

Messwerte und Messwertunsicherheit („Fehlerrechnung“)

0. Literatur

1. Walcher: Praktikum der Physik, Teubner
2. Gränicher: Messung beendet - was nun?, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich
3. Gesche (Hrsg.): Physikalisches Praktikum, Teubner
4. Eichler, Kronfeldt, Sahm: Das Neue Physikalische Grundpraktikum, Springer
5. Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, Springer, Kap. 1.3.2 ...
... und andere Physik-Lehrbücher
6. International Organization for Standardization (ISO): Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 1992 (repr. 1995) , ISBN 92-67-10188-9
Deutsche Übersetzung (DIN): Leitfaden für die Angabe der Unsicherheit beim Messen, DIN , Beuth Verlag, 1995
7. Taylor, Kuyatt: Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty ..., National Institute of Standards and Technology Technical Note 1297,
<http://physics.nist.gov/Pubs/guidelines/TN1297/tn1297s.pdf>
(frei zugängliche Zusammenfassung des „Guide“ [6.]
8. Kessel: Messunsicherheit, ein wichtiges Element der Qualitätssicherung;
PTB Braunschweig,
<http://www.ptb.de/de/publikationen/download/pdf/kessel.pdf>

1. Messfehler / Messunsicherheit

- Jede Messung ist fehlerbehaftet
- Der „wahre“ Wert einer Messgröße ist grundsätzlich unbekannt

Grobe Fehler

- vermeidbar durch Sorgfalt, Kontrollen
- dürfen **nicht** ins Endresultat eingehen!

Systematische Fehler

- besitzen bei Wiederholung konstanten Wert
- können nicht durch Wiederholung der Messung (mit gleichem Verfahren!) erkannt oder eliminiert werden

Statistische Fehler

- schwanken zufallsbedingt
- lassen sich durch Wiederholungsmessungen erkennen u. reduzieren
- Die durch statistische Schwankungen bedingte Unsicherheit des Messwerts lässt sich mit statistischen Verfahren bestimmen!

Das **Schlussresultat** einer Messung besteht aus (ISO , 1992)

- dem **wahrscheinlichsten Wert**, den man der Messgröße zuschreibt
- die **Unsicherheit** des Resultats: \Rightarrow ein Maß für die Streuung der Werte, welche man vernünftigerweise dem Schlussresultat zuordnet

Bemerkung: Obwohl DIN den Begriff „Fehler“ strenger definiert, ist es (immer noch) üblich, anstatt „Messunsicherheit“ schlicht „Fehler“ (z.B. Fehlerrechnung, Fehlerfortpflanzung, ...) zu sagen. Gemeint ist hier nicht der Unterschied zwischen „wahrem Wert“ (unbekannt!) und Messwert, sondern die dem Messwert zugeordnete Unsicherheit.

Resultat einer Messung: $(x \pm \Delta x)$ (mit Einheiten)

Bsp.: $(7,25 \pm 0,15) \cdot 10^{-12} \frac{\text{Vs}}{\text{m kg}}$

- Δx ist die **absolute**, • $\frac{\Delta x}{x}$ die **relative** Unsicherheit. Für das Bsp.: $\frac{\Delta x}{x} = 2 \%$

1. Das Ergebnis wird als $x \pm \Delta x$ angegeben, nicht $\Delta x = \pm \dots$!
2. Zehnerpotenzen und Einheiten werden für Messwert und Unsicherheit gleich angegeben und ausgeklammert!

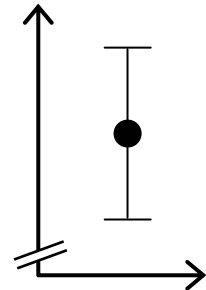
3. Runden:

- Messunsicherheit: 1 oder 2 signifikante Stellen (2 Stellen wenn die erste signifikante Stelle 1 oder 2 ist)
Messwert und Unsicherheit immer gleiche Anzahl Stellen!
- Erst muss die Unsicherheit Δx bekannt sein.
Dann kann man entscheiden, mit wie vielen Stellen der Messwert x angegeben wird!

4. In Diagrammen werden Messwerte normalerweise als Symbole (\bullet , \blacklozenge , \oplus , ...) mit **Fehlerbalken** dargestellt.

Ausnahmen: Fehlerbalken (FB) können weggelassen werden, wenn z.B. ...

- der FB kleiner als die Symbolgröße wäre (dann könnte man den FB nicht sehen!)
- alle FB ungefähr gleich groß sind (und der zugehörige Text eine Angabe zur Messgenauigkeit enthält)
- das Diagramm so viele Daten enthält, dass mit FB die Übersichtlichkeit leidet bzw. wenn die (statistische) Unsicherheit leicht aus der Streuung der Punkte ablesbar ist.



Die ISO-Norm unterscheidet 2 Beiträge zur „Unsicherheit“:

- **Typ A** Standardunsicherheit: „auf statistischer Analyse beruhend“
- **Typ B** Standardunsicherheit: „auf andere Weise geschätzte Beiträge“

Typ A und Typ B sollten auf gleicher Vertrauenswahrscheinlichkeit beruhen!

Vertrauenswahrscheinlichkeit:

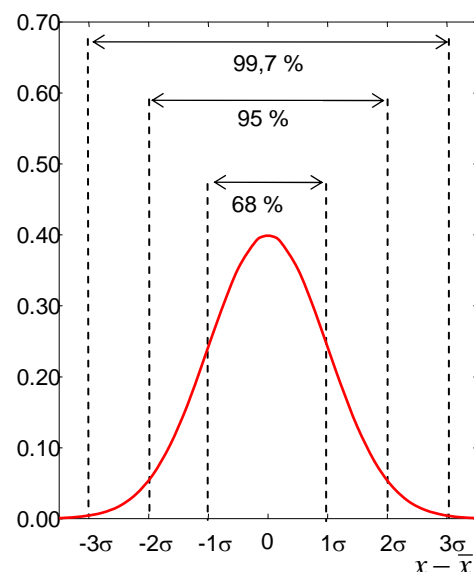
Wahrscheinlichkeit P , dass der wahre Wert tatsächlich innerhalb eines angegebenen Intervalls $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$ liegt.

Bsp.: Die Gauß'sche Normalverteilung (Glockenkurve) mit Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung σ wird beschrieben durch die „Wahrscheinlichkeitsdichte“

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Dabei liegen im Intervall

$[\bar{x} - 1\sigma, \bar{x} + 1\sigma]$	ca. 68 %
$[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$	ca. 95 %
$[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$	ca. 99,7 %



➤ **Typ A:**

- Stichprobe \Rightarrow Mittelwert u. Standardabw. d. MW : $u_A = s_m$ (siehe Kap. 2.)

➤ **Typ B:**

- Ergebnisse früherer Messungen
- Eigenschaften des Materials, der Instrumente
- Herstellerspezifikationen (siehe 1.1 !)
- Unsicherheiten von Referenzwerten
- Unsicherheit von Korrekturen
- ...

\Rightarrow Erfahrung, kritisches Nachdenken $\Rightarrow u_B$

Kombinierte Unsicherheit: (Typ A und B kombiniert)

FFG (siehe Kap. 3) : $u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$

Üblich (Naturwissenschaften) ...

Vertrauenswahrscheinlichkeit: „1 Standardabweichung“ (bei Gaußverteilung : 68 %)

Sind höhere Werte gefordert (z.B. 95%, 99%):

„Erweiterte Unsicherheit“: $U = k \cdot u_C = k \cdot \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$

z.B. mit $k = 2$ (95%) bzw. $k = 2.6$ (99%)

Im Praktikum gibt es (im Wesentlichen) folgende Möglichkeiten, die Unsicherheit einer Messung zu bestimmen:

1. Aus Datenblatt, Handbuch etc. ist eine Angabe des Messgeräte-Herstellers zur Genauigkeit eines Geräts bekannt (siehe auch Kap. 1.1)
2. Es liegt eine Messreihe mit mindestens 10 (besser 25) Messungen vor. Dann wird „Typ A“ durch statistische Analyse bestimmt („Gummibären-Experiment“, Versuch O1)
3. Auf Grund des Messverfahrens, der zur Verfügung stehenden Hilfsmittel und evtl. einer kleinen Zahl von Wiederholungsmessungen (z.B. eine Messung pro Teilnehmer) wird die Genauigkeit geschätzt. Beispiele:

- a) Zeitmessung mit Stoppuhr: 3 Messungen liefern Ergebnisse, die ca. 0,1...0,2 s voneinander abweichen. Die Reaktionszeit wird ebenfalls bei ca. 0,1 s liegen. Geschätzte Unsicherheit (des Mittelwerts): $\Delta t \approx 0,1 \text{ s}$
 Diese Schätzung gilt dann auch für alle nachfolgenden Messungen, die unter ähnlichen Bedingungen durchgeführt werden.
- b) Abstandsmessung mit einem Stahllineal: Bei Versuch O1 wird der Abstand zwischen einem Dia und einem Schirm zu $L = 795 \text{ mm}$ gemessen. Dabei wird das Lineal freihändig gehalten, das Dia selbst ist ca. 1...2 mm dick und hat auch noch etwas Spiel in der Halterung. Geschätzte Unsicherheit: $\Delta L \approx 2 \text{ mm}$

Eine Besonderheit stellt die Zählung zufälliger Ereignisse (z.B. mit einem Geiger-Müller-Zählrohr bei Versuch A2) dar:

4. Werden zufällige Ereignisse gezählt, so hat nach Poisson die gezählte Anzahl N die statistische Unsicherheit (Standardabweichung) von $\Delta N = \sqrt{N}$

1.1 Herstellerangaben zur Gerätegenauigkeit

Der Hersteller eines Messgerätes macht (hoffentlich...!) Angaben über die Genauigkeit seines Gerätes. Dabei werden z.B. Fertigungstoleranzen, Alterungseinflüsse, Umgebungseinflüsse (Temperatur etc.) berücksichtigt.

- Bei Analogmessgeräten bezieht sich die Angabe der Messgenauigkeit im allg. auf den Messbereich.

Bsp. Spannungsmessung mit Analogmultimeter (vergl. Versuch E1) :

Messbereich : 10 V , Genauigkeit: $\pm 1,5 \%$

Messwert: $U = 5,65 \text{ V}$

Messunsicherheit: $\Delta U = 1,5\% \cdot 10 \text{ V} = 0,15 \text{ V}$

Messergebnis: $U = (5,65 \pm 0,15) \text{ V},$

Relative Messunsicherh.: $\frac{\Delta U}{U} = \frac{0,15 \text{ V}}{5,65 \text{ V}} = \underline{2,7 \%}$

- Bei Digitalmessgeräten besteht die Angabe der Messgenauigkeit aus einem auf den Messwert („% v.M.“) bezogenen und einem konstanten Anteil. Der konst. Teil wird meist in „digits“ angegeben, z.B. 1 digit = 1 Einheit der letzten angezeigten Stelle. Deshalb ist es wichtig, immer alle angezeigten Stellen aufzuschreiben (einschl. der Nullen hinter dem Komma!).

Bsp. Spannungsmessung mit Digitalmultimeter (vergl. Versuch E1) :

Messbereich : 20 V , Genauigkeit: $\pm (0,25 \% \text{ v.M.} + 1 \text{ digit})$

Messwert: $U = 3,90 \text{ V}$ (Gerät zeigt 2 Stellen hinter Komma an!)

Messunsicherheit: $\Delta U = 0,25\% \cdot 3,90 \text{ V} + 0,01 \text{ V} = 0,02 \text{ V}$

Messergebnis: $U = (3,90 \pm 0,02) \text{ V},$

Relative Messunsicherh.: $\frac{\Delta U}{U} = \frac{0,02 \text{ V}}{3,90 \text{ V}} = \underline{0,5 \%}$

2. Statistische Schwankungen

2.1 Messreihe mit N Messwerten (alle gleich genau)

Gegeben:

- Eine („große“ , siehe unten) Messreihe („Stichprobe“) mit N Messwerten x_i ($i=1\dots N$)
- Die Messwerte schwanken
- Einzelne Werte (bzw. Bereiche von ...bis) kommen verschieden oft vor.
- Strichliste \Rightarrow Häufigkeitsverteilung \Rightarrow „Histogramm“

\Rightarrow Siehe auch „Das Gummibären-Experiment“ und „gummib.xls“ !!!

- beste Schätzung für den unbekannten „wahren“ Erwartungswert μ :

arithmetischer Mittelwert $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$

- Maß für die Streuung der Werte: Varianz u. Standardabweichung
genauer: „Stichprobenvarianz“ u. „Stichprobenstandardabw.“

Varianz: $s^2 ! \quad s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$ (merke: Varianz \Leftrightarrow s-Quadrat!)

$$\text{oder: } s^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \left(\frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N} \right)^2 \right) \quad (\dots \text{programmiertechn. einfacher!})$$

$$s \quad (= \sqrt{s^2} \text{ !})$$

Standardabweichung:

Die „theoret.“ Parameter der Verteilung bzw. der „Grundgesamtheit“ sind Erwartungswert μ und Varianz σ^2 (Standardabweichung σ). Sie werden durch die Stichprobengrößen \bar{x}, s^2 (s) „geschätzt“.

Im Nenner steht $(N-1)$ statt N , da aus der Stichprobe schon der Mittelwert bestimmt wurde (Verlust eines Freiheitsgrades). Mit nur einem Messwert kann man keine Standardabweichung berechnen!

- Die Standardabweichung s entspricht der **Messunsicherheit der Einzelmessung**,
 $\Delta x_i = s$, das Resultat einer Einzelmessung könnte also angegeben werden als $x_i \pm s$
- Auch der **Mittelwert** besitzt natürlich noch eine Unsicherheit! Diese wird mit wachsender Anzahl der Messungen kleiner und ergibt sich nach dem FFG ($\rightarrow 3.$) zu

Unsicherheit des Mittelwerts

(auch: „Standardfehler“ oder Standardabweichung des Mittelwerts)

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Die Genauigkeit des Mittelwerts ist also mit $\Delta \bar{x} = s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$ immer besser als die einer

Einzelmessung. Das Endresultat ist somit: $\bar{x} \pm \Delta \bar{x}$ bzw. $\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$.

- Wie viele Messwerte braucht man ?

Regel: Für eine „vernünftige“ Bestimmung der Standardabweichung s sind ≥ 25 Werte erforderlich. Leider muss man sich oft auf weniger (z.B. 10) beschränken. Dann muss das Vertrauensintervall entsprechend größer gewählt werden, um die Unsicherheit bei der s -Bestimmung zu berücksichtigen (siehe Lit., „t-Verteilung“).

Hat man nur wenige Werte ($N = 2, 3, \dots$), so ist die Berechnung der Standardabweichung s **sinnlos**. Man sollte dann die statistische Unsicherheit des Messergebnisses anders abschätzen, z.B. über die Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert.

2.2 Messreihe mit N Messwerten unterschiedlicher Genauigkeit

Liegen Messwerte mit unterschiedlicher Genauigkeit vor, so muss man bei der Bestimmung des Mittelwerts die einzelnen Werte gewichten, um zu einem optimalen Ergebnis zu kommen. Im Versuch S1 des Physikpraktikums kann man beispielsweise die Winkelrichtgröße (Federkonstante) c^* bei verschiedenen Winkeln bestimmen. Dazu wird eine Kraft F , ein Hebelarm r und der Winkel β gemessen. Es ist $c^* = F \cdot r / \beta$. Bei jedem Winkel ergibt sich eine andere Messgenauigkeit (siehe FFG!) – bei größeren Winkeln wird Δc^* deutlich kleiner, weil die relative Ablesegenauigkeit des Winkels und der Kraft dann kleiner werden. Wenn man hier ungewichtet mittelt, dann gehen die (schlechten) Werte bei kleinem Winkel zu stark in Ergebnis ein. Mit der korrekten Gewichtung erhält man auf einfache Weise ein optimales Ergebnis einschließlich dessen Genauigkeit.

Beim ungewichteten Mittelwert hat jeder Messwert das „Gewicht 1“ und die Summe der Gewichte ist die Anzahl der Messwerte N . Damit können wir die „normale“ Formel für den

Mittelwert etwas umschreiben, nämlich:

$$\bar{x}_{\text{ungew.}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N 1 \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N 1}.$$

Ersetzt man hier die „1“ durch „Gewichtsfaktoren“ w_i so erhält man die Formel für den gewichteten Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i \cdot x_i}{\sum w_i}$$

Es lässt sich zeigen, dass man den genauesten Mittelwert erhält, wenn die Gewichtsfaktoren zu „1/(Fehler zum Quadrat)“ gewählt werden: $w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}$

Ein Messwert mit doppelter Genauigkeit (halber Messunsicherheit) erhält also das vierfache Gewicht! Auch hier kann mit dem FFG ($\rightarrow 3.$) die Genauigkeit des Mittelwerts¹ berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}$$

Insgesamt ergibt sich also:

Gewichteter Mittelwert $\bar{x} \pm \Delta \bar{x} = \frac{\sum w_i \cdot x_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}$ mit $w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}$

Wir bezeichnen mit der Nummer k den Wert mit der kleinsten Unsicherheit Δx_k (und damit dem größten Gewicht $w_k = 1/(\Delta x_k)^2$). Es ist also $\Delta x_k \leq \Delta x_i$ bzw. $w_k \geq w_i$ (für beliebige i). Die Summe der w_i ist nun immer größer als dieses einzelne w_k ; damit wird $\Delta \bar{x} = 1/\sqrt{\sum w_i}$ automatisch noch kleiner als die Messunsicherheit Δx_k des besten Werts: $\Delta \bar{x} < \Delta x_k$

➤ **Der Mittelwert ist immer genauer als der beste Einzelwert!**

Spezialfall: Sind alle Werte gleich genau, d.h. gilt $w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2}$ für $i = 1 \dots N$, dann

erhält man wieder das Ergebnis für den ungewichteten Mittelwert. Die Summen ergeben sich zu $\sum w_i = \sum \frac{1}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum 1 = \frac{N}{(\Delta x)^2}$ und $\sum w_i \cdot x_i = \sum \frac{x_i}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum x_i$.

Damit ergibt sich für das gewichtete Mittel:

$$\bar{x} \pm \Delta \bar{x} = \frac{\frac{1}{(\Delta x)^2} \sum x_i}{\frac{N}{(\Delta x)^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{(\Delta x)^2}}}$$

Nach Kürzen erhält man dann wieder das erwartete Ergebnis: $\bar{x} \pm \Delta \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \pm \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$

¹ Völlig unsinnig wäre es, den Mittelwert der Messunsicherheiten zu verwenden. Dieser ist immer größer als die Unsicherheit des besten Wertes. Der Mittelwert muss aber mindestens so genau sein wie der beste Wert!

3. „Fehler“-Fortpflanzung

Eine Messung, bei der das gesuchte Endergebnis direkt mit einem entsprechenden Messgerät gemessen werden kann, bezeichnet man als **direkte Messung**. Häufig muss aber ein Messwert (oder verschiedene Messwerte) noch irgendwie verrechnet werden, um das gesuchte Endergebnis zu erhalten. Z.B. soll die Querschnittsfläche A einer Bohrung bestimmt werden. Dazu wird der Durchmesser d bestimmt und dann A nach $A = \frac{1}{4} \pi d^2$ berechnet. Dies bezeichnet man als ...

➤ Indirekte Messung:

Ergebnis y ist Funktion der gemessenen (fehlerbehafteten) Größe x

Die „Fehler“-Fortpflanzung liefert dann die Antwort auf die Frage :

➤ Wie groß ist die Unsicherheit von „y“, Δy ?

Wir unterscheiden zunächst 2 Fälle:

1.) nur eine Messgröße x

2.) mehrere Messgrößen x_1, x_2, \dots

In beiden Fällen gibt es verschiedene Methoden zur „Fehlerfortpflanzung“, die Sie alle kennen sollten (da Sie dann von Fall zu Fall entscheiden können, welches die einfachste Methode ist!). Eine Zusammenfassung der wichtigsten Formeln und Regeln dazu finden Sie auf der letzten Seite!

3.1 Fehlerfortpflanzung bei einer Messgröße

Zunächst: nur **eine** Messgröße „ x “ mit „Unsicherheit“ Δx

... daraus berechnet „ y “ : $y = f(x)$

➤ Wie groß ist die Unsicherheit von „y“, Δy ?

Anders ausgedrückt lautet die Kernfrage:

➤ Wenn sich der Messwert im Bereich seiner Unsicherheit ändert, d.h. um $\pm \Delta x$, um wie viel ändert sich dann das daraus berechnete Endergebnis y ?

Antwort A (, „numerisches Differenzieren“, „direkte Methode“, „Mehrfachausrechnung“)² :

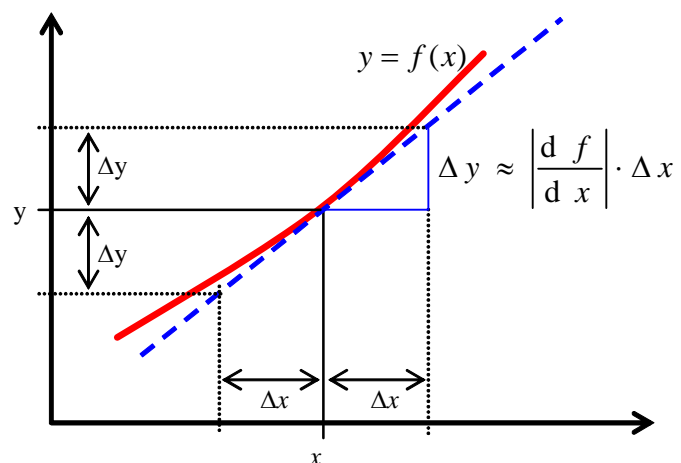
- Rezept: Setze modifizierten Wert ein, berechne numerisch wie sich das Ergebnis ändert!
- $\Delta y = |f(x + \Delta x) - f(x)|$

Antwort B (Ableitung) :

Wie ändert sich $f(x)$, wenn x sich um **kleinen** Betrag Δx ändert?

Taylor-Reihe:

- $f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx} \cdot \Delta x + \dots$
- $\Delta y \approx \left| \frac{df}{dx} \right| \cdot \Delta x$



²In Gränicher, „Messung beendet - was nun?“, wird dieses Verfahren auch „Naturmethode“ genannt.

Der Unterschied zur numerischen Methode (A) besteht darin, dass bei (A) die 1. Ableitung $\frac{df}{dx}$ numerisch bestimmt wird. Für „genügend“ kleines ε ist $\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$

Wählt man nun für ε die (hoffentlich nicht zu große) Messunsicherheit Δx , dann erhält man

$$\Delta y \approx \left| \frac{df}{dx} \right| \cdot \Delta x \approx \left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \cdot \Delta x = |f(x+\Delta x) - f(x)|. \text{ Man kann also Methode (B) als}$$

Näherung für die numerische Methode (A) betrachten. Sie hat aber den Vorteil, dass man nicht nur den Zahlenwert, sondern auch eine Formel für Δy erhält, an der man die Zusammenhänge besser erkennen kann.

3.2 Fehlerfortpflanzung bei mehreren Messgrößen

Messgrößen „ x_1 “ mit „Unsicherheit“ Δx_1
„ x_2 “ mit „Unsicherheit“ Δx_2
„ x_3 “ mit „Unsicherheit“ Δx_3
...

... daraus berechnet „ y “ : $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$

➤ Wie groß ist die Unsicherheit von „ y “, Δy ?

Wir müssen jetzt aber zwei Fragen klären:

F1: Welche Unsicherheiten Δy_i bewirken die einzelnen Messgrößen bzw. ihre jeweilige Unsicherheit Δx_i ?

F2: Wie werden die einzelnen Δy_i zu einer Gesamt-Unsicherheit Δy zusammengerechnet ?

Zu **F1** gibt es (genau wie bei Kap. 3.1) wieder 2 Antworten:

Antwort A („direkte Methode“, „numerisches Differenzieren“, „Mehrfachausrechnung“) :

- Rezept: Setze modifizierten Wert **für jedes einzelne** x_i ein, berechne numerisch wie sich das Ergebnis ändert! (Bem. zu einzelnen : siehe unten *****!**)
- $\Delta y_1 = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \dots) - f(x_1, x_2, x_3, \dots)|$
 $\Delta y_2 = |f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, \dots) - f(x_1, x_2, x_3, \dots)|$
 $\Delta y_3 = |f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots) - f(x_1, x_2, x_3, \dots)|$
...

Antwort B (Ableitung) :

- Die Δy_i (y -Unsicherheit auf Grund der Unsicherheit Δx_i) werden (anstatt numerisch durch Mehrfacheinsetzen) durch die entspr. partiellen Ableitungen bestimmt:

$$\Delta y_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$$

Auch hier besteht der Unterschied zur numerischen Methode (A) nur darin, dass bei (A) die partielle Ableitung (z.B. $\partial f / \partial x_1$) numerisch bestimmt wird:

$$\Delta y_1 = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \dots) - f(x_1, x_2, x_3, \dots)| = \left| \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \dots) - f(x_1, x_2, x_3, \dots)}{\Delta x_1} \right| \cdot \Delta x_1 \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1$$

Unabhängig von der gewählten Methode (**A** oder **B**) muss nun noch die Frage **F2** beantwortet werden:

F2: Wie werden die einzelnen Δy_i zu einer Gesamt-Unsicherheit Δy kombiniert?

F2a) WENN Δx_i systematische „Fehler“ sind
und Δx_i „sichere Fehlergrenzen“ sind (100% Vertrauenswahrscheinlichkeit)
oder die Δx_i stark korreliert sind
(d.h., dass alle das Endergebnis in die gleiche Richtung verfälschen)

DANN

kann der sog. „absolute Größtfehler“ von y berechnet werden („ungünstigster Fall“)

$$\Delta y_{ges} = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \dots \quad (\text{Regel: Einzelbeiträge linear addieren!})$$

F2b) SONST ... (Regelfall!)

(**statistische Fehler, Standardabw.**, Vertrauenswahrscheinlichkeit <100 %):

$$(\Delta y_{ges})^2 = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + \dots \quad (\text{Regel: Einzelbeiträge quadratisch addieren!})$$

Bemerkungen:

- Methode F2a) und F2b) ergeben oft ein ähnliches Ergebnis, insbesondere wenn ein einzelnes Δy_i viel größer als alle anderen ist. b) ergibt immer einen kleineren Wert als a); mit a) kann der Messfehler also überschätzt werden.
- F2a) ist etwas leichter auszurechnen, mit Taschenrechner ist dies aber unwichtig.

*** Die Beantwortung der Fragen **F1** und **F2** sollte nicht vermischt werden. Es ist vorteilhaft, die x_i nicht alle zugleich sondern einzeln zu variieren,

- weil Sie dann gleich sehen, welche Messgröße welchen Einfluss auf die Gesamtgenauigkeit hat und wo es sich evtl. lohnt, genauer zu messen.
- weil andernfalls erst geprüft werden müsste, ob eine Erhöhung von x_1, x_2 , etc. den berechneten y -Wert vergrößert oder verkleinert. Erst dann kann z.B. der max. Wert als $f_{\max} = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, x_3 \pm \Delta x_3, \dots)$ berechnet werden (wobei für die versch. Größen entweder + oder - verwendet wird, um den Funktionswert zu maximieren)!

➤ Wird die Fehlerfortpflanzung mit Hilfe der (partiellen) Ableitungen (**B**) berechnet, dann ergibt sich für die Unsicherheit des Endergebnisses ...

- wenn die Einzelbeiträge **linear** addiert werden

(F2a: $\Delta y_{ges} = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots$) :

$$\Delta y_{ges} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| \cdot \Delta x_3 + \dots \quad (\text{s. Mathe: „Totales Differential“!})$$

- wenn die Einzelbeiträge **quadratisch** addiert werden

(F2b: $(\Delta y_{ges})^2 = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \dots$) :

$$(\Delta y)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot (\Delta x_2)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \cdot (\Delta x_3)^2 + \dots$$

Man erhält das ...

⇒ **Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz (FFG):**

Einzelbeiträge werden durch partielle Ableitungen (Steigungen) berechnet und **quadratisch addiert:**

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \quad (\text{FFG})$$

Wendet man das Gauß'sche FFG auf einige wichtige Formeln an (und formt evtl. noch etwas um), so erhält man die auf der letzten Seite zusammengestellten Formeln!

4. Ausgleichsrechnung

Oft ist ein Zusammenhang zw. y u. x bekannt (z.B. lin. Funktion, Gerade), aber die Funktion enthält unbek. Parameter, die aus Messung bestimmt werden sollen.

Gesucht: Parameter a, b, \dots , **so**, dass Funktion **optimal** zu den Messwerten passt

Man nennt dies auch **Kurvenanpassung** („Fit“) oder Regressionsrechnung.

Wichtig: In die Auswertung gehen alle Messwerte ein – es wird z.B. nicht einfach eine Gerade durch zwei willkürlich ausgewählte Messpunkte gelegt!

- Methoden:
- a) Zeichnerisch (z.B. Gerade) nach Augenmaß zeichnen, a, b Diagramm entnehmen
 - b) Probieren: Daten u. Funktion (mit Rechner) darstellen, Parameter „von Hand“ variieren bis Funktion „passt“ !
 - c) Rechnerisch (bei linearer Funktion direkt lösbar, sonst Iteration!)

Zu c: Wir stellen Ihnen zur Berechnung einer Ausgleichsgeraden ein fertiges Excel-Programm zur Verfügung. Das kostenlose Programm „gnuplot“ kann iterativ beliebige (vom Benutzer zu programmierende) Funktionen anpassen. Die Verwendung des gnuplot-Fits wird allerdings nur fortgeschrittenen gnuplot-Benutzern empfohlen!

Ausgleichsgerade

Die zeichnerische Bestimmung der Ausgleichsgeraden ist durchaus möglich (Hilfsmittel: durchsichtiges Lineal). Wenn die Messpunkte mit Fehlerbalken eingezeichnet werden, dann ist auch eine brauchbare Schätzung der Unsicherheit der Geradensteigung und des

Achsenabschnitts möglich (neben der „optimalen“ Geraden noch zwei weitere Geraden so einzeichnen, dass diese als ausgleichende Gerade im Rahmen der Fehlerbalken gerade noch möglich erscheinen ...). Die Genauigkeit der graphischen Bestimmung der Ausgleichsgeraden ist oft ausreichend. Allerdings ist nicht garantiert, dass man das optimale Ergebnis erhält. Auch die Fehlerschätzung ist oft nicht ganz einfach (und erfordert etwas Arbeitsaufwand). Da die Bestimmung der Ausgleichsgeraden eine immer wiederkehrende Aufgabe in der Datenanalyse ist, lohnt es sich, sich mit der rechnerischen Bestimmung der Geradenparameter (und ihrer Unsicherheiten) zu beschäftigen und sich ein geeignetes Programm bzw. Tabellenkalkulations-Arbeitsblatt zu schreiben bzw. zu besorgen. Ein Beispiel für MS Excel finden Sie auf unserem Server („gerade.xls“).

Völlig unverständlich ist es, wenn Messwerte nur zwecks schöner Darstellung (als Tabelle oder Grafik) in den PC getippt werden, die Auswertung dann aber „zu Fuß“ gemacht wird!

Berechnung der Ausgleichsgeraden (mit Fehlerrechnung)

Funktion: $f(x) = a + b \cdot x$

gemessen: $x_i, y_i \pm \Delta y_i$

Kriterium **Methode der kleinsten Quadrate**

$$S^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\Delta y_i^2} = \text{Minimum!}$$

Bem: Hier wird (näherungsweise) vorausgesetzt, dass die Δy_i statistische Messunsicherheiten sind. Idealerweise gilt $\Delta y_i = \sigma_i$, d.h. die Messunsicherheiten sind „richtige“ Standardabweichungen. Dann gehorcht theoretisch das minimale S^2 der so genannten „ χ^2 (Chi-Quadrat) - Verteilung“. Dies kann verwendet werden, um zu testen, ob die Daten wirklich der vorgegebenen Funktion folgen (\rightarrow Lit., „ χ^2 - Test“). Wenn die verwendeten Messunsicherheiten keine echten Standardabweichungen sind, dann sind Güte der Anpassung (S^2 - Wert) und Genauigkeit der Parameter schwieriger zu interpretieren...

Das minimale S^2 erhält man, indem man nach a und b ableitet und die Abl. = 0 setzt:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\sum \frac{(y_i - (a + b \cdot x_i))^2}{\Delta y_i^2} \right) = 0 \quad \frac{\partial S^2}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left(\sum \frac{(y_i - (a + b \cdot x_i))^2}{\Delta y_i^2} \right) = 0$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das nach a und b aufgelöst wird:

Ergebnis: **Ausgleichsgerade (mit Fehlerrechnung)**

(siehe z.B.: Press et al., Numerical Recipes in C, Cambridge Univ. Press, Kap. 15.2,
Online: <http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf/c15-2.pdf>)

Abkürzungen:

$$S_1 = \sum \frac{1}{\Delta y_i^2}$$

$$S_x = \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2}$$

$$S_y = \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2}$$

$$S_{xx} = \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}$$

$$S_{xy} = \sum \frac{x_i \cdot y_i}{\Delta y_i^2}$$

$$D = S_1 \cdot S_{xx} - S_x^2$$

Koeffizienten der Geraden $y = a + b \cdot x$:

„Fehlerfortpflanzung“

⇒ Unsicherheit der Koeffizienten

$a = \frac{(S_y \cdot S_{xx} - S_x \cdot S_{xy})}{D}$	Achsenabschnitt	$\Delta a = \sqrt{\frac{S_{xx}}{D}}$	Unsicherheit des Achsenabschnitts
$b = \frac{(S_1 \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y)}{D}$	Steigung	$\Delta b = \sqrt{\frac{S_1}{D}}$	Unsicherheit der Steigung

- Im MS Excel Arbeitsblatt „**gerade.xls**“ sind genau diese Formeln zur Berechnung der Ausgleichsgeraden schon programmiert. Sie müssen dort nur noch Ihre Messwerte und Messunsicherheiten eingeben (und evtl. das Diagramm anpassen). Beachten Sie die Hinweise unter „Rezept“!
- Wenn Sie „**gerade.xls**“ benutzen drucken Sie bitte unbedingt die gesamte Tabelle und die Grafik aus und fügen diese Ihrem Laborbericht bei. Bitte bringen Sie die Datei auf Datenträger mit!
- Erweitern Sie das Arbeitsblatt „**gerade.xls**“ nach Bedarf. Oft sind vor und nach der Berechnung der Ausgleichsgeraden noch weitere Rechnungen nötig. Diese lassen sich bequem in das Arbeitsblatt einfügen.

Bem.: In vielen Büchern u. Programmen (Taschenrechner; Tabellenkalkulation, z.B. EXCEL „Trendlinie“ etc.) findet man die „Regressionsgerade“ in etwas anderer Form. In der Regel werden die Unsicherheiten der Messwerte nicht verwendet (keine Gewichtung), sondern es wird vorausgesetzt, dass alle Werte gleich genau sind. Obige Formeln sind keineswegs komplizierter. Sie enthalten aber natürlich auch diesen Spezialfall (Sie müssen lediglich alle Messunsicherheiten gleich groß eingeben)! Die ungewichtete Regressionsgerade kann aber durchaus verwendet werden, wenn die Messwerte näherungsweise gleich genau sind und die Unsicherheit der Parameter nicht interessiert.

Ergänzung: Wenn aus a und b weitere Größen berechnet werden (z.B. der y -Wert eines interpolierten oder extrapolierten Punktes), dann muss bei der Fehlerrechnung beachtet werden, dass a und b aus den gleichen Messwerten berechnet wurden und deshalb korreliert sind. Man muss deshalb bei der Fehlerfortpflanzung die Kovarianz $\sigma_{ab} = -S_x/D$ berücksichtigen. Die Unsicherheit eines mit a und b berechneten (interpolierten oder extrapolierten) Punktes $y_{ber.} = a + bx$ ergibt sich dann aus

$$\Delta y_{ber.}^2 = \frac{1}{S_1} + \frac{S_1}{D} \cdot \left(x - \frac{S_x}{S_1} \right)^2 \quad (\text{siehe z.B. „Numerical Recipes in C“})$$

Der genaueste Punkt ist damit der Schwerpunkt der Messwerte, $\bar{x} = \frac{S_x}{S_1}$ (dort verschwindet die Klammer).

Eine **Ursprungsgerade** $y = b \cdot x$ hat nur einen freien Parameter (Steigung b), der einfach zu bestimmen ist:

- Aus jedem einzelnen Punkt $(x_i, y_i \pm \Delta y_i)$ kann ein Steigungswert berechnet werden:

$$b_i = \frac{y_i}{x_i} \pm \frac{\Delta y_i}{x_i}. \text{ Der Endwert ist das als gewichtete Mittel (siehe 2.2) aus allen } b\text{-Werten.}$$

- Alternativ kann man die „normale“ Gerade $y = a + b \cdot x$ „zwingen“, durch den Ursprung zu gehen: Fügen Sie einfach einen zusätzlichen Punkt (0,0) mit sehr großem Gewicht (kleinem Fehler) ein. Es wird sich dann automatisch $a \approx 0$ ergeben!

Oft ist es aber sinnvoll, auch bei Zusammenhängen der Form $y = b \cdot x$ eine allgemeine Ausgleichsgerade der Form $y = a + b \cdot x$ zu bestimmen und dann den berechneten Achsenabschnitt mit der „Theorie“ ($a = 0$!) zu vergleichen!

Transformationen

Viele Funktionen lassen sich mit entspr. Transformationen auf Geradenform bringen. Auf diese Weise können komplizierter Zusammenhänge (wie exp-Funktion, Potenzgesetzte etc.) „linearisiert“ und mittels Ausgleichsgeraden ausgewertet werden.

- Wird zur Berechnung der Ausgleichsgeraden eine Transformation durchgeführt, dann muss die Unsicherheit der y-Werte mit dem FFG berechnet werden!

Beispiel: Entladung eines Kondensators. Es gilt: $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$.

Die ursprünglich gemessenen Werte sind: Spannung ($U_i \pm \Delta U_i$) zur Zeit t_i .

Mit einer Ausgleichsgeraden sollen U_0 und τ bestimmt werden.

Diese Funktion $U(t)$ logarithmiert man und bringt sie so auf Geradenform. Da formal der \ln nur für reine Zahlen (ohne Einheiten) existiert ($\Rightarrow \ln(\text{"Volt"})$ gibt es nicht!), lautet die korrekte Schreibweise dafür $y_i = \ln(U_i/V)$.

$$\Rightarrow \ln(\dots) \Rightarrow \underbrace{\ln(U(t)/V)}_{\text{"y"}} = \underbrace{\ln(U_0/V)}_{\text{Achsenabschn.}} + \underbrace{\frac{-1}{\tau}}_{\substack{\text{Steigung} \\ \text{"x"}}} \cdot t \quad \Rightarrow \text{Gerade im „ln(U) - t - Diagramm“!}$$

Als x-Werte nimmt man in diesem Beispiel die Zeit, $x_i = t_i$, und erhält die

$$\text{Geradengleichung } y = \underbrace{\ln(U_0/V)}_{=a} + \underbrace{\frac{-1}{\tau}}_{=b} \cdot x.$$

Für die einzelnen Messwerte gilt nach FFG: $U_i \pm \Delta U_i \Rightarrow y_i = \ln(U_i/V)$, $\Delta y_i = \frac{\Delta U_i}{U_i}$.

Mit diesen Werten ($y_i \pm \Delta y_i$) wird die Ausgleichsgerade berechnet. Man erhält daraus den Achsenabschnitt a ($= \ln(U_0/V)$), die Steigung b ($= -1/\tau$) und die Unsicherheiten $\Delta a, \Delta b$. Diese werden jetzt wieder auf die ursprünglich gesuchten Parameter und deren

Unsicherheiten umgerechnet: $U_0 = e^a \text{ V}$ und $\tau = -1/b$.

Mit dem FFG erhält man (*nachrechnen!*): $\Delta U_0 = U_0 \cdot \Delta a$, $\Delta \tau = \tau \cdot \frac{\Delta b}{|b|}$

Für die grafische Darstellung ergeben sich zwei Möglichkeiten:

- Sie stellen die logarithmierten Werte (hier: $y_i = \ln(U_i/V)$) und die berechnete ausgleichende Gerade in einem linearen Diagramm dar.
 Nachteil: Unanschauliche, krumme Zahlen
 Vorteil: Diagramm entsteht bei der Berechnung der Ausgleichsgeraden nebenbei
- Sie stellen die Originalwerte (hier: U_i) in einem Diagramm mit logarithmisch geteilter y-Achse dar. Die Original-Funktion (hier: $U(t) = U_0 \cdot \exp(-t/\tau)$) ergibt in dieser Darstellung dann wieder eine Gerade! Fast alle Programme zur grafischen Darstellung von Messwerten können die x- und/oder die y-Achse logarithmisch skalieren (Excel mit Einschränkungen).
 Sie sollten solche „halblogarithmische“ Diagramme (möglichst mit Fehlerbalken) aber auch von Hand anfertigen können – es erleichtert das Verständnis! Das dafür benötigte Funktionspapier finden Sie zum Download auf den Praktikums-Seiten.

Anhang: **„Fehler-“ Fortpflanzungsgesetz FFG**

- **FFG** für eine Messgröße $x \pm \Delta x$:

$$y = f(x)$$

- **FFG**: mehrere Messgrößen $x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, x_3 \pm \Delta x_3 \dots$:

$$y = f(x_1, x_2, x_3 \dots)$$

(statistische Fehler „Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz“)

$$\Delta y = \left| \frac{df}{dx} \right| \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}$$

- *Daraus abgeleitete*

einfache Regeln für gängige Funktionen:

Funktion	FFG-Formel	Bemerkung
$y = a \cdot x$	$\Delta y = a \cdot \Delta x$	absolute Unsicherheit mit dem Betrag der Konstanten a multiplizieren
$y = a \cdot x \}$ $y = a/x \}$	$\frac{\Delta y}{ y } = \frac{\Delta x}{ x }$	relative Unsicherheit bleibt gleich
$y = a \cdot x^b$	$\frac{\Delta y}{ y } = b \cdot \frac{\Delta x}{ x }$	relative Unsicherheit mit Betrag von b mult. ($\Delta x/x$ ist unabhängig vom Vorfaktor a)
$y = \ln x$	$\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$	absolute Unsicherheit von y = relative Unsicherheit von x
$y = x_1 \pm x_2$	$\Delta y^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$	absolute Unsicherheit quadratisch addieren (immer „+“!)
$y = x_1 \cdot x_2 \}$ $y = x_1 / x_2 \}$	$\left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2} \right)^2$	relative Unsicherheit quadratisch addieren (immer „+“!)
$y = a \cdot x_1^b \cdot x_2^c$	$\left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 = \left(b \frac{\Delta x_1}{x_1} \right)^2 + \left(c \frac{\Delta x_2}{x_2} \right)^2$	(relative Unsicherheit) * Exponent quadratisch addieren

Wichtige Hinweise:

- Nur bei Summen u. Differenzen ist es vorteilhaft, mit der absoluten Unsicherheit zu rechnen.
- Bei Produkten und Quotienten dagegen ist es einfacher, zuerst die „relative Unsicherheit“ (in %), daraus dann die relative Unsicherheit (in %) des Endergebnisses und erst zum Schluss die absolute Unsicherheit des Endergebnisses zu berechnen. Man spart sich dabei u.U., zahlreiche konstante Faktoren mehrfach (in den Taschenrechner) einzugeben!
- Bei Winkelfunktionen **Bogenmaß** verwenden!
- Für die Fehlerrechnung die Endformeln immer so aufschreiben, dass nur die direkt gemessenen Größen auftauchen. Vermeiden Sie es, mit Unsicherheiten von Zwischenergebnissen weiterzurechnen – sonst geht u.U. die Unsicherheit einer Messgröße unbemerkt mehrfach in die Rechnung ein.
- Bei komplizierteren Funktionen, die sich nicht auf einen der Fälle der Tabelle zurückführen lassen, verwenden Sie
- entweder direkt das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz (siehe oben)
 - oder (wenn Sie keine Lust zum Differenzieren haben) numerische Differentiation (besonders einfach mit einem Tabellenkalkulationsprogramm).
☞ „numerische Differentiation“ lohnt sich nur bei komplizierteren Zusammenhängen.
☞ Wenn ein Fall aus der Tabelle vorliegt kommt man damit schneller zum Ergebnis!