

2.6 Messabweichungen

2.6.1 Garantiefehlergrenze

a) $\Delta I = 4 \text{ mA}$

b) $\frac{\Delta I}{I} \approx 26,7\%$

c) $\Delta I = 4 \text{ mA}, \frac{\Delta I}{I} \approx 2,29\%$

2.6.2 Temperatureinfluss

x

2.8 Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzung

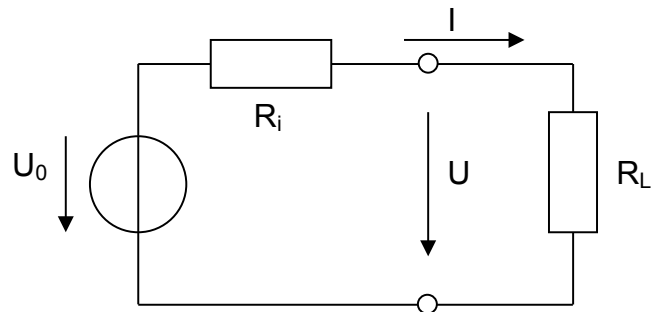
2.8.1 Innenwiderstand mit Messunsicherheit

Es gilt

$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

etc. (siehe 0.4.1)

$$R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} \quad \text{und} \quad U_0 = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$$



$$U_2 - U_1 = 0,2 \text{ V} \pm \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} \text{ V} \approx 0,2 \text{ V} \pm 0,14 \text{ V}$$

$$I_1 - I_2 = 0,2 \text{ A} \pm \sqrt{0,02^2 + 0,02^2} \text{ A} \approx 0,2 \text{ A} \pm 0,028 \text{ A}$$

$$R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 1 \Omega$$

$$\frac{\Delta R_i}{R_i} = \sqrt{\left(\frac{0,14}{0,2}\right)^2 + \left(\frac{0,028}{0,2}\right)^2} \approx 0,72 = 72\%, \quad \hat{R}_i = 1 \Omega \pm 0,72 \Omega$$

alternativ:

$$\Delta R_{i,U_1} = \frac{\partial R_i}{\partial U_1} \Delta U_1 = -\frac{\Delta U_1}{I_1 - I_2} = -5 \frac{\Omega}{V} \Delta U_1 = -0,5 \Omega$$

$$\Delta R_{i,U_2} = \frac{\partial R_i}{\partial U_2} \Delta U_2 = \frac{\Delta U_2}{I_1 - I_2} = 5 \frac{\Omega}{V} \Delta U_2 = 0,5 \Omega$$

$$\Delta R_{i,I_1} = \frac{\partial R_i}{\partial I_1} \Delta I_1 = \frac{U_2 - U_1}{(I_1 - I_2)^2} \Delta I_1 = \frac{R_i}{I_1 - I_2} \Delta I_1 = 5 \frac{\Omega}{V} \Delta I_1 = 0,1 \Omega$$

$$\Delta R_{i,I_2} = \frac{\partial R_i}{\partial I_2} \Delta I_2 = -\frac{U_2 - U_1}{(I_1 - I_2)^2} \Delta I_2 = -\frac{R_i}{I_1 - I_2} \Delta I_2 = -5 \frac{\Omega}{V} \Delta I_2 = -0,1 \Omega$$

$$\Delta R_i = \sqrt{(-0,5)^2 + (0,5)^2 + (-0,1)^2 + (0,1)^2} \Omega \approx 0,72 \Omega, \quad \frac{\Delta R_i}{R_i} \approx 72\%$$

2.8.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

$$I_S = \frac{U_M}{R_M} = \frac{0,14 \text{ V}}{0,1 \Omega} = 1,4 \text{ A} \quad \frac{\Delta I_S}{I_S} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{0,14}\right)^2 + 0,001^2} = 0,07144 = 7,14\%$$

$$R_S = \frac{U_S}{I_S} = \frac{14,3 \text{ V}}{1,4 \text{ A}} \approx 10,21 \Omega \quad \frac{\Delta R_S}{R_S} = \sqrt{\left(\frac{0,3}{14,3}\right)^2 + 0,0714^2} \approx 0,0745 = 7,45\%$$

$$\Delta R_S \approx 0,76 \Omega$$

$$\hat{R}_S = 10,21 \Omega \pm 0,76 \Omega$$

Der größte Beitrag zur Messunsicherheit von R_S rührt dabei von $\frac{\Delta U_M}{U_M} \approx 7,143\%$ her.

2.8.3 Füllfaktor einer Solarzelle

$$FF = \frac{P_{MPP}}{U_{oc} \cdot I_{sc}} = \frac{0,13 \text{ W}}{0,6 \text{ V} \cdot 0,3 \text{ A}} \approx 0,722$$

$$\frac{\Delta FF}{FF} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{0,13}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,6}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,3}\right)^2} \approx 0,107 = 10,7\%$$

oder in zwei Schritten:

$$P_0 = U_{oc} \cdot I_{sc} = 0,18 \text{ W}$$

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} = \sqrt{\left(\frac{0,02}{0,6}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,3}\right)^2} \approx 0,0745 = 7,45\%$$

$$\frac{\Delta FF}{FF} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{0,13}\right)^2 + 0,0745^2} \approx 0,107 = 10,7\% \quad (\text{wie oben})$$

absolute Messunsicherheit: $\Delta FF = 0,107 \cdot FF \approx 0,077$

2.8.4 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

a)

1.) Vereinfachte Fehlerfortpflanzungsrechnung anhand der Leitwerte:

$$R = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{12 \Omega} \quad \frac{\Delta Y_1}{Y_1} = \frac{\Delta R_1}{R_1} = 5\% \quad \Delta Y_1 = \frac{0,05}{12 \Omega}$$

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{18 \Omega} \quad \frac{\Delta Y_2}{Y_2} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = 5\% \quad \Delta Y_2 = \frac{0,05}{18 \Omega}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{30 \Omega}{12 \cdot 18 \Omega^2} = \frac{5}{36 \Omega} \approx 0,1389 \Omega^{-1}$$

$$\Delta Y = \sqrt{\Delta Y_1^2 + \Delta Y_2^2} \approx 0,00501 \Omega^{-1}$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = 0,0361 \approx 3,6\%$$

$$R = \frac{1}{Y} = \frac{36}{5} \Omega = 7,2 \Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta Y}{Y} \approx 3,6\% \quad \Delta R \approx 0,26 \Omega$$

2.) Fehlerfortpflanzungsrechnung mit partiellen Ableitungen (**empfohlen!**):

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 18}{30} \Omega = 7,2 \Omega$$

$$\Delta R_{R_1} = \frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 = \frac{R_2 (R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_1$$

$$= \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_1 = \left(\frac{18}{30} \right)^2 \cdot \frac{5 \cdot 12}{100} \Omega = \frac{9 \cdot 12}{500} \Omega$$

$$\Delta R_{R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_2 = \left(\frac{12}{30} \right)^2 \cdot \frac{5 \cdot 18}{100} \Omega = \frac{4 \cdot 18}{500} \Omega$$

$$\Delta R = \sqrt{\Delta R_{R_1}^2 + \Delta R_{R_2}^2} = \sqrt{\left(\frac{9 \cdot 12}{500} \right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 18}{500} \right)^2}$$

$$= \frac{36}{500} \sqrt{3^2 + 2^2} = \frac{36}{5} \cdot \frac{\sqrt{13}}{100} \approx 0,26 \Omega$$

$$\Delta R / R = \frac{\sqrt{13}}{100} \approx 3,6\%$$

3.) Vereinfachte Fehlerfortpflanzungsrechnung, direkt auf die Formel der Parallelschaltung angewendet, liefert ein **falsches Ergebnis!**

$$R_z = R_1 R_2 = 216 \Omega^2$$

$$\frac{\Delta R_z}{R_z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{100}\right)^2 + \left(\frac{5}{100}\right)^2} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \approx 0,0707$$

$$R_N = R_1 + R_2 = 30 \Omega, \quad \Delta R_N = \sqrt{0,6^2 + 0,9^2} = \frac{3}{10} \sqrt{13} \Omega$$

$$R = \frac{R_z}{R_N} = 7,2 \Omega \quad \text{da } \Delta R_z \text{ und } \Delta R_N \text{ nicht unabhängig!}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{1}{10\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{100}\right)^2} = \frac{1}{100} \sqrt{63} \approx 0,08 = 8\%$$

b) Gesamtwiderstand

$$1. \quad R_1 = 1,2 \text{ k}\Omega \quad (\pm 10\%) \quad R_2 = 680 \Omega \quad (\pm 10\%) \quad R_g = 1880 \Omega \quad (\pm 7,34\%)$$

$$2. \quad R_1 = 47 \text{ k}\Omega \quad (\pm 10\%) \quad R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega \quad (\pm 5\%) \quad R_g = 1,454 \text{ k}\Omega \quad (\pm 4,85\%)$$

$$3. \quad R_1 = 220 \Omega \quad (\pm 2\%) \quad R_2 = R_3 = 560 \Omega \quad (\pm 5\%) \quad R_g = 500 \Omega \quad (\pm 2,17\%)$$

2.8.5 Fehlerfortpflanzung bei der Division

Die Rechenregel der Fehlerfortpflanzung bei Division ergibt sich aus

$$M = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Delta M_{m_1} = \frac{\partial M}{\partial m_1} \cdot \Delta m_1 = \frac{1}{m_2} \cdot \Delta m_1 = M \cdot \frac{\Delta m_1}{m_1}$$

$$\Delta M_{m_2} = \frac{\partial M}{\partial m_2} \cdot \Delta m_2 = -\frac{m_1}{m_2^2} \cdot \Delta m_2 = -M \cdot \frac{\Delta m_2}{m_2}$$

$$\Delta M = \sqrt{(\Delta M_{m_1})^2 + (\Delta M_{m_2})^2} = \sqrt{\left(M \cdot \frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(-M \cdot \frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$$

3.4 Sensorkennlinien, Linearitätsfehler

3.4.1 Temperaturabhängiger Kupfer-Widerstand

$\alpha_{20} = 0,0043 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ bedeutet $R(\vartheta) = R_{20} \cdot (1 + 0,0043 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}(\vartheta - 20^{\circ}\text{C}))$.

Wegen $R(0^{\circ}\text{C}) = 50 \Omega$ gilt $R_{20} = \frac{50 \Omega}{1 - 0,086} \approx 54,7 \Omega$. Also

$U_M(\vartheta) = R(\vartheta) \cdot 10 \text{ mA} \approx 0,547 \text{ V} \cdot (1 + 0,0043 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}(\vartheta - 20^{\circ}\text{C}))$ und

$E = \frac{dU_M}{d\vartheta} \approx 0,547 \text{ V} \cdot 0,0043 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \approx 0,235 \frac{\text{V}}{^{\circ}\text{C}}$

3.4.2 Lokale Empfindlichkeit

X

3.4.3 Kennlinienabweichungen

X

3.5 Sensorkennlinien, Linearisierung

3.5.1 Quadratische Kennlinie eines Temperatursensorelementes

1. Tangente: $R_t(\vartheta) = 2000 \cdot (1 + 0,01 \text{ K}^{-1}(\vartheta - 25^{\circ}\text{C}))$

2. Ausgleichsgerade:

th = 0 20 50 80

rth = 1562.5 1902.5 2562.5 3402.5

Mittelwerte: mth = 37.5

rth = 2357.5

Varianz var(th) = 1225

Kovarianz cov(th, rth) = 28250

Steigung m_ag = 23.061

Ausgleichsgerade $R_{ag} = 2.3575 \text{ k}\Omega + 23.061 \cdot \frac{\Omega}{\text{K}} \cdot (\vartheta - 37.5^{\circ}\text{C})$

Achsabschnitt b_rth = 1492.7 kΩ

3. Offsetfehler und Abweichung bei 100 °C:

Offsetfehler (Tangente) $\Delta R_t(0^{\circ}\text{C}) = -62.5 \Omega$ (Abweichung bei $\vartheta = 0^{\circ}\text{C}$)

relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_t}{R(0^{\circ}\text{C})} \right| = 0.04 = 4.0\%$

Offsetfehler (Ausgleichsgerade) $\Delta R_{ag}(0^{\circ}\text{C}) = -69.8 \Omega$

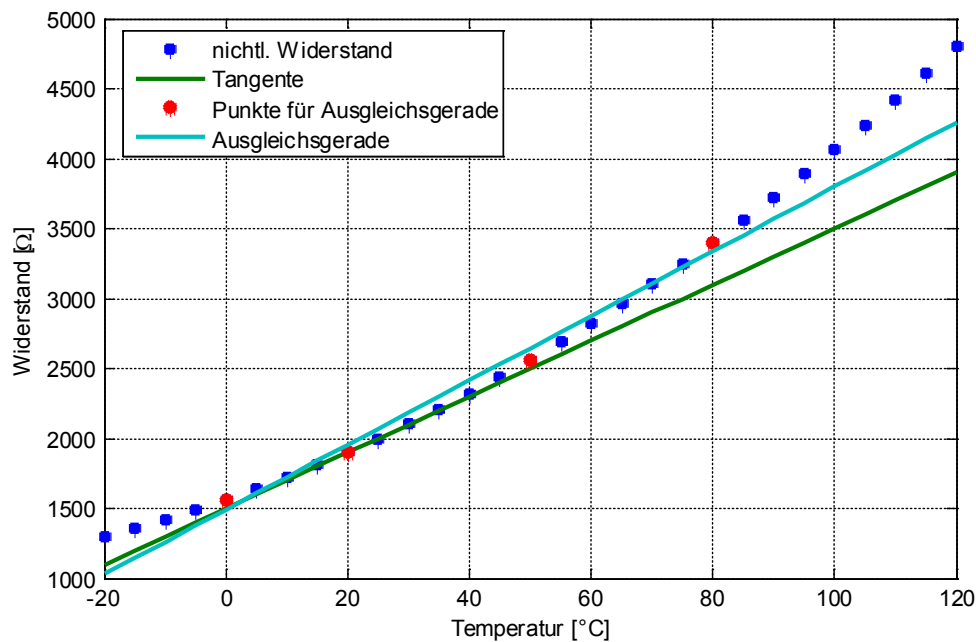
relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_{ag}}{R(0^{\circ}\text{C})} \right| = 0.0447 = 4.47\%$

Abweichung (Tang.) bei 100 °C $\Delta R_t(100^{\circ}\text{C}) = -562.5 \Omega$

relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_t}{R(100^\circ\text{C})} \right| = 0.1385 = 13.85\%$

Abweichung (Ausgleichsgerade) $\Delta R_{ag}(100^\circ\text{C}) = -263.7 \, \Omega$

relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_{ag}}{R(100^\circ\text{C})} \right| = 0.0649 = 6.49\%$



3.5.2 Fehler bei linearer Verstärkung und Anzeige

$$U_{m1}(\vartheta) = 2V \cdot (1 + 0.01 K^{-1} \cdot \Delta\vartheta + 5 \cdot 10^{-5} K^{-2} \cdot \Delta\vartheta^2)$$

1.)

Ansatz: $U_{m2} = V \cdot (U_{m1} - U_{off})$

$$\vartheta = 0^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (1.5625V - U_{off}) \stackrel{!}{=} 0V$$

$$U_{off} = 1.5625V$$

$$\vartheta = 100^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (4.0625V - U_{off}) \stackrel{!}{=} 10V$$

$$V = \frac{10V}{4.0625V - 1.5625V} = 4$$

2.)

$$U_{m1}(\vartheta) = 2.3575V + 23.061 \frac{mV}{K^{-1}} \cdot (\vartheta - 37.5)$$

$$\vartheta = 0^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (1.4927V - U_{off}) \stackrel{!}{=} 0V$$

$$U_{off} = 1.4927V$$

$$\vartheta = 100^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (3.799V - U_{off}) = 10V$$

$$V = \frac{10V}{3.799V - 1.4927V} = 4.336$$

3.)

$$\vartheta_A = 10 \frac{^\circ\text{C}}{V} \cdot U_{m2}$$

$$\vartheta = 0^\circ\text{C}: U_{m2} = 4.336 \cdot (1.5625V - 1.4927V) = 0.303V$$

$$\vartheta_A = 3.03^\circ\text{C}$$

$$\vartheta = 100^\circ\text{C}: U_{m2} = 4.336 \cdot (4.0625V - 1.4927V) = 11.14V$$

$$\vartheta_A = 111.4^\circ\text{C}$$

$$\Delta\vartheta = 11.4^\circ\text{C} \quad \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = 0.114 = 11.4\%$$

Anzeigefehler bei 50 °C:

a) Kennlinie exakt bei 0°C und 100 °C

$$\vartheta = 50^\circ\text{C}: U_{m2} = 4 \cdot (2.5625V - 1.5625V) = 4V$$

$$\vartheta_A = 40^\circ\text{C}, \quad \Delta\vartheta = 10^\circ\text{C} \quad \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{10}{50} = 20\%$$

b) Ausgleichsgerade

$$\vartheta = 50^\circ\text{C}: U_{m2} = 4.336 \cdot (2.5625V - 1.4927V) = 4.639V$$

$$\vartheta_A = 46.39^\circ\text{C}, \quad \Delta\vartheta = 3.61^\circ\text{C} \quad \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{3.61}{50} = 7.2\%$$

3.5.3 (Verbesserte) Linearisierung durch Vorwiderstand

```
function [] = Uebung_636_Linearisierung_mit_Vorwiderstand.m ()

% Linearisierung der Kennlinie eines
% SI-Widerstandstemperaturfühlers durch einen Vorwiderstand
% M. Mevenkamp, 11/2011

%% Kennlinie Si-Tempersensorelement
th = (-20:5:120)'; % Temperaturen für Plot (X-Achse)
rth = si_res(th); % Widerstandswerte (Y-Achse)

%% Messspannung Uml
Rv = 18e3; % [Ohm] Vorwiderstand
U_S = 10; % [V] Speisespannung
Uml = rth ./ (Rv + rth) * U_S;
... etc.
```

3.5.4 Linearitätsfehler einer Temperaturmessung

X

3.7 Übungen "Oszilloskop"

3.7.1 Oszillogramm, Bestimmung von Signalparametern

$$T \approx 120 \mu\text{s}, f \approx 8,33 \text{ kHz}, \hat{U} \approx 5 \text{ V}$$

$\varphi \approx -120^\circ$ bezogen auf die Sinusschwingung und $\varphi \approx 150^\circ$ bezogen auf den Kosinus.

$$u(t) \approx \hat{U} \cos\left(\frac{2\pi}{120 \mu\text{s}} \cdot t + \frac{5}{6}\pi\right)$$

3.7.2 Oszillogramm, Frequenzgang

a) Oszillogramm auswerten

$$\text{Periodendauer} \quad T = 7.2 \cdot 20 \mu\text{sec} = 144 \mu\text{sec}$$

$$\text{Frequenz} \quad f = \frac{1}{T} = 6944 \text{ Hz}$$

$$\text{Kreisfrequenz} \quad \omega = 2\pi f = 43633 \text{ rad/sec}$$

$$\text{Amplitudenverhältnis} \quad |G(j\omega)| = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \frac{2,5 \cdot 0,2 \text{ V}}{3 \cdot 0,5 \text{ V}} = \frac{0,5 \text{ V}}{1,5 \text{ V}} = \frac{1}{3} \approx 0,333 \approx -9,54 \text{ dB}$$

$$\text{Zeitdifferenz} \quad \Delta T = T_{0,e} - T_{0,a} \approx 7.2 \cdot 20 - 8.4 \cdot 20 = -1.2 \cdot 20 \mu\text{sec} = -24 \mu\text{sec}$$

$$\text{Phasendifferenz} \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta T}{T} \cdot 360^\circ = -60^\circ$$

b) Filterschaltung

Der negative Phasenwinkel deutet auf Tiefpasscharakter hin (Ausgangssignal "nacheilend" gegenüber dem Eingangssignal)

4.3 Operationsverstärkerschaltungen

4.3.1 Elektrometer-Differenzverstärker (Instrumentenverstärker)

Lösung siehe Skript, Anhang B

4.3.2 OP-Schaltung zur Temperaturmessung, Kennlinienabweichungen

x

4.3.3 Nichtinvertierender Verstärker

$$U_a = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot U_e$$

4.3.4 D/A-Wandler

Die OP-Schaltung realisiert einen invertierenden Addierer. Da die Referenzspannung negativ ist, ergibt sich eine positive Ausgangsspannung.

$$U_a = - \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16}\right) \cdot (-10 \text{ V}) = (5 + 2,5 + 0 + 0,625) \text{ V} = 8,125 \text{ V}$$

4.6 Übungen "Brückenschaltungen"

4.6.1 Einfache Brückenschaltung

$$R_1 = 500 \, \Omega$$

4.6.2 Anwendung DMS-Messbrücke

a) x

$$\text{b) } |U_M| \approx 11.1 \text{ mV}$$

4.6.3 Vollbrücke

$$\text{Ergebnis: } U_M \approx -U_S \frac{\Delta R_\varepsilon}{R_0}$$

5.4 Übungen "Digitalisierung, AD-, DA-Umsetzung"

5.4.1 Abtastfrequenz, ADU-Wortlänge

- a) Eine mögliche Wahl wäre ein A/D-Wandler mit Eingangsspannungsbereich $-5V \dots +5V$.

Wortlänge so, dass $\frac{\Delta q}{\hat{u}} = \frac{\frac{10V}{2^M - 1}}{3,5V} \leq 0,001$, also $M \geq 12$

- b) Signalfrequenz ist $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 100 \text{ Hz}$. Die nach Nyquist-Shannon zulässige minimale Abtastrate ist demnach $f_s = 200 \text{ Hz}$. In typischen Anwendungen ist eine um etwa den Faktor 5 bis 10 größere Abtastfrequenz, also $f_s = 500 \dots 1000 \text{ Hz}$ empfehlenswert.

5.4.2 Quantisierung

a) $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{20V}{2^{12}-1} \approx 2,442 \text{ mV}$ b) $\frac{S}{N} = \frac{\frac{3,5V-1,2V}{2}}{\varepsilon} \approx 470,925$ c) $\frac{S}{N} \approx 53,46 \text{ dB}$

d) $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{5V}{2^{12}-1} \approx 0,6105 \text{ mV}$ $\frac{S}{N} \approx 1883,7 \approx 65,5 \text{ dB}$

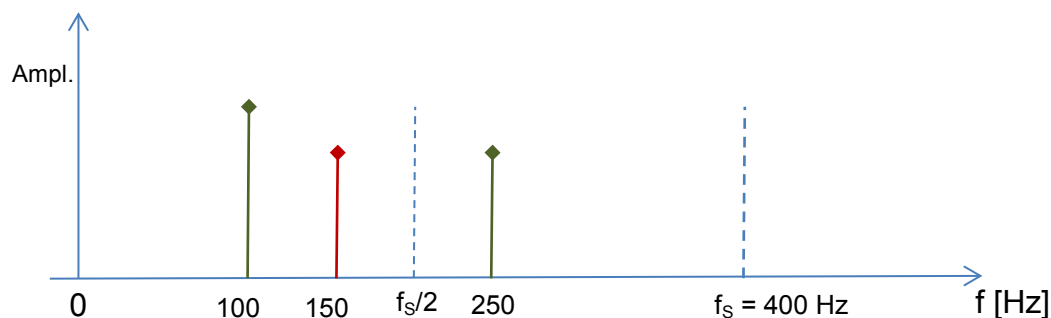
5.4.3 Abtastung von Signalen

- a) $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 159,155 \text{ Hz}$, die Abtastrate ist mehr als doppelt so groß. Die Einstellung ist also in Ordnung.
- b) Das gleichgerichtete Sinussignal ist nicht bandbegrenzt. Auch eine Vergrößerung der Abtastrate würde das Auftreten von Aliasschwingungen im digitalisierten Signal nicht verhindern können. Es muss ein Aliasfilter eingesetzt werden, z. B. mit Grenzfrequenz 1600 Hz und Abtastrate 3500 Hz , um die Oberschwingungen wenigstens bis zur 10. Ordnung korrekt zu erfassen.

5.4.4 Abtastung und Rekonstruktion von Signalen

- a) Das digitalisierte Signal enthält neben den 100 Hz - und 250 Hz -Schwingungen eine Aliasschwingung der Frequenz 150 Hz . Das gefilterte Ausgangssignal des DA-Wandlers ist also $\tilde{u}(t) \approx \hat{U}_1 \cos(2\pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot t) + \hat{U}_2 \cos(2\pi \cdot 150 \text{ Hz} \cdot t)$

- b)



Zum Spektrum von $u(t)$ gehören die Linien bei 100 Hz und 250 Hz . Zum Spektrum von $\tilde{u}(t)$ gehören die Linien bei 100 Hz und 150 Hz .

5.6 Übungen "Digitale Signalverarbeitung, Kenngrößen, Spektren"

5.6.1 Crest-Faktor

X

5.6.2 Analyse einer Wertefolge

Das Matlab-Skript

```
% loesung_kenngroessen.m
t = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11]';
x = [1 sqrt(3)/2 1/2 0 -1/2 -sqrt(3)/2 -1 -sqrt(3)/2 -1/2 0 1/2 sqrt(3)/2]';
N = length(x)

% Skizze mit Cosinus-Schwingung zum Vergleich (Teilaufgabe h)
t1 = [0:0.1:12];
x1 = cos(2*pi/12*t1);
figure(1); clf; plot(t,x,t1,x1); grid

% Kenngrößen
xm = sum(x)/N

xrms = sqrt(x'*x / N)

xcrest = 1 / xrms

xstd = std(x)

xvk = xstd / xm

xmed = median(x)

figure(2); clf
hist(x,[-1:0.05:1])
```

liefert:

t =	x =
0	1.0000
1	0.8660
2	0.5000
3	0
4	-0.5000
5	-0.8660
6	-1.0000
7	-0.8660
8	-0.5000
9	0
10	0.5000
11	0.8660

N = 12

xm = -1.8504e-017

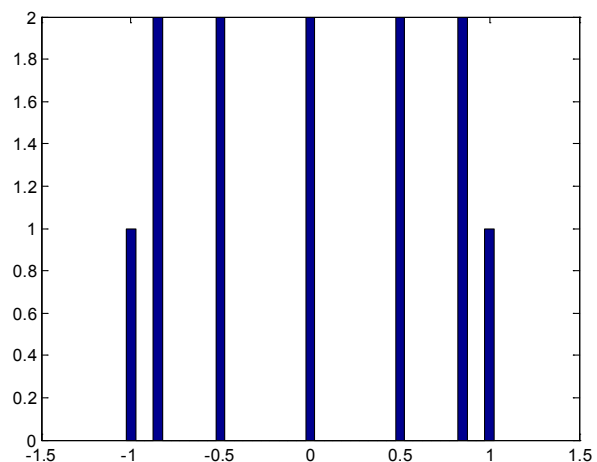
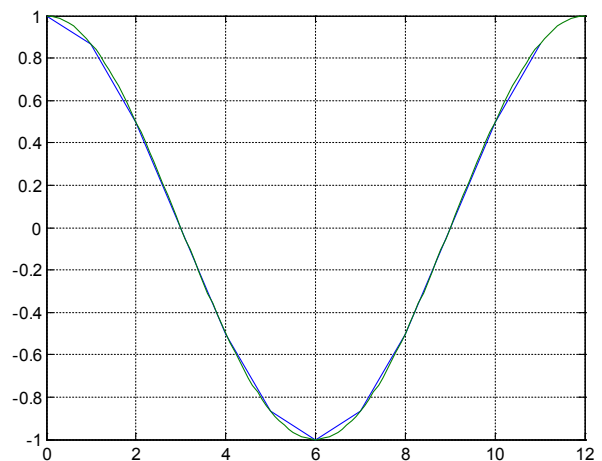
xrms = 0.7071

xcrest = 1.4142

xstd = 0.7385

xvk = -3.9914e+016

xmed = 0



mit nebenstehendem Signalverlauf und Histogramm.

i) Das Amplitudenspektrum besteht nur aus einer Linie der Länge 1 bei der Frequenz $1/12$.

5.6.3 Spektrum

x

5.6.4 Spektrum 2

x

6.3 Übungen "Vollständiges Messergebnis, Fehlerfortpflanzung"

6.3.1 Messunsicherheit bei zufälligen und unbek. system. Abweichungen

$$\vartheta_{ii} = \vartheta_M - \vartheta_R \quad \vartheta_R = 23^\circ\text{C} \pm 0,5\text{K} \quad \bar{\vartheta}_M = 65\text{K}$$

$$\vartheta_M = \frac{U_M}{50 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}} \quad \Delta U_M = 0,015 \cdot 5\text{mV} = 75\mu\text{V}$$

$$\Delta \vartheta_{M,1} = \frac{\Delta U_M}{50 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}} = \frac{75}{50} \text{K} = 1,5\text{K}$$

$$\Delta \vartheta_{M,2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot t_{10,95} \cdot 1\text{K} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 2,26 \cdot 1\text{K} \approx 0,715\text{K}$$

$$\bar{\vartheta}_{ii} = \bar{\vartheta}_M - \bar{\vartheta}_R = 42^\circ\text{C}$$

$$\Delta \vartheta_{ii} = \sqrt{\Delta \vartheta_{M,1}^2 + \Delta \vartheta_{M,2}^2 + \Delta \vartheta_R^2} \approx 1,735\text{K}$$

vollst. Messergebnis:

$$\vartheta_{ii} = (42 \pm 1,74)^\circ\text{C}, \quad (1 - \alpha) = 0,95$$

6.3.2 Temperaturmessreihe mit Messgeräte-Toleranz

a) Mittelwert: $\bar{\vartheta} = 362^\circ\text{C}$ Stat. Standardabweichung: $s_{\vartheta} \approx 9,56^\circ\text{C}$ b) $\Delta \vartheta = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot 2,37 \cdot s_{\vartheta} \approx 8,0^\circ\text{C}$,c) $\Delta \vartheta_g = \sqrt{\Delta \vartheta^2 + e^2}$, $e = 0,025 \cdot 500^\circ\text{C} = 12,5^\circ\text{C}$

$$\Delta \vartheta_g \approx 14,84^\circ\text{C}$$

$$\hat{\vartheta} = 362^\circ\text{C} \pm 14,84^\circ\text{C}, \quad (1 - \alpha) = 0,95$$

6.3.3 Strommessung mit Multimeter

x

6.3.4 Messunsicherheit einer Messreihe

a) $\bar{S} = 30,75 \mu\text{m}$

$$s_{S,4} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum (\dots)^2} = 3,304 \mu\text{m}$$

$$t_{4,95} = 3,18$$

$$\Delta S_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} t_{N,95} s_N = 5,253 \mu\text{m}$$

$$\Delta S_2 = 1 \mu\text{m}$$

$$\Delta S = \sqrt{\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2} = 5,35 \mu\text{m}$$

$$S = 30,75 \pm 5,35 \mu\text{m}, \quad (1-\alpha) = 0,95$$

b) $\Delta S_i = 3,18 \cdot 3,304 \mu\text{m} \approx 10,5 \mu\text{m}$
 $20,25 \mu\text{m} < S_i < 41,25 \mu\text{m}$

c) $\bar{S} = 30,75 \mu\text{m}$ (unverändert)

$$\Delta S_{N=6} = 3,23 \mu\text{m}$$

$$\frac{\Delta S_{N=4} - \Delta S_{N=6}}{\Delta S_{N=4}} \approx 0,4$$

Die Messunsicherheit wird durch die zwei weiteren Messungen um 40% reduziert!

6.3.5 Widerstandstoleranzen

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\Delta R_{ges} = \sqrt{(\Delta R_1)^2 + (\Delta R_2)^2 + (\Delta R_3)^2}$$

$$\Delta R_{ges} = \sqrt{(1,1)^2 + (1,35)^2 + (0,66)^2} \text{ k}\Omega \approx 1,86 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{\Delta R_{ges}}{R_{ges}} = \frac{1,86}{82} \approx 0,0227 = 2,27\%$$

Die geforderte Toleranz von 1% wird durch die Serienschaltung nicht eingehalten.

6.3.6 Messwertablesung

a) $\bar{I} = \frac{129 \text{ mA}}{5} = 25,8 \text{ mA}, \quad s_I^2 = 4,7 \text{ mA}^2, \quad s_I \approx 2,168 \text{ mA}$

b) $\Delta I \approx 2,695 \text{ mA}$

c) $\widetilde{\Delta I} = \sqrt{5} \cdot \Delta I \approx 6,027 \text{ mA}$

$$\text{Zu erwarten ist } 19,77 \text{ mA} < I_6 < 31,83 \text{ mA}$$

6.3.7 Fehlerbeiträge einer Messkette, Fehlerfortpflanzung

Sei G^* die tatsächliche Bestrahlungsstärke, dann hat die Messkette folgende Übertragungsglieder

$$U_P = 14,39 \frac{\mu V}{W/m^2} \cdot G^*, \quad I_m = 1 \frac{mA}{mV} \cdot U_P + 4 mA, \quad U_m = 500 \Omega \cdot I_m$$

$$\text{sowie schließlich } G = 138.985 \frac{W}{m^2 V} \cdot U_m - 277.97 \frac{W}{m^2}.$$

Bis auf den letzten Schritt, der lediglich eine Berechnung darstellt, die mit hoher Genauigkeit ausgeführt werden kann, sind alle diese Übertragungsglieder fehlerbehaftet.

a) Es ist

$$G = 500 \frac{W}{m^2}, \quad U_P \approx 7,195 mV, \quad I_m \approx 11,195 mA, \quad U_m \approx 5.5975 V$$

und

$$\Delta U_P = 0,025 \cdot 7,195 mV \approx 0,18 mV,$$

$$\Delta I_{m,V} = \frac{\partial I_m}{\partial V} \Delta V = 7,195 mV \cdot 0,01 \frac{mA}{mV} \approx 0,072 mA$$

$$\Delta I_{m,U_P} = \frac{\partial I_m}{\partial U_P} \Delta U_P \approx 1 \frac{mA}{mV} \cdot 0,18 mV = 0,18 mA$$

$$\Delta I_m = \sqrt{(\Delta I_{m,V})^2 + (\Delta I_{m,U_P})^2} \approx 0,194 mA, \quad \frac{\Delta I_m}{I_m} \approx 1,73\%$$

$$\frac{\Delta U_m}{U_m} = \sqrt{\left(\frac{\Delta I_m}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} \approx 2,0\%, \quad \Delta U_m \approx 0,112 V$$

$$\Delta G = 138,985 \frac{W}{m^2 V} \cdot 0,112 V \approx 15,56 \frac{W}{m^2}$$

$$\text{b) } \frac{\Delta G}{G} \approx 3,1\%$$

6.3.8 NTC Parameterbestimmung

$$R_1 = R_0 \cdot e^{B \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right)} \Rightarrow B = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}} \cdot \ln \frac{R_1}{R_0} = \frac{T_0 \cdot T_1}{T_1 - T_0} \cdot (\ln R_0 - \ln R_1)$$

angegebene Nennwerte: $R_1 = 500 \Omega$, $R_0 = 30 k\Omega$, $T_1 = 353 K$, $T_0 = 273 K$

$$\Rightarrow \bar{B} = 4932,1 K$$

$$\Delta B = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial R_0} \cdot \Delta R_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial T_1} \cdot \Delta T_1 \right)^2} \quad (\Delta T_0 = 0!)$$

$$\frac{\partial B}{\partial R_1} = - \frac{T_0 \cdot T_1}{T_1 - T_0} \cdot \frac{1}{R_1} = 2,409 \frac{K}{\Omega}$$

$$\frac{\partial B}{\partial R_0} = \frac{T_0 \cdot T_1}{T_1 - T_0} \cdot \frac{1}{R_0} = 0,04015 \frac{K}{\Omega}$$

$$\frac{\partial B}{\partial T_1} = \frac{T_0 \cdot (T_1 - T_0) - T_0 \cdot T_1}{(T_1 - T_0)^2} \cdot (\ln R_0 - \ln R_1) = -\frac{T_0^2}{(T_1 - T_0)^2} \cdot (\ln R_0 - \ln R_1) = -47,68$$

Messabweichungen: $\Delta R_1 = 5 \Omega$, $\Delta R_0 = 300 \Omega$, $\Delta T_1 = 1 \text{ K}$

$$\begin{aligned} \Delta B &= \sqrt{(2,409 \cdot 5)^2 + (0,04015 \cdot 300)^2 + (-47,68 \cdot 1)^2} \text{ K} \\ &= \sqrt{145,11 + 145,11 + 2273,3} \text{ K} = 50,63 \text{ K} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als vollständiges Messergebnis:

$$B = 4932,1 \text{ K} \pm 50,63 \text{ K}, \quad (1 - \alpha) = 95\%$$

Die relative Messabweichung beträgt 1,03%. Im Vergleich zur häufig anzutreffenden Datenblattangabe " $\pm 5\%$ " hat die Messung eine wesentlich geringere Messunsicherheit.

6.3.9 NTC: R_∞

$$R_\infty = R_0 \cdot e^{-\frac{B}{T_0}}$$

Messabweichungen: $\Delta R_0 = 300 \Omega$, $\Delta B = 200 \text{ K}$, $\Delta T_0 = 0,5 \text{ K}$

$$\bar{R}_\infty = 26,5 \text{ k}\Omega \cdot e^{-\frac{4000}{298}} = 39,25 \text{ m}\Omega$$

$$\frac{\partial R_\infty}{\partial R_0} = e^{-\frac{B}{T_0}} = 1,481 \cdot 10^{-6} \quad \frac{\partial R_\infty}{\partial B} = -\frac{R_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{B}{T_0}} = -1,317 \cdot 10^{-4} \frac{\Omega}{\text{K}}$$

$$\frac{\partial R_\infty}{\partial T_0} = \frac{R_0 \cdot B}{T_0^2} \cdot e^{-\frac{B}{T_0}} = 1,768 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega}{\text{K}}$$

$$\begin{aligned} \Delta R_\infty &= \sqrt{(1,481 \cdot 10^{-6} \cdot 300)^2 + (-1,317 \cdot 10^{-4} \cdot 200)^2 + (1,768 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5)^2} \Omega \\ &= \sqrt{1,974 \cdot 10^{-7} + 6,938 \cdot 10^{-4} + 7,815 \cdot 10^{-7}} \Omega \\ &= 26,36 \text{ m}\Omega \end{aligned}$$

Das vollständige Messergebnis lautet somit

$$R_\infty = 39,25 \text{ m}\Omega \pm 26,36 \text{ m}\Omega, \quad (1 - \alpha) = 95\%$$

Anmerkung: Die relative Messabweichung beträgt mehr als 67%. Eine hinreichend verlässliche Angabe des Grenzwiderstands bei sehr hohen Temperaturen ist also auf diese Weise nicht möglich. Ursache ist offenbar die hohe Empfindlichkeit bezüglich der Toleranz des Parameters B. Ermittlung von B wie in Aufgabe 7.3.8 reduziert die Abweichung von B auf ca. 1% und damit die Messunsicherheit von R_∞ auf ca. 14%.