7 Komplexe Zahlen

7.1 Grundlagen

7.1.1 Definitionen, Begriffe

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung, ebenso wenig wie $x^2 + b^2 = 0$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}$.

Man definiert die Lösungen dieser Gleichungen als **"Imaginäre Zahlen"**.

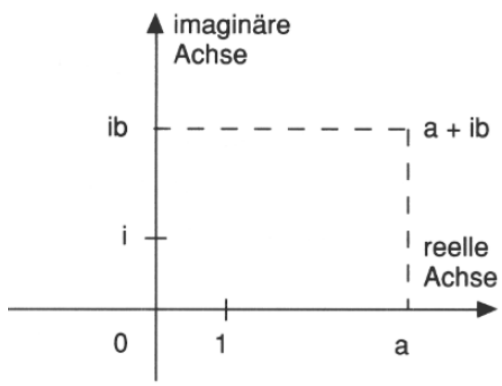
Die Lösung von $x^2 + 1 = 0$ bezeichnet man mit dem Buchstaben i. Es gilt also

$$i^2 = -1\,.$$

Die Lösungen von $x^2 = -b^2 = (-1) \cdot b^2$ mit $b \in \mathbb{R}$ lassen sich damit in der Form $x = i \cdot b$ schreiben. Jeder reellen Zahl b lässt sich so eine imaginäre Zahl ib zuordnen.

Man bezeichnet i deshalb als **"Imaginäre Einheit"** (entsprechend der 1 für die reellen Zahlen).

Die imaginären Zahlen lassen sich wie die reellen als Zahlenstrahl darstellen. Zur Veranschaulichung stellt man diesen senkrecht zum reellen Zahlenstrahl dar.



Diese sogenannte "Komplexe Zahlenebene" (auch "Gauß'sche Zahlenebene") umfasst nun nicht nur die reellen und die imaginären Zahlen, sondern z. B. auch die Lösungen von

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = -9$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2) = 3i \quad \vee \quad (x-2) = -3i$$

die sich mit Hilfe der imaginären Einheit in der Form $z_1 = 2 + 3i$ bzw. $z_2 = 2 - 3i$ schreiben lassen. Sie lassen sich als Punkte der obigen Zahlenebene darstellen.

Allgemein nennt man die Menge der Zahlen $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die Menge der **"Komplexen Zahlen"** $\mathbb{C}$.

Man nennt a den **"Realteil"** von z ($Re\{z\} = a$) und b den **"Imaginärteil"** von z ($Im\{z\} = b$).

Bei der Lösung der obigen quadratischen Gleichung ist also der Realteil gleich 2 und der Imaginärteil gleich 3 bzw. -3 (nicht etwa $3i$ oder $-3i$ – ein leider häufig gemachter Fehler).

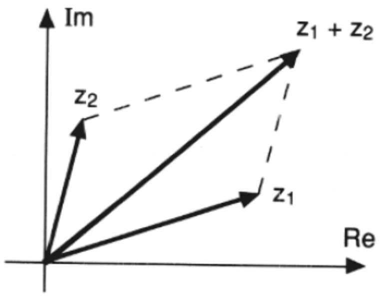
7.1.2 Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

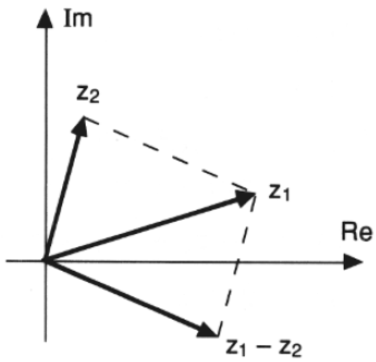
Für komplexe Zahlen $z_1 = a + ib$ und $z_2 = c + id$ gilt:

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

Diese Rechenoperationen lassen sich in der komplexen Zahlenebene grafisch veranschaulichen:





Auch Multiplikation und Division werden entsprechend definiert:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Dabei gelten die bekannten Rechengesetze

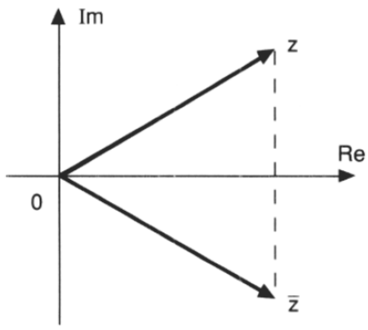
- Kommutativität (Vertauschbarkeit) der Addition und Multiplikation
    - $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
    - $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Assoziativgesetz der Addition und Multiplikation
    - $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
    - $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- Distributivgesetz (Ausklammern)
    - $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Die imaginäre Einheit i wird dabei rechentechnisch wie eine beliebige Variable behandelt. Werden zwei imaginäre Zahlen multipliziert, setzt man $i^2 = -1$.

Bei der Division bekommt man einen reellen Nenner, indem man mit $(c - id)$ erweitert. Allgemein gilt:

Zu $z = a + ib \in \mathbb{C}$ definiert man $\bar{z} = a - ib$ als die zu z **"konjugiert komplexe Zahl"** mit der Eigenschaft

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$



Dies definiert gleichzeitig den **Betrag** einer komplexen Zahl. Er ist gleich dem Abstand des zu z gehörenden Punktes in der komplexen Ebene vom Ursprung.

In der Elektrotechnik nennt man dies auch die **"Länge des Zeigers $\underline{z}$"**.

Aus der grafischen Darstellung von z und $\bar{z}$ entnimmt man weiter

$$z + \bar{z} = 2a = 2 \cdot Re\{z\} \iff Re\{z\} = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$z - \bar{z} = i \cdot 2b = i \cdot 2 \cdot Im\{z\} \iff Im\{z\} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

7.2 Linearfaktorzerlegung

Legen wir die komplexen Zahlen zugrunde, so hat jede quadratische Gleichung eine Lösung.

$$P(z) = z^2 + pz + q = 0 \iff z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

a) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ zwei reelle Lösungen, $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$

b) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ eine reelle Lösung $z_0 = -\frac{p}{2}$, $P(z) = (z - z_0)^2$

c) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ zwei Lösungen, $P(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)$

mit $z_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$ und $z_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \bar{z}_1$

Diese Feststellung für die quadratische Gleichung lässt sich auf Polynome beliebigen Grades verallgemeinern: Im Rahmen der komplexen Zahlen hat jedes Polynom n-ter Ordnung immer genau n Nullstellen (wenn mehrfache Nullstellen wie im obigen Fall b) entsprechend gezählt werden).

Linearfaktorzerlegung

Ist f ein Polynom vom Grad n, also $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, so hat $f(z)$ immer genau n Nullstellen $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, wobei die nicht reellen Nullstellen als konjugiert komplexe Paare vorliegen.

$f(z)$ lässt sich deshalb in $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerlegen:

$$f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

("Fundamentalsatz der Algebra").

Gemäß dieser Feststellung und der obigen Herleitung gilt auch:

> Hat ein Polynom mit reellen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle bei $z_1 = a + ib$, so ist auch $z_2 = \bar{z}_1 = a - ib$ eine Nullstelle.

Das Produkt der Linearfaktoren hat reelle Koeffizienten:

$$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - (z_1 + \bar{z}_1) + z_1 \bar{z}_1 = z^2 - 2Re\{z_1\} + |z_1|^2$$

$f(z)$ lässt sich also als Produkt reeller quadratischer Terme und reeller Linearfaktoren schreiben:

$$f(z) = a_n \left(\prod_{i=1}^{k} (z - z_{2i-1})(z - \bar{z}_{2i-1}) \right) \left(\prod_{i=2k+1}^{n} (z - z_i) \right)$$

Beispiel:

$f(z) = z^3 - 4z^2 - 2z + 20$ hat eine Nullstelle bei $z_1 = 3 + i$. Wo liegen die übrigen Nullstellen?

a) Finde den konjugiert komplexen Partner ($z_2 = \bar{z}_1 = 3 - i$) und den zugehörigen reellen quadratischen Term

   $$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = (z - 3 - i)(z - 3 + i) = z^2 - 6z + 10$$

b) Bestimme das Restpolynom durch Polynomdivision

   $$(z^3 - 4z^2 - 2z + 20) : (z^2 - 6z + 10) = z + 2$$

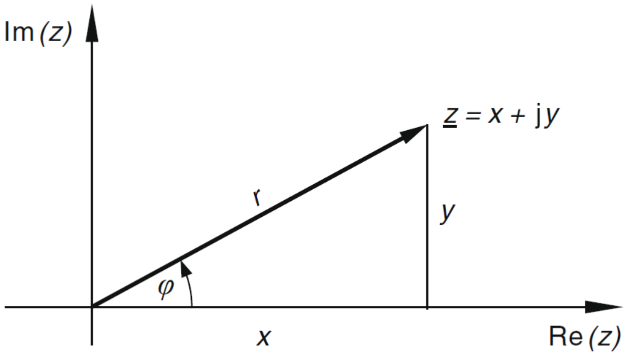
c) also liegt eine weitere Nullstelle bei $z_3 = -2$ und die Linearfaktorzerlegung lautet

   $$f(z) = (z - 3 - i)(z - 3 + i)(z + 2)$$

7.3 Polar- und Exponentialdarstellung

7.3.1 Polardarstellung komplexer Zahlen

Da eine komplexe Zahl $z = a + ib$ als Punkt in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann, hat sie auch eine Polardarstellung.



$a = r\cos\varphi$

$b = r\sin\varphi$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Dabei ist

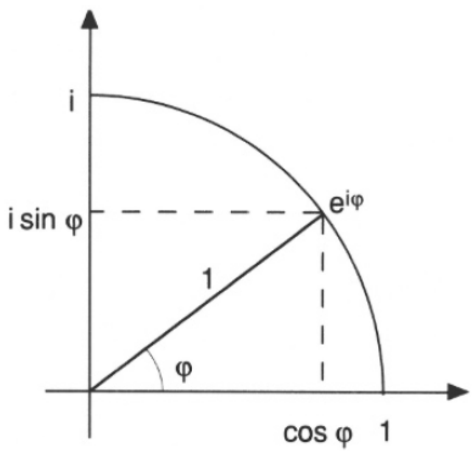
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

der Betrag von z.

Der Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ heißt auch "Argument von z" ($\varphi = \arg z = \angle(z)$).

7.3.2 Exponentialdarstellung, Euler-Gleichung

Die Euler'sche Gleichung ist für alle naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen die wichtigste Eigenschaft der komplexen Zahlen.



Euler'sche Formel

$$e^{i\varphi} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi$$

Es gilt $\left|e^{i\varphi}\right| = cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi = 1.$

Die Punkte $z = e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ stellen also in der komplexen Zahlenebene den **Einheitskreis** dar.

Spezielle Punkte auf dem Einheitskreis sind

$$e^{i0} = 1\ ,\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i\ ,\quad e^{i\pi} = -1\ ,\quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\ ,\quad e^{i\varphi} = e^{i\,(\varphi \pm 2\pi)}$$

Durch Vergleich mit der Polardarstellung ergibt sich die **Exponentialdarstellung** komplexer Zahlen

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

7.3.3 Beweis der Euler-Gleichung

Im Zuge der Differentialrechnung erhält man die folgenden Taylorreihen:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} -/+ \cdots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} +/- \cdots$

Die Potenzen von $x = i\varphi$ sind

x	x^2	x^3	x^4	x^5
$i\varphi$	$-\varphi^2$	$-i\varphi^3$	φ^4	$i\varphi^5$

Für $x = i\varphi$ erhält man also

$$\begin{aligned} e^{(i\varphi)} &= 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2} + \frac{(i\varphi)^3}{6} + \frac{(i\varphi)^4}{24} + \frac{(i\varphi)^5}{120} + \cdots \\ &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - i\frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^4}{24} + i\frac{\varphi^5}{120} -/+ \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} -/+ \cdots\right) + \left(i\varphi - i\frac{\varphi^3}{6} + i\frac{\varphi^5}{120} -/+ \cdots\right) \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi \end{aligned}$$

7.4 Rechnen mit der Exponentialdarstellung

Für die Multiplikation und Division von $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$ gilt:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

(Betrag = Produkt der Beträge, Argument = Summe der Argumente)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

(Betrag = Quotient der Beträge, Argument = Differenz der Argumente)

Dies ist manchmal einfacher als die Division komplexer Zahlen in der Form mit Real- und Imaginärteil.

Für die **n-te Wurzel** aus $a = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ gilt $z^n = a$.

Wegen $a = re^{i\varphi} = re^{i\,(\varphi + k\cdot 2\pi)}$ erhält man n verschiedene Lösungen:

$$z^n = re^{i\,(\varphi + k\cdot 2\pi)} \;\Leftrightarrow\; z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Übungsblatt 13 – Komplexe Zahlen

In diesem Übungsblatt ist abweichend vom mathematisch Üblichen die imaginäre Einheit mit j statt i bezeichnet.

1 Gauß'sche Zahlenebene

a) Addiere in der Gauß'schen Zahlenebene graphisch $z_1 = 2 + j$ und $z_2 = 1 - j$.

b) Subtrahiere graphisch $z_1 = 1 + 2j$ und $z_2 = 1 - j$.

c) Ausgehend vom Zeiger $z_1 = 1 + j$ zeige man durch Berechnung und Trigonometrie, dass die Multiplikation mit $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$ einer Drehung des Zeigers um 45° entspricht.

d) Zeigen Sie ebenso, dass die Multiplikation mit $z = j$ einer Drehung um 90° entspricht.

(jeweils gegen den Uhrzeigersinn, mathematisch positiv!)

2 Betrag und konjugiert komplexe Zahl

a) Bestimme die Beträge von 1) $\frac{1+j}{2j}$, 2) $\frac{1-j}{1+3j}$, 3) $\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Hinweis: Für Beträge komplexer Zahlen gilt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

b) Bestimme z aus $(1 - j) \cdot \overline{z} = 2 + 3j$.

Hinweis: Ansatz $z = x + j\,y$

3 Linearfaktorzerlegung in $\mathbb{C}$

Das Polynom $P(z) = 2z^5 + 11z^4 + 22z^3 + 66z^2 + 360z - 200$ hat Nullstellen bei $z = -4 + 2j$ und $z = \frac{1}{2}$.

Bestimmen Sie alle Nullstellen und die Linearfaktorzerlegung von $P(z)$.

Skizzieren Sie die Nullstellen in der komplexen Zahlenebene.

4 Komplexe Verstärkung

Elektrische Filterschaltungen werden durch ihren Frequenzgang $G(j\omega)$ beschrieben, eine komplexe Funktion der Kreisfrequenz ω. Bei einem Eingangssignal $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t)$, erhält man ein Ausgangssignal $y(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ mit der Amplitude $\hat{y} = |G(j\omega)| \cdot \hat{x}$ und dem sogenannten Phasenwinkel

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{Im\{G(j\omega)\}}{Re\{G(j\omega)\}}\right)$$

Es sei $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2+(j\omega)+2}$.

a) Wie lautet diese Verstärkung in Exponentialdarstellung, also in der Form $G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)}$?

b) Welches Ausgangssignal $y(t)$ ergibt sich, wenn das Eingangssignal $x(t) = 5 \cdot \cos(2t)$ ist?

5 Rechnen mit der Exponentialdarstellung

Für die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + j$ und $z_2 = -1-3j$ sind zu bestimmen:

a) die Exponentialdarstellungen $r \cdot e^{j\varphi}$,

b) Produkt $z_1 \cdot z_2$ und Quotient z_1 / z_2 (Berechnung sowohl in der Darstellung nach Real- und Imaginärteil als auch in der Exponentialdarstellung),

c) z_1^{-2} und z_2^{3} (in Exponentialdarstellung berechnen, anschließend nach Real- und Imaginärteil darstellen).

6 Anwendung der Euler'schen Formel

a) Benutzen Sie die Euler'sche Formel um zu zeigen

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe der Euler'schen Formel, dass die Menge der Punkte $\mathrm{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ in der komplexen Ebene den Einheitskreis darstellt.

7 Exponentialdarstellung

Bringen Sie die folgenden Zahlen in Exponentialdarstellung:

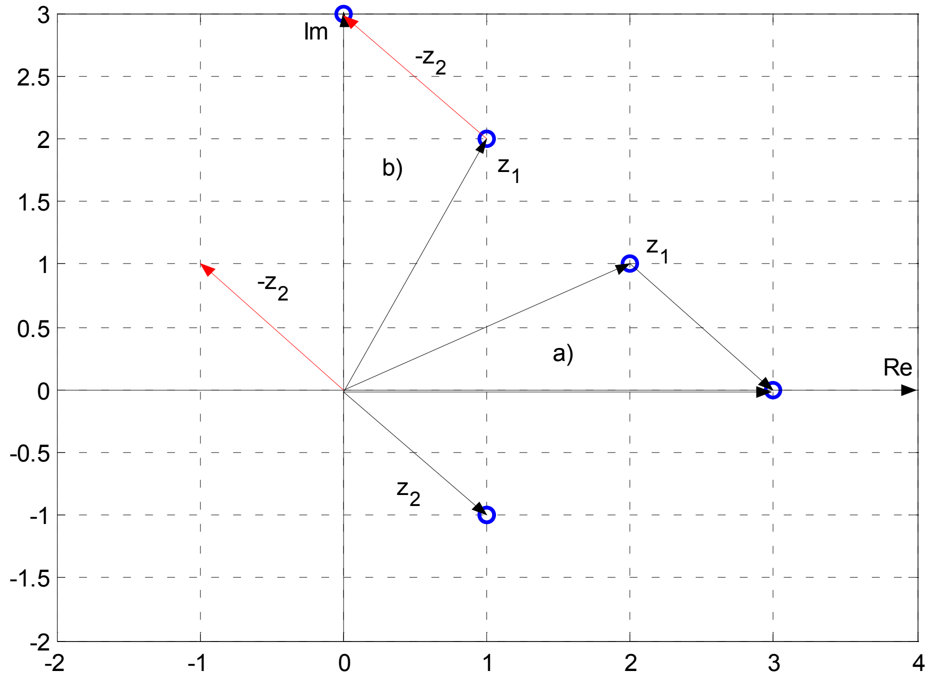
$z_1 = 3 + 2j$, $z_2 = \frac{2-j}{5+j}$

Stellen Sie diese Zahlen und das Produkt $z_1 \cdot z_2$ in der komplexen Ebene dar.

Lösungsblatt 13: "Komplexe Zahlen"

1 Gauß'sche Zahlenebene

Aufgabe 1, a und b:



c) Der Zeiger von $z_1 = 1 + j$ schließt mit der reellen Achse den Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45°$ ein. $z_2 = (1+j) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = \frac{2j}{\sqrt{2}} = j \cdot \sqrt{2}$ liegt auf der imaginären Achse, also bei einem Winkel von 90°, das heißt 45° gedreht.
Der Betrag ändert sich bei dieser Multiplikation nicht: $|z_1| = |1+j| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = |z_2|$

d) Der Zeiger $z_3 = (1+j) \cdot j = -1 + j$ schließt mit der (positiven) reellen Achse den stumpfen Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4} = 135° = 45° + 90°$ ein. Der Betrag ändert sich auch hier nicht.

2 Betrag und konjugiert komplexe Zahl

a) 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, 3) $\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}\right)^3 = 1$

b) $z = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{5}{2}$

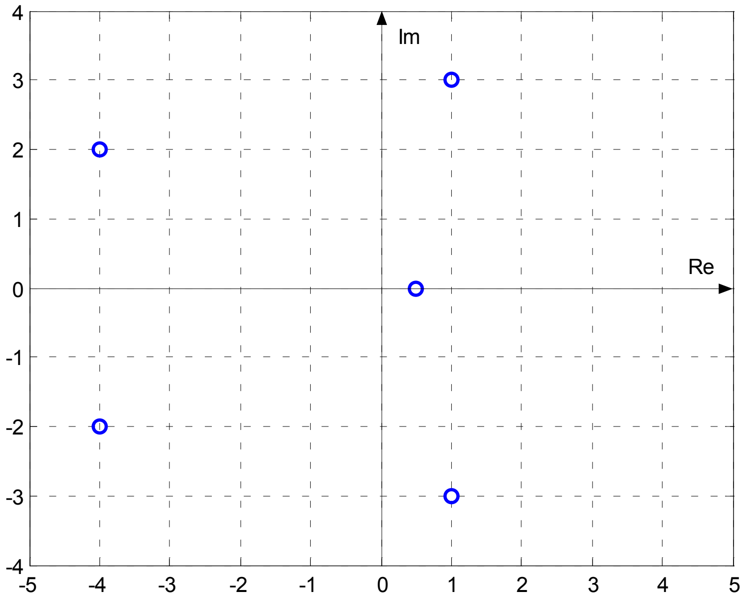
3 Linearfaktorzerlegung in $\mathbb{C}$

Mit $z=-4+2j$ ist auch $z=-4-2j$ Nullstelle. Also

$$P(z)=2\cdot(z+4+2j)(z+4-2j)(z-\frac{1}{2})\cdot\overline{P}(z)$$
$$=(2z^3+15z^2+32z-20)\cdot\overline{P}(z)$$

Polynomdivision liefert: $\overline{P}(z)=z^2-2z+10$ mit Nullstellen bei $z=1+3j$ und $z=1-3j$.

Also $P(z)=2\cdot(z+4+2j)(z+4-2j)(z-\frac{1}{2})(z-1+3j)(z-1-3j)$



4 Komplexe Verstärkung

$\mathrm{G}(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{2-\omega^2+\mathrm{j}\omega}$, und $G(j\cdot 2)=\frac{1}{2-4+2j}=\frac{1}{-2+2j}=\frac{-2-2j}{4+4}=-\frac{1}{4}(1+j)$

$|G(j\cdot 2)|=\frac{1}{4}|1+j|=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\angle G(j\cdot 2)=\arctan\frac{Im\{G(j2)\}}{Re\{G(j2)\}}=\arctan\frac{-1}{-1}=\frac{\pi}{4}\pm\pi=225°\text{ bzw. }-135°$

Ausgangssignal: $y(t)=5\cdot|G(j\cdot 2)|\cdot\cos\big(2t+\angle G(j\cdot 2)\big)=\frac{5\sqrt{2}}{4}\cos\left(2t-\frac{3\pi}{4}\right)$

5 Rechnen mit der Exponentialdarstellung

a) $z_1=|z_1|\cdot e^{j\varphi_1}$, $|z_1|=\sqrt{5}$, $\varphi_1=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)=26{,}565°$

$z_1=\sqrt{5}\cdot e^{j26{,}565°}$

$$z_2 = |z_2| \cdot e^{j\varphi_2} \;, \quad |z_2| = \sqrt{10} \;, \quad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{-3}{-1}\right) = 251{,}565°$$

$$z_2 = \sqrt{10} \cdot e^{j251{,}565°}$$

b) $$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{5} \cdot e^{j26{,}565°} \cdot \sqrt{10} \cdot e^{j251{,}565°} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot e^{j(26{,}565°+251{,}565°)} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j278{,}13°}$$

$$= (2+j) \cdot (-1-3j) = 1 - 7j$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{5} \cdot e^{j26{,}565°}}{\sqrt{10} \cdot e^{j251{,}565°}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(26{,}565°-251{,}565°)} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{-j225°} \approx 0{,}707 \cdot e^{j135°}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(135°) + j \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(135°) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} j$$

c) $$z_1^{-2} = \left(\sqrt{5} \cdot e^{j26{,}565°}\right)^{-2} = \frac{1}{5} \cdot e^{-j53{,}13°}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\cos(-53{,}13°) + j \cdot \sin(-53{,}13°)\right) = \frac{3}{25} - j\frac{4}{25}$$

$$z_2^{\,3} = \left(\sqrt{10} \cdot e^{j251{,}565°}\right)^3 = 10\sqrt{10} \cdot e^{j754{,}695°} = 10\sqrt{10} \cdot e^{j(720°+34{,}695°)} = 10\sqrt{10} \cdot e^{j34{,}695°}$$

$$= 10\sqrt{10} \cdot \left(\cos(34{,}695°) + j \cdot \sin(34{,}695°)\right) = 26 + 18j$$

6 Anwendung der Euler'schen Formel

siehe Vorlesung.

7 Exponentialdarstellung
