1.2 Automatisierte Messung

1.2.1 Auswertung Pt-100

Unsicherheit ΔR_{pt100} mittels Fehlerfortpflanzung

Messwert	Unsicherheit
Widerstand $R_{pt100} = 108,23\Omega$	
Vorwiderstand $vR_{pt100} = 998\Omega$	$\pm(0,2\% \cdot MW + 5D)$

Die absolute Unsicherheit $\Delta vR_{pt100} = \pm(0,2\% \cdot 998\Omega + 5D) = 2,496\Omega$

Die relative Unsicherheit $\frac{\Delta vR_{pt100}}{vR_{pt100}} = \frac{2,496\Omega}{998\Omega} = 0,0025 = 0,25\%$

Berechnung der Unsicherheiten der Messspannungen gemäß Anhang B berechnen mit $U_0 = 1V\ und\ U_M = 0,11V$. Im Messbereich $\pm 0,2V$ haben diese gemittelte Messwerte eine Toleranz, die sich aus „Gain Error“, "Offset Error" (+INL) und "Noise" wie rechnen lässt:

$$\Delta U_0 = \frac{135.10^{-6} \cdot 1V + (40 + 76) \cdot 10^{-6} \cdot 0,2V + 3 \cdot 13\mu V}{10} \approx 19,72\mu V$$

$$\Delta U_M = \frac{135.10^{-6} \cdot 0,11V + (40 + 76) \cdot 10^{-6} \cdot 0,2V + 3 \cdot 13\mu V}{10} \approx 7,7\mu V$$

Aus der dritten Frage der Vorbereitung gilt $R_{pt100} = \frac{vR_{pt100} \cdot U_M}{U_0 - U_M}$

Daraus kann die Unsicherheit ΔR_{pt100} mittels Fehlerfortpflanzung folgendes berechnet werden:

$$\Delta R_{pt100_{vR_{pt100}}} = \left| \frac{\partial R_{pt100}}{\partial vR_{pt100}} \cdot \Delta vR_{pt100} \right| = \frac{U_M \cdot \left(U_0 - U_M \right)}{\left(U_0 - U_M \right)^2} \cdot \Delta vR_{pt100}$$

$$\Delta R_{pt100_{vR_{pt100}}} = \frac{0,11V \cdot (1V - 0,11V)}{(1V - 0,11V)^2} \cdot 2,496\Omega = 0,308\Omega$$

$$\Delta R_{pt100_{U_M}} = \left| \frac{\partial R_{pt100}}{\partial U_M} \cdot \Delta U_M \right| = \frac{vR_{pt100} \cdot \left(U_0 - U_M \right) + vR_{pt100} \cdot U_M}{\left(U_0 - U_M \right)^2} \cdot \Delta U_M$$

$$\Delta R_{pt100_{U_M}} = \frac{998\Omega \cdot (1V - 0,11V) + 998\Omega \cdot 0,11V}{(1V - 0,11V)^2} \cdot 7,7\mu V = 9,701 m\Omega$$

$$\Delta R_{pt100_{U_0}} = \left| \frac{\partial R_{pt100}}{\partial U_0} \cdot \Delta U_0 \right| = - \frac{vR_{pt100} \cdot U_M}{\left(U_0 - U_M \right)^2} \cdot \Delta U_0$$

$$\Delta R_{pt100_{U_0}} = - \frac{998\Omega \cdot 0,11V}{(1V - 0,11V)^2} \cdot 19,72\mu V = -2,733 m\Omega$$

$$\Delta R_{pt100} = \sqrt{\Delta R_{pt100_{vR_{pt100}}}{}^2 + \Delta R_{pt100_{UM}}{}^2 + \Delta R_{pt100_{U_0}}{}^2}$$

$$\Delta R_{pt100} = \sqrt{(0,308\Omega)^2 + (9,701 m\Omega)^2 + (-2,733 m\Omega)^2} = 0,308\Omega$$

$$Relative\ Unsicherheit: \frac{\Delta R_{pt100}}{R_{pt100}} = \frac{0,308\Omega}{108,23\Omega} \approx 0,0029 = 0,29\%$$

Mit der Fehlerfortpflanzungsrechnung und dem Wert von ΔR_{pt100} ist zugehörige Unsicherheit eines Einzelmesswertes der Temperatur wie folgt zu berechnen:

$20,1^\circ C$ wird aus den Temperaturmesswerten aus LabView ausgewählt. Gemäß Fehlerfortpflanzungsrechnung lässt sich die folgende Unsicherheit bestimmen:

$$\Delta \vartheta_{pt100} = \frac{\partial \vartheta}{\partial R_{pt100}} \Delta R_{pt100}$$

$$\Delta \vartheta_{pt100} = -\frac{1}{2 \cdot R_0 \cdot B \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{2B}\right)^2 - \frac{R_0 - R_{pt100}}{R_0 \cdot B}}} \cdot \Delta R_{pt100}$$

$$\Delta \vartheta_{pt100} = -\frac{1}{2 \cdot 100\Omega \cdot -5,775 \cdot 10^{-7°}C^{-2}\sqrt{\left(\frac{3,9083 \cdot 10^{-3°}C^{-1}}{2 \cdot -5,775 \cdot 10^{-7°}C^{-2}}\right)^2 - \frac{100\Omega - 109,049\Omega}{100\Omega \cdot -5,775 \cdot 10^{-7°}C^{-2}}}} \cdot 0,308\Omega$$

$$\Delta \vartheta_{pt100} \approx 0,8°C$$

Aus den 5 Temperaturmesswerten sollte hier die zufällige Messunsicherheit der Temperatur für ein Vertrauensniveau von 95% bestimmt werden:

#	$R_{pt100}\,[\Omega]$	$\vartheta_{pt100_k}\,(°C)$
1	108,92	22,9
2	108,8	22,5
3	108,76	22,48
4	108,73	22,41
5	108,61	22,1

Dafür wird den statischen Mittelwert benutzt:

$$\overline{\vartheta}_{pt100_k} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5}\vartheta_n = 22,478°\,C$$

Die statistische Standardabweichung lässt ebenfalls wie folgt bestimmen:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\vartheta_n - \overline{\vartheta}_{pt100_k}\right)^2} \approx 0,289°\,C$$

s ist ein Maß für die Größe der zufälligen Messabweichungen einer Messung. Die Messunsicherheit der Temperatur für ein Vertrauensniveau ($\alpha - 1$) von 95% ist mit hilfe der Standardabweichung zu bestimmen:

$$\Delta \vartheta_{pt100_k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n, 1-\alpha} \cdot s$$

Aus der Tabelle der Vertrauensfaktoren nach DIN 1319 kann den Vertrauensfaktor $t_{5,95} = 2,78$ abgelesen werden.

Somit kann die Messunsicherheit aus der Messreihe wie folgt bestimmt werden:

$$\Delta \vartheta_{pt100_k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2,78 \cdot 0,289° C \approx 0,35° C$$

Das vollständige Messergebnis ergibt sich:

$$\widehat{\vartheta}_{pt100_k} = \overline{\vartheta}_{pt100_k} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n, 1-\alpha} \cdot s = 22,478° C \pm 0,35° C,\ (1-\alpha) = 95\%$$

Aus den Angaben und der Toleranzklasse des Pt-100 sollte nun die Gesamtunsicherheit berechnet werden und dies ergibt sich wie folgt:

$$\Delta \vartheta_{pt100\ ges} = \sqrt{\Delta \vartheta^2_{pt100} + \Delta \vartheta_{pt100_k}{}^2} = \sqrt{0,8° C^2 + 0,35° C^2} = 0,88° C$$

1.2.2 Auswertung NTC

Der Widerstand ergibt $R_{NTC} = 1002,5\Omega$

Die Unsicherheit des Vorwiderstands $vR_{NTC} = 1002,5\Omega$ aus der Messung mit dem Multimeter lässt sich durch die folgenden Angaben aus dem Datenblatt bestimmen: $\pm(0,1\% \cdot MW + 5D)$

Die absolute Unsicherheit: $\Delta vR_{NTC} = \pm(0,1\% \cdot 1002,5\Omega + 5D) \approx 1,503\Omega$

Die relative Unsicherheit: $\frac{\Delta vR_{NTC}}{vR_{NTC}} = \frac{1,503\Omega}{1002,5\Omega} \approx 0,0015 = 0,15\%$

Dabei sollte noch $U_0 = 1V$ und $U_M = 0,9V$ als Ablesung eingesetzt werden. Auch hier wird einem Linearitätsfehler (INL) in Höhe von 76 ppm berücksichtigt.

Die gemittelten Messwerte $U_0 = 1V$ und $U_M = 0,9V$ haben auch im Messbereich $\pm 0,2V$ eine Toleranz, die aus "Gain Error", "Offset Error" (+INL) und "Noise" gerechnet werden kann:

$$\Delta U_0 = \frac{135.10^{-6} \cdot 1V + (40 + 76) \cdot 10^{-6} \cdot 0,2V + 3 \cdot 13\mu V}{10} \approx 19,72\mu V$$

$$\Delta U_M = \frac{135.10^{-6} \cdot 0,9V + (40 + 76) \cdot 10^{-6} \cdot 0,2V + 3 \cdot 13\mu V}{10} \approx 18,37\mu V$$

Nach der dritten Frage der Vorbereitung gilt $R_{NTC} = \frac{vR_{NTC} \cdot U_M}{U_0 - U_M}$

Die Unsicherheit ΔR_{pt-100} mittels Fehlerfortpflanzung berechnen:

$$\Delta R_{NTC_{R_{VNTC}}} = \left| \frac{\partial R_{NTC}}{\partial R_{VNTC}} \cdot \Delta R_{VNTC} \right| = \frac{U_M \cdot \left(U_0 - U_M \right)}{\left(U_0 - U_M \right)^2} \cdot \Delta R_{VNTC}$$

$$\Delta R_{NTC_{R_{VNTC}}} = \frac{0,9V \cdot (1V - 0,9V)}{(1V - 0,9V)^2} \cdot 1,503\Omega = 13,527\Omega$$

$$\Delta R_{NTC_{U_M}} = \left| \frac{\partial R_{NTC}}{\partial U_M} \cdot \Delta U_M \right| = \frac{R_{NTC} \cdot \left(U_0 - U_M \right) + R_{NTC} \cdot U_M}{\left(U_0 - U_M \right)^2} \cdot \Delta U_M$$

$$\Delta R_{NTC_{U_M}} = \frac{1002,5\Omega \cdot (1V - 0,9V) + 1002,5\Omega \cdot 0,9V}{(1V - 0,9V)^2} \cdot 18,37\mu V \approx 1,85\Omega$$

$$\Delta R_{NTC_{U_0}} = \left| \frac{\partial R_{NTC}}{\partial U_0} \cdot \Delta U_0 \right| = - \frac{R_{VNTC} \cdot U_M}{\left(U_0 - U_M\right)^2} \cdot \Delta U_0$$

$$\Delta R_{NTC_{U_0}} = - \frac{1002,5\Omega \cdot 0,9V}{(1V - 0,9V)^2} \cdot 19,72\mu V \approx -1,78\Omega$$

$$\Delta R_{NTC} = \sqrt{\Delta R_{NTC_{R_{VNTC}}}{}^2 + \Delta R_{NTC_{UM}}{}^2 + \Delta R_{NTC_{U_0}}{}^2}$$

$$\Delta R_{NTC} = \sqrt{(13,527\Omega)^2 + (1,85\Omega)^2 + (-1,78\Omega)^2} \approx 13,77\Omega$$

$$Relative\ Unsicherheit: \frac{\Delta R_{NTC}}{R_{NTC}} = \frac{13,77\Omega}{1002,5\Omega} \approx 0,0014 = 0,14\%$$

Aus der Fehlerfortpflanzung und aus ΔR_{NTC}, lässt sich die zugehörige Unsicherheit eines Einzelmesswertes der Temperatur (295,67K oder 22,52°C) wie folgt berechnen:

$$\Delta \vartheta_{NTC} = \frac{\partial \vartheta}{\partial R_{NTC}} \Delta R_{NTC}$$

$$\Delta \vartheta_{NTC} = - \frac{1}{2 \cdot R_0 \cdot B \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{2B}\right)^2 - \frac{R_0 - R_{NTC}}{R_0 \cdot B}}} \cdot \Delta R_{NTC}$$

$$\Delta \vartheta_{NTC} = - \frac{1}{2 \cdot 100\Omega \cdot -5,775 \cdot 10^{-7°} C^{-2} \sqrt{\left(\frac{3,9083 \cdot 10^{-3°} C^{-1}}{2 \cdot 5,775 \cdot 10^{-7°} C^{-2}}\right)^2 - \frac{100\Omega - 1002,5\Omega}{100\Omega \cdot -5,775 \cdot 10^{-7°} C^{-2}}}} \cdot 13,77\Omega$$

$$\Delta \vartheta_{NTC} \approx 31,42° C$$

Aus den 5 Temperatur-Messwerten sollte hier die zufällige Messunsicherheit der Temperatur für ein Vertrauensniveau von 95% bestimmt werden:

#	$R_{NTC}[\Omega]$	$\vartheta_{NTC}\ (K)$
1	11252,2	295,69
2	11239,7	295,71

3	11239,4	295,71
4	11245,8	295,7
5	11232,5	295,723

Um eine zufällige Messunsicherheit der Temperatur zu bestimmen, kann erst den statischen Mittelwert berechnet werden. Dies ergibt sich:

$$\overline{\vartheta}_{NTC_k} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5}\vartheta_n \approx 295,71K \approx 22,56°\,C$$

Die statistische Standardabweichung lässt ebenfalls wie folgt bestimmen:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\vartheta_n - \overline{\vartheta}_{NTC_k}\right)^2} \approx 0,37°\,C$$

ergibt sich dann hier $S = 0,37°C$

Dies ist ein Maß für die Größe der zufälligen Messabweichungen einer Messung. Die Messunsicherheit bezieht sich auf das Vertrauensniveau $(\alpha - 1)$ von 95% und diese lässt sich aus der Standardabweichung ermitteln:

$$\Delta\,\vartheta_{NTC_k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n,1-\alpha} \cdot s$$

Aus der Tabelle der Vertrauensfaktoren nach DIN 1319 wird den Vertrauensfaktor $t_{5,95} = 2,78$ abgelesen.

Somit kann die Messunsicherheit aus der Messreihe wie folgt bestimmt werden:

$$\Delta\,\vartheta_{NTC_k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2,78 \cdot 0,37°\,C = 0,46°\,C$$

Das vollständige Messergebnis ergibt sich:

$$\widehat{\vartheta}_{NTC_k} = \overline{\vartheta}_{NTC_k} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n,1-\alpha} \cdot s = 22,56°\,C \pm 0,46°\,C,\ (1-\alpha) = 95\%$$

Aus den Angaben und der Toleranzklasse des Pt-100 sollte nun die Gesamtunsicherheit berechnet werden und dies ergibt sich wie folgt:

$$\Delta\,\vartheta_{NTC\ ges} = \sqrt{\Delta\,\vartheta^2_{NTC} + \Delta\,\vartheta^2_{NTC_k}} = \sqrt{12,15^2 + 0,46^2} \approx 12,16°\,C$$

1.4 Parameter B des NTC

In diesem Teil muss zunächst zu 4.4 die Temperatur des Pt-100 und deren Unsicherheit bestimmt werden und dies Vergleich zu Aufgabe 5.1.2:

Der gemessene Widerstand des Pt-100 ist $R_{pt100} = 133,52\Omega$

Die Unsicherheit dieses Widerstands lässt sich durch die folgenden Angaben aus dem Datenblatt des Multimeters bestimmen: $\pm\,(0,2\% \cdot MW + 5D)$

Die absolute Unsicherheit $\Delta\,R_{pt100} = \pm\,(0,2\% \cdot 133,52\Omega + 500m\Omega) = 0,767\Omega$

Die relative Unsicherheit $\frac{\Delta\,R_{pt100}}{R_{pt100}} = \frac{0,767\Omega}{133,52\Omega} \approx 0,0057 = 0,57\%$

Daraus kann die entstehende Temperatur mit den konstanten Bauteilwerten (

$R_0 = 100\,\Omega,\ A = 3,9083 \cdot 10-3°\,C^{-1},\ B = -5,775 \cdot 10-7°\,C^{-2}$) errechnet werden

$$\vartheta_{pt100} = -\frac{A}{2B} - \sqrt{\left(\frac{A}{2B}\right)^2 - \frac{R_0 - R_{pt100}}{R_0 \cdot B}}$$

$$\vartheta_{pt100} = -\frac{3,9083 \cdot 10^{-3\circ}C^{-1}}{2 \cdot -5,775 \cdot 10^{-7\circ}C^{-2}} - \sqrt{\left(\frac{3,9083 \cdot 10^{-3\circ}C^{-1}}{2 \cdot -5,775 \cdot 10^{-7\circ}C^{-2}}\right)^2 - \frac{100\,\Omega - 133,52\,\Omega}{100\,\Omega \cdot -5,775 \cdot 10^{-7\circ}C^{-2}}}$$

$$\vartheta_{pt100} \approx 81,57^\circ C$$

Die Unsicherheit $\Delta\vartheta_{pt100}$ ergibt sich:

$$\Delta\vartheta_{pt100} = \frac{\partial\vartheta}{\partial R_{pt100}} \Delta R_{pt100}$$

$$\Delta\vartheta_{pt100} = -\frac{1}{2 \cdot R_0 \cdot B \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{2B}\right)^2 - \frac{R_0 - R_{pt100}}{R_0 \cdot B}}} \cdot \Delta R_{pt100}$$

$$\Delta\vartheta_{pt100} = -\frac{1}{2 \cdot 100\Omega \cdot -5,775 \cdot 10^{-7\circ}C^{-2}\sqrt{\left(\frac{3,9083 \cdot 10^{-3\circ}C^{-1}}{2 \cdot -5,775 \cdot 10^{-7\circ}C^{-2}}\right)^2 - \frac{100\Omega - 132,1\Omega}{100\Omega \cdot -5,775 \cdot 10^{-7\circ}C^{-2}}}} \cdot 0,767\Omega$$

$$\Delta\vartheta_{pt100} \approx 2^\circ C$$

Unsicherheit ΔR_{NTC} bestimmen

Der Wert des Widerstands NTC ist $R_{NTC} = 1194\Omega$

Aus Datenblatt ist immer wieder folgendes entnommen:

$\pm(0,2\% \cdot MW + 5D)$

Die absolute Unsicherheit $\Delta R_{NTC} = \pm(0,2\% \cdot 1194\Omega + 500m\Omega) = 2,888\Omega$

Die relative Unsicherheit $\frac{\Delta R_{NTC}}{R_{NTC}} = \frac{2,888\Omega}{1194\Omega} \approx 0,0025 = 0,25\%$