



HSB

Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

F4 - Elektrotechnik und Informatik

Prof. Dr.-Ing. Manfred Mevenkamp

Grundlagen der Elektrischen Messtechnik

Übungsaufgaben und Lösungen

0 Grundlagen aus Elektrotechnik und Mathematik

0.2 Übungen zu Mittelwert, Effektivwert, Scheitelfaktor, Formfaktor

0.2.1 Mittelwert

- a) Welchen Wert zeigt ein Drehspulinstrument bzw. ein Digitalmultimeter im "DC"-Modus an, wenn die Spannung $u(t) = |5V \cdot \sin(4\pi t)|$ anliegt?

Hinweis: Integration über eine Periode, also z. B. von einer Nullstelle zur nächsten.

- b) Beim AS-i - Bus (Aktuator-Sensor-Interface) werden Signale in Form von Strompulsen der Form $i(x) = I_0 \sin^2(x)$ übertragen. Welchen Strom-Mittelwert hat ein solcher Puls?

Hinweis: Erst mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen, dass $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$!

0.2.2 Effektivwert

Bestimmen Sie den Effektivwert des Stroms $i(t) = 5A \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$. Prüfen Sie das Ergebnis anhand des Scheitelfaktors für sinusförmige Signale.

Hinweis: Integration über eine Periode von $(i(t))^2$, also eine halbe Periode von $i(t)$ (vergleiche Aufgabe 0.2.1 b). Außerdem hilft: $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$.

0.2.3 Mittelwert, Effektivwert

Bestimmen Sie Mittelwert und Effektivwert der Rechteckschwingung mit Puls-Pausen-Verhältnis 1:3, also für die periodische Fortsetzung von

$$x(t) = \begin{cases} 3V & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & \frac{T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

0.2.4 Scheitelfaktor, Formfaktor

- Bestimmen Sie den Scheitelfaktor und den Formfaktor für eine symmetrische Rechteckschwingung.
- Welcher Formfaktor ergibt sich für Dreieckschwingungen?

0.2.5 RMS

Die METRAHIT-Digitalmultimeter, mit denen wir im Labor arbeiten, werden im Datenblatt als "TRMS Multimeter" bezeichnet. Was bedeutet das?

Lösungen

0.2.1 Mittelwert

a) Rechnung siehe Skript S. 7 oben, Ergebnis: $\bar{u} = \frac{2}{\pi} \hat{U} \approx 3,183 A$

b) x

0.2.2 Effektivwert

Rechnung siehe Skript S. 7 unten, Ergebnis: $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I} \approx 3,54 A$

0.2.3 Mittelwert, Effektivwert

$$\bar{x} = 0,75 V, \quad x_{eff} = 1,5 V$$

0.2.4 Scheitelfaktor, Formfaktor

x

0.2.5 RMS

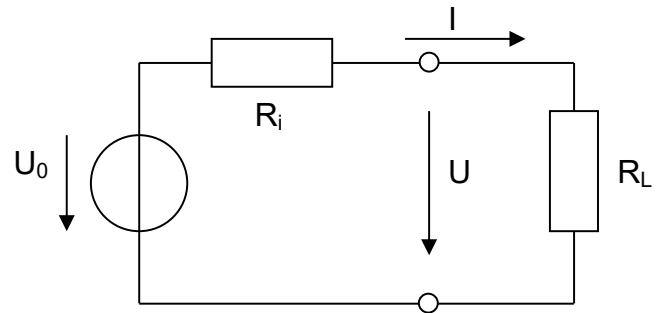
Bei sinusförmigen Signalen kann der Effektivwert mit einem DC-Messwerk bestimmt werden, indem der Mittelwert des gleichgerichteten Signals mit dem Formfaktor $F \approx 1,11$ multipliziert wird.

Bei "TRMS"-Messinstrumenten wird der Effektivwert (numerisch) anhand des Integrals über das Quadrat des gemessenen Verlaufs errechnet, so dass auch für nicht sinusförmige Signale korrekte Werte angezeigt werden.

0.4 Übungen zu Schaltungen mit Ohmschen Widerständen

0.4.1 Parameter einer nicht-idealen Spannungsquelle

In der abgebildeten Schaltung werden durch Änderung von R_L nacheinander zwei verschiedene Ströme I_1 und I_2 eingestellt. Nach welcher Formel errechnen sich aus diesen Strömen und den zugehörigen Spannungen U_1 und U_2 der Innenwiderstand R_i und die Leerlaufspannung U_0 ?



0.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

In der abgebildeten Schaltung ist $R_M = 0,1 \, \Omega (\pm 0,1\%)$

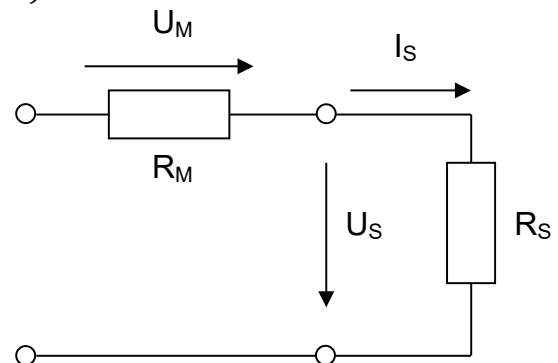
ein Messwiderstand. R_S soll bestimmt werden.

Gemessen wird

$$U_M = 0,14 \, V \pm 0,01 \, V$$

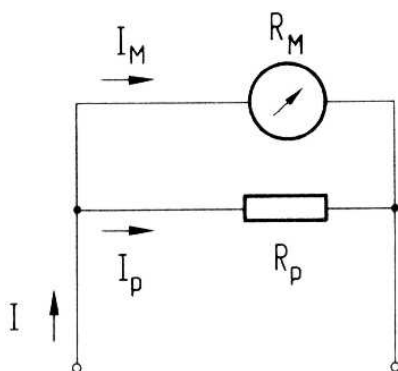
$$U_S = 14,3 \, V \pm 0,3 \, V.$$

- Welches Ergebnis erhält man für R_S ?
- Wie groß ist die Unsicherheit ΔR_S ?



Anmerkung: Typische Schaltung für eine einfache Strom- und Impedanzmessung.

0.4.3 Messbereiche der Strommessung



Das Messwerk mit dem Innenwiderstand $R_M = 3,6 \, k\Omega$ zeigt Vollausschlag, wenn der Strom $I_M = 8,33 \, \mu A$ fließt.

- Bei welchem Strom I ergibt sich Vollausschlag, wenn $R_P = 18 \, k\Omega$ gewählt wird?
- Welcher Widerstand R_P muss gewählt werden, damit Vollausschlag bei $I = 1 \, mA$ erreicht.

Lösung a) $I = I_M + I_P = I_M + \frac{R_M I_M}{R_P} = 8,33 \, \mu A \cdot \left(1 + \frac{3,6}{18}\right) = 10 \, \mu A$

0.4.4 Messbereiche der Spannungsmessung

Der Spannungsmessbereich wird über Vorwiderstände eingestellt, die mit der Parallelschaltung von Messwerk und R_p einen Spannungsteiler bilden.

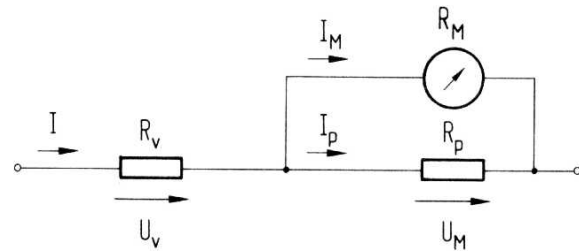


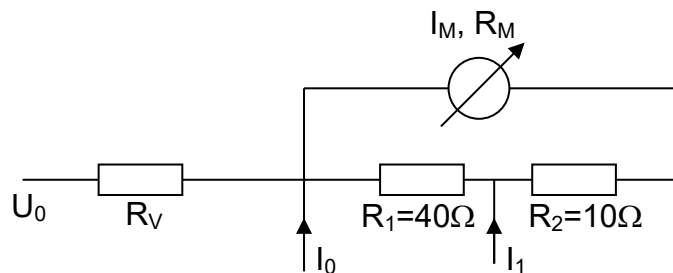
Abbildung 0.3: Einstellung des Spannungsmessbereichs durch einen Reihenwiderstand

- Das Messwerk habe die gleichen Daten wie in Aufgabe 0.4.3. Wie groß ist die über $R_p = 18 \text{ k}\Omega$ abfallende Spannung U_M ?
- Wie groß ist R_v zu wählen, damit das Messwerk Vollausschlag zeigt, wenn über der gesamten Schaltung in Abb. 0.3 die Spannung $U = 100 \text{ mV}$ anliegt?

0.4.5 Strom- und Spannungsmessbereiche 1

Gegeben ist ein Messwerk mit $R_M = 200 \Omega$ und Vollausschlag bei $I_M = 0.4 \text{ mA}$.

- Welche Strommessbereiche erhält man für I_0 und I_1 bei der skizzierten Beschaltung?
- Welcher Vorwiderstand ist erforderlich für einen Spannungsmessbereich $U_0 = 1 \text{ V}$?



0.4.6 Strom- und Spannungsmessbereiche 2

Verifizieren Sie durch Rechnung die Messbereiche des Multimeters mit dem in Abbildung 0.4 dargestellten Schaltplan.

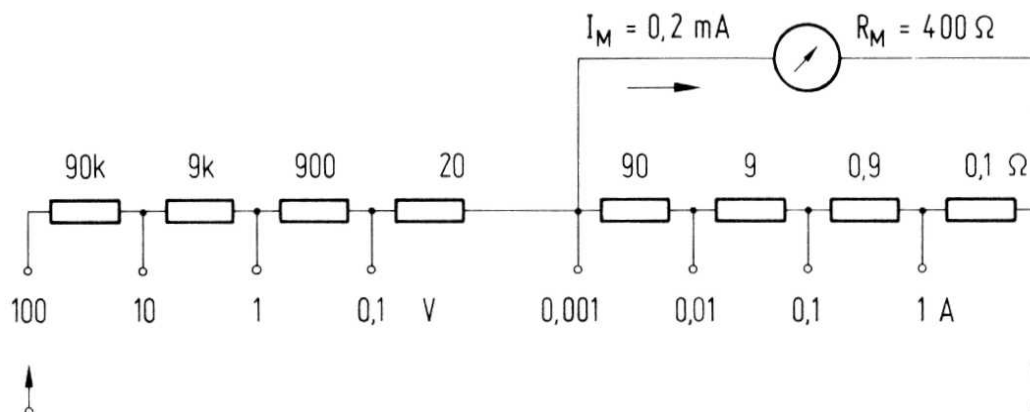


Abbildung 0.4: Messinstrument mit Messbereichumschaltung für Strom und Spannung

Lösungen

0.4.1 Parameter einer nicht-idealen Spannungsquelle

Es gilt $U = U_0 - R_i \cdot I$

Liegen Spannungsmessungen bei zwei verschiedenen Strömen vor, so erhält man

$$U_1 = U_0 - R_i \cdot I_1, \quad U_2 = U_0 - R_i \cdot I_2$$

und somit $R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}$ und $U_0 = U_2 + R_i \cdot I_2 = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$

0.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

$$I_S = \frac{U_M}{R_M} = \frac{0,14 \text{ V}}{0,1 \Omega} = 1,4 \text{ A} \quad R_S = \frac{U_S}{I_S} = \frac{14,3 \text{ V}}{1,4 \text{ A}} \approx 10,21 \Omega$$

0.4.3 Messbereiche einer Strommessung

b) $(I - I_M)R_p = I_M R_M$ also $R_p = \frac{I_M R_M}{I - I_M} \approx 30,24 \Omega$

0.4.4 Messbereiche der Spannungsmessung

a) $U_M = I_M R_M \approx 30 \text{ mV}$ b) aus 0.4.3: $I_v = 10 \mu\text{A}$, $R_v = \frac{U - U_M}{I_v} \approx 7 \text{ k}\Omega$

0.4.5 Strom- und Spannungsmessbereiche 1

x

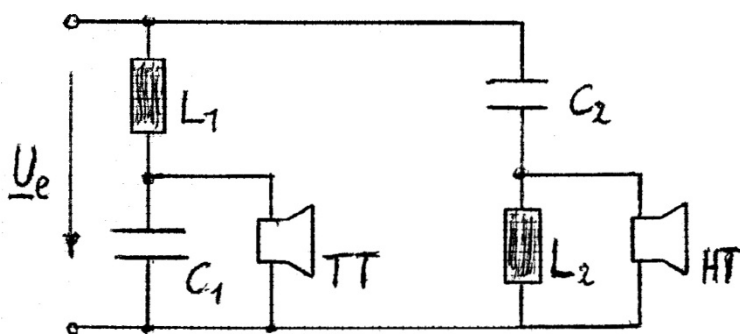
0.4.6 Strom- und Spannungsmessbereiche 2

x

0.5 RLC-Netzwerke, Zeigerdarstellung, komplexe Zahlen

Zwei-Wege Frequenzweiche

Besteht die Box aus einem Basslautsprecher (Tieftöner) und einem Hochtöner, so besteht die Frequenzweiche aus einem Tiefpass, an den der Tieftöner angeschlossen wird, und einem Hochpass für den Hochtöner.



ESB einer 2-Wege-Frequenzweiche (12db/Oktave bzw. 40dB/Dekade)

Bei der Berechnung wird üblicherweise vorausgesetzt, dass die Lautsprecher als ohmsche Widerstände behandelt werden können (meist 4 oder 8 Ω).

a) Frequenzgang des Tiefpassfilters am Tieftöner

Die Impedanz der RC-Parallelschaltung ist
$$\frac{R_{TT} \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_{TT} + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1},$$

so dass
$$G_{TT}(j\omega) = \frac{U_{TT}}{U_e} = \frac{\frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1}}{j\omega L_1 + \frac{R_{TT}}{1 + j\omega R_{TT} C_1}} = \frac{R_{TT}}{R_{TT} + j\omega L_1 (1 + j\omega R_{TT} C_1)} = \frac{1}{1 - \omega^2 L_1 C_1 + j\omega \frac{L_1}{R_{TT}}}$$

b) Frequenzgang des Hochpassfilters am Hochtöner

$$G_{HT}(j\omega) = \frac{U_{HT}}{U_e} = \frac{\frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2}{R_{HT} + j\omega L_2}}{\frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2}{R_{HT} + j\omega L_2}} = \frac{R_{HT} \cdot j\omega L_2 \cdot j\omega C_2}{R_{HT} + j\omega L_2 + R_{HT} \cdot j\omega L_2 \cdot j\omega C_2} = -\frac{\omega^2 L_2 C_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\omega \frac{L_2}{R_{HT}}}$$

Die Bauteile sind so zu wählen, dass in möglichst guter Näherung

$$G_{gesamt}(j\omega) = G_{TT}(j\omega) + G_{HT}(j\omega) = 1 \text{ gilt.}$$

Übung:

Wie lautet dieser Summenfrequenzgang im Fall $R_{HT} = R_{TT}$, $L_1 = L_2 =: L$ und $C_1 = C_2 =: C$?

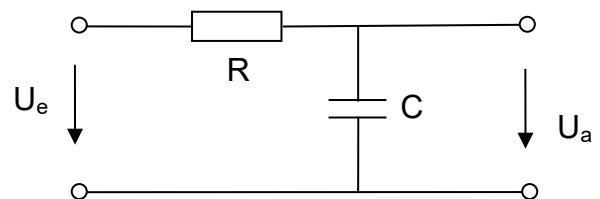
Wie lautet der Frequenzgang der Abweichung $1 - G_{gesamt}(j\omega)$?

0.6 Übungen (Filterschaltungen)

0.6.1 RC-Tiefpass

a) Bestimmen Sie den Frequenzgang

$G_{TP}(j\omega) = \frac{U_a}{U_e}(j\omega)$ des RC-Tiefpasses mit Hilfe der komplexen Spannungsteilerregel.



b) Leiten Sie hieraus und aus der obigen Definition der Grenzfrequenz Folgendes her:

1. die Formel für die Grenzfrequenz in Abhängigkeit von R und C ,
2. die Tatsache, dass bei der Grenzfrequenz $R = |Z_C| = X_C = \frac{1}{\omega C}$ gilt ("Wirkgleich Blindwiderstand"),
3. die Tatsache, dass die Phasenverschiebung der Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung bei der Grenzfrequenz -45° beträgt.

0.6.2 RC-Hochpass

Bestimmen Sie entsprechend den Frequenzgang $G_{HP}(j\omega)$ des RC-Hochpasses. Zeichnen Sie zunächst das ESB.

0.6.3 RCCR-Bandpass 1

Es ist nun die Serienschaltung eines RC-Tiefpasses und eines RC-Hochpasses zu berechnen, wobei die Widerstände und Kondensatoren beider Filter identisch sein sollen. Man erhält auf diese Weise einen Bandpass.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der komplexen Spannungsteilerregel, dass der Frequenzgang dieses Bandpasses gegeben ist durch

$$G_{BP1}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC - (\omega RC)^2}$$

- b) Leiten Sie hieraus ab, dass die Verstärkung gleich $|G_{BP1}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega RC - \frac{1}{\omega RC})^2}}$ ist.

- c) Begründen Sie, dass $|G_{BP1}(j\omega)|$ sein Maximum bei $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, der Mittenfrequenz, annimmt. (Extremwertuntersuchung durch Ableitung etc. ist dazu nicht notwendig!).

0.6.4 RCCR-Bandpass 2

Wegen $\underline{U}_a(j\omega) = G(j\omega) \cdot \underline{U}_e(j\omega)$ ist der Frequenzgang einer Serienschaltung zweier Filter gleich dem Produkt der Einzelfrequenzgänge (Zeigen!). Für den Bandpass aus Tief- und Hochpass bedeutet das $G_{BP2}(j\omega) = G_{TP}(j\omega) \cdot G_{HP}(j\omega)$.

Welcher Frequenzgang $G_{BP2}(j\omega)$ ergibt sich so?

Leiten Sie daraus $|G_{BP2}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{\sqrt{4 + (\omega RC - \frac{1}{\omega RC})^2}}$ ab.

Warum unterscheidet sich das Ergebnis von dem in Aufgabe 0.6.3?

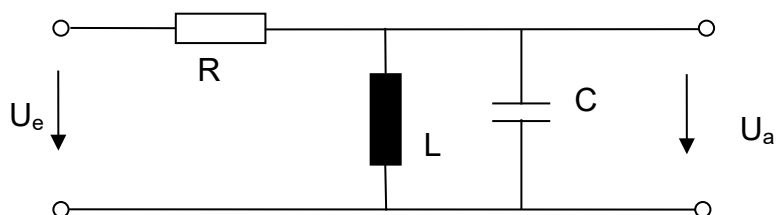
0.6.5 Obere und untere Grenzfrequenzen

- a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Definition "Absinken der Verstärkung um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ " für die Bandpässe aus Aufgabe 0.6.3 und Aufgabe 0.6.4 jeweils die obere und untere Grenzfrequenz.
- b) Zeigen Sie, dass für die Mittenfrequenz (Aufgabe 0.6.3c) gilt $\omega_0 = \sqrt{\omega_{gu} \cdot \omega_{go}}$.

0.6.6 Vergleich mit RLC-Bandpass

Vergleichen Sie die Verstärkungen der Bandpässe bei der Mittenfrequenz (Maximalverstärkungen).

Vergleichen Sie auch mit dem RLC-Bandpass aus dem Laborversuch DSA (siehe Abbildung).

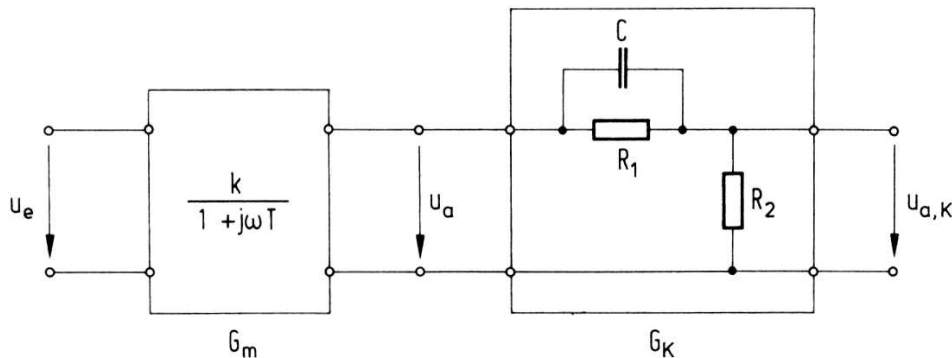


Lösungen zu 0.6.1 – 0.6.6

Zum Teil in der Vorlesung behandelt - diese Übungsaufgaben sind im Rahmen der Vorbereitung auf die Laborversuche zu bearbeiten.

0.6.7 Frequenzgang

a) Gegeben ist die Kompensationsschaltung (ähnlich einem Tastkopf)



Zeigen Sie, dass der Frequenzgang $G_K(j\omega)$ sich wie folgt schreiben lässt:

$$G_K(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$$

Zwischenfrage:

Welcher Frequenzgang gilt für die Gesamtübertragung von U_e nach $U_{a,K}$?

- Bestimmen Sie für $G_K(j\omega)$ die Gleichspannungsverstärkung ($\omega = 0$) und die Verstärkung bei sehr hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$).
- Die Zeitkonstante im Nenner soll um den Faktor 10 kleiner sein als die des Zählers. Bestimmen Sie das Widerstandsverhältnis R_1/R_2 .
- Skizzieren Sie für $G_K(j\omega)$ mit diesem Widerstandsverhältnis den Amplitudengang des Bodediagramms.

Hinweis: $20 \lg \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} \right| = 20 \lg \frac{R_2}{R_1 + R_2} + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} \right| + \left(-20 \lg \left| \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \right| \right)$

- Betrachten Sie nun die Gesamtschaltung (Serienschaltung von G_m und G_K). Wie unterscheiden sich die Grenzfrequenz und die Verstärkung $\frac{\hat{U}_{a,K}}{\hat{U}_e}$ der Gesamtschaltung von den entsprechenden Werten von $G_m(j\omega)$, wenn $R_1 C = T$ gewählt wird? Für $k = 2$ mittels Bode-Diagramm verdeutlichen!

Lösung 0.6.7

a)

$$G_K(j\omega) = \frac{R_2}{R_2 + R_1 \parallel Z_C} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}} =$$

$$= \frac{R_2 \cdot (1 + j\omega R_1 C)}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}$$

Zwischenfrage:

Der Frequenzgang der Serienschaltung zweier Übertragungssysteme, von denen der erste rückwirkungsfrei ist, ist das Produkt aus den Frequenzgängen dieser Systeme. Hier also

$$G_{\text{gesamt}}(j\omega) = \frac{U_{a,K}}{U_e}(j\omega) = \frac{U_a}{U_e}(j\omega) \cdot \frac{U_{a,K}}{U_a}(j\omega) = G_m(j\omega) \cdot G_K(j\omega).$$

b)

$$G_K(j0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0}$$

$$G_K(j\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega} + R_1 C}{\frac{1}{j\omega} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} \right)$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{0 + R_1 C}{0 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1$$

c)

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = \frac{1}{10} R_1 C \Leftrightarrow 10 R_1 R_2 = R_1 (R_1 + R_2) \Leftrightarrow R_1 = 9 R_2$$

d)

$$G_K(j\omega) = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega \frac{R_1 C}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}{1 + j \frac{\omega}{10\omega_g}} \quad \text{mit } \omega_g = \frac{1}{R_1 C}$$

Im Bode-Diagramm:

$$|G_K(j\omega)|_{db} = 20 \lg \left| \frac{1}{10} \cdot \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}{1 + j \frac{\omega}{10\omega_g}} \right| = 20 \lg \frac{1}{10} + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{10\omega_g}} \right| + 20 \lg \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_g} \right|$$

$$|G_K(j\omega)|_{db} = -20db + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{10\omega_g}} \right| + \left(-20 \lg \left| \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}} \right| \right)$$

0.7 Oszilloskop

Signalamplituden lassen sich bei modernen Geräten am Bildschirm durch "Cursor" messen und anzeigen. Sonst: "Kästchenzählen"!

Abbildung 0.7 zeigt einen sinusförmigen Verlauf, dessen Periodendauer T und Amplitude \hat{U} abgelesen werden können, wenn die x- und y-Kalibrierung bekannt ist.

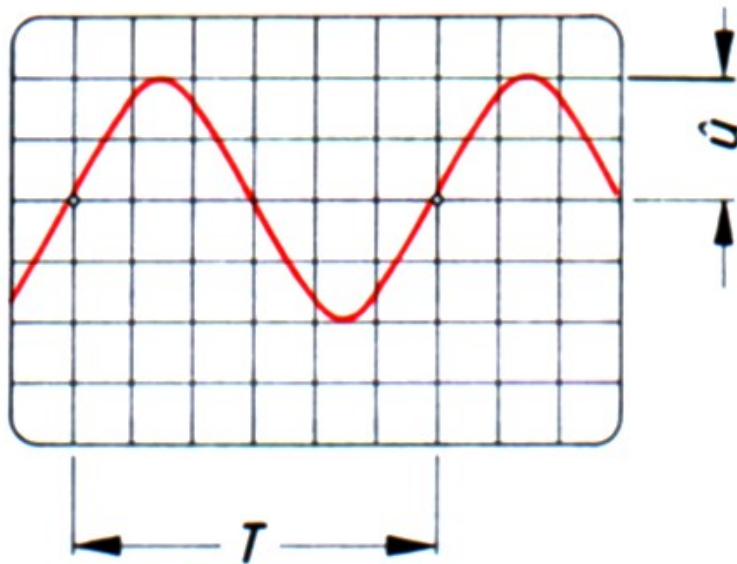


Abbildung 0.7: Ablesen von Periode und Amplitude einer Sinusschwingung

Beispiel:

Die y-Ablenkung sei auf 0.5 V/Div ("Division" = Rastereinheit = "Kästchen") eingestellt, die x-Ablenkung auf $25 \mu\text{s/Div}$. Wie lautet dann $u(t)$?

Aus der Bildschirmdarstellung ergibt sich

$$\hat{U} = 0.5 \frac{\text{V}}{\text{Div}} \cdot 2 \text{ Div} = 1 \text{ V} \qquad T = 25 \frac{\mu\text{s}}{\text{Div}} \cdot 6 \text{ Div} = 150 \mu\text{s}$$

Das Signal hat somit die Frequenz $f = 6,667 \text{ kHz}$ und eine Darstellung der Form $1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 6667 \text{ Hz} \cdot t + \varphi)$.

Den Phasenwinkel ergibt sich aus der Lage des Zeitpunkts $t = 0$. Wählt man $t = 0$ am linken Bildrand, so ist das Signal eine um $\Delta t \approx 25 \frac{\mu\text{s}}{\text{Div}} \cdot 2,4 \text{ Div} = 60 \mu\text{s}$ verschobene Kosinusfunktion. Der Phasenwinkel ergibt sich aus dem Verhältnis

$$\frac{|\varphi|}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} \Leftrightarrow |\varphi| = \frac{60}{150} \cdot 2\pi = \frac{4}{5}\pi = 144^\circ$$

Der Phasenwinkel ist hier negativ, weil die Kosinusfunktion gegenüber dem linken Bildrand nach rechts verschoben ist. Damit gilt für das Signal

$$u(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 6,667 \text{ kHz} \cdot t - \frac{4}{5}\pi\right).$$

0.8 Übungen "Oszilloskop"

0.8.1 Oszillogramm, Bestimmung von Signalparametern

Welche Periodendauer, Frequenz und Amplitude hat das in Abb. 0.7 dargestellte Signal, wenn die x-Ablenkung auf $20 \mu\text{sec} / \text{Div}$ und die y-Ablenkung auf $2,5 \text{ V} / \text{Div}$ eingestellt ist?

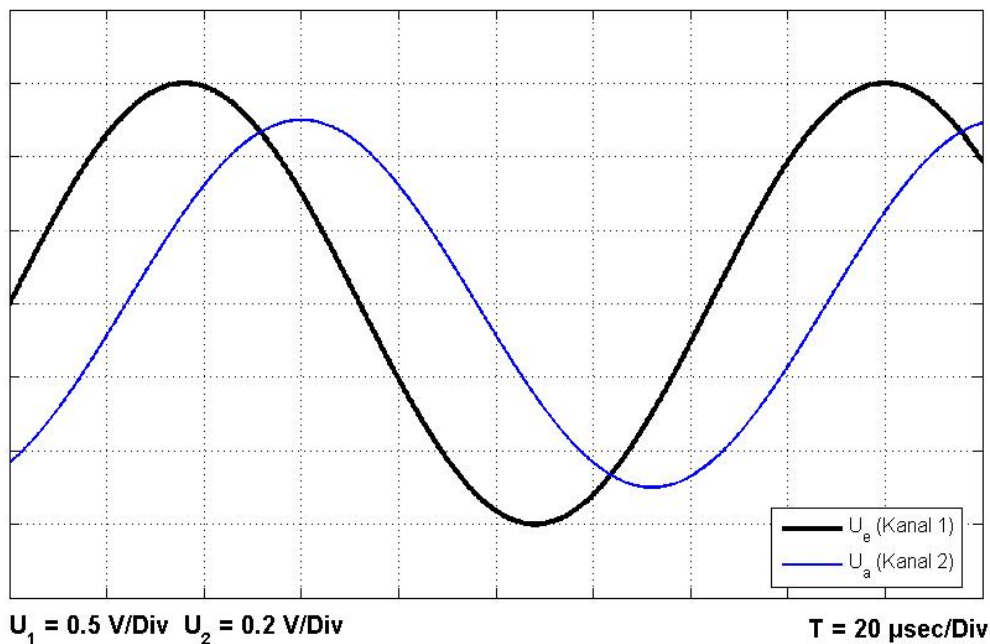
Welche Phasenlage hat die Schwingung bezogen auf das Triggersignal, bei dem der Zeitpunkt $t = 0$ in der Bildmitte liegen soll?

Geben Sie den Verlauf als Zeitfunktion der Form $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ an.

0.8.2 Oszillogramm, Frequenzgang

- a) Das Oszillogramm zeigt die Eingangsspannung $u_e(t) = \hat{U}_e \cdot \sin(\omega t)$ und die Ausgangsspannung $u_a(t) = \hat{U}_a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ einer Filterschaltung.

Bestimmen Sie die Frequenz f , die Kreisfrequenz ω , das Amplitudenverhältnis $|G(j\omega)| = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e}$ (als Zahlenwert und in dB) sowie die Phasenverschiebung φ zwischen beiden Spannungen (im Rahmen der möglichen Ablesegenauigkeit).



- b) Auf welche Art von Filterschaltung (Tiefpass / Hochpass) lassen Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung schließen?

Lösungen

0.8.1 Oszillogramm, Bestimmung von Signalparametern

$$T \approx 120 \mu\text{s}, \quad f \approx 8,33 \text{ kHz}, \quad \hat{U} \approx 5 \text{ V}$$

$$\text{Phasenwinkel } \varphi \approx 150^\circ \text{ und damit } u(t) \approx \hat{U} \cos\left(\frac{2\pi}{120\mu\text{s}} \cdot t + \frac{5}{6}\pi\right).$$

0.8.2 Oszillogramm, Frequenzgang

a) Oszillogramm auswerten

Periodendauer $T = 7.2 \cdot 20 \mu\text{sec} = 144 \mu\text{sec}$

Frequenz $f = \frac{1}{T} = 6944 \text{ Hz}$

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 43633 \text{ rad/sec}$

Amplitudenverhältnis $|G(j\omega)| = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \frac{2,5 \cdot 0,2 \text{ V}}{3 \cdot 0,5 \text{ V}} = \frac{0,5 \text{ V}}{1,5 \text{ V}} = \frac{1}{3} \approx 0,333 \approx -9,54 \text{ dB}$

Zeitdifferenz $\Delta T = T_{0,e} - T_{0,a} \approx 7.2 \cdot 20 - 8.4 \cdot 20 = -1.2 \cdot 20 \mu\text{sec} = -24 \mu\text{sec}$

Phasendifferenz $\Delta\varphi = \frac{\Delta T}{T} \cdot 360^\circ = -60^\circ$

b) Filterschaltung

Der negative Phasenwinkel deutet auf Tiefpasscharakter hin (Ausgangssignal "nach-eilend" gegenüber dem Eingangssignal)

Messtechnik – Einführung

1.3 Übungen "Begriffe, SI-Einheiten"

1.3.1 SI-Basiseinheiten

Recherche unter <http://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44.html>

- Die "Atomuhren" der PTB sind das deutsche Normal für die Messung der Zeit. Welche andere Messgröße leitet sich unmittelbar aus der Zeit ab? Hinweis: siehe Bezeichnung des zuständigen Fachbereichs der PTB.
- Welche Definition der SI-Einheit für die Strecke gab es früher? Warum musste sie ersetzt werden? Wie lautet sie jetzt?
- Welche Naturkonstanten – neben der Cäsium-Strahlungsfrequenz, der Lichtgeschwindigkeit und dem photometrischen Strahlungsäquivalent K_{cd} – definieren heute die Basiseinheiten des SI (Kürzel und volle Bezeichnung angeben).
- Welche Rolle spielt die Zahl 9.192.631.770 für die Länge einer Strecke von 1000 m?
- Wie wird die unten in Übung 1.3.3 verwendete Einheit für den Druck (= Kraft pro Fläche), "1 mbar", in SI-Einheiten umgerechnet?

1.3.2 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen I

- Geben Sie 1 J (Joule), 1 V (Volt), 1 H (Henry) in SI-Basiseinheiten an.
- Ein Kran hebt das Rotorblatt einer Windenergieanlage (Gewicht: 8 t) 80 m hoch. Welche elektrische Energie ist bei Vernachlässigung von Reibungs- und sonstigen Verlusten für den Antriebsmotor mindestens erforderlich? (Angabe in kWh!)

1.3.3 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen II

An einem Wärmetauscher tritt bei einem Volumenstrom von $q_V = 10,8 \text{ m}^3/\text{h}$ eine Druckdifferenz (Druckverlust) von $\Delta p = 200 \text{ mbar}$ auf.

- Geben Sie die entsprechende von der Pumpe aufzubringende Leistung $P = q_V \cdot \Delta p$ in Nm/sec an.
- Wie groß ist bei ununterbrochenem Dauerbetrieb die pro Tag eingesetzte elektrische Energie (in kWh), wenn die Pumpe mit einem Wirkungsgrad von 40 % arbeitet?

Lösungen

1.3.1 SI-Basiseinheiten

Recherche auf <http://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44.html>

- Die Uhr der PTB wird "Atomuhr" genannt, weil als Zeit-Normal Cäsium-Atome (^{133}Cs) angeregt werden und die Frequenz eines bestimmten Teils der ausgesendeten Strahlung bestimmt wird. Die Sekunde ist definiert als das 9 192 631 770 fache der Periodendauer dieser Strahlung. Die Definition gilt seit 1967.
Direkt dadurch bestimmt ist auch **die Einheit der Frequenz**: $1 \text{ Hz} = 1 / 1 \text{ s}$
- "Urmeter"**. Da die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum eine Naturkonstante ist (Einstein, 1905), ist mit der Definition der Zeit auch die Strecke festgelegt. 1 m ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in $1/299.792.458 \text{ s}$ zurücklegt.
- h (Planck'sches Wirkungsquantum), e (Elementarladung), k (Boltzmann-Konstante), N_A (Avogadrozahl)
- Diese Zahl bestimmt die Dauer einer Sekunde und damit auch die Länge eines Meters.
- $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa} = 100 \text{ N/m}^2 = \dots$

1.3.2 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen I

- $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg m}^2 / \text{s}^2$ $1 \text{ V} = 1 \text{ Ws} / \text{As} = 1 \text{ Nm} / 1 \text{ As}$ etc.
 $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs} / \text{A} = 1 \text{ Nm} / \text{A}^2$ etc.
- $E = mgh \approx 8000 \cdot 80 \cdot 10 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 64 \cdot 10^5 \text{ Ws} \approx 1,78 \text{ kWh}$

1.3.3 Einheiten, Umrechnungen, physikalische Grundlagen II

$$a) P = q_V \cdot \Delta p = 10,8 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 200 \text{ mbar} = 2160 \frac{\text{m}^3}{3600 \text{ s}} \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 60 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

$$b) P_E = \frac{P}{0.4} = 150 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 150 \text{ W}, E_E = P_E \cdot t = 150 \text{ W} \cdot 24 \text{ h} = 3,6 \text{ kWh}$$

2 Auswertung von Messdaten

2.2 Übungen "Ausgleichsgerade, Kurvenapproximation (Fit)"

2.2.1 Erstellen von Diagrammen

Die Datei "Temperaturmessung-10-2008.dat" enthält (fiktive) Messdaten eines Temperaturmessversuchs..

```
# Temperaturmessung 10/2008
# Zeit      T_Diode      R_NTC      T_U
# (min)     (°C)           (OHM)      (°C)
    0         19.30       41735.0     21.09
    5         32.79       22142.0     22.63
   10         43.23       13503.0     23.85
```

etc.

Das Format ist für die Speicherung von Messreihen typisch. Jede Zeile besteht aus dem Zeitpunkt und den zu diesem Zeitpunkt erfassten Werten verschiedener Messgrößen. Alle Einträge sind durch Tabulator, Komma, Semikolon oder einfach durch Leerzeichen getrennt. Für jede Messgröße finden sich die aufgenommenen Werte also in einer Spalte der Datei wieder. Am Dateianfang kann es beschreibende Textzeilen geben, die mit einem Kommentarzeichen (//, #, %, ...) beginnen.

Übung: Erzeugen Sie zur oben genannten Datendatei ein Diagramm mit Raster, Achsbeschriftungen und aussagekräftiger Legende, in dem die zweite und die vierte Spalte über der Zeit dargestellt werden.

2.2.2 "Fit", Ausgleichsfunktion zu einer Messreihe

Aufgabe: Es ist ein Diagramm zu erstellen, in dem der ansteigende Teil des Temperaturverlaufs "T_Diode" dargestellt und durch den Graphen einer Funktion angenähert wird, die dem theoretisch zu erwartenden Verlauf

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + (\vartheta_{end} - \vartheta_0) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

entspricht.

(Eine Lösung in MATLAB findet sich auf AULIS in "Theta_lsqfit.m". Benutzt wird die Funktion `lsqcurvefit` aus der Optimization Toolbox.)

2.2.3 Belastungskennlinie, Innenwiderstand

Untersucht wird eine nicht-ideale Spannungsquelle (vergl. Kap. 2.1.1).

- Warum eignet sich die Formel $R_i = U_0 / I_k$ (Verhältnis von Leerlaufspannung zu Kurzschlussstrom) in der Praxis kaum zur Bestimmung des Innenwiderstands?
- Wie geht man stattdessen vor, um mit einer minimalen Zahl von Messungen die nötigen Informationen zur Bestimmung des Innenwiderstands zu bekommen? Wie wird der Innenwiderstand dann berechnet?
- Wenn mehr Messungen vorliegen, ist die Bestimmung des Innenwiderstandes mittels Ausgleichsgerade die Methode der Wahl. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade zur folgenden Messreihe:
 $I = 0,2 / 0,3 / 0,5 / 0,7 / 0,8 / 1,0 \text{ A}$
 $U = 33 / 31 / 29 / 27 / 25 / 23 \text{ V}$
- Wie errechnet sich hieraus der Innenwiderstand? Wie groß ist er?
- Geben Sie ein Maß für die Unsicherheit des berechneten Wertes an.
- Wie groß ist die Leerlaufspannung? Unsicherheit?

2.2.4 Leerlaufspannung und Innenwiderstand einer Spannungsquelle

An einer Spannungsquelle wird die Spannung bei verschiedenen Strömen wie folgt ermittelt:

Strom I [A]	4	12	16	28
Spannung U [V]	10	8,5	7,5	6

Bestimmen Sie anhand der Ausgleichsgeraden die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand. (Empfehlung zur eigenen Übung: Handrechnung OHNE PC oder Taschenrechner!)

2.2.5 Kurzschlussstrom einer Solarzelle

Eine Solarzelle liefert bei den aufgeführten Bestrahlungsstärken die Kurzschlussströme

E_e [W/m ²]	1000	750	500	250	100
I_{sc} [A]	2.5	1.8	1.3	0.6	0.2

- Welche mittlere Empfindlichkeit in [A/(W/m²)] lässt sich daraus bestimmen?
- Geben Sie ein Maß für die Unsicherheit dieses Wertes an.

2.2.6 Ausgleichsgerade, Bestimmtheitsmaß, Unsicherheit der Steigung

Ein Messverstärker habe ein Übertragungsverhalten entsprechend der Kennlinie $U_a = 5 \cdot \sin(U_e)$, $0 \leq U_e \leq 1$. Bestimmen Sie U_a bei $U_e = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$ V.

- Skizzieren Sie den Verlauf.
- Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade.
- Vergleichen Sie mit einer geeigneten Berechnung in MATLAB (z. B. Funktion `polyfit`).
- Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß, die statistische Standardabweichung der Steigung absolut und relativ als Maß der Unsicherheit sowie die Unsicherheit des Achsabschnitts.
- Skizzieren Sie den Verlauf mit Ausgleichsgerade und zeichnen Sie auch die im Rahmen der berechneten Unsicherheiten maximal abweichenden Geraden ein.

2.2.7 Trendfeststellung (Korrelation / Signifikanz)

Im Verlauf einer Woche wurden für die Tagesproduktion eines bestimmten Kontaktschalters jeweils folgende Mittelwerte der Schaltabstände registriert:

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6
Schaltweg [μm]	35	32	29	27	31	30

Lässt sich aus dieser Messreihe bereits eine Aussage über einen Trend bezüglich der Veränderung der Schaltabstände dieser Produktion ableiten?

Hinweis: Ein Trend liegt vor, wenn für das Bestimmtheitsmaß $B > 0,5$ gilt.

Lösungen

2.2.1 Erstellen von Diagrammen

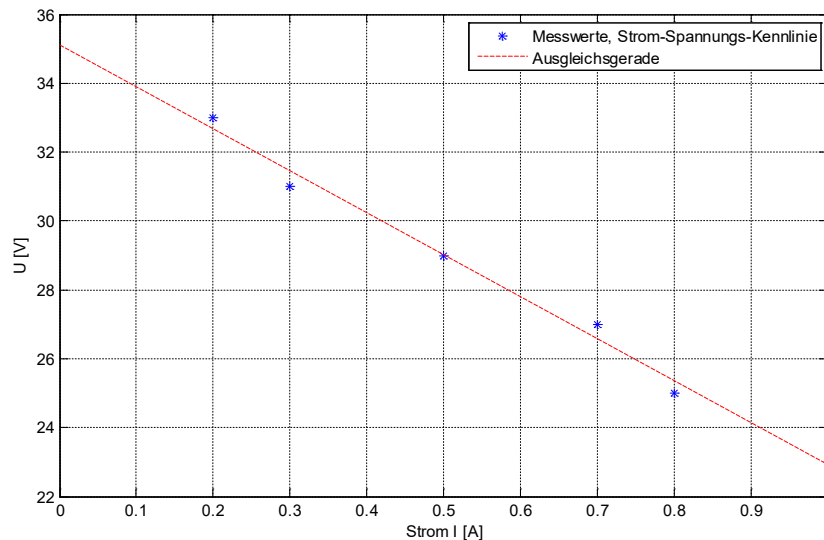
und

2.2.2 Ausgleichsfunktion

siehe Laborübung "MATLAB-Einführung / Parameteridentifikation"

2.2.3 Belastungskennlinie, Innenwiderstand

- Viele Spannungsquellen würden durch den hohen Kurzschlussstrom zerstört.
- siehe Grundlagen ET sowie Lösung zu 0.4.1. "Innenwiderstand"
- AG: $U \approx -12,17\Omega \cdot I + 35,1 \text{ V}$



d) $R_i = -m \approx 12,17 \Omega$

e) $s_m = \Delta R_i \approx 0,578 \Omega$ (wobei: $r_{xy} = 0,9955$, $B_{xy} = 0,991$)

also $\hat{R}_i = 12,17 \Omega \pm 0,58 \Omega$

f) $U_0 \approx 35,1 V$, $s_b = \Delta U_0 \approx 0,374 V$

2.2.4 Leerlaufspannung und Innenwiderstand einer Spannungsquelle

Ansatz: $U(I) = \bar{U} - R_i \cdot (I - \bar{I}) = U_0 - R_i \cdot I$, $U_0 = \bar{U} + R_i \cdot \bar{I}$

$\bar{I} = \frac{60}{4} = 15 A$ $\bar{U} = \frac{32}{4} = 8 V$

$R_i = \left| \frac{s_{UI}}{s_{II}} \right| = \frac{1}{6} \Omega \approx 0,167 \Omega$, $U_0 = 8 V + \frac{1}{6} \Omega \cdot 15 A = 10,5 V$

2.2.5 Kurzschlussstrom einer Solarzelle

a) Empfindlichkeit: $2.518 \text{ mA}/(\text{W}/\text{m}^2)$

b) Standardabweichung der Empfindlichkeit: $0.0754 \text{ mA}/(\text{W}/\text{m}^2)$

Matlab-Script zur Lösung: `SZalsSensor_Lsg.m`

2.2.6 Ausgleichsgerade, Bestimmtheitsmaß, Unsicherheit der Steigung

x

2.2.7 Trendfeststellung (Korrelation / Signifikanz)

x

2.4 Übungen "Ausgleichsgeraden bei logarithmischer Skalierung"

2.4.1 Zeitkonstante einer Bauteilabkühlung

Die Datei `Temperaturmessung-10-2008.dat` enthält eine Messreihe, in der Spalte 2 den Temperaturverlauf eines Bauteils wiedergibt, das zunächst erhitzt wurde und ab dem Zeitpunkt $t = 55$ min wieder auf Umgebungstemperatur ($T_U = 23$ °C) abkühlt.

Bestimmen Sie die Zeitkonstante dieses Abkühlvorgangs mittels einer Ausgleichsgeraden in der halblogarithmischen Darstellung des Temperaturverlaufs.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist `"tau_Bauteil_Lsg.m"`

2.4.2 Parameter B eines NTC

Die Datei `Temperaturmessung-10-2008.dat` enthält in Spalte 3 die Messreihe des Widerstands eines NTC, der zunächst (bis $t = 55$ min) erhitzt und dann abgekühlt wird. Die zugehörigen Temperaturen sind in Spalte 2 aufgelistet.

Laut Theorie wird die Temperaturabhängigkeit eines NTC beschrieben durch

$$R(T) = R(T_0) \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (T \text{ und } T_0 \text{ in [K] !})$$

- Was muss in einem Diagramm auf der x - und auf der y -Achse aufgetragen werden, damit diese Temperaturabhängigkeit als Gerade mit der Steigung B erscheint?
- Bestimmen Sie B , indem Sie für die gegebenen Messwerte diese Darstellung erzeugen und die Messpunkte durch eine Ausgleichsgerade approximieren.

Anmerkung: Eine MATLAB-Lösung zu dieser Aufgabe ist `"B_NTC_fit.m"`

2.4.3 Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers

Für die Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers mit Dimmer erhält man in Abhängigkeit vom Dimmlevel (100% = volle Betriebsspannung) folgende Werte:

D [%]	100	80	60	40	20
Φ_e [W]	51	33	19	10	3

Es wird ein Zusammenhang der Form $\Phi_e = c \cdot D^x$ vermutet. Ermitteln Sie den Exponenten x durch eine Ausgleichsgerade in einer geeigneten grafischen Darstellung der Abhängigkeit beider Größen.

An der Stelle $D = 1$ lässt sich aus dieser Darstellung auch der Koeffizient $c = \Phi_e (D = 1)$ entnehmen. Welchen Wert hat c ?

(Hinweis zum Umgang mit Prozentwerten: ein Prozentwert von z. B. 80 muss als $D = 0.8$ eingesetzt werden!)

Zusatz: Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie die Parameter c und x direkt aus dem nichtlinearen Funktionsansatz mittels `lsqcurvefit` bestimmen? Wie lassen sich die Unterschiede der beiden Ergebnisse erklären?

2.4.4 Leistung einer Windkraftanlage

An einer Windkraftanlage werden die Windgeschwindigkeit und die ins Netz eingespeiste elektrische Leistung gemessen. Es ergibt sich folgende Messreihe:

v_w [m/s]	3	4	5	6	8	10	12
$P_{el.}$ [kW]	35	80	140	250	600	900	1500

Mit welcher Potenz der Windgeschwindigkeit steigt demnach die Leistung der Windkraftanlage?

Hinweis: Unterstellt wird ein Zusammenhang der Form $P = c \cdot v_w^x$. c und der Exponent x , der hier vorrangig von Interesse ist, sind unbekannt. x ist zu ermitteln. Welche Darstellung (halb- oder doppelt-logarithmisch) ist zu wählen, damit x als Steigung einer Ausgleichsgeraden bestimmt werden kann?

2.4.5 Fischbestand

Der Kabeljau ist durch Überfischung und durch die Erwärmung der Arktis in seinem Bestand bedroht. Nach einem Fangverbot wird erwartet, dass der verbliebene Bestand in der Folge wieder exponentiell anwächst. In den ersten Jahren nach dem Stopp der Kabeljaufischerei werden folgende Bestände ermittelt:

Jahr	0	1	2	3	4
Bestand [Mio]	0.5	0.7	1.2	1.8	2.6

Alle wieviel Jahre darf demnach mit einer Verdoppelung des Bestands gerechnet werden?

Lösungen

2.4.1 Zeitkonstante einer Bauteilabkühlung

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_{55} - \vartheta_U) \cdot e^{-\frac{t-55}{\tau}}$$

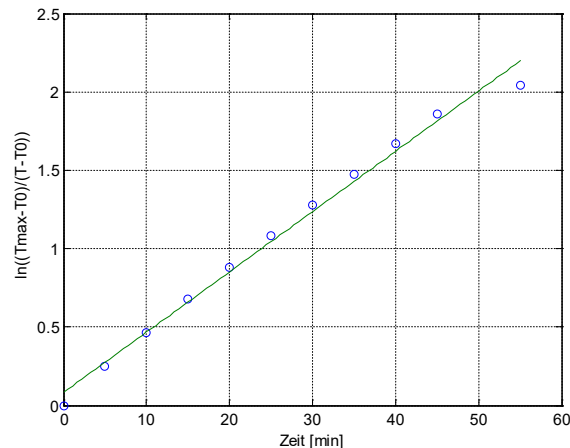
$$\ln\left(\frac{\vartheta_{55} - \vartheta_U}{\vartheta(t) - \vartheta_U}\right) = \frac{1}{\tau} \cdot (t - 55)$$

Die Zeitkonstante ergibt sich als Kehrwert der Steigung der Ausgleichsgerade:

$$\tau \approx 26.01 \text{ min}$$

(siehe Matlab-Script:

tau_Bauteil_Lsg.m



2.4.2 Parameter B eines NTC

a) y-Achse: $\ln\left(\frac{R(T)}{R(T_0)}\right)$, x-Achse: $\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}$

bzw., wenn T_0 die niedrigste Temperatur der Messreihe ist, besser

y-Achse: $\ln\left(\frac{R(T_0)}{R(T)}\right)$, x-Achse: $\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}$

b) $B = 4523 \text{ K}$

(siehe Matlab-Script: B_NTC_fit.m)

2.4.3 Strahlungsleistung eines Halogenstrahlers

$x = 1.74$, $c = 49$ (siehe halogenstrahler_Lsg.m)

2.4.4 Leistung einer Windkraftanlage

Zwei der im Skript vorgeschlagenen Methoden können eingesetzt werden: "fit" mit geeignetem Funktionsansatz und Ausgleichsgerade in einer doppelt-logarithmischen Darstellung der gegebenen Wertepaare.

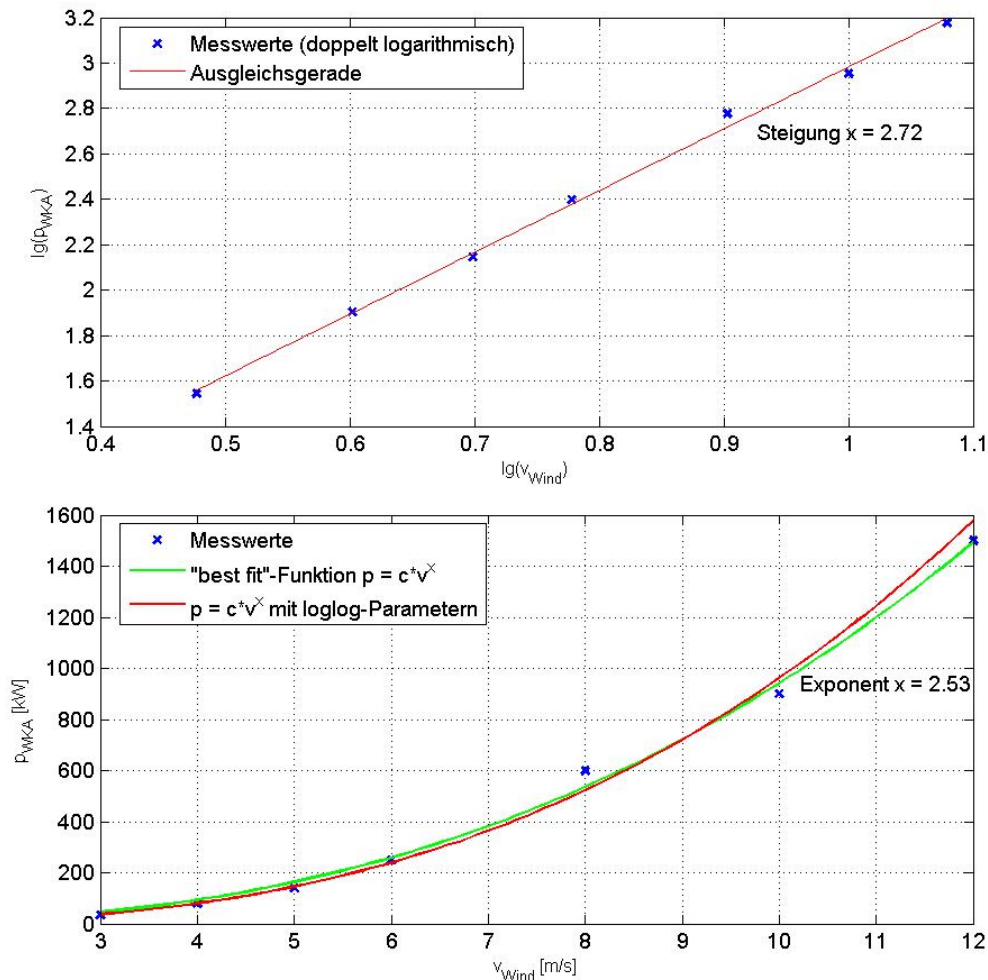
1.) Es liegt ein Zusammenhang der Form $P = c \cdot v_w^x$ vor. Eine optimale Anpassung der Parameter c und x an die gegebenen Wertepaare (z.B. mit MATLAB-lsqcurvefit) liefert $x \approx 2,53$.

2.) Doppelt-logarithmisch ergeben sich die Wertepaare

log(v_w)	0,477	0,602	0,699	0,778	0,903	1,0	1,079
log(P_{el})	1,544	1,903	2,146	2,398	2,778	2,954	3,176

Theoretisch sollten diese Wertepaare auf einer Geraden $\log(P_{el}) = \log(c) + x \cdot \log(v_w)$ mit der Steigung x liegen.

Diese ermittelt man nicht aus einzelnen Steigungsdreiecken sondern durch Berechnung der Ausgleichsgerade. Das MATLAB-Script `pWKA_von_v_fit_plus_doppellog.m` liefert die unten stehende Grafik und den Exponenten (Steigung) $x \approx 2,72$.



Die Grafik zeigt die Ausgleichsgerade im oberen Diagramm und im unteren die Gegenüberstellung der Ergebnisse, die durch direkte Parameteroptimierung des Funktionsansatzes (a) und durch die Ausgleichsgerade in der doppelt-logarithmischen Darstellung (b) gewonnen werden. Während die Optimierung nach a) einen Verlauf ergibt, der vor allem die Punkte bei großen Funktionswerten annähert, wird durch die Methode b) eine gleichmäßigere Annäherung auch der Punkte bei kleinen Funktionswerten erreicht.

Übersicht der Vor- und Nachteile siehe nächste Seite.

Vorteile <code>lsqcurvefit</code>	Vorteile log. Ausgleichsgerade
direkte Verwendung der theoretischen Modellgleichung ohne weitere Umformung (Logarithmus)	analytisch direkt berechnet
direkte Verwendung der Messwerte, keine Umrechnung erforderlich	gleichmäßige Berücksichtigung von Werten, auch wenn sie sich um Größenordnungen unterscheiden
Nachteil: numerisches Suchverfahren, kann scheitern, insbesondere bei Vorgabe unrealistischer Startwerte	

2.4.5 Fischbestand

Ansatz: $B(t) = B(0) \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, wobei T die Zeit in Jahren ist, nach der jeweils Verdopplungen des Bestandes zu verzeichnen sind.

Berechne die Ausgleichsgerade zu $\lg\left(\frac{B(t)}{B(0)}\right) = \frac{\lg(2)}{T} \cdot t$

Es ergibt sich die Steigung $m = 0,1842$.

In MATLAB: `t = [0; 1; 2; 3; 4]; B = [0.5; 0.7; 1.2; 1.8; 2.6];`
`y = log10(B/B(1)); p = polyfit(n,y,1); m = p(1)`

Damit gilt für den gesuchten Zeitraum der Verdopplung: $T \approx 1,63$ Jahre.

Zusatz:

Genauer ist es hier, nicht eine Ausgleichsgerade $y = mx + b$ zu berechnen, bei der sich in diesem Fall $b = p(2) = 0.0115$ ergibt, sondern $b = 0$ vorauszusetzen.

Dann gilt

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Das heißt hier: $m = 0,1813$ und Verdoppelungszeitraum $T \approx 1,66$ Jahre.

3 Aufbau eines Messsystems, Sensoren, Messgeräte

3.4 Übungen "Sensorkennlinien, Linearitätsfehler"

3.4.1 Temperaturabhängiger Kupfer-Widerstand

Der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstands eines Leiterstücks aus Kupfer sei mit $\alpha_{20} = 0,0043 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ angegeben. Welche Empfindlichkeit bezüglich der Umsetzung der Temperatur in eine Messspannung hat dieses Kupferelement, wenn es mit einem Konstantstrom von 10 mA gespeist wird und bei 0°C den Widerstand $R = 50 \text{ } \Omega$ hat?

3.4.2 Lokale Empfindlichkeit

Bestimmen Sie die lokale Empfindlichkeit eines Platin-Sensorelementes bei 200°C und vergleichen Sie die Werte mit denen bei 0°C . Geben Sie für den Arbeitspunkt 200°C die linearisierte Kennlinien an (= Tangente an die Originalkennlinie).

3.4.3 Kennlinienabweichungen

Eine Temperatur-Anzeigeeinheit zeigt $\vartheta_A = -20^{\circ}\text{C}$ bei einer (Eingangs-) Messspannung $U_M = -1 \text{ V}$ und $\vartheta_A = 60^{\circ}\text{C}$ bei $U_M = 3 \text{ V}$ an.

- Geben Sie die entsprechende lineare Kennlinie der Anzeigeeinheit $\vartheta_A(U_M)$ an (Formel und Skizze).

Mit Hilfe einer Konstant-Stromquelle ($I_M = 1 \text{ mA}$) und eines NI-100-Sensorelementes mit der Charakteristik $R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \cdot \vartheta + 6,7 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-2} \cdot \vartheta^2)$ wird die Messspannung durch eine Verstärkerschaltung wie folgt erzeugt:

$$U_M = 86,7 \cdot I_M \cdot R(\vartheta) - 8,74 \text{ V}$$

- Bestimmen Sie die Kennlinie $\vartheta_A(\vartheta)$ dieser Messanordnung (nur Formel!).
- Bestimmen Sie den Offsetfehler der Temperaturanzeige bei $\vartheta = 0^{\circ}\text{C}$ sowie die Abweichung bei 100°C .
- Bestimmen Sie die Gleichung für die nach Korrektur des Offsetfehlers verbleibende nichtlineare Kennlinienabweichung $\Delta\vartheta_A(\vartheta)$.
- Bei welchen Temperaturen ist der Linearitätsfehler gleich Null?

Lösungen

3.4.1 Temperaturabhängiger Kupfer-Widerstand

$\alpha_{20} = 0,0043 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ bedeutet $R(\vartheta) = R_{20} \cdot (1 + 0,0043 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}(\vartheta - 20^{\circ}\text{C}))$.

Wegen $R(0^\circ\text{C}) = 50\Omega$ gilt $R_{20} = \frac{50\Omega}{1-0,086} \approx 54,7\Omega$. Also

$$U_M(\vartheta) = R(\vartheta) \cdot 10\text{ mA} \approx 0,547\text{ V} \cdot (1 + 0,0043\text{ }^\circ\text{C}^{-1}(\vartheta - 20^\circ\text{C})) \text{ und}$$

$$E = \frac{dU_M}{d\vartheta} \approx 0,547\text{ V} \cdot 0,0043\text{ }^\circ\text{C}^{-1} \approx 2,35 \frac{\text{mV}}{^\circ\text{C}}$$

3.4.2 Lokale Empfindlichkeit

X

3.4.3 Kennlinienabweichungen

X

3.5 Übungen "Sensorkennlinien, Linearisierung"

3.5.1 Quadratische Kennlinie eines Temperatursensorelementes

Für einen Si-Widerstands-Temperatursensor mit

$$R(\vartheta) = R_{25} \cdot (1 + 0,01\text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot \Delta\vartheta + 5 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-2} \cdot \Delta\vartheta^2),$$

$$R_{25} = R(\vartheta = 25^\circ\text{C}) = 2\text{ k}\Omega, \Delta\vartheta = \vartheta - 25^\circ\text{C}$$

ist eine lineare Kennlinie $R_{lin}(\vartheta) = R_{off} + E \cdot \vartheta$ zu bestimmen.

1. Bestimmen Sie als Linearisierung die Tangente an die Kennlinie bei $\vartheta = 25^\circ\text{C}$.
2. Bestimmen Sie als weitere Linearisierung die Ausgleichsgerade, die sich aus den Punkten der Kennlinie bei $\vartheta = 0^\circ\text{C}$, $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ und bei $\vartheta = 80^\circ\text{C}$ ergibt.
3. Geben Sie für beide Linearisierungen den Offsetfehler bei $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ und die Kennlinienabweichung (absolut und relativ) bei $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ an.

3.5.2 Fehler bei linearer Verstärkung und Anzeige

Durch Speisung des Sensors aus 3.5.1 mit einem Konstantstrom von 1 mA entsteht die Messspannung $U_{m1} = R(\vartheta) \cdot 1\text{ mA}$. Diese wird mit einem Verstärker, der die Spannung U_{Offset} subtrahiert und das Ergebnis um den Faktor V verstärkt, in eine Messspannung U_{m2} umgesetzt, die zwischen 0 und 10 V liegen soll, wenn die Temperatur zwischen 0 und 100 °C variiert. Eine angeschlossene Digitalanzeige setzt mit idealer, linearer Kennlinie Spannungen zwischen -2 und 12 V in Temperaturanzeigenwerte zwischen -20 °C und 120 °C um.

1. Bestimmen Sie U_{Offset} und V so, dass $U_{m2} = 0\text{ V}$ bei $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ und $U_{m2} = 10\text{ V}$ bei $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ wird.
2. Bestimmen Sie U_{Offset} und V so, dass $U_{m2} = 0\text{ V}$ bei $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ und $U_{m2} = 10\text{ V}$ bei $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ gelten würde, wenn die Sensorkennlinie durch die oben berechnete Ausgleichsgerade gegeben wäre.
3. Berechnen Sie bezüglich des Anzeigewertes der Temperatur für 2. den Offsetfehler und den absoluten und relativen Messfehler bei 100 °C sowie für beide Verstärkerauslegungen die absolute und relative Abweichung bei 50 °C.

3.5.3 (Verbesserte) Linearisierung durch Vorwiderstand

Alle Aufgaben wie in 3.5.2, wobei nun aber der Si-Widerstands-Temperatursensor über einen Vorwiderstand R_V an eine konstante Speisespannung U_S angeschlossen und U_{m1} über dem Si-Widerstand abgegriffen wird:

$$U_{m1} = \frac{R(\vartheta)}{R_V + R(\vartheta)} \cdot U_S, \quad U_S = 10 \text{ V}, \quad R_V = 10 \text{ k}\Omega$$

Die Ausgleichsgerade für die Auslegung entsprechend b) ist dabei für U_{m1} zu bestimmen, das heißt für die Werte von U_{m1} bei $\vartheta = 0^\circ\text{C}$, $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ und bei $\vartheta = 80^\circ\text{C}$.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Für diese Aufgabe empfiehlt sich Rechnerunterstützung, z. B. alle Rechnungen in einem MATLAB-Script.

Dann sollten Sie auch einmal folgendes tun: Wiederholen Sie die Rechnung mit einem Vorwiderstand von $R_V = 3,3 \text{ k}\Omega$ und $R_V = 1 \text{ k}\Omega$ und vergleichen Sie!

3.5.4 Linearitätsfehler einer Temperaturmessung

Gegeben ist die Kennlinie eines Si-Widerstands-Temperatursensors durch die Gleichung

$$R(\vartheta) = R_{25} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta + \beta \cdot \Delta\vartheta^2),$$

$$R_{25} = 2 \text{ k}\Omega, \quad \Delta\vartheta = \vartheta - 25^\circ\text{C}, \quad \alpha = 7,88 \cdot 10^{-3}^\circ\text{C}^{-1}, \quad \beta = 1,937 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}^{-2}.$$

Die Serienschaltung dieses Sensors mit einem $3,3 \text{ k}\Omega$ - Widerstand wird mit einer Konstantspannung von 10 V gespeist. Die Messspannung U_M wird über dem Sensor abgegriffen.

1. Berechnen Sie die resultierende nichtlineare Sensorkennlinie $U_M(\vartheta)$
2. Bestimmen Sie umgekehrt $\hat{\vartheta}(U_M)$.
3. Geben Sie eine lineare Umrechnung der Form $\vartheta_M = k \cdot (U_M - U_0)$ an, die bei $\vartheta = 5^\circ\text{C}$ und 45°C exakt ist. Wie groß ist die Abweichung bei 25°C und bei 100°C ?

Stellen Sie $\hat{\vartheta}(U_M)$ und $\vartheta_M(U_M)$ in einem Diagramm dar.

Wie groß ist im Bereich $3 \text{ V} \leq U_M \leq 6 \text{ V}$ die maximale Abweichung zwischen tatsächlicher und berechneter Temperatur?

Lösungen

3.5.1 Quadratische Kennlinie eines Temperatursensorelementes

1. Tangente: $R_t(\vartheta) = 2000 \cdot (1 + 0.01 K^{-1} (\vartheta - 25^\circ C))$

2. Ausgleichsgerade:

th	=	0	20	50
80				

rth	=	1562.5	1902.5	2562.5	3402.5
-----	---	--------	--------	--------	--------

Mittelwerte: mth = 37.5

rth = 2357.5

Varianz var(th) = 1225

Kovarianz cov(th, rth) = 28250

Steigung m_ag = 23.061

Ausgleichsgerade $R_{ag} = 2.3575 k\Omega + 23.061 \cdot \frac{\Omega}{K} \cdot (\vartheta - 37.5^\circ C)$

Achsabschnitt b_rth = 1492.7 kΩ

3. Offsetfehler und Abweichung bei 100 °C:

Offsetfehler (Tangente) $\Delta R_t(0^\circ C) = -62.5 \Omega$ (Abweichung bei $\vartheta = 0^\circ C$)

relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_t}{R(0^\circ C)} \right| = 0.04 = 4.0\%$

Offsetfehler (Ausgleichsgerade) $\Delta R_{ag}(0^\circ C) = -69.8 \Omega$

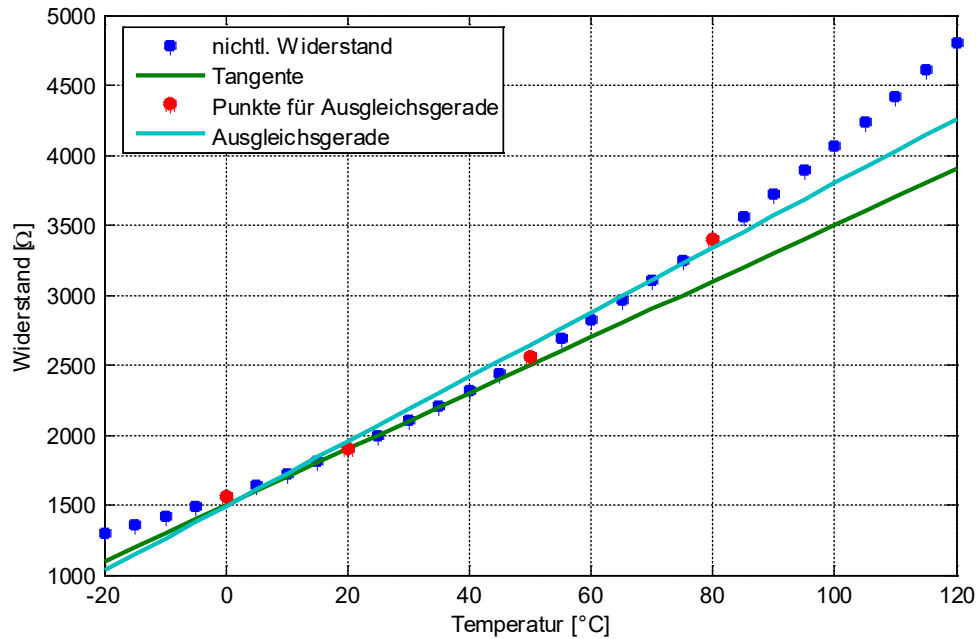
relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_{ag}}{R(0^\circ C)} \right| = 0.0447 = 4.47\%$

Abweichung (Tang.) bei 100 °C $\Delta R_t(100^\circ C) = -562.5 \Omega$

relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_t}{R(100^\circ C)} \right| = 0.1385 = 13.85\%$

Abweichung (Ausgleichsgerade) $\Delta R_{ag}(100^\circ C) = -263.7 \Omega$

relative Abweichung: $\left| \frac{\Delta R_{ag}}{R(100^\circ C)} \right| = 0.0649 = 6.49\%$



3.5.2 Fehler bei linearer Verstärkung und Anzeige

$$U_{m1}(\vartheta) = 2V \cdot \left(1 + 0.01 K^{-1} \cdot \Delta\vartheta + 5 \cdot 10^{-5} K^{-2} \cdot \Delta\vartheta^2\right)$$

1.)

Ansatz: $U_{m2} = V \cdot (U_{m1} - U_{off})$

$$\vartheta = 0^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (1.5625V - U_{off}) \stackrel{!}{=} 0V$$

$$U_{off} = 1.5625V$$

$$\vartheta = 100^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (4.0625V - U_{off}) \stackrel{!}{=} 10V$$

$$V = \frac{10V}{4.0625V - 1.5625V} = 4$$

2.)

$$U_{m1}(\vartheta) = 2.3575V + 23.061 \frac{mV}{K^{-1}} \cdot (\vartheta - 37.5)$$

$$\vartheta = 0^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (1.4927V - U_{off}) \stackrel{!}{=} 0V$$

$$U_{off} = 1.4927V$$

$$\vartheta = 100^\circ\text{C}: U_{m2} = V \cdot (3.799V - U_{off}) \stackrel{!}{=} 10V$$

$$V = \frac{10V}{3.799V - 1.4927V} = 4.336$$

3.)

$$\vartheta_A = 10 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{V}} \cdot U_{m2}$$

$$\vartheta = 0^{\circ}\text{C}: \quad U_{m2} = 4.336 \cdot (1.5625\text{V} - 1.4927\text{V}) \stackrel{!}{=} 0.303\text{V}$$

$$\vartheta_A = 3.03^{\circ}\text{C}$$

$$\vartheta = 100^{\circ}\text{C}: \quad U_{m2} = 4.336 \cdot (4.0625\text{V} - 1.4927\text{V}) \stackrel{!}{=} 11.14\text{V}$$

$$\vartheta_A = 111.4^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta\vartheta = 11.4^{\circ}\text{C} \quad \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = 0.114 = 11.4\%$$

Anzeigefehler bei 50 °C:

a) Kennlinie exakt bei 0°C und 100 °C

$$\vartheta = 50^{\circ}\text{C}: \quad U_{m2} = 4 \cdot (2.5625\text{V} - 1.5625\text{V}) \stackrel{!}{=} 4\text{V}$$

$$\vartheta_A = 40^{\circ}\text{C}, \quad \Delta\vartheta = 10^{\circ}\text{C} \quad \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{10}{50} = 20\%$$

b) Ausgleichsgerade

$$\vartheta = 50^{\circ}\text{C}: \quad U_{m2} = 4.336 \cdot (2.5625\text{V} - 1.4927\text{V}) \stackrel{!}{=} 4.639\text{V}$$

$$\vartheta_A = 46.39^{\circ}\text{C}, \quad \Delta\vartheta = 3.61^{\circ}\text{C} \quad \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{3.61}{50} = 7.2\%$$

3.5.3 (Verbesserte) Linearisierung durch Vorwiderstand

```
function [] = Uebung_353_Linearisierung_mit_Vorwiderstand.m ()

% Linearisierung der Kennlinie eines
% SI-Widerstandstemperaturfühlers durch einen Vorwiderstand
% M. Mevenkamp, 11/2011

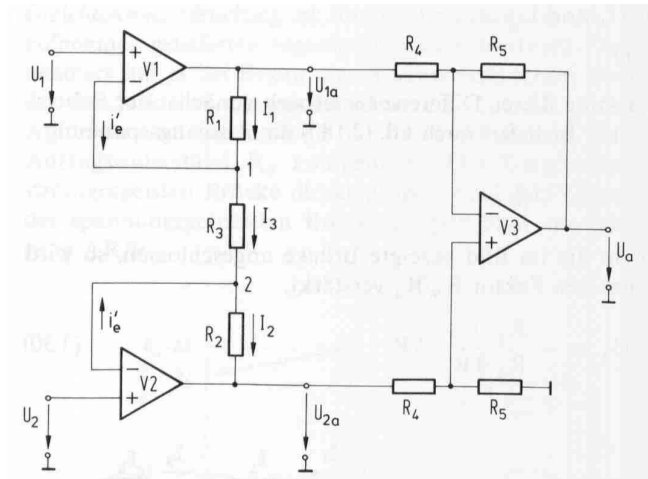
%% Kennlinie Si-Temperatursensorelement
th = (-20:5:120)'; % Temperaturen für Plot (X-Achse)
rth = si_res(th); % Widerstandswerte (Y-Achse)

%% Messspannung Um1
Rv = 18e3; % [Ohm] Vorwiderstand
U_S = 10; % [V] Speisespannung
Um1 = rth ./ (Rv + rth) * U_S;
... etc.
```

3.5.4 Linearitätsfehler einer Temperaturmessung

X

4 Messschaltungen, Operationsverstärker



Elektrometer-Differenzverstärker / Instrumentenverstärker

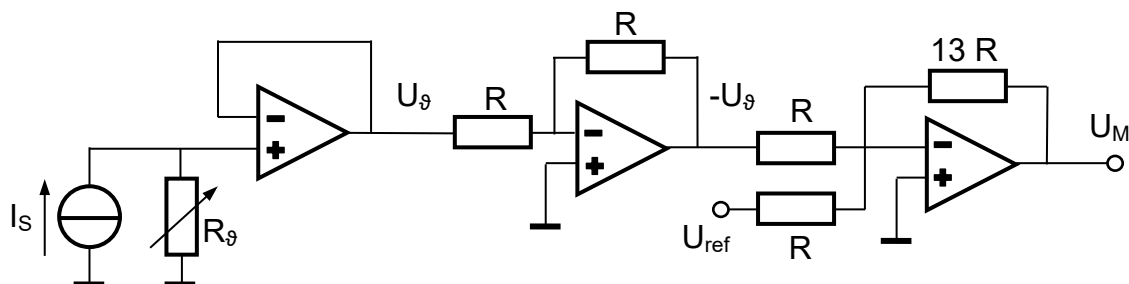
4.3 Übungen "Operationsverstärkerschaltungen"

4.3.1 Elektrometer-Differenzverstärker (Instrumentenverstärker)

- Bestimmen Sie für die Schaltung in Abbildung 4.5 U_{1a} , U_{2a} und $U_{1a}-U_{2a}$ in Abhängigkeit von U_1 , U_2 , R_1 , R_2 , R_3 .
- Bei symmetrischer Beschaltung $R_1 = R_2$: Welche Funktion hat R_3 ? Welche Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannungsdifferenz ergibt sich, wenn R_3 weggelassen wird ($R_3 \rightarrow \infty$)? (Lsg. und weitere OP-Schaltungen: s. Anhang B)
- Bestimmen Sie für den Fall $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega$ den Widerstand R_3 so, dass $U_a = -4 \cdot (U_1 - U_2)$ wird.

4.3.2 OP-Schaltung zur Temperaturmessung, Kennlinienabweichungen

Gegeben sei ein Temperaturmessgerät für den Messbereich $0 - 100^\circ\text{C}$ mit einem normgerechten Pt100-Element, wobei $I_S = 2 \text{ mA}$ und $U_{\text{ref}} = 0,2002 \text{ V}$.



- Zeigen Sie: $U_M = 13 \cdot (I_S \cdot R_\vartheta - U_{\text{ref}})$.

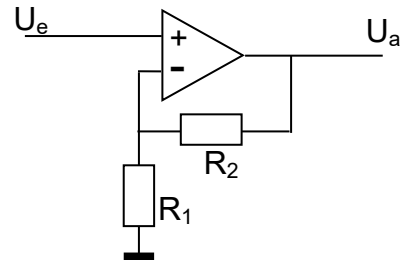
$U_M = 0 \dots 1 \text{ V}$ entspreche einer Anzeige von $0 \dots 100^\circ\text{C}$.

- b) Wie groß ist der Offset-Fehler?
- c) Wie groß ist der maximale Linearitätsfehler im Messbereich (angegeben in Prozent vom Endwert)? Ein evtl. vorhandener Steigungsfehler soll unberücksichtigt bleiben.

4.3.3 Nicht invertierender Verstärker

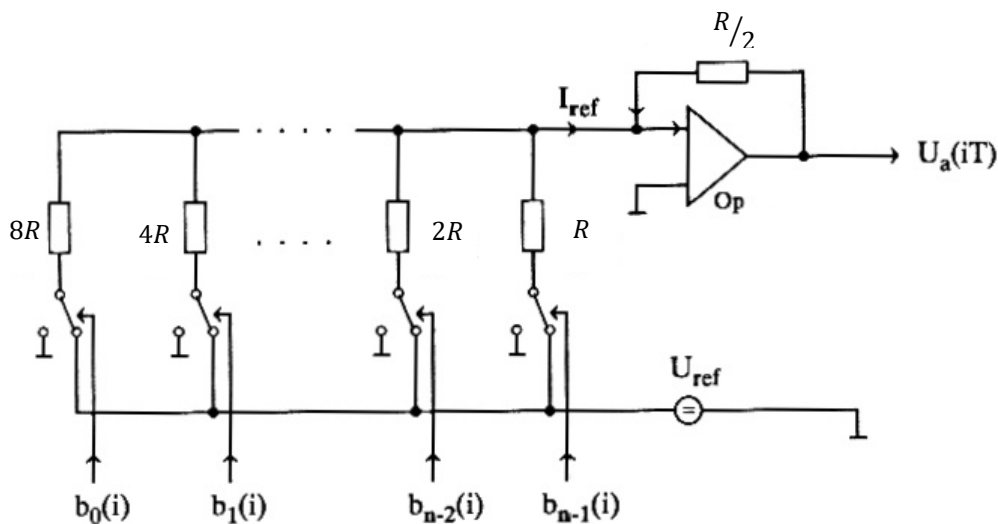
Bestimmen Sie das Übertragungsverhalten

$U_a = f(U_e)$ der nebenstehenden Operationsverstärkerschaltung (allgemein und für die Widerstandswerte $R_1 = 3,3 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 13,2 \text{ k}\Omega$).



4.3.4 D/A-Wandler

Bestimmen Sie U_a , wenn $U_{ref} = -10V$, $n = 4$ und $b = [b_3, b_2, b_1, b_0] = [1, 1, 0, 1]$ (alle Schalter wie im Bild gezeigt, nur der Schalter bei b_1 geöffnet).



Lösungen

4.3.1 Elektrometer-Differenzverstärker (Instrumentenverstärker)

Lösung siehe Skript, Anhang B

4.3.2 OP-Schaltung zur Temperaturmessung, Kennlinienabweichungen

x

4.3.3 Nichtinvertierender Verstärker

$$U_a = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot U_e$$

4.3.4 D/A-Wandler

Die OP-Schaltung realisiert einen invertierenden Addierer. Da die Referenzspannung negativ ist, ergibt sich eine positive Ausgangsspannung.

$$U_a = - \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} \right) \cdot (-10 \text{ V}) = (5 + 2,5 + 0 + 0,625) \text{ V} = 8,125 \text{ V}$$

4.6 Übungen "Brückenschaltungen"

4.6.1 Einfache Brückenschaltung

In Abbildung 4.8 sei $U_S = 6 \text{ V}$, $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$.

Wie groß ist R_1 , wenn $U_M = 1 \text{ V}$ gemessen wird?

4.6.2 Anwendung DMS-Messbrücke

Auf Ober- und Unterseite eines Rotorblattes einer Windenergieanlage wird je ein Metall-DMS mit Nennwiderstand 200Ω aufgebracht. Die DMS werden mit zwei Präzisionswiderständen von $1 \text{ k}\Omega$ so zu einer Halbbrücke verschaltet, dass jeweils ein DMS in Reihe mit einem $1 \text{ k}\Omega$ -Widerstand liegt. Die Brücke wird mit $U_S = 10 \text{ V}$ gespeist.

- Skizzieren Sie die Anordnung und den Schaltplan der Brückenschaltung.
- Wie groß ist die Brückenspannung, wenn die Dehnung der DMS bei vertikaler Belastung des Rotorblatts $\varepsilon = 0.2\%$ (bzw. Stauchung: $\varepsilon = -0.2\%$) beträgt?

Hinweis: Bei Metall-DMS kann die relative Widerstandsänderung gleich dem Doppelten der Dehnung angenommen werden, also $\frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot \varepsilon$.)

4.6.3 Vollbrücke

Herleitung der Beziehung zwischen U_M und ΔR_ε für die Vollbrücke.

Lösungen

4.6.1 Einfache Brückenschaltung

$$R_1 = 500 \Omega$$

4.6.2 Anwendung DMS-Messbrücke

a) x

$$\text{b) } |U_M| \approx 11.1 \text{ mV}$$

4.6.3 Vollbrücke

$$\text{Ergebnis: } U_M \approx -U_S \frac{\Delta R_\varepsilon}{R_0}$$

5 Digitale Signalverarbeitung

5.4 Übungen "Digitalisierung, AD-, DA-Umsetzung"

5.4.1 Abtastfrequenz, ADU-Wortlänge

Ein Signal $u(t) = 3,5V \cdot \cos(628 \frac{rad}{s} t)$ soll mit einem AD-Wandler digitalisiert werden. Die relative Abweichung zwischen den digitalen und den zugehörigen analogen Werten bei voller Signalamplitude soll maximal 0,1% betragen.

- Spezifizieren Sie Eingangsspannungsbereich und Wortlänge des AD-Wandlers.
- Welche Abtastfrequenz wählen Sie? Nennen Sie zwei Möglichkeiten und begründen Sie sie.

5.4.2 Quantisierung

- Mit welcher Amplitude des Quantisierungsrauschens ist bei einem 12-Bit-ADU mit Eingangsspannungsbereich $\pm 10V$ und rundendem Quantisierungsverhalten zu rechnen?
- Wenn das Nutzsignal nur einen Bereich von 1,2V bis 3,5V umfasst: Welches Signal-Rauschverhältnis (Verhältnis der (maximalen) Signalamplitude zur Amplitude des Quantisierungsrauschens) ergibt sich?
- Geben Sie diesen Wert als Signal-Rausch-Abstand in dB an!
- Welches Signal-Rauschverhältnis ergibt sich, wenn Sie den gleichen ADU mit einem Eingangsspannungsbereich von 0V ... 5V einsetzen (wenn Sie also bei der Signalkonditionierung auf eine möglichst gute Ausnutzung des Messbereichs achten)?

5.4.3 Abtastung von Signalen

- Prof. Taugenichts misst eine Sinusschwingung $u(t) = 3V \cdot \cos(1000 \frac{rad}{s} t)$ digital. Er behauptet, dass das mit einer Abtastfrequenz von 500 Hz möglich ist. Hat er Recht?
- Er setzt nun einen Gleichrichter ein, so dass am A/D-Wandler die Spannung $\tilde{u}(t) = \left| 3V \cdot \cos(1000 \frac{rad}{s} t) \right|$ anliegt. Was würden Sie ihm nun empfehlen?
- Berechnen/recherchieren Sie die Amplituden der Fourierreihe von $\tilde{u}(t)$, skizzieren Sie das Amplitudenspektrum und markieren Sie darin auf der Frequenzachse die Lage der Abtastrate und der halben Abtastrate. Tragen Sie dann die Spektrallinie mindestens einer Aliasschwingung ein.
- Gegeben sei das Signal $u_1(t) = \cos(2\pi \cdot 300 \text{ Hz} \cdot t)$. Es wird mit $f_s = 500 \text{ Hz}$ abgetastet. Geben Sie zwei andere Signale $u_2(t)$ und $u_3(t)$ an, die die gleiche Abtastwertefolge liefern.

5.4.4 Abtastung und Rekonstruktion von Signalen

Das Signal $u(t) = \hat{U}_1 \cos(2\pi \cdot 100\text{Hz} \cdot t) + \hat{U}_2 \cos(2\pi \cdot 250\text{Hz} \cdot t)$ wird durch einen AD-Wandler mit Sample&Hold digitalisiert, und der digitalisierte Wert wird unmittelbar auf einen DA-Wandler gegeben. Dies geschieht mit der Abtastfrequenz $f_s = 400\text{ Hz}$. Das analoge Ausgangssignal des DA-Wandlers wird mit einem Tiefpass mit der Grenzfrequenz 190 Hz gefiltert (ideale Filtercharakteristik).

- Welches Signal $\tilde{u}(t)$ wird am Tiefpass-Ausgang gemessen?
(Formel! $\tilde{u}(t) = \dots$)
- Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum von $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$! Markieren Sie darin auch f_s und $\frac{f_s}{2}$.

Lösungen

5.4.1 Abtastfrequenz, ADU-Wortlänge

- Eine mögliche Wahl wäre ein A/D-Wandler mit Eingangsspannungsbereich -5V ... +5V. Wortlänge so, dass $\frac{\Delta q}{\hat{u}} = \frac{\frac{10V}{2^M - 1}}{3,5V} \leq 0,001$, also $M \geq 12$
- Signalfrequenz ist $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 100\text{ Hz}$. Die nach Nyquist-Shannon zulässige minimale Abtastrate ist demnach $f_s = 200\text{ Hz}$. In typischen Anwendungen ist eine um etwa den Faktor 5 bis 10 größere Abtastfrequenz, also $f_s = 500 \dots 1000\text{ Hz}$ empfehlenswert.

5.4.2 Quantisierung

- $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{20V}{2^{12} - 1} \approx 2,442\text{ mV}$ b) $\frac{S}{N} = \frac{\frac{3,5V - 1,2V}{2}}{\varepsilon} \approx 470,925$ c) $\frac{S}{N} \approx 53,46\text{ dB}$
- $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{5V}{2^{12} - 1} \approx 0,6105\text{ mV}$ $\frac{S}{N} \approx 1883,7 \approx 65,5\text{ dB}$

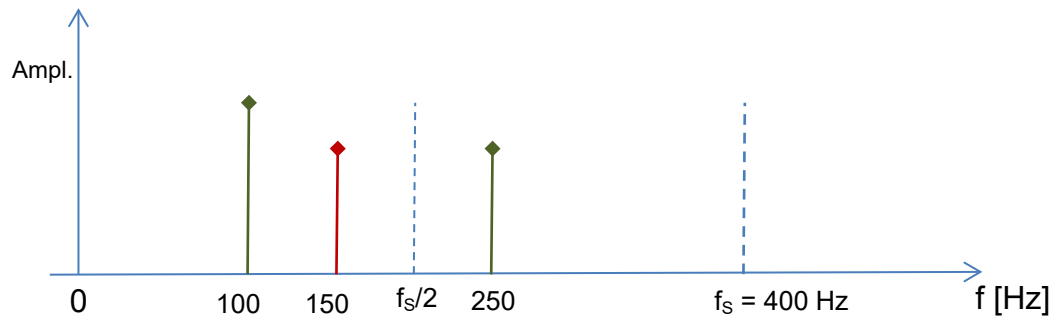
5.4.3 Abtastung von Signalen

- $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 159,155\text{ Hz}$, die Abtastrate ist mehr als doppelt so groß. Die Einstellung ist also in Ordnung.
- Das gleichgerichtete Sinussignal ist nicht bandbegrenzt. Auch eine Vergrößerung der Abtastrate würde das Auftreten von Aliasschwingungen im digitalisierten Signal nicht verhindern können. Es muss ein Aliasfilter eingesetzt werden, z. B. mit Grenzfrequenz 1600 Hz und Abtastrate 3500 Hz, um die Oberschwingungen wenigstens bis zur 10. Ordnung korrekt zu erfassen.
-
-

5.4.4 Abtastung und Rekonstruktion von Signalen

- a) Das digitalisierte Signal enthält neben den 100 Hz- und 250 Hz-Schwingungen eine Aliasschwingung der Frequenz 150 Hz. Das gefilterte Ausgangssignal des DA-Wandlers ist also $\tilde{u}(t) \approx \hat{U}_1 \cos(2\pi \cdot 100\text{Hz} \cdot t) + \hat{U}_2 \cos(2\pi \cdot 150\text{Hz} \cdot t)$

b)



Zum Spektrum von $u(t)$ gehören die Linien bei 100 Hz und 250 Hz. Zum Spektrum von $\tilde{u}(t)$ gehören die Linien bei 100 Hz und 150 Hz.

5.6 Übungen "Digitale Signalverarbeitung, Kenngrößen, Spektren"

5.6.1 Crest-Faktor

Bestimmen Sie den Crest-Faktor eines Rechtecksignals mit dem Puls-Pausen-Verhältnis 1:1 (Tastgrad bzw. Duty cycle 50%)

(Hinweis: für ein kontinuierliches Signal ist $x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$).

5.6.2 Analyse einer Wertefolge

Gegeben sei die Folge von Abtastwerten zu den Zeitpunkten $t_k = k \cdot T_s$, $k = 0, 1, \dots$

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_k	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Bestimmen Sie:

- Mittelwert
- RMS-Wert
- Crest-Faktor
- Statistische Standardabweichung (z. B. in MATLAB: `help std`)

- e) **Median:** Sei \tilde{x}_k die Wertereihe, die durch Sortierung der N Folgeelemente x_k nach der Größe entsteht. Dann gilt $x_M = \tilde{x}_{\frac{N+1}{2}}$, falls N ungerade bzw.

$$x_M = \frac{1}{2} \left(\tilde{x}_{\frac{N}{2}} + \tilde{x}_{\frac{N}{2}+1} \right), \text{ falls } N \text{ gerade.}$$

Der Median ist in der sortierten Folge der in der Mitte stehende Wert, d. h. 50% der Folgenwerte sind größer, 50% sind kleiner (z. B. in Matlab: `help median`).

- f) Absolute und relative Häufigkeitsverteilung (mit graphischer Darstellung) für die Amplitudenklassen

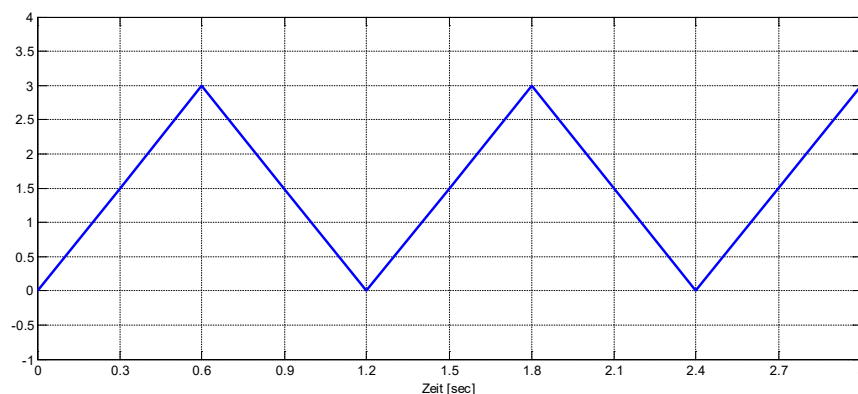
$$\left\{ \left[-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6} \right], \left[-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2} \right], \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} \right], \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right], \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right], \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right], \left[\frac{5}{6}, \frac{7}{6} \right] \right\}$$

(z. B. in Matlab: `help hist` bzw. `doc hist`)

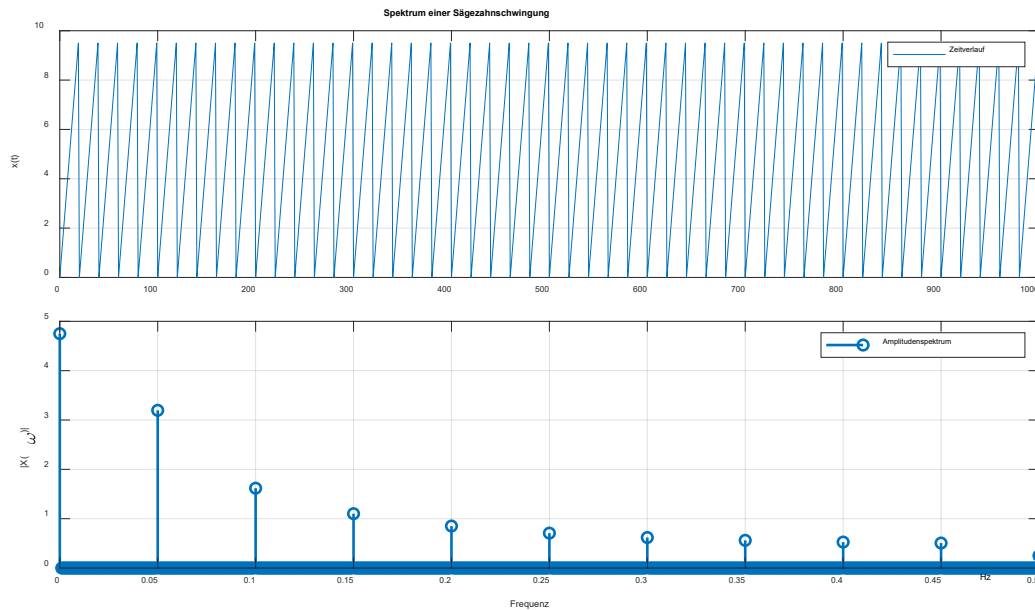
- g) Skizzieren Sie den Verlauf. Geben Sie als Formel an, zu welcher Sinus-/Kosinusfunktion diese Folge gehören könnte ($x(t) = \dots$).
- h) Skizzieren Sie das zu dieser Funktion gehörige Amplitudenspektrum.

5.6.3 Spektrum

Berechnen/Recherchieren Sie die Fourier-Zerlegung der skizzierten Dreiecksschwingung und skizzieren Sie das Amplitudenspektrum.



Zum Vergleich: Das auf AULIS bereitgestellte Skript `saegezahn_FFT.m` liefert folgendes Ergebnis:



5.6.4 Spektrum 2

Ergänzen Sie das Sägezahnspektrum so, dass es dem entspricht, das bei Abtastung des Signals mit der Frequenz $f_s = 0,56 \text{ Hz}$ entstehen würde

Lösungen

5.6.1 Crest-Faktor

X

5.6.2 Analyse einer Wertefolge

Das Matlab-Skript

```
% loesung_kenngroessen.m
t = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11]';
x = [1 sqrt(3)/2 1/2 0 -1/2 -sqrt(3)/2 -1 -sqrt(3)/2 -1/2 0 1/2 sqrt(3)/2]';
N = length(x)

% Skizze mit Cosinus-Schwingung zum Vergleich (Teilaufgabe h)
t1 = [0:0.1:12];
x1 = cos(2*pi/12*t1);
figure(1); clf; plot(t,x,t1,x1); grid

% Kenngrößen
xm = sum(x)/N

xrms = sqrt(x'*x / N)

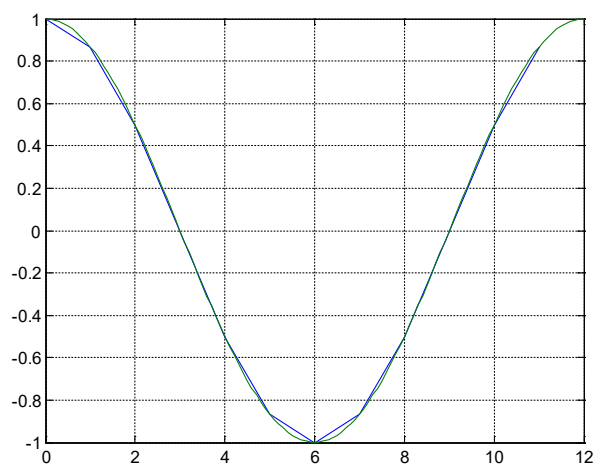
xcrest = 1 / xrms

xstd = std(x)

xvk = xstd / xm

xmed = median(x)

figure(2); clf
hist(x,[-1:0.05:1])
```



liefert:

t =	x =
0	1.0000
1	0.8660
2	0.5000
3	0
4	-0.5000
5	-0.8660
6	-1.0000
7	-0.8660
8	-0.5000
9	0
10	0.5000
11	0.8660

N = 12

xm = -1.8504e-017

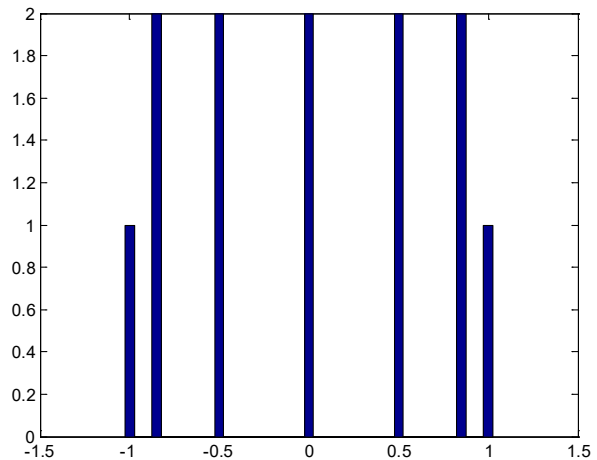
xrms = 0.7071

xcrest = 1.4142

xstd = 0.7385

xvk = -3.9914e+016

xmed = 0



mit obigem Signalverlauf und Histogramm.

- i) Das Amplitudenspektrum besteht nur aus einer Linie der Länge 1 bei der Frequenz $1/12$.

5.6.3 Spektrum

X

5.6.4 Spektrum 2

X

5.9 Übungen "FFT-Amplitudenspektren, Aliaseffekt"

5.9.1 DFT-Spektrum

Das Signal $u(t) = 2 \text{ V} \cdot \sin\left(3140 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)$ wird mit $f_s = 800 \text{ Hz}$ abgetastet. Bei welcher Frequenz bzw. welchen Frequenzen sind im DFT-Spektrum Linien zu erwarten? Skizzieren Sie das Spektrum ($|S_n|$).

Hinweis: die Werte eines DFT-Spektrums geben nur die Hälfte der Amplitude der Schwingung mit der jeweiligen Frequenz wieder.

5.9.2 Amplitudenspektrum eines Rechtecksignals

Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum^(*) eines Rechtecksignals mit der Periodendauer $T = 10 \text{ ms}$ bis zur Frequenz 800 Hz. Dabei sei der Gleichanteil Null und die Amplitude der Grundschiwingung sei gleich 6.

^(*) Hier ist (anders als beim DFT-Spektrum) für jede auftretende Schwingung die volle Amplitude bei der jeweiligen Frequenz einzutragen.

Das Signal wird nun mit einem (ideal angenommenen) Tiefpass mit $f_g = 850 \text{ Hz}$ gefiltert und mit $f_s = 900 \text{ Hz}$ abgetastet. Ergänzen Sie die Skizze um die dadurch zwischen 0 und 800 Hz hinzukommenden Linien (am besten in anderer Farbe).

5.9.3 Amplitudenspektrum einer Sägezahnschwingung

Eine Sägezahnschwingung habe die Fourierreihenentwicklung

$$u(t) = 1V - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V}{n} \sin\left(n \frac{2\pi}{0,05s} t\right)$$

- Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum im Frequenzbereich bis 105 Hz (auch hier gilt die obige Anmerkung^(*)).
- Durch (ideale) Tiefpassfilterung mit $f_g = 125 \text{ Hz}$, Digitalisierung mit der Abtastzeit $T_s = 130 \text{ Hz}$, anschließende D/A-Umsetzung und Tiefpassfilterung mit $f_g = 70 \text{ Hz}$ entsteht das Signal $\tilde{u}(t)$. Skizzieren Sie dessen Amplitudenspektrum im Frequenzbereich bis 70 Hz.

Lösungen

5.9.1 -

5.9.2 -

5.9.3 -

6 Vertrauensniveau und vollständiges Messergebnis

6.3 Wer misst, misst Mist - Messabweichungen, Messunsicherheit

Kein Messwert ohne Messabweichung,

kein Messergebnis ohne Messunsicherheit!

6.4 Übungen "Messabweichungen"

6.4.1 Genauigkeitsklasse

Ein Amperemeter habe die Genauigkeitsklasse 2.

- Welche Messunsicherheit besteht bei einem Ablesewert von 15 mA im Messbereich 200 mA?
- Wie groß ist der relative Fehler?
- Bestimmen Sie die entsprechenden Größen bei einem Ablesewert von 175 mA.

Lösung

2.6.1 Genauigkeitsklasse

- $\Delta I = 4 \text{ mA}$
- $\frac{\Delta I}{I} \approx 26,7\%$
- $\Delta I = 4 \text{ mA}, \frac{\Delta I}{I} \approx 2,29\%$

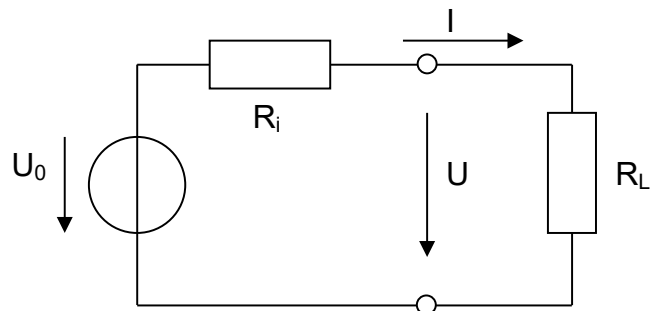
6.4 Übungen "Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzung"

6.4.1 Innenwiderstand mit Messunsicherheit

In der abgebildeten Schaltung lässt sich durch Änderung von R_L der Strom I einstellen. Für zwei geeignete Einstellungen wurden folgende Ströme und Spannungen gemessen:

$$\begin{array}{ll} I_1 = 1,0 \text{ A} \pm 0,02 \text{ A} & U_1 = 36,6 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V} \\ I_2 = 0,8 \text{ A} \pm 0,02 \text{ A} & U_2 = 36,8 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V} \end{array}$$

Welches Ergebnis erhält man hieraus für den Innenwiderstand R_i ?



6.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

In der abgebildeten Schaltung ist $R_M = 0,1 \, \Omega (\pm 0,1\%)$ ein Messwiderstand. R_S soll bestimmt werden.

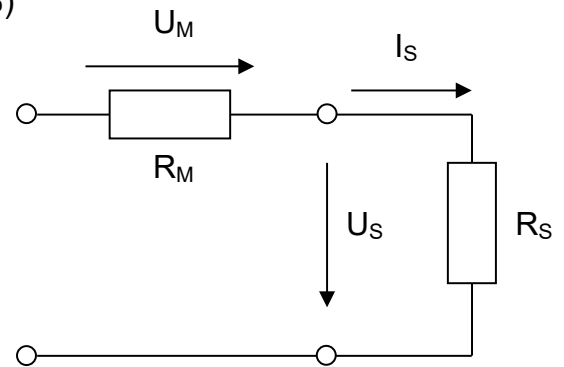
Gemessen wird

$$U_M = 0,14 \, \text{V} \pm 0,01 \, \text{V}$$

$$U_S = 14,3 \, \text{V} \pm 0,3 \, \text{V}.$$

Welches Ergebnis erhält man für R_S ?

Anmerkung: Diese Anordnung ist eine typische Schaltung zur Widerstandsbestimmung mit Hilfe einer Spannungs- und einer (indirekten) Strommessung.



6.4.3 Füllfaktor einer Solarzelle

Der Füllfaktor, eine wichtige Kenngröße von Solarzellen, wird gemäß

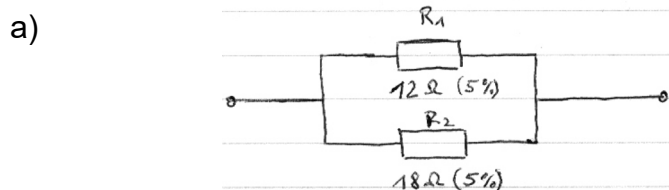
$$FF = \frac{P_{MPP}}{U_{oc} \cdot I_{sc}}$$

berechnet.

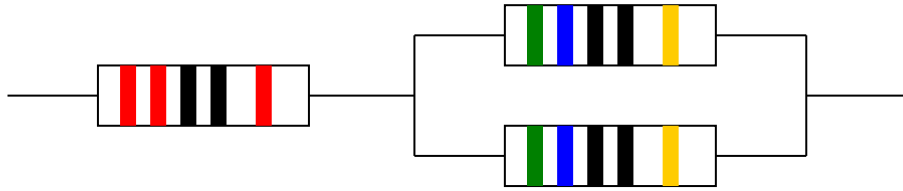
Aus den Messwerten $U_{oc} = 0,6 \, \text{V} \pm 0,02 \, \text{V}$, $I_{sc} = 0,3 \, \text{A} \pm 0,02 \, \text{A}$, $P_{MPP} = 0,13 \, \text{W} \pm 0,01 \, \text{W}$ ist der Füllfaktor einschließlich der absoluten und relativen Messunsicherheit zu bestimmen.

6.4.4 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Bestimmen Sie jeweils den Gesamtwiderstand der folgenden Widerstandskombinationen und dessen Toleranz (absolut und relativ).



3.



Farbcodierung von Widerständen siehe Anhang A.

6.4.5 Fehlerfortpflanzung bei der Division

Leiten Sie die Fehlerfortpflanzung der Division ($M = \frac{m_1}{m_2}$, $\frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$)

mit Hilfe von

$$\Delta M = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_1}\right|_{m_1} \cdot \Delta m_1\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_2}\right|_{m_2} \cdot \Delta m_2\right)^2 + \dots + \left(\left.\frac{\partial M}{\partial m_n}\right|_{m_n} \cdot \Delta m_n\right)^2} \quad \text{her.}$$

Lösungen

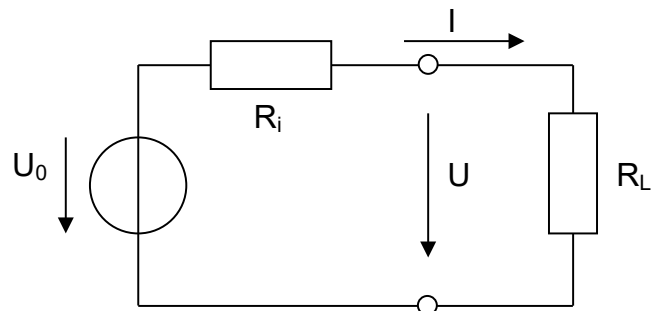
6.4.1 Innenwiderstand mit Messunsicherheit

Es gilt

$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

etc. (siehe 0.4.1)

$$R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} \quad \text{und} \quad U_0 = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$$



$$U_2 - U_1 = 0,2 \text{ V} \pm \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} \text{ V} \approx 0,2 \text{ V} \pm 0,14 \text{ V}$$

$$I_1 - I_2 = 0,2 \text{ A} \pm \sqrt{0,02^2 + 0,02^2} \text{ A} \approx 0,2 \text{ A} \pm 0,028 \text{ A}$$

$$R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 1 \, \Omega$$

$$\frac{\Delta R_i}{R_i} = \sqrt{\left(\frac{0,14}{0,2}\right)^2 + \left(\frac{0,028}{0,2}\right)^2} \approx 0,72 = 72\% , \hat{R}_i = 1 \, \Omega \pm 0,72 \, \Omega$$

alternativ:

$$\Delta R_{i,U_1} = \frac{\partial R_i}{\partial U_1} \Delta U_1 = -\frac{\Delta U_1}{I_1 - I_2} = -5 \frac{\Omega}{V} \Delta U_1 = -0,5 \Omega$$

$$\Delta R_{i,U_2} = \frac{\partial R_i}{\partial U_2} \Delta U_2 = \frac{\Delta U_2}{I_1 - I_2} = 5 \frac{\Omega}{V} \Delta U_2 = 0,5 \Omega$$

$$\Delta R_{i,I_1} = \frac{\partial R_i}{\partial I_1} \Delta I_1 = \frac{U_2 - U_1}{(I_1 - I_2)^2} \Delta I_1 = \frac{R_i}{I_1 - I_2} \Delta I_1 = 5 \frac{\Omega}{V} \Delta I_1 = 0,1 \Omega$$

$$\Delta R_{i,I_2} = \frac{\partial R_i}{\partial I_2} \Delta I_2 = -\frac{U_2 - U_1}{(I_1 - I_2)^2} \Delta I_2 = -\frac{R_i}{I_1 - I_2} \Delta I_2 = -5 \frac{\Omega}{V} \Delta I_2 = -0,1 \Omega$$

$$\Delta R_i = \sqrt{(-0,5)^2 + (0,5)^2 + (-0,1)^2 + (0,1)^2} \Omega \approx 0,72 \Omega, \quad \frac{\Delta R_i}{R_i} \approx 72\%$$

6.4.2 Widerstandsbestimmung aus Strom und Spannung

$$I_S = \frac{U_M}{R_M} = \frac{0,14 V}{0,1 \Omega} = 1,4 A \quad \frac{\Delta I_S}{I_S} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{0,14}\right)^2 + 0,001^2} = 0,07144 = 7,14\%$$

$$R_S = \frac{U_S}{I_S} = \frac{14,3 V}{1,4 A} \approx 10,21 \Omega \quad \frac{\Delta R_S}{R_S} = \sqrt{\left(\frac{0,3}{14,3}\right)^2 + 0,0714^2} \approx 0,0745 = 7,45\%$$

$$\Delta R_S \approx 0,76 \Omega$$

$$\hat{R}_S = 10,21 \Omega \pm 0,76 \Omega$$

Der größte Beitrag zur Messunsicherheit von R_S rührt dabei von $\frac{\Delta U_M}{U_M} \approx 7,143\%$ her.

6.4.3 Füllfaktor einer Solarzelle

$$FF = \frac{P_{MPP}}{U_{oc} \cdot I_{sc}} = \frac{0,13 W}{0,6 V \cdot 0,3 A} \approx 0,722$$

$$\frac{\Delta FF}{FF} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{0,13}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,6}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,3}\right)^2} \approx 0,107 = 10,7\%$$

oder in zwei Schritten:

$$P_0 = U_{oc} \cdot I_{sc} = 0,18 W$$

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} = \sqrt{\left(\frac{0,02}{0,6}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,3}\right)^2} \approx 0,0745 = 7,45\%$$

$$\frac{\Delta FF}{FF} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{0,13}\right)^2 + 0,0745^2} \approx 0,107 = 10,7\% \quad (\text{wie oben})$$

absolute Messunsicherheit: $\Delta FF = 0,107 \cdot FF \approx 0,077$

6.4.4 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

a)

1.) Vereinfachte Fehlerfortpflanzungsrechnung anhand der Leitwerte:

$$R = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{12 \Omega} \quad \frac{\Delta Y_1}{Y_1} = \frac{\Delta R_1}{R_1} = 5\% \quad \Delta Y_1 = \frac{0,05}{12 \Omega}$$

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{18 \Omega} \quad \frac{\Delta Y_2}{Y_2} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = 5\% \quad \Delta Y_2 = \frac{0,05}{18 \Omega}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{30 \Omega}{12 \cdot 18 \Omega^2} = \frac{5}{36 \Omega} \approx 0,1389 \Omega^{-1}$$

$$\Delta Y = \sqrt{\Delta Y_1^2 + \Delta Y_2^2} \approx 0,00501 \Omega^{-1}$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = 0,0361 \approx 3,6\%$$

$$R = \frac{1}{Y} = \frac{36}{5} \Omega = 7,2 \Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta Y}{Y} \approx 3,6\% \quad \Delta R \approx 0,26 \Omega$$

2.) Fehlerfortpflanzungsrechnung mit partiellen Ableitungen (**empfohlen!**):

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 18}{30} \Omega = 7,2 \Omega$$

$$\Delta R_{R_1} = \frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 = \frac{R_2 (R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \Delta R_1$$

$$= \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_1 = \left(\frac{18}{30} \right)^2 \cdot \frac{5,12}{100} \Omega = \frac{9,12}{500} \Omega$$

$$\Delta R_{R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_2 = \left(\frac{12}{30} \right)^2 \cdot \frac{5,18}{100} \Omega = \frac{4,18}{500} \Omega$$

$$\Delta R = \sqrt{\Delta R_{R_1}^2 + \Delta R_{R_2}^2} = \sqrt{\left(\frac{9,12}{500} \right)^2 + \left(\frac{4,18}{500} \right)^2}$$

$$= \frac{36}{500} \sqrt{3^2 + 2^2} = \frac{36}{5} \cdot \frac{\sqrt{13}}{100} \approx 0,26 \Omega$$

$$\Delta R / R = \frac{\sqrt{13}}{100} \approx 3,6\%$$

3.) Vereinfachte Fehlerfortpflanzungsrechnung, direkt auf die Formel der Parallelschaltung angewendet, liefert ein **falsches Ergebnis!**

$$R_z = R_1 R_2 = 216 \Omega^2$$

$$\frac{\Delta R_z}{R_z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{100}\right)^2 + \left(\frac{5}{100}\right)^2} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \approx 0,0707$$

$$R_N = R_1 + R_2 = 30 \Omega, \quad \Delta R_N = \sqrt{0,6^2 + 0,9^2} = \frac{3}{10} \sqrt{13} \Omega$$

$$R = \frac{R_z}{R_N} = 7,2 \Omega \quad \text{da } \Delta R_z \text{ und } \Delta R_N \text{ nicht unabhängig!}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{1}{10\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{100}\right)^2} = \frac{1}{100} \sqrt{63} \approx 0,08 = 8\%$$

b) Gesamtwiderstand

$$1. \quad R_1 = 1,2 \text{ k}\Omega \quad (\pm 10\%) \quad R_2 = 680 \Omega \quad (\pm 10\%) \quad R_g = 1880 \Omega \quad (\pm 7,34\%)$$

$$2. \quad R_1 = 47 \text{ k}\Omega \quad (\pm 10\%) \quad R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega \quad (\pm 5\%) \quad R_g = 1,454 \text{ k}\Omega \quad (\pm 4,85\%)$$

$$3. \quad R_1 = 220 \Omega \quad (\pm 2\%) \quad R_2 = R_3 = 560 \Omega \quad (\pm 5\%) \quad R_g = 500 \Omega \quad (\pm 2,17\%)$$

6.4.5 Fehlerfortpflanzung bei der Division

Die Rechenregel der Fehlerfortpflanzung bei Division ergibt sich aus

$$M = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Delta M_{m_1} = \frac{\partial M}{\partial m_1} \cdot \Delta m_1 = \frac{1}{m_2} \cdot \Delta m_1 = M \cdot \frac{\Delta m_1}{m_1}$$

$$\Delta M_{m_2} = \frac{\partial M}{\partial m_2} \cdot \Delta m_2 = -\frac{m_1}{m_2^2} \cdot \Delta m_2 = -M \cdot \frac{\Delta m_2}{m_2}$$

$$\Delta M = \sqrt{(\Delta M_{m_1})^2 + (\Delta M_{m_2})^2} = \sqrt{\left(M \cdot \frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(-M \cdot \frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_2}{m_2}\right)^2}$$

6.6 Übungen "Vollständiges Messergebnis, Fehlerfortpflanzung"

6.6.1 Temperaturmessreihe mit Messgeräte-Toleranz

An einem Tank, dessen Inhalt überall die gleiche Temperatur hat, werden acht Temperaturmessungen vorgenommen, die die folgenden Werte liefern:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8
Temp./°C	362	352	368	378	350	360	356	370

- Bestimmen Sie Mittelwert und statistische Standardabweichung.
- Welche Messunsicherheit bezogen auf ein Vertrauensniveau von 95% ergibt sich daraus?
- Geben Sie das vollständige Messergebnis an, wenn das verwendete Temperaturmesssystem eine Toleranz von $\pm 10^\circ\text{C}$ hat.

6.6.2 Strommessung mit Multimeter

Ein Multimeter hat die Genauigkeitsklasse 1,5.

- Wie groß ist die Garantiefehlergrenze G des Messinstruments?

Im Messbereich 0 – 3 A wird der Strom I in 4 aufeinander folgenden, unabhängigen Messungen, wie in der Tabelle dargestellt, gemessen.

- Geben Sie das vollständige Messergebnis für I für ein Vertrauensniveau von 95% an.

Messung Nr.	1	2	3	4
Strom I [A]	1,3	1,35	1,26	1,29

- Der Chef macht eine weitere Messung zur Kontrolle. In welchem Intervall wird sein Messwert mit 95% Wahrscheinlichkeit liegen?

6.6.3 Messunsicherheit einer Messreihe

Eine Messreihe liefert für den Schaltweg S eines Mikroschalters die unten angegebenen Werte. Es wird mit einem Wegsensor gemessen, dessen Messunsicherheit mit $1\ \mu\text{m}$ angegeben ist.

Messung Nr.	1	2	3	4
Schaltweg [μm]	30	35	27	31

- Geben Sie das vollständige Messergebnis für S für ein Vertrauensniveau von 95% an.
- Wenn weitere Messungen aufgenommen werden: In welchem Intervall sind deren Werte mit 95% Wahrscheinlichkeit zu erwarten?

- c) In zwei weiteren Messungen wird $s_5 = 33\mu\text{m}$ und $s_6 = 28,5\mu\text{m}$ gemessen. Wie ändert sich das vollständige Messergebnis, wenn diese Messungen mitberücksichtigt werden? Geben Sie die Änderung der Messunsicherheit gegenüber a) in % an.

6.6.4 Widerstandstoleranzen

Auf einer in Serienfertigung hergestellten Platine war ein $82\text{ k}\Omega$ Widerstand mit 1% Toleranz spezifiziert. Stattdessen soll nun eine Serienschaltung dreier Widerstände ($22\text{ k}\Omega$, $27\text{ k}\Omega$, $33\text{ k}\Omega$) vorgesehen werden. Wird die geforderte Toleranz erreicht, wenn die ersten beiden Widerstände eine Toleranz von 5% haben und die Toleranz des $33\text{ k}\Omega$ Widerstands 2% beträgt?

6.6.5 Messwertablesung

Nacheinander werden auf der Anzeige eines Drehspulinstruments von 5 Personen folgende Werte abgelesen:

Person	1	2	3	4	5
Strom [mA]	27	29	24	25	24

- a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die statistische Standardabweichung.
- b) Welche Messunsicherheit bezogen auf ein Vertrauensniveau von 95% ergibt sich daraus?
- c) Es wird eine sechste Person gebeten, die Messung durchzuführen. In welchem Bereich ist mit 95% Wahrscheinlichkeit ihr Ablesewert zu erwarten.

6.6.6 NTC Parameterbestimmung

Für den Widerstand eines NTC gilt: $R = R_0 \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$

Durch zwei Widerstands- und Temperaturmessungen soll B bestimmt werden. Es liegen folgende Werte mit den angegebenen Messabweichungen (Vertrauensniveau $(1-\alpha) = 0.95$) vor: $T_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ (exakt, Eisbad!), $T_1 = 353\text{ K} \pm 1\text{ K}$,

$$R_0 = 30\text{ k}\Omega \quad (\pm 1\%) \quad , \quad R_1 = 500\text{ }\Omega \quad (\pm 1\%)$$

Geben Sie das vollständige Messergebnis für B an.

6.6.7 NTC: R_∞

Zur Bestimmung der Hilfsgröße $R_\infty = R(T \rightarrow \infty) = R_0 \cdot e^{\frac{B}{T_0}}$ eines NTC, dessen Parameter mit $B = 4000 \text{ K} \pm 5\%$ angegeben ist, wird eine Messung aufgenommen:

$$T_0 = 298 \text{ K} \pm 0.5 \text{ K}, \quad R_0 = 26.5 \text{ k}\Omega \pm 300 \Omega$$

Wie lautet R_∞ und welche Messunsicherheit ergibt sich?

Lösungen

6.6.1 Temperaturmessreihe mit Messgeräte-Toleranz

a) Mittelwert: $\bar{\vartheta} = 362 \text{ }^\circ\text{C}$

Stat. Standardabweichung: $s_{\vartheta} \approx 9,56 \text{ }^\circ\text{C}$

b) $\Delta\vartheta = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot 2,37 \cdot s_{\vartheta} \approx 8,0 \text{ }^\circ\text{C},$

c) $\Delta\vartheta_g = \sqrt{\Delta\vartheta^2 + e^2}, e = 0,025 \cdot 500 \text{ }^\circ\text{C} = 12,5 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\Delta\vartheta_g \approx 14,84 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\hat{\vartheta} = 362 \text{ }^\circ\text{C} \pm 14,84 \text{ }^\circ\text{C}, (1 - \alpha) = 0,95$$

6.6.2 Strommessung mit Multimeter

X

6.6.3 Messunsicherheit einer Messreihe

a) $\bar{S} = 30,75 \mu\text{m}$

$$s_{S,4} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum (\dots)^2} = 3,304 \mu\text{m}$$

$$t_{4,95} = 3,18$$

$$\Delta S_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} t_{N,95} s_N = 5,253 \mu\text{m}$$

$$\Delta S_2 = 1 \mu\text{m}$$

$$\Delta S = \sqrt{\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2} = 5,35 \mu\text{m}$$

$$S = 30,75 \pm 5,35 \mu\text{m}, (1 - \alpha) = 0,95$$

b) $\Delta S_i = 3,18 \cdot 3,304 \mu\text{m} \approx 10,5 \mu\text{m}$

$$20,25 \mu\text{m} < S_i < 41,25 \mu\text{m}$$

c) $\bar{S} = 30,75 \mu\text{m}$ (unverändert)

$$\Delta S_{N=6} = 3,23 \mu\text{m}$$

$$\frac{\Delta S_{N=4} - \Delta S_{N=6}}{\Delta S_{N=4}} \approx 0,4$$

Die Messunsicherheit wird durch die zwei weiteren Messungen um 40% reduziert!

6.6.4 Widerstandstoleranzen

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\Delta R_{ges} = \sqrt{(\Delta R_1)^2 + (\Delta R_2)^2 + (\Delta R_3)^2}$$

$$\Delta R_{ges} = \sqrt{(1,1)^2 + (1,35)^2 + (0,66)^2} \text{ k}\Omega \approx 1,86 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{\Delta R_{ges}}{R_{ges}} = \frac{1,86}{82} \approx 0,0227 = 2,27\%$$

Die geforderte Toleranz von 1% wird durch die Serienschaltung nicht eingehalten.

6.6.5 Messwertablesung

a) $\bar{I} = \frac{129 \text{ mA}}{5} = 25,8 \text{ mA}$, $s_I^2 = 4,7 \text{ mA}^2$, $s_I \approx 2,168 \text{ mA}$

b) $\Delta I \approx 2,695 \text{ mA}$

c) $\widetilde{\Delta I} = \sqrt{5} \cdot \Delta I \approx 6,027 \text{ mA}$

Zu erwarten ist $19,77 \text{ mA} < I_6 < 31,83 \text{ mA}$

6.6.6 NTC Parameterbestimmung

$$R_1 = R_0 \cdot e^{B \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right)} \Rightarrow B = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}} \cdot \ln \frac{R_1}{R_0} = \frac{T_0 \cdot T_1}{T_1 - T_0} \cdot (\ln R_0 - \ln R_1)$$

angegebene Nennwerte: $R_1 = 500 \Omega$, $R_0 = 30 \text{ k}\Omega$, $T_1 = 353 \text{ K}$, $T_0 = 273 \text{ K}$

$$\Rightarrow \bar{B} = 4932,1 \text{ K}$$

$$\Delta B = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial R_0} \cdot \Delta R_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial T_1} \cdot \Delta T_1 \right)^2} \quad (\Delta T_0 = 0!)$$

$$\frac{\partial B}{\partial R_1} = -\frac{T_0 \cdot T_1}{T_1 - T_0} \cdot \frac{1}{R_1} = 2,409 \frac{\text{K}}{\Omega} \quad \frac{\partial B}{\partial R_0} = \frac{T_0 \cdot T_1}{T_1 - T_0} \cdot \frac{1}{R_0} = 0,04015 \frac{\text{K}}{\Omega}$$

$$\frac{\partial B}{\partial T_1} = \frac{T_0 \cdot (T_1 - T_0) - T_0 \cdot T_1}{(T_1 - T_0)^2} \cdot (\ln R_0 - \ln R_1) = -\frac{T_0^2}{(T_1 - T_0)^2} \cdot (\ln R_0 - \ln R_1) = -47,68$$

Messabweichungen: $\Delta R_1 = 5 \Omega$, $\Delta R_0 = 300 \Omega$, $\Delta T_1 = 1 \text{ K}$

$$\begin{aligned}\Delta B &= \sqrt{(2,409 \cdot 5)^2 + (0,04015 \cdot 300)^2 + (-47,68 \cdot 1)^2} \text{ K} \\ &= \sqrt{145,11 + 145,11 + 2273,3} \text{ K} = 50,63 \text{ K}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich als vollständiges Messergebnis:

$$B = 4932,1 \text{ K} \pm 50,63 \text{ K}, \quad (1 - \alpha) = 95\%$$

Die relative Messabweichung beträgt 1,03%. Im Vergleich zur häufig anzutreffenden Datenblattangabe " $\pm 5\%$ " hat die Messung eine wesentlich geringere Messunsicherheit.

6.6.7 NTC: R_∞

$$R_\infty = R_0 \cdot e^{-\frac{B}{T_0}}$$

Messabweichungen: $\Delta R_0 = 300 \Omega$, $\Delta B = 200 \text{ K}$, $\Delta T_0 = 0,5 \text{ K}$

$$\bar{R}_\infty = 26,5 \text{ k}\Omega \cdot e^{-\frac{4000}{298}} = 39,25 \text{ m}\Omega$$

$$\frac{\partial R_\infty}{\partial R_0} = e^{-\frac{B}{T_0}} = 1,481 \cdot 10^{-6} \quad \frac{\partial R_\infty}{\partial B} = -\frac{R_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{B}{T_0}} = -1,317 \cdot 10^{-4} \frac{\Omega}{\text{K}}$$

$$\frac{\partial R_\infty}{\partial T_0} = \frac{R_0 \cdot B}{T_0^2} \cdot e^{-\frac{B}{T_0}} = 1,768 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega}{\text{K}}$$

$$\begin{aligned}\Delta R_\infty &= \sqrt{(1,481 \cdot 10^{-6} \cdot 300)^2 + (-1,317 \cdot 10^{-4} \cdot 200)^2 + (1,768 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5)^2} \Omega \\ &= \sqrt{1,974 \cdot 10^{-7} + 6,938 \cdot 10^{-4} + 7,815 \cdot 10^{-7}} \Omega \\ &= 26,36 \text{ m}\Omega\end{aligned}$$

Das vollständige Messergebnis lautet somit

$$R_\infty = 39,25 \text{ m}\Omega \pm 26,36 \text{ m}\Omega, \quad (1 - \alpha) = 95\%$$

Anmerkung: Die relative Messabweichung beträgt mehr als 67%. Eine hinreichend verlässliche Angabe des Grenzwiderstands bei sehr hohen Temperaturen ist also auf diese Weise nicht möglich. Ursache ist offenbar die hohe Empfindlichkeit bezüglich der Toleranz des Parameters B. Ermittlung von B wie in Aufgabe 7.3.8 reduziert die Abweichung von B auf ca. 1% und damit die Messunsicherheit von R_∞ auf ca. 14%.