6	1,11	2,02	2,57	2,73	4,03	5,51	9,77
7	1,09	1,94	2,45	2,61	3,71	4,90	7,51
8	1,08	1,90	2,37	2,50	3,50	4,53	6,78
9	1,07	1,86	2,31	2,42	3,37	4,28	6,22
10	1,06	1,83	2,26	2,37	3,25	4,09	5,89
20	1,03	1,73	2,09	2,18	2,86	3,45	4,76
30	1,02	1,70	2,05	2,13	2,76	3,28	4,47
50	1,01	1,68	2,01	2,08	2,68	3,16	4,23
100	1,00	1,66	1,98	2,04	2,63	3,08	4,12
200	1,00	1,65	1,97	2,02	2,60	3,04	4,06
$n \to \infty$	1,00	1,65	1,96	2,00	2,58	3,00	4,00

Tabelle 6.2: Vertrauensfaktoren nach DIN 1319 (Quelle: [5])

Beispiel:

Für die obige Messreihe der Frequenzen war $n = 10$, $\bar{f} = 16{,}0\ kHz$ und die statistische Standardabweichung $s_f = 0{,}304\ kHz$. Aus der Tabelle 6.2 liest man für $n = 10$ und das Vertrauensniveau 68% den Vertrauensfaktor $t_{10,68} = 1{,}06$ ab.

Als Schätzwert für σ ergibt sich damit: $\sigma = 1{,}06\ s_f \approx 0{,}322\ kHz$.

Somit liegt ein beliebig aus der Messreihe herausgegriffener Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit in einem Bereich $\pm 0{,}322\ kHz$ um den wahren Wert.

Die Messunsicherheit des Mittelwertes ist dem gegenüber um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ geringer, so dass das vollständige Messergebnis lautet:

$$\hat{f} = \bar{f} \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 1{,}06 \cdot s_f = 16{,}0\ kHz \pm 0{,}102\ kHz\,,\ \ (1-\alpha) = 68\%$$

6.5.6 95%-Vertrauensniveau

Ein Ergebnis mit 68% „Verlässlichkeit" ist oft nicht ausreichend. In der Messtechnik arbeitet man meist mit dem **95%-Vertrauensniveau**. Dem entspricht in der theoretischen Verteilung ein Streubereich von $\mu \pm 1{,}96\ \sigma$. (vergl. Abb. 6.2).

Mit der statistischen Standardabweichung und dem Vertrauensfaktor $t_{n,95}$ des 95%-Vertrauensniveaus erhält man die Schätzung $1{,}96\ \sigma = t_{n,95} \cdot s$.

Für $n = 10$ entnimmt man der DIN-Tabelle den Vertrauensfaktor $t_{10,95} = 2{,}26$. Das heißt für das obige Beispiel:

$$\hat{f} = 16{,}0\ kHz \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 2{,}26 \cdot 0{,}304\ kHz = 16{,}0\ kHz \pm 0{,}217\ kHz\,,\ \ (1-\alpha) = 95\%$$

Mit 95% Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert demnach im Bereich $15{,}78\ kHz$ bis $16{,}22\ kHz$.

6.5.7 Fehlerabschätzung bei Einzelmessungen

Oft ist der Aufwand zu groß, eine Messung so oft zu wiederholen, dass man mit der statistischen Standardabweichung s einen sinnvollen Schätzwert der theoretischen Standardabweichung σ erhält. Dann hat man eine Angabe der auf zufällige Messabweichungen zurückzuführenden Messunsicherheit durch sorgfältige Abschätzung im Rahmen der jeweiligen Messung zu gewinnen – beispielsweise durch Variation der Cursorposition bei Ablesungen von einem Oszilloskopschirm.

6.5.8 Messunsicherheit aufgrund mehrerer Fehlerquellen

Die Messunsicherheit einer Messung wird in der Regel nicht nur durch eine einzelne mit Unsicherheit behaftete Größe bestimmt, sondern durch eine Vielzahl von Fehlereinflüssen. Insbesondere trägt jedes Messinstrument zur Messunsicherheit bei.

Wie in Abschnitt 6.1.8 dargestellt, werden Messgeräte-Toleranzen als unbekannte systematische Fehler erfasst und in die Fehlerfortpflanzungsrechnung einbezogen.

Ihnen wird in der Regel ein Vertrauensniveau von 95% zugeordnet.

Die Messunsicherheit durch zufällige und unbekannte systematische Fehler wird nach den Gesetzen der Fehlerfortpflanzung berechnet. Dabei sind alle Fehler auf das gleiche Vertrauensniveau zu beziehen, in der Regel das 95%-Niveau.

Beispiel:

Bei der oben beschriebenen Messung werden ein Signalgenerator und ein Multimeter zur Spannungsmessung eingesetzt. Sei

e_1 : Toleranz der Frequenz des Signalgenerators (z. B. $e_1 = 0.02\ kHz$),

e_2 : Unsicherheit der Frequenz aufgrund der Toleranz der Spannungsmessung (z. B. $e_2 = 0.1\ kHz$).

Der zufällige Fehler wird durch den 95%-Streubereich $\pm 1{,}96\ \sigma$ beschrieben, der aus der statistischen Standardabweichung und dem 95%-Vertrauensfaktor $t_{10,95}$ berechnet wird (siehe oben).

Damit erhält man für die Messunsicherheit insgesamt

$$\Delta f = \sqrt{\frac{\left(t_{10,95} \cdot s\right)^2}{10} + e_1^2 + e_2^2} = \sqrt{0{,}217^2 + 0{,}02^2 + 0{,}1^2} \approx 0{,}24\ kHz$$

6.6 Übungen "Vollständiges Messergebnis, Fehlerfortpflanzung"

6.6.1 Temperaturmessreihe mit Messgeräte-Toleranz

An einem Tank, dessen Inhalt überall die gleiche Temperatur hat, werden acht Temperaturmessungen vorgenommen, die die folgenden Werte liefern:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8
Temp./°C	362	352	368	378	350	360	356	370

a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die statistische Standardabweichung.

b) Welche Messunsicherheit bezogen auf ein Vertrauensniveau von 95% ergibt sich daraus?

c) Geben Sie das vollständige Messergebnis an, wenn das verwendete Temperaturmesssystem eine Toleranz von $\pm 10\ °C$ hat.

6.6.2 Strommessung mit Multimeter

Ein Multimeter hat die Genauigkeitsklasse 1,5. Im Messbereich 0 – 3 A wird der Strom I in 4 aufeinander folgenden, unabhängigen Messungen, gemessen (siehe Tabelle).

a) Geben Sie das vollständige Messergebnis für I für ein Vertrauensniveau von 95% an.

$1{,}24\,A < I < 1{,}36\,A$

Messung Nr.	1	2	3	4
Strom I [A]	1,3	1,35	1,26	1,29

b) Der Chef macht eine weitere Messung zur Kontrolle – und erhält 1,22 A. Ist das ein Grund, Sie wegen Unfähigkeit zu entlassen? In welchem Intervall wird sein Messwert mit 95% Wahrscheinlichkeit liegen?

6.6.3 Messunsicherheit einer Messreihe

Eine Messreihe liefert für den Schaltweg S eines Mikroschalters die unten angegebenen Werte. Es wird mit einem Wegsensor gemessen, dessen Messunsicherheit mit $1\ \mu m$ angegeben ist.

Messung Nr.	1	2	3	4
Schaltweg [μm]	30	35	27	31

a) Geben Sie das vollständige Messergebnis für S für ein Vertrauensniveau von 95% an.

b) Wenn weitere Messungen aufgenommen werden: In welchem Intervall sind deren Werte mit 95% Wahrscheinlichkeit zu erwarten?

c) In zwei weiteren Messungen wird $s_5 = 33\ \mu m$ und $s_6 = 28{,}5\ \mu m$ gemessen. Wie ändert sich das vollständige Messergebnis, wenn diese Messungen mitberücksichtigt werden? Geben Sie die Änderung der Messunsicherheit gegenüber a) in % an.

6.6.4 Widerstandstoleranzen

Auf einer in Serienfertigung hergestellten Platine war ein 82 kΩ Widerstand mit 1% Toleranz spezifiziert. Stattdessen soll nun eine Serienschaltung dreier Widerstände (22 kΩ, 27 kΩ, 33 kΩ) vorgesehen werden. Wird die geforderte Toleranz erreicht, wenn die ersten beiden Widerstände eine Toleranz von 5% haben und die Toleranz des 33 kΩ Widerstands 2% beträgt?

Aufgabe 6.6.2

$I = 1{,}3 \,/\, 1{,}35 \,/\, 1{,}26 \,/\, 1{,}29 \text{ A}$

Mittelwert ist unser Schätzwert für den wahren Wert.

$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_i I_i = 1{,}3 \text{ A}$ (MATLAB mean())

Statistische Standardabweichung liefert den -zu kleinen- Schätzwert für das σ des Zufallsprozesses

$s_I = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (I_i - \bar{I})^2} \approx 0{,}0374 \text{ A}$ (MATLAB std())

Vertrauensfaktor für $(1-\alpha) = 95\,\%$: $t_{4,95} = 3{,}18$ (Tabelle)

$\Delta I_i = t_{4,95} \cdot s_I \approx 0{,}119 \text{ A}$

Streuung der Einzelwerte

95 % der Messungen an diesem Aufbau sind im Intervall

$(1{,}3 - 0{,}12)\text{ A} < I < (1{,}3 + 0{,}12)\text{ A}$ zu erwarten. (Antwort zu b))

Der Mittelwert hat eine um $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kleinere Unsicherheit

$\Delta I = \frac{1}{\sqrt{4}} t_{4,95} \cdot s_I = \frac{1}{2} \cdot 3{,}18 \cdot 0{,}0374 \text{ A} \approx 0{,}06 \text{ A}$

Vollständiges Messergebnis:

$\hat{I} = 1{,}3 \text{ A} \pm 0{,}06 \text{ A} \quad , \quad (1-\alpha) = 95\,\%$

Der wahre Wert ist mit 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall $1{,}24 \text{ A} < I < 1{,}36 \text{ A}$ zu erwarten.

Laut Aufgabe ist zusätzlich die Unsicherheit des Multimeters einzubeziehen

$\Delta I_M = 0{,}015 \cdot 3 \text{ A} = 0{,}045 \text{ A}$

$\Delta I_{Ges} = \sqrt{(0{,}06 \text{ A})^2 + (0{,}045 \text{ A})^2} = 0{,}075 \text{ A}$, $\underline{\underline{\hat{I} = 1{,}3 \text{ A} \pm 0{,}075 \text{ A} \;,\; (1-\alpha) = 95\,\%}}$

6.6.5 Messwertablesung

Nacheinander werden auf der Anzeige eines Drehspulinstruments von 5 Personen folgende Werte abgelesen:

Person	1	2	3	4	5
Strom [mA]	27	29	24	25	24

a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die statistische Standardabweichung.

b) Welche Messunsicherheit bezogen auf ein Vertrauensniveau von 95% ergibt sich daraus?

c) Es wird eine sechste Person gebeten, die Messung durchzuführen. In welchem Bereich ist mit 95% Wahrscheinlichkeit ihr Ablesewert zu erwarten.

6.6.6 NTC Parameterbestimmung

Für den Widerstand eines NTC gilt: $R(T) = R_0 \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$

Durch zwei Widerstands- und Temperaturmessungen soll B bestimmt werden. Es liegen folgende Werte mit den angegebenen Messabweichungen vor:
$T_0 = 0\,°C$ (exakt), $T_1 = 353\,K \pm 1\,K$, $R_0 = 30\,k\Omega\ (\pm 1\%)$, $R_1 = 500\,\Omega\ (\pm 1\%)$
Geben Sie das Messergebnis für B an.

6.6.7 NTC: R_∞

Zur Bestimmung der Hilfsgröße $R_\infty = R(T \to \infty) = R_0 \cdot e^{-\frac{B}{T_0}}$ eines NTC, dessen Parameter mit $B = 4000\,K\ (\pm 5\%)$ angegeben ist, wird eine Messung aufgenommen:

$T_0 = 298\,K \pm 0{,}5K$, $\qquad R_0 = 26{,}5\,k\Omega \pm 300\,\Omega$

Wie lautet R_∞ und welche relative Messunsicherheit ergibt sich?