5 Digitale Signalverarbeitung (insbesondere: Dreckeffekte der Digitalisierung)

5.1 Messsignalkonditionierung

Die Messkette der digitalen Signalerfassung hat folgende Struktur:

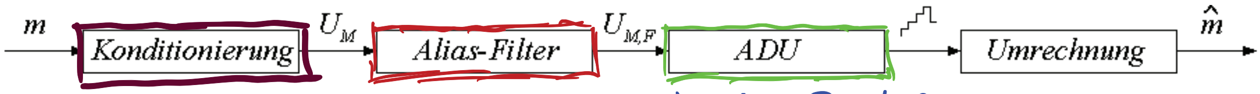


Abbildung 5.1: Messkette der digitalen Signalerfassung

Analog-Digital-Umsetzer (-Wandler)

Aufgaben der **Signalkonditionierung**:

- Wandlung in elektrisches Signal (z.B. Brückenschaltung)
- Kennlinienkorrektur, Linearisierung (ggf. auch galvanische Trennung)
- Messbereichsanpassung, bestmögliche Abbildung der Messgröße auf den Eingangsspannungsbereich ("Range") des Analog-Digital-Umsetzers (ADU). Beispiel: Verstärkungsanpassung mittels R_3 in der OP-Schaltung zur DMS-Signalaufbereitung → Abbildung 4.4)

Aufgabe des **Aliasfilters**:

typisch −200 dB/Dekade

Ein Aliasfilter ist ein steilflankiger Tiefpass mit einer Grenzfrequenz (knapp) unterhalb der halben Abtastrate des ADU. Durch diese **Begrenzung der Bandbreite des Messignals** werden Aliaseffekte verhindert (siehe Kap. 5.3)

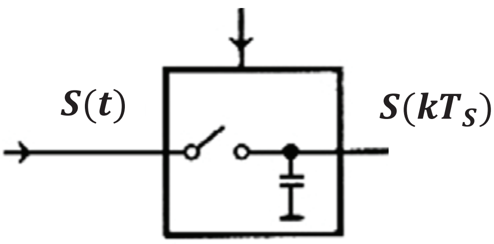
Diskretisiert zeitlich (Abtastung) und bezüglich der Amplituden

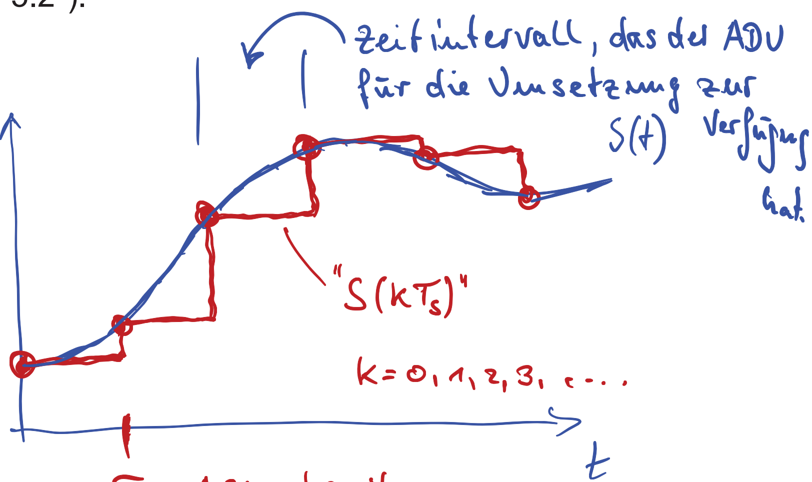
5.2 ADU, Amplitudenquantisierung

Digitale Messwerterfassung besteht aus Abtastung (S & H, Sample & Hold) und Umsetzung der Messspannungen in digitale Zahlenwerte mit Hilfe eines Analog-Digital-Umsetzers (ADU, siehe Abbildung 5.2[1]).

Abtastung (Sample&Hold)

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$





T_S Abtastzeit

$f_S = \frac{1}{T_S}$ Abtastrate

[1] S. Hentschke: *Grundzüge der Digitaltechnik*, Teubner Verlag, Stuttgart, 1988

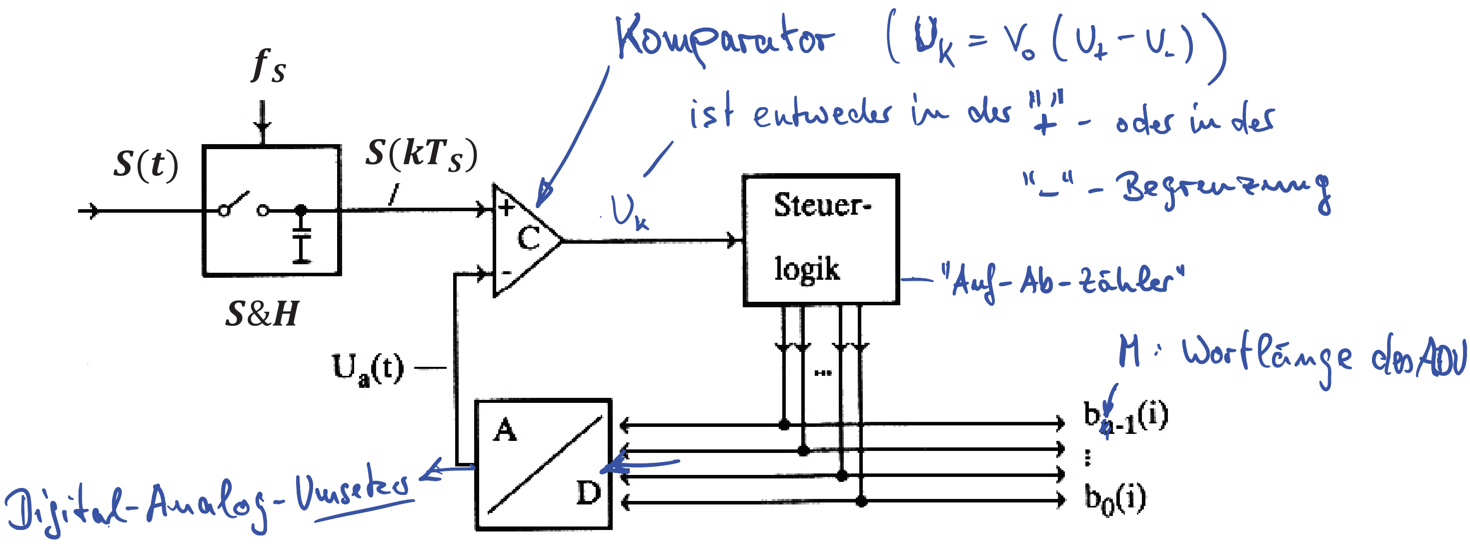
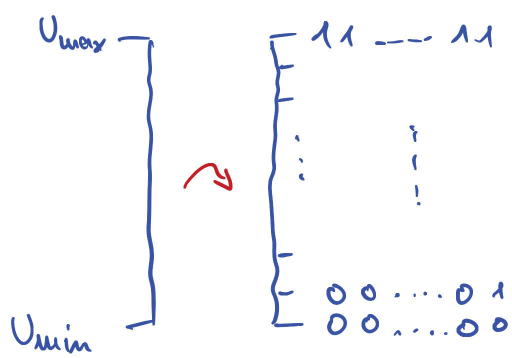


Abbildung 5.2: Sample&Hold und "Sukzessive Approximation"-ADU

nicht das einzige Verfahren, aber z.B. vom I/O-System des Laborversuchs eingesetzt.

ADU bildet den "Range" (analog) auf eine begrenzte Zahl von Binärworten ab (2^M)



Digitalisierung

Da die Wortlänge M der digitalen Zahlendarstellung immer begrenzt ist, kann nicht jeder Wert der Eingangsspannung exakt dargestellt werden.

Die Abbildung des kontinuierlichen Eingangs auf die begrenzte digitale Wertemenge des Ausgangs wird als **Amplitudenquantisierung** bezeichnet.

Die entstehende Abweichung bezeichnet man als **Quantisierungsfehler**.

Kenngrößen:

- Eingangsspannungsbereich („Range“) U_{max} bzw. $\pm U_{max}$;

  typisch: unipolar 0-5V, 0-10V, bipolar ±5V, ±10V

- Wortlänge M

  typisch: 8, 10, 12, 14, 16 Bit (bei anspruchsvollen Messaufgaben auch höher)

- Wertebereich $0 \cdots 2^M - 1$

  typisch: $0 - 255,\ 0 - 1023,\ 0 - 4095,\ 0 - 16383,\ 0 - 65535$

- Quantisierungsfehler ε

LSB wird gesetzt, wenn $U_e \geq Q$

$Q = \frac{U_{Max} - U_{Min}}{2^M - 1}$

$U_e \geq \frac{Q}{2}$

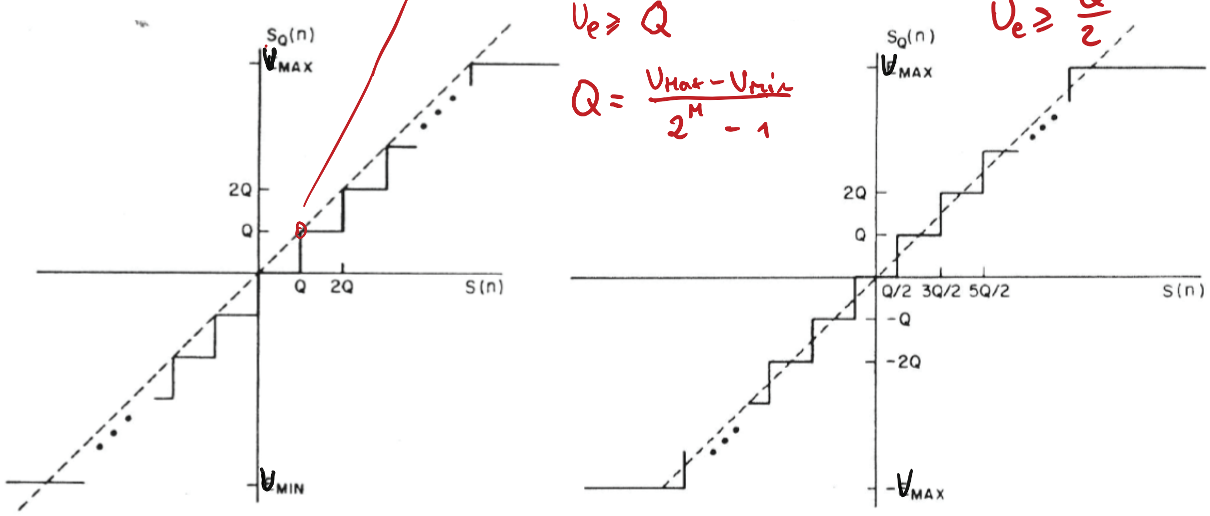


Abbildung 5.3: Quantisierungsstufen und Quantisierungsabweichung ohne und mit Rundung

Stufenhöhe ist in beiden Fällen gleich.

Abschätzung des Quantisierungsrauschens

- Höhe der Quantisierungsstufen

$$\Delta q = \frac{U_{max} - U_{min}}{2^M - 1}$$

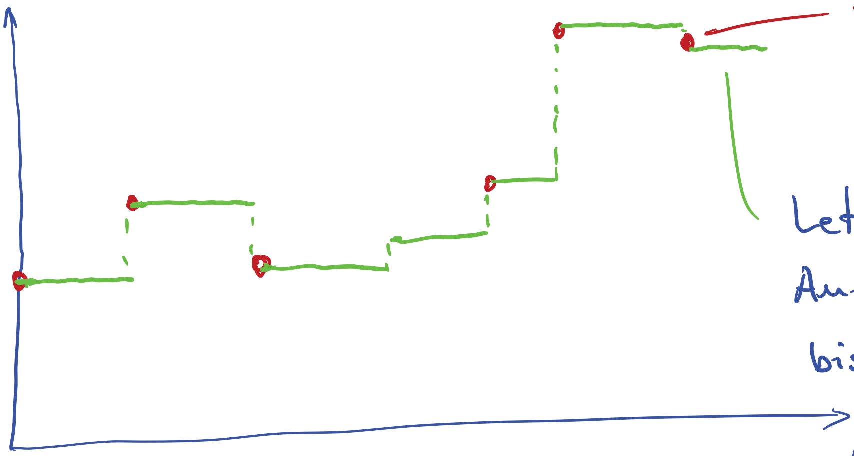
z. B. ($U_{max} = 5\,V$ unipolar, $M = 10$ Bit): $\Delta q = \frac{5\,V}{1023} \approx 5\,mV$

- Quantisierungsfehler (Rauschamplitude)

$\varepsilon \leq \Delta q$ oder $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\Delta q$ (abhängig vom ADU-Typ)

Digital-Analog-Umsetzer

Auch das Ausgangssignal eines Digital-Analog-Umsetzers weist einen stufenförmigen Verlauf auf. Dies hat aber nichts mit Quantisierung zu tun.



Binärwerte, die am Eingang

Letzter Wert wird am Analogausgang gehalten, bis ein neuer anliegt.

Stufung ist hier ein Effekt der zeitlichen Diskretisierung.

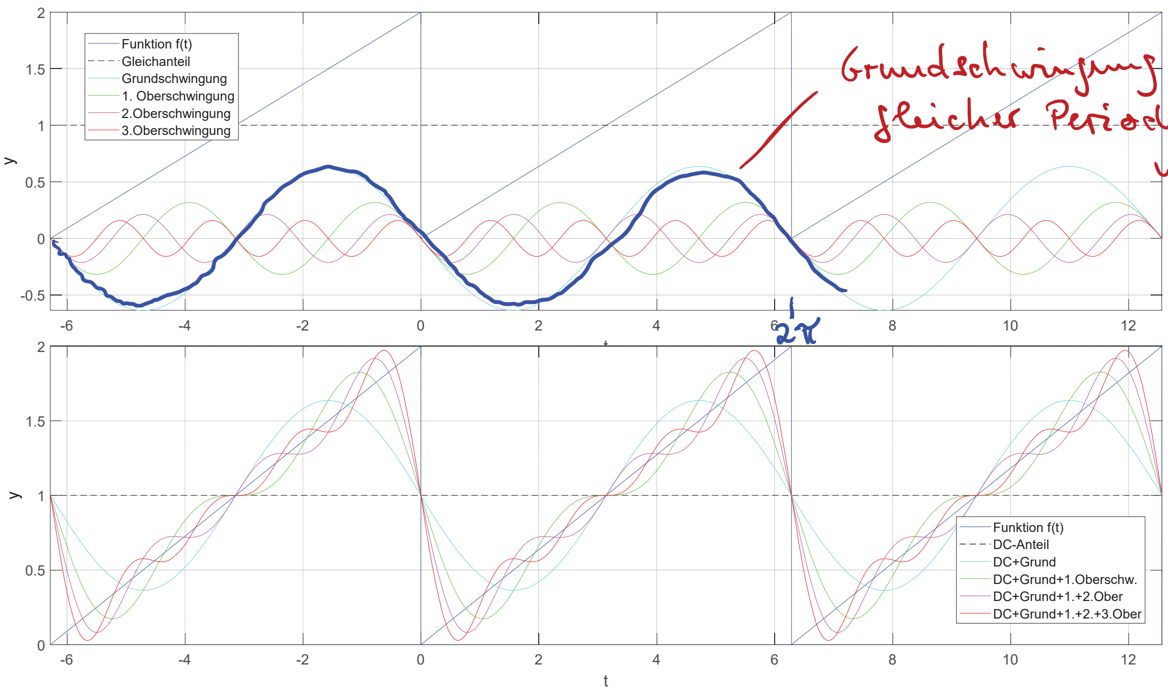
Quantisierung passiert vorher in der CPU in Form von eventuellen Rundungsfehlern bei Berechnungen.

Der zweite "Dreckeffekt" resultiert aus der zeitlichen Diskretisierung.

5.3 Signalspektrum, Bandbreite, Aliaseffekt, Aliasfilterung

5.3.1 Fourierreihen, Fourieranalyse

Die Zusammensetzung eines Signals aus Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz, Amplitude und Phasenlage ist ein grundlegendes Konzept der Signalverarbeitung und wird mathematisch durch Fourier-Reihen bzw. durch die Fourier-Transformation beschrieben.



Grundschwingung mit gleicher Periodendauer wie das Signal.

Abbildung 5.4: Fourierzerlegung und Fourierapproximation eines "Sägezahn"-Signals

Abbildung 5.4 visualisiert als Beispiel die Zusammensetzung eines sogenannten "Sägezahn"-Signals aus "Harmonischen" (Sinusschwingungen).

Man unterscheidet

- **"Grundschwingung"** – Sie hat die gleiche Periodendauer wie das Signal und damit auch die gleiche Frequenz. Hier: $T = 2\pi$, $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$
- **"Oberschwingungen"** – Dies sind die weiteren Sinusfunktionen der Fourierreihe mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz.

Die Amplituden und Phasenlagen der Harmonischen sowie die Größe eines eventuellen Gleichanteils ergeben sich aus den Koeffizienten der **Fourier-Reihe**.

Andere Frequenzen sind nicht enthalten, keine niedrigeren als die Signalfrequenz und keine nicht-ganzzahligen Vielfachen.

Die Fourierreihe kann auch in der Form

Amplitude

Phasenwinkel der n-ten Harmonischen

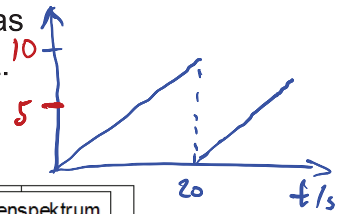
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n\right)$$

Gleichanteil, Mittelwert

geschrieben werden. Der Zeitverlauf ist damit vollständig anhand der Amplituden A_n und Phasenwinkel φ_n der Harmonischen beschrieben.

Daraus ergibt sich die Darstellung eines Signals durch sein **Spektrum**.

Dazu wird in einer Grafik zu jeder auftretenden Frequenz $f_n = n \cdot f_1$ die Amplitude A_n und der Phasenwinkel φ_n zuordnet. Besonders aussagekräftig ist dabei das **Amplitudenspektrum**, die Darstellung der Amplituden über der Frequenz.



Beispiel:

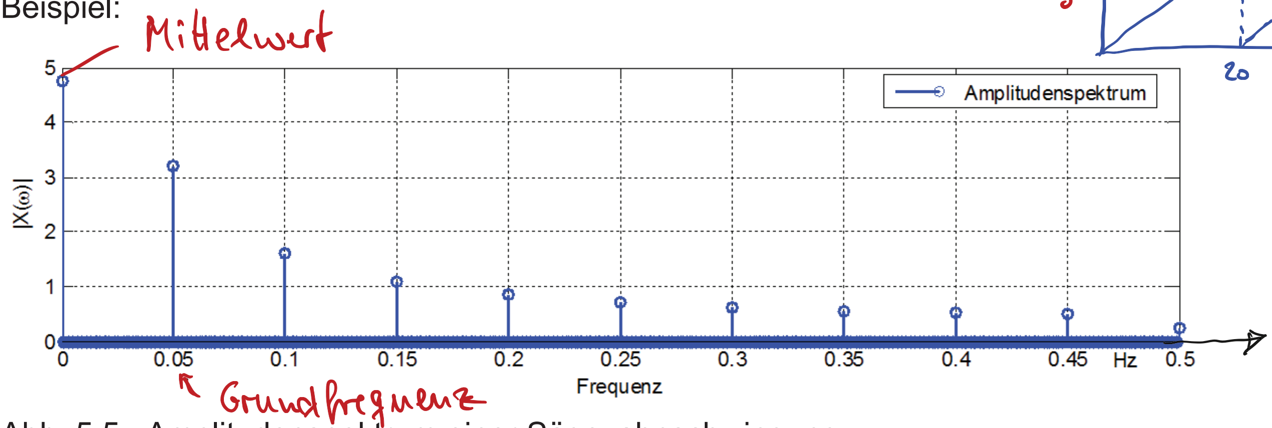


Abb. 5.5: Amplitudenspektrum einer Sägezahnschwingung

$f_1 = 0{,}05$ Hz $\quad T_1 = \frac{1}{f_1} = 20$ s

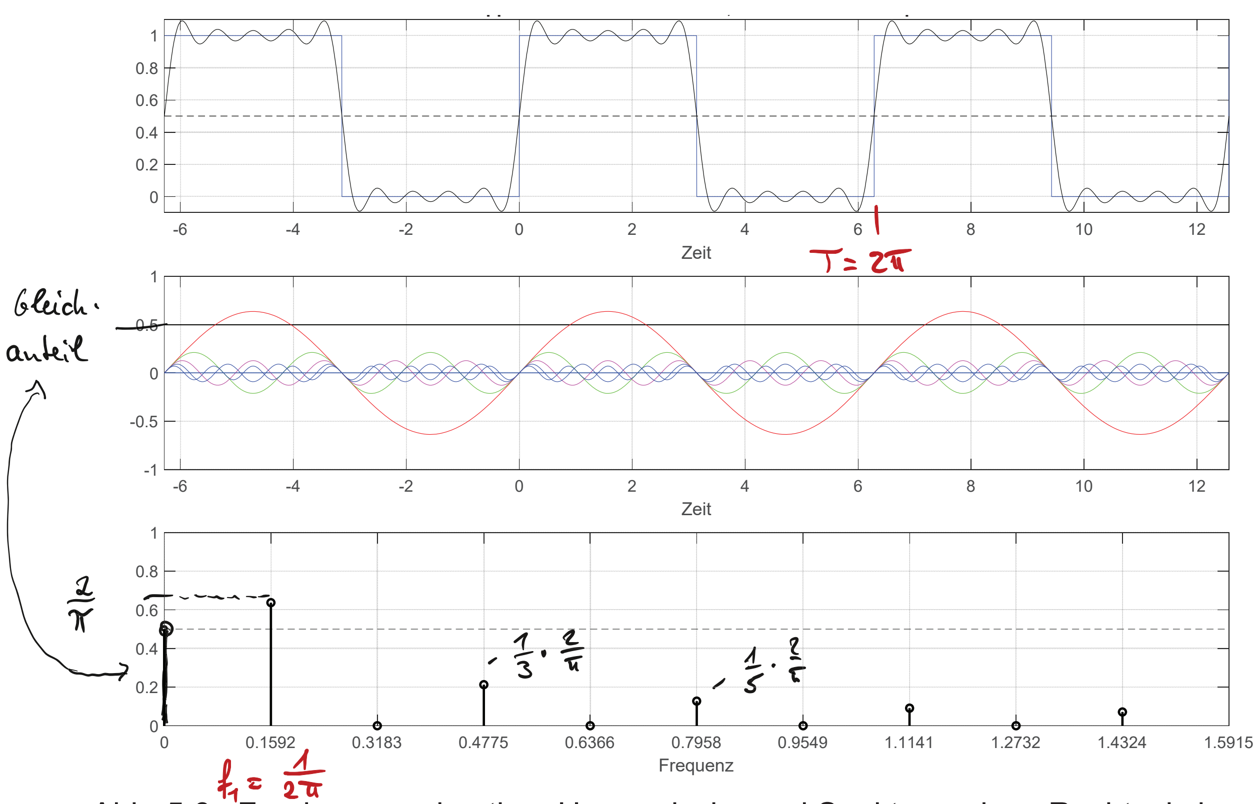


Abb. 5.6: Fourierapproximation, Harmonische und Spektrum eines Rechtecksignals

Die **Fourier-Analyse** oder **Spektralanalyse** ist die Anwendung dieses Konzepts auf beliebige, nicht periodische Signale mit Hilfe der **Fouriertransformation**.

Zur Berechnung des Spektrums wird in der messtechnischen Praxis die Diskrete Fouriertransformation (DFT) auf das digitalisierte Signal angewendet. Die **FFT** (Fast Fourier Transform) ist ein schneller Algorithmus für die Ausführung dieser Rechnung.

Eine Zusammenfassung des mathematischen Hintergrunds (Fourierreihen, Fouriertransformation, FFT) ist in den Kapiteln 5.7 und 5.8.

Die **Bandbreite** eines Signals bezeichnet die höchste in diesem Signal zu berücksichtigende Frequenz[1]. Sie ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Bandbreite im Datenblatt eines Gerätes, wo damit die Grenzfrequenz bezeichnet wird. → Oszilloskop

Signale wie etwa die obige Sägezahnschwingung, deren Fourierreihe unendlich viele Frequenzen aufweist, heißen **nicht bandbegrenzt**.

Eine Möglichkeit, auch für solche Signale eine Bandbreite anzugeben, besteht darin, nur die Frequenzen zu berücksichtigen, deren Amplituden größer sind als die Quantisierungsstufenhöhe des verwendeten Analog-Digital-Umsetzers.

Ignoriere Oberschwingungen, die im Quantisierungsrauschen untergehen.

Die Kenntnis der Bandbreite eines Signals ist entscheidend für die korrekte Auslegung der digitalen Signalerfassung (siehe Kap. 5.3.3).

Beispiel/Übung:

Eine Rechteckschwingung mit der Frequenz $f = 10\ Hz$ und der Amplitude $A = 1\ V$ wird mit einem 8 Bit-Analog-Digital-Umsetzer (Eingangsspannung: 0 – 5V) digitalisiert. Welches ist die höchste in dem Signal enthaltene Frequenz, die sinnvoll zu berücksichtigen wäre?

Für die Amplituden der Oberschwingungen eines Rechtecksignals gilt $A_n = \frac{4A}{n\pi}$.

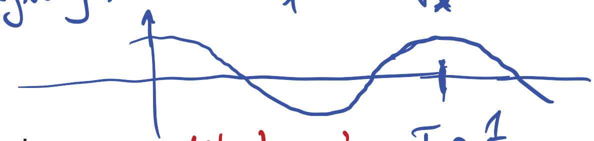
[1] Diese Definition ist für die hier betrachteten automatisierungstechnischen Anwendungen i. d. R. zutreffend. In der Informationstechnik gilt sie nur für Basisbandsignale.

5.3.2 Diskretisierung, Aliasschwingungen

Ein kontinuierliches Signal

Sinusschwingung mit Frequenz f_x

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(2\pi f_x t) = \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_x} t\right)$$



wird durch die Abtastung mit der Abtastzeit T_S zu einer "zeitdiskreten" Wertefolge (siehe Kap. 5.2). Diese lautet hier

Abtastung im Abstand T_S $T_x = \frac{1}{f_x}$

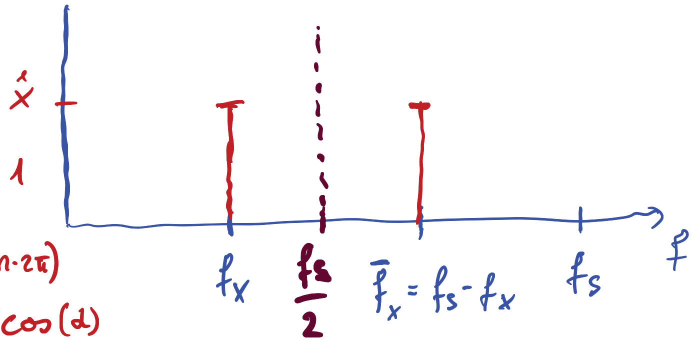
("Sample Time")

$$x_k = x(kT_S) = \hat{x} \cdot \cos(2\pi f_x k T_S) = \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_x} k T_S\right), k = 0, 1, 2, \cdots$$

Zu dem Signal $\bar{x}(t) = \cos(2\pi \bar{f}_x t)$ mit der Frequenz $\bar{f}_x = f_s - f_x$ gehört entsprechend die Wertefolge

$$\bar{x}_k = \hat{x} \cos(2\pi \bar{f}_x k T_S)$$

Aber



$f_S \cdot T_S = 1$

$$\cos(2\pi \bar{f}_x k T_S) = \cos(2\pi (f_s - f_x) k T_S)$$

$$= \cos(2\pi \cdot k - 2\pi f_x k T_S)$$

$$= \cos(2\pi f_x k T_S)$$

$\cos(\alpha + n \cdot 2\pi) = \cos(\alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\Rightarrow \quad \bar{x}_k = x_k$!

Es gibt also zwei verschiedene Zeitsignale mit der gleichen digitalen Wertefolge!

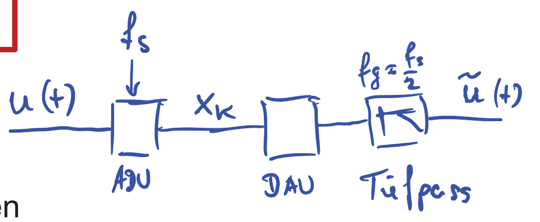
$x(t)$ und $\bar{x}(t)$ sind nach der Digitalisierung mit der Abtastrate f_s nicht unterscheidbar. Man nennt $\bar{x}(t)$ deshalb **Aliasschwingung** zu $x(t)$ und $\bar{f}_x$ **Aliasfrequenz**.

Mit gleicher Rechnung weist man nach, dass alle Frequenzen

$$\bar{f}_{x,n} = n f_S \pm f_x$$

ebenfalls Aliasfrequenzen zu f_x sind.

> Zu jeder Sinusschwingung gibt es unendlich viele Aliasschwingungen, die bei der Digitalisierung die gleiche Wertefolge haben.



5.3.3 Abtasttheorem (Nyquist- / Shannon-Theorem)

Unkritisch sind die Aliasschwingungen bei Signalfrequenzen

$$f_x < \frac{f_S}{2},$$

$u(t) = \cos(2\pi f_x t)$ $\quad$ $\tilde{u} = \cos(2\pi \bar{f}_x t)$

$f_x > \frac{f_s}{2}$ $\quad$ $\bar{f}_x = f_s - f_x < \frac{f_s}{2}$

denn dann sind alle Aliasfrequenzen größer als $\frac{f_S}{2}$ und das Signal $x(t)$ kann durch D/A-Umsetzung und Tiefpassfilterung mit Grenzfrequenz $f_g \lesssim \frac{f_S}{2}$ rekonstruiert werden.

Aliaseffekt

Abtasttheorem (Nyquist- / Shannon-Theorem)

2 Abtastwerte pro Periode des Sinussignals!?

> *Ein Signal ist aus seinen Abtastwerten genau dann eindeutig rekonstruierbar, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß ist wie die Bandbreite des Signals.* >

größer (nicht ≥)

Anschaulich:

Aus dem Verhältnis von Periodendauer und Abtastzeit ergibt sich die Zahl der Abtastzeitpunkte pro Periode

$$N_P = \frac{T_x}{T_S} = \frac{f_S}{f_x}.$$

Das Abtasttheorem besagt also, dass theoretisch **nur 2 Abtastwerte pro Periode** genügen, um ein abgetastetes Analogsignal rekonstruieren zu können.

Beispiel:

Die Audiosignale auf CDs sind mit der Abtastrate $f_S = 44{,}1\ kHz$ digitalisiert. Diese Rate liegt nur knapp über dem doppelten der vom Menschen hörbaren Frequenzen.

Meistens wird in der Praxis allerdings die Abtastfrequenz eher um den Faktor 5 bis 10 höher als die Bandbreite f_B gewählt.

5.3.4 Aliaseffekt

Wird bei der Rekonstruktion (Digital-Analog-Umsetzung) nicht das Original sondern eine seiner Aliasschwingungen erzeugt, nennt man dies **Aliasfehler** oder **Aliaseffekt**.

In der Regel wird unter allen Aliasschwingungen diejenige mit der niedrigsten Frequenz als das Original angesehen.

Der Aliaseffekt tritt dann auf, sobald das Abtasttheorem verletzt wird, also bei Signalfrequenzen $f_x > \frac{f_S}{2}$. muss vermieden werden!

Es gibt dann eine Aliasschwingung mit $\bar{f_x} < \frac{f_S}{2}$, denn $\bar{f_x} = f_s - f_x$. Im Spektrum erhält man diese Frequenz durch Spiegelung an der Achse bei $\frac{f_S}{2}$

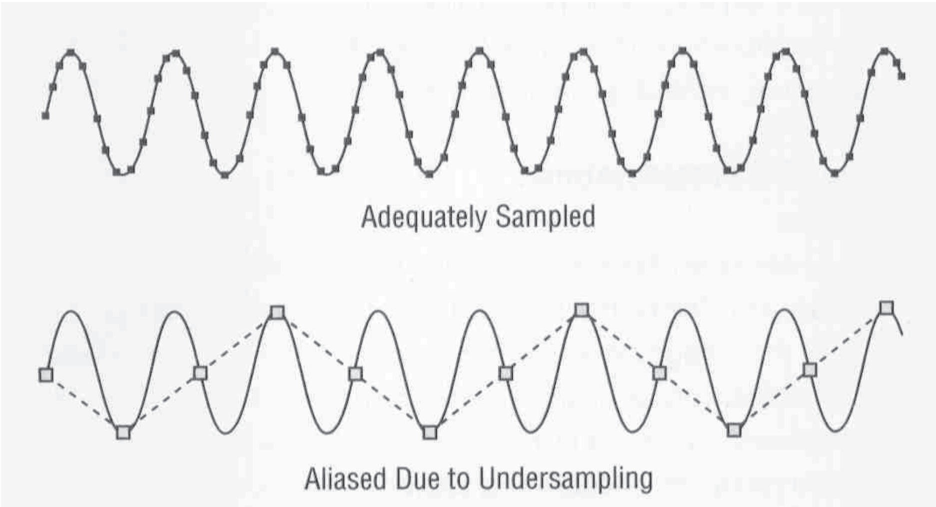


Abbildung 5.7: „Undersampling“

Diese Wiedergabe eines vom Original völlig verschiedenen Signals kann in der Signalverarbeitung zu erheblichen Fehlfunktionen führen und muss deshalb grundsätzlich vermieden werde.

Zu diesem Zweck werden **Aliasfilter** eingesetzt. Dies sind steilflankige Tiefpassfilter, die – **vor** der Abtastung! – eine Begrenzung der Bandbreite des Signals auf $f_B < \frac{f_S}{2}$ bewirken.

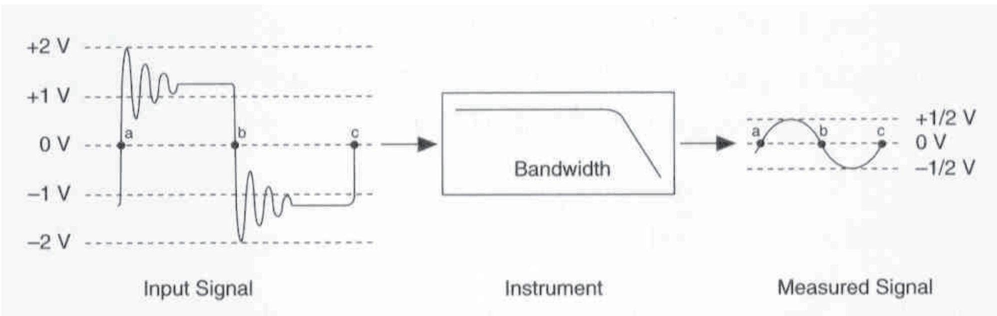
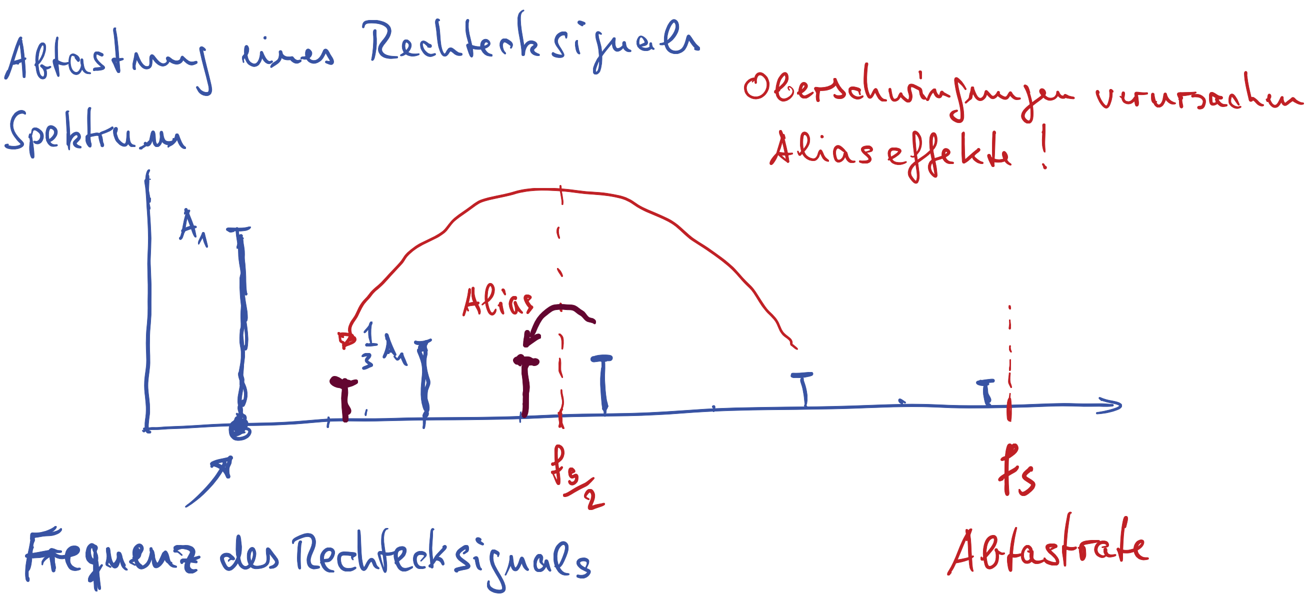


Abbildung 5.8: Bandbegrenzung des Messsignals vor der Analog-Digital-Umsetzung als Maßnahme gegen Aliasfehler



5.4 Übungen "Digitalisierung, AD-, DA-Umsetzung"

5.4.1 Abtastfrequenz, ADU-Wortlänge

Ein Signal $u(t) = 3{,}5V \cdot \cos(628\frac{rad}{s}t)$ soll mit einem typischen, handelsüblichen AD-Umsetzer digitalisiert werden. Die relative Abweichung zwischen den digitalen und den zugehörigen analogen Werten bei voller Signalamplitude soll maximal 0,1% betragen.

a) Spezifizieren Sie Eingangsspannungsbereich und Wortlänge des AD-Wandlers.

b) Welche Abtastfrequenz wählen Sie? Nennen Sie zwei Möglichkeiten und begründen Sie sie.

5.4.2 Quantisierung

a) Mit welcher Amplitude des Quantisierungsrauschens ist bei einem 12-Bit-ADU mit Eingangsspannungsbereich ±10V und rundendem Quantisierungsverhalten zu rechnen?

b) Wenn das Nutzsignal nur einen Bereich von 1,2V bis 3,5V umfasst: Welches Signal-Rauschverhältnis (Verhältnis der (maximalen) Signalamplitude zur Amplitude des Quantisierungsrauschens) ergibt sich?

c) Geben Sie diesen Wert als Signal-Rausch-Abstand in dB an!

d) Welches Signal-Rauschverhältnis ergibt sich, wenn Sie den gleichen ADU mit einem Eingangsspannungsbereich von 0V ... 5V einsetzen (wenn Sie also bei der Signalkonditionierung auf eine möglichst gute Ausnutzung des Messbereichs achten)?

5.4.3 Abtastung von Signalen

a) Prof. Taugenichts misst eine Sinusschwingung $u(t) = 3V \cdot \cos(1000\frac{rad}{s}t)$ digital. Er behauptet, dass das mit einer Abtastfrequenz von 500 Hz möglich ist. Hat er Recht?

b) Er setzt nun einen Gleichrichter ein, so dass am A/D-Umsetzer die Spannung $\tilde{u}(t) = \left|3V \cdot \cos(1000\frac{rad}{s}t)\right|$ anliegt. Was würden Sie ihm nun empfehlen?

c) Berechnen/recherchieren Sie die Amplituden der Fourierreihe von $\tilde{u}(t)$, skizzieren Sie das Amplitudenspektrum und markieren Sie darin auf der Frequenzachse die Lage der Abtastrate und der halben Abtastrate.
Tragen Sie dann die Spektrallinie mindestens einer Aliasschwingung ein.

d) Gegeben sei das Signal $u_1(t) = \cos(2\pi \cdot 300\ Hz \cdot t)$. Es wird mit $f_S = 500\ Hz$ abgetastet. Geben Sie zwei andere Signale $u_2(t)$ und $u_3(t)$ an, die die gleiche Abtastwertefolge liefern.

5.4.4 Abtastung und Rekonstruktion von Signalen

Das Signal $u(t) = \widehat{U}_1 \cos(2\pi \cdot 100Hz \cdot t) + \widehat{U}_2 \cos(2\pi \cdot 250Hz \cdot t)$ wird durch einen AD-Umsetzer mit Sample&Hold digitalisiert und der digitalisierte Wert wird unmittelbar auf einen DA-Umsetzer (DAU) gegeben, beides mit der Abtastfrequenz $f_S = 400\ Hz$.

Das analoge Ausgangssignal des DAU wird mit einem Tiefpass mit der Grenzfrequenz 190 Hz gefiltert (ideale Filtercharakteristik).

a) Welches Signal $\tilde{u}(t)$ wird am Tiefpass-Ausgang gemessen?
(Formel! $\tilde{u}(t) = \cdots$)

b) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum von $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$! Markieren Sie darin auch f_S und $\frac{f_S}{2}$.