2.3 Auswertung mit Ausgleichsgeraden bei nichtlinearen Zusammenhängen

Ob die Approximation einer Messreihe durch eine Ausgleichsgerade sinnvoll ist, hängt ab vom

- zugrunde liegenden theoretischen Zusammenhang
- vom Ziel der Auswertung.

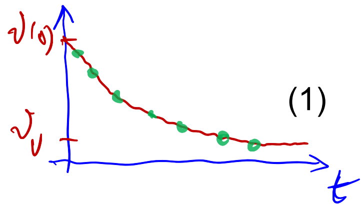
2.3.1 Abschnittsweise Annäherung durch Ausgleichsgeraden

Ist trotz eines offensichtlich nicht linearen Zusammenhangs eine Geradennäherung gewünscht (z. B. weil bei einer nichtlinearen Sensorkennlinie die Empfindlichkeit des Sensors in einem bestimmten Messbereich gefragt ist), so teilt man die Messreihe geeignet in Abschnitte auf und bestimmt eine Ausgleichsgerade für jeden der Abschnitte. Die Geraden werden dann i. d. R. unterschiedliche Steigung und unterschiedliche Achsabschnitte aufweisen.

2.3.2 Halblogarithmische Darstellung

Der Zeitverlauf der Temperatur bei der Abkühlung eines Bauteils auf die Umgebungstemperatur ϑ_U ist exponentiell abfallend:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta(0) - \vartheta_U) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{1}$$



Diese Temperaturdynamik wird gekennzeichnet durch die Zeitkonstante τ. Wie lässt sich diese aus vorliegenden Messwerten ϑ_i zu Zeitpunkten t_i bestimmen?

1.) Approximation durch eine nach (1) angesetzte Funktion mit Hilfe eines Optimum-Suchverfahrens (z. B. MATLAB `lsqcurvefit`)

2.) Ausgleichsgerade für die halblogarithmisch dargestellte Messreihe

Diese Methoden ersetzen die früher üblichen Skizzen auf <u>halblogarithmischem</u> Papier.

Ausgleichsgerade in der halblogarithmischen Messwertdarstellung

Zu 2.) geht man wie folgt vor:

Man stellt um und dividiert in (1) durch $(\vartheta(0) - \vartheta_U)$, um dimensionslose Größen zu bekommen. Anschließend wird der natürliche Logarithmus gebildet, so dass

$$\underbrace{\ln\left(\frac{\vartheta(t) - \vartheta_U}{\vartheta(0) - \vartheta_U}\right)}_{y} = \ln\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \underbrace{-\frac{1}{\tau}}_{m} \cdot \underbrace{t}_{x} \underbrace{+\,0}_{+\,b}$$

Vorteile gegenüber lsqcurvefit:
Analytische, direkte Berechnung
statt Suchverfahren

Wird also $\ln\left(\frac{\vartheta(t)-\vartheta_U}{\vartheta(0)-\vartheta_U}\right)$ über den Zeitpunkten t_i aufgetragen, so ergeben sich Wertepaare, die theoretisch auf einer Geraden mit der Steigung $m = -1/\tau$ liegen.

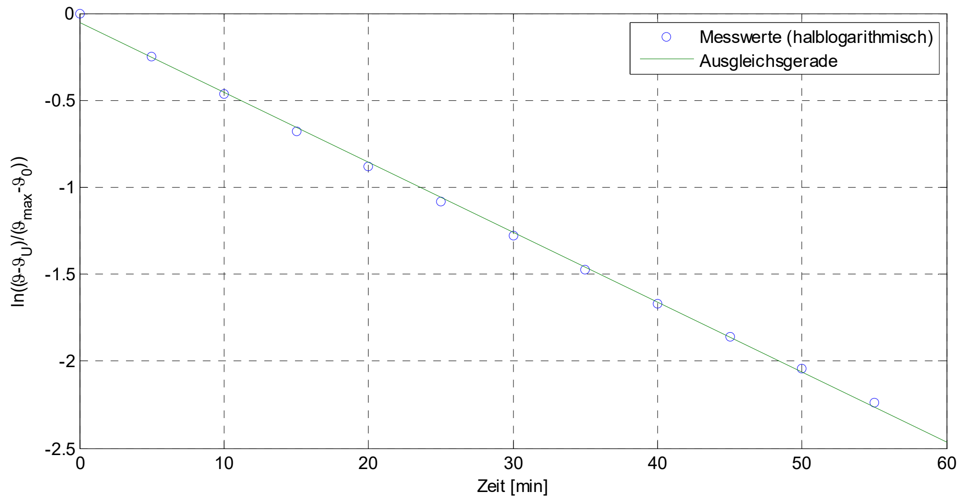
m erhält man durch Berechnung der Ausgleichsgerade. Die Zeitkonstante ergibt sich dann aus $\tau = -1/m$.

Beispiel (MATLAB):

```
y = log((theta-TU) ./ (theta(1)-TU)); % theta = Temperaturmesswerte
p = polyfit(t,y,1);
t_ag = [0; 60]; y_ag = p(1)*t_ag + p(2);
plot(t, y, 'o', t_ag, y_ag, 'g')
tau = -1/p(1)
```

liefert

```
tau =
      24.89
```



2.3.3 Doppelt-logarithmische Darstellung

Hängt eine Messgröße – vermutet oder theoretisch begründet – von einer Potenz einer anderen Größe ab, so ist in der Regel der Exponent dieser Potenz die wesentliche charakterisierende Größe. Er lässt sich mit Hilfe einer Ausgleichsgeraden bestimmen, wenn eine doppelt-logarithmische Darstellung der Größen gewählt wird. Verwendet wird dabei meistens der Zehnerlogarithmus "$\log_{10}$" bzw. "lg".

Beispiel:

Der Windwiderstand beim Fahrradfahren ist geschwindigkeitsabhängig und zwar so, dass er überproportional mit der Geschwindigkeit zunimmt. Es gilt

$$F_{Pedal} = c \cdot v^x$$

wobei c eine Proportionalitätskonstante, v die effektive Windgeschwindigkeit und x der Exponent ist, der aus einer Messreihe ermittelt werden soll.

Durch Logarithmieren erhält man die Geradengleichung

$$\lg(F_{Pedal}) = \lg(c) + x \cdot \lg(v),$$

$y = b + m \cdot x$

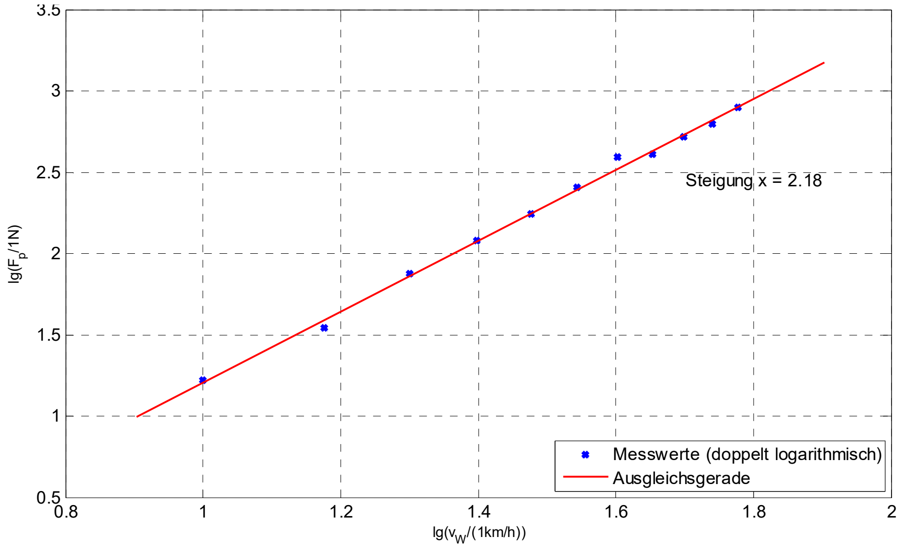
in der die Steigung gleich der gesuchten Potenz x ist (siehe Abbildung unten).

Die Konstante c ergibt sich aus dem Achsabschnitt b der Ausgleichsgerade.

Übung: Wie lautet die Gleichung dafür?

Messreihe:

v	F_P
10.0	16.61
15.0	34.74
20.0	75.36
25.0	119.26
30.0	175.18
35.0	253.56
40.0	393.80
45.0	406.13
50.0	525.20
55.0	622.35
60.0	787.57



2.4 Übungen "Ausgleichsgeraden bei logarithmischer Skalierung"

2.4.1 Zeitkonstante einer Bauteilabkühlung

Die Datei `Temperaturmessung-10-2008.dat` enthält eine Messreihe, in der Spalte 2 den Temperaturverlauf eines Bauteils wiedergibt, das zunächst erhitzt wurde und ab dem Zeitpunkt t = 55 min wieder auf Umgebungstemperatur (T_U = 23 °C) abkühlt.

Bestimmen Sie die Zeitkonstante dieses Abkühlvorgangs mittels einer Ausgleichsgeraden in der halblogarithmischen Darstellung des Temperaturverlaufs.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist "`tau_Bauteil_Lsg.m`"

2.4.2 Parameter B eines NTC

Die Datei `Temperaturmessung-10-2008.dat` enthält in Spalte 3 die Messreihe des Widerstands eines NTC, der zunächst (bis t = 55 min) erhitzt und dann abgekühlt wird. Die zugehörigen Temperaturen sind in Spalte 2 aufgelistet.

Laut Theorie wird die Temperaturabhängigkeit eines NTC beschrieben durch

$R(T) = R(T_0) \cdot e^{B\cdot\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$ (T und T_0 in [K] !)

a) Was muss in einem Diagramm auf der x- und auf der y-Achse aufgetragen werden, damit diese Temperaturabhängigkeit als Gerade mit der Steigung B erscheint?

b) Bestimmen Sie B, indem Sie für die gegebenen Messwerte diese Darstellung erzeugen und die Messpunkte durch eine Ausgleichsgerade approximieren.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist "`B_NTC_fit.m`"

2.4.3 Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers

Für die Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers mit Dimmer erhält man in Abhängigkeit vom Dimmlevel (100% = volle Betriebsspannung) folgende Werte:

D [%]	100	80	60	40	20
Φ_e [W]	51	33	19	10	3

Es wird ein Zusammenhang der Form $\Phi_e = c \cdot D^x$ vermutet. Ermitteln Sie den Exponenten x durch eine Ausgleichsgerade in einer geeigneten grafischen Darstellung der Abhängigkeit beider Größen.

An der Stelle $D = 1$ lässt sich aus dieser Darstellung auch der Koeffizient $c = \Phi_e\ (D = 1)$ entnehmen. Welchen Wert hat c?

(Hinweis zum Umgang mit Prozentwerten: ein Prozentwert von z. B. 80 muss als $D = 0.8$ eingesetzt werden!)

Zusatz: Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie die Parameter c und x direkt aus dem nichtlinearen Funktionsansatz mittels `lsqcurvefit` bestimmen? Wie lassen sich die Unterschiede der beiden Ergebnisse erklären?

2.4.4 Leistung einer Windkraftanlage

An einer Windkraftanlage werden die Windgeschwindigkeit und die ins Netz eingespeiste elektrische Leistung gemessen. Es ergibt sich folgende Messreihe:

v_W [m/s]	3	4	5	6	8	10	12
$P_{el.}$ [kW]	35	80	140	250	600	900	1500

Mit welcher Potenz der Windgeschwindigkeit steigt demnach die Leistung der Windkraftanlage?

Hinweis: Unterstellt wird ein Zusammenhang der Form

$$P = c \cdot v_W^x$$

c und der Exponent x, der hier vorrangig von Interesse ist, sind unbekannt. x ist zu ermitteln. Welche Darstellung (halb- oder doppelt-logarithmisch) ist zu wählen, damit x als Steigung einer Ausgleichsgeraden bestimmt werden kann?

2.4.5 Fischbestand

Der Kabeljau ist durch Überfischung und durch die Erwärmung der Arktis in seinem Bestand bedroht. Nach einem Fangverbot wird erwartet, dass der verbliebene Bestand in der Folge wieder exponentiell anwächst. In den ersten Jahren nach dem Stopp der Kabeljaufischerei werden folgende Bestände ermittelt:

Jahr	0	1	2	3	4
Bestand [Mio]	0.5	0.7	1.2	1.8	2.6

Alle wieviel Jahre darf demnach mit einer Verdoppelung des Bestands gerechnet werden?