**Klausur ELMESS, Studiengang AUT/MEI, 29.3.2023**

Bearbeitungszeit: 90 Minuten, als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner zugelassen.

Volle Punktzahl gibt es nur für korrekte Lösungen mit vollständig nachvollziehbarem Lösungsweg. Ergebnisse von Rechnungen sind so weit wie sinnvoll möglich zu vereinfachen.

**Name, Vorname:** **Matr.-Nr.:**

---

**Aufgabe 1. (2+2+1 = 5 P)**

a) Ergänzen Sie die korrekten Fachbegriffe:

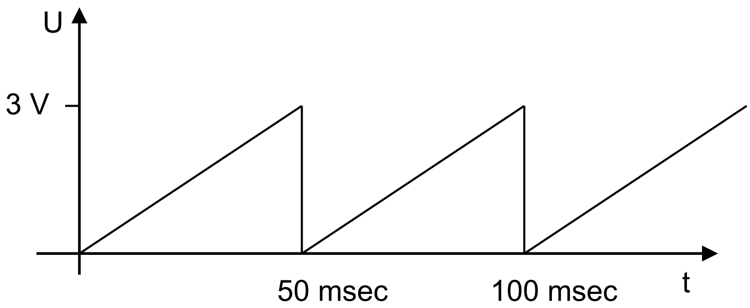
*Weil es bei jeder Messung eine …………………….........……… gibt, muss beim*

*Ergebnis immer die …………………….........……… angegeben werden.*

b) Geben Sie unter Verwendung der bekannten Beziehungen für Energieeinheiten die Einheit der magnetischen Kraftflussdichte 1 Tesla (= $\frac{1\,Vs}{m^2}$) in SI-Basiseinheiten an.

c) Welche Naturkonstante wird seit 2019 zur Definition der Einheit "kg" herangezogen?

**Aufgabe 2. (2+1 = 3 P)**




a) Bei welchen Frequenzen $f_n > 0$ sind Peaks im Amplitudenspektrum des hier dargestellten Signals zu erwarten?

b) Bei der A/D-Umsetzung zeitveränderlicher Signale soll der Wert am A/D-Eingang für die Zeit, die der Umsetzer zur Digitalisierung benötigt, konstant gehalten werden. Welches Bauteil wird dem ADU zu diesem Zweck vorgeschaltet?

**Aufgabe 3. (6 P)**

Das Signal $u(t) = 2\,V\cos(10\pi \cdot t) + 6\,V\cos^2(20\pi \cdot t)$ wird mit der Frequenz $f_S = 30\,Hz$ abgetastet. Skizzieren Sie das DFT-Betragsspektrum dieses abgetasteten Signals im Frequenzbereich $0 \leq f \leq f_S$. Hinweis: $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

**Aufgabe 4. (3+4 = 7 P)**

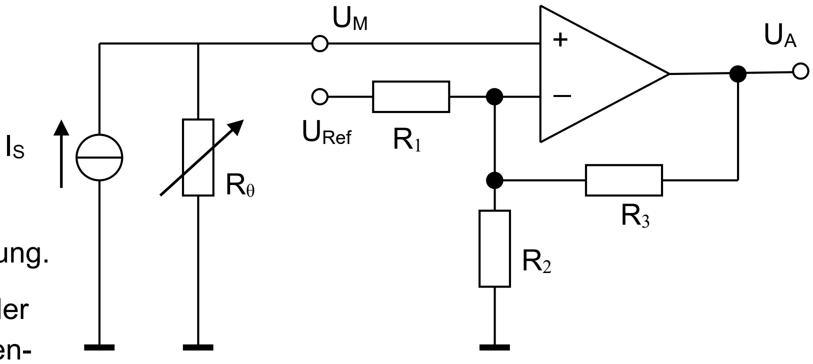
Die Leistung einer Windenergieanlage berechnet sich aus

$P = c_P \frac{\rho}{2} A v^3$

mit $c_P = 0{,}4 \pm 0{,}02$ , $\rho = 1{,}25 \frac{kg}{m^3}$ $(\pm 3\%)$, $A = 7800\,m^2$ (exakt bekannt), $v = 7\frac{m}{s} \pm 1\frac{m}{s}$

a) Wie groß ist die Leistung? Diese ist in kW anzugeben, mit nachvollziehbarer Einheitenumrechnung wie in Aufgabe 1b).

b) Wie groß ist die absolute Messunsicherheit?




**Aufgabe 5. (4+2+2+1 = 9 P)**

a) Bestimmen Sie $U_A$ in Abhängigkeit von $U_M$ und $U_{Ref}$ für den rechten Teil der hier gegeben Messschaltung.

Setzen Sie dabei im Verlauf der Rechnung frühzeitig die Zahlenwerte $R_1 = 23{,}5\,k\Omega$, $R_2 = 1\,k\Omega$, $R_3 = 47\,k\Omega$ ein.

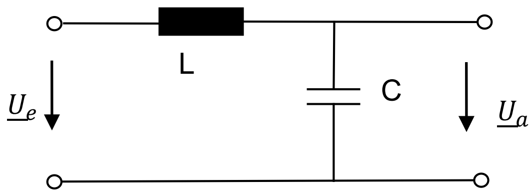
b) Für den Strom der Konstantstromquelle gilt $I_S = 1\,mA$ und für den temperaturabhängigen Widerstand $R_\vartheta = 100\Omega \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$. Geben Sie eine Formel für $U_M(\vartheta)$ an und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich.

c) Es sei weiter $U_{Ref} = 2{,}5\,V$ und $\alpha = 0{,}004\,°C^{-1}$. Welcher einfache Zusammenhang ergibt sich somit für $U_A(\vartheta)$?

d) Welche Spannung liefert der Sensor bei $\vartheta = 50\,°C$ ?

**Aufgabe 6. (4 P)**

Ein LC-Tiefpassfilter mit $L = 5\,mH$, $C = 47\,\mu F$ (siehe ESB) hat am Eingang die Spannung $U_E = 5V \cdot \cos(2\pi \cdot 500Hz \cdot t)$.
Welche Amplitude hat die Ausgangsspannung?




**Aufgabe 7. (3+3+2+2 = 10 P)**

Ein Ohmmeter mit der Toleranzangabe "$\Delta R = 0{,}5\%\ v.M. + 10D$", dessen Display 4 Ziffern hat, wird im 10kΩ-Messbereich (0-9999) benutzt, um folgende Messreihe eines NTC-Widerstands aufzunehmen:

| Messung Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $R_{NTC}$ [Ω] | 2400 | 2550 | 2600 | 2450 |

a) Bestimmen Sie den Mittelwert und dann mit diesem die zu berücksichtigende <u>systematische</u> Abweichung $\Delta R_M$ des Ohmmeters.

b) Bestimmen Sie die durch <u>zufällige</u> Abweichungen verursachte Messunsicherheit $\Delta R_N$ bezogen auf ein Vertrauensniveau von 95%. (Hinweis: $t_{4,95} = 3{,}18$ )

c) Wie lautet das vollständige Messergebnis?

d) Ändert sich die Messunsicherheit aus b), wenn zwar eine weitere Messung durchgeführt wird, deren Wert aber die statistische Standardabweichung nicht ändert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gesamtpunktzahl: 44 P.

# Lösungen

**Aufgabe 1. (2+2+1 = 6 P)**

a) *Weil es bei jeder Messung eine …**MESSABWEICHUNG**… gibt, muss beim Ergebnis immer die …**MESSUNSICHERHEIT**… angegeben werden.*

b) 1 Tesla = $\frac{1\,Vs}{m^2} = \frac{1Ws}{Am^2} = \frac{1Nm}{Am^2} = \frac{1N}{Am} = \frac{1kgm}{Ams^2} = \frac{1kg}{As^2}$

c) Das Plancksche Wirkungsquantum $h$ ist die Grundlage der Neudefinition des "kg"

**Aufgabe 2. (2+1 = 3 P)**

a) Die Grundfrequenz ist $f_1 = \frac{1}{50\,ms} = 20\,Hz$ . In der Fourierzerlegung ist mit allen ganzzahligen Vielfachen davon zu rechnen, also

$f_n = n \cdot 20\,Hz = 20\,Hz, 40\,Hz, 60\,Hz, \ldots$

b) "S&H", Sample&Hold

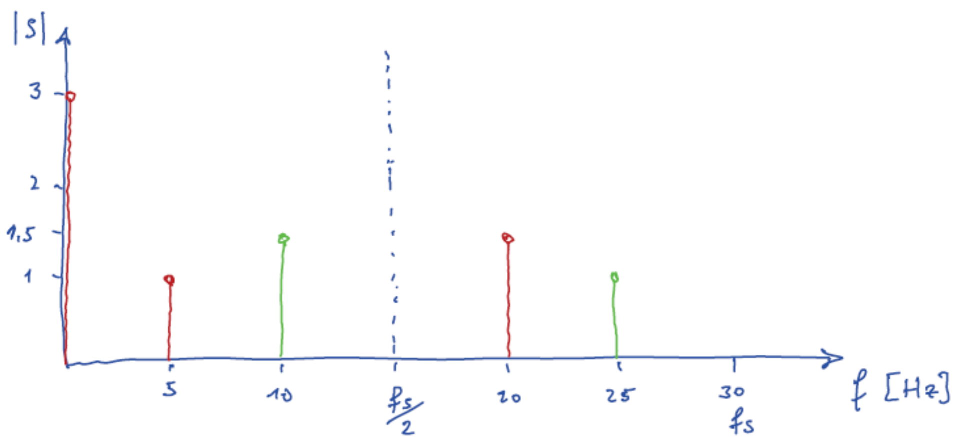
**Aufgabe 3. (6 P)**

$u(t) = 2\,V\cos(10\pi \cdot t) + 6\,V\cos^2(20\pi \cdot t)$ , $f_S = 30\,Hz$

bzw. gemäß Hinweis: $u(t) = 3V + 2\,V\cos(2\pi \cdot 5Hz \cdot t) + 3\,V\cos^2(2\pi \cdot 20Hz \cdot t)$ , $f_S = 30\,Hz$

DFT-Betragsspektrum im Frequenzbereich $0 \le f \le f_S$

- Signalfrequenzen **0, 5, 20 Hz**, zugehörige Amplituden: **3, 1, 1,5**
- Aliasfrequenzen **10, 25 Hz**, Amplituden: **1,5 , 1**




**Aufgabe 4. (3+4 = 7 P)**

a) $P = c_P \frac{\rho}{2} A v^3 = 0{,}4 \cdot \frac{1{,}25}{2}\frac{kg}{m^3} \cdot 7800\,m^2 \cdot \left(7\frac{m}{s}\right)^3 = 668850\frac{kgm^2}{s^3} = 668850\frac{Nm}{s} = 668{,}85\,kW$

b) $\Delta P_\rho = \left|\frac{\partial P}{\partial \rho} \cdot \Delta\rho\right| = \frac{P}{\rho} \cdot \Delta\rho = 0{,}03 \cdot P = 20{,}0655\,kW$

$\Delta P_{cp} = \left|\frac{\partial P}{\partial c_P} \cdot \Delta c_P\right| = \frac{P}{c_P} \cdot \Delta c_P = \frac{0{,}02}{0{,}4} \cdot P = 33{,}4425\,kW$

$\Delta P_v = \left|\frac{\partial P}{\partial v} \cdot \Delta v\right| = \frac{3P}{v} \cdot \Delta v = \frac{3}{7} \cdot P = 286{,}65\,kW$

$\Delta P = \sqrt{(20{,}0655\,kW)^2 + (33{,}4425\,kW)^2 + (286{,}65\,kW)^2} \approx 289{,}291\,kW$

**Aufgabe 5. (4+2+2+1 = 9 P)**

a) Idealisierung: $I_n = 0$, so dass $I_{R1} = I_{R2} + I_{R3}$. Außerdem $U_n = U_p = U_M$, so dass

$$\frac{U_{Ref} - U_M}{R_1} = \frac{U_M}{R_2} + \frac{U_M - U_A}{R_3} \quad | \cdot R_3$$

$$\frac{R_3}{R_1}\left(U_{Ref} - U_M\right) = \frac{R_3}{R_2} U_M + U_M - U_A$$

$$U_A = \frac{R_3}{R_2} U_M + U_M - \frac{R_3}{R_1}\left(U_{Ref} - U_M\right) = U_M + 47U_M - 2U_{Ref} + 2U_M$$

$$U_A = 50 \cdot U_M - 2U_{Ref}$$

b) Es gilt $I_{R_\vartheta} = I_S - I_p = I_S$ wegen $I_p \approx 0$. Also

$$U_M(\vartheta) = I_S \cdot R_\vartheta = 1mA \cdot 100\Omega \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta) = 0{,}1\,V \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$$

c) $U_M(\vartheta) = 0{,}1V \cdot (1 + 0{,}004°C^{-1} \cdot \vartheta) = 0{,}1\,V + 0{,}4\frac{mV}{°C} \cdot \vartheta$

$$U_A = 50 \cdot \left(0{,}1\,V + 0{,}4\frac{mV}{°C} \cdot \vartheta\right) - 2 \cdot 2{,}5V = 5V + 20\frac{mV}{°C} \cdot \vartheta - 5V$$

$$U_A(\vartheta) = 0{,}02\frac{V}{°C} \cdot \vartheta$$

d) $U_A(\vartheta = 50°C) = 1\,V$

**Aufgabe 6. (6 P)**

$$\frac{\underline{U_a}}{\underline{U_e}} = G(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

$$\widehat{U}_A = |G(j\omega)| \cdot \widehat{U}_e = |G(j2\pi \cdot 500Hz)| \cdot \widehat{U}_E \approx \left|\frac{1}{1 - (3141{,}6)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 47 \cdot 10^{-6}}\right| \cdot 5\,V \approx 3{,}79\,V$$

**Aufgabe 7. (3+3+2+2 = 10 P)**

Ohmmeter mit der Toleranz "$\Delta R = 0{,}5\%\ v.M. + 10D$", Display 4 Ziffern, Messbereich (0-9999)

| Messung Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $R_{NTC}$ [Ω] | 2400 | 2550 | 2600 | 2450 |

a) Mittelwert und systematische Messunsicherheit "$\Delta R = 0{,}5\%\ v.M. + 10D$"

$$\bar{R} = \frac{10k\Omega}{4} = 2500\ \Omega$$

$$\Delta R_M = \frac{0{,}5}{100} \cdot 2500\ \Omega + 10 \cdot 1\Omega \approx \mathbf{22{,}5\ \Omega}$$

b) Statistische Standardabweichung und Messunsicherheit, $t_{4,95} = 3{,}18$

$$s_R^2 = \frac{1}{3}(10^4 + 2500 + 10^4 + 2500) = \frac{25000}{3} \approx 8333\ \Omega^2$$

$$s_R \approx 91{,}3\ \Omega$$

$$\Delta R_N = \frac{1}{2} \cdot 3{,}18 \cdot 91{,}3\ \Omega \approx \mathbf{145{,}15\ \Omega}$$

c) vollständiges Messergebnis

$$\Delta R_{ges} = \sqrt{145^2 + 22{,}5^2}\ \Omega \approx \mathbf{146{,}9\ \Omega}$$

$$\hat{R} = 2500\ \Omega \pm 147\ \Omega\,,\quad (1-\alpha) = 0{,}95$$

d) Aufgrund der weiteren Messung ist mit $t_{5,95}$ zu rechnen und mit $\frac{1}{\sqrt{5}}$ statt $\frac{1}{2}$. Beides führt zu weiterer Verringerung der Unsicherheit.