



# HSB

Hochschule Bremen  
City University of Applied Sciences

**F4 - Elektrotechnik und Informatik**

## **Grundlagen der Elektrischen Messtechnik**

Unterlagen zum Modul ELMESS in den Studiengängen  
Automatisierung/Mechatronik und Technische Informatik

**Prof. Dr.-Ing. Manfred Mevenkamp**

Ergänzt durch weitere Materialien unter

<http://www.aulis.hs-bremen.de> (ILIAS-Lernplattform)

Magazin > Fakultät 4: Elektrotechnik und Informatik > Automatisierung/Mechatronik  
(ATMEI) > Prof. Dr.-Ing. Manfred Mevenkamp > ELMESS

Nachfragen, Terminvereinbarungen etc.:

E-Mail: [manfred.mevenkamp@hs-bremen.de](mailto:manfred.mevenkamp@hs-bremen.de)

bzw. Tel.: 5905-5482

## Literaturempfehlungen, weitere Informationsquellen

Alle für die Veranstaltung einschließlich Prüfung nötigen Unterlagen werden bereitgestellt. Bei Interesse am weiteren, selbständigen Erarbeiten sind empfehlenswert:

### Bücher

E. Schrüfer: Elektrische Messtechnik, (ab 8. Aufl. 2004, ca. 500 S.)

### E-Books

<http://www.suub.uni-bremen.de/>

bei Zugang aus dem Rechnernetz der Hochschule Bremen oder der Universität (von außen ggf. per VPN) freier Zugriff auf viele Fachbücher (incl. Möglichkeit des PDF-Downloads).

Zur Messtechnik gibt es beispielsweise

Mühl, Thomas: *Einführung in die elektrische Messtechnik - Grundlagen, Messverfahren, Geräte*, 3. neu bearbeitete Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008

<http://www.springerlink.com/content/p404v2/>

Parthier, Rainer: *Messtechnik - Grundlagen und Anwendungen der elektrischen Messtechnik für alle technischen Fachrichtungen und Wirtschaftsingenieure*, 4. verbesserte Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2008

<http://www.springerlink.com/content/r736nh/>

Lerch, Reinhard: *Elektrische Messtechnik - Analoge, digitale und computergestützte Verfahren*, 4. neu bearbeitete Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007

<http://www.springerlink.com/content/r60785/>

Lerch; Kaltenbacher; Lindinger; Sutor: *Elektrische Messtechnik - Übungsbuch*, 2. neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005

<http://www.springerlink.com/content/h167th/>

### Weitere

[http://www.mathworks.com/academia/student\\_version/](http://www.mathworks.com/academia/student_version/)

Matlab/Simulink

## Das Modul ELMESS

### A) Inhalte, Vorlesung

<b>Elektrotechnik</b>	<b>Messtechnik</b>	<b>Methoden</b>
Aufbau und Funktion von Messinstrumenten	Messgrößen, Sensoren	Informationsquellen, Recherche
Analoge Signalaufbereitung	Kenngößen, Kennlinien	Umgang mit Messunsicherheit
Operationsverstärkerschaltungen	Messabweichungen, Messunsicherheit	Datendarstellung, Diagramme
	Analog-Digital-Umsetzung, Digitale Messdatenerfassung	Datenauswertung, Regression
	Digitale Signalverarbeitung	Anforderungen an wissenschaftliches Dokumentieren: Struktur eines Berichts, Nachvollziehbarkeit

### B) Anwendung, Labor

<b>Elektrotechnik</b>	<b>Messtechnik</b>	<b>Methoden</b>
Umgang mit Messgeräten und elektrotechnischen Aufbauten	Entwurf und Aufbau von Messanordnungen für einfache Messaufgaben	Durchführung wissenschaftlicher Experimente
Aufbau von einfachen Analogschaltungen	Erkennen der Quellen von Messunsicherheit und Quantifizieren des Einflusses auf das Messergebnis	Vollständiges Protokollieren einer Experimentdurchführung
Verstehen und Einsatz von OP-Schaltungen	Einsatz wissenschaftlicher Software für Messdatenerfassung und –auswertung (LabView, MATLAB)	Aussagekräftiges Aufbereiten von Datenmaterial im Hinblick auf gegebene Fragestellungen, Erstellen eines Berichts

### C) Teamarbeit: Kommunikation, Arbeitseinteilung, Verlässlichkeit

## 0 Grundlagen aus Elektrotechnik und Mathematik

### 0.1 Mittelwert und Effektivwert: Integrale

#### 0.1.1 Mittelwert, Gleichrichtmittelwert

##### ANALYSIS:

Der Mittelwert einer Funktion im Intervall  $[a, b]$  ist definiert durch das Integral

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

##### GELEK:

Ein Drehspulinstrument oder ein Digitalmultimeter im "DC"-Modus zeigen bei einer zeitlich veränderlichen Spannung deren Mittelwert an.

Das ist beim Drehspulmessgerät (Abbildung 0.1) konstruktionsbedingt der Fall. Aufgrund der Massenträgheit von Spule, Spulenkörper und Zeiger kann die Anzeige schnellen Änderungen des Stromes nicht folgen.

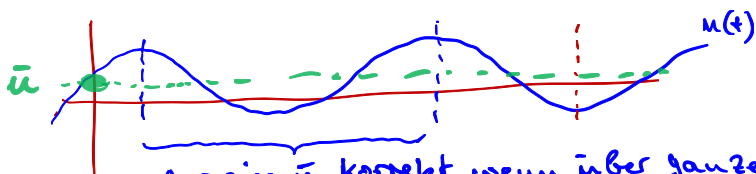
Digitalmultimeter müssen diese Eigenschaft digital nachgebilden.

Ein Digitalmultimeter wird zu diesem Zweck auf den Modus "DC-Messung" eingestellt und berechnet dann den Mittelwert, also das obige Integral, numerisch aus dem anliegenden Signalverlauf.

##### Beispiele:

- a) Bei einem Wechselstrom  $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t)$  wird das Instrument Null anzeigen, bei niedrigen Frequenzen ( $f < 10\text{Hz}$ ) ist eventuell eine Bewegung des Zeigers wahrnehmbar.

Ein Digitalmultimeter wird evtl. wechselnde Werte anzeigen, da zwar das Integral über eine Periode des Sinus oder Cosinus gleich Null ist, das Multimeter aber einen Signalausschnitt auswertet, der nicht unbedingt einer Periode oder einem Vielfachen davon entspricht.



Anzeige  $\bar{u}$  korrekt, wenn über ganze Periodendauern gemessen wird, sonst abweichend. zu kleiner Wert z.B. bei Messung bis !



Abbildung 0.1: Drehspul-Instrument "µA-MULTIZET" (oben), Digitalmultimeter "METRAHIT XTRA" (unten)

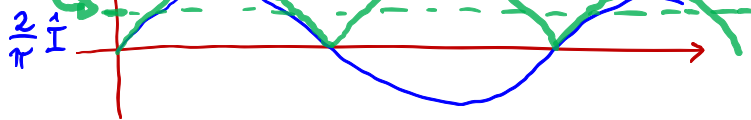


TRns  
Sicherungen

b) Gleichrichtmittelwert

Wird der Strom gleichgerichtet (z. B. mit einer Dioden-Gleichrichterbrücke), so erhält man den Stromverlauf

$$i(t) = |\hat{I} \cdot \cos(\omega t)|$$



Den Anzeigewert (Mittelwert) erhält man durch Integration über eine Periode:

$$\begin{aligned} \overline{|i(t)|} &= \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |\hat{I} \cdot \cos(\omega t)| dt = 4 \cdot \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \hat{I} \cdot \cos(\omega t) dt \\ &= \hat{I} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos(\omega t) dt = \hat{I} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \left[ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \hat{I} \approx 0,637 \cdot \hat{I} \end{aligned}$$

Zeigt also ein Drehspulinstrument bzw. ein Digitalmultimeter im "DC"-Modus bei einem gleichgerichteten sinusförmigen Strom den Wert  $1 A$  an, so beträgt der Spitzenwert  $\hat{I} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 A \approx 1,57 A$ .

$$\bar{I} = 1 A$$

## 0.1.2 Effektivwert, Scheitelfaktor, Formfaktor

## ANALYSIS:

Der Effektivwert einer Funktion im Intervall  $[a, b]$  ist definiert durch das Integral

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx}$$



GELEK:

$$(Verlust) Leistung \quad P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R I^2$$

Welche mittlere Leistung setzt ein sinusförmiger Strom der Amplitude  $\hat{I}$  an einem ohmschen Widerstand um? Der Effektivwert ist der Wert des Gleichstroms, der die gleiche Verlustleistung erzeugen würde.

Effektivwerte werden analog von einem Dreheiseninstrument oder von einem Digitalmultimeter im "AC"-Modus angezeigt.

Der Ausschlag eines Dreheiseninstruments ist konstruktionsbedingt proportional zum Quadrat des Messstroms. Die Trägheit des Zeigers bewirkt die Mittelwertbildung und die Wurfelfunktion wird durch eine nichtlineare Teilung der Skala nachgebildet.

Ein Digitalmultimeter muss für diese Messung auf den Modus "AC" eingestellt werden und berechnet dann das obige Integral numerisch aus dem anliegenden Signalverlauf.

Übung: Wie kommt man von der obigen Definition her auf den Rechenansatz für  $I_{eff}$  im folgenden Beispiel?

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = R \cdot I_{eff}^2$$

$\underbrace{(i(t))^2 \cdot R}_{(i(t))^2 \cdot R}$

Beispiel:

Bei einem Wechselstrom  $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t)$  erhält man den Effektivwert (oder RMS-Wert, "root mean square") wie folgt:

$$\begin{aligned}
 I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\hat{I} \cdot \cos(\omega t))^2 dt} \\
 &= \hat{I} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt} = \hat{I} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} t \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{I} \approx 0,707 \cdot \hat{I}
 \end{aligned}$$

Das Verhältnis von Spitzenwert zu Effektivwert

$$S = \frac{\hat{I}}{I_{eff}}$$

heißt Scheitelfaktor bzw. in der technischen Diagnostik auch "Crest-Faktor".

Er ist von der Signalform abhängig und beträgt für den sinusförmigen Strom  $S = \sqrt{2}$ .

Für sinusförmige Signalverläufe kann der Effektivwert auch durch Gleichrichtung und Mittelwertbildung bestimmt werden (siehe oben: Gleichrichtmittelwert):

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\overline{|i(t)|}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \overline{|i(t)|}$$

Der Faktor

$$F = \frac{I_{eff}}{\overline{|i(t)|}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$$

heißt Formfaktor.

Diese Methode der Effektivwertmessung setzt allerdings die exakte Sinusform des Messsignals voraus. Digitalmultimeter, die den Effektivwert anhand des obigen Integrals ermitteln und somit auch andere Signalformen korrekt verarbeiten, tragen die Bezeichnung "True RMS".

### 0.1.3 Vorteile von Digitalmultimetern gegenüber Analog-Instrumenten

Im Gegensatz zu Zeigerinstrumenten können Digitalmultimeter durch hochohmige Eingangsstufen dem Ideal der stromlosen Messung recht nahe kommen.

Außerdem müssen Zeigerinstrumente unter exakt senkrechtem Blickwinkel abgelesen werden, um Ablesefehler ("**Parallaxenfehler**") zu vermeiden.

## 0.2 Übungen zu Mittelwert, Effektivwert, Scheitelfaktor, Formfaktor

### 0.2.1 Mittelwert

- a) Welchen Wert zeigt ein Drehspulinstrument bzw. ein Digitalmultimeter im "DC"-Modus an, wenn die Spannung  $u(t) = |5V \cdot \sin(4\pi t)|$  anliegt?

Hinweis: Integration über eine Periode, also z. B. von einer Nullstelle zur nächsten.

- b) Beim AS-i - Bus (Aktuator-Sensor-Interface) werden Signale in Form von Strompulsen der Form  $i(x) = I_0 \sin^2(x)$  übertragen. Welchen Strom-Mittelwert hat ein solcher Puls?

Hinweis: Erst mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen, dass  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$  !

### 0.2.2 Effektivwert

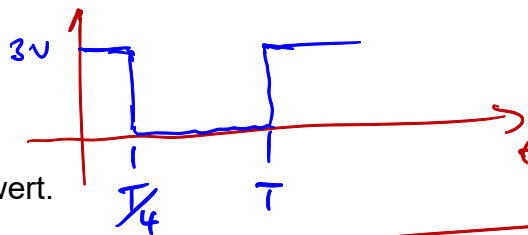
Bestimmen Sie den Effektivwert des Stroms  $i(t) = 5A \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$ . Prüfen Sie das Ergebnis anhand des Scheitelfaktors für sinusförmige Signale.

Auch hier helfen die Hinweise aus Aufgabe 0.2.1.

### 0.2.3 Mittelwert, Effektivwert

Eine Periode der Rechteckschwingung mit Tastgrad 1:4 (Verhältnis der Impulsdauer zur Periodendauer) ist gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} 3V & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & \frac{T}{4} \leq t < T \end{cases}$$



Bestimmen Sie Mittelwert und Effektivwert.

### 0.2.4 Scheitelfaktor, Formfaktor

- a) Bestimmen Sie den Scheitelfaktor und den Formfaktor für eine symmetrische Rechteckschwingung.
- b) Welcher Formfaktor ergibt sich für Dreieckschwingungen?

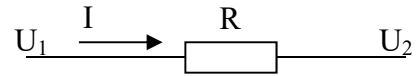
### 0.2.5 RMS

Die METRAHIT-Digitalmultimeter, mit denen wir im Labor arbeiten, werden im Datenblatt als "TRMS Multimeter" bezeichnet. Was bedeutet das?

### 0.3 Kirchhoffsche Gesetze, Spannungsteiler, Arithmetik

#### 0.3.1 Spannungsabfall, Spannungsteiler

Liegen an einem Widerstand die (gegen Masse gemessenen) Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  an, so gilt:



$$R = \frac{U_1 - U_2}{I} \quad (\text{Die Reihenfolge im Zähler ergibt sich aus der Richtung des Stromes!})$$

$$\text{Einheiten: } 1 \Omega = \frac{1V}{1A}$$

Außerdem benötigt man bei der Schaltungsberechnung ständig:

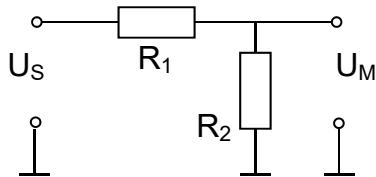
$$U_2 = U_1 - R \cdot I \quad \text{und} \quad U_1 = U_2 + R \cdot I$$

$$\text{sowie } I = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

Die Flussrichtung der Ströme muss in Ersatzschaltbildern immer angegeben werden. Keine Ausnahme!

Dies in Verbindung mit den Kirchhoffschen Gesetzen (Knoten- und Maschenregel) ist das kleine ABC der Elektrotechnik.

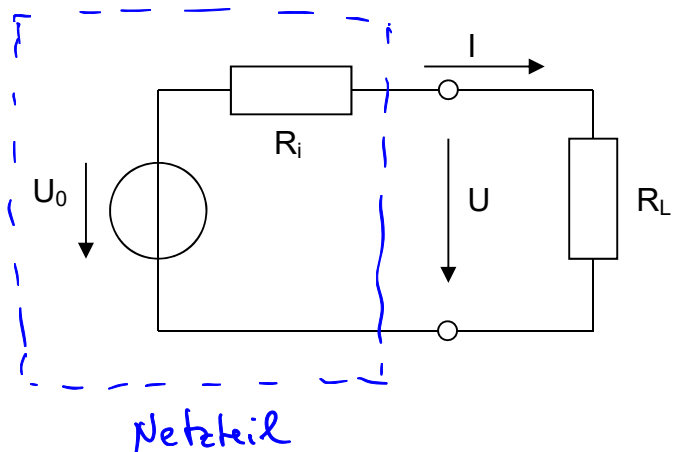
Ein ständig benötigtes Resultat dieses ABC ist die Ausgangsspannung eines unbelasteten Spannungsteilers (Spannungsteilerregel)



$$U_M = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$$

Beispiel:

In der nebenstehenden Schaltung mit  $U_0 = 1V$  und  $R_L = 200 \Omega$  wurde  $U = 0,8V$  gemessen. Wie groß ist der Innenwiderstand?



$$R_i = \frac{U_0 - U}{I}, \quad I = \frac{U}{R_L}$$

$$= R_L \cdot \frac{U_0 - U}{U}$$

$$= 200 \Omega \cdot \left( \frac{1 - 0,8}{0,8} \right) = \frac{200 \Omega}{4} = 50 \Omega$$

DC-Spannung



### 0.3.2 Widerstandskaskaden zur Messbereichsumschaltung

Spannungsteiler bestimmen das Innenleben analoger Zeigerinstrumente, wo sie mittels Widerstandskaskaden die Wahl des Messbereichs ermöglichen, siehe Abbildung 0.2.

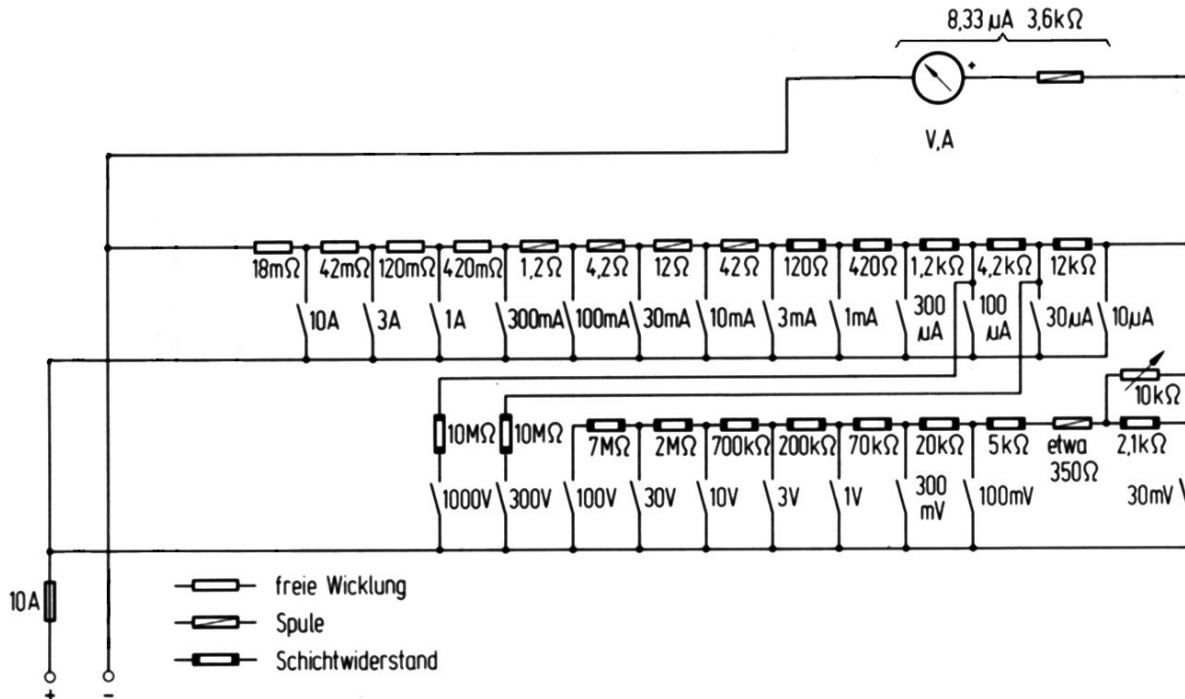


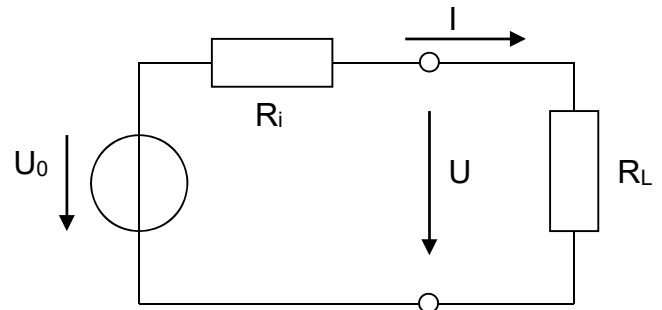
Abbildung 0.2: Messbereichsumschaltung beim  $\mu\text{A}$ -MULTIZET (Siemens)

Auch die Messbereichsumschaltung bei modernen Multimetern und Oszilloskopen basiert auf Spannungsteilern. Obwohl sie hier durch einstellbare Eingangsverstärker realisiert ist und teils automatisch erfolgt.

## 0.4 Übungen zu Schaltungen mit Ohmschen Widerständen

### 0.4.1 Parameter einer nicht-idealen Spannungsquelle

In der abgebildeten Schaltung werden durch Änderung von  $R_L$  nacheinander zwei verschiedene Ströme  $I_1$  und  $I_2$  eingestellt. Nach welcher Formel errechnen sich aus diesen Strömen und den zugehörigen Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  der Innenwiderstand  $R_i$  und die Leerlaufspannung  $U_0$ ?



### 0.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

In der abgebildeten Schaltung ist  $R_M = 0,1 \Omega (\pm 0,1\%)$

ein Messwiderstand.  $R_S$  soll bestimmt werden.  $\Delta R_M = 0,1 \text{ m}\Omega$

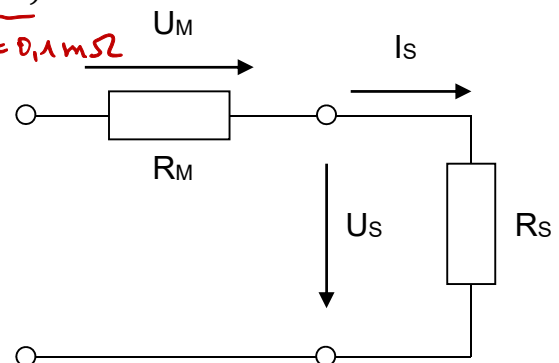
Gemessen wird

$$U_M = 0,14 \text{ V} \pm 0,01 \text{ V}$$

$$U_S = 14,3 \text{ V} \pm 0,3 \text{ V}$$

a) Welches Ergebnis erhält man für  $R_S$ ?

b) Wie groß ist die Unsicherheit  $\Delta R_S$ ?



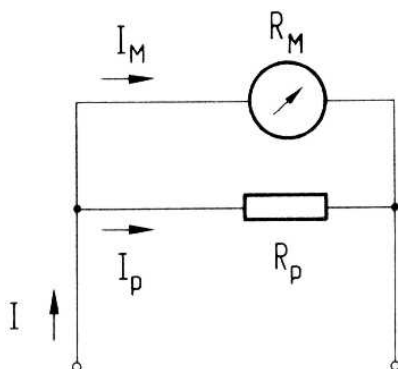
Anmerkung: Typische Schaltung für eine einfache Strom- und Impedanzmessung.

$$I_S = \frac{U_M}{R_M} \quad R_S = \frac{U_S}{I_S} = R_M \cdot \frac{U_S}{U_M} \quad \text{Wie unsicher ist dieser Wert?}$$

$\Delta R_S$  mittels Fehlerfortpflanzungsrechnung bestimmen.

$$\frac{\Delta R_S}{R_S} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_M}{R_M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_S}{U_S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_M}{U_M}\right)^2}$$

### 0.4.3 Messbereiche der Strommessung



Das Messwerk mit dem Innenwiderstand  $R_M = 3,6 \text{ k}\Omega$  zeigt Vollausschlag, wenn der Strom  $I_M = 8,33 \mu\text{A}$  fließt.

a) Bei welchem Strom  $I$  ergibt sich Vollausschlag, wenn  $R_P = 18 \text{ k}\Omega$  gewählt wird?

b) Welcher Widerstand  $R_P$  muss gewählt werden, damit Vollausschlag bei  $I = 1 \text{ mA}$  erreicht.

Lösung a): siehe Abbildung!

$$I = I_M + I_P = I_M + \frac{R_M I_M}{R_P} = 8,33 \mu\text{A} \cdot \left(1 + \frac{3,6}{18}\right) = 10 \mu\text{A}$$

*siehe Regularien und Hinweise zum Labor. Diese Formel daraus herleiten!*

#### 0.4.4 Messbereiche der Spannungsmessung

Der Spannungsmessbereich wird über Vorwiderstände eingestellt, die mit der Parallelschaltung von Messwerk und  $R_P$  einen Spannungsteiler bilden.

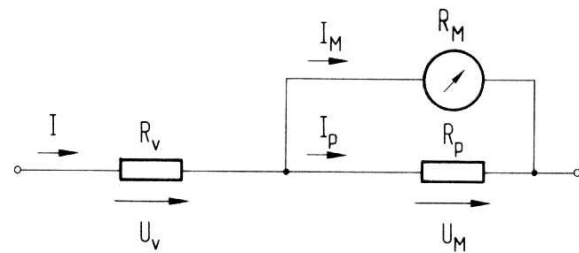


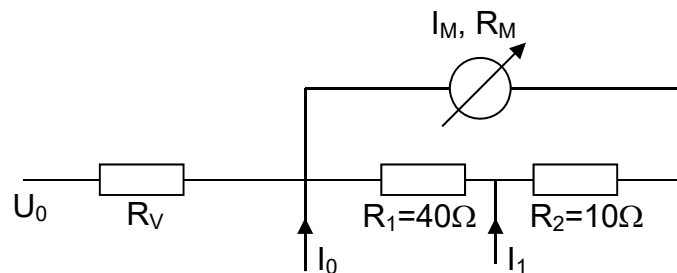
Abbildung 0.3: Einstellung des Spannungsmessbereichs durch einen Reihenwiderstand

- Das Messwerk habe die gleichen Daten wie in Aufgabe 0.4.3. Wie groß ist die über  $R_P = 18\text{ k}\Omega$  abfallende Spannung  $U_M$ ?
- Wie groß ist  $R_V$  zu wählen, damit das Messwerk Vollausschlag zeigt, wenn über der gesamten Schaltung in Abb. 0.3 die Spannung  $U = 100\text{ mV}$  anliegt?

#### 0.4.5 Strom- und Spannungsmessbereiche 1

Gegeben ist ein Messwerk mit  $R_M = 200\Omega$  und Vollausschlag bei  $I_M = 0.4\text{ mA}$ .

- Welche Strommessbereiche erhält man für  $I_0$  und  $I_1$  bei der skizzierten Beschaltung?
- Welcher Vorwiderstand ist erforderlich für einen Spannungsmessbereich  $U_0 = 1\text{ V}$ ?



#### 0.4.6 Strom- und Spannungsmessbereiche 2

Verifizieren Sie durch Rechnung die Messbereiche des Multimeters mit dem in Abbildung 0.4 dargestellten Schaltplan.

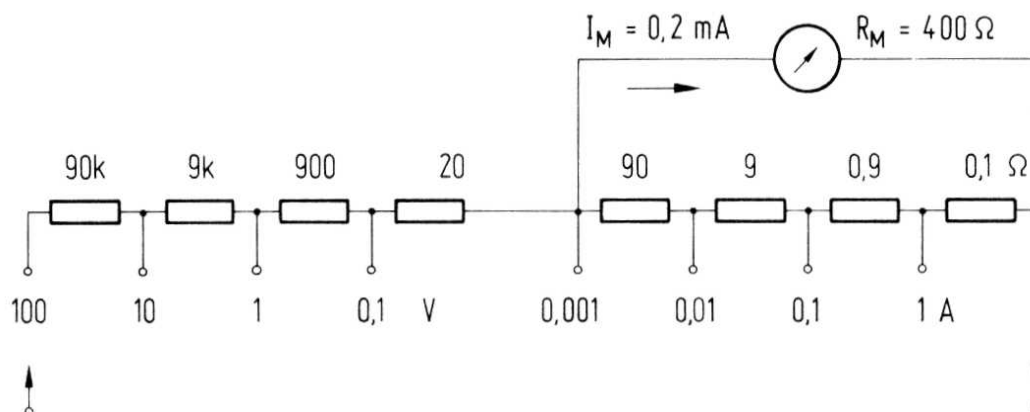


Abbildung 0.4: Messinstrument mit Messbereichumschaltung für Strom und Spannung

## 0.5 RLC-Netzwerke, Zeigerdarstellung, komplexe Zahlen

Bei der Berechnung des Eingangs-Ausgangs-Verhaltens von RLC-Netzwerken für sinusförmige Spannungen und Ströme hat sich die komplexe Zeigerdarstellung bewährt. Mit ihr lässt sich das Verhalten von Kondensatoren und Induktivitäten durch komplexe Impedanzen darstellen.

Das Übertragungsverhalten eines RLC-Netzwerks wird dabei durch den Frequenzgang beschrieben. Dieser wird aus den komplexen Impedanzen berechnet (komplexe Spannungsteiler).

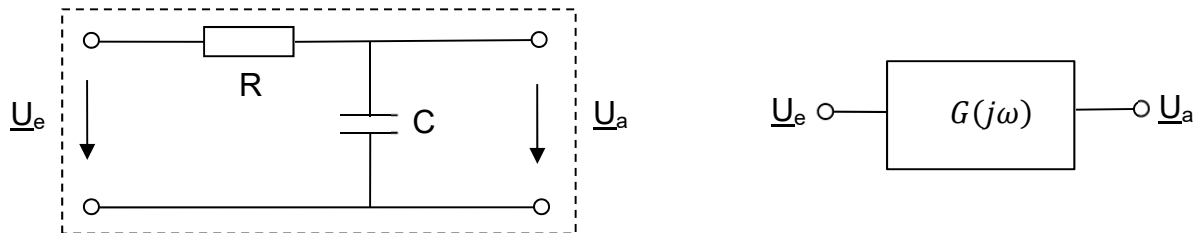


Abbildung 0.3: RLC-Netzwerk als frequenzabhängiges Übertragungssystem

### 0.5.1 Mathematische Grundlagen

Für eine komplexe Zahl  $z = a + jb$  ist bekannt:

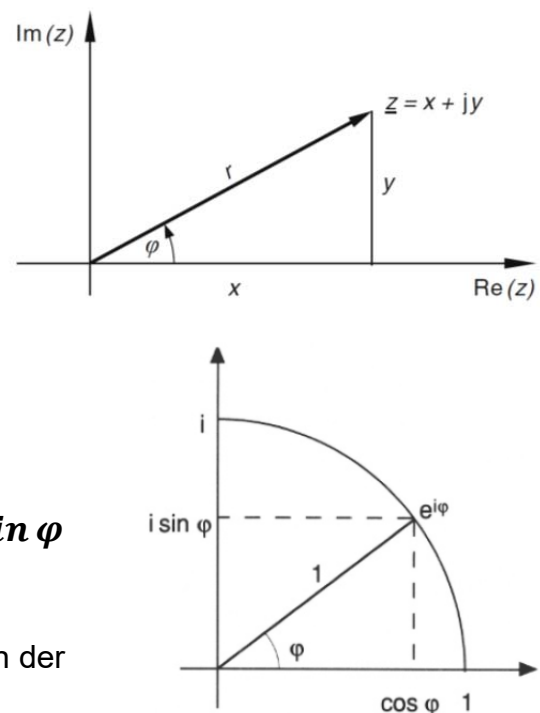
**Betrag:**  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Argument:**  $\varphi = \angle(z) = \arg(z)$   
 $= \arctan \frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}} = \arctan \frac{b}{a}$

**Polardarstellung:**  $z = |z| \cdot e^{j\varphi}$

**Euler'sche Formel:**  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

Es ist  $|e^{j\varphi}| = 1$ ,  $e^{j\varphi}$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), stellt also in der komplexen Zahlenebene den Einheitskreis dar.



**Multiplikation** von  $z_1 = |z_1| \cdot e^{j\varphi_1}$  und  $z_2 = |z_2| \cdot e^{j\varphi_2}$ :

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (\text{Produkt der Beträge, Summe der Winkel})$$

**Division:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

(Quotient der Beträge, Differenz der Winkel)

### 0.5.2 Zeigerdarstellung sinusförmiger Signale

Eine sinusförmige Spannung wird dargestellt durch Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung:

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$$

Bei der Schaltungsanalyse stellt man schnell fest, dass die Rechnung mit der Exponentialfunktion wesentlich einfacher ist als die mit trigonometrischen Funktionen. Deshalb benutzt man

$$\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

und damit

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\hat{U} e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \operatorname{Re}\{\hat{U} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{Diese Trennung bräuhle bei sin/cos die Additionstheoreme!}$$

Bei sinusförmigem Eingangssignal der Frequenz  $\omega$  haben alle Ströme und Spannungen in einem RLC-Netzwerk diese Frequenz  $\omega$ .

Zu berechnen bleiben dann nur noch die Amplituden und Phasenverschiebungen. Diese sind in dem ersten Term in den geschweiften Klammern zusammengefasst.

Man nennt diesen Term "komplexer Zeiger der Spannung  $u(t)$ " und schreibt

$$\underline{U} := \hat{U} e^{j\varphi} \quad \left( \text{in energietechnischen Anwendungen: } U_{eff} \text{ statt } \hat{U} \right)$$

Eine entsprechende Darstellung gilt natürlich auch für Ströme:  $\underline{I} = \hat{I} e^{j\varphi}$

Es gilt  $\hat{U} = |\underline{U}|$  und  $\varphi = \arg(\underline{U}) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{U}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{U}\}}$ , so dass sich aus den komplexen Zeigern die real interessierenden Größen Amplitude und Phasenlage jederzeit errechnen lassen.

### 0.5.3 Komplexe Impedanzen, Kondensator

Die Kapazität  $C$  eines Kondensators gibt das Verhältnis von Ladung  $Q$  zur Spannung  $U$  an. Stromfluss ändert die Ladung (es gilt  $I = \frac{dQ}{dt}$ ) so dass die Strom-Spannungsverhältnisse am Kondensator durch  $\underline{Q} = C \cdot \underline{U}$

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

beschrieben werden. Für eine sinusförmige Spannung  $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t)$  bedeutet das

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -C \cdot \hat{U} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = \omega C \cdot \hat{U} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

wobei die zweite Gleichung aus der 90°-Verschiebung des Sinus gegenüber dem Kosinus resultiert.

<sup>1</sup> In der Energietechnik und Leistungselektronik legt man alternativ meist  $|\underline{U}| = U_{eff}$  fest.

In der Zeiger-Schreibweise, also mit  $u(t) = \operatorname{Re}\{\hat{U} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot e^{j\omega t}\}$ , stellt sich dies so dar:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$= \operatorname{Re}\{j\omega C \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega t}\}$$

I

$U = R \cdot I$  Ohmsches Gesetz

Für die Zeiger gilt also einfach  $\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$  bzw.  $\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$ .

Diese Beziehung zwischen Strom und Spannung an einem Kondensator entspricht dem Ohm'schen Gesetz. Deshalb definiert man

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

als komplexe Impedanz des Kondensators.

Nimmt man für die Spannung den Phasenwinkel Null an (Bezugsgröße), dann gilt wegen  $\underline{U} = \hat{U}e^{j0} = \hat{U}$  und  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$



$$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U} = \omega C \cdot \hat{U} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}},$$

also  $\underline{I} = \hat{I}e^{j\varphi}$  mit  $\hat{I} = \omega C \cdot \hat{U}$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , wie oben bei der reellen Rechnung.

Beispiel:

Welche Stromamplitude ergibt sich, wenn über einem Kondensator mit der Kapazität  $C = 100 \text{ nF}$  eine sinusförmige Spannung mit der Frequenz  $f = 1 \text{ kHz}$  und der Amplitude  $\hat{U} = 5 \text{ V}$  abfällt?

### 0.5.4 Komplexe Impedanzen, Induktivität

Die ideale Spule wird beschrieben durch die Induktivität  $L$  und es gilt

$$U = L \frac{dI}{dt}.$$

Fließt ein sinusförmiger Strom (in Zeiger-Schreibweise  $i(t) = \operatorname{Re}\{\hat{I} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\}$ ) so errechnet sich die über der Spule abfallende Spannung aus

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \operatorname{Re}\{\underline{I} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{j\omega L \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}\} \\ &=: \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

Für die Zeiger gilt also einfach  $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$ .

Auch hier hat das Verhältnis der Strom- und Spannungszeiger die Form des Ohm'schen Gesetzes und man definiert

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

als **komplexe Impedanz der idealen Spule** mit Induktivität  $L$ .

Wegen  $\underline{I} = \hat{I}e^{j0} = \hat{I}$  und  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  gilt

$$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I} = \omega L \cdot \hat{I} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \hat{U}e^{j\varphi},$$

$$\text{also } \hat{U} = |\underline{Z}_L| \cdot \hat{I} \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Der positive Phasenwinkel bedeutet eine Linksverschiebung des Kosinusverlaufs. An der Spule eilt also die Spannung dem Strom voraus bzw. der Strom der Spannung nach! Beim Kondensator ist das umgekehrt.

### 0.5.5 Serien- und Parallelschaltung komplexer Impedanzen

Beispiel:

Reale Spule (**Serienschaltung von ohmschem Widerstand und Induktivität**)

Welchen Spannungsabfall verursacht ein Strom mit der Amplitude  $\hat{I} = 1A$  und der Frequenz  $\omega = 2\pi \cdot 500Hz$  an einer Spule, die den ohmschen Widerstand  $R = 2\Omega$  und die Induktivität  $L = 2mH$  hat?

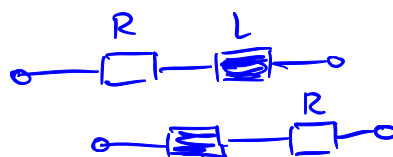
Anwendung der Zeigerrechnung liefert:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} = (R + j\omega L) \cdot \underline{I}$$

Die Serienschaltung hat also die Gesamtimpedanz

$$Z = R + j\omega L \text{ mit dem Betrag } |Z| = |R + j\omega L| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \approx \sqrt{4 + (6,28)^2} \approx 6,6\Omega.$$

Der Spannungsabfall hat somit die Amplitude  $\hat{U} = |Z| \cdot \hat{I} \approx 6,6\Omega \cdot 1A = 6,6V$ .



Impedanz der **Serienschaltung von Widerstand und Kondensator** mit Kapazität  $C$ :

$$Z_{RC,s} = R + \frac{1}{j\omega C} \left( = R - j \frac{1}{\omega C} \right), \quad |Z_{RC,s}| = \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Für niedrige Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  geht der Widerstand demnach gegen  $\infty$ .

*Empfehlung: Rechnungen mit  $\frac{1}{j\omega C}$  durchführen, nicht mit  $-\frac{j}{\omega C}$ .*

Impedanz der **Parallelschaltung von Widerstand und idealer Spule** der Induktivität  $L$ :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{R \cdot j\omega L} \cdot \underline{U} \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \underline{I} \quad \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right)$$

also:

$$Z_{RL,p} = \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} = R \cdot \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

*In dieser Darstellung werden die imaginärteile dimensionslos.  $\frac{L}{R}$  wird als Zeitkonstante sichtbar*

Beispiel/Übung

Zu einem Widerstand  $R = 100 \, \Omega$  ist eine ideale Spule mit der Induktivität  $L = 4 \, \text{mH}$  parallelgeschaltet. Welcher Spannungsabfall ergibt sich bei einem Strom mit der Amplitude  $\hat{I} = 1 \, \text{A}$  und der Frequenz  $f = 100 \, \text{Hz}$ ?



Impedanz der **Parallelschaltung von Widerstand und Kondensator**:

$$Z_{RC,p} = \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

*dimensionales*

*Tastkopfaufgabe in der Vorbereitung OS 7*



Impedanz der **Serienschaltung von idealer Spule und Kondensator**:

$$Z_{LC,s} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$



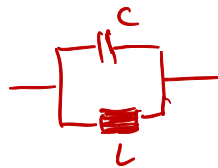
Der Widerstand dieser Schaltung kann also Null werden! Das geschieht, wenn

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega^2 LC = 1,$$

also bei der Frequenz  $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (Resonanzfrequenz).

Impedanz der **Parallelschaltung von idealer Spule und Kondensator**:

$$Z_{LC,p} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$



Der Widerstand dieser Schaltung geht bei der Resonanzfrequenz  $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  gegen  $\infty$ !

### 0.5.6 Spannungsverhältnisse in RLC-Netzwerken

Das Verhältnis der Spannungen an zwei Messpunkten in einem RLC-Netzwerk ist

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\hat{U}_1 e^{j\varphi_1}}{\hat{U}_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

*Übertragungsverhalten*

Also erhält man die Signalverstärkung (bzw. Dämpfung) von Punkt 1 nach Punkt 2 aus

$$V = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right| = \frac{|\underline{U}_1|}{|\underline{U}_2|}$$

(Quotient der Zeigeramplituden)

und die Phasenverschiebung der beiden Signale an den Messpunkten aus

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

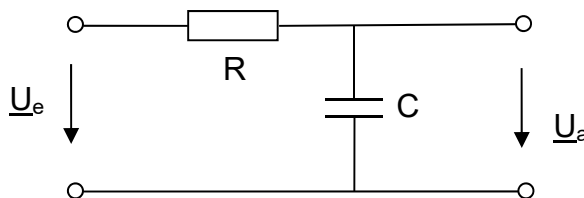
(Differenz der Zeigerphasenwinkel).

Das wird zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens von RLC-Netzwerken in Form des Frequenzgangs  $G(j\omega)$  benutzt.

### 0.5.7 Komplexe Spannungsteiler, Frequenzgang, Filterschaltungen

Die Frequenzabhängigkeit der Impedanz von RLC-Kombinationen wird beim Aufbau von Filterschaltungen genutzt.

Um Signalverläufe zu glätten und höherfrequente Störungen zu mindern, werden **Tiefpassfilter** eingesetzt. Am einfachsten ist der **RC-Tiefpass**



Wegen  $\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{R+Z_C}$  und  $\underline{I} = \frac{\underline{U}_a}{Z_C}$  gilt in der Zeigerdarstellung mit komplexen Impedanzen auch die Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Grenzfrequenz aus  $|G(j\omega_g)| = \frac{\max(|G(j\omega)|)}{\sqrt{2}}$

$\omega_g = 2\pi f_g$

$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi}$

Für die Amplituden gilt

$$\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

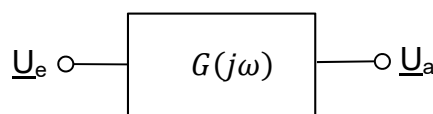
(Dämpfung)

Verstärkung von  $U_e$  zu  $U_a$ , frequenzabhängig

Die Spannungsverstärkung der Schaltung ist also von der Frequenz abhängig und geht für sehr hohe Frequenzen ( $\omega \rightarrow \infty$ ) gegen Null.

Man nennt das Verhältnis der Spannungszeiger den **Frequenzgang** der Filterschaltung und schreibt

$$\underline{U}_a(j\omega) = G(j\omega) \cdot \underline{U}_e(j\omega).$$



Hat  $u_e(t)$  den Phasenwinkel Null (Bezugsgröße), so gilt bei gegebener Frequenz  $\omega$

$$\hat{U}_a = |G(j\omega)| \cdot \hat{U}_e$$

und

$$\varphi_a = \arg(G(j\omega)) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}},$$

also

$$u_a(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U}_e \cdot \cos(\omega t + \varphi_a)$$

Man nennt die frequenzabhängige Verstärkung  $|G(j\omega)|$  auch den **Amplitudengang** bzw. **Betragsfrequenzgang** und  $\arg(G(j\omega))$  den **Phasengang** der Filterschaltung.

### 0.5.8 Bode-Diagramm

Der Frequenzgang liefert Amplitude und Phasenverschiebung des Ausgangssignals eines Filters für sinusförmige Eingangssignale

Zur grafischen Darstellung wird üblicherweise eine logarithmische Frequenzachse sowie eine logarithmische Achse für die Verstärkung und eine lineare, in [°] skalierte Achse für die Phasenverschiebung verwendet. Wird der Amplitudengang dabei in dB skaliert, spricht man vom **Bode-Diagramm**.

Definition "Dezibel" (für Spannungsverhältnisse)<sup>1</sup>:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \lg|G(j\omega)|.$$

$$\lg(1) = 0$$

$$\lg(0,1) = -1$$

$$\lg(10) = 1$$

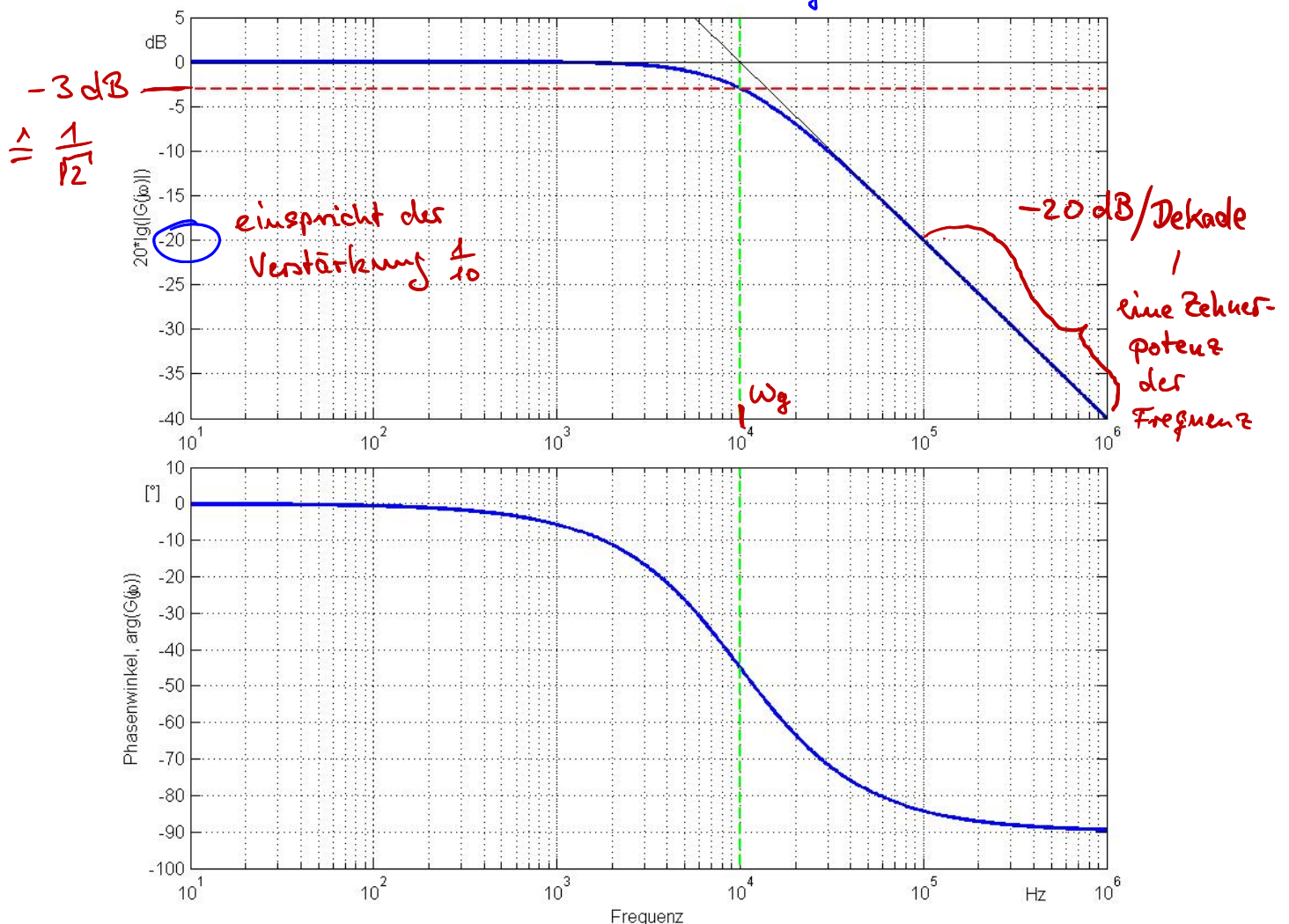


Abbildung 0.4: Messbereichsumschaltung beim  $\mu\text{A-MULTIZET}$  (Siemens)

Man nennt das oben dargestellte Übertragungsverhalten Tiefpassverhalten, da niederfrequente Signale bezüglich Amplitude und Phasenlage praktisch unverändert auf den Ausgang übertragen werden, während hochfrequente Signale stark abgeschwächt werden.

<sup>1</sup> Geht es um die übertragene Leistung  $P$ , so verwendet man die Definition  $|G|_{dB} = 10 \cdot \lg|G|$ .