



F4 - Elektrotechnik und Informatik

Grundlagen der Elektrischen Messtechnik

Unterlagen zum Modul ELMESS in den Studiengängen
Automatisierung/Mechatronik und Technische Informatik

Prof. Dr.-Ing. Manfred Mevenkamp

Ergänzt durch weitere Materialien unter

<http://www.aulis.hs-bremen.de> (ILIAS-Lernplattform)

Magazin > Fakultät 4: Elektrotechnik und Informatik > Automatisierung/Mechatronik
(ATMEI) > Prof. Dr.-Ing. Manfred Mevenkamp > ELMESS

Nachfragen, Terminvereinbarungen etc.:

E-Mail: manfred.mevenkamp@hs-bremen.de

bzw. Tel.: 5905-5482

Literaturempfehlungen, weitere Informationsquellen

Alle für die Veranstaltung einschließlich Prüfung nötigen Unterlagen werden bereitgestellt. Bei Interesse am weiteren, selbständigen Erarbeiten sind empfehlenswert:

Bücher

E. Schrüfer: Elektrische Messtechnik, (ab 8. Aufl. 2004, ca. 500 S.)

E-Books

<http://www.suub.uni-bremen.de/>

bei Zugang aus dem Rechnernetz der Hochschule Bremen oder der Universität (von außen ggf. per VPN) freier Zugriff auf viele Fachbücher (incl. Möglichkeit des PDF-Downloads).

Zur Messtechnik gibt es beispielsweise

Mühl, Thomas: *Einführung in die elektrische Messtechnik - Grundlagen, Messverfahren, Geräte*, 3. neu bearbeitete Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008

<http://www.springerlink.com/content/p404v2/>

Parthier, Rainer: *Messtechnik - Grundlagen und Anwendungen der elektrischen Messtechnik für alle technischen Fachrichtungen und Wirtschaftsingenieure*, 4. verbesserte Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2008

<http://www.springerlink.com/content/r736nh/>

Lerch, Reinhard: *Elektrische Messtechnik - Analoge, digitale und computergestützte Verfahren*, 4. neu bearbeitete Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007

<http://www.springerlink.com/content/r60785/>

Lerch; Kaltenbacher; Lindinger; Sutor: *Elektrische Messtechnik - Übungsbuch*, 2. neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005

<http://www.springerlink.com/content/h167th/>

Weitere

http://www.mathworks.com/academia/student_version/ Matlab/Simulink

Inhalt

Das Modul ELMESS.....	5
0 Grundlagen aus Elektrotechnik und Mathematik	6
0.1 Mittelwert und Effektivwert: Integrale.....	6
0.1.1 Mittelwert, Gleichrichtmittelwert.....	6
0.1.2 Effektivwert, Scheitelfaktor, Formfaktor.....	7
0.1.3 Vorteile von Digitalmultimetern gegenüber Analog-Instrumenten	9
0.2 Übungen zu Mittelwert, Effektivwert, Scheitelfaktor, Formfaktor	9
0.3 Kirchhoffssche Gesetze, Spannungsteiler, Arithmetik.....	10
0.3.1 Spannungsabfall, Spannungsteiler.....	10
0.3.2 Widerstandskaskaden zur Messbereichsumschaltung.....	11
0.4 Übungen zu Schaltungen mit Ohmschen Widerständen.....	12
0.5 RLC-Netzwerke, Zeigerdarstellung, komplexe Zahlen	14
0.6 Übungen (Filterschaltungen)	24
0.7 Oszilloskop – Prinzip und Hinweise zum Laborversuch	27
0.8 Übungen "Oszilloskop".....	29
1 Messtechnik – Einführung.....	30
1.1 Aufgabe und Gegenstand der Messtechnik	30
1.1.1 Wozu Messen?	30
1.1.2 Was wird gemessen?	30
1.2 Grundbegriffe	31
1.2.1 Messen heißt Vergleichen.....	31
1.2.2 Das SI-Einheitensystem.....	32
1.3 Übungen "Begriffe, SI-Einheiten"	35
2 Auswertung von Messdaten.....	36
2.1 Messreiendarstellung, Regression und Parameterbestimmung	36
2.1.1 Beispiel "Belastungskennlinie"	36
2.1.2 "Best Fit", Lineare Regression, Ausgleichsgerade	38
2.1.3 Approximation von Messreihen durch allgemeine Funktionen	41
2.2 Übungen "Ausgleichsgerade, Kurvenapproximation (Fit)".....	42
2.3 Auswertung mit Ausgleichsgeraden bei nichtlinearen Zusammenhängen	45
2.3.1 Abschnittsweise Annäherung durch Ausgleichsgeraden.....	45
2.3.2 Halblogarithmische Darstellung.....	45
2.3.3 Doppelt-logarithmische Darstellung	46
2.4 Übungen "Ausgleichsgeraden bei logarithmischer Skalierung"	47
3 Aufbau eines Messsystems, Sensoren, Messkette	50
3.1 Sensorelement, Sensor, Messkette.....	50
3.1.1 Messkette.....	50
3.1.2 Sensorbegriff.....	51
3.2 Statische Sensorkennlinie, Empfindlichkeit	52
3.3 Statische Kennlinienabweichungen	53
3.4 Übungen "Sensorkennlinien, Linearitätsfehler"	54
3.5 Übungen "Sensorkennlinien, Linearisierung"	55
4 Messschaltungen, Operationsverstärker	58
4.1 Aufbau und Eigenschaften von Operationsverstärkern	58
4.2 Operationsverstärkerschaltungen.....	60
4.3 Übungen "Operationsverstärkerschaltungen"	65
4.4 Messschaltung mit Rückkopplung, Kompensation	67
4.5 Brückenschaltungen.....	68
4.6 Übungen "Brückenschaltungen"	70

5 Digitale Signalverarbeitung	71
5.1 Messsignalkonditionierung	71
5.2 ADU, Amplitudenquantisierung	71
5.3 Signalspektrum, Bandbreite, Aliaseffekt, Aliasfilterung	74
5.3.1 Fourierreihen, Fourieranalyse	74
5.3.2 Diskretisierung, Aliasschwingungen	77
5.3.3 Abtasttheorem (Nyquist- / Shannon-Theorem)	77
5.3.4 Aliaseffekt	78
5.4 Übungen "Digitalisierung, AD-, DA-Umsetzung"	80
5.5 Digitale Signalverarbeitung – häufig berechnete Kenngrößen	82
5.6 Übungen "Digitale Signalverarbeitung, Kenngrößen, Spektren"	83
5.7 Fourierreihen periodischer Funktionen	85
5.7.1 Definition	85
5.7.2 Bestimmung der Koeffizienten	85
5.7.3 Darstellung nach Betrag und Phase	87
5.7.4 Amplitudenspektrum	88
5.7.5 Komplexe Darstellung der Fourierreihe	89
5.7.6 Zusammenfassung	90
5.8 Fouriertransformation	91
5.8.1 Fouriertransformierte analoger Signale	91
5.8.2 Diskrete Fouriertransformation, Digitale Signalverarbeitung	94
5.8.3 FFT – Fast Fourier Transform	96
5.9 Übungen "FFT-Amplitudenspektren, Aliaseffekt"	97
6 Wer misst, misst Mist – Messabweichungen, Messunsicherheit	99
6.1 Normen, Definitionen, Begriffe zur Messunsicherheit	99
6.1.1 Normen	99
6.1.2 Begriffe	100
6.1.3 Fehlerquellen	101
6.1.4 Fehlerarten	102
6.1.5 Grobe Fehler	102
6.1.6 Zufällige Messabweichungen	103
6.1.7 Bekannte systematische Messabweichungen	104
6.1.8 Unbekannte systematische Fehler	105
6.1.9 Zahl der Dezimalstellen	106
6.2 Übungen "Messabweichungen"	106
6.3 Fortpflanzung zufälliger und unbekannter systematischer Abweichungen	107
6.4 Übungen "Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzung"	111
6.5 Vertrauensniveau und vollständiges Messergebnis	113
6.5.1 Messunsicherheit, Vertrauensniveau	113
6.5.2 Messen als Zufallsprozess	113
6.5.3 Normalverteilung, Gauß'sche "Glockenkurve"	115
6.5.4 Häufigkeitsverteilung von Messwerten, Histogramm	117
6.5.5 Das vollständige Messergebnis	118
6.5.6 95%-Vertrauensniveau	120
6.5.7 Fehlerabschätzung bei Einzelmessungen	120
6.5.8 Messunsicherheit aufgrund mehrerer Fehlerquellen	121
6.6 Übungen "Vollständiges Messergebnis, Fehlerfortpflanzung"	121
Quellenverzeichnis	124
Anhang A (Toleranzen und Normreihen elektrischer Widerstände)	125
Anhang B (Instrumentenverstärker)	128

Das Modul ELMESS

A) Inhalte, Vorlesung

Elektrotechnik	Messtechnik	Methoden
Aufbau und Funktion von Messinstrumenten	Messgrößen, Sensoren	Informationsquellen, Recherche
Analoge Signalaufbereitung	Kenngrößen, Kennlinien	Umgang mit Messunsicherheit
Operationsverstärkerschaltungen	Messabweichungen, Messunsicherheit	Datendarstellung, Diagramme
	Analog-Digital-Umsetzung, Digitale Messdatenerfassung	Datenauswertung, Regression
	Digitale Signalverarbeitung	Anforderungen an wissenschaftliches Dokumentieren: Struktur eines Berichts, Nachvollziehbarkeit

B) Anwendung, Labor

Elektrotechnik	Messtechnik	Methoden
Umgang mit Messgeräten und elektrotechnischen Aufbauten	Entwurf und Aufbau von Messanordnungen für einfache Messaufgaben	Durchführung wissenschaftlicher Experimente
Aufbau von einfachen Analogschaltungen	Erkennen der Quellen von Messunsicherheit und Quantifizieren des Einflusses auf das Messergebnis	Vollständiges Protokollieren einer Experimentdurchführung
Verstehen und Einsatz von OP-Schaltungen	Einsatz wissenschaftlicher Software für Messdatenerfassung und -auswertung (LabView, MATLAB)	Aussagekräftiges Aufbereiten von Datenmaterial im Hinblick auf gegebene Fragestellungen, Erstellen eines Berichts

C) Teamarbeit: Kommunikation, Arbeitseinteilung, Verlässlichkeit

0 Grundlagen aus Elektrotechnik und Mathematik

0.1 Mittelwert und Effektivwert: Integrale

0.1.1 Mittelwert, Gleichrichtmittelwert

ANALYSIS:

Der Mittelwert einer Funktion im Intervall $[a, b]$ ist definiert durch das Integral

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

GELEK:

Ein Drehspulinstrument oder ein Digitalmultimeter im "DC"-Modus zeigen bei einer zeitlich veränderlichen Spannung deren **Mittelwert** an.

Das ist beim **Drehspulmessgerät** (Abbildung 0.1) konstruktionsbedingt der Fall. Aufgrund der Massenträgheit von Spule, Spulenkörper und Zeiger kann die Anzeige schnellen Änderungen des Stromes nicht folgen.

Digitalmultimeter müssen diese Eigenschaft digital nachgebilden.

Ein Digitalmultimeter wird zu diesem Zweck auf den Modus **"DC-Messung"** eingestellt und berechnet dann den Mittelwert, also das obige Integral, numerisch aus dem anliegenden Signalverlauf.

Beispiele:

- a) Bei einem Wechselstrom $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t)$ wird das Instrument Null anzeigen, bei niedrigen Frequenzen ($f < 10\text{Hz}$) ist eventuell eine Bewegung des Zeigers wahrnehmbar.

Ein Digitalmultimeter wird evtl. wechselnde Werte anzeigen, da zwar das Integral über eine Periode des Sinus oder Cosinus gleich Null ist, das Multimeter aber einen Signalausschnitt auswertet, der nicht unbedingt einer Periode oder einem Vielfachen davon entspricht.

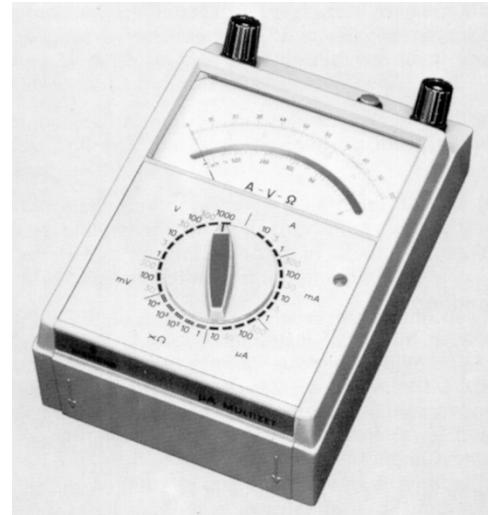


Abbildung 0.1: Drehspul-Instrument "μA-MULTIZET" (oben), Digitalmultimeter "METRAHIT XTRA" (unten)



b) Gleichrichtmittelwert

Wird der Strom gleichgerichtet (z. B. mit einer Dioden-Gleichrichterbrücke), so erhält man den Stromverlauf

$$i(t) = |\hat{I} \cdot \cos(\omega t)|.$$

Den Anzeigewert (Mittelwert) erhält man durch Integration über eine Periode:

$$\begin{aligned}\overline{|i(t)|} &= \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |\hat{I} \cdot \cos(\omega t)| dt = 4 \cdot \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \hat{I} \cdot \cos(\omega t) dt \\ &= \hat{I} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos(\omega t) dt = \hat{I} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \hat{I} \approx 0,637 \cdot \hat{I}\end{aligned}$$

Zeigt also ein Drehspulinstrument bzw. ein Digitalmultimeter im "DC"-Modus bei einem gleichgerichteten sinusförmigen Strom den Wert 1 A an, so beträgt der Spitzenwert $\hat{I} = \frac{\pi}{2} \cdot 1A \approx 1,57 A$.

0.1.2 Effektivwert, Scheitelfaktor, Formfaktor

ANALYSIS:

Der Effektivwert einer Funktion im Intervall $[a, b]$ ist definiert durch das Integral

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx}$$

GELEK:

Welche mittlere Leistung setzt ein sinusförmiger Strom der Amplitude \hat{I} an einem ohmschen Widerstand um? Der Effektivwert ist der Wert des Gleichstroms, der die gleiche Verlustleistung erzeugen würde.

Effektivwerte werden analog von einem Dreheiseninstrument oder von einem Digitalmultimeter im "AC"-Modus angezeigt.

Der Ausschlag eines Dreheiseninstruments ist konstruktionsbedingt proportional zum Quadrat des Messstroms. Die Trägheit des Zeigers bewirkt die Mittelwertbildung und die Wurzelfunktion wird durch eine nichtlineare Teilung der Skala nachgebildet.

Ein Digitalmultimeter muss für diese Messung auf den Modus "AC" eingestellt werden und berechnet dann das obige Integral numerisch aus dem anliegenden Signalverlauf.

Beispiel:

Bei einem Wechselstrom $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t)$ erhält man den Effektivwert (oder RMS-Wert, "root mean square") wie folgt:

$$\begin{aligned} I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\hat{I} \cdot \cos(\omega t))^2 dt} \\ &= \hat{I} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t))^2 dt} = \hat{I} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2\omega t) \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{I} \approx 0,707 \cdot \hat{I} \end{aligned}$$

Das Verhältnis von Spitzenwert zu Effektivwert

$$S = \frac{\hat{I}}{I_{eff}}$$

heißt **Scheitelfaktor** bzw. in der technischen Diagnostik auch **"Crest-Faktor"**.

Er ist von der Signalform abhängig und beträgt für den sinusförmigen Strom $S = \sqrt{2}$.

Für sinusförmige Signalverläufe kann der Effektivwert auch durch Gleichrichtung und Mittelwertbildung bestimmt werden (siehe oben: Gleichrichtmittelwert):

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \overline{|\iota(t)|} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \overline{|\iota(t)|}$$

Der Faktor

$$F = \frac{I_{eff}}{\overline{|\iota(t)|}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$$

heißt **Formfaktor**.

Diese Methode der Effektivwertmessung setzt allerdings die exakte Sinusform des Messsignals voraus. Digitalmultimeter, die den Effektivwert anhand des obigen Integrals ermitteln und somit auch andere Signalformen korrekt verarbeiten, tragen die Bezeichnung **"True RMS"**.

0.1.3 Vorteile von Digitalmultimetern gegenüber Analog-Instrumenten

Im Gegensatz zu Zeigerinstrumenten können Digitalmultimeter durch hochohmige Eingangsstufen dem Ideal der stromlosen Messung recht nahe kommen.

Außerdem müssen Zeigerinstrumente unter exakt senkrechtem Blickwinkel abgelesen werden, um Ablesefehler ("**Parallaxenfehler**") zu vermeiden.

0.2 Übungen zu Mittelwert, Effektivwert, Scheitelfaktor, Formfaktor

0.2.1 Mittelwert

- a) Welchen Wert zeigt ein Drehspulinstrument bzw. ein Digitalmultimeter im "DC"-Modus an, wenn die Spannung $u(t) = |5V \cdot \sin(4\pi t)|$ anliegt?

Hinweis: Integration über eine Periode, also z. B. von einer Nullstelle zur nächsten.

- b) Beim AS-i - Bus (Aktuator-Sensor-Interface) werden Signale in Form von Strompulsen der Form $i(x) = I_0 \sin^2(x)$ übertragen. Welchen Strom-Mittelwert hat ein solcher Puls?

Hinweis: Erst mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen, dass $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$!

0.2.2 Effektivwert

Bestimmen Sie den Effektivwert des Stroms $i(t) = 5A \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$. Prüfen Sie das Ergebnis anhand des Scheitelfaktors für sinusförmige Signale.

Auch hier helfen die Hinweise aus Aufgabe 0.2.1.

0.2.3 Mittelwert, Effektivwert

Eine Periode der Rechteckschwingung mit Tastgrad 1:4 (Verhältnis der Impulsdauer zur Periodendauer) ist gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} 3V & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & \frac{T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

Bestimmen Sie Mittelwert und Effektivwert.

0.2.4 Scheitelfaktor, Formfaktor

- a) Bestimmen Sie den Scheitelfaktor und den Formfaktor für eine symmetrische Rechteckschwingung.
- b) Welcher Formfaktor ergibt sich für Dreieckschwingungen?

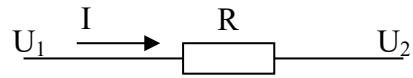
0.2.5 RMS

Die METRAHIT-Digitalmultimeter, mit denen wir im Labor arbeiten, werden im Datenblatt als "TRMS Multimeter" bezeichnet. Was bedeutet das?

0.3 Kirchhoffsche Gesetze, Spannungsteiler, Arithmetik

0.3.1 Spannungsabfall, Spannungsteiler

Liegen an einem Widerstand die (gegen Masse gemessenen) Spannungen U_1 und U_2 an, so gilt:



$$R = \frac{U_1 - U_2}{I} \quad (\text{Die Reihenfolge im Zähler ergibt sich aus der } \underline{\text{Richtung des Stromes}}!)$$

$$\text{Einheiten: } 1 \Omega = \frac{1V}{1A}$$

Außerdem benötigt man bei der Schaltungsberechnung ständig:

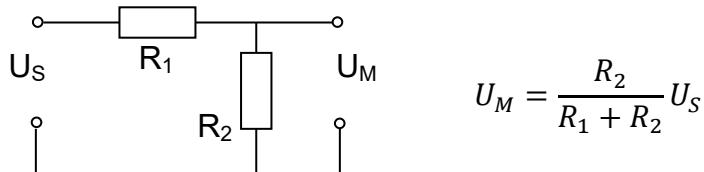
$$U_2 = U_1 - R \cdot I \quad \text{und} \quad U_1 = U_2 + R \cdot I$$

$$\text{sowie } I = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

Die Flussrichtung der Ströme muss in Ersatzschaltbildern immer angegeben werden. Keine Ausnahme!

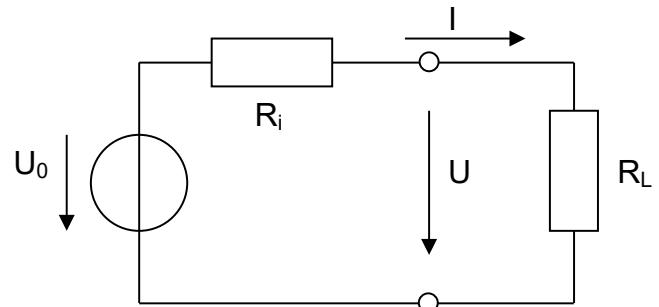
Dies in Verbindung mit den Kirchhoffschen Gesetzen (Knoten- und Maschenregel) ist das kleine ABC der Elektrotechnik.

Ein ständig benötigtes Resultat dieses ABC ist die Ausgangsspannung eines unbelasteten Spannungsteilers (**Spannungsteilerregel**)



Beispiel:

In der nebenstehenden Schaltung mit $U_0 = 1 V$ und $R_L = 200 \Omega$ wurde $U = 0,8 V$ gemessen. Wie groß ist der Innenwiderstand?



0.3.2 Widerstandskaskaden zur Messbereichsumschaltung

Spannungsteiler bestimmen das Innenleben analoger Zeigerinstrumente, wo sie mittels Widerstandskaskaden die Wahl des Messbereichs ermöglichen, siehe Abbildung 0.2.

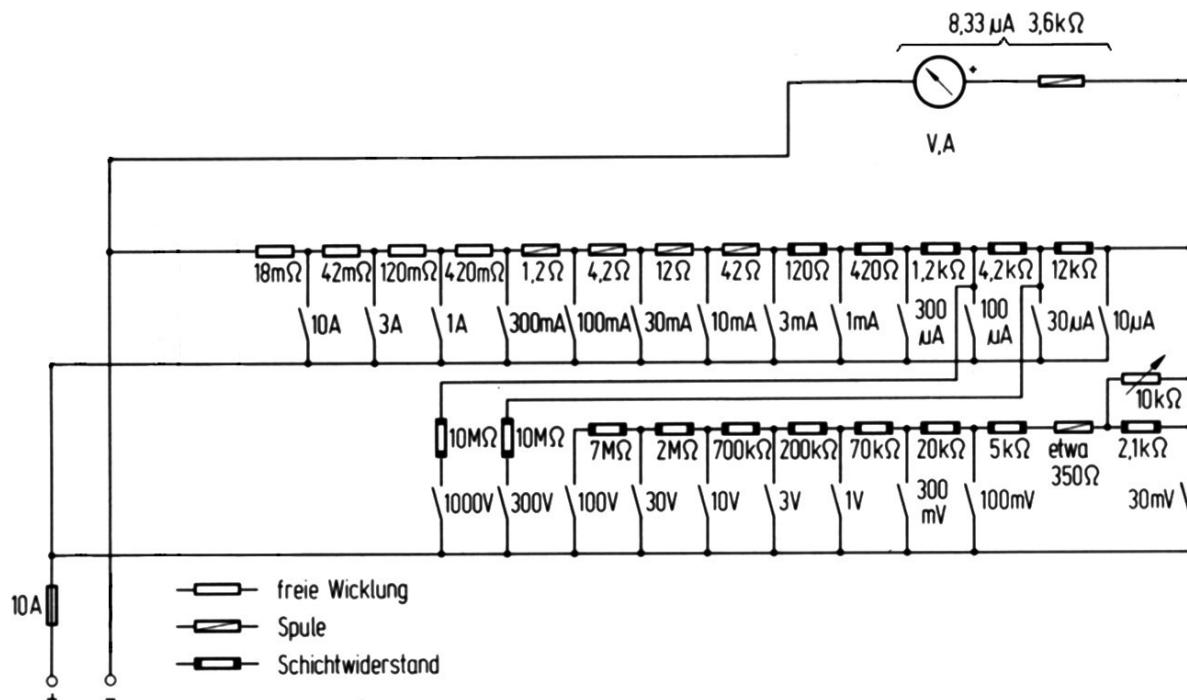


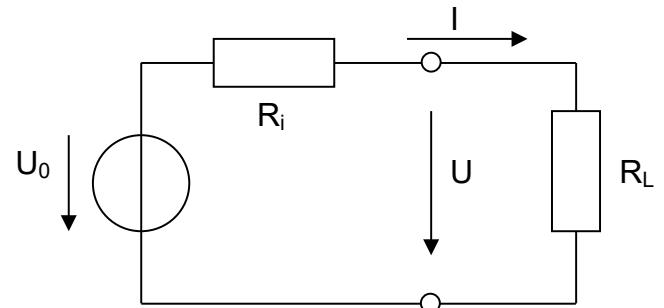
Abbildung 0.2: Messbereichsumschaltung beim μ A-MULTIZET (Siemens)

Auch die Messbereichsumschaltung bei modernen Multimetern und Oszilloskopen basiert auf Spannungsteilern. Obwohl sie hier durch einstellbare Eingangsverstärker realisiert ist und teils automatisch erfolgt.

0.4 Übungen zu Schaltungen mit Ohmschen Widerständen

0.4.1 Parameter einer nicht-idealen Spannungsquelle

In der abgebildeten Schaltung werden durch Änderung von R_L nacheinander zwei verschiedene Ströme I_1 und I_2 eingestellt. Nach welcher Formel errechnen sich aus diesen Strömen und den zugehörigen Spannungen U_1 und U_2 der Innenwiderstand R_i und die Leerlaufspannung U_0 ?



0.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

In der abgebildeten Schaltung ist $R_M = 0,1 \Omega (\pm 0,1\%)$ ein Messwiderstand. R_S soll bestimmt werden.

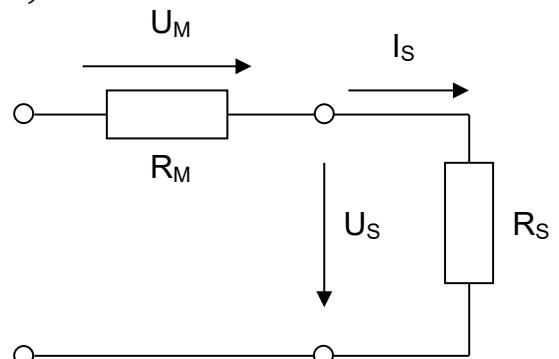
Gemessen wird

$$U_M = 0,14 \text{ V} \pm 0,01 \text{ V}$$

$$U_S = 14,3 \text{ V} \pm 0,3 \text{ V}.$$

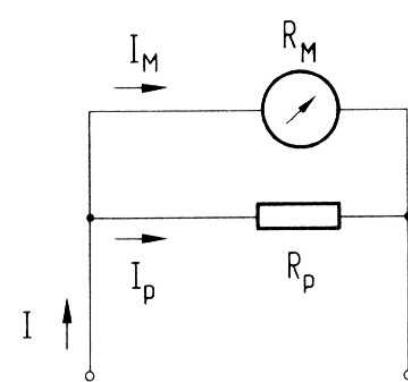
a) Welches Ergebnis erhält man für R_S ?

b) Wie groß ist die Unsicherheit ΔR_S



Anmerkung: Typische Schaltung für eine einfache Strom- und Impedanzmessung.

0.4.3 Messbereiche der Strommessung



Das Messwerk mit dem Innenwiderstand $R_M = 3,6 \text{ k}\Omega$ zeigt Vollauschlag, wenn der Strom $I_M = 8,33 \mu\text{A}$ fließt.

a) Bei welchem Strom I ergibt sich Vollauschlag, wenn $R_p = 18 \text{ k}\Omega$ gewählt wird?

b) Welcher Widerstand R_p muss gewählt werden, damit Vollauschlag bei $I = 1 \text{ mA}$ erreicht.

Lösung a): siehe Abbildung!

$$I = I_M + I_p = I_M + \frac{R_M I_M}{R_p} = 8,33 \mu\text{A} \cdot \left(1 + \frac{3,6}{18}\right) = 10 \mu\text{A}$$

0.4.4 Messbereiche der Spannungsmessung

Der Spannungsmessbereich wird über Vorwiderstände eingestellt, die mit der Parallelschaltung von Messwerk und R_p einen Spannungsteiler bilden.

- Das Messwerk habe die gleichen Daten wie in Aufgabe 0.4.3. Wie groß ist die über $R_p = 18 \text{ k}\Omega$ abfallende Spannung U_M ?
- Wie groß ist R_v zu wählen, damit das Messwerk Vollausschlag zeigt, wenn über der gesamten Schaltung in Abb. 0.3 die Spannung $U = 100 \text{ mV}$ anliegt?

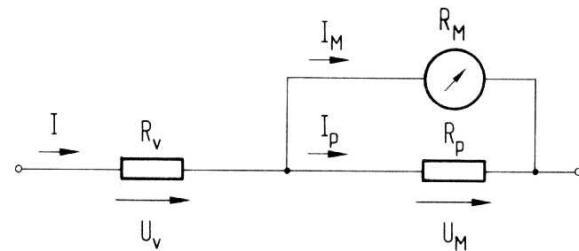
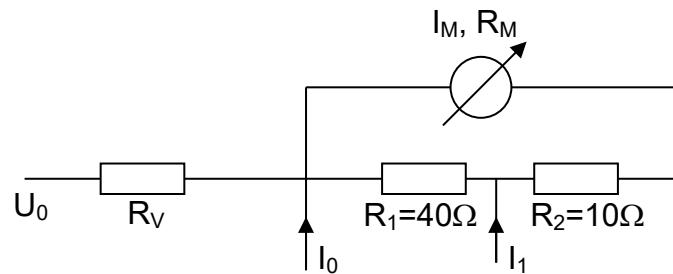


Abbildung 0.3: Einstellung des Spannungsmessbereichs durch einen Reihenwiderstand

0.4.5 Strom- und Spannungsmessbereiche 1

Gegeben ist ein Messwerk mit $R_M = 200\Omega$ und Vollausschlag bei $I_M = 0.4 \text{ mA}$.

- Welche Strommessbereiche erhält man für I_0 und I_1 bei der skizzierten Beschaltung?
- Welcher Vorwiderstand ist erforderlich für einen Spannungsmessbereich $U_0 = 1 \text{ V}$?



0.4.6 Strom- und Spannungsmessbereiche 2

Verifizieren Sie durch Rechnung die Messbereiche des Multimeters mit dem in Abbildung 0.4 dargestellten Schaltplan.

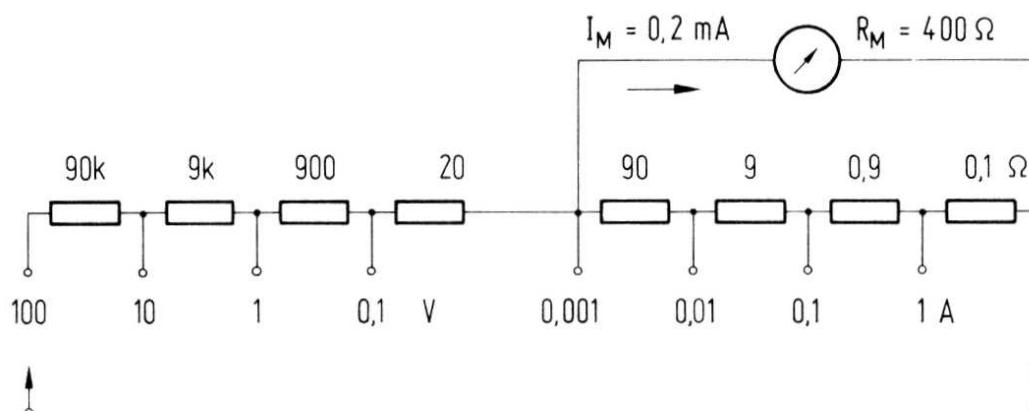


Abbildung 0.4: Messinstrument mit Messbereichsumschaltung für Strom und Spannung

0.5 RLC-Netzwerke, Zeigerdarstellung, komplexe Zahlen

Bei der Berechnung des Eingangs-Ausgangs-Verhaltens von RLC-Netzwerken für **sinusförmige** Spannungen und Ströme hat sich die **komplexe Zeigerdarstellung** bewährt. Mit ihr lässt sich das Verhalten von Kondensatoren und Induktivitäten durch **komplexe Impedanzen** darstellen.

Das Übertragungsverhalten eines RLC-Netzwerks wird dabei durch den **Frequenzgang** beschrieben. Dieser wird aus den komplexen Impedanzen berechnet (komplexe Spannungsteiler).

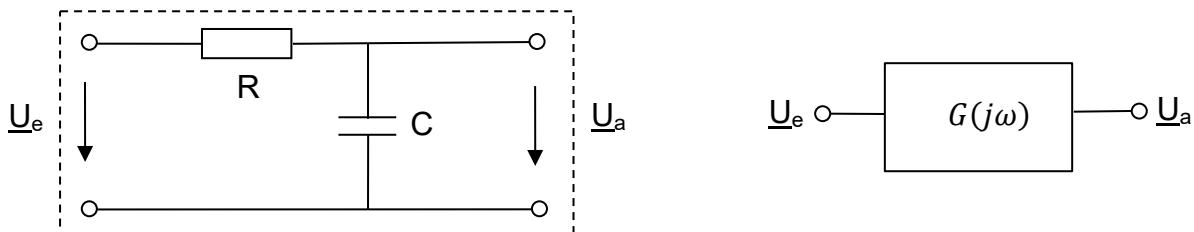


Abbildung 0.3: RLC-Netzwerk als frequenzabhängiges Übertragungssystem

0.5.1 Mathematische Grundlagen

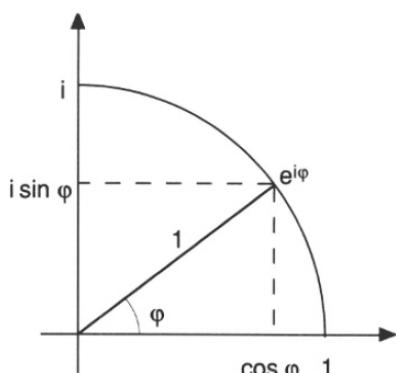
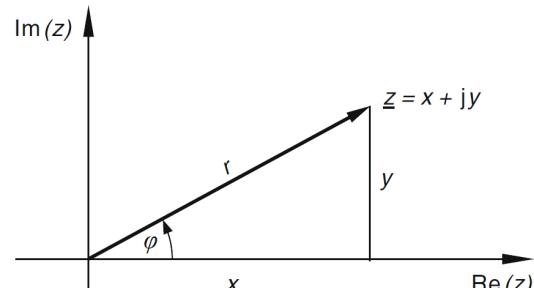
Für eine komplexe Zahl $z = a + jb$ ist bekannt:

Betrag: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\varphi = \angle(z) = \arg(z)$
 $= \arctan \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} = \arctan \frac{b}{a}$

Polarform: $z = |z| \cdot e^{j\varphi}$

Euler'sche Formel: $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$



Es ist $|e^{j\varphi}| = 1$, $e^{j\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), stellt also in der komplexen Zahlenebene den Einheitskreis dar.

Multiplikation von $z_1 = |z_1| \cdot e^{j\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2| \cdot e^{j\varphi_2}$:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$
 (Produkt der Beträge, Summe der Winkel)

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

(Quotient der Beträge, Differenz der Winkel)

0.5.2 Zeigerdarstellung sinusförmiger Signale

Eine sinusförmige Spannung wird dargestellt durch Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung:

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$$

Bei der Schaltungsanalyse stellt man schnell fest, dass die Rechnung mit der Exponentialfunktion wesentlich einfacher ist als die mit trigonometrischen Funktionen. Deshalb benutzt man

$$\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

und damit

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{U} e^{j(\omega t + \varphi)}\} \\ &= \operatorname{Re}\{\hat{U} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

Bei sinusförmigem Eingangssignal der Frequenz ω haben alle Ströme und Spannungen in einem RLC-Netzwerk diese Frequenz ω .

Zu berechnen bleiben dann nur noch die Amplituden und Phasenverschiebungen. Diese sind in dem ersten Term in den geschweiften Klammern zusammengefasst.

Man nennt diesen Term "komplexer Zeiger der Spannung $u(t)$ " und schreibt¹

$$\underline{U} := \hat{U} e^{j\varphi}$$

Eine entsprechende Darstellung gilt natürlich auch für Ströme: $\underline{I} = \hat{I} e^{j\varphi}$

Es gilt $\hat{U} = |\underline{U}|$ und $\varphi = \arg(\underline{U}) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{U}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{U}\}}$, so dass sich aus den komplexen Zeigern die real interessierenden Größen Amplitude und Phasenlage jederzeit errechnen lassen.

0.5.3 Komplexe Impedanzen, Kondensator

Die Kapazität C eines Kondensators gibt das Verhältnis von Ladung Q zur Spannung U an. Stromfluss ändert die Ladung (es gilt $I = \frac{dQ}{dt}$) so dass die Strom-Spannungsverhältnisse am Kondensator durch

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

beschrieben werden. Für eine sinusförmige Spannung $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t)$ bedeutet das

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -C \cdot \hat{U} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = \omega C \cdot \hat{U} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

wobei die zweite Gleichung aus der 90° -Verschiebung des Sinus gegenüber dem Kosinus resultiert.

¹ In der Energietechnik und Leistungselektronik legt man alternativ meist $|\underline{U}| = U_{eff}$ fest.

In der Zeiger-Schreibweise, also mit $u(t) = \operatorname{Re}\{\hat{U} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot e^{j\omega t}\}$, stellt sich dies so dar:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{j\omega C \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

Für die Zeiger gilt also einfach $\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$ bzw. $\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$.

Diese Beziehung zwischen Strom und Spannung an einem Kondensator entspricht dem Ohm'schen Gesetz. Deshalb definiert man

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

als **komplexe Impedanz des Kondensators**.

Nimmt man für die Spannung den Phasenwinkel Null an (Bezugsgröße), dann gilt wegen $\underline{U} = \hat{U}e^{j0} = \hat{U}$ und $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

$$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U} = \omega C \cdot \hat{U} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}},$$

also $\underline{I} = \hat{I}e^{j\varphi}$ mit $\hat{I} = \omega C \cdot \hat{U}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wie oben bei der reellen Rechnung.

Beispiel:

Welche Stromamplitude ergibt sich, wenn über einem Kondensator mit der Kapazität $C = 100 \text{ nF}$ eine sinusförmige Spannung mit der Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$ und der Amplitude $\hat{U} = 5 \text{ V}$ abfällt?

0.5.4 Komplexe Impedanzen, Induktivität

Die ideale Spule wird beschrieben durch die Induktivität L und es gilt

$$U = L \frac{dI}{dt}.$$

Fließt ein sinusförmiger Strom (in Zeiger-Schreibweise $i(t) = \operatorname{Re}\{\hat{I} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\}$) so errechnet sich die über der Spule abfallende Spannung aus

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \operatorname{Re}\{\underline{I} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{j\omega L \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}\} \\ &=: \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

Für die Zeiger gilt also einfach $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$.

Auch hier hat das Verhältnis der Strom- und Spannungszeiger die Form des Ohm'schen Gesetzes und man definiert

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

als **komplexe Impedanz der idealen Spule** mit Induktivität L .

Wegen $\underline{I} = \hat{I}e^{j0} = \hat{I}$ und $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ gilt

$$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I} = \omega L \cdot \hat{I} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \hat{U}e^{j\varphi},$$

$$\text{also } \hat{U} = |\underline{Z}_L| \cdot \hat{I} \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Der positive Phasenwinkel bedeutet eine Linksverschiebung des Kosinusverlaufs. An der Spule eilt also die Spannung dem Strom voraus bzw. der Strom der Spannung nach! Beim Kondensator ist das umgekehrt.

0.5.5 Serien- und Parallelschaltung komplexer Impedanzen

Beispiel:

Reale Spule (**Serienschaltung von ohmschem Widerstand und Induktivität**)

Welchen Spannungsabfall verursacht ein Strom mit der Amplitude $\hat{I} = 1A$ und der Frequenz $\omega = 2\pi \cdot 500Hz$ an einer Spule, die den ohmschen Widerstand $R = 2\Omega$ und die Induktivität $L = 2mH$ hat?

Anwendung der Zeigerrechnung liefert:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} = (R + j\omega L) \cdot \underline{I}$$

Die Serienschaltung hat also die Gesamtimpedanz

$$Z = R + j\omega L \text{ mit dem Betrag } |Z| = |R + j\omega L| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \approx \sqrt{4 + (6,28)^2} \approx 6,6\Omega.$$

Der Spannungsabfall hat somit die Amplitude $\hat{U} = |Z| \cdot \hat{I} \approx 6,6\Omega \cdot 1A = 6,6V$.

Impedanz der **Serienschaltung von Widerstand und Kondensator** mit Kapazität C :

$$Z_{RC,s} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \frac{1}{\omega C}, \quad |Z_{RC,s}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Für niedrige Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ geht der Widerstand demnach gegen ∞ .

Impedanz der **Parallelschaltung von Widerstand und idealer Spule** der Induktivität L :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{R \cdot j\omega L} \cdot \underline{U}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \underline{I}$$

also:

$$Z_{RL,p} = \frac{R \cdot Z_L}{R + Z_L} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} = R \cdot \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

Beispiel/Übung

Zu einem Widerstand $R = 100 \Omega$ ist eine ideale Spule mit der Induktivität $L = 4 \text{ mH}$ parallelgeschaltet. Welcher Spannungsabfall ergibt sich bei einem Strom mit der Amplitude $\hat{I} = 1 \text{ A}$ und der Frequenz $f = 100 \text{ Hz}$?

Impedanz der **Parallelschaltung von Widerstand und Kondensator**:

$$Z_{RC,p} = \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

Impedanz der **Serienschaltung von idealer Spule und Kondensator**:

$$Z_{LC,s} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Der Widerstand dieser Schaltung kann also Null werden! Das geschieht, wenn

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega^2 LC = 1,$$

also bei der Frequenz $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (Resonanzfrequenz).

Impedanz der **Parallelschaltung von idealer Spule und Kondensator**:

$$Z_{LC,p} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

Der Widerstand dieser Schaltung geht bei der Resonanzfrequenz $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ gegen ∞ !

0.5.6 Spannungsverhältnisse in RLC-Netzwerken

Das Verhältnis der Spannungen an zwei Messpunkten in einem RLC-Netzwerk ist

$$\underline{\underline{U_2}} = \frac{\widehat{U}_1 e^{j\varphi_1}}{\widehat{U}_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{\widehat{U}_1}{\widehat{U}_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Also erhält man die Signalverstärkung (bzw. Dämpfung) von Punkt 1 nach Punkt 2 aus

$$V = \frac{\widehat{U}_1}{\widehat{U}_2} = \frac{\left| \underline{\underline{U_1}} \right|}{\left| \underline{\underline{U_2}} \right|} = \frac{\left| \underline{U_1} \right|}{\left| \underline{U_2} \right|}$$

(Quotient der Zeigeramplituden)

und die Phasenverschiebung der beiden Signale an den Messpunkten aus

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

(Differenz der Zeigerphasenwinkel).

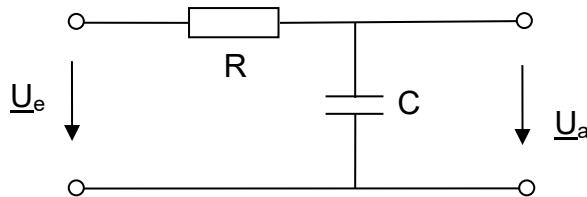
Das wird zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens von RLC-Netzwerken in Form des Frequenzgangs $G(j\omega)$ benutzt.

0.5.7 Komplexe Spannungsteiler, Frequenzgang, Filterschaltungen

Die Frequenzabhängigkeit der Impedanz von RLC-Kombinationen wird beim Aufbau von Filterschaltungen genutzt.

Um Signalverläufe zu glätten und höherfrequente Störungen zu mindern, werden

Tiefpassfilter eingesetzt. Am einfachsten ist der **RC-Tiefpass**



Wegen $\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{R+Z_C}$ und $\underline{I} = \frac{\underline{U}_a}{Z_C}$ gilt in der Zeigerdarstellung mit komplexen Impedanzen auch die Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

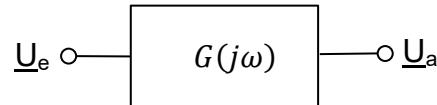
Für die Amplituden gilt

$$\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Die Spannungsverstärkung der Schaltung ist also von der Frequenz abhängig und geht für sehr hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$) gegen Null.

Man nennt das Verhältnis der Spannungszeiger den **Frequenzgang** der Filterschaltung und schreibt

$$\underline{U}_a(j\omega) = G(j\omega) \cdot \underline{U}_e(j\omega).$$



Hat $u_e(t)$ den Phasenwinkel Null (Bezugsgröße), so gilt bei gegebener Frequenz ω

$$\hat{U}_a = |G(j\omega)| \cdot \hat{U}_e$$

und

$$\varphi_a = \arg(G(j\omega)) = \arctan \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}},$$

also

$$u_a(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U}_e \cdot \cos(\omega t + \varphi_a)$$

Man nennt die frequenzabhängige Verstärkung $|G(j\omega)|$ auch den **Amplitudengang** bzw. **Betragsfrequenzgang** und $\arg(G(j\omega))$ den **Phasengang** der Filterschaltung.

0.5.8 Bode-Diagramm

Der Frequenzgang liefert Amplitude und Phasenverschiebung des Ausgangssignals eines Filters für sinusförmige Eingangssignale

Zur grafischen Darstellung wird üblicherweise eine logarithmische Frequenzachse sowie eine logarithmische Achse für die Verstärkung und eine lineare, in [°] skalierte Achse für die Phasenverschiebung verwendet. Wird der Amplitudengang dabei in dB skaliert, spricht man vom **Bode-Diagramm**.

Definition "Dezibel" (für Spannungsverhältnisse)¹:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \lg|G(j\omega)| .$$

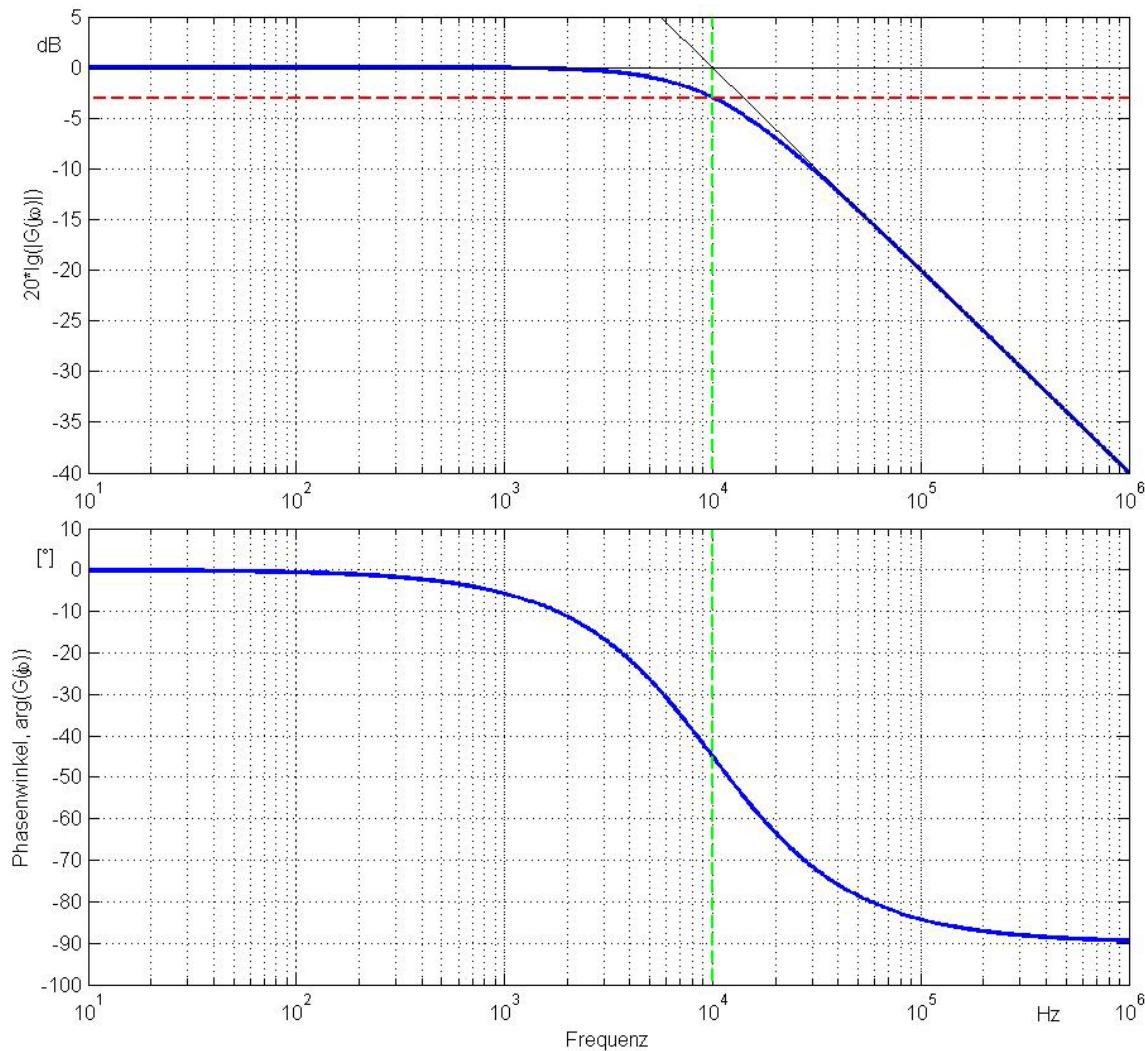


Abbildung 0.4: Messbereichsumschaltung beim µA-MULTIZET (Siemens)

Man nennt das oben dargestellte Übertragungsverhalten Tiefpassverhalten, da niederfrequente Signale bezüglich Amplitude und Phasenlage praktisch unverändert auf den Ausgang übertragen werden, während hochfrequente Signale stark abgeschwächt werden.

¹ Geht es um die übertragene Leistung P , so verwendet man die Definition $|G|_{dB} = 10 \cdot \lg|G|$.

Der Übergang vom "Durchlass-" zum "Sperrbereich" wird markiert durch die **Grenzfrequenz** $\omega_g = 2\pi f_g$.

Die Grenzfrequenz ist definiert als die Frequenz, bei der die Verstärkung eines frequenzabhängigen Übertragungssystems auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache des Maximalwertes abgesunken ist.

Sie wird also berechnet aus

$$|G(j\omega_g)| = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

Ein Qualitätsmerkmal von Tiefpassfiltern ist die Steilheit, mit der die Verstärkung oberhalb der Grenzfrequenz gegen Null geht. Beim RC-Glied bewirkt eine Frequz-erhöhung um den Faktor 10 eine Amplitudenverringerung um den Faktor 10.

Im Bodediagramm bedeutet das eine Steigung von [-20dB/Dekade](#)).

Aliasfilter in der digitalen Signalverarbeitung (siehe Kap. 4) haben teilweise Dämpfungen von mehr als -200dB/Dekade!

0.5.9 Anwendungsbeispiel Lautsprecher-Frequenzweiche

Ein Beispiel für Filterschaltungen im täglichen Leben sind die Frequenzweichen in Mehrwege-Hifi-Lautsprecherboxen. An Basslautsprechern dürfen nur die Musikanteile mit niedrigen Frequenzen anliegen, sonst verzerren sie. Hochtöner dürfen nur hochfrequente Signalanteile bekommen, sonst werden sie überlastet und zerstört.

Zwei-Wege Frequenzweiche

Besteht die Box aus einem Basslautsprecher (Tieftöner) und einem Hochtöner, so besteht die Frequenzweiche aus einem Tiefpass, an den der Tieftöner angeschlossen wird, und einem Hochpass für den Hochtöner.

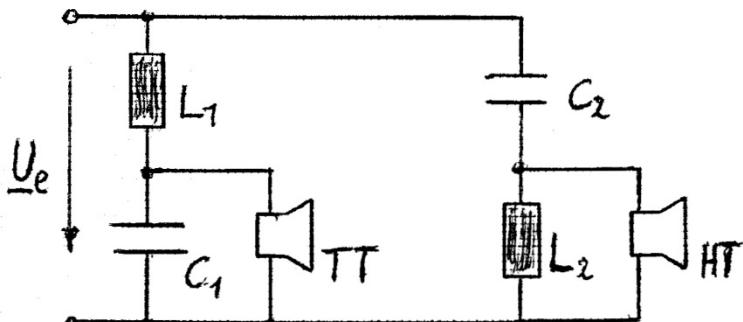


Abbildung 0.5: ESB einer 2-Weg-Frequenzweiche (12db/Oktave bzw. 40dB/Dekade)

Bei der Berechnung wird üblicherweise vorausgesetzt, dass die Lautsprecher als ohmsche Widerstände behandelt werden können (meist 4 oder 8 Ω).

a) Frequenzgang des Signals am Tieftöner

Die Impedanz der RC-Parallelschaltung ist (siehe Kap.0.5.5)

$$\frac{R_{TT} \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_{TT} + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1},$$

so dass

$$\begin{aligned} G_{TT}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_{TT}}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1}}{j\omega L_1 + \frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1}} \\ &= \frac{R_{TT}}{R_{TT} + j\omega L_1(1 + j\omega R_{TT} C_1)} \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2 L_1 C_1 + j\omega \frac{L_1}{R_{TT}}} \end{aligned}$$

b) Frequenzgang des Signals am Hochtöner

$$\begin{aligned} G_{HT}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_{HT}}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2}{R_{HT} + j\omega L_2}}{\frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2}{R_{HT} + j\omega L_2}} \\ &= \frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2 \cdot j\omega C_2}{R_{HT} + j\omega L_2 + R_{HT} \cdot j\omega L_2 \cdot j\omega C_2} \\ &= -\frac{\omega^2 L_2 C_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\omega \frac{L_2}{R_{HT}}} \end{aligned}$$

Die Bauteile sind so zu wählen, dass in möglichst guter Näherung

$$G_{gesamt}(j\omega) = G_{TT}(j\omega) + G_{HT}(j\omega) = 1$$

gilt.

Übung:

Wie lautet dieser Summenfrequenzgang im Fall $R_{HT} = R_{TT}$, $L_1 = L_2 =: L$ und $C_1 = C_2 =: C$?

Wie lautet der Frequenzgang der Abweichung $1 - G_{gesamt}(j\omega)$?

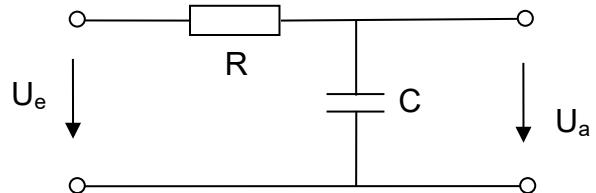
0.6 Übungen (Filterschaltungen)

0.6.1 RC-Tiefpass

- a) Bestimmen Sie den Frequenzgang

$$G_{TP}(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} (j\omega) \text{ des RC-Tiefpasses mit}$$

Hilfe der komplexen Spannungsteilerregel.



- b) Leiten Sie hieraus und aus der obigen Definition der Grenzfrequenz Folgendes her:

1. die Formel für die Grenzfrequenz in Abhängigkeit von R und C ,
2. die Tatsache, dass bei der Grenzfrequenz $R = |Z_C| = X_C = \frac{1}{\omega_C}$ gilt ("Wirk- gleich Blindwiderstand"),
3. die Tatsache, dass die Phasenverschiebung der Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung bei der Grenzfrequenz -45° beträgt.

0.6.2 RC-Hochpass

Bestimmen Sie entsprechend den Frequenzgang $G_{HP}(j\omega)$ des RC-Hochpasses. Zeichnen Sie zunächst das ESB.

0.6.3 RCCR-Bandpass 1

Es ist nun die Serienschaltung eines RC-Tiefpasses und eines RC-Hochpasses zu berechnen, wobei die Widerstände und Kondensatoren beider Filter identisch sein sollen. Man erhält auf diese Weise einen Bandpass.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der komplexen Zeigerrechnung, dass der Frequenzgang dieses Bandpasses gegeben ist durch

$$G_{BP1}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC - (\omega RC)^2}$$

- b) Leiten Sie hieraus ab, dass die Verstärkung gleich $|G_{BP1}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega RC - \frac{1}{\omega RC})^2}}$ ist.

- c) Begründen Sie, dass $|G_{BP1}(j\omega)|$ sein Maximum bei $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, der Mittenfrequenz, annimmt. (Extremwertuntersuchung durch Ableitung etc. ist dazu nicht notwendig!).

0.6.4 RCCR-Bandpass 2

Wegen $U_a(j\omega) = G(j\omega) \cdot U_e(j\omega)$ ist der Frequenzgang einer Serienschaltung zweier Filter gleich dem Produkt der Einzelfrequenzgänge (Zeigen!). Für den Bandpass aus Tief- und Hochpass bedeutet das $G_{BP2}(j\omega) = G_{TP}(j\omega) \cdot G_{HP}(j\omega)$.

Welcher Frequenzgang $G_{BP2}(j\omega)$ ergibt sich so?

Leiten Sie daraus $|G_{BP2}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{\sqrt{4 + (\omega RC - \frac{1}{\omega RC})^2}}$ ab.

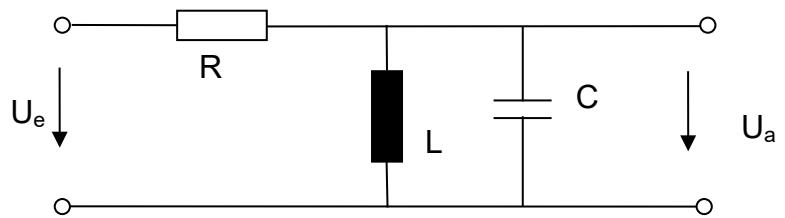
Warum unterscheidet sich das Ergebnis von dem in Aufgabe 0.6.3?

0.6.5 Obere und untere Grenzfrequenzen

- Bestimmen Sie unter Verwendung der Definition der Grenzfrequenz ("Absinken der Verstärkung um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ") für die Bandpässe aus Aufgabe 0.6.3 und Aufgabe 0.6.4 jeweils die obere und untere Grenzfrequenz.
- Zeigen Sie, dass für die Mittenfrequenz (Aufgabe 0.6.3c) gilt $\omega_0 = \sqrt{\omega_{gu} \cdot \omega_{go}}$.

0.6.6 Vergleich mit RLC-Bandpass

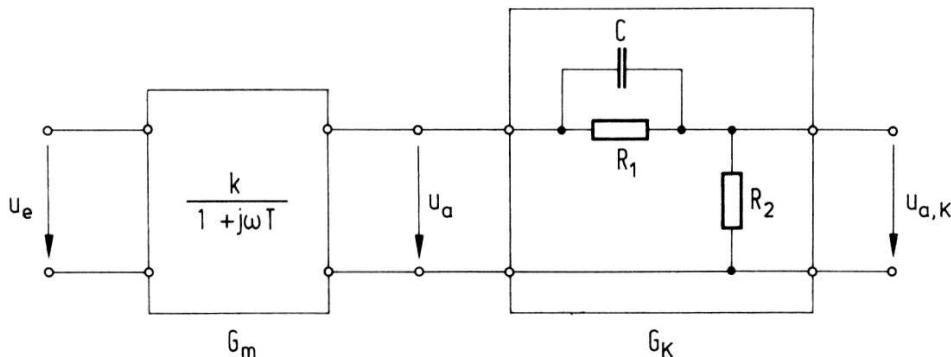
Vergleichen Sie die Verstärkungen der Bandpässe bei der Mittenfrequenz (Maximalverstärkungen).



Vergleichen Sie auch mit dem RLC-Bandpass aus dem Laborversuch DSA (siehe Abbildung).

0.6.7 Frequenzgang

- Gegeben ist die Kompensationsschaltung (ähnlich einem Tastkopf)



Zeigen Sie, dass der Frequenzgang $G_K(j\omega)$ sich in der Form

$$G_K(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$$

schreiben lässt.

Beispiel/Übung:

Welcher Frequenzgang gilt für die Gesamtübertragung von U_e nach $U_{a,k}$?

- b) Bestimmen Sie für $G_K(j\omega)$ die Gleichspannungsverstärkung ($\omega = 0$) und die Verstärkung bei sehr hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$).
- c) Die Zeitkonstante im Nenner soll um den Faktor 10 kleiner sein als die des Zählers. Bestimmen Sie das Widerstandsverhältnis R_1/R_2 .
- d) Skizzieren Sie für $G_K(j\omega)$ mit diesem Widerstandsverhältnis den Amplitudengang des Bodediagramms.

Hinweis: $20 \lg \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+j\omega R_1 C}{1+j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} C} \right) = 20 \lg \frac{R_2}{R_1+R_2} + 20 \lg \frac{1}{1+j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} C} + \left(-20 \lg \frac{1}{1+j\omega R_1 C} \right)$

- e) Betrachten Sie nun die Gesamtschaltung (Serienschaltung von G_m und G_k). Wie unterscheiden sich die Grenzfrequenz und die Verstärkung $\frac{\hat{U}_{a,K}}{\hat{U}_e}$ der Gesamtschaltung von den entsprechenden Werten von $G_m(j\omega)$, wenn $R_1 C = T$ gewählt wird? Für $k = 2$ mittels Bode-Diagramm verdeutlichen!

0.7 Oszilloskop – Prinzip und Hinweise zum Laborversuch

Dynamisch veränderliche elektrische Größen und Signale lassen sich mit einem Oszilloskop visualisieren (aus lateinisch "oscillare" – schwingen und griechisch "scopein" – sehen).

Das traditionelle Oszilloskop besteht aus einer Elektronenstrahlröhre, deren Strahl elektrostatisch durch horizontal und vertikal angeordnete Plattenpaare seitlich (in x-Richtung) und nach oben und unten (in y-Richtung) abgelenkt werden kann.

Heutige Oszilloskope arbeiten mit Analog-Digital-Umsetzern, digitaler Speicherung der Signale und Anzeige auf LCD-Bildschirmen.

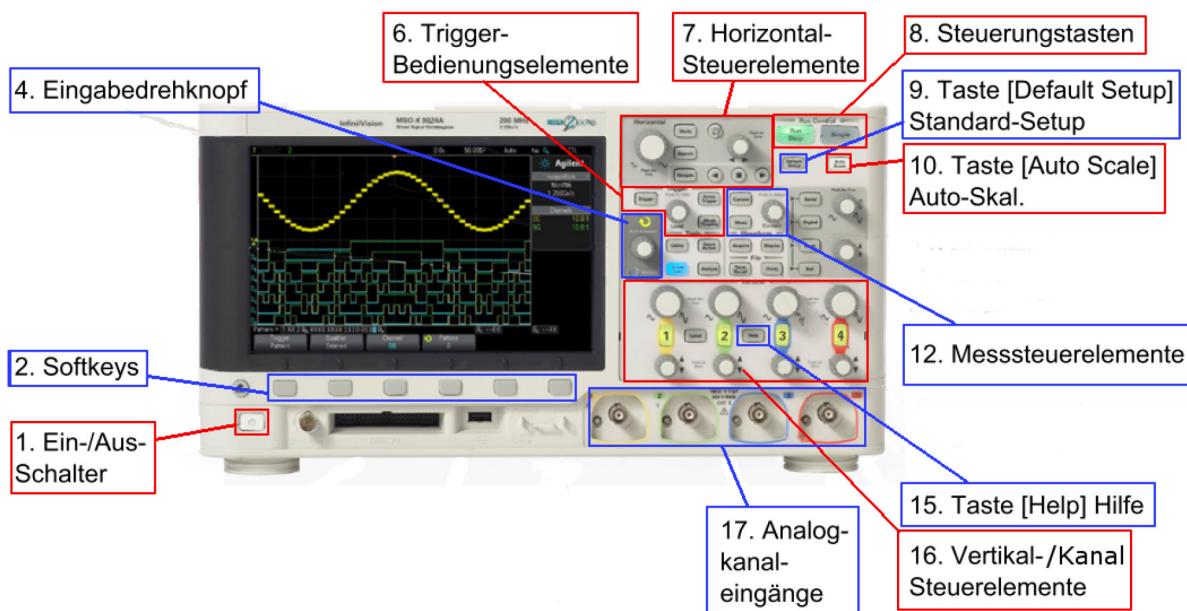


Abbildung 0.6: Bedien- und Anzeigeelemente eines Oszilloskops (aus Laborversuch OSZ)

Die wesentlichen Komponenten sind

- **Analoge Eingänge** mit Signalaufbereitung: Verstärkung bzw. Abschwächung und Offset-Einstellung (im Bild: 16), Hochpass zur DC-AC-Umschaltung (über Softkeys: 2);
- **Triggerung**: Auslösen der Aufzeichnung z. B. bei Überschreiten eines bestimmten Signalpegels;
- **Horizontale Ablenkung, Zeitbasis**: bestimmt den dargestellten Zeitausschnitt. Die x-Koordinate wird durch einen Zähler mit Rücksetzen erzeugt. "Run"-Modus (im Bild: 8): überlagerte Darstellung aufeinanderfolgender Zeitabschnitte der Signale;
- **Anzeigeeinheit**: LCD-Bildschirm mit Einblendung von Informationen über Signalverstärkung, Zeitbasis und ausgewählte Messungen
- **Cursorlinien**: Messung von Amplituden und Zeitintervallen (im Bild: 12)

Abbildung 0.7 zeigt einen sinusförmigen Verlauf, dessen Periodendauer T und Amplitude \hat{U} abgelesen werden können, wenn die x- und y-Kalibrierung bekannt ist.

Messtechnischer Hinweis: Die Messpunkte für Zeitintervalle wie die Periodendauer sollen immer auf Signalabschnitten mit möglichst großer Steigung liegen. Eine

Messung etwa von Maximum zu Maximum ist untauglich wegen der wesentlich größeren Messunsicherheit beim Ablesen.

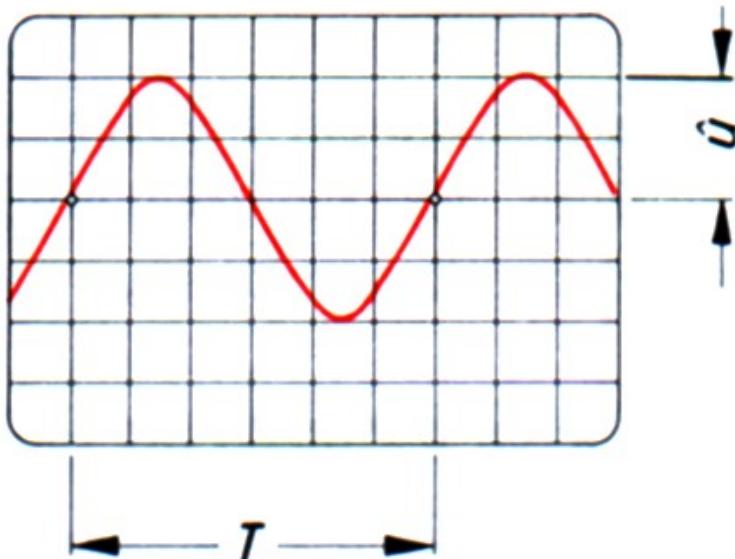


Abbildung 0.7: Ablesen von Periodendauer und Amplitude einer Sinusschwingung

Beispiel

Die y-Ablenkung sei auf $0.5 \text{ V}/\text{Div}$ ("Division" = Rastereinheit = "Kästchen") eingestellt, die x-Ablenkung auf $25 \mu\text{s}/\text{Div}$. Wie lautet dann $u(t)$?

Aus der Bildschirmdarstellung ergibt sich

$$\hat{U} = 0.5 \frac{\text{V}}{\text{Div}} \cdot 2 \text{ Div} = 1 \text{ V}$$

$$T = 25 \frac{\mu\text{s}}{\text{Div}} \cdot 6 \text{ Div} = 150 \mu\text{s}$$

Damit sind die Signalamplitude und –frequenz bekannt.

Für eine Aussage über den Phasenwinkel muss die Lage des Zeitpunkts $t = 0$ festgelegt werden, z. B. durch Bezug auf das Triggersignal.

Wählt man $t = 0$ am linken Bildrand, so ist das Signal eine um

$$\Delta t \approx 25 \frac{\mu\text{s}}{\text{Div}} \cdot 2,4 \text{ Div} = 60 \mu\text{s}$$

verschobene Kosinusfunktion. Der Phasenwinkel ergibt sich aus dem Verhältnis

$$\frac{|\varphi|}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} \Leftrightarrow |\varphi| = \frac{60}{150} \cdot 2\pi = \frac{4}{5}\pi = 144^\circ$$

Der Phasenwinkel ist hier negativ, weil die Kosinusfunktion gegenüber dem linken Bildrand nach rechts verschoben ist.

Damit hat das Signal die mathematische Darstellung

$$u(t) = 1V \cdot \cos\left(2\pi \cdot 6,667 \text{ kHz} \cdot t - \frac{4}{5}\pi\right).$$

0.8 Übungen "Oszilloskop"

0.8.1 Oszillosgramm, Bestimmung von Signalparametern

Welche Periodendauer, Frequenz und Amplitude hat das in Abb. 0.7 dargestellte Signal, wenn die x-Ablenkung auf $20 \mu\text{s}/\text{Div}$ und die y-Ablenkung auf $2,5 \text{ V}/\text{Div}$ eingestellt ist?

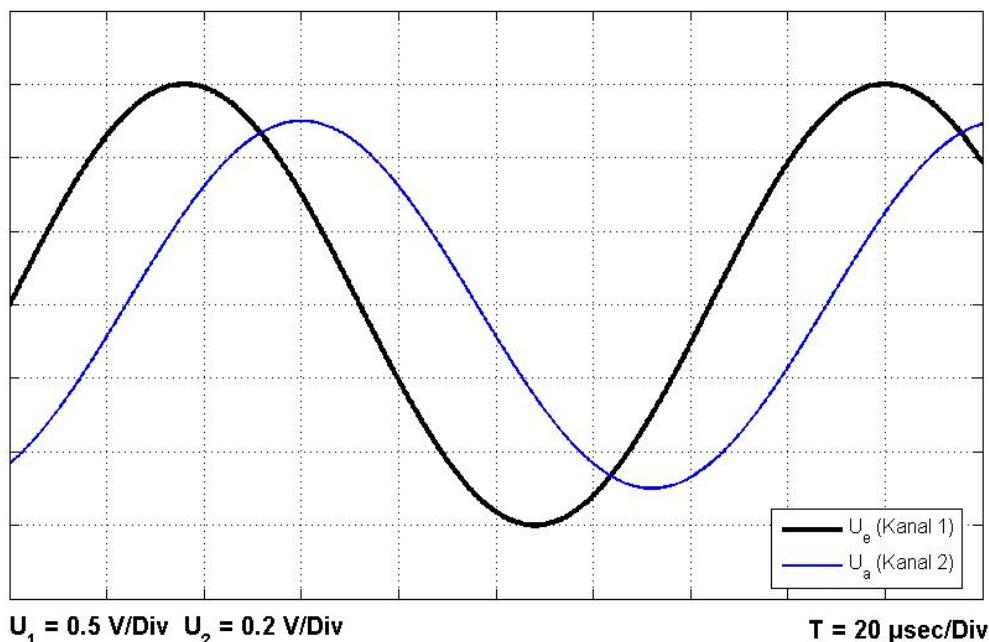
Welche Phasenlage hat die Schwingung, wenn der Zeitpunkt $t = 0$ in der Bildmitte liegen soll?

Geben Sie den Verlauf als Zeitfunktion der Form $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ an.

0.8.2 Oszillosgramm, Frequenzgang

- a) Das Oszillosgramm zeigt die Eingangsspannung $u_e(t) = \hat{U}_e \cdot \sin(\omega t)$ und die Ausgangsspannung $u_a(t) = \hat{U}_a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ einer Filterschaltung.

Bestimmen Sie die Frequenz f , die Kreisfrequenz ω , das Amplitudenverhältnis $|G(j\omega)| = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e}$ (als Zahlenwert und in dB) sowie die Phasenverschiebung φ zwischen beiden Spannungen (im Rahmen der möglichen Ablesegenauigkeit).



- b) Auf welche Art von Filterschaltung (Tiefpass / Hochpass) lassen Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung schließen?

1 Messtechnik – Einführung

1.1 Aufgabe und Gegenstand der Messtechnik

1.1.1 Wozu Messen?

Messen ist fachgerechtes Einsetzen von Messinstrumenten und Messmethoden und zielgerichtetes, nachvollziehbares Verarbeiten der Ergebnisse.

Wer misst will

- A) etwas untersuchen → Basis schaffen für das Aufstellen einer Hypothese
- B) etwas beweisen → Belegen oder widerlegen einer Hypothese
- C) etwas wissen, um darauf zu reagieren → Regelung, Feedback

Das erfordert immer strukturiertes Vorgehen und Sorgfalt in Durchführung und Ergebnisverarbeitung.

Messen ist die grundlegende Methode der Wissenschaft.

1.1.2 Was wird gemessen?

Beispiele für das durch A) bis C) motivierte Messen finden sich auf allen Gebieten:

Untersuchen / Beweisen (A + B):

- Meinungsumfragen;
- Forschungslabor: Test oder Präzisieren einer Hypothese, „Unterstützung für eine Theorie“;
- Entwicklungslabor: Funktionsprüfung von Prototypen;
- Fertigung: Qualitätssicherung, Produktkontrolle (Prüffeld) ...

Prozessbezogenes Messen (C):

- Regelkreise: Raumtemperatur, Einparkhilfe, Bioreaktor, Braukessel, ... ;
- Produktionsplanung: Bestandserfassung, Produktverfolgung;
- Workload Balancing bei Server-Clustern in Rechenzentren;
- ...

Beliebig fortsetzbar!

Messtechnische Methoden kommen nicht nur in der Technik zum Einsatz sondern **in allen Disziplinen** und überall, wo Daten erhoben werden.

1.2 Grundbegriffe

1.2.1 Messen heißt Vergleichen

Ein **Messwert** ist die Darstellung einer physikalischen Größe als Vielfaches einer Einheit, die durch internationale Vereinbarung festgelegt und durch ein **Messnormal** gegeben ist. Er ergibt sich also aus dem Vergleich der Größe mit einer **Maßverkörperung** dieser Einheit, die in möglichst guter Übereinstimmung mit dem Normal hergestellt wurde. Anschaulich z. B.: Längenmessung mit einem Lineal.

Normale werden durch staatliche Institutionen festgelegt bzw. bereitgestellt, in Deutschland durch die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) und den Deutschen Kalibrierdienst (DKD). Ein Beispiel ist die Zeit, die die PTB in Braunschweig mit mehreren "Atomuhren" bestimmt. Stoppuhren, Quarztimer u. ä. sind Maßverkörperungen der Messgröße "Zeit". Ihre Genauigkeit wird durch Vergleich mit dem Normal der PTB bestimmt.

Die folgende Abbildung zeigt am Beispiel der Längenmessung den Bezug betrieblich eingesetzter Messeinrichtungen zu dem zugehörigen Normal: "**Kette der Rückführung**".

Seit dem 19. Jahrhundert haben sich Parallelendmaße als Maßverkörperungen etabliert, mit denen sich bis heute eine Vielzahl von Längenmessmitteln kalibrieren lassen. Mit einem 103-teiligen Parallelendmaßsatz aus Stahl lassen sich durch Kombination von Endmaßen über 20.000 Maße zwischen 1 mm und 201 mm mit einer Stufung von 0,005 mm realisieren.



Die Länge von Parallelendmaßen lässt sich, wie oben beschrieben, mittels optischer Interferometrie auf die SI-Einheit Meter zurückführen. Die genauesten Parallelendmaße dienen als Bezugsnormale in mechanischen Unterschiedsmessungen, die als Dienstleistung von akkreditierten Kalibrierlaboratorien für Längenmessung angeboten werden.

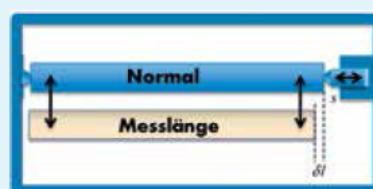


Bild 19:
Prinzip der mechanischen Unterschiedsmessungen von Parallelendmaßen

Bild 18:
Parallelendmaßsatz aus Stahl,
103-teilig

Bild 20:
Kette der Rückführung auf die SI-Einheit Meter am Beispiel von Parallelendmaßen, DAkkS: Deutsche Akkreditierungsstelle, NMI: Nationales Metrologieinstitut (in Deutschland die PTB)



Messen ist also der experimentelle Vorgang, bei dem eine Messgröße mit einer Maßverkörperung verglichen und auf diese Weise ein Messwert bestimmt wird.

Das **Messergebnis** kann der Messwert selbst sein, ein aus diesem abgeleiteter, berechneter Wert oder eine Verknüpfung oder der Verlauf mehrerer Messwerte.

Jede Messung ist mit einer **Messabweichung** (auch "Messfehler") behaftet, die sich durch Präzisions-Messverfahren zwar verringern, aber nie ganz vermeiden lässt.

Zu einem Messergebnis gehört deshalb immer die Angabe der **Messunsicherheit**.

Messreihen, d. h. mehrere Messwerte, die sukzessiv am gleichen Objekt gewonnen werden, liefern einen Werteverlauf oder mehrere Messwerte für ein und dieselbe Größe. Wird aus N Messungen einer bestimmten Größe ein **Mittelwert** gebildet, so ist dessen Messunsicherheit gegenüber der Einzelmessung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ geringer (**Kapitel 6**).

1.2.2 Das SI-Einheitensystem

Die Darstellung von Messwerten und Messergebnissen erfolgt heute im Internationalen Einheitensystem (SI, 1960 festgelegt).

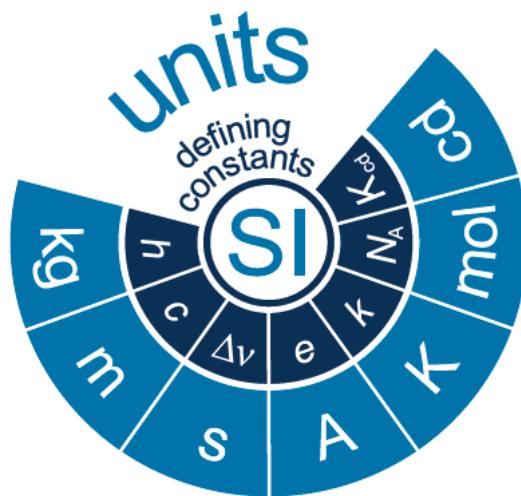
Es fußt auf den **SI-Basiseinheiten**

Länge	m	Meter
Zeit	sec	Sekunde
Masse	kg	Kilogramm
Elektrische Stromstärke	A	Ampere
Temperatur	K	Kelvin
Stoffmenge	mol	Mol
Lichtstärke	cd	Candela

Am [20.5.2019 \(Weltmetrologietag\)](#) traten für die obigen Einheiten [neue Definitionen](#) in Kraft, die vollständig auf Naturkonstanten basieren. So wird z. B. das Kilogramm nun nicht mehr durch einen Prototypen, das "Urkilogramm", definiert, sondern unter anderem durch das Planck'sche Wirkungsquantum h . Siehe auch

<https://www.ptb.de/cms/de/forschung-entwicklung/forschung-zum-neuen-si.html>

(Die wichtigsten Informationen, auch eine Posterdarstellung, sind als PDF-Dokumente im Ordner "Das neue SI-Einheitensystem" in der ELMESS-AULIS-Gruppe verfügbar.)



Kilogramm



Das Kilogramm, Einheitenzeichen kg, ist die SI-Einheit der Masse. Es ist definiert, indem für die Planck-Konstante h der Zahlenwert $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit J s, die gleich $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ist, wobei der Meter und die Sekunde mittels c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Diese Definition gibt h den Wert $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit kg auf, so ergibt sich:

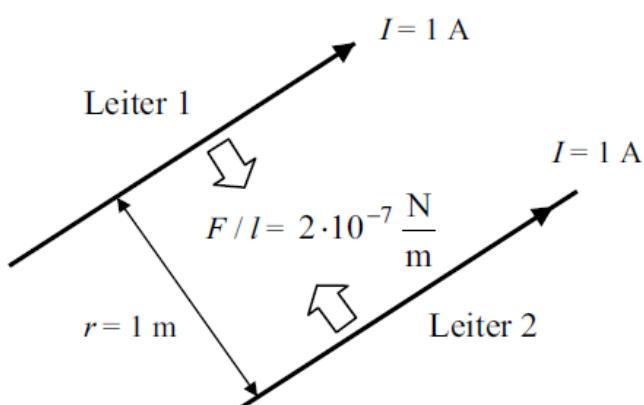
$$1 \text{ kg} = \left(\frac{h}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}} \right) \text{ m}^{-2} \text{ s}$$

$$= \frac{(299\,792\,458)^2}{(6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}) (9\,192\,631\,770)} \frac{h \Delta\nu}{c^2} \approx 1,475\,5214 \cdot 10^{40} \frac{h \Delta\nu}{c^2}$$

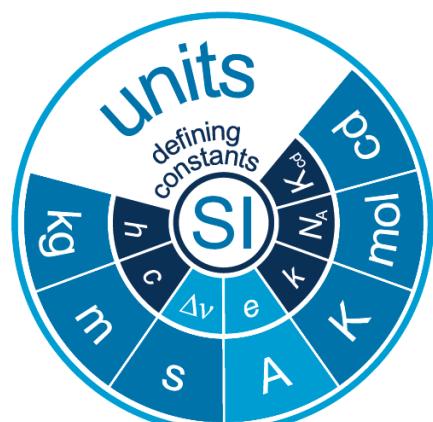
Das heißt, die Einheit kg wird mit der Wirkung (Einheit: $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$) verknüpft, einer physikalischen Größe in der theoretischen Physik. Zusammen mit der Definition für die Sekunde und den Meter ergibt sich die Definition für das Kilogramm als Funktion des Planck'schen Wirkungsquantums h .

Beispiel:

[Einheit der Stromstärke – alt / neu](#)



Ampere



Beispiel/Übung (Umrechnen von Einheiten)

Bei einem Radrennen bringt eine Radfahrerin bei 120 U/min ein Drehmoment von $M = 20 \text{ Nm}$ in die Pedale.

- a) Welche mittlere Leistung $P = M \cdot \omega$ bringt sie dabei auf? (Angabe in Watt)
- b) Sie benötigt für die Strecke exakt eine Stunde. Zum Ausgleich der eingesetzten Energie muss die Fahrerin das Achtfache davon in Form von Nudeln wieder zu sich nehmen. Wieviel Gramm sind das, wenn der Brennwert von Nudeln mit 6,65 kJ/g angegeben wird?

1.3 Übungen "Begriffe, SI-Einheiten"

1.3.1 SI-Basiseinheiten

Recherche unter <http://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44.html>

- a) Die "Atomuhren" der PTB sind das deutsche Normal für die Messung der Zeit. Welche andere Messgröße leitet sich unmittelbar aus der Zeit ab? Hinweis: siehe Bezeichnung des zuständigen Fachbereichs der PTB.
- b) Welche Definition der SI-Einheit für die Strecke gab es früher? Warum musste sie ersetzt werden? Wie lautet sie jetzt?
- c) Welche Naturkonstanten – neben der Cäsium-Strahlungsfrequenz, der Lichtgeschwindigkeit und dem photometrischen Strahlungsäquivalent K_{cd} – definieren heute die Basiseinheiten des SI (Kürzel und volle Bezeichnung angeben).
- d) Welche Rolle spielt die Zahl 9.192.631.770 für die Länge einer Strecke von 1000 m?
- e) Wie wird die unten in Übung 1.3.3 verwendete Einheit für den Druck (= Kraft pro Fläche), "1 mbar", in SI-Einheiten umgerechnet?

1.3.2 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen I

- a) Geben Sie 1 J (Joule), 1 V (Volt), 1 H (Henry) in SI-Basiseinheiten an.
- b) Ein Kran hebt das Rotorblatt einer Windenergieanlage (Gewicht: 8 t) 80 m hoch. Welche elektrische Energie ist bei Vernachlässigung von Reibungs- und sonstigen Verlusten für den Antriebsmotor mindestens erforderlich? (Angabe in kWh!)

1.3.3 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen II

An einem Wärmetauscher tritt bei einem Volumenstrom von $q_V = 10,8 \text{ m}^3/\text{h}$ eine Druckdifferenz (Druckverlust) von $\Delta p = 200 \text{ mbar}$ auf.

- a) Geben Sie die entsprechende von der Pumpe aufzubringende Leistung $P = q_V \cdot \Delta p$ in Nm/sec an.
- b) Wie groß ist bei ununterbrochenem Dauerbetrieb die pro Tag eingesetzte elektrische Energie (in kWh), wenn die Pumpe mit einem Wirkungsgrad von 40 % arbeitet?

2 Auswertung von Messdaten

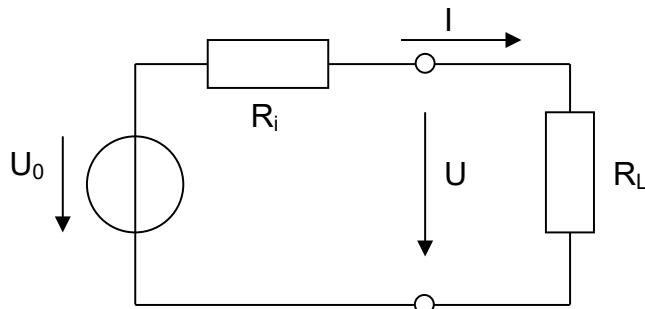
2.1 Messreihendarstellung, Regression und Parameterbestimmung

2.1.1 Beispiel "Belastungskennlinie"

Die Belastungskennlinie ist kennzeichnend für die Qualität einer Spannungsquelle. Aus ihr lassen sich die Leerlaufspannung, der Innenwiderstand und der Kurzschlussstrom entnehmen.

Messtechnisch wird die Belastungskennlinie bestimmt, indem eine variable Last an die Klemmen der Spannungsquelle angeschlossen wird. Durch Verändern der Last werden unterschiedliche Lastströme eingestellt und die jeweils zugehörigen Klemmenspannungen der Quelle gemessen.

Messschaltung und beispielhafte Messreihe:



Laststrom I [A]	Spannung U [V]
0,4	13,9
0,8	13,6
1,2	13,4
2,0	13,3
3,0	12,7
4,5	12,3

Der Schaltung entnimmt man die Gleichung

$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

Bei der graphischen Darstellung wird man die Messwerte also auf einer Geraden

$$U(I) = m \cdot I + b$$

erwarten. Dabei ist die Steigung gleich dem negativen Innenwiderstand

$$m = -R_i \text{ bzw. } R_i = -m$$

und der y-Achsabschnitt gleich der Leerlaufspannung

$$U_0 = b .$$

Theoretisch genügen schon zwei Messungen für die Bestimmung einer Geradengleichung. Aber bei jeder praktischen Messung weichen die Messwerte vom idealen Verlauf ab. Die Aufgabe ist dann, eine Gerade zu suchen, die "irgendwie bestmöglich" zu den aufgenommenen Messwerten passt.

Dazu bildet man die Differenzen zwischen den gemessenen Spannungen U_i und den Spannungswerten, die die Geradengleichung bei dem entsprechenden Strom I_i liefert, also

$$\Delta U_i = U_i - (m \cdot I_i + b)$$

m und b werden dann so bestimmt, dass

$$\sum_i (\Delta U_i)^2$$

also die Summe der Quadrate dieser Differenzen minimal wird. Dieses Verfahren heißt lineare Regression und die so bestimmte Gerade heißt **Ausgleichsgerade**.

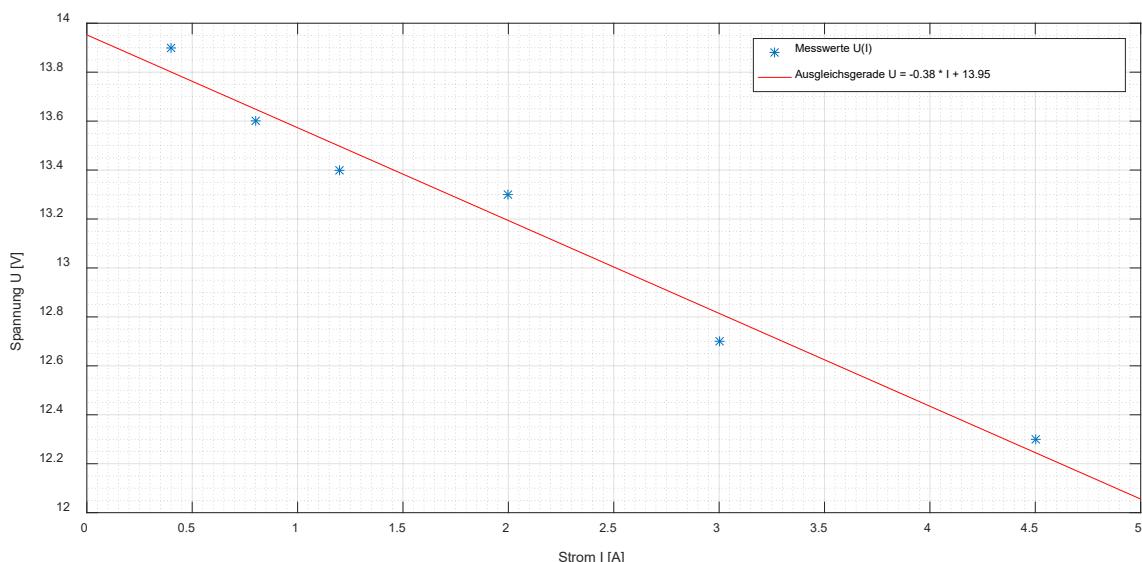
Die Suche nach Funktionen, die Datenreihen bestmöglich approximieren – engl.: "best fit" – ist nicht auf Geraden beschränkt. Mit der MATLAB-Function **polyfit** lassen sich Datenreihen beispielsweise durch **beliebige Polynome** annähern.

Zur obigen Messaufgabe lässt sich die Ausgleichsgerade mit folgendem MATLAB-Code berechnen und darstellen.

```
%% Messwertpaare (Strom, Spannung) als Spaltenvektoren
I = [0.4; 0.8; 1.2; 2.0; 3.0; 4.5];
U = [13.9; 13.6; 13.4; 13.3; 12.7; 12.3];

%% Ausgleichsgerade mittels polyfit
p = polyfit(I,U,1);
m = p(1), b = p(2)

%% Grafik
plot(I,U,'*', [0;5],polyval(p,[0;5]),'r')
grid
set(gca,'xminorgrid','on','yminorgrid','on')
xlabel('Strom I [A]'), ylabel('Spannung U [V]')
legend('Messwerte U(I)',sprintf('Ausgleichsgerade U = %0.2f * I + %0.2f',m,b))
```



Aus der Messung ermittelt man auf diese Weise also die Leerlaufspannung $U_0 \approx 13,95 \text{ V}$ und den Innenwiderstand $R_i \approx 0,38 \Omega$.

Die Streuung der Messwerte um die gesuchte Gerade bedeutet, dass diese Werte – wie alle Messwerte – eine Unsicherheit aufweisen.

Hier: $\Delta U_0 \approx 0,08 \text{ V}$ und $\Delta R_i \approx 0,032 \Omega$

(Berechnung siehe nächste Seite)

2.1.2 "Best Fit", Lineare Regression, Ausgleichsgerade

Aufgabenstellung:

Sei eine Menge von N Wertepaaren (x_i, y_i) gegeben, wobei weder die x_i noch die y_i jeweils alle untereinander gleich sind.

Bestimme die Koeffizienten des Polynoms

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

so, dass der Graph des Polynoms möglichst gut zu den Wertepaaren "passt".

Das geschieht durch Minimieren des Gütemaßes

$$P = \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i)^2$$

"Methode der kleinsten Quadrate" / "Least Squares" (C. F. Gauss, 1777 – 1855).

1.) Ausgleichsgerade

Für eine Ausgleichsgerade

$$y = mx + b$$

ist dies eine Optimierungsaufgabe mit 2 Variablen mit den Lösungen

$$m = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

Diese Berechnung verwendet die **Mittelwerte**

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i,$$

die Kovarianz

$$s_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

und die Varianz der x-Werte

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Die Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Die Ausgleichsgerade hat damit einen starken Bezug zu klassischen Kenngrößen der Statistik.

Unsicherheiten

Da die Wertepaare um die Ausgleichsgerade streuen, werden auch die Steigung und der Achsabschnitt als Zufallsgrößen mit einer Standardabweichung aufgefasst.

Es gilt

$$s_m = \frac{s_y}{s_x} \sqrt{\frac{1 - B_{xy}}{N-2}}$$

$$s_b = s_m \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Dabei werden zusätzlich die Standardabweichung der y-Werte

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

der Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

und das Bestimmtheitsmaß

$$B = r_{xy}^2$$

benötigt.

2.) Kurvenapproximation durch beliebige Polynome

Die Forderung, dass die Messpunkte (x_i, y_i) alle die Polynomgleichung erfüllen sollen, liefert ein – in der Regel überbestimmtes – Gleichungssystem.

$$\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_N^n & x_N^{n-1} & \cdots & x_N & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Das lässt sich kurz in der Form

$$X \cdot \vec{a} = \vec{y}$$

schreiben und das Gütemaß lautet dann

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i)^2 = (X \cdot \vec{a} - \vec{y})^T (X \cdot \vec{a} - \vec{y}) \\ &= \vec{a}^T \cdot X^T X \cdot \vec{a} - 2\vec{a}^T \cdot X \cdot \vec{y} + \vec{y}^T \vec{y} \end{aligned}$$

Durch mehrdimensionales (vektorielles) Ableiten nach \vec{a} und Nullsetzen erhält man für den optimalen Koeffizientenvektor das (eindeutig lösbarer) Gleichungssystem

$$X^T X \cdot \vec{a} = X^T \vec{y}.$$

Diese Methode benutzt zum Beispiel die MATLAB-Funktion `polyfit`.

Für das Polynom 1. Ordnung liefert diese Rechnung die Parameter der Ausgleichsgerade wie oben.

2.1.3 Approximation von Messreihen durch allgemeine Funktionen

Viele Zusammenhänge lassen sich nicht sinnvoll durch Polynome annähern. Man kann dann auch andere Funktionsansätze wählen und die Parameter durch numerische Optimierung so bestimmen, dass die Funktion die Menge der Wertepaare im Sinne eines "best fit" möglichst gut annähert.

Beispiel:

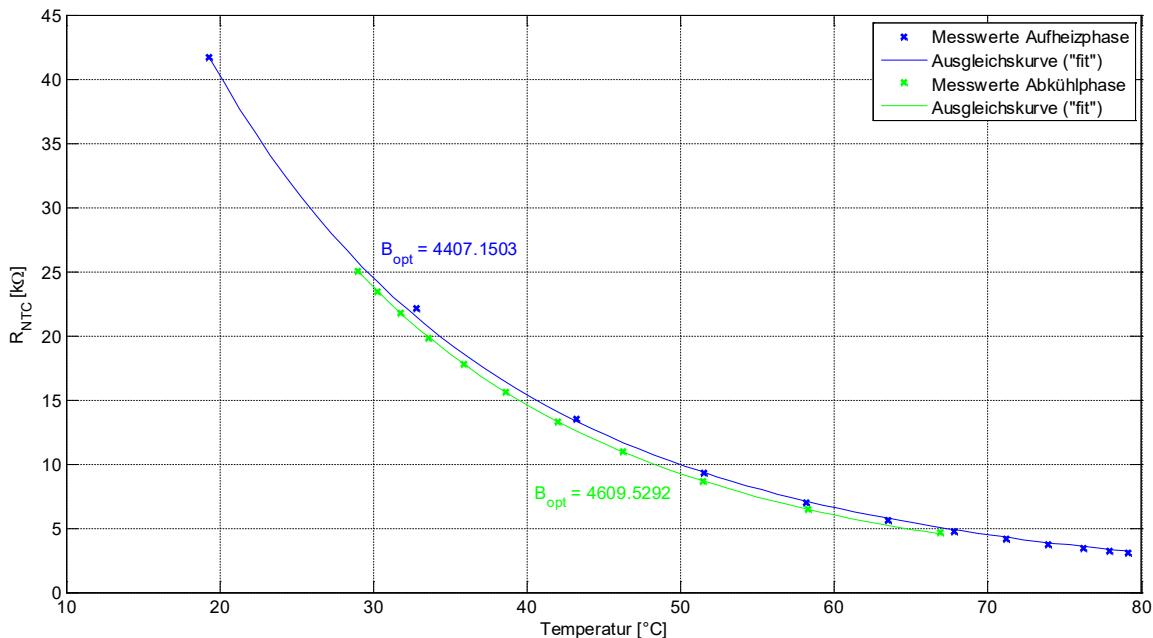
Laut Theorie folgt die Temperaturabhängigkeit eines NTC (Widerstand mit negativem Temperaturkoeffizienten) der Funktion

$$R(T) = R(T_0) \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

mit Angabe der Temperaturen jeweils in Kelvin.

Der Widerstand $R(T_0)$ bei der Temperatur T_0 und eine Reihe weiterer Wertepaare (T_i, R_i) sei gegeben. Dann kann der Parameter B durch Optimierung so bestimmt werden, dass die Funktion $R(T)$ die Wertepaare bestmöglich wiedergibt.

In MATLAB ist dies z. B. mit der Funktion `lsqcurvefit` möglich. Für die obige Aufgabe erhält man bei einer typischen Messreihe die unten stehende Lösung.



Dieses Beispiel (`rntc_lsqfit.m`) und diverse weitere sind in AULIS bereitgestellt.

`lsqcurvefit` bestimmt durch einen Optimierungsalgorithmus die freien Parameter in dem gewählten Funktionsansatz so, dass der Graph der Funktion sich bestmöglich (im Sinne kleinsten Abweichungsquadrat) an die Messpunkte anpasst.

Die Optimierung führt umso sicherer zum Erfolg je bessere, vorab geschätzte Startwerte für die gesuchten Parameter angegeben werden.

2.2 Übungen "Ausgleichsgerade, Kurvenapproximation (Fit)"

2.2.1 Erstellen von Diagrammen

Die Datei "Temperaturmessung-10-2008.dat" enthält (fiktive) Messdaten eines Temperaturmessversuchs..

```
# Temperaturmessung 10/2008
# Zeit      T_Diode          R_NTC          T_U
# (min)    (°C)            (OHM)         (C)
  0        19.30           41735.0       21.09
  5        32.79           22142.0       22.63
  10       43.23           13503.0       23.85
```

etc.

Das Format ist für die Speicherung von Messreihen typisch. Jede Zeile besteht aus dem Zeitpunkt und den zu diesem Zeitpunkt erfassten Werten verschiedener Messgrößen. Alle Einträge sind durch Tabulator, Komma, Semikolon oder einfach durch Leerzeichen getrennt. Für jede Messgröße finden sich die aufgenommenen Werte also in einer Spalte der Datei wieder. Am Dateianfang kann es beschreibende Textzeilen geben, die mit einem Kommentarzeichen (//, #, %, ...) beginnen.

MATLAB bietet für das Einlesen der Daten die Funktion `textscan`. (In einigen bereitgestellten Beispielen wurde allerdings das ältere `textread` verwendet.)

Übung:

Erzeugen Sie zur oben genannten Datendatei ein Diagramm, in dem die zweite und die vierte Spalte über der Zeit dargestellt werden.

Das Diagramm soll üblichen messtechnischen Anforderungen genügen, also mit **Raster, Achsbeschriftungen und aussagekräftige Legende** (in MATLAB: `xlabel`, `ylabel`, `legend` und `grid` oder auch `grid minor`).

2.2.2 "Fit", Ausgleichsfunktion zu einer Messreihe

Aufgabe: Es ist ein Diagramm zu erstellen, in dem der ansteigende Teil des Temperaturverlaufs "T_Diode" dargestellt und durch den Graphen einer Funktion angenähert wird, die dem theoretisch zu erwartenden Verlauf

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + (\vartheta_{end} - \vartheta_0) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

entspricht.

Anmerkungen:

- Dies gehört auch zu den Auswertungen im Labor.
- Eine Lösung dieser Aufgabe in MATLAB finden Sie auf AULIS in "Theta_lsqfit.m". Benutzt wird die Funktion `lsqcurvefit` aus der Optimization Toolbox.

2.2.3 Belastungskennlinie, Innenwiderstand

Untersucht wird eine nicht-ideale Spannungsquelle (vergl. Kap. 2.1.1).

- Warum eignet sich die Formel $R_i = U_0 / I_k$ (Verhältnis von Leerlaufspannung zu Kurzschlussstrom) in der Praxis kaum zur Bestimmung des Innenwiderstands?
- Wie geht man stattdessen vor, um mit einer minimalen Zahl von Messungen die nötigen Informationen zur Bestimmung des Innenwiderstands zu bekommen? Wie wird der Innenwiderstand dann berechnet?
- Wenn mehr Messungen vorliegen, ist die Bestimmung des Innenwiderstandes mittels Ausgleichsgerade die Methode der Wahl. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade zur folgenden Messreihe:
 $I = 0,2 / 0,3 / 0,5 / 0,7 / 0,8 / 1,0 \text{ A}$
 $U = 33 / 31 / 29 / 27 / 25 / 23 \text{ V}$
- Wie errechnet sich hieraus der Innenwiderstand? Wie groß ist er?
- Geben Sie ein Maß für die Unsicherheit des berechneten Wertes an.
- Wie groß ist die Leerlaufspannung? Unsicherheit?

2.2.4 Leerlaufspannung und Innenwiderstand einer Spannungsquelle

An einer Spannungsquelle wird die Spannung bei verschiedenen Strömen wie folgt ermittelt:

Strom I [A]	4	12	16	28
Spannung U [V]	10	8,5	7,5	6

Bestimmen Sie anhand der Ausgleichsgeraden die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand. (Empfehlung zur eigenen Übung: Handrechnung OHNE PC oder Taschenrechner!)

2.2.5 Kurzschlussstrom einer Solarzelle

Eine Solarzelle liefert bei den aufgeführten Bestrahlungsstärken die Kurzschlussströme

$E_e [\text{W/m}^2]$	1000	750	500	250	100
$I_{sc} [\text{A}]$	2.5	1.8	1.3	0.6	0.2

- Welche mittlere Empfindlichkeit in $[\text{A}/(\text{W/m}^2)]$ lässt sich daraus bestimmen?
- Geben Sie ein Maß für die Unsicherheit dieses Wertes an. (siehe S. 39)

2.2.6 Ausgleichsgerade, Bestimmtheitsmaß, Unsicherheit der Steigung

Ein Messverstärker habe ein Übertragungsverhalten entsprechend der Kennlinie

$U_a = 5 \cdot \sin(U_e)$, $0 \leq U_e \leq 1$. Bestimmen Sie U_a bei $U_e = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\} V$.

- a) Skizzieren Sie den Verlauf.
- b) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade.
- c) Vergleichen Sie mit einer geeigneten Berechnung in Matlab
(z. B. Funktion `polyfit`).
- d) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß, die statistische Standardabweichung der Steigung absolut und relativ als Maß der Unsicherheit sowie die Unsicherheit des Achsabschnitts.
- e) Skizzieren Sie den Verlauf mit Ausgleichsgerade und zeichnen Sie auch die im Rahmen der berechneten Unsicherheiten maximal abweichenden Geraden ein.

2.2.7 Trendfeststellung (Korrelation / Signifikanz)

Im Verlauf einer Woche wurden für die Tagesproduktion eines bestimmten Kontaktschalters jeweils folgende Mittelwerte der Schaltabstände registriert:

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6
Schaltweg [μm]	35	32	29	27	31	30

Lässt sich aus dieser Messreihe bereits eine Aussage über einen Trend bezüglich der Veränderung der Schaltabstände dieser Produktion ableiten?

Hinweis: Ein Trend liegt vor, wenn für das Bestimmtheitsmaß $B > 0,5$ gilt.

2.3 Auswertung mit Ausgleichsgeraden bei nichtlinearen Zusammenhängen

Ob die Approximation einer Messreihe durch eine Ausgleichsgerade sinnvoll ist, hängt ab vom

- zugrunde liegenden theoretischen Zusammenhang
- vom Ziel der Auswertung.

2.3.1 Abschnittsweise Annäherung durch Ausgleichsgeraden

Ist trotz eines offensichtlich nicht linearen Zusammenhangs eine Geradennäherung gewünscht (z. B. weil bei einer nichtlinearen Sensorkennlinie die Empfindlichkeit des Sensors in einem bestimmten Messbereich gefragt ist), so teilt man die Messreihe geeignet in Abschnitte auf und bestimmt eine Ausgleichsgerade für jeden der Abschnitte. Die Geraden werden dann i. d. R. unterschiedliche Steigung und unterschiedliche Achsabschnitte aufweisen.

2.3.2 Halblogarithmische Darstellung

Der Zeitverlauf der Temperatur bei der Abkühlung eines Bauteils auf die Umgebungstemperatur ϑ_U ist exponentiell abfallend:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta(0) - \vartheta_U) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1)$$

Diese Temperaturdynamik wird gekennzeichnet durch die Zeitkonstante τ . Wie lässt sich diese aus vorliegenden Messwerten ϑ_i zu Zeitpunkten t_i bestimmen?

- 1.) Approximation durch eine nach (1) angesetzte Funktion mit Hilfe eines Optimum-Suchverfahrens (z. B. MATLAB `lsqcurvefit`)
- 2.) Ausgleichsgerade für die halblogarithmisch dargestellte Messreihe

Diese Methoden ersetzen die früher üblichen Skizzen auf halblogarithmischem Papier.

Ausgleichsgerade in der halblogarithmischen Messwertdarstellung

Zu 2.) geht man wie folgt vor:

Man stellt um und dividiert in (1) durch $(\vartheta(0) - \vartheta_U)$, um dimensionslose Größen zu bekommen. Anschließend wird der natürliche Logarithmus gebildet, so dass

$$\ln \left(\frac{\vartheta(t) - \vartheta_U}{\vartheta(0) - \vartheta_U} \right) = \ln \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -\frac{1}{\tau} \cdot t$$

Wird also $\ln \left(\frac{\vartheta(t) - \vartheta_U}{\vartheta(0) - \vartheta_U} \right)$ über den Zeitpunkten t_i aufgetragen, so ergeben sich

Wertepaare, die theoretisch auf einer Geraden mit der Steigung $m = -1/\tau$ liegen.

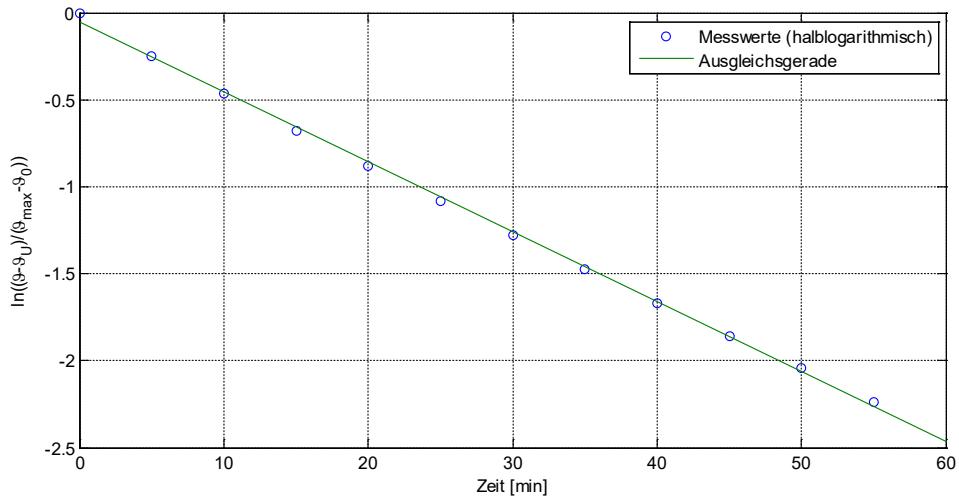
m erhält man durch Berechnung der Ausgleichsgerade. Die Zeitkonstante ergibt sich dann aus $\tau = -1/m$.

Beispiel (MATLAB):

```
y = log((theta-TU) ./ (theta(1)-TU)); % theta = Temperaturmesswerte
p = polyfit(t,y,1);
t_ag = [0; 60]; y_ag = p(1)*t_ag + p(2);
plot(t, y, 'o', t_ag, y_ag, 'g')
tau = -1/p(1)
```

liefert

```
tau =
24.89
```



2.3.3 Doppelt-logarithmische Darstellung

Hängt eine Messgröße – vermutet oder theoretisch begründet – von einer Potenz einer anderen Größe ab, so ist in der Regel der Exponent dieser Potenz die wesentliche charakterisierende Größe. Er lässt sich mit Hilfe einer Ausgleichsgeraden bestimmen, wenn eine doppelt-logarithmische Darstellung der Größen gewählt wird. Verwendet wird dabei meistens der Zehnerlogarithmus "log₁₀" bzw. "lg".

Beispiel:

Der Windwiderstand beim Fahrradfahren ist geschwindigkeitsabhängig und zwar so, dass er überproportional mit der Geschwindigkeit zunimmt. Es gilt

$$F_{\text{Pedal}} = c \cdot v^x$$

wobei c eine Proportionalitätskonstante, v die effektive Windgeschwindigkeit und x der Exponent ist, der aus einer Messreihe ermittelt werden soll.

Durch Logarithmieren erhält man die Geradengleichung

$$\lg(F_{\text{Pedal}}) = \lg(c) + x \cdot \lg(v),$$

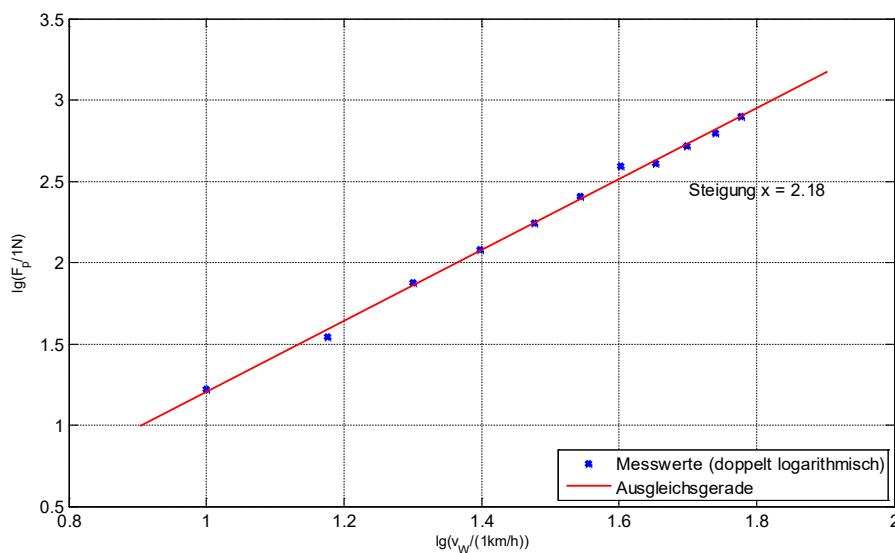
in der die Steigung gleich der gesuchten Potenz x ist (siehe Abbildung unten).

Die Konstante c ergibt sich aus dem Achsabschnitt b der Ausgleichsgerade.

Übung: Wie lautet die Gleichung dafür?

Messreihe:

v	F _P
10.0	16.61
15.0	34.74
20.0	75.36
25.0	119.26
30.0	175.18
35.0	253.56
40.0	393.80
45.0	406.13
50.0	525.20
55.0	622.35
60.0	787.57



2.4 Übungen "Ausgleichsgeraden bei logarithmischer Skalierung"

2.4.1 Zeitkonstante einer Bauteilabkühlung

Die Datei Temperaturmessung-10-2008.dat enthält eine Messreihe, in der Spalte 2 den Temperaturverlauf eines Bauteils wiedergibt, das zunächst erhitzt wurde und ab dem Zeitpunkt $t = 55 \text{ min}$ wieder auf Umgebungstemperatur ($T_U = 23^\circ\text{C}$) abköhlt.

Bestimmen Sie die Zeitkonstante dieses Abkühlvorgangs mittels einer Ausgleichsgeraden in der halblogarithmischen Darstellung des Temperaturverlaufs.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist "tau_Bauteil_Lsg.m"

2.4.2 Parameter B eines NTC

Die Datei Temperaturmessung-10-2008.dat enthält in Spalte 3 die Messreihe des Widerstands eines NTC, der zunächst (bis $t = 55 \text{ min}$) erhitzt und dann abgeköhlt wird. Die zugehörigen Temperaturen sind in Spalte 2 aufgelistet.

Laut Theorie wird die Temperaturabhängigkeit eines NTC beschrieben durch

$$R(T) = R(T_0) \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} \quad (T \text{ und } T_0 \text{ in } [\text{K}] !)$$

- Was muss in einem Diagramm auf der x- und auf der y-Achse aufgetragen werden, damit diese Temperaturabhängigkeit als Gerade mit der Steigung B erscheint?
- Bestimmen Sie B , indem Sie für die gegebenen Messwerte diese Darstellung erzeugen und die Messpunkte durch eine Ausgleichsgerade approximieren.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist "B_NTC_fit.m"

2.4.3 Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers

Für die Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers mit Dimmer erhält man in Abhängigkeit vom Dimmlevel (100% = volle Betriebsspannung) folgende Werte:

D [%]	100	80	60	40	20
Φ_e [W]	51	33	19	10	3

Es wird ein Zusammenhang der Form $\Phi_e = c \cdot D^x$ vermutet. Ermitteln Sie den Exponenten x durch eine Ausgleichsgerade in einer geeigneten grafischen Darstellung der Abhängigkeit beider Größen.

An der Stelle $D = 1$ lässt sich aus dieser Darstellung auch der Koeffizient $c = \Phi_e (D = 1)$ entnehmen. Welchen Wert hat c ?

(Hinweis zum Umgang mit Prozentwerten: ein Prozentwert von z. B. 80 muss als $D = 0.8$ eingesetzt werden!)

Zusatz: Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie die Parameter c und x direkt aus dem nichtlinearen Funktionsansatz mittels `lsqcurvefit` bestimmen? Wie lassen sich die Unterschiede der beiden Ergebnisse erklären?

2.4.4 Leistung einer Windkraftanlage

An einer Windkraftanlage werden die Windgeschwindigkeit und die ins Netz eingespeiste elektrische Leistung gemessen. Es ergibt sich folgende Messreihe:

v _w [m/s]	3	4	5	6	8	10	12
P _{el.} [kW]	35	80	140	250	600	900	1500

Mit welcher Potenz der Windgeschwindigkeit steigt demnach die Leistung der Windkraftanlage?

Hinweis: Unterstellt wird ein Zusammenhang der Form

$$P = c \cdot v_w^x$$

c und der Exponent x , der hier vorrangig von Interesse ist, sind unbekannt. x ist zu ermitteln. Welche Darstellung (halb- oder doppelt-logarithmisch) ist zu wählen, damit x als Steigung einer Ausgleichsgeraden bestimmt werden kann?

2.4.5 Fischbestand

Der Kabeljau ist durch Überfischung und durch die Erwärmung der Arktis in seinem Bestand bedroht. Nach einem Fangverbot wird erwartet, dass der verbliebene Bestand in der Folge wieder exponentiell anwächst. In den ersten Jahren nach dem Stopp der Kabeljaufischerei werden folgende Bestände ermittelt:

Jahr	0	1	2	3	4
Bestand [Mio]	0.5	0.7	1.2	1.8	2.6

Alle wieviel Jahre darf demnach mit einer Verdoppelung des Bestands gerechnet werden?

3 Aufbau eines Messsystems, Sensoren, Messkette

3.1 Sensorelement, Sensor, Messkette

3.1.1 Messkette

Eine Messeinrichtung oder Messkette besteht aus Sensor, Wandler- bzw. Übertragungselement, Anzeige- und Verarbeitungseinheit.

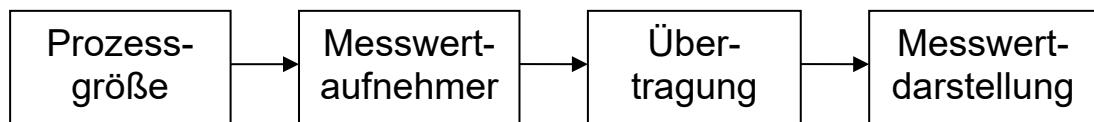


Abbildung 3.1: Typische Messkette

Die in der Messtechnik interessierenden Messgrößen sind häufig nicht-elektrische Größen. Eine Wandlereinheit, die mit Hilfe gezielt genutzter physikalischer Gesetzmäßigkeiten oder Effekte ein zur interessierenden Messgröße in fester Relation stehendes (im Idealfall proportionales) **elektrisches** Ausgangssignal (Spannung, Strom, Widerstand) liefert, heißt **Sensorelement**.

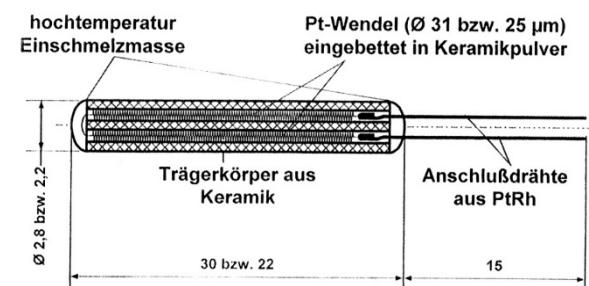


Abbildung 3.2: Beispiel eines Sensorelements: Temperaturfühler mit Pt-100 Widerstand

Tabelle 3.1 zeigt die vielfältigen in Sensorelementen zur Wandlung von elektrischen und nichtelektrischen Messgrößen genutzten physikalischen Effekte und Gesetzmäßigkeiten. Angegeben sind jeweils die physikalischen Effekte, die Größen des angegebenen physikalischen Typs in elektrische wandeln. Die Tabelle ist bei Weitem nicht vollständig: Die Sensorentwicklung ist ein hoch innovatives Gebiet, das in schneller Folge neue Verfahren und Systeme hervorbringt.

mechanisch	thermisch	magnetisch	elektrisch	optisch	molekular
Induktion, kapazitiver Effekt, piezoelektrischer u. piezoresistiver Effekt, digital: Laufzeit	temperaturabhängiger Widerstand, Thermoelektrizität (Seebeck-Effekt), Pyroelektrizität	Halleffekt, Thomson-Effekt, Induktion	Elektromagnetismus, Influenz, Ohm'sches Gesetz	Photowiderstand, äußerer und innerer Photoeffekt (Solarzelle)	Volta-Spannung, Kontaktpotential, elektrolytische Leitung, Konzentrationspotential, Leitfähigkeit

Tabelle 3.1: Messtechnisch nutzbare Umwandlungseffekte physikalischer Größen

3.1.2 Sensorbegriff

Das elektrische Signal eines Sensorelementes muss i. d. R. aufbereitet werden durch Verstärkung, Offset-Abgleich, Kennlinienkorrekturen, Umrechnungen. Weiter wird zunehmend die digitale Verarbeitung der Messwerte in die Messaufnehmer integriert. Abbildung 3.3 veranschaulicht dies und zeigt, welche Begriffe in diesem Zusammenhang verwendet werden.

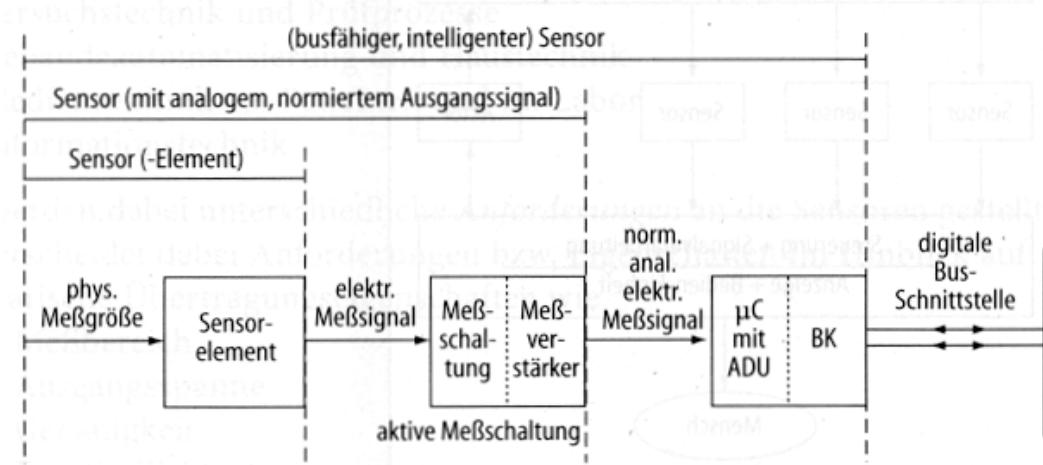


Abbildung 3.3: Abgrenzung der Begriffe "Sensorelement", "Sensor", "intelligenter Sensor"

Als **Sensor** bezeichnet man demnach die **Kombination aus Sensorelement und Signalaufbereitung**, die ein konditioniertes (d. h. meist einer linearen Kennlinie folgendes) Ausgangssignal liefert. Beispielsweise wird ein Pt-100 Sensorelement in Verbindung mit einer Widerstandsmessbrücke zum Temperatursensor.

3.2 Statische Sensorkennlinie, Empfindlichkeit

Die Angabe einer Kennlinie ist eine Möglichkeit zur einheitlichen Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Sensoren beliebigen Typs. Sie stellt eine - im Idealfall eindeutige und lineare - Abbildung der Prozess-Messgröße auf die (elektrische) Ausgangsgröße dar.

Zum Beispiel liefert die Wegmessung mit einem potentiometrischen Wegaufnehmer im Idealfall eine lineare Kennlinie entsprechend der Spannungsteilerregel.

$$R(x = 0) = 0, \quad R(x = l) = R_N$$

$$R(x) = \frac{x}{l} R_N \quad \text{bzw.}$$

$$U_M(x) = \frac{R(x)}{R_N} U_S = \frac{x}{l} U_S = \frac{U_S}{l} \cdot x$$

Abbildung 3.5 zeigt die zugehörige Kennlinie.

Die Steigung wird als **Empfindlichkeit** des Sensors (auch: Übertragungsfaktor) bezeichnet.

$$\text{hier: } E = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta U_M}{\Delta x} = \frac{U_S}{l} = \frac{10 \text{ V}}{2 \text{ m}} = 5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

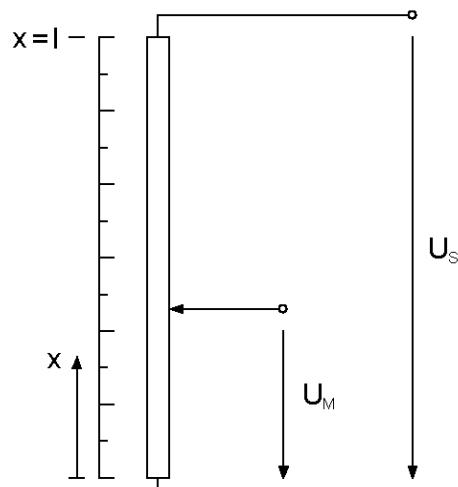


Abbildung 3.4: Prinzip eines potentiometrischen Wegaufnehmers

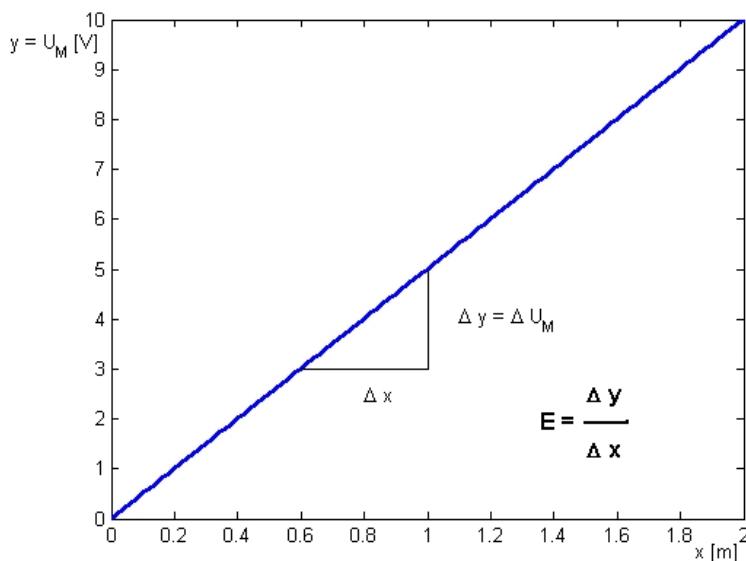


Abbildung 3.5: Ideale Sensorkennlinie eines Wegaufnehmers

Die Bezeichnung "Empfindlichkeit" wird nicht nur für Sensoren sondern mit entsprechender Definition auch für jede beliebige Maßverkörperung und alle anzeigenenden Messinstrumente verwendet.

3.3 Statische Kennlinienabweichungen

Fertigungsbedingt oder aufgrund physikalischer Effekte wird kein Sensor oder Messsystem eine ideale Kennlinie gemäß Abbildung 6.3 aufweisen. Vielmehr treten Abweichungen auf in Form von

- Offset Nullpunktverschiebung, Nullpunktdrift (z. B. temperaturabhängig);
- Steigungsfehler (auch: Verstärkung, Gain) Abweichung der Empfindlichkeit;
- Nichtlinearität Abweichung vom linearen Zusammenhang zwischen Mess- und Ausgangsgröße, häufig prinzipbedingt, z. B. quadratischer Term der Temperaturabhängigkeit des Widerstands von Metallen;
- Hysterese maximale Abweichung zwischen den erhaltenen Messwerten, wenn der Messpunkt von niedrigeren und von höheren Messwerten aus angesteuert wird.

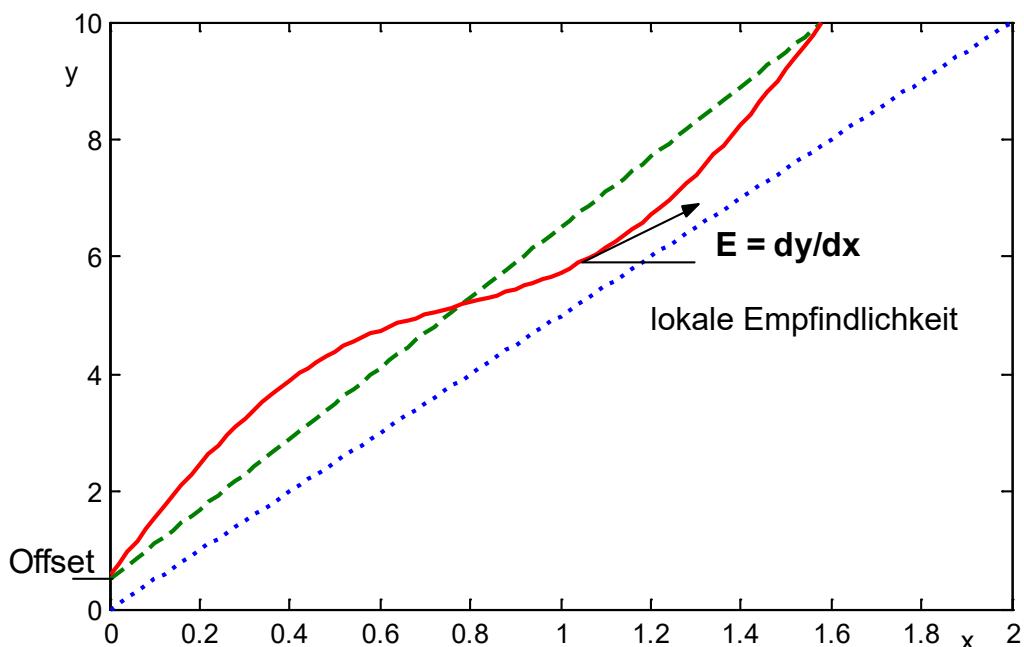


Abbildung 3.6: Kennlinienabweichungen: Offset, Verstärkungsfehler, Nichtlinearität

Die **lokale Empfindlichkeit** ist die Steigung an der Stelle des jeweiligen Messwerts.

$$E(x) = \frac{dU_M}{dx} = \frac{U_S}{l} \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Beispiel

Die nichtlineare Temperaturabhängigkeit beim **Pt-100** - Widerstandsthermometer ist nach DIN EN 60751(IEC 751) gegeben durch

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + 3,9083 \cdot 10^{-3} \cdot C^{-1} \cdot \vartheta - 5,775 \cdot 10^{-7} \cdot C^{-2} \cdot \vartheta^2) \text{ für } \vartheta > 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

mit $R_0 = 100 \Omega$.

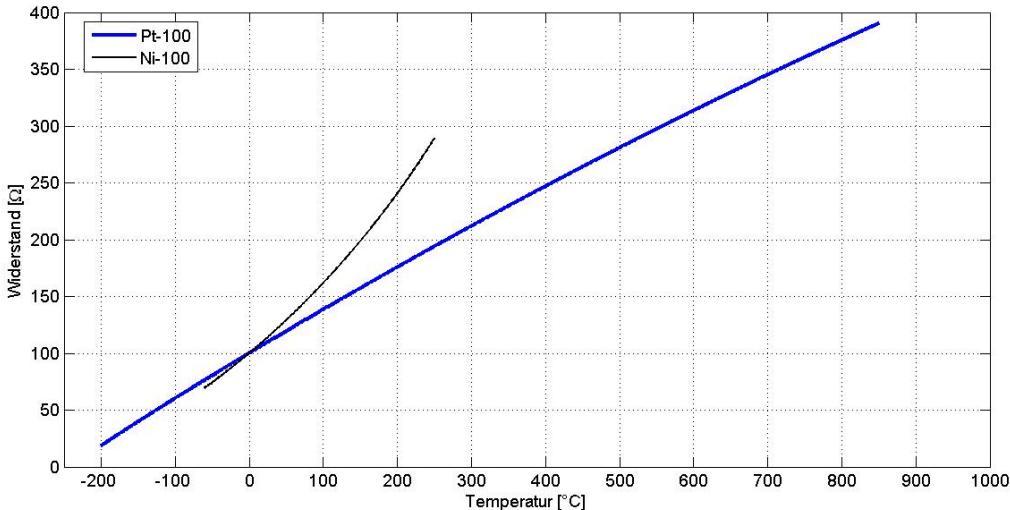


Abbildung 3.7: Kennlinien von Platin- und Nickel-Temperatursensorelementen

3.4 Übungen "Sensorkennlinien, Linearitätsfehler"

3.4.1 Temperaturabhängiger Kupfer-Widerstand

Der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstands eines Leiterstücks aus Kupfer sei mit $\alpha_{20} = 0,0043 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ angegeben. Welche Empfindlichkeit bezüglich der Umsetzung der Temperatur in eine Messspannung hat dieses Kupferelement, wenn es mit einem Konstantstrom von 10 mA gespeist wird und bei 0°C den Widerstand $R = 50 \Omega$ hat?

3.4.2 Lokale Empfindlichkeit

Bestimmen Sie die lokale Empfindlichkeit eines Platin-Sensorelementes bei 200°C und vergleichen Sie die Werte mit denen bei 0°C. Geben Sie für den Arbeitspunkt 200°C die linearisierte Kennlinien an (= Tangente an die Originalkennlinie).

3.4.3 Kennlinienabweichungen

Eine Temperatur-Anzeigeeinheit zeigt $\vartheta_A = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ bei einer (Eingangs-) Messspannung $U_M = -1 \text{ V}$ und $\vartheta_A = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ bei $U_M = 3 \text{ V}$ an.

- Geben Sie die entsprechende lineare Kennlinie der Anzeigeeinheit $\vartheta_A(U_M)$ an (Formel und Skizze).

Mit Hilfe einer Konstant-Stromquelle ($I_M = 1 \text{ mA}$) und eines Ni-100-Sensorelementes mit der Charakteristik $R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot \vartheta + 6,7 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-2} \cdot \vartheta^2)$ wird die Messspannung durch eine Verstärkerschaltung wie folgt erzeugt:

$$U_M = 86,7 \cdot I_M \cdot R(\vartheta) - 8,74 \text{ V}$$

- Bestimmen Sie die Kennlinie $\vartheta_A(\vartheta)$ dieser Messanordnung (nur Formel!).
- Bestimmen Sie den Offsetfehler der Temperaturanzeige bei $\vartheta = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ sowie die Abweichung bei 100 °C.
- Bestimmen Sie die Gleichung für die nach Korrektur des Offsetfehlers verbleibende nichtlineare Kennlinienabweichung $\Delta\vartheta_A(\vartheta)$.
- Bei welchen Temperaturen ist der Linearitätsfehler gleich Null?

3.5 Übungen "Sensorkennlinien, Linearisierung"

3.5.1 Quadratische Kennlinie eines Temperatursensorelementes

Für einen Si-Widerstands-Temperatursensor mit

$$R(\vartheta) = R_{25} \cdot (1 + 0,01 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot \Delta\vartheta + 5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-2} \cdot \Delta\vartheta^2),$$

$$R_{25} = R(\vartheta = 25 \text{ }^\circ\text{C}) = 2 \text{ k}\Omega, \Delta\vartheta = \vartheta - 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

ist eine lineare Kennlinie $R_{lin}(\vartheta) = R_{off} + E \cdot \vartheta$ zu bestimmen.

- Bestimmen Sie als Linearisierung die Tangente an die Kennlinie bei $\vartheta = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Bestimmen Sie als weitere Linearisierung die Ausgleichsgerade, die sich aus den Punkten der Kennlinie bei $\vartheta = 0 \text{ }^\circ\text{C}, \vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \vartheta = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ und bei $\vartheta = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ ergibt.
- Geben Sie für beide Linearisierungen den Offsetfehler bei $\vartheta = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ und die Kennlinienabweichung (absolut und relativ) bei $\vartheta = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ an.

3.5.2 Fehler bei linearer Verstärkung und Anzeige

Durch Speisung des Sensors aus 3.5.1 mit einem Konstantstrom von 1 mA entsteht die Messspannung $U_{m1} = R(\vartheta) \cdot 1 \text{ mA}$. Diese wird mit einem Verstärker, der die Spannung U_{Offset} subtrahiert und das Ergebnis um den Faktor V verstärkt, in eine Messspannung U_{m2} umgesetzt, die zwischen 0 und 10 V liegen soll, wenn die Temperatur zwischen 0 und 100 °C variiert. Eine angeschlossene Digitalanzeige setzt mit idealer, linearer Kennlinie Spannungen zwischen -2 und 12 V in Temperaturanzeigewerte zwischen -20 °C und 120 °C um.

1. Bestimmen Sie U_{Offset} und V so, dass $U_{m2} = 0 \text{ V}$ bei $\vartheta = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ und $U_{m2} = 10 \text{ V}$ bei $\vartheta = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ wird.
2. Bestimmen Sie U_{Offset} und V so, dass $U_{m2} = 0 \text{ V}$ bei $\vartheta = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ und $U_{m2} = 10 \text{ V}$ bei $\vartheta = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ gelten würde, wenn die Sensorkennlinie durch die oben berechnete Ausgleichsgerade gegeben wäre.
3. Berechnen Sie bezüglich des Anzeigewertes der Temperatur für 2. den Offsetfehler und den absoluten und relativen Messfehler bei 100 °C sowie für beide Verstärkerauslegungen die absolute und relative Abweichung bei 50 °C.

3.5.3 (Verbesserte) Linearisierung durch Vorwiderstand

Alle Aufgaben wie in 3.5.2, wobei nun aber der Si-Widerstands-Temperatursensor über einen Vorwiderstand R_v an eine konstante Speisespannung U_S angeschlossen und U_{m1} über dem Si-Widerstand abgegriffen wird:

$$U_{m1} = \frac{R(\vartheta)}{R_v + R(\vartheta)} \cdot U_S, \quad U_S = 10 \text{ V}, \quad R_v = 10 \text{ k}\Omega$$

Die Ausgleichsgerade für die Auslegung entsprechend b) ist dabei für U_{m1} zu bestimmen, das heißt für die Werte von U_{m1} bei $\vartheta = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $\vartheta = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $\vartheta = 50 \text{ }^{\circ}\text{C}$ und $\vartheta = 80 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Für diese Aufgabe empfiehlt sich Rechnerunterstützung, z. B. alle Rechnungen in einem MATLAB-Script.

Dann sollten Sie auch einmal folgendes tun: Wiederholen Sie die Rechnung mit einem Vorwiderstand von $R_v = 3,3 \text{ k}\Omega$ und $R_v = 1 \text{ k}\Omega$ und vergleichen Sie!

3.5.4 Linearitätsfehler einer Temperaturmessung

Gegeben ist die Kennlinie eines Si-Widerstands-Temperatursensors durch die Gleichung

$$R(\vartheta) = R_{25} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta + \beta \cdot \Delta\vartheta^2),$$

$$R_{25} = 2 \text{ k}\Omega, \Delta\vartheta = \vartheta - 25^\circ\text{C}, \alpha = 7,88 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \beta = 1,937 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}.$$

Die Serienschaltung dieses Sensors mit einem 3,3 kΩ - Widerstand wird mit einer Konstantspannung von 10 V gespeist. Die Messspannung U_M wird über dem Sensor abgegriffen.

1. Berechnen Sie die resultierende nichtlineare Sensorkennlinie $U_M(\vartheta)$
2. Bestimmen Sie umgekehrt $\hat{\vartheta}(U_M)$.
3. Geben Sie eine lineare Umrechnung der Form $\vartheta_M = k \cdot (U_M - U_0)$ an, die bei $\vartheta = 5^\circ\text{C}$ und 45°C exakt ist. Wie groß ist die Abweichung bei 25°C und bei 100°C ?

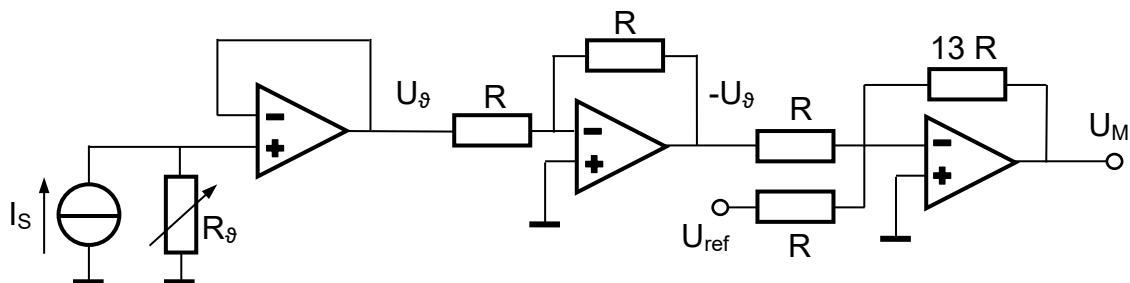
Stellen Sie $\hat{\vartheta}(U_M)$ und $\vartheta_M(U_M)$ in einem Diagramm dar.

Wie groß ist im Bereich $3\text{V} \leq U_M \leq 6\text{V}$ die maximale Abweichung zwischen tatsächlicher und berechneter Temperatur?

4 Messschaltungen, Operationsverstärker

Auch wenn heute Messdaten überwiegend digital erfasst werden, findet doch bei fast allen Messungen vor der Digitalisierung eine Signalaufbereitung mit analoger Schaltungstechnik statt. Häufig werden dabei Operationsverstärkerschaltungen eingesetzt.

Beispiel: Spannungsfolger und Verstärker mit Offsetbereinigung



Die Schaltung liefert bei der Temperaturmessung mit einem Pt-100-Sensorelement eine definierte Spannung mit 0 V bei 0°C.

4.1 Aufbau und Eigenschaften von Operationsverstärkern

Ein Operationsverstärker (kurz: "OP") ist aus einer Kette von Transistorverstärkerschaltungen aufgebaut. Die Eingangsstufe nimmt nur sehr geringe Ströme auf und die Gesamtverstärkung der Eingangsspannung beträgt mehrere Zehnerpotenzen.

Es gibt ihn in vielen verschiedenen Varianten und Bauformen. Der verbreitetste Typ ist in Abb. 4.1 skizziert.

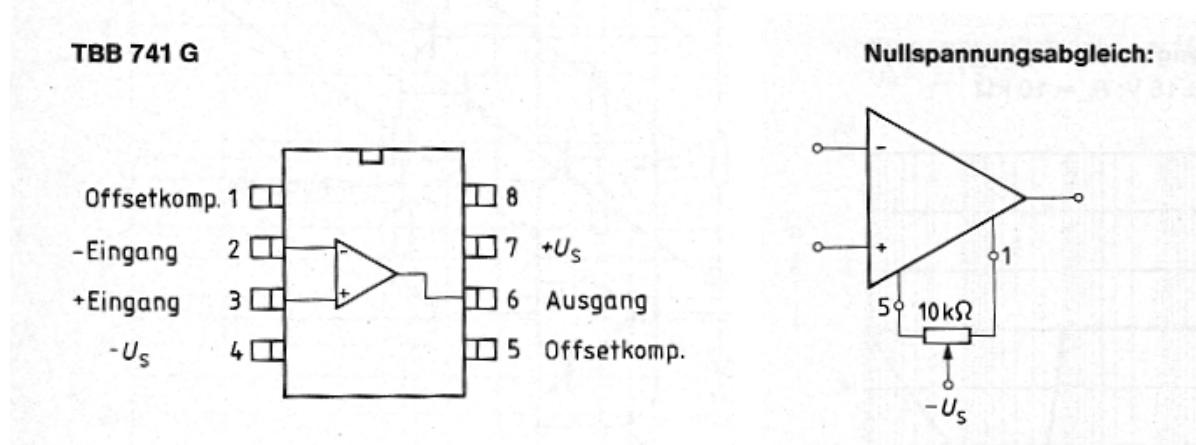


Abbildung 4.1: Typische Bauform, Pin-Belegung, Schaltzeichen, Abgleich

Einige typische Daten sind hier einem Datenblatt von Texas Instruments entnommen – ursprünglich aus dem Jahr 1970! Also ein Dinosaurier der Schaltungstechnik, aber unverwüstlich.

**μ A741, μ A741Y
GENERAL-PURPOSE OPERATIONAL AMPLIFIERS**

SLOS094B – NOVEMBER 1970 – REVISED SEPTEMBER 2000

electrical characteristics at specified free-air temperature, $V_{CC\pm} = \pm 15$ V (unless otherwise noted)

PARAMETER	TEST CONDITIONS	T_A^\dagger	μ A741C			μ A741I, μ A741M			UNIT
			MIN	TYP	MAX	MIN	TYP	MAX	
AvD	$R_L \geq 2$ k Ω	25°C	20	200		50	200		V/mV
	$V_O = \pm 10$ V	Full range	15			25			
r_i	Input resistance	25°C	0.3	2		0.3	2		M Ω
r_o	Output resistance	$V_O = 0$, See Note 5	25°C		75			75	Ω

Der Eingangswiderstand liegt bei diesem OP bei $R_i = 2$ M Ω und die Differenzspannung der beiden Eingänge wird mit der Verstärkung $V_0 = 200 \frac{V}{mV}$ auf den Ausgang übertragen, also mit dem Faktor $2 \cdot 10^5 \approx 106$ dB.

Wie Abb. 4.2 zeigt, hat das Übertragungsverhalten des OP Tiefpasscharakter. Das ist beim Einsatz in Schaltungen, die Frequenzen oberhalb einiger kHz verarbeiten, zu beachten.

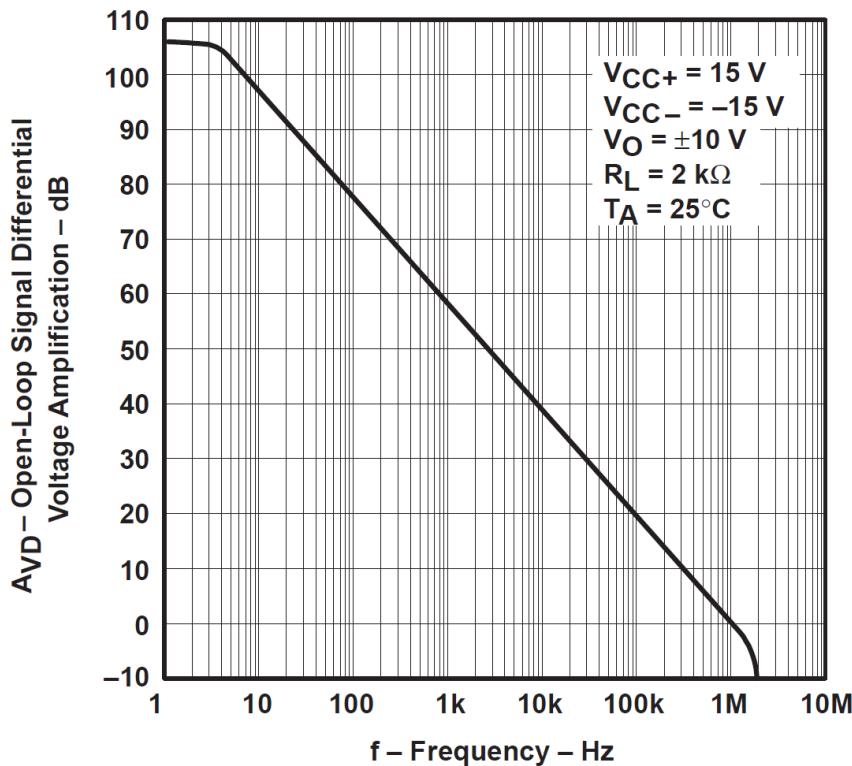


Abbildung 4.2: Frequenzgang des "741"-Operationsverstärkers

Ein "idealer" Verstärker hätte

- unendlich hohe Eingangsimpedanz
- unendlich große Verstärkung

Die Daten des Operationsverstärkers kommen dem so nah, dass folgende

Annahmen zur vereinfachten Berechnung gelten:

- Eingangsströme: $I_n = 0, I_p = 0$
- Eingangsspannungen: $U_p = U_n$

Letzteres folgt wegen der hohen Verstärkung aus

$$U_a = V_0 \cdot (U_p - U_n) \quad \text{und damit} \quad (U_p - U_n) = \frac{U_a}{V_0} \approx 0.$$

Sind U_p und U_n verschieden, geht wegen der hohen Verstärkung der Ausgang des OP in die Begrenzung, das heißt $U_a = +U_S$ oder $U_a = -U_S$ je nach Vorzeichen der Eingangsspannungsdifferenz. So werden Operationsverstärker z. B. beim "Schmitt-Trigger" eingesetzt, nicht aber in Filter- und Verstärkerschaltungen.

4.2 Operationsverstärkerschaltungen

Die Idealisierungen ermöglichen die Bestimmung der Funktion einer OP-Verstärkerschaltung durch einfache Anwendung von Knoten- und Maschenregel.

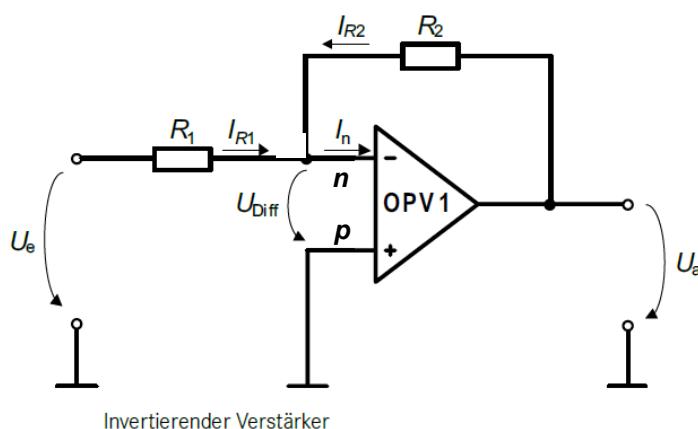
Beispiel: Invertierender Verstärker

Knotenregel in "n": $I_{R1} + I_{R2} = I_n = 0$ (wegen Idealisierung "Eingangsströme = 0")

Ohmsches Gesetz: $\frac{U_e - U_n}{R_1} + \frac{U_a - U_n}{R_2} = 0$

Und wegen Idealisierung " $U_p - U_n = 0$ ": $U_n = U_{Diff} + U_p = 0 + 0 = 0$,

erhält man: $\frac{U_e}{R_1} + \frac{U_a}{R_2} = 0$



Ausgangsspannung:

$$U_a = -\frac{R_2}{R_1} U_e$$

Quelle: Matthias Viehmann: "Operationsverstärker – Grundlagen, Schaltungen, Anwendungen"; Hanser Verlag, München, 2016

4.2.1 Differenzverstärker und Instrumentenverstärker

Die Schaltung in Abb. 4.3 bildet die Differenz zweier Spannungen ($U_2 - U_1$) und gibt sie, verstärkt um einen wählbaren Faktor (R_5/R_4) aus.

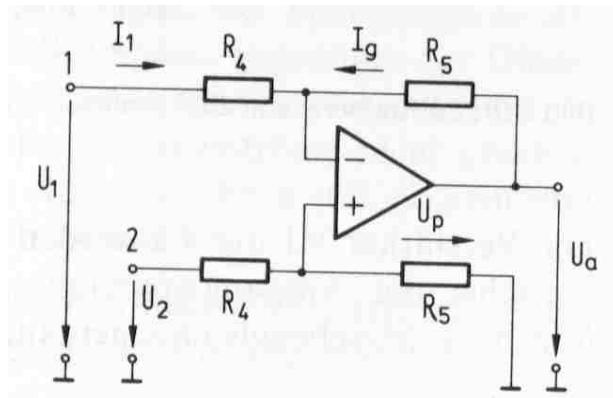


Abbildung 4.3: OP-Schaltung "Differenzverstärker"

Übung: Wie lautet die Abhängigkeit des Ausgangs U_a von U_1 und U_2 ?

Diese Verstärkerschaltung ist nicht rückwirkungsfrei! Versucht man damit die Brückenspannung einer Messbrücke (siehe Kap. 4.5) zu messen, so wird diese mit den Strömen I_1 und $I_2 = U_2/(R_4 + R_5)$ unsymmetrisch belastet und dadurch verstimmt.

Dieses Problem wird gelöst, indem den Eingängen des Differenzverstärkers Spannungsfolgerschaltungen (auch: "Impedanzwandler") vorgeschaltet werden. Das ermöglicht eine annähernd stromlose Messung, wegen des sehr hohen Eingangswiderstands der Operationsverstärker V1 und V2. Man nennt die so entstehende Schaltung (Abb. 4.4) Instrumentenverstärker oder auch Elektrometer-Verstärker ([1], S. 238). Sie wird sehr häufig eingesetzt.

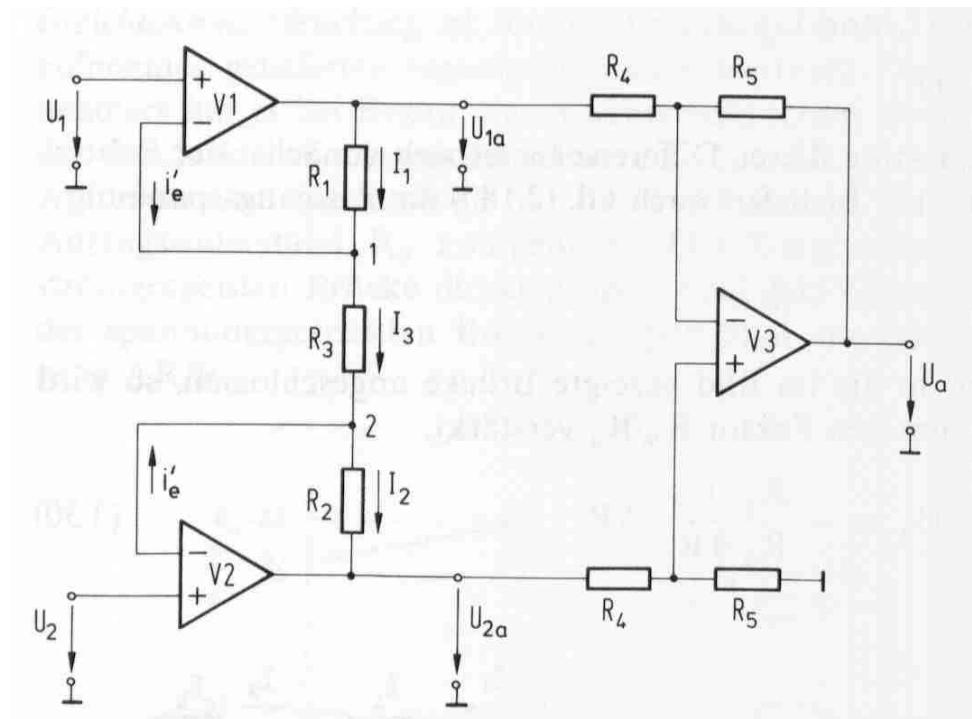


Abbildung 4.4: OP-Schaltung "Elektrometer-Differenzverstärker / Instrumentenverstärker"

Die folgenden Abschnitte und Übungen behandeln typische Anwendungen von Operationsverstärkern in messtechnischen Schaltungen.

4.2.2 OP-Schaltung zum Anschluss einer DMS-Messbrücke

In der Betriebsanleitung eines integrierten Beschleunigungsaufnehmers, der mit einer DMS-Vollbrücke (Kap. 4.5.3) arbeitet, wird folgende Beschaltung zum Brückenabgleich und zur Signalaufbereitung empfohlen (ebenfalls als IC erhältlich, z. B. AD 620).

SIGNAL CONDITIONING

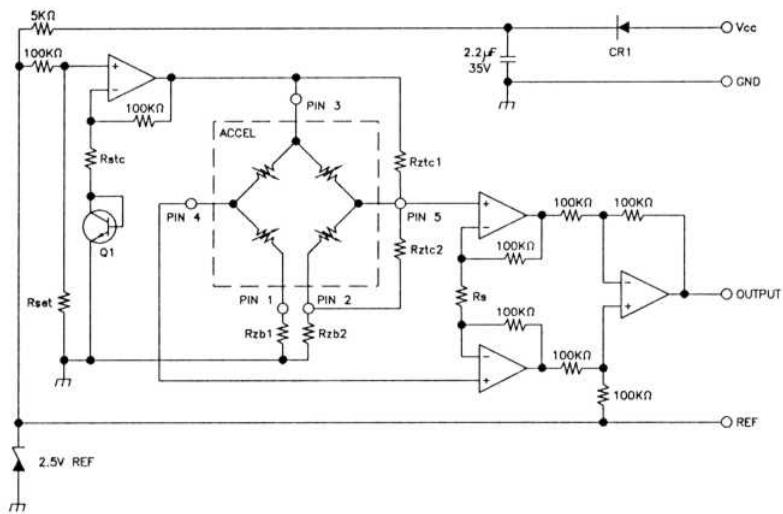


Figure 2. Typical Temperature Compensation and Amplification Circuit (component values specified for each sensor)

Q1: 2N3904

D1: 1N914 or equivalent

Op Amps: LT1014, LM324 or equivalent

- R_{tc} sets the excitation voltage ramp to compensate the sensitivity error due to temperature.
- R_{set} sets the excitation voltage to 5V at 25°C.
- R_{zb1}, R_{zb2} and R_{ztc1} and R_{ztc2} calibrate the zero offset and compensate the offset error due to temperature.
- R_s calibrates the output span.
- V_{cc} must be >8 VDC.

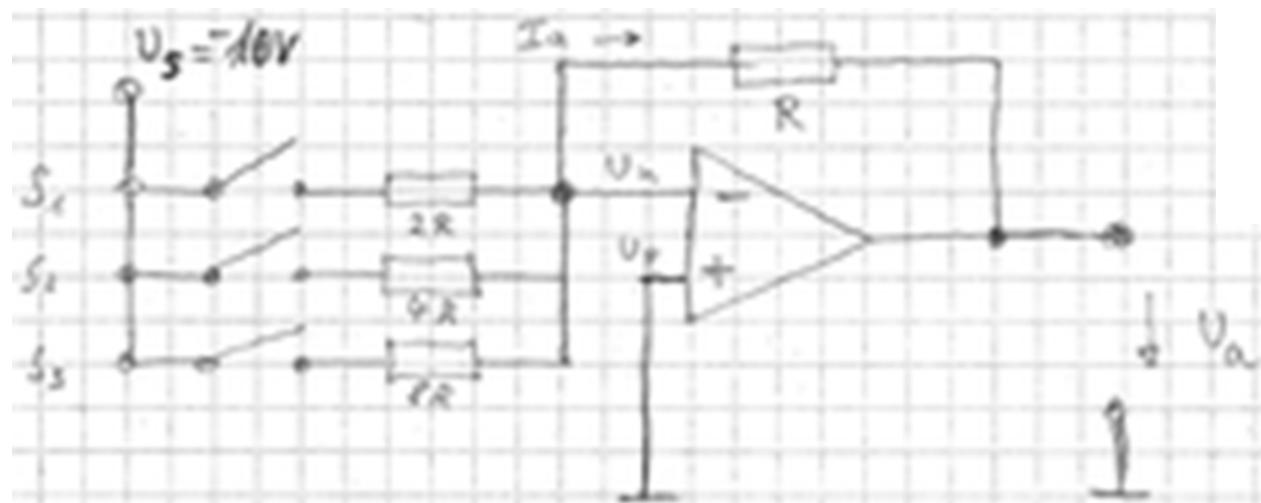
Abbildung 4.5: OP-Schaltung zur Signalaufbereitung einer DMS-Brücke

Die Brückenspannung wird über einen Elektrometer-Differenzverstärker ausgegeben (im Schaltplan rechts unten).

4.2.3 Addierer (mit Vorzeichenumkehr, "invertierend")

4.2.4 Addierer mit mehr als zwei Eingängen

Hier: mit schaltbaren Eingängen und spezieller Wahl der Eingangswiderstände



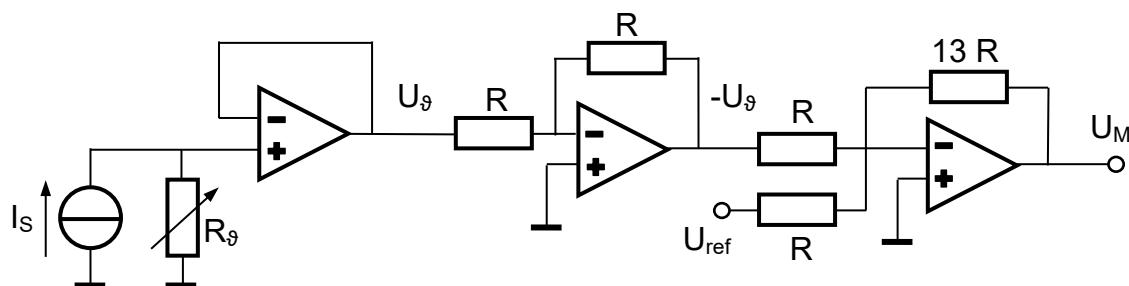
4.3 Übungen "Operationsverstärkerschaltungen"

4.3.1 Elektrometer-Differenzverstärker (Instrumentenverstärker)

- Bestimmen Sie für die Schaltung in Abbildung 4.5 U_{1a} , U_{2a} und $U_{1a}-U_{2a}$ in Abhängigkeit von U_1 , U_2 , R_1 , R_2 , R_3 .
- Bei symmetrischer Beschaltung $R_1 = R_2$: Welche Funktion hat R_3 ? Welche Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannungsdifferenz ergibt sich, wenn R_3 weggelassen wird ($R_3 \rightarrow \infty$)? (Lsg. und weitere OP-Schaltungen: s. Anhang B)
- Bestimmen Sie für den Fall $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega$ den Widerstand R_3 so, dass $U_a = -4 \cdot (U_1 - U_2)$ wird.

4.3.2 OP-Schaltung zur Temperaturmessung, Kennlinienabweichungen

Gegeben sei ein Temperaturmessgerät für den Messbereich $0 - 100 \text{ }^\circ\text{C}$ mit einem normgerechten Pt100-Element, wobei $I_S = 2 \text{ mA}$ und $U_{ref} = 0,2002 \text{ V}$.



- Zeigen Sie: $U_M = 13 \cdot (I_S \cdot R_\vartheta - U_{ref})$.

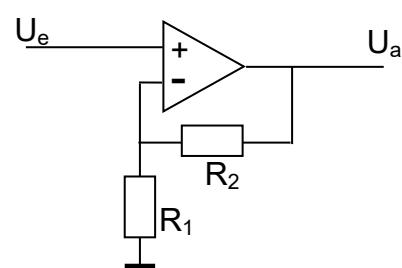
$U_M = 0 \dots 1 \text{ V}$ entspreche einer Anzeige von $0 \dots 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

- Wie groß ist der Offset-Fehler?
- Wie groß ist der maximale Linearitätsfehler im Messbereich (angegeben in Prozent vom Endwert)? Ein evtl. vorhandener Steigungsfehler soll unberücksichtigt bleiben.

4.3.3 Nicht invertierender Verstärker

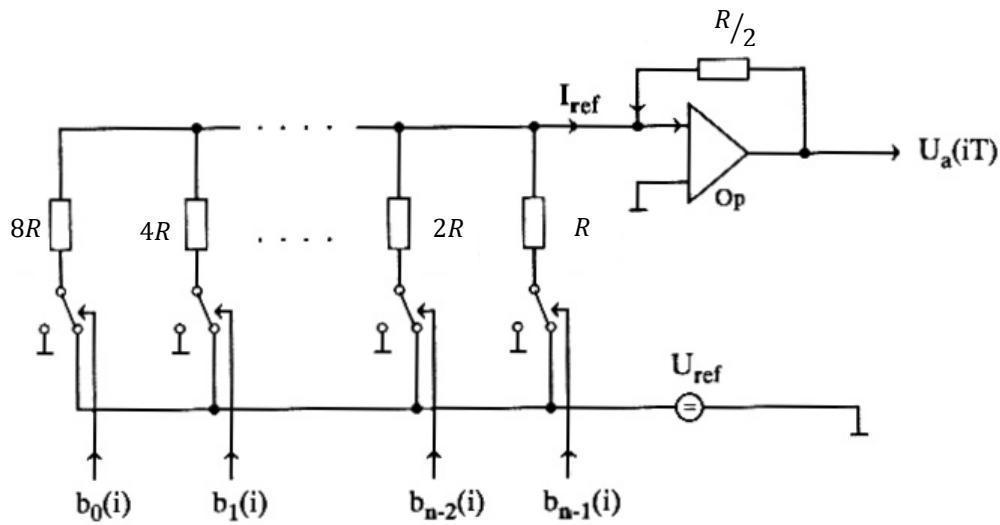
Bestimmen Sie das Übertragungsverhalten

$U_a = f(U_e)$ der nebenstehenden Operationsverstärkerschaltung (allgemein und für die Widerstandswerte $R_1 = 3,3 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 13,2 \text{ k}\Omega$).



4.3.4 D/A-Wandler

Bestimmen Sie U_a , wenn $U_{ref} = -10V$, $n = 4$ und $b = [b_3, b_2, b_1, b_0] = [1, 1, 0, 1]$ (alle Schalter wie im Bild gezeigt, nur der Schalter bei b_1 geöffnet).



4.4 Messschaltung mit Rückkopplung, Kompensation

Blockdiagramm:

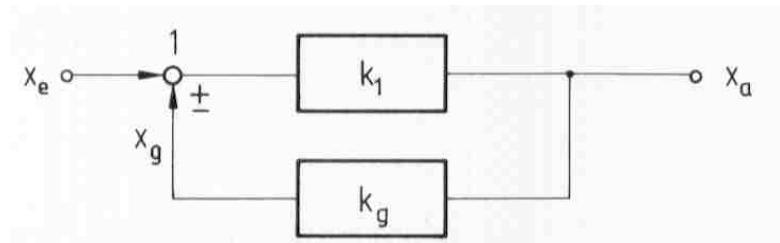


Abbildung 4.6: Kompensationsstruktur

Beispiel: Berührungslose Strommessung, DC/AC - Stromwandler

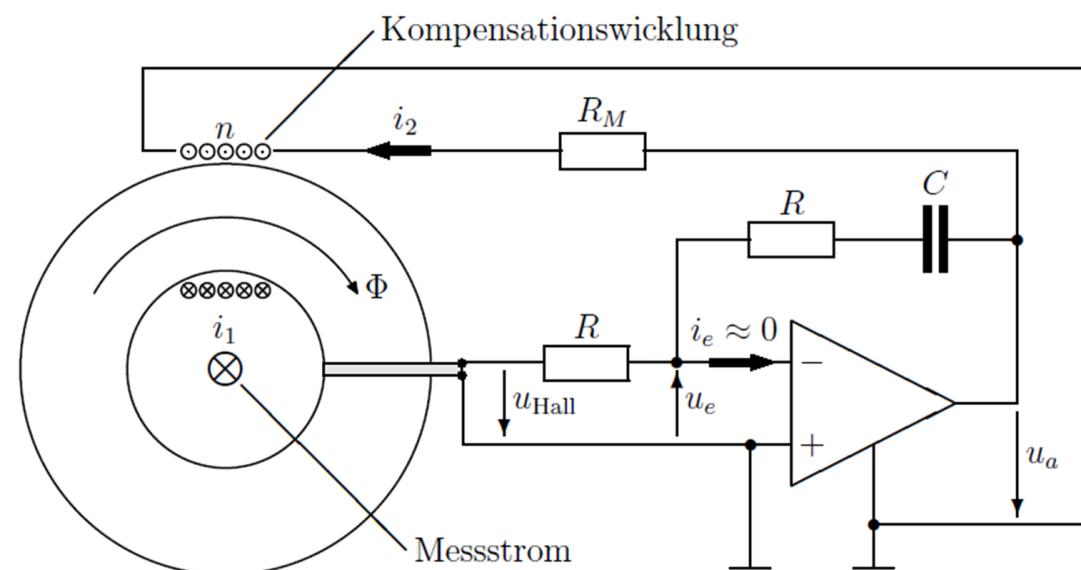


Abbildung 4.7: Potentialfreie und berührungslose Strommessung für Gleich- und Wechselstrom mittels Magnetfeldkompensation

Der vom Hall-Element gesteuerte Verstärker treibt den Strom I_2 derart, dass sich die von I_1 und I_2 erzeugten magnetischen Flüsse gegenseitig aufheben. Der Kompressionsstrom ist dabei direkt proportional zum Messstrom

$$I_1 = n \cdot I_2 = n \cdot \frac{U_a}{R_M}$$

Die OP-Schaltung stellt einen **PI-Regler** dar, der die Hall-Spannung auf Null regelt. Im Gegensatz zur direkten Auswertung der Hall-Spannung kompensiert diese Schaltung mehrere mögliche Störeinflüsse, wie z. B. die Temperaturabhängigkeit der Hall-Spannung.

4.5 Brückenschaltungen

4.5.1 Einfache Brückenschaltung

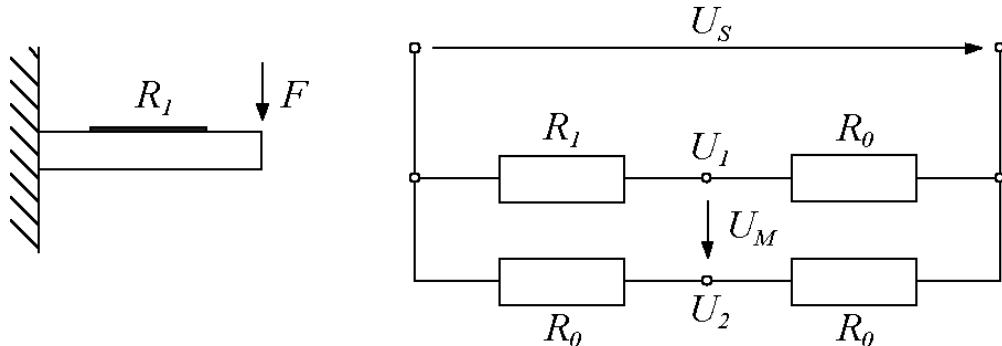


Abbildung 4.8: Biegebalken unter Krafteinwirkung mit DMS in Brückenschaltung

Beispiel: Dehnungsmessung mit Dehnungsmessstreifen (DMS)

$$R_I = R_0 + \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T : \text{dehnungs- und temperaturabhängig}$$

$$U_M = U_1 - U_2 = \frac{R_0}{R_I + R_0} \cdot U_S - \frac{R_0}{R_0 + R_0} \cdot U_S = U_S \cdot \left(\frac{R_0}{2R_0 + \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T} - \frac{1}{2} \right)$$

$$U_M = U_S \cdot \left(\frac{2 \cdot R_0 - (2 \cdot R_0 + \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T)}{2 \cdot (2 \cdot R_0 + \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T)} \right)$$

und damit wegen $\Delta R_\varepsilon + \Delta R_T \ll R_0$

$$U_M \approx -\frac{U_S}{4 \cdot R_0} \cdot (\Delta R_\varepsilon + \Delta R_T)$$

Bei der Bestimmung des Widerstands in der einfachen Brückenschaltung gehen temperaturabhängige Änderungen im gleichen Maß wie die dehnungsabhängigen Änderungen (das eigentliche Nutzsignal) in den Messwert ein. Die Schaltung ist deshalb für die Dehnungsmessung kaum geeignet.

4.5.2 Halbbrücke

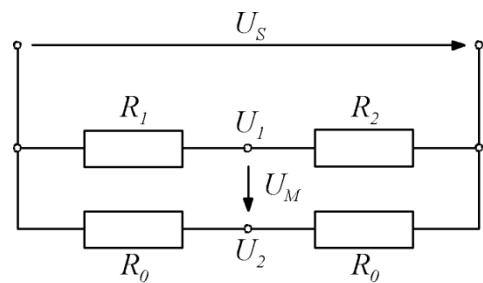
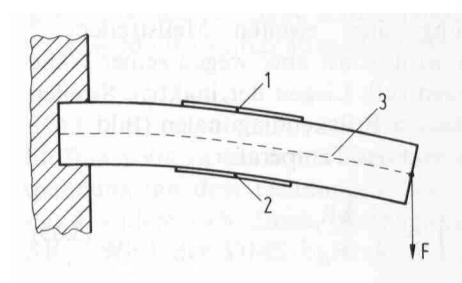


Abbildung 4.9: 2 DMS ("1" gedehnt, "2" gestaucht) in einer Halbbrückenschaltung

$$R_1 = R_0 + \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T \quad R_2 = R_0 - \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T$$

$$U_M = U_S \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2} \right) = U_S \cdot \left(\frac{R_0 - \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T}{2 \cdot R_0 + 2 \cdot \Delta R_T} - \frac{1}{2} \right) \approx -\frac{U_S}{2 \cdot R_0} \cdot \Delta R_\varepsilon = -\frac{U_S}{2} \cdot \frac{\Delta R_\varepsilon}{R_0}$$

ΔR_T geht nicht mehr in den Messwert ein!

4.5.3 Vollbrücke

Bei Einsatz von je 2 gedehnten und gestauchten DMS erhält man eine Vollbrücke, mit der sich die Empfindlichkeit der Messschaltung gegenüber der Halbbrücke nochmals verdoppeln lässt.

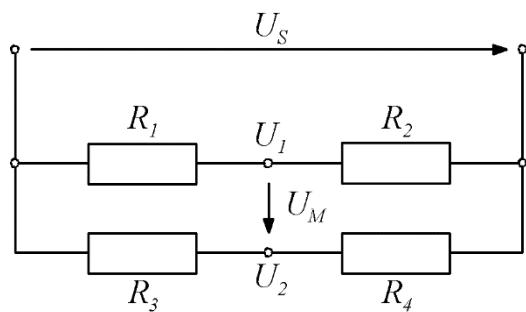


Abbildung 4.10: Vollbrückenschaltung

$$R_1 = R_0 + \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T \quad R_2 = R_0 - \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T$$

$$R_3 = R_0 - \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T \quad R_4 = R_0 + \Delta R_\varepsilon + \Delta R_T$$

Bestimmung von U_M als Übung (siehe unten).

4.6 Übungen "Brückenschaltungen"

4.6.1 Einfache Brückenschaltung

In Abbildung 4.8 sei $U_S = 6 \text{ V}$, $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$.

Wie groß ist R_1 , wenn $U_M = 1 \text{ V}$ gemessen wird?

4.6.2 Anwendung DMS-Messbrücke

Auf Ober- und Unterseite eines Rotorblattes einer Windenergieanlage wird je ein Metall-DMS mit Nennwiderstand 200Ω aufgebracht. Die DMS werden mit zwei Präzisionswiderständen von $1 \text{ k}\Omega$ so zu einer Halbbrücke verschaltet, dass jeweils ein DMS in Reihe mit einem $1 \text{ k}\Omega$ -Widerstand liegt. Die Brücke wird mit $U_S = 10 \text{ V}$ gespeist.

- Skizzieren Sie die Anordnung und den Schaltplan der Brückenschaltung.
- Welche Brückenspannung messen Sie, wenn die Dehnung der DMS bei vertikaler Belastung des Rotorblatts $\varepsilon = 0.2\%$ (bzw. Stauchung: $\varepsilon = -0.2\%$) beträgt?

(Hinweis: Bei Metall-DMS kann die relative Widerstandsänderung gleich dem Doppelten der Dehnung angenommen werden, also $\frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot \varepsilon$.)

4.6.3 Vollbrücke

Herleitung der Beziehung zwischen U_M und ΔR_ε für die Vollbrücke.

5 Digitale Signalverarbeitung

5.1 Messsignalkonditionierung

Die Messkette der digitalen Signalerfassung hat folgende Struktur:

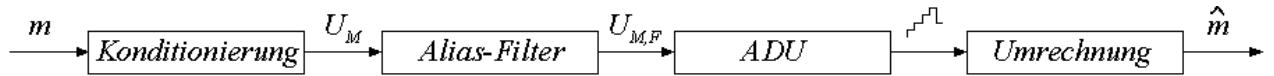


Abbildung 5.1: Messkette der digitalen Signalerfassung

Aufgaben der **Signalkonditionierung**:

- Wandlung in elektrisches Signal (z.B. Brückenschaltung)
- Kennlinienkorrektur, Linearisierung (ggf. auch galvanische Trennung)
- Messbereichsanpassung, bestmögliche Abbildung der Messgröße auf den Eingangsspannungsbereich ("Range") des Analog-Digital-Umsetzers (ADU). Beispiel: Verstärkungsanpassung mittels R_3 in der OP-Schaltung zur DMS-Signalaufbereitung → Abbildung 4.4)

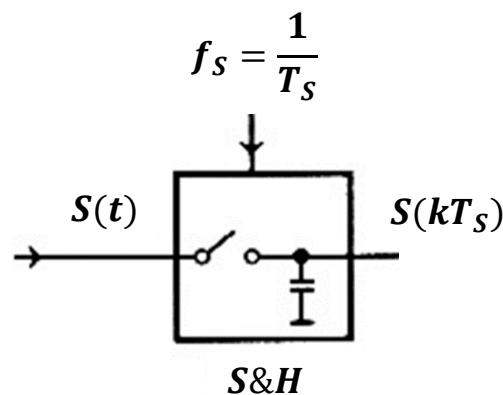
Aufgabe des **Aliasfilters**:

Ein Aliasfilter ist ein steilflankiger Tiefpass mit einer Grenzfrequenz (knapp) unterhalb der halben Abtastrate des ADU. Durch diese **Begrenzung der Bandbreite des Messsignals** werden Aliaseffekte verhindert (siehe Kap. 5.3)

5.2 ADU, Amplitudenquantisierung

Digitale Messwerterfassung besteht aus Abtastung (S & H, Sample & Hold) und Umsetzung der Messspannungen in digitale Zahlenwerte mit Hilfe eines Analog-Digital-Umsetzers (ADU, siehe Abbildung 5.2¹).

Abtastung (Sample&Hold)



¹ S. Hentschke: *Grundzüge der Digitaltechnik*, Teubner Verlag, Stuttgart, 1988

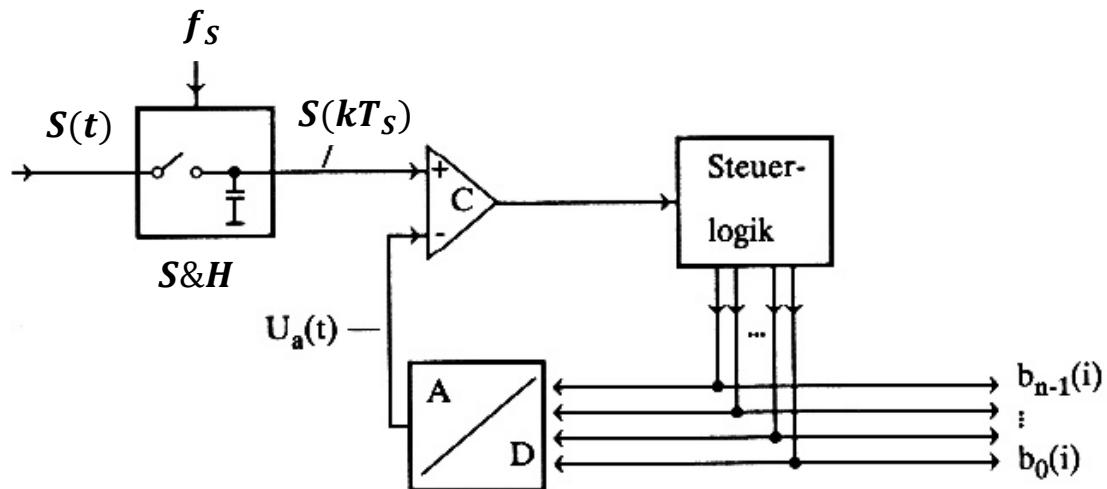


Abbildung 5.2: Sample&Hold und "Sukzessive Approximation"-ADU

Digitalisierung

Da die Wortlänge M der digitalen Zahlendarstellung immer begrenzt ist, kann nicht jeder Wert der Eingangsspannung exakt dargestellt werden.

Die Abbildung des kontinuierlichen Eingangs auf die begrenzte digitale Wertemenge des Ausgangs wird als **Amplitudenquantisierung** bezeichnet.

Die entstehende Abweichung bezeichnet man als **Quantisierungsfehler**.

Kenngrößen:

- Eingangsspannungsbereich („Range“) U_{max} bzw. $\pm U_{max}$;
typisch: unipolar 0-5V, 0-10V, bipolar $\pm 5V$, $\pm 10V$
- Wortlänge M
typisch: 8, 10, 12, 14, 16 Bit (bei anspruchsvollen Messaufgaben auch höher)
- Wertebereich $0 \dots 2^M - 1$
typisch: 0 – 255, 0 – 1023, 0 – 4095, 0 – 16383, 0 – 65535
- Quantisierungsfehler ε

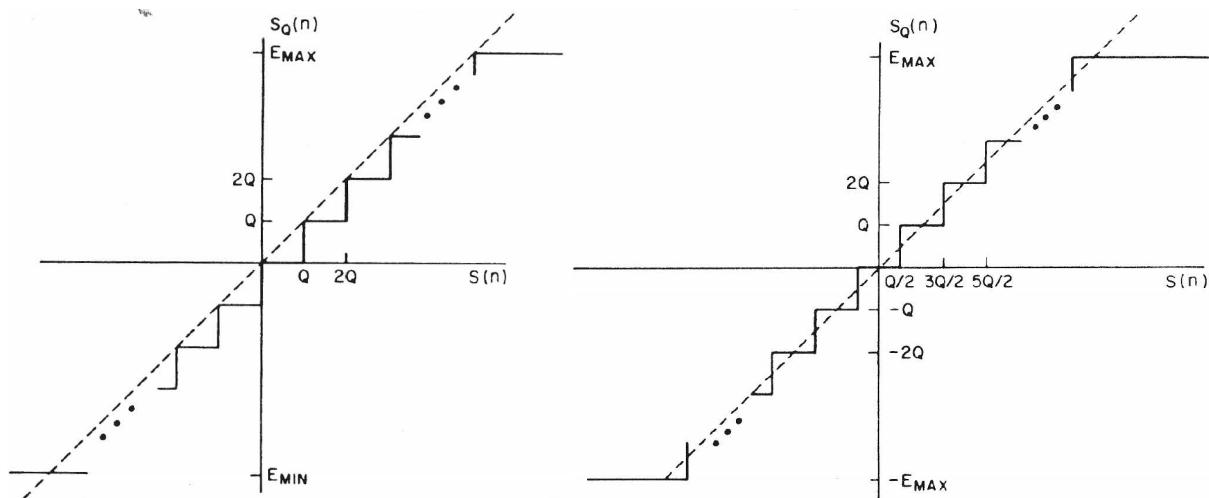


Abbildung 5.3: Quantisierungsstufen und Quantisierungsabweichung ohne und mit Rundung

Abschätzung des Quantisierungsrauschen

- Höhe der Quantisierungsstufen

$$\Delta q = \frac{U_{max} - U_{min}}{2^M - 1}$$

z. B. ($U_{max} = 5 V$ unipolar, $M = 10$ Bit): $\Delta q = \frac{5 V}{1023} \approx 5 mV$

- Quantisierungsfehler (Rauschamplitude)

$$\varepsilon \leq \Delta q \quad \text{oder} \quad \varepsilon \leq \frac{1}{2} \Delta q \quad (\text{abhängig vom ADU-Typ})$$

Digital-Analog-Umsetzer

Auch das Ausgangssignal eines Digital-Analog-Umsetzers weist einen stufenförmigen Verlauf auf. Dies hat aber nichts mit Quantisierung zu tun.

5.3 Signalspektrum, Bandbreite, Aliaseffekt, Aliasfilterung

5.3.1 Fourierreihen, Fourieranalyse

Die Zusammensetzung eines Signals aus Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz, Amplitude und Phasenlage ist ein grundlegendes Konzept der Signalverarbeitung und wird mathematisch durch Fourier-Reihen bzw. durch die Fourier-Transformation beschrieben.

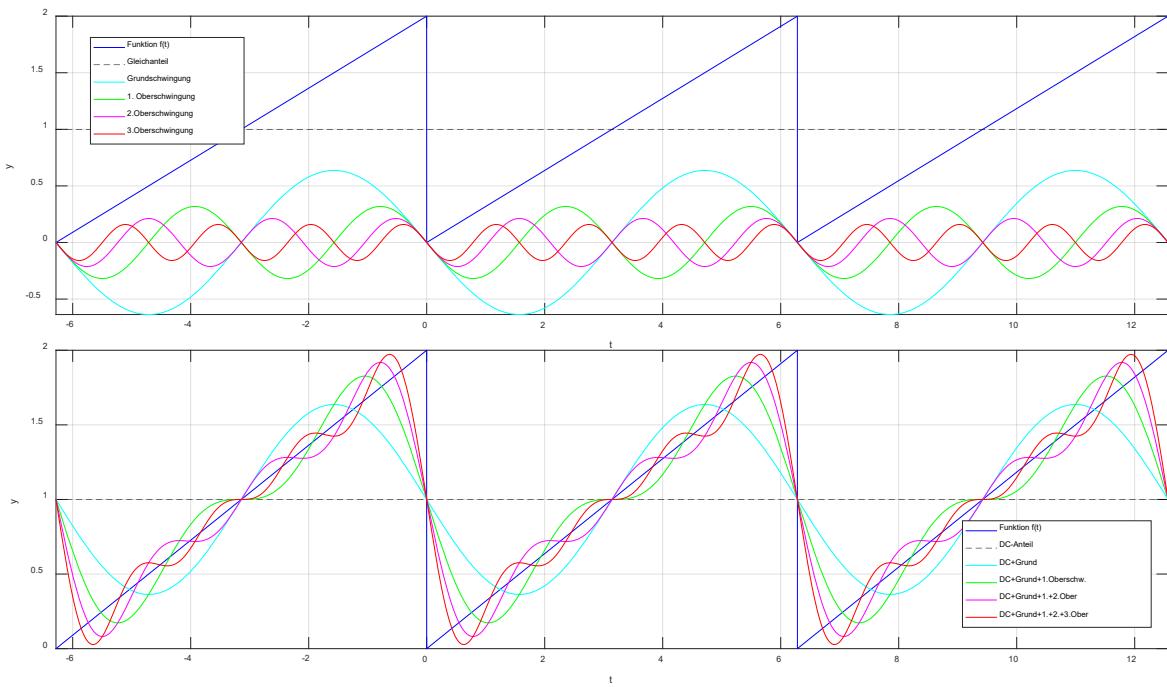


Abbildung 5.4: Fourierzerlegung und Fourierapproximation eines "Sägezahn"-Signals

Abbildung 5.4 visualisiert als Beispiel die Zusammensetzung eines sogenannten "Sägezahn"-Signals aus "Harmonischen" (Sinusschwingungen).

Man unterscheidet

- **"Grundschwingung"** – Sie hat die gleiche Periodendauer wie das Signal und damit auch die gleiche Frequenz.
- **"Oberschwingungen"** – Dies sind die weiteren Sinusfunktionen der Fourierreihe mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz.

Die Amplituden und Phasenlagen der Harmonischen sowie die Größe eines eventuellen Gleichanteils ergeben sich aus den Koeffizienten der **Fourier-Reihe**.

Die Fourierreihe kann auch in der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right)$$

geschrieben werden. Der Zeitverlauf ist damit vollständig anhand der Amplituden A_n und Phasenwinkel φ_n der Harmonischen beschrieben.

Daraus ergibt sich die Darstellung eines Signals durch sein **Spektrum**.

Dazu wird in einer Grafik zu jeder auftretenden Frequenz $f_n = n \cdot f_1$ die Amplitude A_n und der Phasenwinkel φ_n zuordnet. Besonders aussagekräftig ist dabei das **Amplitudenspektrum**, die Darstellung der Amplituden über der Frequenz.

Beispiel:

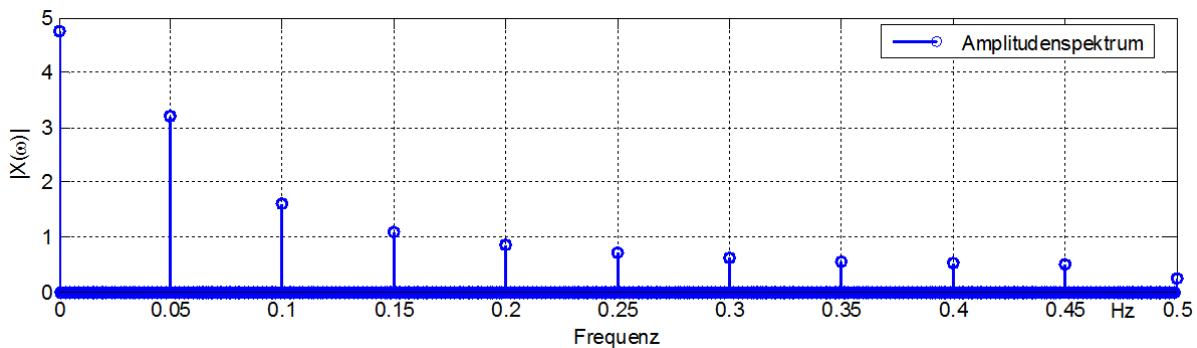


Abb. 5.5: Amplitudenspektrum einer Sägezahnschwingung

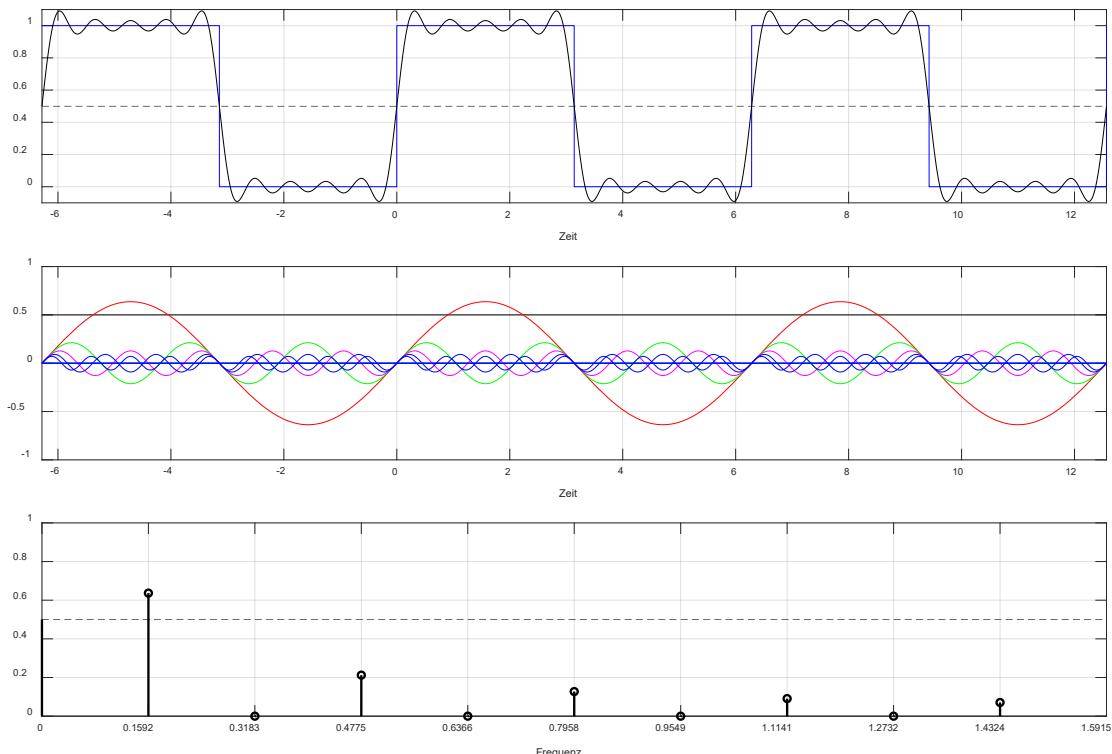


Abb. 5.6: Fourierapproximation, Harmonische und Spektrum eines Rechtecksignals

Die **Fourier-Analyse** oder **Spektralanalyse** ist die Anwendung dieses Konzepts auf beliebige, nicht periodische Signale mit Hilfe der **Fouriertransformation**.

Zur Berechnung des Spektrums wird in der messtechnischen Praxis die Diskrete Fouriertransformation (DFT) auf das digitalisierte Signal angewendet. Die **FFT** (Fast Fourier Transform) ist ein schneller Algorithmus für die Ausführung dieser Rechnung.

Eine Zusammenfassung des mathematischen Hintergrunds (Fourierreihen, Fouriertransformation, FFT) ist in den Kapiteln 5.7 und 5.8.

Die **Bandbreite** eines Signals bezeichnet die höchste in diesem Signal zu berücksichtigende Frequenz¹. Sie ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Bandbreite im Datenblatt eines Gerätes, wo damit die Grenzfrequenz bezeichnet wird.

Signale wie etwa die obige Sägezahnschwingung, deren Fourierreihe unendlich viele Frequenzen aufweist, heißen **nicht bandbegrenzt**.

Eine Möglichkeit, auch für solche Signale eine Bandbreite anzugeben, besteht darin, nur die Frequenzen zu berücksichtigen, deren Amplituden größer sind als die Quantisierungsstufenhöhe des verwendeten Analog-Digital-Umsetzers.

Die Kenntnis der Bandbreite eines Signals ist entscheidend für die korrekte Auslegung der digitalen Signalerfassung (siehe Kap. 5.3.3).

Beispiel/Übung:

Eine Rechteckschwingung mit der Frequenz $f = 10 \text{ Hz}$ und der Amplitude $A = 1 \text{ V}$ wird mit einem 8 Bit-Analog-Digital-Umsetzer (Eingangsspannung: $0 - 5\text{V}$) digitalisiert. Welches ist die höchste in dem Signal enthaltene Frequenz, die sinnvoll zu berücksichtigen wäre?

Für die Amplituden der Oberschwingungen eines Rechtecksignals gilt $A_n = \frac{4A}{n\pi}$.

¹ Diese Definition ist für die hier betrachteten automatisierungstechnischen Anwendungen i. d. R. zutreffend. In der Informationstechnik gilt sie nur für Basisbandsignale.

5.3.2 Diskretisierung, Aliasschwingungen

Ein kontinuierliches Signal

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(2\pi f_x t) = \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_x} t\right)$$

wird durch die Abtastung mit der Abtastzeit T_S zu einer "zeitdiskreten" Wertefolge (siehe Kap. 5.2). Diese lautet hier

$$x_k = x(kT_S) = \hat{x} \cdot \cos(2\pi f_x kT_S) = \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_x} kT_S\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

Zu dem Signal $\bar{x}(t) = \cos(2\pi \bar{f}_x t)$ mit der Frequenz $\bar{f}_x = f_s - f_x$ gehört entsprechend die Wertefolge

$$\bar{x}_k = \cos(2\pi \bar{f}_x kT_S)$$

Aber

$$\begin{aligned} \cos(2\pi \bar{f}_x kT_S) &= \cos(2\pi(f_s - f_x)kT_S) \\ &= \cos(2\pi \cdot k - 2\pi f_x kT_S) \\ &= \cos(2\pi f_x kT_S) \\ &= x_k ! \end{aligned}$$

Es gibt also zwei verschiedene Zeitsignale mit der gleichen digitalen Wertefolge!

$x(t)$ und $\bar{x}(t)$ sind nach der Digitalisierung mit der Abtastrate f_s nicht unterscheidbar. Man nennt $\bar{x}(t)$ deshalb **Aliasschwingung** zu $x(t)$ und \bar{f}_x **Aliasfrequenz**.

Mit gleicher Rechnung weist man nach, dass alle Frequenzen

$$\bar{f}_{x,n} = n f_s \pm f_x$$

ebenfalls Aliasfrequenzen zu f_x sind.

Zu jeder Sinusschwingung gibt es unendlich viele Aliasschwingungen, die bei der Digitalisierung die gleiche Wertefolge haben.

5.3.3 Abtasttheorem (Nyquist- / Shannon-Theorem)

Unkritisch sind die Aliasschwingungen bei Signalfrequenzen

$$f_x < \frac{f_s}{2},$$

denn dann sind alle Aliasfrequenzen größer als $\frac{f_s}{2}$ und das Signal $x(t)$ kann durch D/A-Umsetzung und Tiefpassfilterung mit Grenzfrequenz $f_g \lesssim \frac{f_s}{2}$ rekonstruiert werden.

Abtasttheorem (Nyquist- / Shannon-Theorem)

Ein Signal ist aus seinen Abtastwerten genau dann eindeutig rekonstruierbar, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß ist wie die Bandbreite des Signals.

Anschaulich:

Aus dem Verhältnis von Periodendauer und Abtastzeit ergibt sich die Zahl der Abtastzeitpunkte pro Periode

$$N_P = \frac{T_x}{T_S} = \frac{f_S}{f_x}.$$

Das Abtasttheorem besagt also, dass theoretisch **nur 2 Abtastwerte pro Periode** genügen, um ein abgetastetes Analogsignal rekonstruieren zu können.

Beispiel:

Die Audiosignale auf CDs sind mit der Abtastrate $f_S = 44,1 \text{ kHz}$ digitalisiert. Diese Rate liegt nur knapp über dem doppelten der vom Menschen hörbaren Frequenzen.

Meistens wird in der Praxis allerdings die Abtastfrequenz eher um den Faktor 5 bis 10 höher als die Bandbreite f_B gewählt.

5.3.4 Aliaseffekt

Wird bei der Rekonstruktion (Digital-Analog-Umsetzung) nicht das Original sondern eine seiner Aliasschwingungen erzeugt, nennt man dies **Aliasfehler** oder **Aliaseffekt**.

In der Regel wird unter allen Aliasschwingungen diejenige mit der niedrigsten Frequenz als das Original angesehen.

Der Aliaseffekt tritt dann auf, sobald das Abtasttheorem verletzt wird, also bei Signalfrequenzen $f_x > \frac{f_S}{2}$.

Es gibt dann eine Aliasschwingung mit $\bar{f}_x < \frac{f_S}{2}$, denn $\bar{f}_x = f_s - f_x$. Im Spektrum erhält man diese Frequenz durch Spiegelung an der Achse bei $\frac{f_S}{2}$

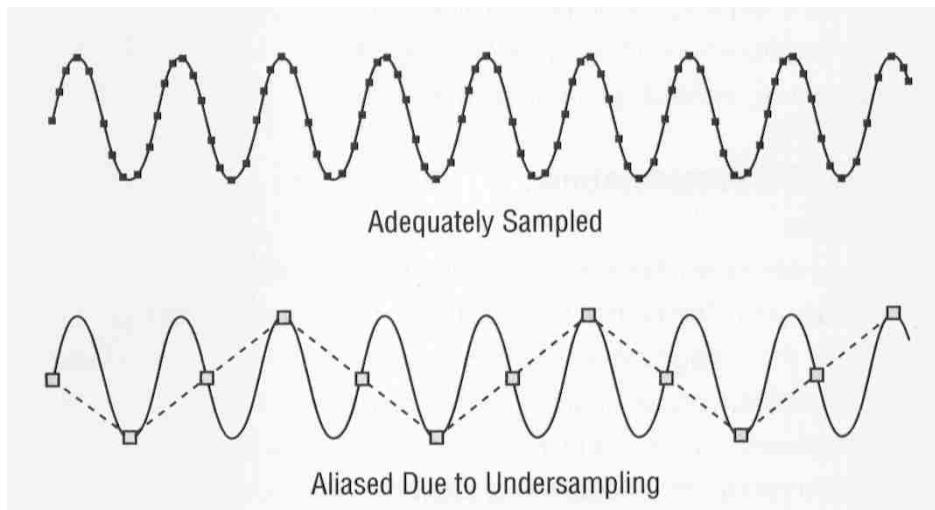


Abbildung 5.7: „Undersampling“

Diese Wiedergabe eines vom Original völlig verschiedenen Signals kann in der Signalverarbeitung zu erheblichen Fehlfunktionen führen und muss deshalb grundsätzlich vermieden werden.

Zu diesem Zweck werden **Aliasfilter** eingesetzt. Dies sind steilflankige Tiefpassfilter, die – vor der Abtastung! – eine Begrenzung der Bandbreite des Signals auf $f_B < \frac{f_s}{2}$ bewirken.

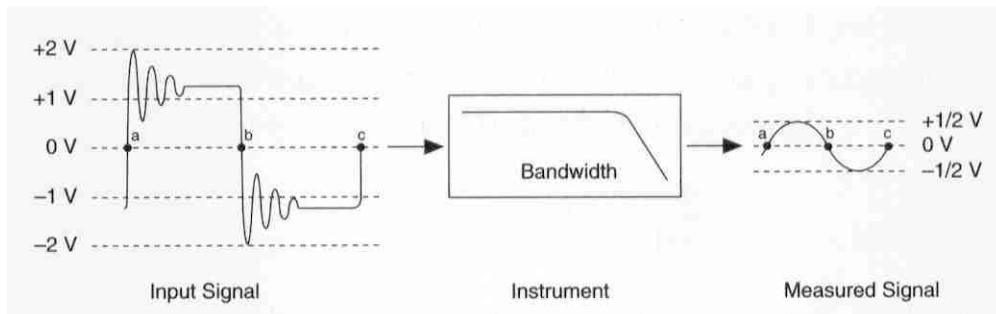


Abbildung 5.8: Bandbegrenzung des Messsignals vor der Analog-Digital-Umsetzung als Maßnahme gegen Aliasfehler

5.4 Übungen "Digitalisierung, AD-, DA-Umsetzung"

5.4.1 Abtastfrequenz, ADU-Wortlänge

Ein Signal $u(t) = 3,5V \cdot \cos(628 \frac{rad}{s} t)$ soll mit einem typischen, handelsüblichen AD-Umsetzer digitalisiert werden. Die relative Abweichung zwischen den digitalen und den zugehörigen analogen Werten bei voller Signalamplitude soll maximal 0,1% betragen.

- Spezifizieren Sie Eingangsspannungsbereich und Wortlänge des AD-Wandlers.
- Welche Abtastfrequenz wählen Sie? Nennen Sie zwei Möglichkeiten und begründen Sie sie.

5.4.2 Quantisierung

- Mit welcher Amplitude des Quantisierungsrauschens ist bei einem 12-Bit-ADU mit Eingangsspannungsbereich $\pm 10V$ und rundendem Quantisierungsverhalten zu rechnen?
- Wenn das Nutzsignal nur einen Bereich von 1,2V bis 3,5V umfasst: Welches Signal-Rauschverhältnis (Verhältnis der (maximalen) Signalamplitude zur Amplitude des Quantisierungsrauschens) ergibt sich?
- Geben Sie diesen Wert als Signal-Rausch-Abstand in dB an!
- Welches Signal-Rauschverhältnis ergibt sich, wenn Sie den gleichen ADU mit einem Eingangsspannungsbereich von 0V ... 5V einsetzen (wenn Sie also bei der Signalkonditionierung auf eine möglichst gute Ausnutzung des Messbereichs achten)?

5.4.3 Abtastung von Signalen

- Prof. Taugenichts misst eine Sinusschwingung $u(t) = 3V \cdot \cos(1000 \frac{rad}{s} t)$ digital. Er behauptet, dass das mit einer Abtastfrequenz von 500 Hz möglich ist. Hat er Recht?
- Er setzt nun einen Gleichrichter ein, so dass am A/D-Umsetzer die Spannung $\tilde{u}(t) = |3V \cdot \cos(1000 \frac{rad}{s} t)|$ anliegt. Was würden Sie ihm nun empfehlen?
- Berechnen/recherchieren Sie die Amplituden der Fourierreihe von $\tilde{u}(t)$, skizzieren Sie das Amplitudenspektrum und markieren Sie darin auf der Frequenzachse die Lage der Abtastrate und der halben Abtastrate. Tragen Sie dann die Spektrallinie mindestens einer Aliasschwingung ein.
- Gegeben sei das Signal $u_1(t) = \cos(2\pi \cdot 300 \text{ Hz} \cdot t)$. Es wird mit $f_S = 500 \text{ Hz}$ abgetastet. Geben Sie zwei andere Signale $u_2(t)$ und $u_3(t)$ an, die die gleiche Abtastwertefolge liefern.

5.4.4 Abtastung und Rekonstruktion von Signalen

Das Signal $u(t) = \hat{U}_1 \cos(2\pi \cdot 100\text{Hz} \cdot t) + \hat{U}_2 \cos(2\pi \cdot 250\text{Hz} \cdot t)$ wird durch einen AD-Umsetzer mit Sample&Hold digitalisiert und der digitalisierte Wert wird unmittelbar auf einen DA-Umsetzer (DAU) gegeben, beides mit der Abtastfrequenz $f_s = 400 \text{ Hz}$.

Das analoge Ausgangssignal des DAU wird mit einem Tiefpass mit der Grenzfrequenz 190 Hz gefiltert (ideale Filtercharakteristik).

- a) Welches Signal $\tilde{u}(t)$ wird am Tiefpass-Ausgang gemessen?
(Formel! $\tilde{u}(t) = \dots$)
- b) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum von $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$! Markieren Sie darin auch f_s und $\frac{f_s}{2}$.

5.5 Digitale Signalverarbeitung – häufig berechnete Kenngrößen

Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
Betragsmittelwert (Gleichrichtmittelwert)	$ \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i $
RMS (root mean square, Effektivwert)	$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$
Statistische Standardabweichung	$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$
Spitzenwert	$x_{max} = \max_i \{ x_i \}$
Scheitelfaktor Crest-Faktor (Schwingungsdiagnostik)	$c = \frac{x_{max}}{x_{RMS}}$
Variationskoeffizient (relative Streuung):	$V = \frac{s_x}{\bar{x}}$

Histogramm (Wahrscheinlichkeitsfunktion der Signalamplituden):

- 1) Bilde Klassen, die den Bereich aller auftretenden Amplituden des Signals abdecken (meist äquidistante Klassengrenzen).
- 2) Bestimme die Anzahl der Amplituden (Messwerte) n_i , die zu den einzelnen Klassen gehören.
- 3) Trage n_i bzw. $\frac{n_i}{N}$ als Balken über der Klassenachse auf.

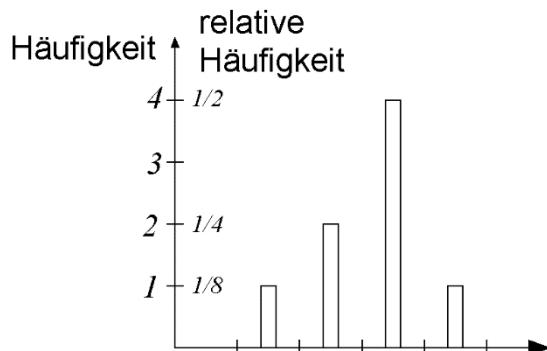


Abbildung 5.9: Histogramm

MATLAB: `hist(x)`

FFT-Spektrum

Die wichtigste Methode der digitalen Signalverarbeitung, siehe Kapitel 5.7 und 5.8.

5.6 Übungen "Digitale Signalverarbeitung, Kenngrößen, Spektren"

5.6.1 Crest-Faktor

Bestimmen Sie den Crest-Faktor eines Rechtecksignals mit dem Puls-Pausen-Verhältnis 1:1 (Tastgrad bzw. Duty cycle 50%)

(Hinweis: für ein kontinuierliches Signal ist $x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$).

5.6.2 Analyse einer Wertefolge

Gegeben sei die Folge von Abtastwerten zu den Zeitpunkten $t_k = k \cdot T_S$, $k = 0, 1, \dots$

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_k	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Bestimmen Sie:

- a) Mittelwert
- b) RMS-Wert
- c) Crest-Faktor
- d) Statistische Standardabweichung (z. B. in MATLAB: `help std`)
- e) **Median:** Sei \tilde{x}_k die Wertereihe, die durch Sortierung der N Folgenelemente x_k nach der Größe entsteht. Dann gilt $x_M = \tilde{x}_{\frac{N+1}{2}}$, falls N ungerade bzw.
 $x_M = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{\frac{N}{2}} + \tilde{x}_{\frac{N}{2}+1})$, falls N gerade.

Der Median ist in der sortierten Folge der in der Mitte stehende Wert, d. h. 50% der Folgenwerte sind größer, 50% sind kleiner (z. B. in Matlab: `help median`).

- f) Absolute und relative Häufigkeitsverteilung (mit graphischer Darstellung) für die Amplitudenklassen

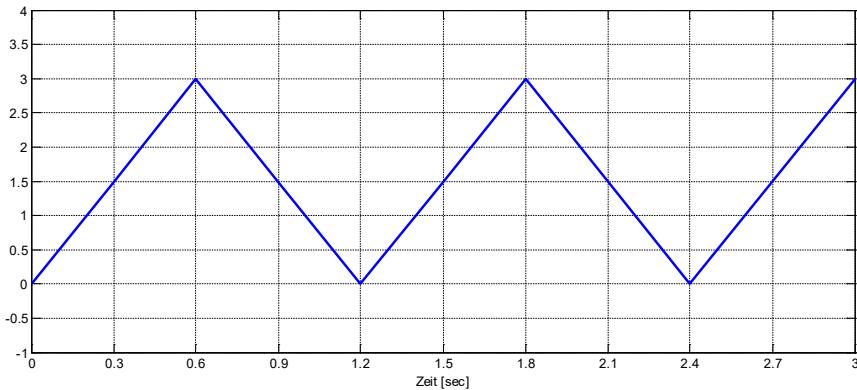
$$\left\{ \left[-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6} \right], \left[-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2} \right], \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} \right], \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right], \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right], \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right], \left[\frac{5}{6}, \frac{7}{6} \right] \right\}$$

(z. B. in Matlab: `help hist` bzw. `doc hist`)

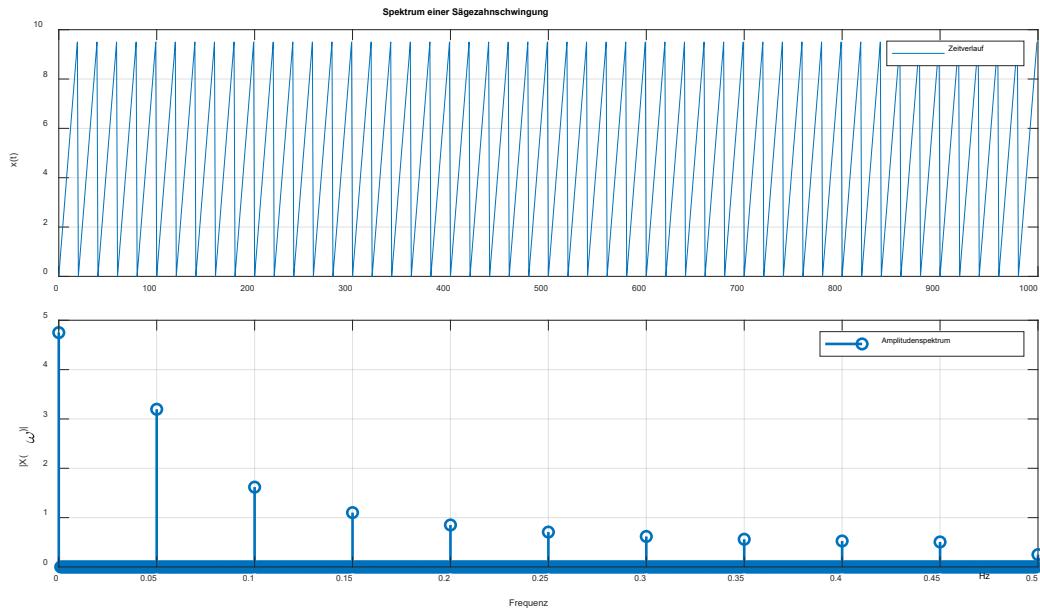
- g) Skizzieren Sie den Verlauf. Geben Sie als Formel an, zu welcher Sinus-/Kosinusfunktion diese Folge gehören könnte ($x(t) = \dots$).
- h) Skizzieren Sie das zu dieser Funktion gehörige Amplitudenspektrum.

5.6.3 Spektrum

Berechnen/Recherchieren Sie die Fourier-Zerlegung der skizzierten Dreiecksschwingung und skizzieren Sie das Amplitudenspektrum.



Zum Vergleich: Das auf AULIS bereitgestellte Skript `saegezahn_FFT.m` liefert folgendes Ergebnis:



5.6.4 Spektrum 2

Ergänzen Sie das obige Sägezahnspektrum so, dass es dem entspricht, das bei Abtastung des Signals mit der Frequenz $f_s = 0,56 \text{ Hz}$ entstehen würde.

5.7 Fourierreihen periodischer Funktionen

5.7.1 Definition

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, für die gilt

- f ist periodisch mit Periode T ,
- f ist beschränkt und stückweise stetig,
- an einer Unstetigkeitsstelle t_0 von f ist $f(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0^-) + f(t_0^+))$,

ist darstellbar als **Trigonometrische Reihe** (**Fourierreihe**, Fourierzerlegung) in der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right)$$

Die Summe setzt sich zusammen aus

- 1.) **Konstanter Anteil**: $\frac{a_0}{2}$ ("Offset" oder "Bias" in der Signalanalyse)
- 2.) **Grundschwingung** ($n = 1$): $a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t$ (auch: **1. Harmonische**)

Sie hat die Kreisfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, also die Frequenz der Funktion f selbst.

- 3.) **Oberschwingungen** ($n \geq 2$): $a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$ (auch: **n-te Harmonische**)

mit den Oberschwingungsfrequenzen $\omega_n = n \cdot \omega_1 = n \cdot \frac{2\pi}{T}$.

(Die 1. Oberschwingung ist $\omega_2 = 2\omega_1$ = die 2. Harmonische nach mehrheitlichem Sprachgebrauch)

5.7.2 Bestimmung der Koeffizienten

Die Koeffizienten der Fourierreihe, a_n und b_n , heißen **Fourierkoeffizienten**. Ihre Beträge sind die Amplituden der beteiligten Sinus- und Kosinusschwingungen.

Mit Hilfe der Additionstheoreme und der Tatsache, dass das Integral über Sinus- und Kosinusfunktionen Null wird, wenn über eine ganze Zahl von Perioden integriert wird, erhält man

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wenn es günstiger ist, dürfen die Integrationsgrenzen verschoben werden, solange über genau eine Periode integriert wird (z. B. $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$).

Außerdem lassen sich Symmetrien ausnutzen, wenn die Funktion gerade oder (nach Abzug des Gleichanteils) ungerade ist.

Aus der Integralrechnung ist bekannt:

$$f(x) \text{ gerade} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$f(x) \text{ ungerade} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Aus der zweiten Aussage folgt:

$$f(x) \text{ gerade} \Rightarrow b_n = 0$$

$$\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) \text{ ungerade} \Rightarrow a_n = 0$$

Beispiel Rechteckschwingung:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = \pm\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ periodisch mit Periode } T = 2\pi$$

(Amplitude $A = \frac{1}{2}$, Offset = $\frac{1}{2}$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1 \quad (\text{Gleichanteil } \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k \\ \frac{2}{n\pi} (-1)^{k+1} & \text{für } n = 2k-1 \end{cases} = \frac{2}{\pi} \left(1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots \right)$$

$b_n = 0$, da $\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)$ ungerade.

Also:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x \mp \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos((2n-1)x)$$

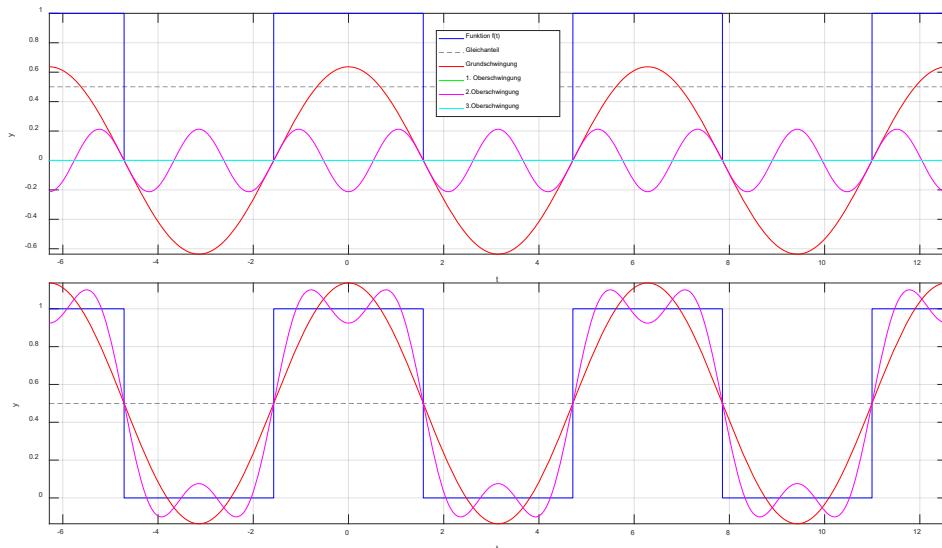


Abbildung 5.10: Fourierzerlegung und Fourierapproximation einer Rechteckschwingung

5.7.3 Darstellung nach Betrag und Phase

Die Oberschwingungen $a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$ lassen sich als Kosinusschwingungen darstellen. Es gilt:

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

mit Amplituden

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

und Phasenverschiebungen

$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

Übung: Herleiten!

Die Fourierreihe kann dann auch so geschrieben werden, dass die Koeffizienten gleich den Amplituden der Oberschwingungen sind:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n \right)$$

5.7.4 Amplitudenspektrum

Aufgrund dieser Form der Fourierreihe kann man ein Signal auch durch sein **Amplitudenspektrum** charakterisieren, das heißt durch eine Grafik, die jeder auftretenden Frequenz die zugehörige Amplitude zuordnet.

Beispiele:

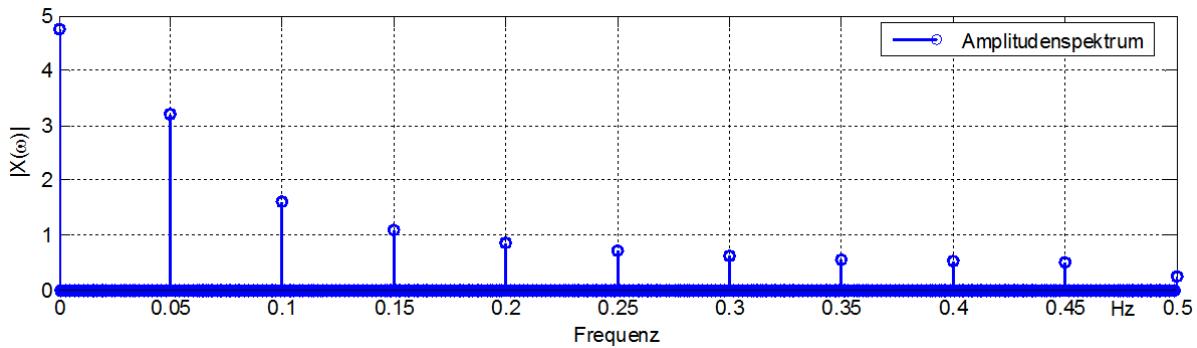


Abbildung 5.11: Amplitudenspektrum einer Sägezahnschwingung

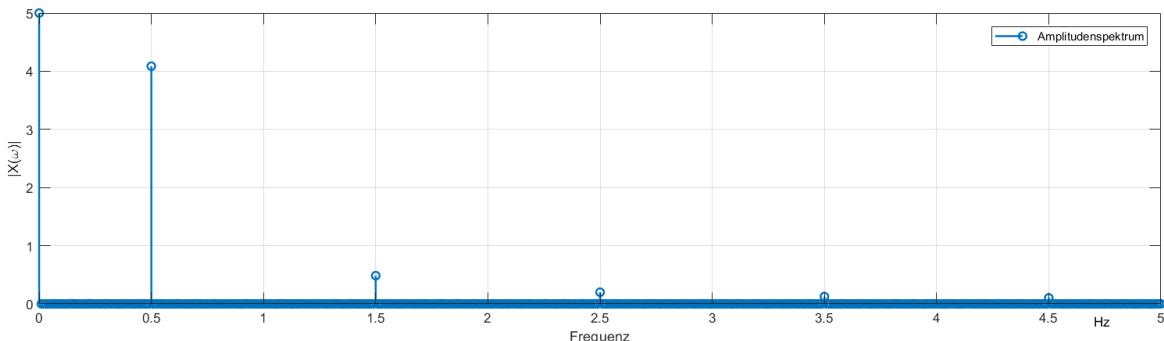


Abbildung 5.12: Amplitudenspektrum einer Dreieckschwingung

5.7.5 Komplexe Darstellung der Fourierreihe

Aufgrund der e-Funktion mit imaginärem Exponenten

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

lassen sich Sinus- und Kosinusfunktionen durch die Exponentialfunktion darstellen:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

Durch Einsetzen von

$$\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2}\left(e^{in\frac{2\pi}{T}t} + e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\frac{2\pi}{T}t} - e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\right)$$

in die Trigonometrische Reihe erhält man nach einigen Umformungen die

Komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

mit

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_n := \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Die komplexe Fourierreihe benötigt nur noch ein Integral zur Bestimmung sämtlicher Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Koeffizienten mit negativen Indizes erhält man aus $c_{-n} = c_n^*$ (konjugiert komplex).

Die Koeffizienten c_n liefern gleichzeitig die Darstellung der Trigonometrischen Reihe mit Amplituden und Phasenwinkeln, denn

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| \quad \text{und} \quad \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = \arg c_n.$$

Beispiel: $f(t)$ exponentiell abklingend

$f(t) = e^{-2t}$ für $0 < t < 1$, periodisch mit Periode $T = 1$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_0^1 e^{-2t} e^{-in2\pi t} dt = \\ &= \int_0^1 e^{-(2+i2\pi n)t} dt = \left[-\frac{1}{(2+i2\pi n)} e^{-(2+i2\pi n)t} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{(2+i2\pi n)} (e^{-(2+i2\pi n)} - 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2}}{1+in\pi} \end{aligned}$$

Also

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2}}{1 + n^2\pi^2} \cdot (1 - in\pi)$$

und

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}\{c_n\} = \frac{1 - e^{-2}}{1 + n^2\pi^2}, \quad b_n = -2\operatorname{Im}\{c_n\} = \frac{(1 - e^{-2})n\pi}{1 + n^2\pi^2}$$

Für das Amplitudenspektrum erhält man die Frequenzen $f_n = n \cdot \frac{1}{T} = 0, 1, 2, 3, \dots$ mit den zugehörigen Amplituden

$$A_n = 2|c_n| = \frac{1 - e^{-2}}{1 + n^2\pi^2} \cdot \sqrt{1 + n^2\pi^2} = \frac{1 - e^{-2}}{\sqrt{1 + n^2\pi^2}}$$

Anmerkung:

Die Berechnung der reellen Fourierreihe mit $a_n = 2 \int_0^1 e^{-2t} \cos(n2\pi t) dt$, $b_n = \dots$ etc. ist viel aufwändiger!

5.7.6 Zusammenfassung

- Periodische Funktionen sind darstellbar als Summe eines Gleichanteils und harmonischer Schwingungen mit Kreisfrequenzen $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Die Koeffizienten dieser Fourierreihe erhält man mit Hilfe von Integralen, bei denen über eine Periode integriert wird.
- Noch einmal betont: Andere Frequenzen als die Grundfrequenz und ihre ganzzahligen Vielfachen kommen dabei nicht vor.
- Die zur Harmonischen mit der Frequenz ω_n gehörige Amplitude erhält man aus den Koeffizienten gemäß $A_n = 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Die grafische Darstellung der Amplituden als Linie über den zugehörigen Frequenzen heißt **Amplitudenspektrum**.
- Die Phasenlage der Harmonischen ist $\varphi_n = \arg(c_n)$. Sie hat für die Praxis aber geringere Bedeutung als das Amplitudenspektrum.

Beide Kenngrößen, Amplitude und Phasenlage, der Harmonischen erhält man mit Hilfe der komplexen Form der Fourierreihe aus einem einzigen Integral.

Damit arbeitet man weiter, wenn es um die **Fourieranalyse nicht-periodischer Funktionen** geht.

5.8 Fouriertransformation

5.8.1 Fouriertransformierte analoger Signale

Zur Übertragung des Konzepts der Fourierreihe auf beliebige, nicht-periodische Signale betrachtet man den Grenzübergang zu beliebig großen Periodendauern $T \rightarrow \infty$. Je größer die Periodendauer desto kleiner die Grundfrequenz und damit auch der Abstand der Frequenzen des Spektrums. Im Grenzübergang geht deshalb das Linienspektrum in einen kontinuierlichen Verlauf über.

Herleitung

Setze c_n in die Fourierreihe ein und verwende $\frac{2\pi}{T} = \omega_1$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau \right) e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\omega_1\tau} d\tau \right) e^{in\omega_1 t}$$

Die Summe hat die Form der numerischen Integration nach Rechteckregel, $\sum_n h \cdot g(nh)$, mit $h = \omega_1$. Der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ bedeutet gleichzeitig $\omega_1 \rightarrow 0$, so dass die Summe zum Integral wird:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\substack{\omega_1 \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\omega_1\tau} d\tau \right) e^{in\omega_1 t} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Definition:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

heißt Fourier-Transformierte von $f(t)$.

Das Integral existiert für alle Funktionen, für die das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ existiert, also z. B. für alle Funktionen, die beschränkt und nur auf einem endlichen Zeitintervall von Null verschieden sind.

$f(t)$ ergibt sich nach obiger Herleitung durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(Rücktransformation bzw. Inverse Fouriertransformation)

Für diese wechselseitige Zuordnung schreibt man auch

$$f(t) \circ \bullet F(\omega).$$

Zur Fouriertransformation gibt es diverse mathematische Resultate mit großer Bedeutung für die Signal- und Bildverarbeitung. Zum Beispiel:

Verschiebungssätze (Der erste erklärt "leakage", den "Leckeffekt"!)

$$\begin{aligned} f(t)e^{i\omega_0 t} &\xrightarrow{\quad} F(\omega - \omega_0) \\ f(t - t_0) &\xrightarrow{\quad} F(\omega)e^{-i\omega t_0} \end{aligned}$$

Parseval-Theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

hat Bedeutung für die Berechnung der Leistung eines Signals.

Signalübertragung:

Sind $f(t)$ und $g(t)$ Ein- und Ausgangssignal eines Übertragungssystems mit dem Frequenzgang $H(i\omega)$, so gilt für deren Fouriertransformierte

$$G(\omega) = H(i\omega) \cdot F(\omega).$$

Durch Rücktransformation

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

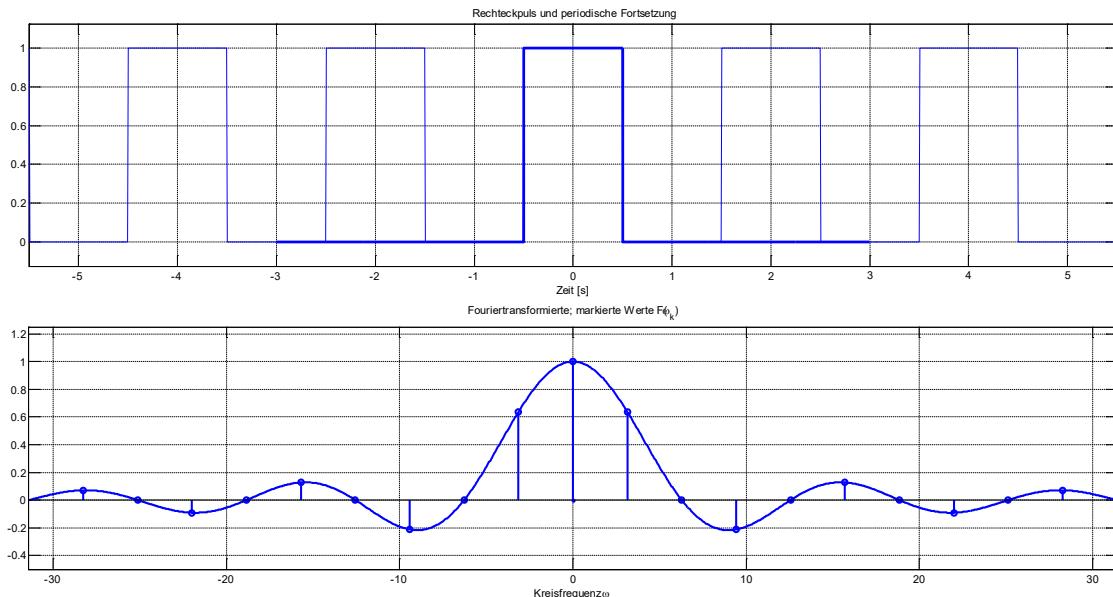
lässt sich damit auch der Zeitverlauf des Ausgangssignals bestimmen.

Dies ist eine wesentliche Grundlage der Nachrichtenübertragung, des Filterdesigns und der Signalanalyse allgemein.

Beispiel: Fouriertransformierte des Rechteckpulses

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = -\frac{1}{i\omega} \left(e^{-i\omega \frac{T}{4}} - e^{i\omega \frac{T}{4}} \right) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin\left(\omega \frac{T}{4}\right) \end{aligned}$$

Visualisierung mit $T = 2$:



Zusätzlich zu $f(t)$ ist oben die periodische Fortsetzung skizziert. Sie ist als Fourierreihe mit den Schwingungsfrequenzen $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$ darstellbar. Diese Frequenzen sind im unteren Diagramm markiert.

Aus $F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\omega \frac{T}{4}\right)$ erhält man

$$F(0) = \frac{T}{2} \quad (\text{Grenzwert z. B. mit Hilfe der Regel von l'Hospital})$$

$$F(\omega_n) = \frac{2}{\omega_n} \sin\left(\omega_n \frac{T}{4}\right) = \frac{T}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Diese Funktionswerte entsprechen bis auf die Gewichtung mit dem Faktor T genau den **Fourierkoeffizienten c_k** der periodischen Fortsetzung des Signals.

Dieser Zusammenhang gilt allgemein:

Ist $f(t)$ eine Funktion, die nur im Intervall $[0, T]$ von Null verschieden ist, so gilt bei den Frequenzen $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned} F(\omega_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt = T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= T \cdot c_n \end{aligned}$$

Dabei ist c_n der n -te Fourierkoeffizient der periodischen Fortsetzung von $f(t)$.

In diesem Sinne stellt die Fouriertransformierte das Spektrum der nicht-periodischen Funktion $f(t)$ dar (genauer: die **Spektraldichte**, weil $F(\omega)$ die Dimension "Amplitude pro Frequenz" hat).

5.8.2 Diskrete Fouriertransformation, Digitale Signalverarbeitung

Bei der digitalen Signalverarbeitung werden kontinuierliche Zeitsignale $f(t)$ über eine begrenzte Zeit (Messzeit T_M) mittels Analog-Digital-Umsetzung erfasst.

Der ADU liefert Werte in konstanten Abtastintervallen T_S bzw. mit konstanter Abtastrate $f_S = \frac{1}{T_S}$.

Das Signal wird digital also durch eine Folge von N Werten dargestellt:

$$x_k = f(kT_S), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Für die Zahl der Werte gilt $N = \frac{T_M}{T_S}$ (Messzeit $T_M = N \cdot T_S$).

Die Fourerkoeffizienten der periodischen Fortsetzung von $f(t)$ mit Periode T_M lauten

$$c_n = \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T_M}t} dt$$

Mit Hilfe der diskreten Werte $x_k = f(kT_S)$ lässt sich das Integral nach Rechteckregel approximieren und man erhält folgende Näherung:

$$c_n \approx S_n = \frac{1}{T_M} \sum_{k=0}^{N-1} T_S x_k e^{-in\frac{2\pi}{T_M}kT_S}$$

was sich wegen $N = \frac{T_M}{T_S}$ vereinfacht zu

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

Die Werte S_n sind Näherungen der Koeffizienten c_n der komplexen Fourierreihe.

Ihre Beträge lassen sich also als Amplituden von Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_n = n \frac{2\pi}{T_M}$ bzw. Frequenzen $f_n = n \frac{f_S}{N}$ interpretieren.

Definition:

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{mit } n = 0, 1, \dots, N - 1$$

heißt **Diskrete Fouriertransformation** (DFT) der Folge x_k .

Umgekehrt erhält man die Folge x_k aus der Folge S_n durch die **Inverse DFT**

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$$

Die Abtastfolge x_k lässt sich also vollständig aus dem Spektrum S_n rekonstruieren.

Eine DFT lässt sich grafisch darstellen, indem die Beträge von S_n als senkrechte Linien über den zugehörigen Frequenzen $f_n = n \frac{f_s}{N}$ im Frequenzbereich $0 \leq f < f_s$ aufgetragen werden, wobei die Linienlänge die Amplitude wiedergibt.

Diese Darstellung nennt man das **Spektrum** eines Signals.

Aufgrund der Eigenschaften der komplexen e-Funktion ist das Amplitudenspektrum $|S_n|$ **spiegelsymmetrisch zur Achse bei der Frequenz $\frac{f_s}{2}$** . Es gilt

$$S_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i \frac{2\pi}{N} (N-n)k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i 2\pi k} e^{i \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{i \frac{2\pi}{N} nk} = S_n^*$$

Also: $|S_{N-n}| = |S_n|$.

Aussagekräftig sind im FFT-Spektrum deshalb nur die Amplituden mit Frequenzen $f_n \leq \frac{f_s}{2}$. Das Spektrum wird dementsprechend immer nur bis zu dieser Frequenz dargestellt.

Weiterhin gilt wegen $F(\omega_n) = T_M c_n$ und $S_n \approx c_n$ auch, dass die DFT eine Näherung für die Fouriertransformierte des (zeitlich begrenzten) kontinuierlichen Signals darstellt.

Die DFT S_n der Abtastfolge x_k eines Signals $x(t)$ mit Abtastzeit T_S im Intervall $[0, T_M]$ stellt – näherungsweise und bis auf den Faktor $\frac{1}{T_M}$ – eine Abtastung der Fouriertransformierten von $x(t)$ im Intervall $\left[0, \frac{f_s}{2}\right]$ im Abstand $f_1 = \frac{f_s}{N}$ dar.

Damit können viele Resultate, die für die kontinuierliche Fouriertransformation gelten, auf die diskrete Fouriertransformation übertragen werden. Das gilt insbesondere für das Übertragungsverhalten von Filterschaltungen und ihre Ein- und Ausgangssignale. So lassen sich z. B. **Digitale Filter** realisieren. Dabei sind auch Filterfunktionen umsetzbar, die durch keine analoge Schaltung erreichbar sind.

Bei der Berechnung der Transformationen muss keine Integration ausgeführt werden, es sind nur Summen von Produkten zu bestimmen. Ein besonders effizienter Algorithmus dafür ist die **FFT (Fast Fourier Transform)**.

5.8.3 FFT – Fast Fourier Transform

Wir setzen voraus, dass N eine Paarzahl ist, und um den Faktor $\frac{1}{N}$ nicht "mitschleppen" zu müssen, berechnen wir

$$\tilde{S}_n = N \cdot S_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

Für eine übersichtlichere Darstellung definieren wir außerdem $W := e^{-i\frac{2\pi}{N}}$, so dass

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Nun wird in gerade ($k = 2m$) und ungerade ($k = 2m + 1$) Indizes unterteilt:

$$\tilde{S}_n = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} W^{2mn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} W^{(2m+1)n} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} W^{2mn} + W^n \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} W^{2mn}$$

Es ist $W^{2mn} = (W^2)^{mn}$. Mit $\tilde{W} := W^2 = e^{-i\frac{2\pi}{2}}$ stellen diese Summen also DFTs von Wertefolgen der Dimension $\frac{N}{2}$ dar:

$$\tilde{S}_{n,g} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} \tilde{W}^{mn}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$\tilde{S}_{n,u} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} \tilde{W}^{mn}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

Dies liefert

$$\tilde{S}_n = \tilde{S}_{n,g} + W^n \cdot \tilde{S}_{n,u}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Für $n \geq \frac{N}{2}$ gilt

$$1.) \quad W^{2m(n+\frac{N}{2})} = W^{2mn} \cdot W^{2m\frac{N}{2}} = W^{2mn} \cdot (W^N)^m = W^{2mn} \cdot 1^m = W^{2mn}$$

$$2.) \quad W^{n+\frac{N}{2}} = W^n \cdot W^{\frac{N}{2}} = W^n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = W^n \cdot e^{-i\pi} = -W^n$$

Dies in die obige Gleichung für \tilde{S}_n eingesetzt liefert für diese Indizes

$$\tilde{S}_{n+\frac{N}{2}} = \tilde{S}_{n,g} - W^n \cdot \tilde{S}_{n,u}$$

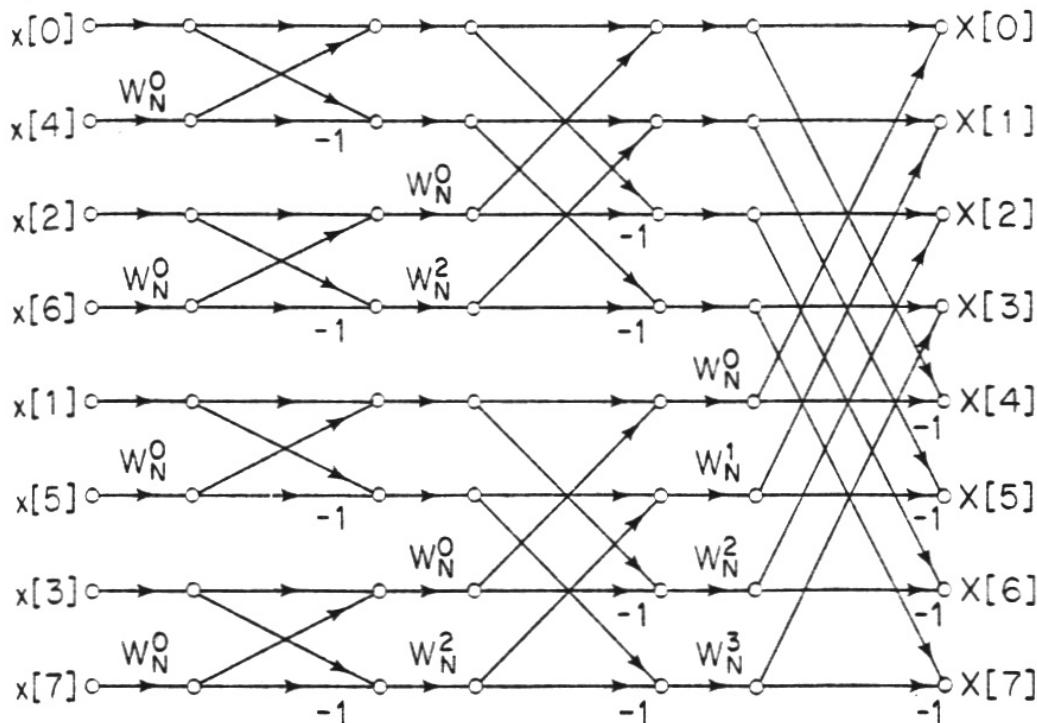
Statt einer N -Punkte-DFT werden hier also zwei $\frac{N}{2}$ -Punkte-DFTs berechnet und diese anschließend einmal addiert und einmal subtrahiert.

Der Rechenaufwand wird dadurch in diesem Schritt annähernd halbiert und beträgt etwa $2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} N^2$ Additionen und Multiplikationen, statt N^2 .

Statt die beiden $\frac{N}{2}$ -Punkte DFTs zu berechnen, setzt man diese Zerlegung weiter fort, bis am Ende nur noch 2-Punkte-DFTs übrig bleiben. Der Rechenaufwand liegt dann in der Größenordnung $N \cdot \text{Id}(N)$ statt N^2 .

Das ist bei $N = 1000$ ein Unterschied in der Rechenzeit um den Faktor 100!

Für die Aufteilung in "gerade" und "ungerade" mit den zugehörigen 2-Punkte-DFTs gibt es eine grafische Darstellung, die an Schmetterlinge erinnert. Man spricht bei der FFT deshalb auch vom ["Butterfly"-Algorithmus](#). Die folgende Abbildung zeigt dies am Beispiel einer 8-Punkte-FFT.



FFT-Algorithmus von James W. Cooley (1926 – 2016) und John W. Tukey (1915 – 2000)

5.9 Übungen "FFT-Amplitudenspektren, Alias-Effekt"

5.9.1 DFT-Spektrum

Das Signal $u(t) = 2 V \cdot \sin\left(3140 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)$ wird mit $f_s = 800 \text{ Hz}$ abgetastet. Bei welcher Frequenz bzw. welchen Frequenzen sind im DFT-Spektrum Linien zu erwarten? Skizzieren Sie das Spektrum ($|S_n|$).

Hinweis: die Werte eines DFT-Spektrums geben nur die Hälfte der Amplitude der Schwingung mit der jeweiligen Frequenz wieder.

5.9.2 Amplitudenspektrum eines Rechtecksignals

Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum^(*) eines Rechtecksignals mit der Periodendauer $T = 10 \text{ ms}$ bis zur Frequenz 800 Hz. Dabei sei der Gleichanteil Null und die Amplitude der Grundschwingung sei gleich 6.

() Hier ist (anders als beim DFT-Spektrum) für jede auftretende Schwingung die volle Amplitude bei der jeweiligen Frequenz einzutragen.*

Das Signal wird nun mit einem (ideal angenommenen) Tiefpass mit $f_g = 850 \text{ Hz}$ gefiltert und mit $f_s = 900 \text{ Hz}$ abgetastet. Ergänzen Sie die Skizze um die dadurch zwischen 0 und 800 Hz hinzukommenden Linien (am besten in anderer Farbe).

5.9.3 Amplitudenspektrum einer Sägezahnschwingung

Eine Sägezahnschwingung habe die Fourierreihenentwicklung

$$u(t) = 1V - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V}{n} \sin\left(n \frac{2\pi}{0,05s} t\right)$$

- a) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum im Frequenzbereich bis 105 Hz (auch hier gilt die obige Anmerkung^(*)).
- b) Durch (ideale) Tiefpassfilterung mit $f_g = 125 \text{ Hz}$, Digitalisierung mit der Abtastrate $T_s = 130 \text{ Hz}$, anschließende D/A-Umsetzung und Tiefpassfilterung mit $f_g = 70 \text{ Hz}$ entsteht das Signal $\tilde{u}(t)$. Skizzieren Sie dessen Amplitudenspektrum im Frequenzbereich bis 70 Hz.

6 Wer misst, misst Mist – Messabweichungen, Messunsicherheit

Kein Messwert ohne Messabweichung,

kein Messergebnis ohne Messunsicherheit!

6.1 Normen, Definitionen, Begriffe zur Messunsicherheit

6.1.1 Normen

Festlegungen zu Vorgehensweisen und Begriffen der Messtechnik finden sich in der **DIN 1319, Blatt 1-4**. Dabei behandeln die Blätter 3 und 4 die Themen Messabweichung und Messunsicherheit (Umfang ca. 60 Seiten). Daneben ist international der "GUM"-Leitfaden "**Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement**" gebräuchlich, 1995 vom DIN-Institut unter dem Titel "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" veröffentlicht. Die folgende Tabelle stellt die Gliederung dieser Normwerke gegenüber.

Tabelle 6.1: Gliederung der wesentlichen Normwerke für die Messtechnik [5]

DIN 1319	Teil 1: Grundbegriffe Teil 2: Begriffe für die Anwendungen von Messgeräten Teil 3: Einzelne Messgröße; Messunsicherheit Teil 4: Auswertung von Messungen; Messunsicherheit
GUM	Kapitel 1: Messunsicherheit Kapitel 2: Messabweichungen, Einflüsse und Korrekturen Kapitel 3: Ermittlung der Standardunsicherheit (A und B) Kapitel 4: Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit Kapitel 5: Ermittlung der erweiterten Standardunsicherheit Kapitel 6: Angabe der Unsicherheit

Während es in einigen Details und der Verwendung einiger Begriffe zwischen GUM und DIN-Norm Unterschiede gibt, sind die grundsätzlichen Vorgaben zur Bestimmung und Angabe der Messunsicherheit weitestgehend gleich.

6.1.2 Begriffe

Messwert m

absolute Messabweichung Δm (Abweichung vom wahren Wert m^*)

relative Abweichung $\frac{\Delta m}{m}$ (dimensionslos, Angabe meist in %)

(bzw. $\Delta m/m^*$, falls der wahre (oder ein "richtiger") Wert m^* bekannt ist.)

Beispiel: Zur Prüfung eines Ohmmeters wird ein Kalibrierwiderstand von 250Ω eingesetzt. Dabei wird der Messwert $R = 248,6 \Omega$ angezeigt.

Absolute Abweichung $\Delta R = -1,4 \Omega$,

relative Abweichung $|\Delta R/R^*| = 1,4 \Omega / 250 \Omega = 5,6 \cdot 10^{-3} = 0,56\%$

Messunsicherheit Δm (wird immer als positiver Wert angegeben)

Da bei jeder Messung Messabweichungen auftreten, muss zu jedem Messwert auch seine Messunsicherheit angegeben werden.

Die Messunsicherheit setzt sich u. a. zusammen aus

- Bauteil- oder Messgerätetoleranzen,
- Mess-Rauschen
- Unsicherheiten der Ablesung.

Messergebnis $\hat{m} = m \pm \Delta m$

Zusätzlich kann die Wahrscheinlichkeit, mit der sich der wahre Wert in dem hier angegebenen Intervall befindet, berechnet werden. Dieses **Vertrauensniveau** wird in **Kapitel 6.5** behandelt.

6.1.3 Fehlerquellen

Die Bestimmung der Messunsicherheit einer Messung geht aus von der Analyse aller Einflussfaktoren, die bei der Durchführung einer Messung zu Messabweichungen führen können. Beispiele sind in der folgenden Tabelle 2.1 aufgelistet.

Tabelle 2.1: Beispiele typischer Ursachen für Messabweichungen

Maßverkörperung (Sensorelement)	Kennlinienfehler (Nullpunktverschiebung / Offset, Nichtlinearität)
Messgerät	Trägheit (Verzögerungsverhalten), Spiel (Lose)
Messaufbau	Fehler der Signalumsetzung (Verstärkung) in einer Messkette, Übertragungsfehler, Rauschen
Messobjekt	Verformbarkeit bei Dickenmessungen, Fehler der lokalen Temperaturmessung in einem Behälter, dessen Inhalt ungleichmäßige Temperaturverteilung aufweist
Messperson	Parallaxenfehler (nicht-senrektes Ablesen eines Zeigerinstruments), Berührung, Stoß, Erschütterung
Umgebung	Temperaturschwankungen, Luftdruck, Luftfeuchte, Strahlung, Staub, elektrische und magnetische Felder

Bei fast allen Messaufgaben sind **Temperatureinflüsse** als Quelle möglicher Messabweichungen zu beachten. Meist wird die Abhängigkeit der interessierenden Größen von der Temperatur dabei durch eine lineare Abhängigkeit berücksichtigt.

So werden z. B. temperaturbedingte Längenänderungen durch den Wärmeausdehnungskoeffizienten α_l beschrieben:

$$l(\vartheta) = l(\vartheta_0) \cdot (1 + \alpha_l(\vartheta - \vartheta_0)).$$

Ebenso geht man oft von einer linearen Abhängigkeit des elektrischen Widerstands von der Temperatur aus, d. h.

$$R(\vartheta) = R(\vartheta_0) \cdot (1 + \alpha_R(\vartheta - \vartheta_0)).$$

6.1.4 Fehlerarten¹

Man unterscheidet bei der Bestimmung der Messunsicherheit die folgenden unterschiedlichen Arten von Messabweichungen:

- **bekannte systematische Fehler: $+\Delta m$ oder $-\Delta m$**
- **unbekannte systematische Fehler: $\pm\Delta m$**
- **zufällige Fehler**
- **grobe Fehler.**

6.1.5 Grobe Fehler

Beispiele:

Grobe Fehler sind große Abweichungen ("Ausreißer"), die entstehen durch

- Messperson (Bedienfehler, grobe Ablese- bzw. Protokollierungsfehler)
- Messaufbau (z.B. Wackelkontakt, Bauteilversagen)

Maßnahmen:

Grobe Fehler werden aus der Messreihe eliminiert und gehen nicht in die Messunsicherheit ein.

In der digitalen Messdatenverarbeitung geschieht das automatische Erkennen und Eliminieren von Ausreißern in Messreihen durch

- a) Plausibilitätsprüfung, z. B. Ausschließen der Werte außerhalb eines „Schlauchs“ der Breite $3s$ um den mittleren Verlauf der Messgröße (s : Standardabweichung)
- b) gleitende Medianfilterung (siehe z. B. `median` in MATLAB)

Laborbeispiel:

Um grobe Fehler schon während der Messung zu erkennen, sollte **vor der Messung** klar sein, in welcher **Größenordnung** die Messwerte zu erwarten sind! Zusätzlich schafft die frühzeitige, skizzenhafte grafische **Darstellung der Messwerte während der Messung** Klarheit.

Gegebenenfalls hat man dann noch die Möglichkeit, die betreffende Messung zu wiederholen.

¹ Grundsätzlich sollte der Begriff **Messabweichung** verwendet werden. Es hält sich aber hartnäckig auch die (von C. F. Gauß eingeführte) Bezeichnung "**Fehler**", obwohl dieser Begriff in technischen Systemen das nicht mehr ordnungsgemäße Funktionieren einer Einheit bezeichnet. Auch in diesem Skript wird diese Unterscheidung nicht streng gehandhabt, sondern es werden beide Bezeichnungen verwendet.

6.1.6 Zufällige Messabweichungen

Zufällige Fehler äußern sich in der Streuung der Messwerte, wenn eine Messung unter gleichen Bedingungen mehrfach wiederholt wird.

Sie sind **nicht reproduzierbar**.

Darstellung: $m \pm \Delta m$

Beispiele:

- Messrauschen,
- Unsicherheit der Ablesung

Maßnahmen:

Die Größe der zufälligen Abweichungen ist abzuschätzen (z. B. in Bezug auf die Unsicherheit der Ablesung) oder anhand der statistischen Standardabweichung zu berechnen (siehe Kapitel 6.5). Das Ergebnis geht in die Berechnung der **Messunsicherheit** mit Hilfe der Fehlerfortpflanzungsgesetze ein.

Laborbeispiel:

In allen Versuchen sind Ableseunsicherheiten zu quantifizieren.

Bei der Widerstandsbestimmung mit Hilfe einer Ausgleichsgerade liefert der Betrag der Steigung den Widerstandswert. Die **Standardabweichung der Steigung** kann hier als Maß der Messunsicherheit verwendet werden.

6.1.7 Bekannte systematische Messabweichungen

Fehler, die - bedingt durch den Messaufbau oder das verwendete Messprinzip - in immer gleicher Weise die Messung beeinflussen, heißen systematische Fehler.

Systematische Fehler sind reproduzierbar. Sie können durch Mittelwertbildung mehrerer Werte einer Messreihe **nicht** verringert werden.

Als **bekannte** systematische Fehler bezeichnet man Abweichungen, die hinsichtlich Größe und Vorzeichen (bzw. Richtung) bestimmbar und damit **korrigierbar** sind.

Beispiele:

- bekannte Offset- oder Skalenfehler ("Tacho zeigt 5 km/h zuviel"),
- temperaturabhängige Ausdehnung bzw. Widerstandsänderung bei bekannter Temperatur,
- Auswirkungen des Innenwiderstands einer Signalquelle auf die Messung.

Maßnahmen:

Die Abweichung ist zu bestimmen und **der korrigierte Messwert** ist gemäß

$$m' = m + \Delta m \text{ bzw. } m' = m - \Delta m$$

zu berechnen. Der korrigierte Wert liegt statistisch gesehen näher am "wahren Wert" als der unkorrigierte Messwert.

6.1.8 Unbekannte systematische Fehler

Unbekannte systematische Fehler sind Messabweichungen mit unbekanntem Vorzeichen und unbekanntem, aber festem, immer gleichem Betrag. Bezuglich des Betrags sind nur obere und untere Schranken bekannt, der sogenannte Toleranzbereich (oder „die Toleranz“).

Unbekannte systematische Fehler heißen auch **Toleranzfehler**.

Darstellung: $m \pm \Delta m$

Beispiele:

- Toleranzen von Widerstandswerten werden meist als relative Unsicherheit in Prozent angegeben. Hieraus werden die Nennwerte (Normreihen) abgeleitet, siehe Anhang A).
- Toleranzangaben von Sensoren und Messgeräten in Datenblättern,
- Wenn bei einer Messung die aktuelle Temperatur nur geschätzt werden kann $\vartheta = \vartheta_U \pm \Delta\vartheta$, so lässt sich die eventuell auftretende temperaturabhängige Messabweichung als zum Teil bekannter und zum Teil unbekannter systematischer Fehler charakterisieren.

Maßnahmen:

Unbekannte systematische Fehler gehen wie die zufälligen Fehler in die Berechnung der **Messunsicherheit** mit Hilfe der Fehlerfortpflanzungsgesetze ein.

Laborbeispiel:

In allen Versuchen sind die in den Datenblättern angegebenen Toleranzen der verwendeten Bauteile und Messgeräte zu ermitteln und ihr Einfluss auf das jeweilige Messergebnis durch Fehlerfortpflanzungsrechnung zu bestimmen.

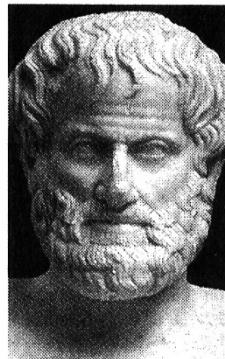
Zur Toleranz gehört in aller Regel auch ein vom Messbereich abhängiger Anteil, etwa der Anteil "+5D" in einer Angabe "0,2%vM+5D". Auch die **Genauigkeitsklasse** macht eine solche Angabe ($\Delta m = K/100 \cdot M$, wobei M der Messbereichsendwert ist).

Der Messbereich sollte also nach Möglichkeit immer so gewählt werden, dass der Messwert in der oberen Hälfte – besser: im oberen Drittel – des Messbereichs liegt.

6.1.9 Zahl der Dezimalstellen

Bei der Darstellung von Messergebnissen ist die Zahl der Dezimalstellen sinnvoll zu wählen. Sie sollte nicht größer sein, als dies durch die Größenordnung der Messunsicherheit gerechtfertigt ist. Andernfalls wird eine Präzision suggeriert, die tatsächlich nicht gegeben ist.

Eine Angabe $x = 2,1345 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$ ist somit kaum sinnvoll.



»Der Gebildete treibt die Genauigkeit nicht weiter, als es der Natur der Sache entspricht.«

Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.)

6.2 Übungen "Messabweichungen"

6.2.1 Genauigkeitsklasse

Ein Ampermeter habe die Genauigkeitsklasse 2.

- Welche Messunsicherheit besteht bei einem Ablesewert von 15 mA im Messbereich 200 mA?
- Wie groß ist der relative Fehler?
- Bestimmen Sie die entsprechenden Größen bei einem Ablesewert von 175 mA.

6.3 Fortpflanzung zufälliger und unbekannter systematischer Abweichungen

Hat ein Messwert m eine Messunsicherheit Δm , und geht m im Zuge der Auswertung in die Berechnung einer weiteren Größe M ein, das heißt

$$M = f(m),$$

so weist auch M eine Unsicherheit auf. Es gilt (Tangentennäherung, Taylorreihe)

$$f(m + \Delta m) \approx f(m) + \frac{df}{dm} \Big|_m \cdot \Delta m = M + \Delta M$$

Also

$$\Delta M = \frac{df}{dm} \Big|_m \cdot \Delta m$$

Definition:

Hängt ein Messergebnis M von einer Messung m ab, so bezeichnet man den Einfluss der Messunsicherheit Δm dieser Messung auf das Ergebnis als **Fehlerfortpflanzung**.

Beispiele:

- a) $U = R \cdot I$, $R = 100 \Omega$ präzise bekannt, $I = 2A \pm 0,05A$

$$U = 100 \Omega \cdot 2A = 200 V, \quad \Delta U = \frac{dU}{dI} \Big|_{I=2A} \cdot \Delta I = R \cdot \Delta I = 5 V$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{5 V}{200 V} = 2,5\% \quad \left(= \frac{\Delta I}{I} \right)$$

- b) $P = R \cdot I^2$, $R = 100 \Omega$ präzise bekannt, $I = 2A \pm 0,05A$

$$P = 100 \Omega \cdot (2A)^2 = 400 W$$

$$\Delta P = \frac{dP}{dI} \Big|_{I=2A} \cdot \Delta I = 2RI \Big|_{I=2A} \cdot \Delta I = 400 V \cdot 0,05A = 20W$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{20 V}{400 V} = 5\% \quad \left(= 2 \cdot \frac{\Delta I}{I} \right)$$

Allgemein gilt:

Geht ein fehlerbehafteter Messwert mit einer Potenz r ($\neq 0$) in eine Berechnung ein, so beträgt die relative Unsicherheit des berechneten Wertes das $|r|$ -fache der relativen Unsicherheit des Messwerts.

Fehlerfortpflanzung bei mehreren fehlerbehafteten Größen

Häufig ist ein Messwert M aus mehreren fehlerbehafteten oder unsicheren Teilmessungen, Größen oder Parametern m_i zu bestimmen, also

$$M = f(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

Jede Unsicherheit Δm_i ($i = 1, \dots, n$) trägt dann mit einem Anteil

$$\Delta M_{m_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial m_i} \right|_{m_i} \cdot \Delta m_i$$

zur Gesamt-Messunsicherheit

$$\Delta M = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial M}{\partial m_1} \right|_{m_1} \cdot \Delta m_1 \right)^2 + \left(\left. \frac{\partial M}{\partial m_2} \right|_{m_2} \cdot \Delta m_2 \right)^2 + \dots + \left(\left. \frac{\partial M}{\partial m_n} \right|_{m_n} \cdot \Delta m_n \right)^2} \quad (1)$$

bei. Die partiellen Ableitungen $\left. \frac{\partial M}{\partial m_i} \right|_{m_i}$ beschreiben dabei, wie empfindlich M von den jeweiligen Größen m_i abhängt, also die **Sensitivität** von M bezüglich m_i .

Anmerkung: Die Formel (1) für ΔM gilt nur, wenn die Unsicherheiten Δm_i voneinander statistisch unabhängig sind.

Beispiele:

- a) Unsicherheiten von Summe, Differenz, Produkt und Quotient

Seien m_1 und m_2 zwei Messwerte mit Messabweichungen Δm_1 und Δm_2 , von denen nur der Betrag bekannt ist bzw. abgeschätzt wurde und von denen wir annehmen, dass sie voneinander statistisch unabhängig sind.

Dann führt (1) zu folgenden Berechnungsvorschriften (bei denen keine Ableitungen berechnet werden müssen):

- 1.) Addition und Subtraktion der Messwerte

$$M = m_1 \pm m_2 \quad \Delta M = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2}$$

Wurzel aus der Quadratsumme der **absoluten** Messabweichungen.

- 2.) Multiplikation mit einem konstanten Faktor

$$M = k_1 \cdot m_1 \pm k_2 \cdot m_2 \quad \Delta M = \sqrt{(k_1 \cdot \Delta m_1)^2 + (k_2 \cdot \Delta m_2)^2}$$

- 3.) Multiplikation der Messwerte

$$M = m_1 \cdot m_2 \quad \frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2} \right)^2}$$

Wurzel aus der Quadratsumme der **relativen** Messabweichungen.

4.) Division der Messwerte

$$M = \frac{m_1}{m_2} \quad \frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$$

Wurzel aus der Quadratsumme der relativen Messabweichungen.

(gleiches Maß der relativen Abweichung wie bei Multiplikation).

Insbesondere hat der **Kehrwert** eines Messwerts **die gleiche relative Abweichung** wie der Messwert selbst.

Diese Berechnungen gelten entsprechend auch bei mehr als zwei fehlerbehafteten Größen.

z. B.:

$$\hat{R} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_0}, \quad R_a = 5 \text{ k}\Omega \pm 50 \Omega, \quad R_b = 200 \text{ k}\Omega \pm 2 \text{ k}\Omega, \quad R_0 = 2,5 \text{ k}\Omega \pm 40 \Omega$$

$$\frac{\Delta \hat{R}}{\hat{R}} = \sqrt{\left(\frac{0,05}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{200}\right)^2 + \left(\frac{40}{2500}\right)^2} \approx 0,0213 = 2,13\%$$

b) $U = R \cdot I, \quad R = 100 \Omega (\pm 2\%), \quad I = 2 A \pm 0,05 A$

$$U = 100 \Omega \cdot 2 A = 200 V,$$

$$\Delta U_R = \frac{dU}{dR} \Bigg|_{\substack{R=100\Omega \\ I=2A}} \cdot \Delta R = 2 A \cdot 2 \Omega = 4 V, \quad \Delta U_I = \frac{dU}{dI} \Bigg|_{\substack{R=100\Omega \\ I=2A}} \cdot \Delta I = 100 \Omega \cdot 0,05 A = 5 V$$

$$\Delta U = \sqrt{\Delta U_R^2 + \Delta U_I^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} V \approx 6,4 V, \quad \frac{\Delta U}{U} = \frac{6,4 V}{200 V} = 0,032 = 3,2\%$$

oder einfacher (s. o.)

$$\frac{\Delta U}{U} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = \sqrt{0,02^2 + 0,025^2} \approx 0,032 = 3,2\%,$$

$$\Delta U \approx 0,032 \cdot 200 V = 6,4 V$$

c) $P = R \cdot I^2, \quad R = 100 \Omega (\pm 2\%), \quad I = 2 A \pm 0,05 A$

$$P = 100 \Omega \cdot (2A)^2 = 400 W$$

$$\Delta P_R = \frac{\partial P}{\partial R} \Bigg|_{\substack{R=100\Omega \\ I=2A}} \cdot \Delta R = (2A)^2 \cdot 2 \Omega = 8 W$$

$$\Delta P_I = \frac{\partial P}{\partial I} \Big|_{\substack{R=100\Omega \\ I=2A}} \cdot \Delta I = 400 \text{ V} \cdot 0,05 \text{ A} = 20 \text{ W}$$

$$\Delta P = \sqrt{\Delta P_R^2 + \Delta P_I^2} = \sqrt{8^2 + 20^2} \text{ W} \approx 21,54 \text{ W} , \quad \frac{\Delta P}{P} = \frac{21,54 \text{ W}}{400 \text{ W}} \approx 0,054 = 5,4\%$$

d) Parallelschaltung zweier Widerstände

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} , \quad R_1 = 12 \Omega \ (\pm 5\%) , \quad R_2 = 18 \Omega \ (\pm 5\%)$$

$$\hat{R} = 7,2 \Omega \pm 0,26 \Omega \ (3,6\%) \quad (\text{Nachrechnen! Übung 6.4.4a})$$

6.4 Übungen "Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzung"

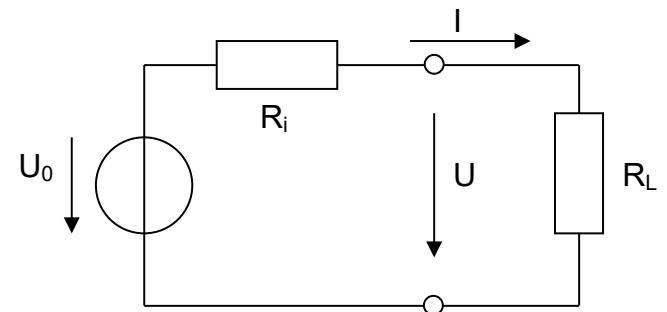
6.4.1 Innenwiderstand mit Messunsicherheit

In der abgebildeten Schaltung lässt sich durch Änderung von R_L der Strom I einstellen. Für zwei geeignete Einstellungen wurden folgende Ströme und Spannungen gemessen:

$$I_1 = 1,0 \text{ A} \pm 0,02 \text{ A} \quad U_1 = 36,6 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$$

$$I_2 = 0,8 \text{ A} \pm 0,02 \text{ A} \quad U_2 = 36,8 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$$

Welches Ergebnis erhält man hieraus für den Innenwiderstand R_i ?



6.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

In der abgebildeten Schaltung ist $R_M = 0,1 \Omega (\pm 0,1\%)$ ein Messwiderstand. R_s soll bestimmt werden.

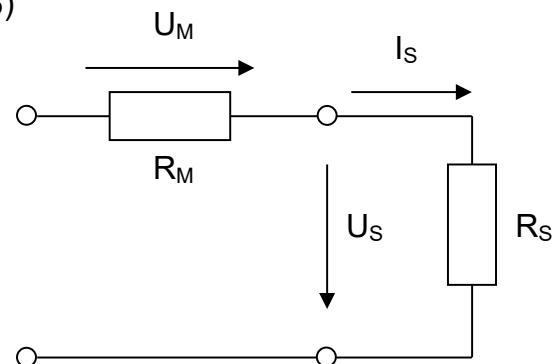
Gemessen wird

$$U_M = 0,14 \text{ V} \pm 0,01 \text{ V}$$

$$U_S = 14,3 \text{ V} \pm 0,3 \text{ V} .$$

Welches Ergebnis erhält man für R_s ?

Anmerkung: Diese Anordnung ist eine typische Schaltung zur Widerstandsbestimmung mit Hilfe einer Spannungs- und einer (indirekten) Strommessung.



6.4.3 Füllfaktor einer Solarzelle

Der Füllfaktor, eine wichtige Kenngröße von Solarzellen, wird gemäß

$$FF = \frac{P_{MPP}}{U_{oc} \cdot I_{sc}}$$

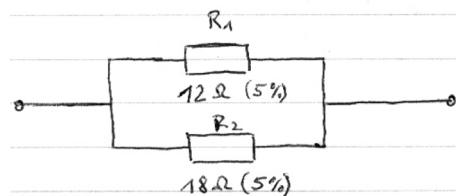
berechnet.

Aus den Messwerten $U_{oc} = 0,6 \text{ V} \pm 0,02 \text{ V}$, $I_{sc} = 0,3 \text{ A} \pm 0,02 \text{ A}$, $P_{MPP} = 0,13 \text{ W} \pm 0,01 \text{ W}$ ist der Füllfaktor einschließlich der absoluten und relativen Messunsicherheit zu bestimmen.

6.4.4 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

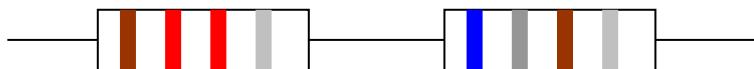
Bestimmen Sie jeweils den Gesamtwiderstand der folgenden Widerstands-kombinationen und dessen Toleranz (absolut und relativ).

a)



b)

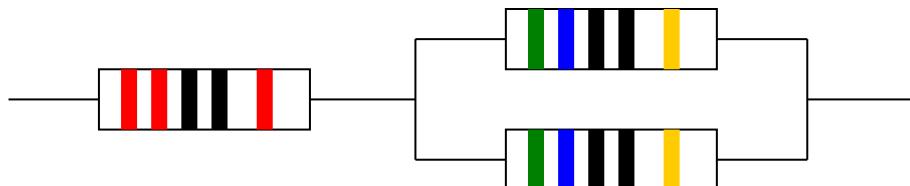
1.



2.



3.



Farbcodierung von Widerständen siehe Anhang A.

6.4.5 Fehlerfortpflanzung bei der Division

Leiten Sie die Fehlerfortpflanzung der Division ($M = \frac{m_1}{m_2}$, $\frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$) mit Hilfe von

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial m_1}\Big|_{m_1} \cdot \Delta m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m_2}\Big|_{m_2} \cdot \Delta m_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial M}{\partial m_n}\Big|_{m_n} \cdot \Delta m_n\right)^2} \text{ her.}$$

6.5 Vertrauensniveau und vollständiges Messergebnis

6.5.1 Messunsicherheit, Vertrauensniveau

Der "wahre" Wert einer Messgröße kann nie bestimmt werden, da Messabweichungen grundsätzlich nicht vollständig ausgeschlossen werden können.

Die Angabe der **Messunsicherheit** Δm einer Messung m geschieht in der Form " $m \pm \Delta m$ " und liefert eine Aussage über den Bereich, in dem der "wahre" Wert m^* zu erwarten ist.

Das **Vertrauensniveau "(1- α)"** gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Erwartung zutrifft:

$|m^* - m| < \Delta m$ gilt mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$.

Erst mit Angabe der Messunsicherheit liefert ein Messwert oder eine Messreihe eine verwertbare Aussage.

Wird zusätzlich das Vertrauensniveau angegeben, so erhält man das **vollständige Messergebnis**. Es hat die Form

$l = 33,333 \text{ mm}$	$\pm 2 \mu\text{m}$	$(1 - \alpha) = 95 \%$
Messwert	Messunsicherheit	Vertrauensniveau

6.5.2 Messen als Zufallsprozess

Jede Messung ist mit zufälligen Messabweichungen behaftet. Sie bewirken, dass sich bei der Wiederholung einer Messung auch bei sonst gleichen Messbedingungen jeweils leicht voneinander abweichende Messwerte ergeben.

Eine Messung ist insofern ein Zufallsprozess im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie kann durch eine Verteilungsfunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit **Erwartungswert μ** und **Standardabweichung σ** beschrieben werden.

Die **Verteilungsfunktion** beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable Werte annimmt, die kleiner als x sind:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Dazu gehört die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

" $f(x) dx$ " ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen x und $x + dx$ annimmt. Wahrscheinlichkeit kann also als **Fläche unter dem Graphen von $F(x)$** dargestellt werden.

Der Erwartungswert ist definiert als

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx .$$

Die **Varianz** ist der Erwartungswert des Quadrates der Abweichungen vom Erwartungswert μ :

$$D(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

Die Standardabweichung σ ist die Quadratwurzel der Varianz.

Für die Summe mehrerer unabhängiger Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu_i$ und $D(X_i) = \sigma_i^2$ gilt

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

Anwendung

Verringerung der Unsicherheit durch Mehrfachmessung und Mittelwertbildung

Wir führen n Messungen einer Größe am gleichen Aufbau unter gleichen Bedingungen aus.

Alle Messungen sehen wir als unabhängige Zufallsprozesse mit Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n an. Alle haben den gleichen Erwartungswert $\mu = E(X_i)$ und weisen die gleiche Streuung auf (Varianz $\sigma^2 = D(X_i)$).

Die Standardabweichung σ ist dabei ein Maß für die Unsicherheit einer einzelnen Messung.

Durch Mittelwertbildung entsteht eine neue Zufallsvariable

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Sie hat den gleichen Erwartungswert wie die Einzelmessungen X_i , denn

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n} (E(X_1) + \dots + E(X_n)) = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \mu) = \mu$$

Die Varianz von \bar{X} ist allerdings geringer, denn

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} (D(X_1) + \dots + D(X_n)) = \frac{1}{n^2} (n \cdot \sigma^2) = \frac{1}{n} \sigma^2$$

Die Standardabweichung und damit die Unsicherheit des Messergebnisses verringert sich um den Faktor $1/\sqrt{n}$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma$$

6.5.3 Normalverteilung, Gauß'sche "Glockenkurve"

In der Messtechnik geht man grundsätzlich davon aus, dass zufällige Messabweichungen einer Gauß'sche Normalverteilung entsprechen, der sogenannten „Glockenkurve“

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

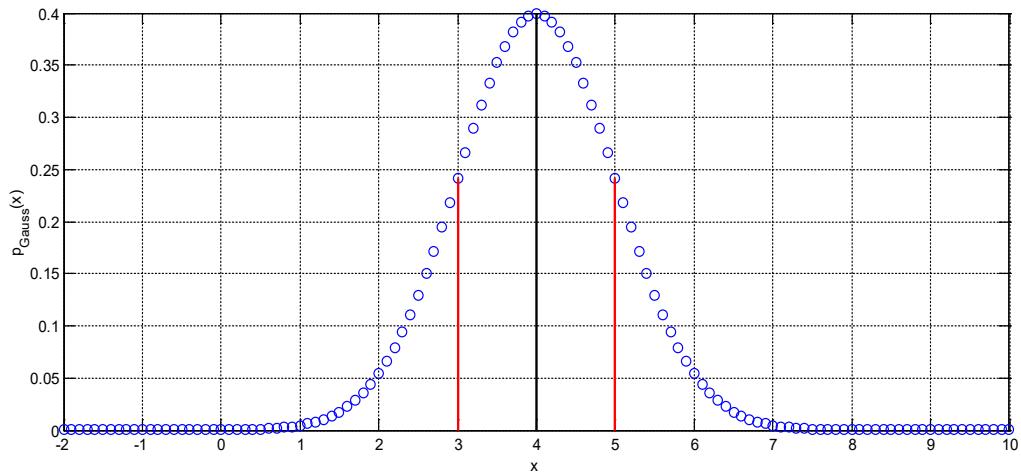


Abbildung 6.1: Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung (Gauß'sche Glockenkurve), hier mit Erwartungswert $\mu = 4$ und Standardabweichung $\sigma = 1$.

Die Fläche unter der Glockenkurve in einem Intervall $[\mu - \Delta x, \mu + \Delta x]$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen X in diesem Intervall liegt.

Die Gauß'sche Normalverteilung hat u. a. folgende Eigenschaften:

- Maximum liegt bei $x = \mu$ ($\text{Max} = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$)
- Symmetrisch bzgl. $x = \mu$
- Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$
- Wendetangente schneidet die x-Achse bei $\mu \pm 2\sigma$

Mit diesen Angaben lässt sich die Glockenkurve leicht skizzieren, wenn μ und σ bekannt sind.

Die Gesamtfläche unter der Kurve ist 1. Das entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable überhaupt irgendeinen Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt.

Häufig verwendet wird:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 1,96 \sigma < X < \mu + 1,96 \sigma) \approx 0,95$$

$$P(\mu - 3 \sigma < X < \mu + 3 \sigma) \approx 0,997$$

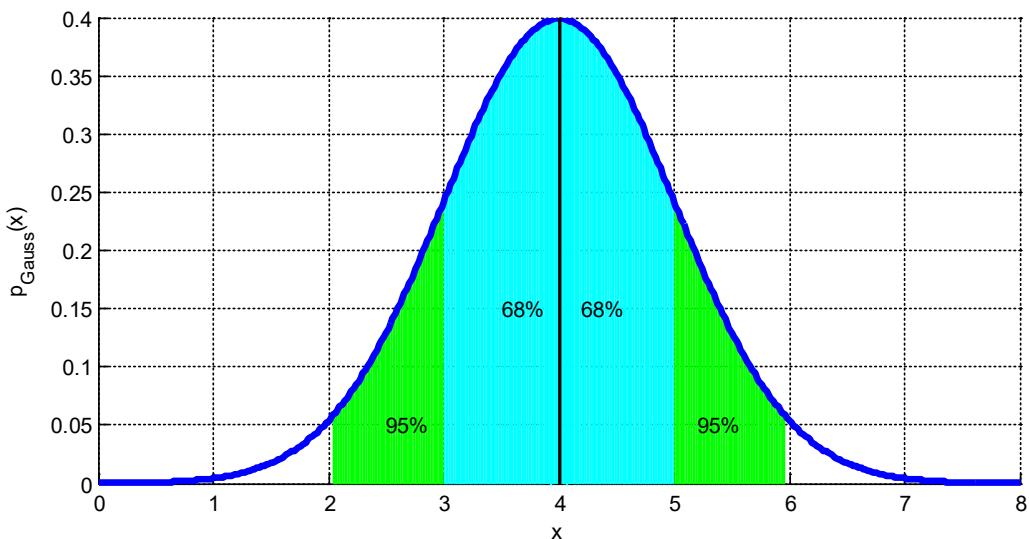


Abbildung 6.2: Normalverteilung ($\mu = 4$, $\sigma = 1$) mit 68%- bzw. 95%-"Vertrauensbereichen"

Damit gilt also z. B. mit einer Wahrscheinlichkeit von 68%, dass der Abstand "zufällig" (normalverteilt) streuender Werte vom Erwartungswert nicht größer als die Standardabweichung ist (vergl. Abb. 6.2).

Mit ca. 95% Wahrscheinlichkeit sind die Werte in einem Abstand von etwas weniger als der doppelten Standardabweichung zu erwarten.

Im Umkehrschluss gehen wir davon aus, dass der **wahre Wert** einer Messaufgabe mit 95% Wahrscheinlichkeit in einem solchen Intervall um einen gemessenen Wert liegt.

6.5.4 Häufigkeitsverteilung von Messwerten, Histogramm

Bei mehrfacher Wiederholung einer Messung werden aufgrund der zufälligen Fehler die Messwerte um ihren Mittelwert streuen. Die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Messwerte wird einen Verlauf ähnlich der Glockenkurve zeigen. Die Häufigkeitsverteilung bezeichnet man auch als **Histogramm**.

Beispiel: 10 Personen bestimmen nacheinander und unabhängig voneinander am gleichen Messaufbau die Grenzfrequenz einer Filterschaltung. Aus den 10 Werten (siehe Tabelle) ergibt sich **der statistische Mittelwert**

$$\bar{f} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} f_k = 16,0 \text{ kHz.}$$

Messwerte:

Nr. k	f_k [kHz]
1	15.87
2	15.63
3	16.45
4	16.35
5	16.15
6	16.03
7	15.96
8	16.15
9	15.45
10	15.96

Die **statistische Standardabweichung**

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}$$

ergibt sich hier zu $s_f \approx 0,304 \text{ kHz.}$

Sie ist ein **Maß für die Größe der zufälligen Messabweichungen einer Messung**. Die Messunsicherheit einer Messung bezogen auf ein bestimmtes Vertrauensniveau lässt sich aus der Standardabweichung berechnen (siehe unten).

In Abbildung 6.3 sind die Häufigkeitsverteilung der obigen Messung und eine Normalverteilung mit gleichem Mittelwert und gleicher Standardabweichung gegenübergestellt. Je größer die Stichprobe, desto besser wird die Häufigkeitsverteilung die "Glockenkurve" approximieren.

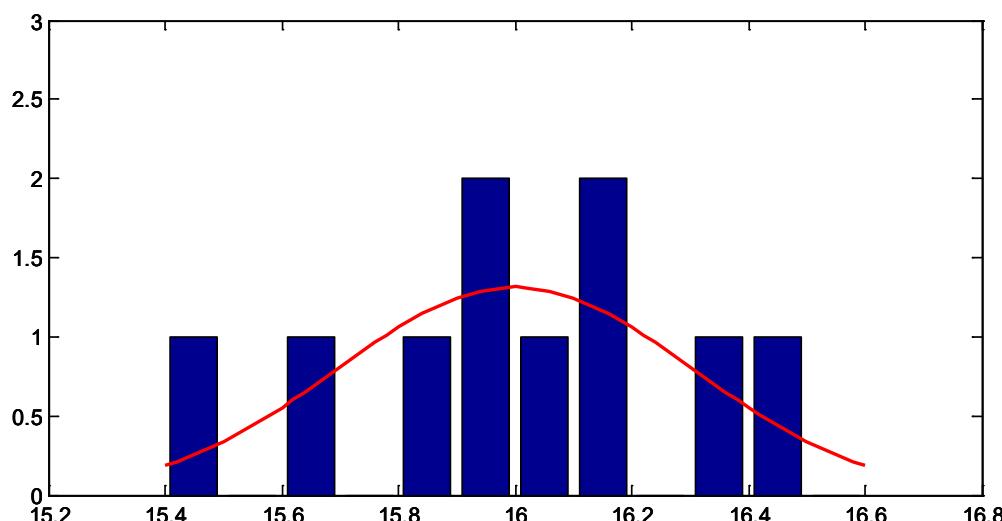


Abbildung 6.3: Histogramm der Frequenzmessreihe mit zugehöriger Normalverteilung

Die Messreihe stellt eine **Stichprobe** des Zufallsprozesses „Messung von f “ dar, von dem wir annehmen, dass er einer Normalverteilung mit einem Erwartungswert μ und einer Standardabweichung σ folgt. Allerdings sind μ (der "wahre Wert") und σ nicht bekannt. Der statistische Mittelwert \bar{x} und die statistische Standardabweichung s der Stichprobe liefern jedoch **Schätzwerte** für diese Kenngrößen.

Sind die Kenngrößen bekannt, so lässt sich das Vertrauensniveau, die Wahrscheinlichkeit mit der sich der wahre Wert in einer bestimmten Umgebung des berechneten Mittelwerts befindet, anhand der Gauß'schen Glockenkurve bestimmen.

6.5.5 Das vollständige Messergebnis

Der Bezug auf die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung ermöglicht die [**Angabe der Messunsicherheit mit Vertrauensniveau \(\$1 - \alpha\$ \)**](#) wie folgt:

- Eine Messung wird als (normalverteilter) Zufallsprozess gesehen, dessen (unbekannter) Erwartungswert μ der "[wahre Wert](#)" der Messgröße ist.
Eine konkrete Messreihe $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ist eine [Stichprobe](#) dieses Zufallsprozesses.
- Der statistische Mittelwert \bar{x} ist die – bestmögliche – Schätzung für den "wahren Wert", die wir aus der Messreihe gewinnen können.
- Die statistische Standardabweichung s liefert einen Schätzwert für die Standardabweichung σ der Normalverteilung. Diese ermöglicht die Angabe von Fehlergrenzen mit definiertem Vertrauensniveau. Das heißt, wir können sagen, dass die Werte der aufgenommenen Messreihe mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ und mit 95% Wahrscheinlichkeit im Intervall $\mu - 1,96 \sigma < x < \mu + 1,96 \sigma$ liegen.
- s ist nur bei großer Zahl n der Messwerte ein guter Schätzwert für die Standardabweichung σ . Bei kleineren Stichproben ergeben sich im Mittel zu kleine Werte $s < \sigma$. Die Angabe $\mu - s < x < \mu + s$ (d.h. die Aussage "Meine Messwerte haben maximal den Abstand s vom wahren Wert." hat daher ein geringeres Vertrauensniveau als 68%).

Deshalb ist die statistische Standardabweichung um den ["Vertrauensfaktor t"](#) zu korrigieren. Man erhält $t_{n,1-\alpha} \cdot s$ als korrigierte Schätzung. Der Vertrauensfaktor kann aus Tabellen (DIN 1319, s. u.) entnommen werden.

Man erhält z. B. für das Vertrauensniveau 68% im Fall $n = 10$ den Vertrauensfaktor $t_{10,95} = 1,06$ und damit den korrigierten Schätzwert $\sigma = 1,06 s$.

Für das Vertrauensniveau 95% ergibt sich mit dem Vertrauensfaktor $t_{10,95} = 2,26$ die korrigierte Schätzung $1,96 \sigma = 2,26 s$.

- Der statistische Mittelwert der Messreihe, der unsere Schätzung des wahren Wertes ist, hat – wie oben gezeigt – eine um $\frac{1}{\sqrt{n}}$ geringere Standardabweichung als die Einzelmessungen.

Aus der Messreihe kann deshalb auf die Messunsicherheit

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n,1-\alpha} \cdot s$$

geschlossen werden. Der wahre Wert liegt demnach mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ im Intervall $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$.

- **Das vollständige Messergebnis** lässt sich damit wie folgt angeben:

$$\hat{x} = \bar{x} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_{n,1-\alpha} \cdot s$$

wobei $t_{n,1-\alpha}$ entsprechend dem einzuhaltenden Vertrauensniveau und der Zahl der aufgenommenen Messwerte zu wählen ist (Tabelle 6.2).

Anzahl Messungen in der Messreihe n	Vertrauensfaktor t						
	$(1-\alpha) = 68,27\%$	$(1-\alpha) = 90,00\%$	$(1-\alpha) = 95,00\%$	$(1-\alpha) = 95,45\%$	$(1-\alpha) = 99,00\%$	$(1-\alpha) = 99,73\%$	$(1-\alpha) = 99,98\% *$
2	1,84	6,31	12,71	18,44	63,66	235,80	761,40
3	1,32	2,92	4,30	4,93	9,93	19,21	42,30
4	1,20	2,35	3,18	3,48	5,84	9,22	19,77
5	1,15	2,13	2,78	2,98	4,60	6,62	12,48
6	1,11	2,02	2,57	2,73	4,03	5,51	9,77
7	1,09	1,94	2,45	2,61	3,71	4,90	7,51
8	1,08	1,90	2,37	2,50	3,50	4,53	6,78
9	1,07	1,86	2,31	2,42	3,37	4,28	6,22
10	1,06	1,83	2,26	2,37	3,25	4,09	5,89
20	1,03	1,73	2,09	2,18	2,86	3,45	4,76
30	1,02	1,70	2,05	2,13	2,76	3,28	4,47
50	1,01	1,68	2,01	2,08	2,68	3,16	4,23
100	1,00	1,66	1,98	2,04	2,63	3,08	4,12
200	1,00	1,65	1,97	2,02	2,60	3,04	4,06
$n \rightarrow \infty$	1,00	1,65	1,96	2,00	2,58	3,00	4,00

Tabelle 6.2: Vertrauensfaktoren nach DIN 1319 (Quelle: [5])

Beispiel:

Für die obige Messreihe der Frequenzen war $n = 10$, $\bar{f} = 16,0 \text{ kHz}$ und die statistische Standardabweichung $s_f = 0,304 \text{ kHz}$. Aus der Tabelle 6.2 liest man für $n = 10$ und das Vertrauensniveau 68% den Vertrauensfaktor $t_{10,68} = 1,06$ ab.

Als Schätzwert für σ ergibt sich damit: $\sigma = 1,06 s_f \approx 0,322 \text{ kHz}$.

Somit liegt ein beliebig aus der Messreihe herausgegriffener Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit in einem Bereich $\pm 0,322 \text{ kHz}$ um den wahren Wert.

Die Messunsicherheit des Mittelwertes ist dem gegenüber um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ geringer, so dass das vollständige Messergebnis lautet:

$$\hat{f} = \bar{f} \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 1,06 \cdot s_f = 16,0 \text{ kHz} \pm 0,102 \text{ kHz}, \quad (1 - \alpha) = 68\%$$

6.5.6 95%-Vertrauensniveau

Ein Ergebnis mit 68% „Verlässlichkeit“ ist oft nicht ausreichend. In der Messtechnik arbeitet man meist mit dem **95%-Vertrauensniveau**. Dem entspricht in der theoretischen Verteilung ein Streubereich von $\mu \pm 1,96 \sigma$. (vergl. Abb. 6.2).

Mit der statistischen Standardabweichung und dem Vertrauensfaktor $t_{n,95}$ des 95%-Vertrauensniveaus erhält man die Schätzung $1,96 \sigma = t_{n,95} \cdot s$.

Für $n = 10$ entnimmt man der DIN-Tabelle den Vertrauensfaktor $t_{10,95} = 2,26$. Das heißt für das obige Beispiel:

$$\hat{f} = 16,0 \text{ kHz} \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 2,26 \cdot 0,304 \text{ kHz} = 16,0 \text{ kHz} \pm 0,217 \text{ kHz}, \quad (1 - \alpha) = 95\%$$

Mit 95% Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert demnach im Bereich 15,78 kHz bis 16,22 kHz.

6.5.7 Fehlerabschätzung bei Einzelmessungen

Oft ist der Aufwand zu groß, eine Messung so oft zu wiederholen, dass man mit der statistischen Standardabweichung s einen sinnvollen Schätzwert der theoretischen Standardabweichung σ erhält. Dann hat man eine Angabe der auf zufällige Messabweichungen zurückzuführenden Messunsicherheit durch sorgfältige Abschätzung im Rahmen der jeweiligen Messung zu gewinnen – beispielsweise durch Variation der Cursorposition bei Ablesungen von einem Oszilloskopschirm.

6.5.8 Messunsicherheit aufgrund mehrerer Fehlerquellen

Die Messunsicherheit einer Messung wird in der Regel nicht nur durch eine einzelne mit Unsicherheit behaftete Größe bestimmt, sondern durch eine Vielzahl von Fehler-einflüssen. Insbesondere trägt jedes Messinstrument zur Messunsicherheit bei.

Wie in Abschnitt 6.1.8 dargestellt, werden Messgeräte-Toleranzen als unbekannte systematische Fehler erfasst und in die Fehlerfortpflanzungsrechnung einbezogen.

Ihnen wird in der Regel ein Vertrauensniveau von 95% zugeordnet.

Die Messunsicherheit durch zufällige und unbekannte systematische Fehler wird nach den Gesetzen der Fehlerfortpflanzung berechnet. Dabei sind alle Fehler auf das gleiche Vertrauensniveau zu beziehen, in der Regel das 95%-Niveau.

Beispiel:

Bei der oben beschriebenen Messung werden ein Signalgenerator und ein Multimeter zur Spannungsmessung eingesetzt. Sei

e_1 : Toleranz der Frequenz des Signalgenerators (z. B. $e_1 = 0.02 \text{ kHz}$),

e_2 : Unsicherheit der Frequenz aufgrund der Toleranz der Spannungsmessung (z. B. $e_2 = 0.1 \text{ kHz}$).

Der zufällige Fehler wird durch den 95%-Streubereich $\pm 1,96 \sigma$ beschrieben, der aus der statistischen Standardabweichung und dem 95%-Vertrauensfaktor $t_{10,95}$ berechnet wird (siehe oben).

Damit erhält man für die Messunsicherheit insgesamt

$$\Delta f = \sqrt{\frac{(t_{10,95} \cdot s)^2}{10} + e_1^2 + e_2^2} = \sqrt{0,217^2 + 0,02^2 + 0,1^2} \approx 0,24 \text{ kHz}$$

6.6 Übungen "Vollständiges Messergebnis, Fehlerfortpflanzung"

6.6.1 Temperaturmessreihe mit Messgeräte-Toleranz

An einem Tank, dessen Inhalt überall die gleiche Temperatur hat, werden acht Temperaturmessungen vorgenommen, die die folgenden Werte liefern:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8
Temp./°C	362	352	368	378	350	360	356	370

- Bestimmen Sie den Mittelwert und die statistische Standardabweichung.
- Welche Messunsicherheit bezogen auf ein Vertrauensniveau von 95% ergibt sich daraus?
- Geben Sie das vollständige Messergebnis an, wenn das verwendete Temperaturmesssystem eine Toleranz von $\pm 10 \text{ °C}$ hat.

6.6.2 Strommessung mit Multimeter

Ein Multimeter hat die Genauigkeitsklasse 1,5. Im Messbereich 0 – 3 A wird der Strom I in 4 aufeinander folgenden, unabhängigen Messungen, gemessen (siehe Tabelle).

- a) Geben Sie das vollständige Messergebnis für I für ein Vertrauensniveau von 95% an.

Messung Nr.	1	2	3	4
Strom I [A]	1,3	1,35	1,26	1,29

- b) Der Chef macht eine weitere Messung zur Kontrolle. In welchem Intervall wird sein Messwert mit 95% Wahrscheinlichkeit liegen?

6.6.3 Messunsicherheit einer Messreihe

Eine Messreihe liefert für den Schaltweg S eines Mikroschalters die unten angegebenen Werte. Es wird mit einem Wegsensor gemessen, dessen Messunsicherheit mit $1 \mu\text{m}$ angegeben ist.

Messung Nr.	1	2	3	4
Schaltweg [μm]	30	35	27	31

- a) Geben Sie das vollständige Messergebnis für S für ein Vertrauensniveau von 95% an.
- b) Wenn weitere Messungen aufgenommen werden: In welchem Intervall sind deren Werte mit 95% Wahrscheinlichkeit zu erwarten?
- c) In zwei weiteren Messungen wird $s_5 = 33 \mu\text{m}$ und $s_6 = 28,5 \mu\text{m}$ gemessen. Wie ändert sich das vollständige Messergebnis, wenn diese Messungen mitberücksichtigt werden? Geben Sie die Änderung der Messunsicherheit gegenüber a) in % an.

6.6.4 Widerstandstoleranzen

Auf einer in Serienfertigung hergestellten Platine war ein $82 \text{ k}\Omega$ Widerstand mit 1% Toleranz spezifiziert. Stattdessen soll nun eine Serienschaltung dreier Widerstände ($22 \text{ k}\Omega$, $27 \text{ k}\Omega$, $33 \text{ k}\Omega$) vorgesehen werden. Wird die geforderte Toleranz erreicht, wenn die ersten beiden Widerstände eine Toleranz von 5% haben und die Toleranz des $33 \text{ k}\Omega$ Widerstands 2% beträgt?

6.6.5 Messwertablesung

Nacheinander werden auf der Anzeige eines Drehspulinstruments von 5 Personen folgende Werte abgelesen:

Person	1	2	3	4	5
Strom [mA]	27	29	24	25	24

- a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die statistische Standardabweichung.
- b) Welche Messunsicherheit bezogen auf ein Vertrauensniveau von 95% ergibt sich daraus?
- c) Es wird eine sechste Person gebeten, die Messung durchzuführen. In welchem Bereich ist mit 95% Wahrscheinlichkeit ihr Ablesewert zu erwarten.

6.6.6 NTC Parameterbestimmung

Für den Widerstand eines NTC gilt: $R(T) = R_0 \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$

Durch zwei Widerstands- und Temperaturmessungen soll B bestimmt werden. Es liegen folgende Werte mit den angegebenen Messabweichungen vor:

$T_0 = 0^\circ\text{C}$ (exakt), $T_1 = 353\text{ K} \pm 1\text{ K}$, $R_0 = 30\text{ k}\Omega$ ($\pm 1\%$), $R_1 = 500\text{ }\Omega$ ($\pm 1\%$)

Geben Sie das Messergebnis für B an.

6.6.7 NTC: R_∞

Zur Bestimmung der Hilfsgröße $R_\infty = R(T \rightarrow \infty) = R_0 \cdot e^{-\frac{B}{T_0}}$ eines NTC, dessen Parameter mit $B = 4000\text{ K}$ ($\pm 5\%$) angegeben ist, wird eine Messung aufgenommen:

$T_0 = 298\text{ K} \pm 0,5\text{ K}$, $R_0 = 26,5\text{ k}\Omega \pm 300\text{ }\Omega$

Wie lautet R_∞ und welche relative Messunsicherheit ergibt sich?

Quellenverzeichnis

- [1] E. Schrüfer: Elektrische Messtechnik, Fachbuchverlag Leipzig, 7. Aufl., 2001
- [2] J. Hoffmann: Messen nichtelektrischer Größen, VDI, Düsseldorf, 1996
- [3] J. Hoffmann: Taschenbuch der Messtechnik, Fachbuchverlag Leipzig, 2. Auflage, 2000
- [4] J. Hoffmann: Handbuch der Messtechnik, Fachbuchverlag Leipzig,
- [5] M. Bantel: Grundlagen der Messtechnik - Messunsicherheit von Messung und Messgerät, Fachbuchverlag Leipzig, 2000
- [6] W.-D. Schmidt: Sensorschaltungstechnik, Vogel Verlag, Würzburg, 1997
- [7] U. Tietze, Ch. Schenk: Halbleiter-Schaltungstechnik, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 11. Aufl., 2001
- [8] Hütte – Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, Springer, Berlin, 31. Auflage, 2000
- [9] H.-R. Tränkler, E. Obermeier (Hrsg.): Sensorik, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1998 (1584 S.)
- [10] K.-D. Kammerer, K. Kroschel: Digitale Signalverarbeitung. Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB- Übungen, Teubner Verlag, 6. Auflage, 2002

Anhang A (Toleranzen und Normreihen elektrischer Widerstände)

Widerstände dienen in elektronischen Schaltungen

- zur Einstellung von Spannungsniveaus (Spannungsteiler)
- zur Strombegrenzung
- zur Strommessung

Sie weisen fertigungsbedingt Toleranzen auf, Abweichungen vom Nennwert. Aus der Größe der relativen Abweichungen resultieren die Normreihen, das heißt die üblicherweise industriell gefertigten und verfügbaren Nennwerte. Weisen die Widerstände eine Toleranz von 20% auf, so lassen sich innerhalb einer Zehnerpotenz 6 Widerstandswerte so bestimmen, dass ihre Toleranzbereiche gerade aneinander grenzen.

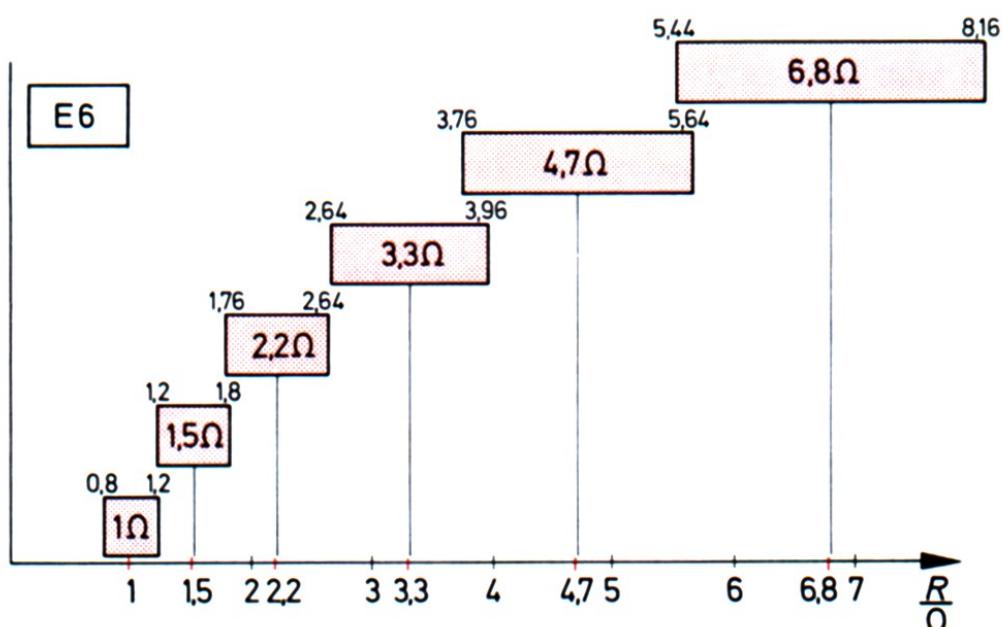


Abbildung A.1: Darstellung der 20%-Toleranzbereiche der E6-Reihe

Entsprechend ergeben sich E12-Reihen (10%), E24- (5%), E48- (2%) und E96-Reihen (1%) (DIN 41426, IEC 63)

E 6 (± 20%)	1,0		1,5		2,2		3,3		4,7		6,8													
E 12 (± 10%)	1,0	1,2	1,5	1,8	2,2	2,7	3,3	3,9	4,7	5,6	6,8	8,2												
E 24 (± 5%)	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,2	9,1

Abbildung A.2: Widerstandswerte der E6, E12 und E24 - Reihen

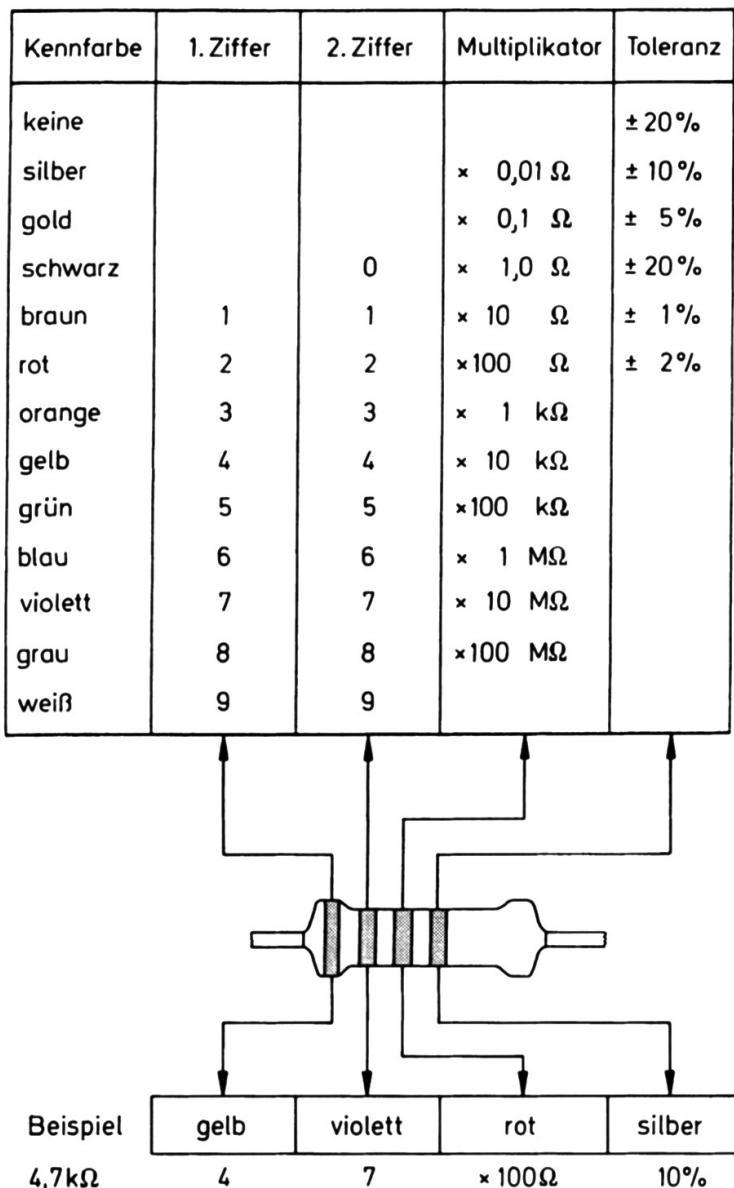
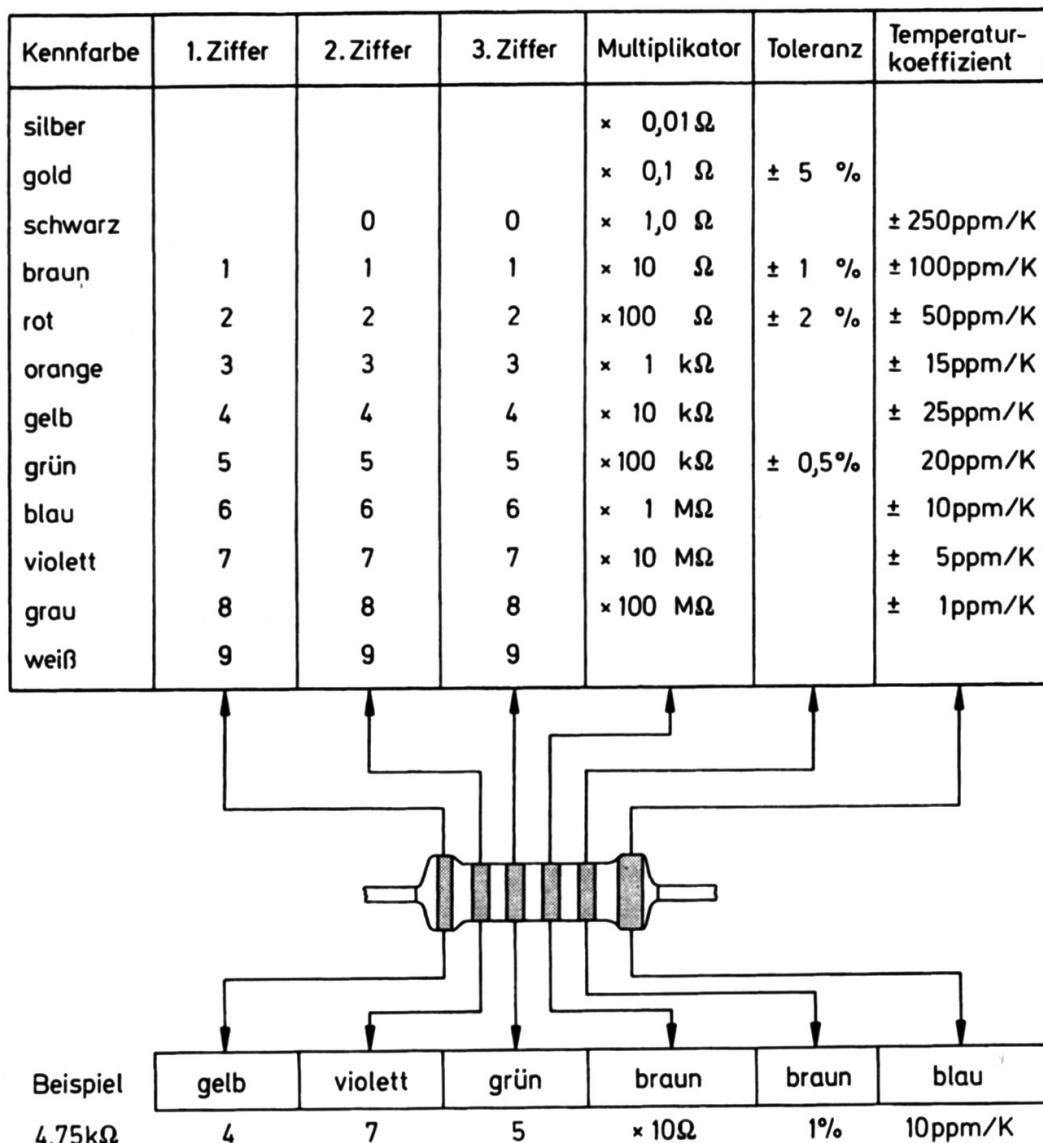


Abbildung A.3: 4-Ring-Farbcodierung der Widerstandswerte [7]

Tabelle A.1: Beispiele zur Widerstandsbestimmung anhand des Farbcodes

Beispiele:

gelb 4	violett 7	rot $\cdot 10^2$	gold $\pm 5\%$	$= 4700 \Omega \pm 5\%$
blau 6	grau 8	blau $\cdot 10^6$	— $\pm 20\%$	$= 68 \text{ M}\Omega \pm 20\%$
braun 1	grün 5	orange $\cdot 10^3$	silber $\pm 10\%$	$= 15 \text{ k}\Omega \pm 10\%$



5–6 Ring-Farocode nach IEC 62. Der Temperaturkoeffizient wird in der Regel nur angegeben, wenn er kleiner als 50 ppm/K ist

Abbildung A.4: 5-Ring-Farbcodierung der Widerstandswerte [7]

Anhang B (Instrumentenverstärker)

238

3 Messung von ohmschen Widerständen; Widerstandsaufnehmer

R_0 erforderlich ist, könnte der Operationsverstärker von Bild 3.5a benutzt werden. Diese Schaltung hätte den Vorteil, nicht so viele eng tolerierte Widerstände zu benötigen wie die von Bild 3.17.

3.4.2 Subtrahierer mit Elektrometerverstärker

Für die Verstärkung der Diagonalspannungen aus hochohmigen Brücken ist die Schaltung nach Bild 3.17 nicht geeignet. Um die Brücke nicht zu verstimmen, müssen die Teilspannungen U_1 und U_2 leistungslos gemessen werden. Dies gelingt mit der in Bild 3.19 gezeigten Schaltung. Die beiden Elektrometerverstärker V1 und V2 verstärken rückwirkungsfrei die Eingangsspannungen auf U_{1a} und U_{2a} und deren Differenz wird dann in dem schon bekannten Subtrahierer V3 gebildet.

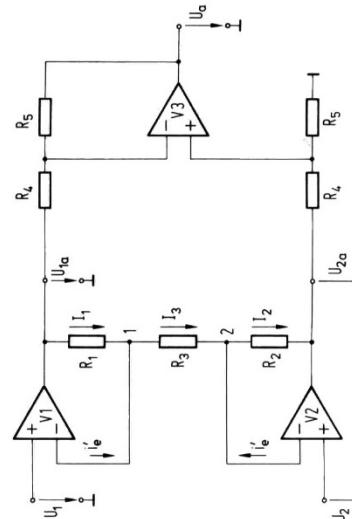


Bild 3.19: Subtrahierer mit Elektrometerverstärkern

Die Verstärker V1 bis V3 werden als ideal mit $u'_e = 0, i'_e = 0$ vorausgesetzt. Um zunächst die Ausgangsspannungen U_{1a} und U_{2a} zu ermitteln, werden die folgenden Maschengleichungen aufgestellt und nach den Strömen aufgelöst:

$$-U_1 - I_1 R_1 + U_{1a} = 0 \quad I_1 = \frac{U_{1a} - U_1}{R_1} \quad (3.37)$$

$$-U_2 + I_2 R_2 + U_{2a} = 0 \quad I_2 = \frac{U_2 - U_{2a}}{R_2} \quad (3.38)$$

$$-U_1 + I_3 R_3 + U_2 = 0 \quad I_3 = \frac{U_1 - U_2}{R_3}. \quad (3.39)$$

3.4 Verstärker für Brückenschaltungen

239

Die Gleichungen für die Knotenpunkte 1 und 2 liefern

$$I_1 - I_3 = 0; \quad I_3 - I_2 = 0$$

woraus

$$I_1 = I_2 = I_3 \quad (3.40)$$

folgt. Mit der Kenntnis von (3.40) ergibt sich aus (3.37) und (3.39)

$$U_{1a} = \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) U_1 - \frac{R_1}{R_3} U_2 \quad (3.41)$$

und aus den Gl. (3.38) und (3.39)

$$U_{2a} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) U_2 - \frac{R_2}{R_3} U_1. \quad (3.42)$$

Für die symmetrische mit $R_1 = R_2$ aufgebauten Schaltung wird

$$U_{1a} - U_{2a} = \left(1 + \frac{2R_1}{R_3}\right) (U_1 - U_2). \quad (3.43)$$

Die Widerstände R_1 und R_3 bestimmen also den Verstärkungsfaktor, gehen aber nicht in die Differenz $U_1 - U_2$ ein. Driften diese Widerstände, so ändert sich die Steigung der Kennlinie. Der Nullpunkt bleibt unbeeinflusst. Für $R_3 \rightarrow \infty$ arbeitet der Verstärker als Spannungsfolger mit $U_{1a} = U_1$ und $U_{2a} = U_2$.

Die Differenz $U_{1a} - U_{2a}$ wird in dem Subtrahierer V3 verstärkt. Nach Gl. (2.180) ist dessen Ausgangsspannung U_a ,

$$U_a = -\frac{R_s}{R_4} (U_{1a} - U_{2a}) = -\frac{R_s}{R_4} \left(1 + \frac{2R_1}{R_3}\right) (U_1 - U_2). \quad (3.44)$$

Einfluß der Eingangsströme und der Offsetspannungen. Bei Spannungsverstärkern ist die Wirkung der Eingangsströme im allgemeinen gegenüber der Offsetspannung zu vernachlässigen (Abschnitt 2.5.6). Aus diesem Grund sind in Bild 3.20 bei den Elektrometer-Verstärkern die Eingangsströme nicht gezeichnet. Die des Subtrahierers V3 kompensieren sich weitgehend (Gl. (2.206)) und werden deshalb im folgenden auch nicht weiter betrachtet.

Die Offsetspannungen U_{os1} und U_{os2} an den Elektrometer-Verstärkern werden wie die Nutzspannungen verstärkt und führen zu der Ausgangsspannung

$$U_a (U_{os1}, U_{os2}) = -\frac{R_s}{R_4} \left(1 + \frac{2R_1}{R_3}\right) (U_{os1} - U_{os2}). \quad (3.45)$$

Die Offsetspannung U_{os3} des Verstärkers V3 liefert nach Gl. (2.207)

$$U_a (U_{os3}) = \left(1 + \frac{R_s}{R_4}\right) U_{os3},$$