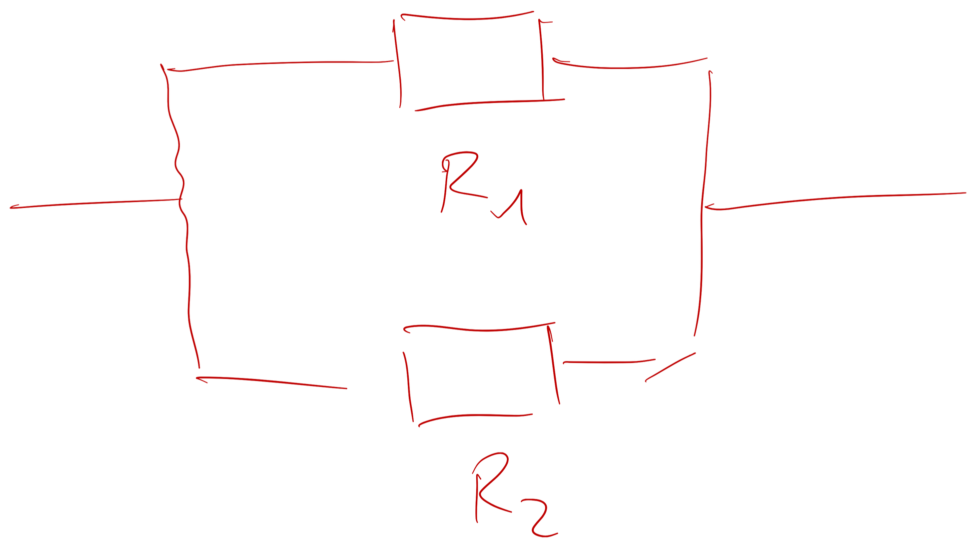
Beispiel zur Fehlerfortpflanzung



$$R_g = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 18}{12 + 18}\,\Omega = 7{,}2\,\Omega$$

$R_1 = 12\,\Omega \quad (\pm 5\,\%) \;\hat{=}\; \frac{\Delta R}{R} = 0{,}05$

$R_2 = 18\,\Omega \quad (\pm 5\,\%)$

$5\,\% \;\hat{=}\; \Delta R_1 = 0{,}6\,\Omega$

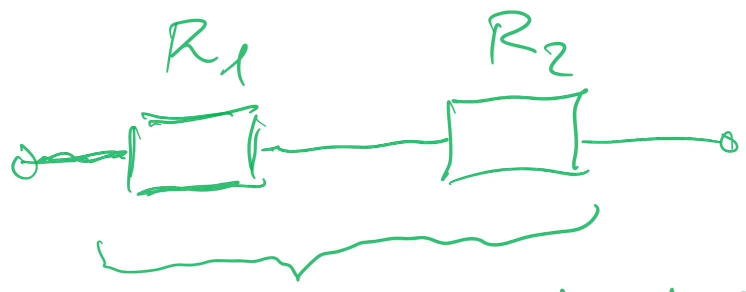
$\Delta R_2 = 0{,}9\,\Omega \qquad \Delta R_g = \;?$

Rechnung mit vereinfachten Formeln

Aufteilen: Zähler (Multiplikation), Nenner (Addition) } Division

$$\frac{\Delta(R_1 \cdot R_2)}{R_1 R_2} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2}_{0{,}05} + \underbrace{\left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2}_{0{,}05}} \qquad (5\,\%\ \text{Toleranz})$$

$$= 0{,}05 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}07\,\%$$



$30\,\Omega \pm 1{,}08\,\Omega$

$$\Delta(R_1 + R_2) = \sqrt{\Delta R_1^2 + \Delta R_2^2} = \sqrt{(0{,}6)^2 + (0{,}9)^2}\,\Omega \approx 1{,}08\,\Omega$$

$\frac{\Delta R_{12}}{R_{12}} = \frac{1{,}08}{30} \approx 3{,}6\,\%$

$$\boxed{\frac{\Delta R_g}{R_g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(R_1 \cdot R_2)}{R_1 \cdot R_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2}\right)^2}} = \sqrt{(0{,}0707)^2 + \left(\frac{1{,}08\,\cancel{\Omega}}{30\,\cancel{\Omega}}\right)^2}$$

$$\approx 0{,}0793 \approx 8\,\%$$

↯ Hier nicht anwendbar.
$R_1 \cdot R_2$ und $R_1 + R_2$ sind nicht unab-
hängig voneinander.

$$\Delta R_g = 0{,}0793 \cdot R_g = 0{,}0793 \cdot 7{,}2\,\Omega \approx 0{,}57\,\Omega$$

Korrekte mathematische Vorgehensweise

$$f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$\Delta R_{g,R_1} = \frac{\partial R_g}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1$$

$$= \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_1$$

$$= \frac{18^2}{30^2} \cdot 0{,}6\,\Omega$$

$$\approx 0{,}216\,\Omega$$

$$R_g = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\partial R_g}{\partial R_1} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2 \cdot 1}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$= \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

entsprechend $\frac{\partial R_g}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$

$$\Delta R_{g,R_2} = \frac{\partial R_g}{\partial R_2}\Delta R_2 = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\cdot\Delta R_2$$

$$= \frac{12^2}{30^2}\cdot 0{,}9\,\Omega$$

$$\approx 0{,}144\,\Omega$$

(Mathematik (Linearisierung, Tangentialebene)

$$\Delta R_g = \frac{\partial R_g}{\partial R_1}\cdot\Delta R_1 + \frac{\partial R_g}{\partial R_2}\cdot\Delta R_2$$)

Messtechnik: $$\Delta R_g = \sqrt{(\Delta R_{g,R_1})^2 + (\Delta R_{g,R_2})^2}$$

$$= \sqrt{(0{,}216)^2 + (0{,}144)^2}\;\Omega$$

$$\approx 0{,}26\,\Omega$$

Warum vorher $\Delta R_g \approx 0{,}57\,\Omega$???

siehe oben ...

unzulässig

Die vereinfachten Formeln dürfen nur auf voneinander unabhängige Größen angewendet werden.
Das ist hier bei Zähler und Nenner nicht der Fall.

Das korrekte Ergebnis lautet hier

$$R_g = 7{,}2\,\Omega \pm 0{,}26\,\Omega$$
$$= (7{,}2 \pm 0{,}26)\,\Omega$$

} beide Schreibweisen sind o.k.

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{0{,}26\,\Omega}{7{,}2\,\Omega} \approx 3{,}6\,\%$$