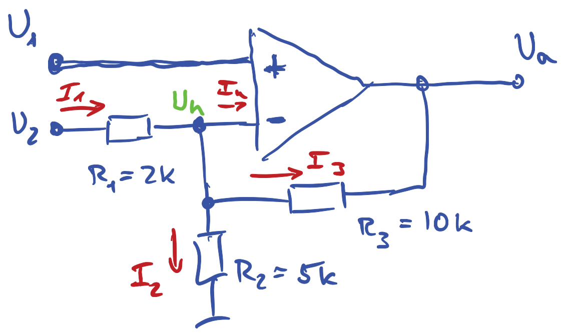


1.) ESB vervollständigen

2.) Knotengleichungen

$$I_1 = I_2 + I_3 + \underbrace{I_n}_{\approx 0}$$

3.) Ohmsches Gesetz, Spannungsgleichungen
Idealisierung $U_n = U_p$ benutzen
Hier: $U_n = U_1$

$$\frac{U_2 - U_1}{R_1} = \frac{U_1}{R_2} + \frac{U_1 - U_a}{R_3}$$

4.) zu $U_a = f(U_e)$ auflösen
U_a "isolieren", also mit R_3 multiplizieren

$$\frac{R_3}{R_1} U_2 - \frac{R_3}{R_1} \cdot U_1 = \frac{R_3}{R_2} \cdot U_1 + U_1 - U_a$$

$$U_a = \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2}\right) U_1 - \frac{R_3}{R_1} U_2$$

$$= (1 + 5 + 2)\, U_1 - 5\, U_2$$

$$= 8\, U_1 - 5\, U_2$$

5.4.4 Abtastung und Rekonstruktion von Signalen

Das Signal $u(t) = \hat{U}_1 \cos(2\pi \cdot 100Hz \cdot t) + \hat{U}_2 \cos(2\pi \cdot 250Hz \cdot t)$ wird durch einen AD-Umsetzer mit Sample&Hold digitalisiert und der digitalisierte Wert wird unmittelbar auf einen DA-Umsetzer (DAU) gegeben, beides mit der Abtastfrequenz $f_S = 400\ Hz$.

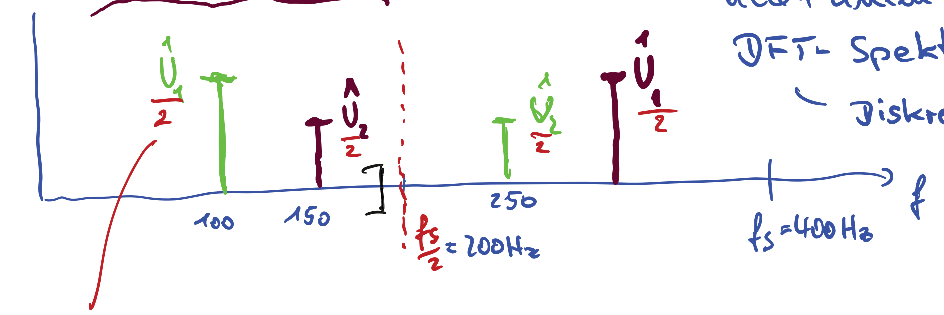
Das analoge Ausgangssignal des DAU wird mit einem Tiefpass mit der Grenzfrequenz 190 Hz gefiltert (ideale Filtercharakteristik).

a) Welches Signal $\tilde{u}(t)$ wird am Tiefpass-Ausgang gemessen? (Formel! $\tilde{u}(t) = \cdots$)

b) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum von $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$! Markieren Sie darin auch f_S und $\frac{f_S}{2}$.

Darstellung im Spektrum

alle 4 Linien treten im DFT-Spektrum auf
← Diskrete Fouriertransformation



Höhe der Linien im DFT-Spektrum ist die Hälfte der Sinusamplituden

Dieses Spektrum ist das Ergebnis, wenn von der mit 400 Hz Abtastrate gewonnenen Wertefolge die FFT berechnet wird.

5.5 Digitale Signalverarbeitung – häufig berechnete Kenngrößen

Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
Betragsmittelwert (Gleichrichtmittelwert)	$\lvert\bar{x}\rvert = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lvert x_i \rvert$
RMS (root mean square, Effektivwert)	$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$
Statistische Standardabweichung	$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$
Spitzenwert	$x_{max} = \max_i\{\lvert x_i \rvert\}$
Scheitelfaktor **Crest-Faktor** (Schwingungsdiagnostik)	$c = \frac{x_{max}}{x_{RMS}}$
Variationskoeffizient (relative Streuung)**:**	$V = \frac{s_x}{\bar{x}}$

Histogramm (Wahrscheinlichkeitsfunktion der Signalamplituden):

1) Bilde Klassen, die den Bereich aller auftretenden Amplituden des Signals abdecken (meist äquidistante Klassengrenzen).
2) Bestimme die Anzahl der Amplituden (Messwerte) n_i, die zu den einzelnen Klassen gehören.
3) Trage n_i bzw. $\frac{n_i}{N}$ als Balken über der Klassenachse auf.

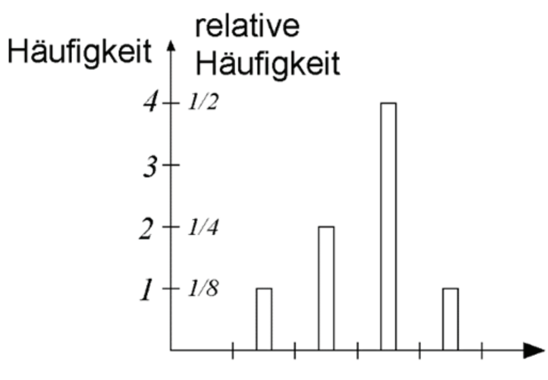


Abbildung 5.9: Histogramm

MATLAB: `hist(x)`

FFT-Spektrum

Die wichtigste Methode der digitalen Signalverarbeitung, siehe Kapitel 5.7 und 5.8.

5.6 Übungen "Digitale Signalverarbeitung, Kenngrößen, Spektren"

5.6.1 Crest-Faktor

Bestimmen Sie den Crest-Faktor eines Rechtecksignals mit dem Puls-Pausen-Verhältnis 1:1 (Tastgrad bzw. Duty cycle 50%)

(Hinweis: für ein kontinuierliches Signal ist $x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2\, dt}$).

5.6.2 Analyse einer Wertefolge

Gegeben sei die Folge von Abtastwerten zu den Zeitpunkten $t_k = k \cdot T_S\,,\ k = 0, 1, \cdots$

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_k	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Bestimmen Sie:

a) Mittelwert

b) RMS-Wert

c) Crest-Faktor

d) Statistische Standardabweichung (z. B. in MATLAB: `help std`)

e) **Median:** Sei $\tilde{x}_k$ die Wertereihe, die durch Sortierung der N Folgenelemente x_k nach der Größe entsteht. Dann gilt $x_M = \tilde{x}_{\frac{N+1}{2}}$, falls N ungerade bzw.

$x_M = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}_{\frac{N}{2}} + \tilde{x}_{\frac{N}{2}+1}\right)$, falls N gerade.

Der Median ist in der sortierten Folge der in der Mitte stehende Wert, d. h. 50% der Folgenwerte sind größer, 50% sind kleiner (z. B. in Matlab: `help median`).

f) Absolute und relative Häufigkeitsverteilung (mit graphischer Darstellung) für die Amplitudenklassen

$$\left\{\left[-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}\right], \left[-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right], \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right], \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right]\right\}$$

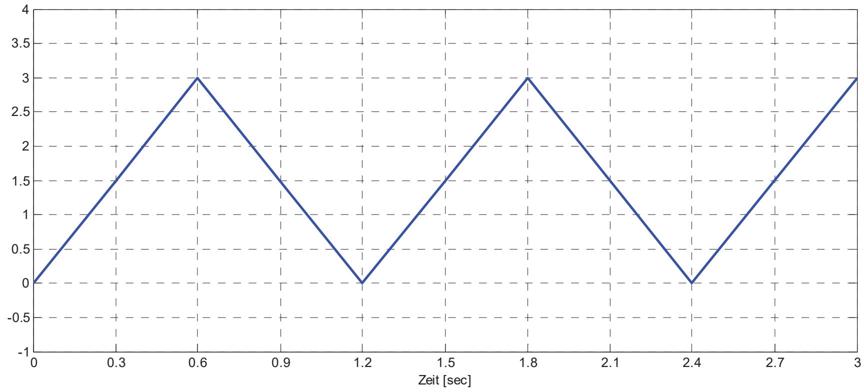
(z. B. in Matlab: `help hist` bzw. *`doc hist`*)

g) Skizzieren Sie den Verlauf. Geben Sie als Formel an, zu welcher Sinus-/ Kosinusfunktion diese Folge gehören könnte ($x(t) = \cdots$).

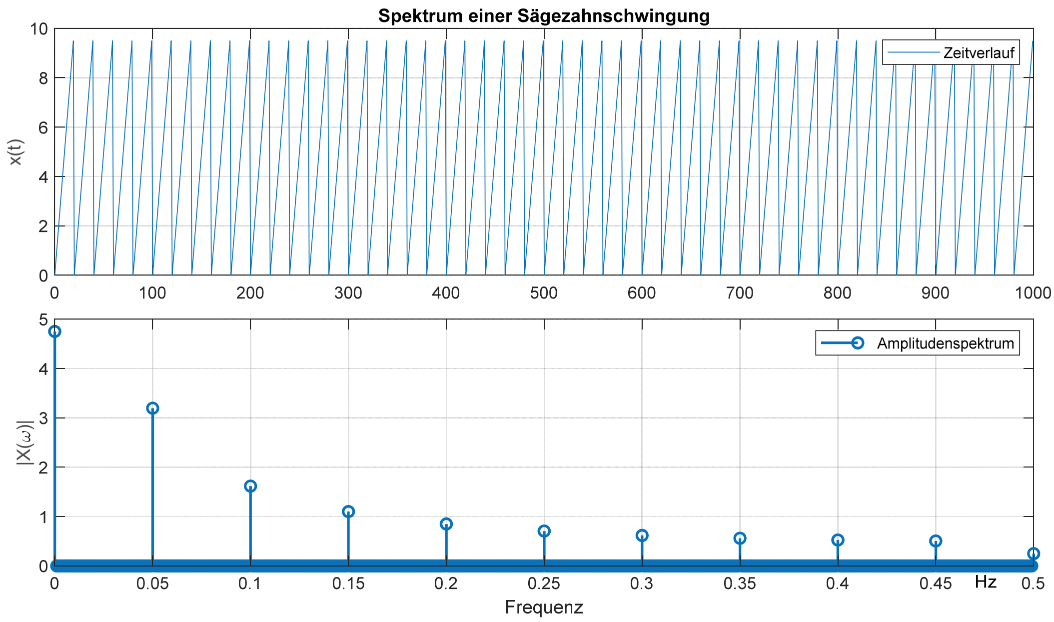
h) Skizzieren Sie das zu dieser Funktion gehörige Amplitudenspektrum.

5.6.3 Spektrum

Berechnen/Recherchieren Sie die Fourier-Zerlegung der skizzierten Dreiecksschwingung und skizzieren Sie das Amplitudenspektrum.



Zum Vergleich: Das auf AULIS bereitgestellte Skript `saegezahn_FFT.m` liefert folgendes Ergebnis:



5.6.4 Spektrum 2

Ergänzen Sie das obige Sägezahnspektrum so, dass es dem entspricht, das bei Abtastung des Signals mit der Frequenz $f_S = 0{,}56\ Hz$ entstehen würde.

5.7 Fourierreihen periodischer Funktionen

5.7.1 Definition

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, für die gilt

- f ist periodisch mit Periode T,
- f ist beschränkt und stückweise stetig,
- an einer Unstetigkeitsstelle t_0 von f ist $f(t_0) = \frac{1}{2}\left(f(t_0^-) + f(t_0^+)\right)$,

ist darstellbar als **Trigonometrische Reihe** (**Fourierreihe**, Fourierzerlegung) in der Form

eindeutig

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right)$$

ω_1 Grundkreisfrequenz

Die Summe setzt sich zusammen aus

1.) **Konstanter Anteil** : $\frac{a_0}{2}$ ("Offset" oder "Bias" in der Signalanalyse)

2.) **Grundschwingung** $(n = 1)$: $a_1 \cos\frac{2\pi}{T}t + b_1 \sin\frac{2\pi}{T}t$ (auch: **1. Harmonische**)

Sie hat die Kreisfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, also die Frequenz der Funktion f selbst.

3.) **Oberschwingungen** $(n \geq 2)$: $a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$ (auch: **n –te Harmonische**)

mit den Oberschwingungsfrequenzen $\omega_n = n \cdot \omega_1 = n \cdot \frac{2\pi}{T}$.

(Die 1. Oberschwingung ist $\omega_2 = 2\omega_1 =$ die 2. Harmonische nach mehrheitlichem Sprachgebrauch)

5.7.2 Bestimmung der Koeffizienten

Die Koeffizienten der Fourierreihe, a_n und b_n, heißen **Fourierkoeffizienten**. Ihre Beträge sind die Amplituden der beteiligten Sinus- und Kosinusschwingungen.

Mit Hilfe der Additionstheoreme und der Tatsache, dass das Integral über Sinus- und Kosinusfunktionen Null wird, wenn über eine ganze Zahl von Perioden integriert wird, erhält man

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \ , \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \ , \quad n = 1, 2, \cdots$$

Wenn es günstiger ist, dürfen die Integrationsgrenzen verschoben werden, solange über genau eine Periode integriert wird (z. B. $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$).

Außerdem lassen sich Symmetrien ausnutzen, wenn die Funktion gerade oder (nach Abzug des Gleichanteils) ungerade ist.

Aus der Integralrechnung ist bekannt:

$$f(x) \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

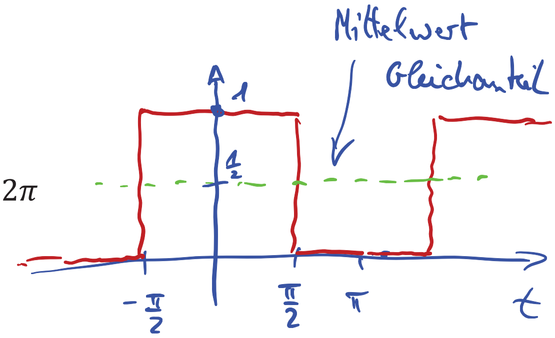
$$f(x) \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Aus der zweiten Aussage folgt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) \text{ gerade} & \Rightarrow \quad b_n = 0 \\ \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) \text{ ungerade} & \Rightarrow \quad a_n = 0 \end{array}}$$

Beispiel Rechteckschwingung:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = \pm\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \text{ periodisch mit Periode } T = 2\pi$$



(Amplitude $A = \frac{1}{2}$, Offset $= \frac{1}{2}$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1 \quad \left(\text{Gleichanteil } \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi}\underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}$$

= 0, wenn n = 2, 4, 6, 8, ...

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n = 2k \\ \frac{2}{n\pi}(-1)^{k+1} & \underbrace{\text{für } n = 2k-1} \end{cases} = \frac{2}{\pi}\left(1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \cdots\right)$$

übliche Darstellung der ungeraden natürlichen Zahlen

$b_n = 0$, da $\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)$ ungerade.

Also:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \mp \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\big((2n-1)x\big)$$

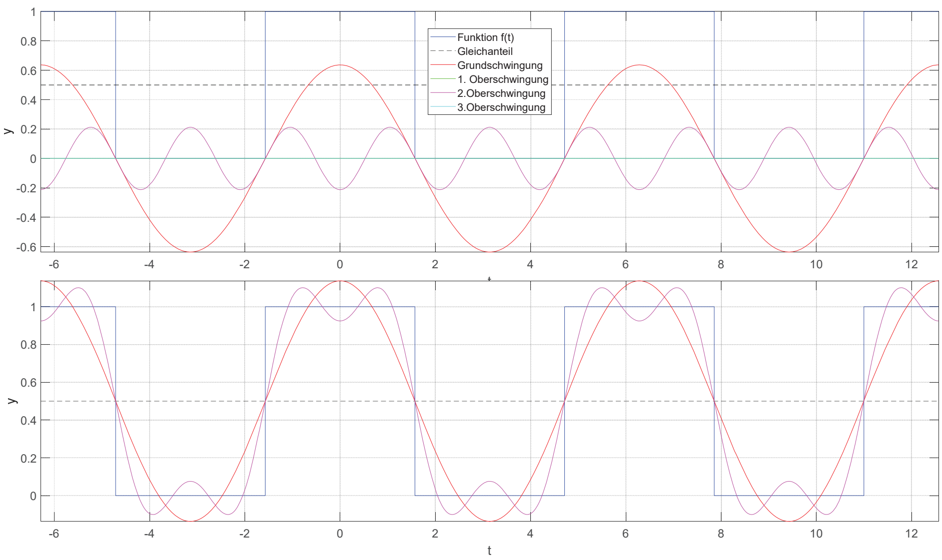


Abbildung 5.10: Fourierzerlegung und Fourierapproximation einer Rechteckschwingung

5.7.3 Darstellung nach Betrag und Phase

Die Oberschwingungen $a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$ lassen sich als Kosinusschwingungen darstellen. Es gilt:

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

mit Amplituden $\qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

und Phasenverschiebungen $\qquad \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$

Übung: Herleiten!

Die Fourierreihe kann dann auch so geschrieben werden, dass die Koeffizienten gleich den Amplituden der Oberschwingungen sind:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right)$$

5.7.4 Amplitudenspektrum

Aufgrund dieser Form der Fourierreihe kann man ein Signal auch durch sein **Amplitudenspektrum** charakterisieren, das heißt durch eine Grafik, die jeder auftretenden Frequenz die zugehörige Amplitude zuordnet.

Beispiele:

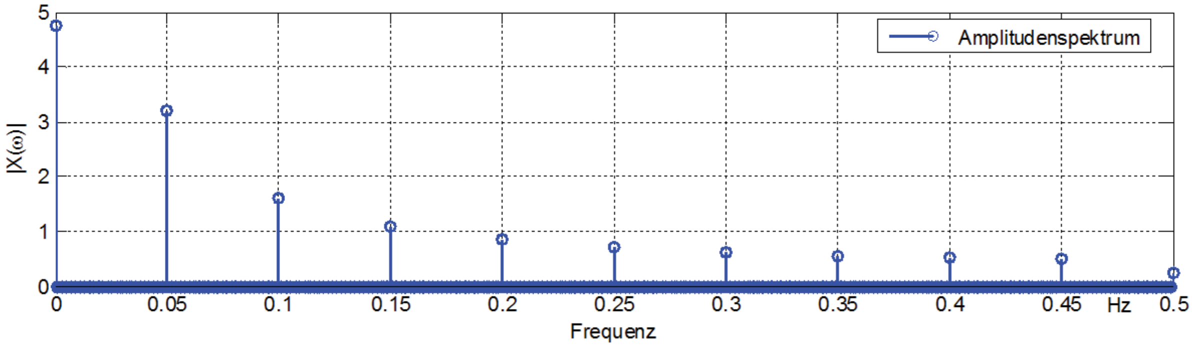


Abbildung 5.11: Amplitudenspektrum einer Sägezahnschwingung

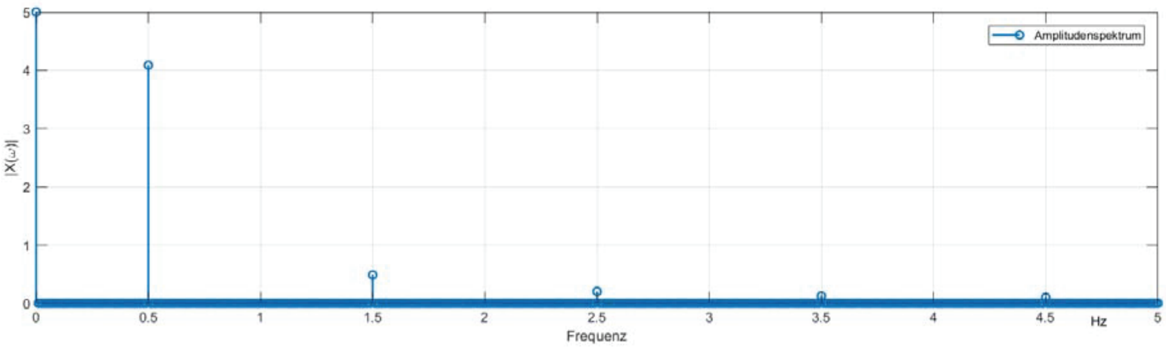
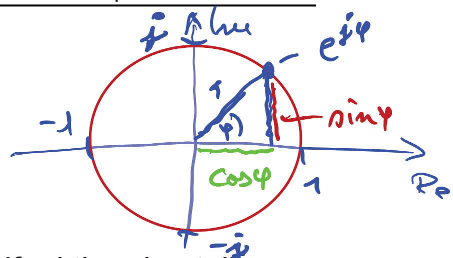


Abbildung 5.12: Amplitudenspektrum einer Dreieckschwingung

5.7.5 Komplexe Darstellung der Fourierreihe



Aufgrund der e-Funktion mit imaginärem Exponenten

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

lassen sich Sinus- und Kosinusfunktionen durch die Exponentialfunktion darstellen:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$z = a \pm jb$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Durch Einsetzen von

$$\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2}\left(e^{in\frac{2\pi}{T}t} + e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\frac{2\pi}{T}t} - e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\right)$$

in die Trigonometrische Reihe erhält man nach einigen Umformungen die

$f(t) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$

Komplexe Darstellung der Fourierreihe:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}}$$

negative Indizes liefern $e^{-in\frac{2\pi}{T}t}$

mit

$$c_0 := \frac{a_0}{2}\,,\quad c_n := \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\,,\quad c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

konjugiert komplex zu c_n

Die komplexe Fourierreihe benötigt **nur noch ein Integral** zur Bestimmung sämtlicher Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,dt \quad,\quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$|c_n| = \frac{1}{2}|a_n - jb_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

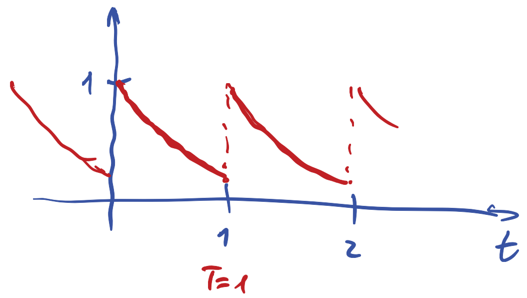
Die Koeffizienten mit negativen Indizes erhält man aus $c_{-n} = c_n^*$ (konjugiert komplex).

Die Koeffizienten c_n liefern gleichzeitig die Darstellung der Trigonometrischen Reihe mit Amplituden und Phasenwinkeln, denn

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| \qquad \text{und} \qquad \varphi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n} = \arg c_n\ .$$

Grundfrequenz: $f_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

Beispiel: $f(t)$ exponentiell abklingend



$f(t) = e^{-2t}$ für $0 < t < 1$, periodisch mit Periode $T = 1$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \int_0^1 e^{-2t}e^{-in2\pi t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-(2+i2\pi n)t}\,dt = \left[-\frac{1}{(2+i2\pi n)}e^{-(2+i2\pi n)t}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{(2+i2\pi n)}\left(e^{-(2+i2\pi n)} - 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2}}{1+in\pi}$$

$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

Amplitude zur Frequenz $n\cdot f_1 = n\cdot 2\pi$: $A_n = 2\cdot|c_n| = \frac{1-e^{-2}}{|1+in\pi|}$

Also

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2}}{1 + n^2\pi^2} \cdot (1 - in\pi)$$

und

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$a_n = 2Re\{c_n\} = \frac{1 - e^{-2}}{1 + n^2\pi^2} \ , \qquad b_n = -2Im\{c_n\} = \frac{(1 - e^{-2})n\pi}{1 + n^2\pi^2}$$

Für das Amplitudenspektrum erhält man die Frequenzen $f_n = n \cdot \frac{1}{T} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ mit den zugehörigen Amplituden

$$\boxed{A_n = 2|c_n| = \frac{1 - e^{-2}}{1 + n^2\pi^2} \cdot \sqrt{1 + n^2\pi^2} = \frac{1 - e^{-2}}{\sqrt{1 + n^2\pi^2}}}$$

Anmerkung:

Die Berechnung der reellen Fourierreihe mit $a_n = 2\int_0^1 e^{-2t} \cos(n2\pi t)\, dt,\ b_n = \cdots$ etc. ist viel aufwändiger!

5.7.6 Zusammenfassung

- Periodische Funktionen sind darstellbar als Summe eines Gleichanteils und harmonischer Schwingungen mit Kreisfrequenzen $\omega_n = n\frac{2\pi}{T},\ n \in \mathbb{N}$.
- Die Koeffizienten dieser Fourierreihe erhält man mit Hilfe von Integralen, bei denen über eine Periode integriert wird.
- Noch einmal betont: Andere Frequenzen als die Grundfrequenz und ihre ganzzahligen Vielfachen kommen dabei <u>nicht</u> vor.
- Die zur Harmonischen mit der Frequenz ω_n gehörige Amplitude erhält man aus den Koeffizienten gemäß $A_n = 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Die grafische Darstellung der Amplituden als Linie über den zugehörigen Frequenzen heißt <u>**Amplitudenspektrum**</u>.
- Die Phasenlage der Harmonischen ist $\varphi_n = \arg(c_n)$. Sie hat für die Praxis aber geringere Bedeutung als das Amplitudenspektrum.

Beide Kenngrößen, Amplitude und Phasenlage, der Harmonischen erhält man mit Hilfe der komplexen Form der Fourierreihe aus einem einzigen Integral.

Damit arbeitet man weiter, wenn es um die <u>**Fourieranalyse nicht-periodischer Funktionen**</u> geht.

5.8 Fouriertransformation

5.8.1 Fouriertransformierte analoger Signale

Zur Übertragung des Konzepts der Fourierreihe auf beliebige, **nicht-periodische** Signale betrachtet man den Grenzübergang zu beliebig großen Periodendauern $T \to \infty$. Je größer die Periodendauer desto kleiner die Grundfrequenz und damit auch der Abstand der Frequenzen des Spektrums. Im Grenzübergang geht deshalb das Linienspektrum in einen kontinuierlichen Verlauf über.

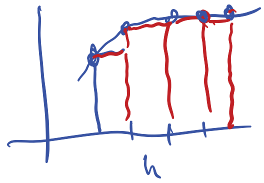
$\frac{2\pi}{T}$

Herleitung

Setze c_n in die Fourierreihe ein und verwende $\frac{2\pi}{T} = \omega_1$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\frac{2\pi}{T}\tau}\, d\tau \right) e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\omega_1\tau}\, d\tau \right) e^{in\omega_1 t}$$

Die Summe hat die Form der numerischen Integration nach Rechteckregel, $\sum_n h \cdot g(nh)$, mit $h = \omega_1$. Der Grenzübergang $T \to \infty$ bedeutet gleichzeitig $\omega_1 \to 0$, so dass die Summe zum Integral wird:



$$f(t) = \lim_{\substack{\omega_1 \to 0 \\ T \to \infty}} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\omega_1\tau}\, d\tau \right) e^{in\omega_1 t} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \right)}_{\text{Funktion von } \omega} e^{i\omega t} d\omega$$

Definition:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

heißt **Fourier-Transformierte** von $f(t)$.

Das Integral existiert für alle Funktionen, für die das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ existiert, also z. B. für alle Funktionen, die beschränkt und nur auf einem endlichen Zeitintervall von Null verschieden sind.

$f(t)$ ergibt sich nach obiger Herleitung durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(**Rücktransformation bzw. Inverse Fouriertransformation**)

Für diese wechselseitige Zuordnung schreibt man auch

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega).$$

Zur Fouriertransformation gibt es diverse mathematische Resultate mit großer Bedeutung für die Signal- und Bildverarbeitung. Zum Beispiel:

Verschiebungssätze (Der erste erklärt "leakage", den "Leckeffekt"!)

$$f(t)e^{i\omega_0 t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega-\omega_0)$$

$$f(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

Parseval-Theorem:

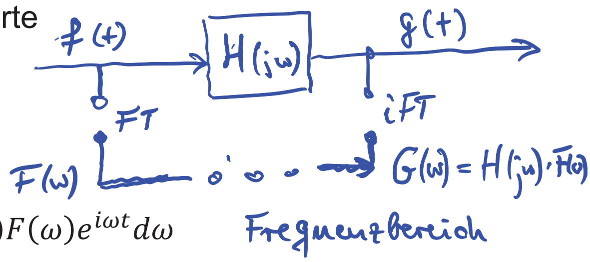
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

hat Bedeutung für die Berechnung der Leistung eines Signals.

Signalübertragung:

Sind $f(t)$ und $g(t)$ Ein- und Ausgangssignal eines Übertragungssystems mit dem Frequenzgang $H(i\omega)$, so gilt für deren Fouriertransformierte

$$\boldsymbol{G(\omega) = H(i\omega)\cdot F(\omega)}\,.$$



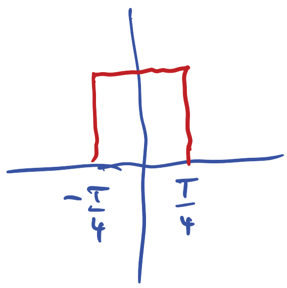
Durch Rücktransformation

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

lässt sich damit auch der Zeitverlauf des Ausgangssignals bestimmen.

Dies ist eine wesentliche Grundlage der Nachrichtenübertragung, des Filterdesigns und der Signalanalyse allgemein.

Beispiel: Fouriertransformierte des Rechteckpulses



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-i\omega t}\, dt$$

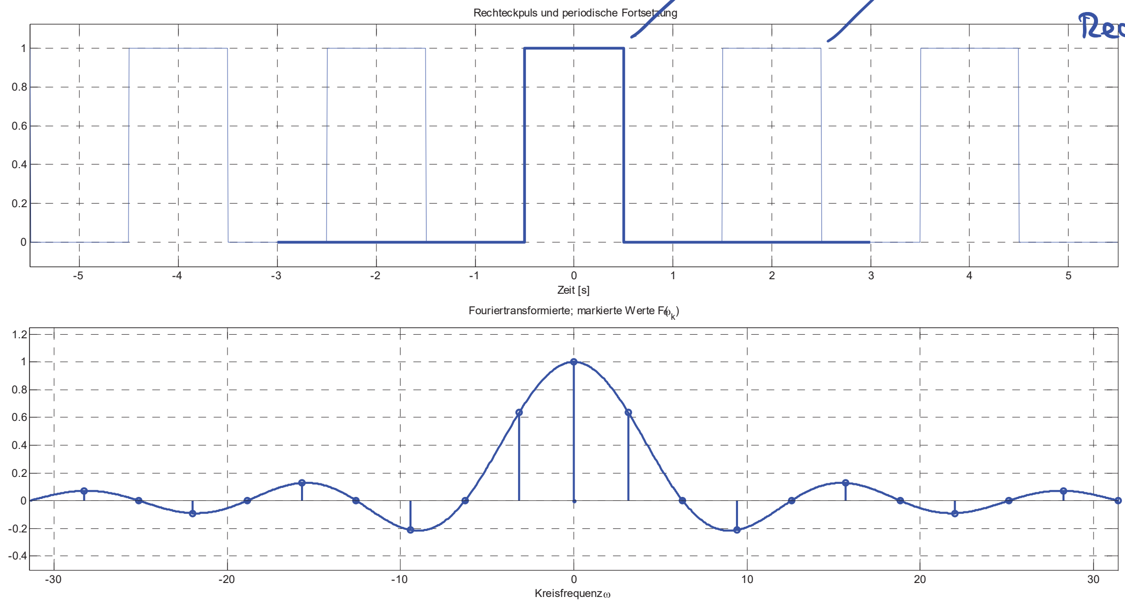
$$= \left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = -\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega\frac{T}{4}} - e^{i\omega\frac{T}{4}}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin\left(\omega\frac{T}{4}\right)$$

Visualisierung mit $T = 2$:

Puls

periodische Fortsetzung, Rechtecksignal



Zusätzlich zu $f(t)$ ist oben die periodische Fortsetzung skizziert. Sie ist als Fourierreihe mit den Schwingungsfrequenzen $\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$ darstellbar. Diese Frequenzen sind im unteren Diagramm markiert.

Frequenzen der Harmonischen des Rechtecksignals

Aus $F(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\omega\frac{T}{4}\right)$ erhält man

$F(0) = \frac{T}{2}$ (Grenzwert z. B. mit Hilfe der Regel von l'Hospital)

$$F(\omega_n) = \frac{2}{\omega_n}\sin\left(\omega_n\frac{T}{4}\right) = \frac{T}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Diese Funktionswerte entsprechen bis auf die Gewichtung mit dem Faktor T genau den **Fourierkoeffizienten c_k** der periodischen Fortsetzung des Signals.

Dieser Zusammenhang gilt allgemein:

Ist $f(t)$ eine Funktion, die nur im Intervall $[0, T]$ von Null verschieden ist, so gilt bei den Frequenzen $\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$

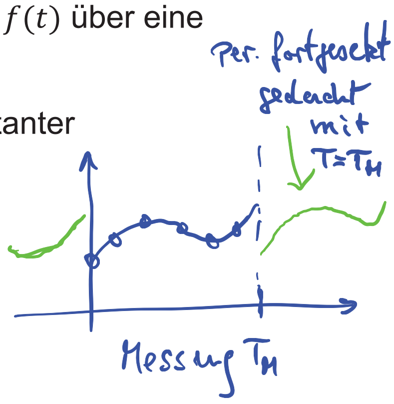
$$F(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \int_0^T f(t)\,e^{-i\omega_n t}\,dt = T\cdot\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$
$$= T\cdot c_n$$

Dabei ist c_n der n-te Fourierkoeffizient der periodischen Fortsetzung von $f(t)$.

In diesem Sinne stellt die Fouriertransformierte das Spektrum der nicht-periodischen Funktion $f(t)$ dar (genauer: die **Spektraldichte**, weil $F(\omega)$ die Dimension "Amplitude pro Frequenz" hat).

5.8.2 Diskrete Fouriertransformation, Digitale Signalverarbeitung

Bei der digitalen Signalverarbeitung werden kontinuierliche Zeitsignale $f(t)$ über eine begrenzte Zeit (Messzeit T_M) mittels Analog-Digital-Umsetzung erfasst.



Der ADU liefert Werte in konstanten Abtastintervallen T_S bzw. mit konstanter Abtastrate $f_S = \frac{1}{T_S}$.

Das Signal wird digital also durch eine Folge von N Werten dargestellt:

$$x_k = f(kT_S) \ , \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

Für die Zahl der Werte gilt $N = \frac{T_M}{T_S}$ (Messzeit $T_M = N \cdot T_S$).

Die Fourierkoeffizienten der periodischen Fortsetzung von $f(t)$ mit Periode T_M lauten $\hat{=} N \cdot T_S$

$$c_n = \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T_M}t} \, dt$$

Mit Hilfe der diskreten Werte $x_k = f(kT_S)$ lässt sich das Integral nach Rechteckregel approximieren und man erhält folgende Näherung:

$t = kT_S$ $\quad T_S$: Sampletime

$$c_n \approx S_n = \frac{1}{T_M} \sum_{k=0}^{N-1} T_S x_k e^{-in\frac{2\pi}{T_M}kT_S}$$

was sich wegen $N = \frac{T_M}{T_S}$ vereinfacht zu

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

Die Werte S_n sind Näherungen der Koeffizienten c_n der komplexen Fourierreihe.

Ihre Beträge lassen sich also als Amplituden von Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_n = n\frac{2\pi}{T_M}$ bzw. Frequenzen $f_n = n\frac{f_S}{N}$ interpretieren.

Definition:

$$\boxed{S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, \cdots, N-1}$$

heißt **Diskrete Fouriertransformation** (DFT) der Folge x_k.

Umgekehrt erhält man die Folge x_k aus der Folge S_n durch die **Inverse DFT**

$$\boxed{x_k = \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{i\frac{2\pi}{N}nk}}$$

abweichend in Literatur und MATLAB

$S_n = \sum x_k e^{\cdots}$

$x_k = \frac{1}{N} \sum S_n e^{\cdots}$

Die Abtastfolge x_k lässt sich also vollständig aus dem Spektrum S_n rekonstruieren.

Eine DFT lässt sich grafisch darstellen, indem die Beträge von S_n als senkrechte Linien über den zugehörigen Frequenzen $f_n = n\frac{f_S}{N}$ im Frequenzbereich $0 \le f < f_S$ aufgetragen werden, wobei die Linienlänge die Amplitude wiedergibt.

Diese Darstellung nennt man das **Spektrum** eines Signals.

Aufgrund der Eigenschaften der komplexen e-Funktion ist das Amplitudenspektrum $|S_n|$ **spiegelsymmetrisch zur Achse bei der Frequenz** $\frac{f_S}{2}$. Es gilt

S_{N-1} gehört zur Frequenz $f_{N-1} = (N-1)\cdot\underbrace{\frac{f_S}{N}}_{\text{Grund-frequenz}}$

$$S_{N-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-n)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi k} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = S_n^*$$

$e^{-j2\pi} = 1$

pos. Vorzeichen anders als bei S_n

Also: $|S_{N-n}| = |S_n|$.

Aussagekräftig sind im FFT-Spektrum deshalb nur die Amplituden mit Frequenzen $f_n \le \frac{f_S}{2}$. Das Spektrum wird dementsprechend immer nur bis zu dieser Frequenz dargestellt.

Betragspektrum ist spiegelbildlich zu $\frac{f_S}{2}$

Weiterhin gilt wegen $F(\omega_n) = T_M c_n$ und $S_n \approx c_n$ auch, dass die DFT eine Näherung für die Fouriertransformierte des (zeitlich begrenzten) kontinuierlichen Signals darstellt.

> Die DFT S_n der Abtastfolge x_k eines Signals $x(t)$ mit Abtastzeit T_S im Intervall $[0, T_M]$ stellt – näherungsweise und bis auf den Faktor $\frac{1}{T_M}$ – eine Abtastung der Fouriertransformierten von $x(t)$ im Interval $\left[0\,, \frac{f_S}{2}\right]$ im Abstand $f_1 = \frac{f_S}{N}$ dar.

Damit können viele Resultate, die für die kontinuierliche Fouriertransformation gelten, auf die diskrete Fouriertransformation übertragen werden. Das gilt insbesondere für das Übertragungsverhalten von Filterschaltungen und ihre Ein- und Ausgangs-signale. So lassen sich z. B. **Digitale Filter** realisieren. Dabei sind auch Filterfunktionen umsetzbar, die durch keine analoge Schaltung erreichbar sind.

Bei der Berechnung der Transformationen muss keine Integration ausgeführt werden, es sind nur Summen von Produkten zu bestimmen. Ein besonders effizienter Algorithmus dafür ist die **FFT (Fast Fourier Transform)**.

5.8.3 FFT – Fast Fourier Transform

Wir setzen voraus, dass N eine Paarzahl ist, und um den Faktor $\frac{1}{N}$ nicht "mitschleppen" zu müssen, berechnen wir

$$\tilde{S}_n = N \cdot S_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

Für eine übersichtlichere Darstellung definieren wir außerdem $\boldsymbol{W} := e^{-i\frac{2\pi}{N}}$, so dass

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \boldsymbol{W}^{nk} \quad , \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

Nun wird in gerade ($k = 2m$) und ungerade ($k = 2m + 1$) Indizes unterteilt:

$$\tilde{S}_n = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} \boldsymbol{W}^{2mn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} \boldsymbol{W}^{(2m+1)n} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} \boldsymbol{W}^{2mn} + \boldsymbol{W}^n \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} \boldsymbol{W}^{2mn}$$

Es ist $\boldsymbol{W}^{2mn} = (\boldsymbol{W}^2)^{mn}$. Mit $\widetilde{W} := \boldsymbol{W}^2 = e^{-i\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}}$ stellen diese Summen also DFTs von Wertefolgen der Dimension $\frac{N}{2}$ dar:

$$\tilde{S}_{n,g} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} \widetilde{W}^{mn} \quad , \quad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2}$$

$$\tilde{S}_{n,u} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} \widetilde{W}^{mn} \quad , \quad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2}$$

Dies liefert

$$\tilde{S}_n = \tilde{S}_{n,g} + \boldsymbol{W}^n \cdot \tilde{S}_{n,u} \,, \qquad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

Für $n \geq \frac{N}{2}$ gilt

1.) $\boldsymbol{W}^{2m\left(n+\frac{N}{2}\right)} = \boldsymbol{W}^{2mn} \cdot \boldsymbol{W}^{2m\frac{N}{2}} = \boldsymbol{W}^{2mn} \cdot (\boldsymbol{W}^N)^m = \boldsymbol{W}^{2mn} \cdot 1^m = \boldsymbol{W}^{2mn}$

2.) $\boldsymbol{W}^{n+\frac{N}{2}} = \boldsymbol{W}^n \cdot \boldsymbol{W}^{\frac{N}{2}} = \boldsymbol{W}^n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}} = \boldsymbol{W}^n \cdot e^{-i\pi} = -\boldsymbol{W}^n$

Dies in die obige Gleichung für $\tilde{S}_n$ eingesetzt liefert für diese Indizes

$$\tilde{S}_{n+\frac{N}{2}} = \tilde{S}_{n,g} - \boldsymbol{W}^n \cdot \tilde{S}_{n,u}$$

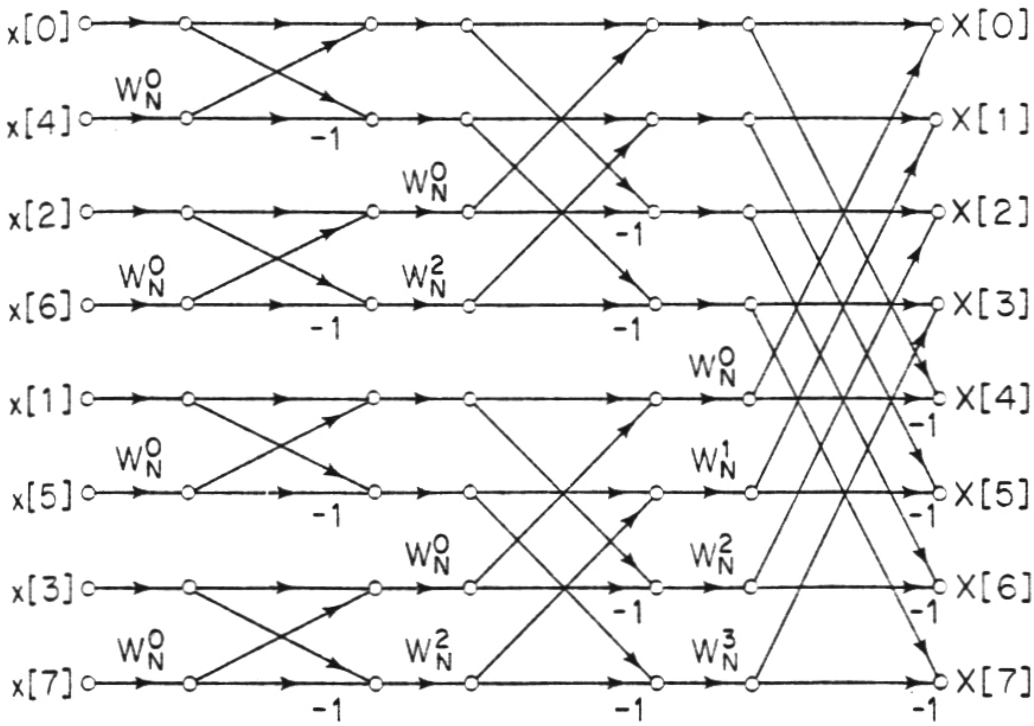
Statt einer N-Punkte-DFT werden hier also zwei $\frac{N}{2}$-Punkte-DFTs berechnet und diese anschließend einmal addiert und einmal subtrahiert.

Der Rechenaufwand wird dadurch in diesem Schritt annähernd halbiert und beträgt etwa $2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}N^2$ Additionen und Multiplikationen, statt N^2.

Statt die beiden $\frac{N}{2}$-Punkte DFTs zu berechnen, setzt man diese Zerlegung weiter fort, bis am Ende nur noch 2-Punkte-DFTs übrig bleiben. Der Rechenaufwand liegt dann in der Größenordnung $N \cdot \mathrm{ld}(N)$ statt N^2.

Das ist bei $N = 1000$ ein Unterschied in der Rechenzeit um den Faktor 100!

Für die Aufteilung in "gerade" und "ungerade" mit den zugehörigen 2-Punkte-DFTs gibt es eine grafische Darstellung, die an Schmetterlinge erinnert. Man spricht bei der FFT deshalb auch vom **"Butterfly"-Algorithmus**. Die folgende Abbildung zeigt dies am Beispiel einer 8-Punkte-FFT.



FFT-Algorithmus von James W. Cooley (1926 – 2016) und John W. Tukey (1915 –2000)

5.9 Übungen "FFT-Amplitudenspektren, Aliaseffekt"

5.9.1 DFT-Spektrum

Das Signal $u(t) = 2\,V \cdot sin\left(3140\frac{rad}{s} \cdot t\right)$ wird mit $f_S = 800\,Hz$ abgetastet. Bei welcher Frequenz bzw. welchen Frequenzen sind im DFT-Spektrum Linien zu erwarten? Skizzieren Sie das Spektrum ($|S_n|$).

Hinweis: die Werte eines DFT-Spektrums geben nur die Hälfte der Amplitude der Schwingung mit der jeweiligen Frequenz wieder.

5.9.2 Amplitudenspektrum eines Rechtecksignals

Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum(*) eines Rechtecksignals mit der Periodendauer $T = 10\ ms$ bis zur Frequenz 800 Hz. Dabei sei der Gleichanteil Null und die Amplitude der Grundschwingung sei gleich 6.

(*) *Hier ist (anders als beim DFT-Spektrum) für jede auftretende Schwingung <u>die volle Amplitude</u> bei der jeweiligen Frequenz einzutragen.*

Das Signal wird nun mit einem (ideal angenommenen) Tiefpass mit $f_g = 850\ Hz$ gefiltert und mit $f_S = 900\ Hz$ abgetastet. Ergänzen Sie die Skizze um die dadurch zwischen 0 und 800 Hz hinzukommenden Linien (am besten in anderer Farbe).

5.9.3 Amplitudenspektrum einer Sägezahnschwingung

Eine Sägezahnschwingung habe die Fourierreihenentwicklung

$$u(t) = 1V - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V}{n} \sin\left(n \frac{2\pi}{0{,}05s} t\right)$$

a) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum im Frequenzbereich bis 105 Hz (auch hier gilt die obige Anmerkung (*)).

b) Durch (ideale) Tiefpassfilterung mit $f_g = 125\ Hz$, Digitalisierung mit der Abtastrate $T_S = 130\ Hz$, anschließende D/A-Umsetzung und Tiefpassfilterung mit $f_g = 70\ Hz$ entsteht das Signal $\tilde{u}(t)$. Skizzieren Sie dessen Amplitudenspektrum im Frequenzbereich bis $70\ Hz$.