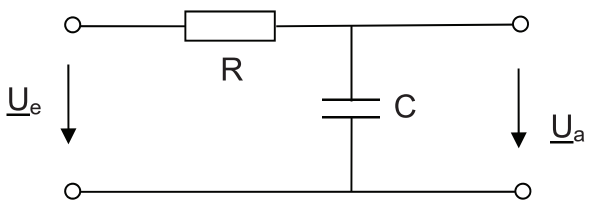
0.5.7 Komplexe Spannungsteiler, Frequenzgang, Filterschaltungen

Die Frequenzabhängigkeit der Impedanz von RLC-Kombinationen wird beim Aufbau von Filterschaltungen genutzt.

Um Signalverläufe zu glätten und höherfrequente Störungen zu mindern, werden **Tiefpassfilter** eingesetzt. Am einfachsten ist der **RC-Tiefpass**



Wegen $\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{R+Z_C}$ und $\underline{I} = \frac{\underline{U}_a}{Z_C}$ gilt in der Zeigerdarstellung mit komplexen Impedanzen auch die Spannungsteilerregel

Grenzfrequenz aus $|G(j\omega_g)| = \frac{\max(|G(j\omega)|)}{\sqrt{2}}$

$\omega_g = 2\pi f_g$

$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi}$

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{Z_C}{R+Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

Für die Amplituden gilt

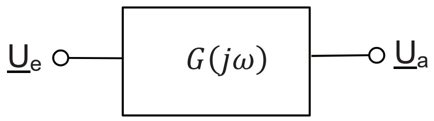
(Dämpfung)
Verstärkung von U_e zu U_a, frequenzabhängig

$$\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

Die Spannungsverstärkung der Schaltung ist also von der Frequenz abhängig und geht für sehr hohe Frequenzen ($\omega \to \infty$) gegen Null.

Man nennt das Verhältnis der Spannungszeiger den **Frequenzgang** der Filterschaltung und schreibt

$$\underline{U}_a(j\omega) = G(j\omega) \cdot \underline{U}_e(j\omega).$$



Hat $u_e(t)$ den Phasenwinkel Null (Bezugsgröße), so gilt bei gegebener Frequenz ω

$$\hat{U}_a = |G(j\omega)| \cdot \hat{U}_e$$

$|G(j\omega_i)| = \frac{\hat{U}_a(\omega_i)}{\hat{U}_e(\omega_i)}$

und

$$\varphi_a = \arg(G(j\omega)) = \arctan\frac{Im\{G(j\omega)\}}{Re\{G(j\omega)\}},$$

Messung eines Frequenzgangs:
- verschiedene Frequenzen f_i $(= \frac{\omega_i}{2\pi})$ einstellen — logarithmisch äquidistant
- jeweils $\hat{U}_e$ und $\hat{U}_a$ messen
- $20\ lg(\hat{U}_a/\hat{U}_e) = |G(j\omega_i)|_{dB}$

also

$$u_a(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U}_e \cdot \cos(\omega t + \varphi_a)$$

Man nennt die frequenzabhängige Verstärkung $|G(j\omega)|$ auch den **Amplitudengang** bzw. **Betragsfrequenzgang** und $\arg(G(j\omega))$ den **Phasengang** der Filterschaltung.

0.5.8 Bode-Diagramm

Der Frequenzgang liefert Amplitude und Phasenverschiebung des Ausgangssignals eines Filters für sinusförmige Eingangssignale

Zur grafischen Darstellung wird üblicherweise eine logarithmische Frequenzachse sowie eine logarithmische Achse für die Verstärkung und eine lineare, in [°] skalierte Achse für die Phasenverschiebung verwendet. Wird der Amplitudengang dabei in dB skaliert, spricht man vom **Bode-Diagramm**.

Definition "Dezibel" (für Spannungsverhältnisse)[1]:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\,\lg|G(j\omega)|\,.$$

$\lg(1) = 0$

$\lg(0{,}1) = -1$

$\lg(10) = 1$

$|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+j\omega RC}\right| = \left|\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}\right|$

$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$

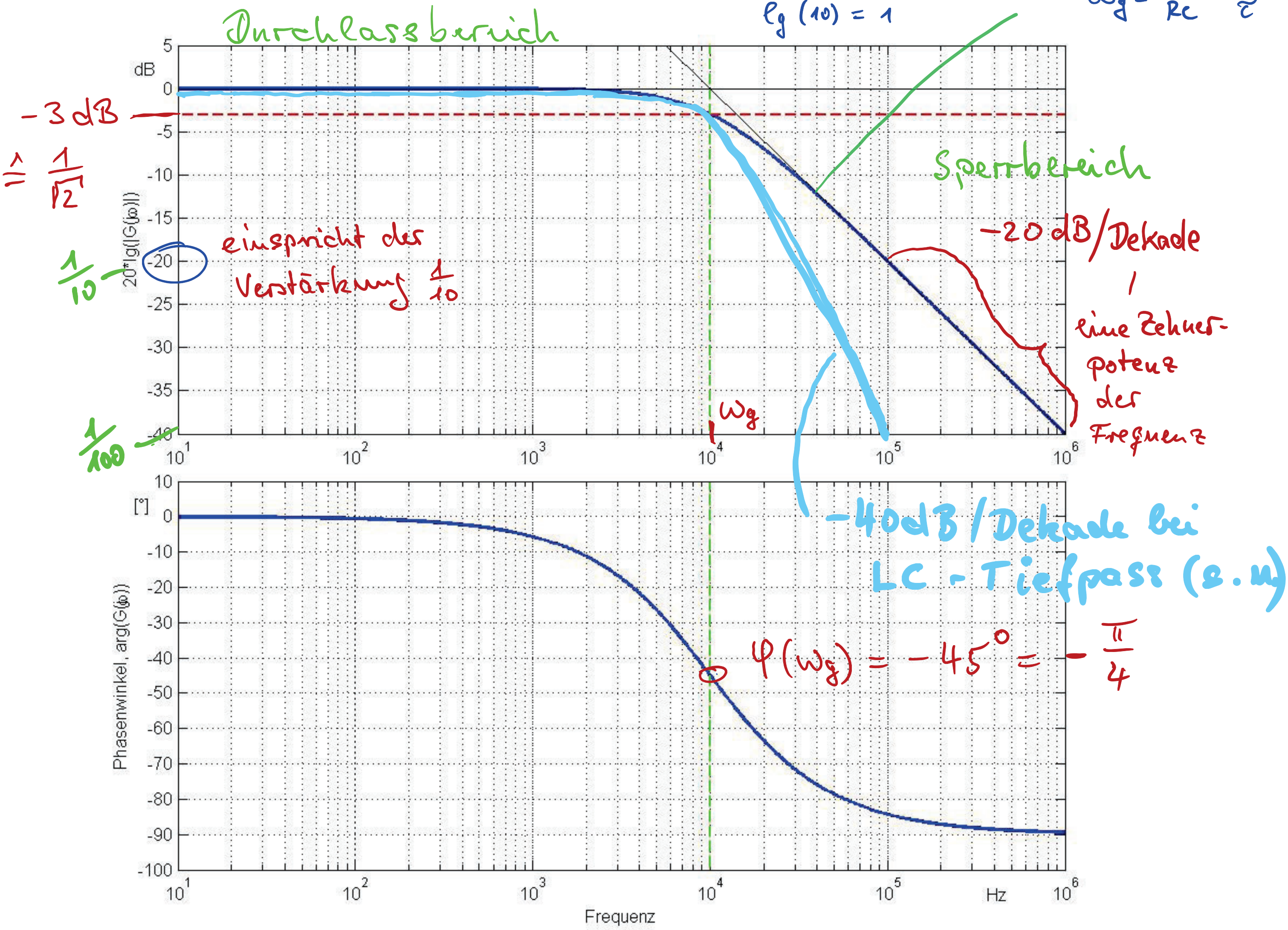


Abbildung 0.4: Messbereichsumschaltung beim µA-MULTIZET (Siemens)

Man nennt das oben dargestellte Übertragungsverhalten Tiefpassverhalten, da niederfrequente Signale bezüglich Amplitude und Phasenlage praktisch unverändert auf den Ausgang übertragen werden, während hochfrequente Signale stark abgeschwächt werden.

[1] Geht es um die übertragene Leistung P, so verwendet man die Definition $|G|_{dB} = 10 \cdot \lg|G|$.

Der Übergang vom "Durchlass-" zum "Sperrbereich" wird markiert durch die **Grenzfrequenz** $\omega_g = 2\pi f_g$.

> Die Grenzfrequenz ist definiert als die Frequenz, bei der die Verstärkung eines frequenzabhängigen Übertragungssystems auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - fache des Maximalwertes abgesunken ist.

Sie wird also berechnet aus

$$|G(j\omega_g)| = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

Ein Qualitätsmerkmal von Tiefpassfiltern ist die Steilheit, mit der die Verstärkung oberhalb der Grenzfrequenz gegen Null geht. Beim RC-Glied bewirkt eine Frequenzerhöhung um den Faktor 10 eine Amplitudenverringerung um den Faktor 10.

Im Bodediagramm bedeutet das eine Steigung von **-20dB/Dekade**).

Aliasfilter in der digitalen Signalverarbeitung (siehe Kap. 4) haben teilweise Dämpfungen von mehr als -200dB/Dekade!

0.5.9 Anwendungsbeispiel Lautsprecher-Frequenzweiche

Ein Beispiel für Filterschaltungen im täglichen Leben sind die Frequenzweichen in Mehrwege-Hifi-Lautsprecherboxen. An Basslautsprechern dürfen nur die Musikanteile mit niedrigen Frequenzen anliegen, sonst verzerren sie. Hochtöner dürfen nur hochfrequente Signalanteile bekommen, sonst werden sie überlastet und zerstört.

Zwei-Wege Frequenzweiche

Besteht die Box aus einem Basslautsprecher (Tieftöner) und einem Hochtöner, so besteht die Frequenzweiche aus einem Tiefpass, an den der Tieftöner angeschlossen wird, und einem Hochpass für den Hochtöner.

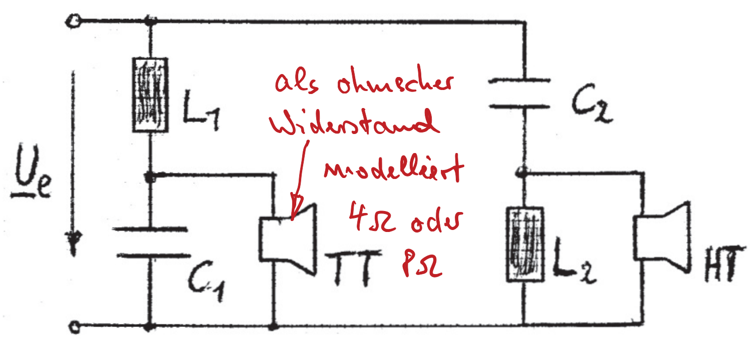


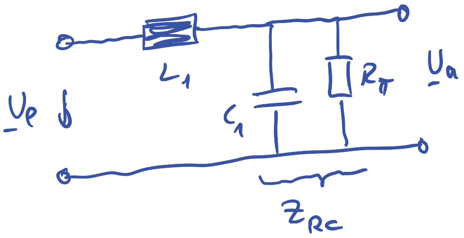
Abbildung 0.5: ESB einer 2-Weg-Frequenzweiche (12db/Oktave bzw. 40dB/Dekade)

Bei der Berechnung wird üblicherweise vorausgesetzt, dass die Lautsprecher als ohmsche Widerstände behandelt werden können (meist 4 oder 8 Ω).

a) Frequenzgang des Signals am Tieftöner

Die Impedanz der RC-Parallelschaltung ist (siehe Kap.0.5.5)

$$Z_{RC} = \frac{R_{TT} \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_{TT} + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1},$$



so dass

Tiefpass 2. Ordnung

$$G_{TT}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{TT}}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1}}{j\omega L_1 + \frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1}} = \frac{Z_{RC}}{j\omega L_1 + Z_{RC}}$$

$$= \frac{R_{TT}}{R_{TT} + j\omega L_1 (1 + j\omega R_{TT} C_1)}$$

$$= \frac{1}{1 - \omega^2 L_1 C_1 + j\omega \frac{L_1}{R_{TT}}}$$

gegenüber RC-Tiefpass: $\frac{1}{1+j\omega RC}$

quadratischer Term ⟹ Verstärkung sinkt oberhalb der Grenzfrequenz um den Faktor 100 bei Erhöhung der Frequenz um Faktor 10.

b) Frequenzgang des Signals am Hochtöner

$$G_{HT}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{HT}}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2}{R_{HT} + j\omega L_2}}{\frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2}{R_{HT} + j\omega L_2}}$$

$$= \frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2 \cdot j\omega C_2}{R_{HT} + j\omega L_2 + R_{HT} \cdot j\omega L_2 \cdot j\omega C_2}$$

$$= -\frac{\omega^2 L_2 C_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\omega \frac{L_2}{R_{HT}}}$$

Die Bauteile sind so zu wählen, dass in möglichst guter Näherung

$$G_{gesamt}(j\omega) = G_{TT}(j\omega) + G_{HT}(j\omega) = 1$$

gilt.

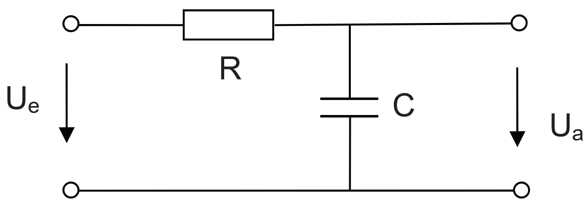
<u>Übung:</u>

Wie lautet dieser Summenfrequenzgang im Fall $R_{HT} = R_{TT}$, $L_1 = L_2 =: L$ und $C_1 = C_2 =: C$?

Wie lautet der Frequenzgang der Abweichung $1 - G_{gesamt}(j\omega)$?

0.6 Übungen (Filterschaltungen)

0.6.1 RC-Tiefpass

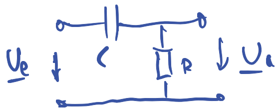


a) Bestimmen Sie den Frequenzgang $G_{TP}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}(j\omega)$ des RC-Tiefpasses mit Hilfe der komplexen Spannungsteilerregel.

b) Leiten Sie hieraus und aus der obigen Definition der Grenzfrequenz Folgendes her:

1. die Formel für die Grenzfrequenz in Abhängigkeit von R und C,
2. die Tatsache, dass bei der Grenzfrequenz $R = |Z_C| = X_C = \frac{1}{\omega C}$ gilt ("Wirk- gleich Blindwiderstand"),
3. die Tatsache, dass die Phasenverschiebung der Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung bei der Grenzfrequenz $-45°$ beträgt.

0.6.2 RC-Hochpass



Bestimmen Sie entsprechend den Frequenzgang $G_{HP}(j\omega)$ des RC-Hochpasses. Zeichnen Sie zunächst das ESB.

0.6.3 RCCR-Bandpass 1

Es ist nun die Serienschaltung eines RC-Tiefpasses und eines RC-Hochpasses zu berechnen, wobei die Widerstände und Kondensatoren beider Filter identisch sein sollen. Man erhält auf diese Weise einen Bandpass.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der komplexen Zeigerrechnung, dass der Frequenzgang dieses Bandpasses gegeben ist durch

$$G_{BP1}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1+3j\omega RC-(\omega RC)^2}$$

b) Leiten Sie hieraus ab, dass die Verstärkung gleich $|G_{BP1}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9+(\omega RC-\frac{1}{\omega RC})^2}}$ ist.

c) Begründen Sie, dass $|G_{BP1}(j\omega)|$ sein Maximum bei $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, der Mittenfrequenz, annimmt. (Extremwertuntersuchung durch Ableitung etc. ist dazu nicht notwendig!).

0.6.4 RCCR-Bandpass 2

Wegen $\underline{U}_a(j\omega) = G(j\omega) \cdot \underline{U}_e(j\omega)$ ist der Frequenzgang einer Serienschaltung zweier Filter gleich dem Produkt der Einzelfrequenzgänge (Zeigen!). Für den Bandpass aus Tief- und Hochpass bedeutet das $G_{BP2}(j\omega) = G_{TP}(j\omega) \cdot G_{HP}(j\omega)$.

Welcher Frequenzgang $G_{BP2}(j\omega)$ ergibt sich so?

Leiten Sie daraus $|G_{BP2}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2} = \frac{1}{\sqrt{4+(\omega RC-\frac{1}{\omega RC})^2}}$ ab.

Warum unterscheidet sich das Ergebnis von dem in Aufgabe 0.6.3?

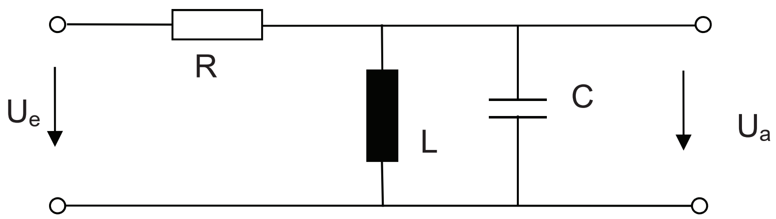
0.6.5 Obere und untere Grenzfrequenzen

a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Definition der Grenzfrequenz ("Absinken der Verstärkung um $\frac{1}{\sqrt{2}}$") für die Bandpässe aus Aufgabe 0.6.3 und Aufgabe 0.6.4 jeweils die obere und untere Grenzfrequenz.

b) Zeigen Sie, dass für die Mittenfrequenz (Aufgabe 0.6.3c) gilt $\omega_0 = \sqrt{\omega_{gu} \cdot \omega_{go}}$.

0.6.6 Vergleich mit RLC-Bandpass

Vergleichen Sie die Verstärkungen der Bandpässe bei der Mittenfrequenz (Maximalverstärkungen).

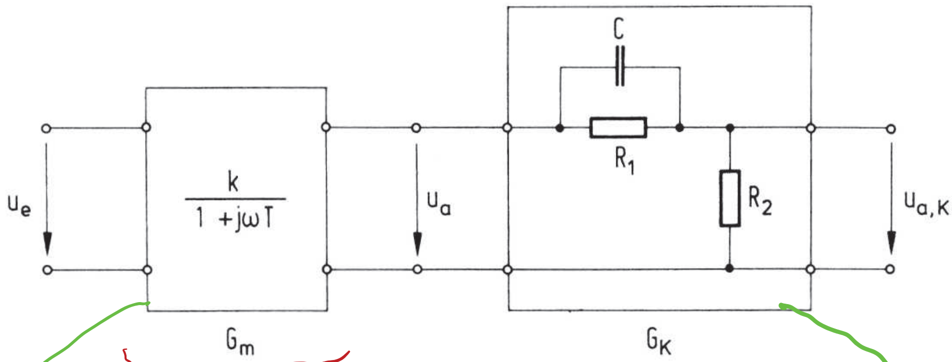


Vergleichen Sie auch mit dem RLC-Bandpass aus dem Laborversuch DSA (siehe Abbildung).

.

0.6.7 Frequenzgang

a) Gegeben ist die Kompensationsschaltung (ähnlich einem Tastkopf)



Zeigen Sie, dass der Frequenzgang $G_K(j\omega)$ sich in der Form

$$G_K(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$$

schreiben lässt.

Rückwirkungsfrei, nicht beeinflusst von der Ausgangsbeschaltung

Beispiel/Übung:

Welcher Frequenzgang gilt für die Gesamtübertragung von U_e nach $U_{a,k}$?

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{k}{1 + j\omega T}, \quad \frac{\underline{U}_{a,k}}{\underline{U}_a} = G_k(j\omega)$$

$$\underline{U}_{a,k} = G_k(j\omega) \cdot \underline{U}_a = \underbrace{G_k(j\omega) \cdot \frac{k}{1 + j\omega T}}_{G_{gesamt}(j\omega)} \cdot \underline{U}_e$$

Produkt der beiden Teilfrequenzgänge

b) Bestimmen Sie die Gleichspannungsverstärkung ($\omega = 0$) und die Verstärkung bei sehr hohen Frequenzen ($\omega \to \infty$).

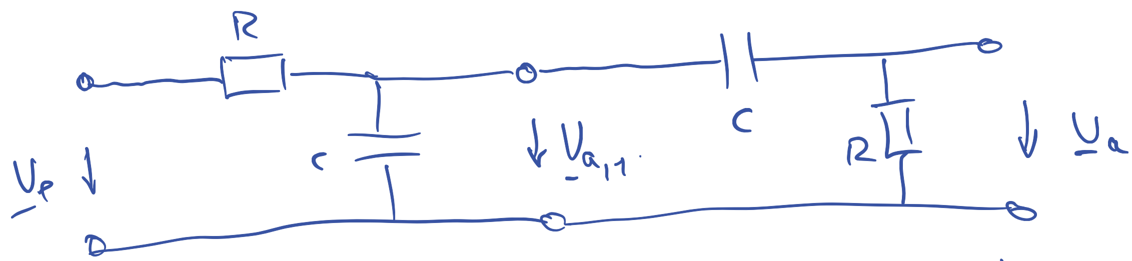
c) Die Zeitkonstante im Nenner soll um den Faktor 10 kleiner sein als die des Zählers. Bestimmen Sie das Widerstandsverhältnis R_1/R_2 .

d) Skizzieren Sie für diesen Fall den Amplitudengang des Bodediagramms.

Hinweis: $20\lg\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1+j\omega R_1 C}{1+j\omega\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}C}\right) = 20\lg\frac{R_2}{R_1+R_2} + 20\lg\frac{1}{1+j\omega\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}C} + \left(-20\lg\frac{1}{1+j\omega R_1 C}\right)$

e) Betrachten Sie nun die Gesamtschaltung (Serienschaltung von G_m und G_k). Wie unterscheiden sich die Grenzfrequenz und die Verstärkung $\frac{\hat{U}_{a,K}}{\hat{U}_e}$ der Gesamtschaltung von den entsprechenden Werten von $G_m(j\omega)$, wenn $R_1 C = T$ und $R_2 = 0{,}1 \cdot R_1$ gewählt wird?

Bandpass aus Serienschaltung TP, HP



$$G_{TP} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \qquad G_{HP} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Spontanidee : $G(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = G_{TP}(j\omega) \cdot G_{HP}(j\omega)$

$$= \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$= \frac{j\omega RC}{(1 + j\omega RC)^2}$$

ist falsch,

denn der HP

belastet den TP

und verändert dessen Charakteristik

$$\frac{\underline{U}_{a,1}}{\underline{U}_e} = \frac{Z_C \| (Z_C + R)}{R + Z_C \| (Z_C + R)}$$

$$Z_C \| (Z_C + R) = \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{\frac{1}{j\omega C} + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{2 + j\omega RC}$$

$$= \frac{1 + j\omega RC}{(2 + j\omega RC) \cdot j\omega C}$$

$$\frac{\underline{U}_{a,1}}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1 + j\omega RC}{(2 + j\omega RC) \cdot j\omega C}}{R + \frac{\cdots}{\cdots}} = \frac{1 + j\omega RC}{(2 + j\omega RC) \cdot j\omega RC + (1 + j\omega RC)}$$

$$\frac{\underline{U}_{a,1}}{\underline{U}_e} = \frac{1 + j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega RC)^2}$$

und nicht $\frac{1}{1+j\omega RC}$!

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{a,1}} = G_{HP} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

wegen $j^2 = -1$

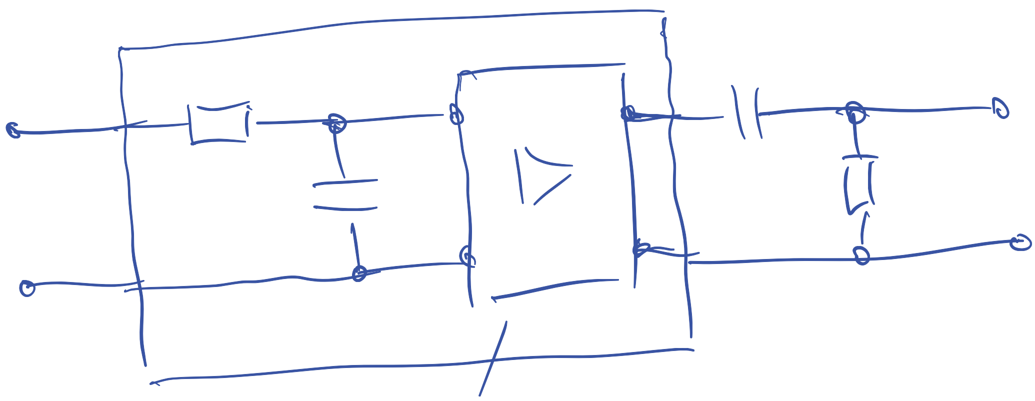
$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{U}_{a,1}}{\underline{U}_e} \cdot \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{a,1}} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC - (\omega RC)^2}$$

dagegen:

$$G_{TP} \cdot G_{HP} = \frac{j\omega RC}{(1+j\omega RC)^2} = \frac{j\omega RC}{1 + 2j\omega RC - (\omega RC)^2}$$

Abhilfe für dieses Problem schaffen

aktive Filterschaltungen (Operations-verstärkern)



Hier gilt dann

$$G_{gesamt} = G_{TP} \cdot G_{HP}$$

hoher Eingangswiderstand

kein Stromfluss in den Eingang

Keine Belastung, keine Veränderung des Tiefpassfrequenzgangs.