Lösungen zu Übungsaufgaben, ELMESS

0.2 Übungen zu Schaltungen mit Ohmschen Widerständen

0.2.1 Mittelwert

a) Rechnung siehe Skript S. 7 oben, Ergebnis: $\bar{u} = \frac{2}{\pi}\hat{U} \approx 3{,}183\ A$

b) x

0.2.2 Effektivwert

Rechnung siehe Skript S. 7 unten, Ergebnis: $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{I} \approx 3{,}54\ A$

0.2.3 Mittelwert, Effektivwert

$\bar{x} = 0{,}75\ V$, $x_{eff} = 1{,}5\ V$

0.2.4 Scheitelfaktor, Formfaktor

x

0.2.5 RMS

Bei sinusförmigen Signalen kann der Effektivwert mit einem DC-Messwerk bestimmt werden, indem der Mittelwert des gleichgerichteten Signals mit dem Formfaktor $F \approx 1{,}11$ multipliziert wird.

Bei "TRMS"-Messinstrumenten wird der Effektivwert (numerisch) anhand des Integrals über das Quadrat des gemessenen Verlaufs errechnet, so dass auch für nicht sinusförmige Signale korrekte Werte angezeigt werden.

0.4 Übungen zu Schaltungen mit Ohmschen Widerständen

0.4.1 Parameter einer nicht-idealen Spannungsquelle

Es gilt $U = U_0 - R_i \cdot I$

Liegen Spannungsmessungen bei zwei verschiedenen Strömen vor, so erhält man

$U_1 = U_0 - R_i \cdot I_1$, $U_2 = U_0 - R_i \cdot I_2$

und somit $R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}$ und $U_0 = U_2 + R_i \cdot I_2 = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$

0.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

$$I_S = \frac{U_M}{R_M} = \frac{0{,}14\,V}{0{,}1\,\Omega} = 1{,}4\ A \qquad R_S = \frac{U_S}{I_S} = \frac{14{,}3\,V}{1{,}4\ A} \approx 10{,}21\,\Omega$$

0.4.3 Messbereiche einer Strommessung

b) $(I - I_M)R_p = I_M R_M$ also $R_p = \frac{I_M R_M}{I - I_M} \approx 30{,}24\ \Omega$

0.4.4 Messbereiche der Spannungsmessung

a) $U_M = I_M R_M \approx 30\ mV$ b) aus 0.4.3: $I_v = 10\ \mu A$, $R_v = \frac{U - U_M}{I_v} \approx 7\ k\Omega$

0.4.5 Strom- und Spannungsmessbereiche 1

x

0.4.6 Strom- und Spannungsmessbereiche 2

x

0.6 Übungen (Filterschaltungen)

Diese Übungsaufgaben sind im Rahmen der Vorbereitung auf die Laborversuche DAQ-USB, DAQ-LV und DSA zu bearbeiten.

1.3 Übungen "Begriffe, SI-Einheiten"

1.3.1 Zeit

Recherche auf http://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44.html

1.) Die Uhr der PTB wird "Atomuhr" genannt, weil als Zeit-Normal Cäsium-Atome (^{133}Cs) angeregt werden und die Frequenz eines bestimmten Teils der ausgesendeten Strahlung bestimmt wird. Die Sekunde ist definiert als das 9 192 631 770 fache der Periodendauer dieser Strahlung. Die Definition gilt seit 1967.

2.) Frequenz (1 Hz = 1 / 1 s)

3.) DCF77 ist die Bezeichnung des Langwellensenders, der sich in Mainflingen südlich von Frankfurt befindet und mit dem Normalfrequenz und gesetzliche Zeit ausgesendet werden ("D" Deutschland, "C" Langwelle, "F" Frankfurt, "77" Sendefrequenz 77,5 kHz)

4.) Es wird laufend an Uhren mit geringerer Messunsicherheit gearbeitet (z. B. ist die relative Messunsicherheit der "Ytterbium-Uhr" um mehr als zwei Zehnerpotenzen geringer als die der Cs-Uhr) und entspricht 1s bezogen auf das Alter des Universums.

Für die aktuell vorangetriebene Neudefinition der SI-Einheiten bleibt es aber noch bei der bisherigen Definition (siehe https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/presse_aktuelles/broschueren/intern_einheitensystem/Infoblatt_neues_SI_Einzelseiten_web.pdf

1.3.2 SI-Basiseinheiten

1.) "Urmeter". Da die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum eine Naturkonstante ist (Einstein, 1905), ist mit der Definition der Zeit auch die Strecke festgelegt. 1 m ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in 1/299.792.458 s zurücklegt.

2.) $\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{299792458\ \frac{m}{s}}{9192631770\ Hz} \approx 3{,}26\ cm$

3.) 1 mbar = 1 hPa = 100 N/m² = …

1.3.3 Normale

"Messen heißt Vergleichen" – Normale dienen als Vergleichsgröße. Ein Messwert ist das jeweils vorliegende Vielfache der durch das Messnormal gegebenen Einheit.

1.3.4 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen I

a) 1 J = 1 Nm = 1 kg m² / s² 1 V = 1 Ws / As = 1 Nm / 1 As etc.

1 H = 1 Vs / A = 1 Nm / A² etc.

b) $E = mgh \approx 8000 \cdot 80 \cdot 10\ \frac{kgm^2}{s^2} = 64 \cdot 10^5\ Ws \approx 1{,}78\ kWh$

1.3.5 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen II

a) $\mathrm{P = q_V \cdot \Delta p = 10{,}8\ \frac{m^3}{h} \cdot 200\ mbar = 2160\ \frac{m^3}{3600\ s} \cdot 10^2 \frac{N}{m^2} = 60\ \frac{Nm}{s}}$

b) $\mathrm{P_E = \frac{P}{0.4} = 150\ \frac{Nm}{s} = 150\ W,\ E_E = P_E \cdot t = 150\ W \cdot 24\ h = 3{,}6\ kWh}$

2.2 Ausgleichsgerade, Kurvenapproximation ("Fit")

2.2.1 Erstellen von Diagrammen

und

2.2.2 Ausgleichsfunktion

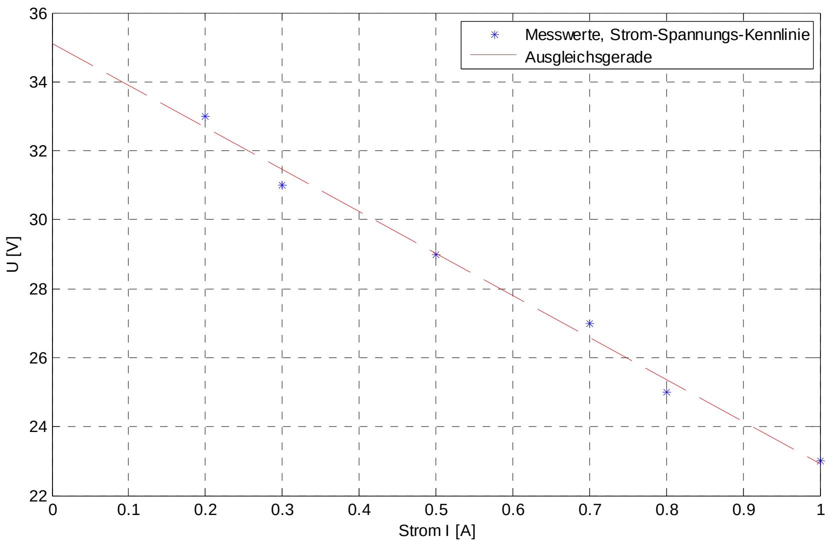
siehe Laborübung "MATLAB-Einführung / Parameteridentifikation"

2.2.3 Belastungskennlinie, Innenwiderstand

a) Viele Spannungsquellen würden durch den hohen Kurzschlussstrom zerstört.

b) siehe Grundlagen ET sowie Lösung zu 0.4.1. "Innenwiderstand"

c) AG: $U \approx -12.17\Omega \cdot \mathrm{I} + 35.1\ V$



d) $\mathrm{R_i = -m \approx 12{,}17\Omega}$

e) $\mathrm{s_m = \Delta R_i \approx 0{,}578\ \Omega}$ (wobei: r_{xy} = 0,9955, B_{xy} = 0,991) also $\hat{R}_i$ = 12,17 Ω ± 0,58 Ω

(Anmerkung: Nach Skriptkapitel 7.2 ist die Angabe eines größeren Unsicherheitsintervalls empfehlenswert. Bei der hier gemachten Angabe ist der wahre Wert nur mit ca. 68% Wahrscheinlichkeit im angegebenen Bereich.)

f) $\mathrm{U_0} \approx 35{,}1\ \mathrm{V}$, $\mathrm{s_b} = \Delta \mathrm{U_0} \approx 0{,}374\ \mathrm{V}$

2.2.4 Leerlaufspannung und Innenwiderstand einer Spannungsquelle

Ansatz: $U(I) = \bar{U} - R_i \cdot \left(I - \bar{I} \right) = U_0 - R_i \cdot I$, $U_0 = \bar{U} + R_i \cdot \bar{I}$

$\bar{I} = \frac{60}{4} = 15$ A $\qquad \bar{U} = \frac{32}{4} = 8\ \mathrm{V}$

$$\sum \left(I_i - \bar{I} \right)\left(U_i - \bar{U} \right) = (-11) \cdot 2 + (-3) \cdot 0{,}5 + 1 \cdot (-0{,}5) + 13 \cdot (-2) = -50\ \mathrm{VA}$$

$$\sum \left(I_i - \bar{I} \right)^2 = (-11)^2 + (-3)^2 + 1^2 + 13^2 = 300\ \mathrm{A}^2$$

$$R_i = -\frac{\sum \left(I_i - \bar{I} \right)\left(U_i - \bar{U} \right)}{\sum \left(I_i - \bar{I} \right)^2} = -\left(\frac{-50}{300} \right) \Omega = \frac{1}{6} \Omega \approx 0{,}167\,\Omega$$

$$U_0 = 8\ \mathrm{V} + \frac{1}{6} \Omega \cdot 15\ \mathrm{A} = 10{,}5\ \mathrm{V}$$

2.2.5 Kurzschlussstrom einer Solarzelle

a) Empfindlichkeit: 2.518 mA/(W/m²)

b) Standardabweichung der Empfindlichkeit: 0.0754 mA/(W/m²)

Matlab-Script zur Lösung: `SZalsSensor_Lsg.m`

2.2.6 Ausgleichsgerade, Bestimmtheitsmaß, Unsicherheit der Steigung

x

2.2.7 Ausgleichsgerade, Bestimmtheitsmaß, Unsicherheit der Steigung

x

2.4 Ausgleichsgeraden bei logarithmischer Skalierung

2.4.1 Zeitkonstante einer Bauteilabkühlung

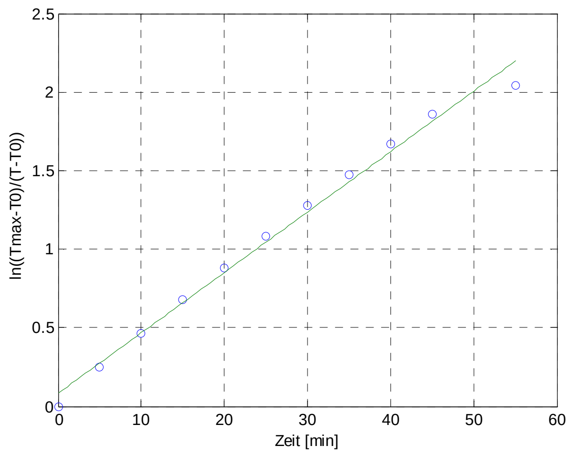
$$\vartheta(t) = \vartheta_U + \left(\vartheta_{55} - \vartheta_U\right) \cdot e^{-\frac{t-55}{\tau}}$$

$$\ln\left(\frac{\vartheta_{55} - \vartheta_U}{\vartheta(t) - \vartheta_U}\right) = \frac{1}{\tau} \cdot \left(t - 55\right)$$

Die Zeitkonstante ergibt sich als Kehrwert der Steigung der Ausgleichsgerade:

τ ≈ 26.01 min

(siehe Matlab-Script: `tau_Bauteil_Lsg.m`



2.4.2 Parameter B eines NTC

a) y-Achse: $\ln\left(\frac{R(T)}{R(T_0)}\right)$, x-Achse: $\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}$

bzw., wenn T_0 die niedrigste Temperatur der Messreihe ist, besser

y-Achse: $\ln\left(\frac{R(T_0)}{R(T)}\right)$, x-Achse: $\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}$

b) B = 4523 K

(siehe Matlab-Script: `B_NTC_fit.m`)

2.4.3 Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers

x = 1.74 , c = 49 (siehe `halogenstrahler_Lsg.m`)

2.4.4 Leistung einer Windkraftanlage

Zwei der im Skript vorgeschlagenen Methoden können eingesetzt werden: "fit" mit geeignetem Funktionsansatz und Ausgleichsgerade in einer doppelt-logarithmischen Darstellung der gegebenen Wertepaare.

- Es liegt ein Zusammenhang der Form $P = c \cdot v_w^x$ vor. Eine optimale Anpassung der Parameter c und x an die gegebenen Wertepaare (z.B. mit GnuPlot-fit oder Matlab-lsqcurvefit) liefert $x \approx 2{,}53$.
- Doppelt-logarithmisch ergeben sich die Wertepaare

log(v_W)	0,477	0,602	0,699	0,778	0,903	1,0	1,079
log($P_{el.}$)	1,544	1,903	2,146	2,398	2,778	2,954	3,176

Theoretisch sollten diese Wertepaare auf einer Geraden $\log(P_{el}) = \log(c) + x \cdot \log(v_W)$ mit der Steigung x liegen.

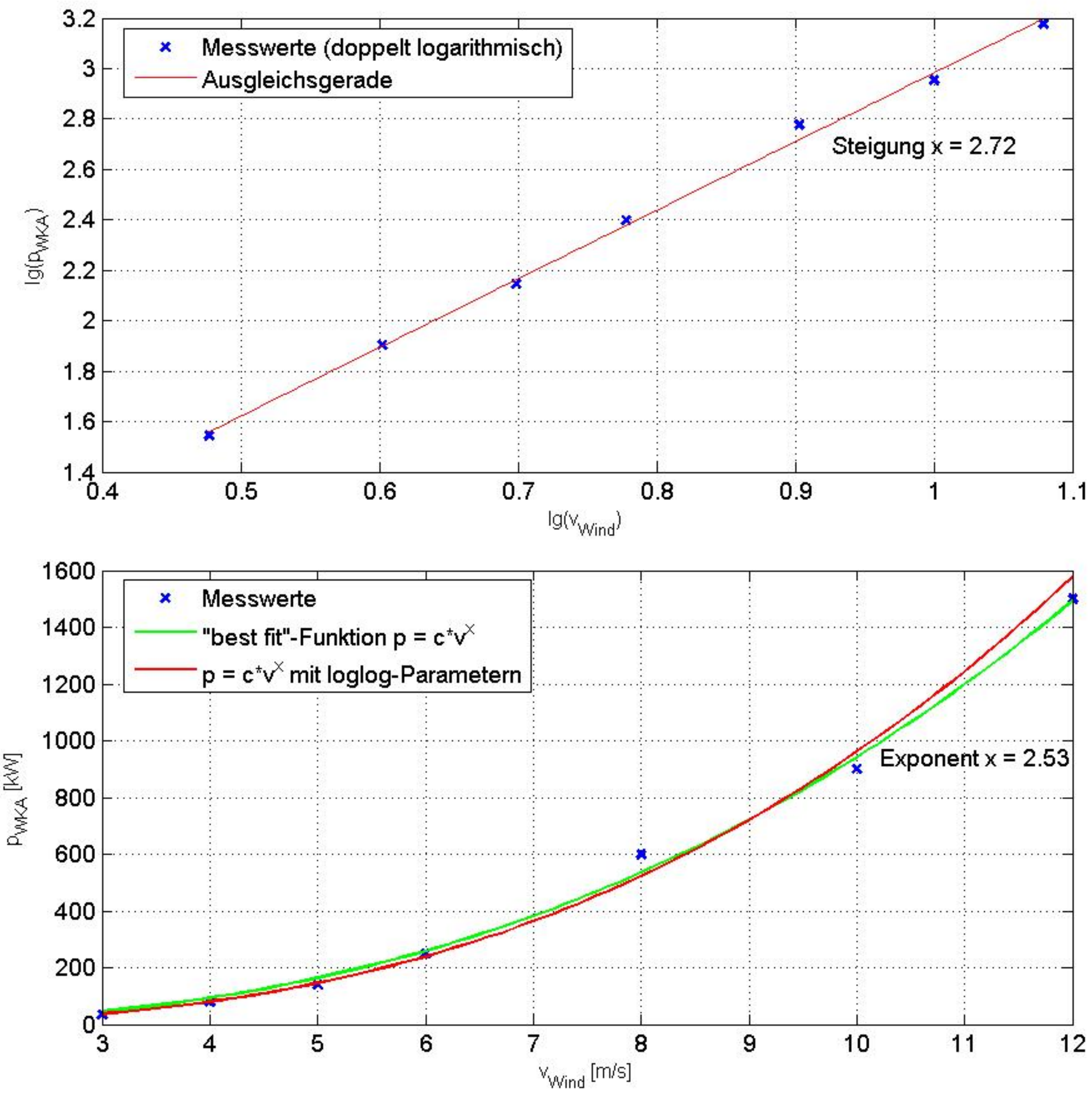
Diese lässt sich mit Steigungsdreiecken ermitteln, z. B.

$$x \approx \frac{2,954 - 1,903}{1,0 - 0,602} \approx 2,64 \quad \text{oder} \quad x \approx \frac{2,778 - 1,903}{0,903 - 0,602} \approx 2,91$$

Besser ist aber die Berechnung der Ausgleichsgerade, z. B. mit GnuPlot-fit, Matlab-polyfit oder Matlab-lsqcurvefit. Dies liefert die Steigung $x \approx 2,72$.

Die unten stehende Grafik zeigt die Ausgleichsgerade im oberen Diagramm und im unteren die Gegenüberstellung der Ergebnisse, die durch direkte Parameteroptimierung des Funktionsansatzes (a) und durch die Ausgleichsgerade in der doppelt-logarithmischen Darstellung (b) gewonnen werden. Während die Optimierung nach a) einen Verlauf ergibt, der vor allem die Punkte bei großen Funktionswerten annähert, wird durch die Methode b) eine gleichmäßigere Annäherung auch der Punkte bei kleinen Funktionswerten erreicht.

`pWKA_von_v_fit_plus_doppellog.m` liefert:



2.4.5 Fischbestand

Ansatz: $B(t) = B(0) \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, wobei T die Zeit in Jahren ist, nach der jeweils Verdoppelungen des Bestandes zu verzeichnen sind.

Berechne die Ausgleichsgerade zu $lg\left(\frac{B(t)}{B(0)}\right) = \frac{\lg(2)}{T} \cdot t$

Es ergibt sich die Steigung $m = 0{,}1842$.

In MATLAB: `t = [0; 1; 2; 3; 4]; B = [0.5; 0.7; 1.2; 1.8; 2.6];`

`y = log10(B/B(1)); p = polyfit(n,y,1); m = p(1)`

Damit gilt für den gesuchten Zeitraum der Verdopplung: $T \approx 1{,}63$ Jahre.

Zusatz: Genauer ist es hier, nicht eine Ausgleichsgerade $y = mx + b$ zu berechnen, bei der sich in diesem Fall `b = p(2) = 0.0115` ergibt, sondern b = 0 vorauszusetzen. Wie man im Skript, Seite 27, bei der Ableitung des Gütemaßes nach m sieht, gilt dann

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

Das heißt hier: $m = 0{,}1813$ und Verdoppelungszeitraum $T \approx 1{,}66$ Jahre.