Fourier-Spektralanalyse – Zusammenhänge, Anwendung

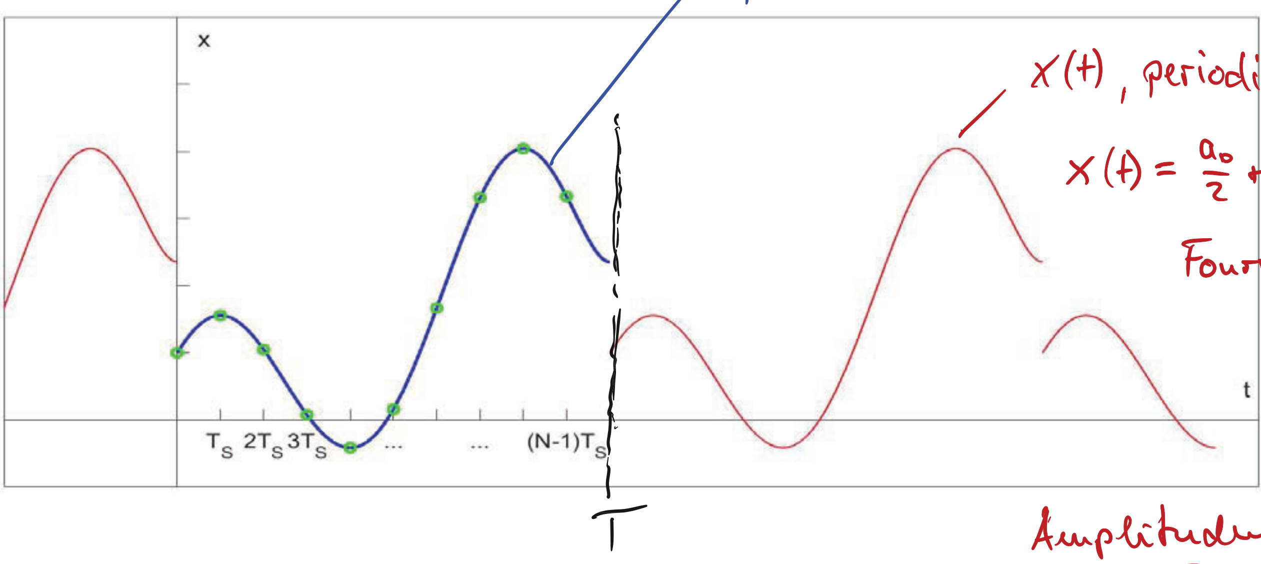
Zu unterscheiden sind

- Fourierreihe
- Fouriertransformation
- Diskrete Fouriertransformation

Dazu gehören drei unterschiedliche Signalformen

$x_T(t)$	kontinuierliche Funktion, $0 \leq t < T$	Fouriertransformation
$x(t)$	kontinuierliche Funktion, $t \in \mathbb{R}$, periodische Fortsetzung von $x_T(t)$	Fourierreihe
$x_k = x_T(kT_S)$	diskrete Wertefolge aus der Abtastung von $x_T(t)$ mit Abtastzeit T_S	DFT

$x_T(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega)$



$x(t)$, periodisch

$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum \ldots$

Fourierreihe

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

Amplituden

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|$

Die **Fouriertransformierte**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

ist eine kontinuierliche Funktion der Frequenz.

Sie stellt die **Spektraldichte** von $x_T(t)$ dar.

Die **Fourierreihe** stellt die periodische Funktion $x(t)$ durch Sinusschwingungen dar.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

Die Amplituden erhält man aus den Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\, dt\,.$$

Die zugehörigen Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

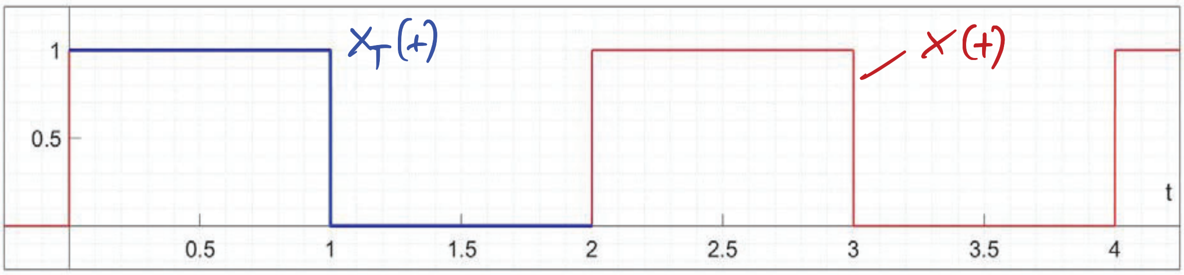
Bei den Frequenzen

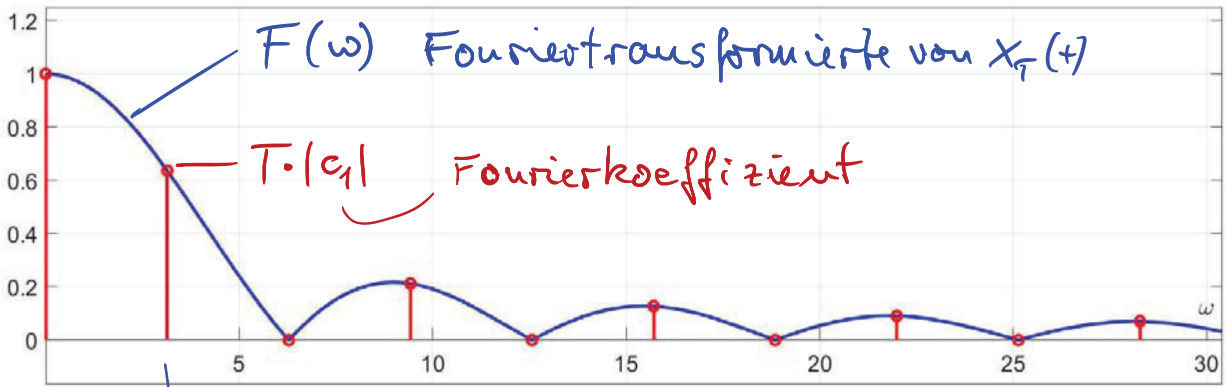
$$\omega_n = n \cdot \frac{2\pi}{T}$$

stimmt die Fouriertransformierte bis auf den Faktor T mit den Fourierkoeffizienten überein. Es gilt

$$\boxed{X(\omega_n) = T \cdot c_n}$$

Insofern stellen die c_n "Abtastungen" der kontinuierlichen Spektraldichte $X(\omega)$ dar.

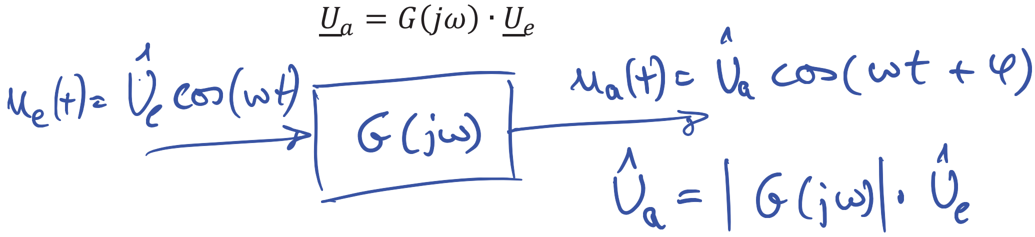




$\omega_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ Messzeit $T = 2$

Der **Frequenzgang** wurde zunächst in der komplexen Wechselstromrechnung als frequenzabhängige Verstärkung sinusförmiger Spannungen hergeleitet

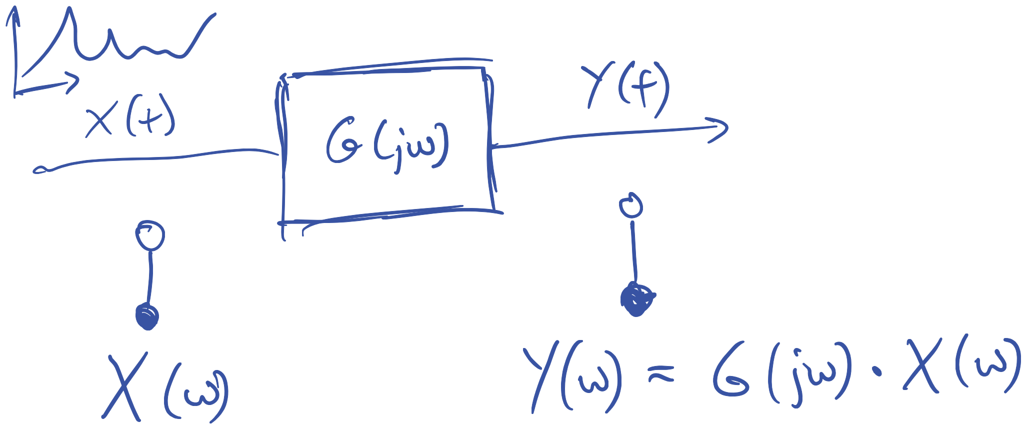
$$\underline{U}_a = G(j\omega) \cdot \underline{U}_e$$



Mit der Fouriertransformation überträgt sich das auf beliebige Signalverläufe. Ist $x(t)$ das Eingangssignal eines Übertragungssystems mit Frequenzgang $G(j\omega)$ und $y(t)$ der zugehörige Signalverlauf am Ausgang, so gilt für die Fouriertransformierten

$$Y(\omega) = G(j\omega) \cdot X(\omega)$$

Das ist die Grundlage für die **Signalverarbeitung und -analyse im Frequenzbereich**.



Die **digitale Signalverarbeitung** arbeitet anstelle kontinuierlicher Funktionen mit der Abtastfolge

x(t) abgetastet

$$x_k = x(kT_S) \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1\,, \quad N = \frac{T}{T_S}$$

Die **Diskrete Fouriertransformation (DFT)**

$$X_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

zu N Abtastwerten von x(t) gehören N Werte des DFT-Spektrums

stellt eine Näherung der Integralformel von c_n dar, wobei diese Näherung umso besser ist, je kleiner die Abtastzeit T_S gewählt wird.

Es gilt

$$\boxed{X_n \approx c_n\,.}$$

$\Rightarrow \quad |X_n| \approx |c_n| = \frac{A_n}{2}$ — Amplitude gemäß Fourierreihe

Damit stellt – bis auf den Faktor $\frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot T_S} = \frac{f_S}{N}$ – auch die DFT eine Abtastung der (kontinuierlichen) Fouriertransformierten dar:

Grundfrequenz in Hz

$$X_n \approx \frac{f_S}{N} \cdot X(\omega_n)$$

kont. Fourier

DFT

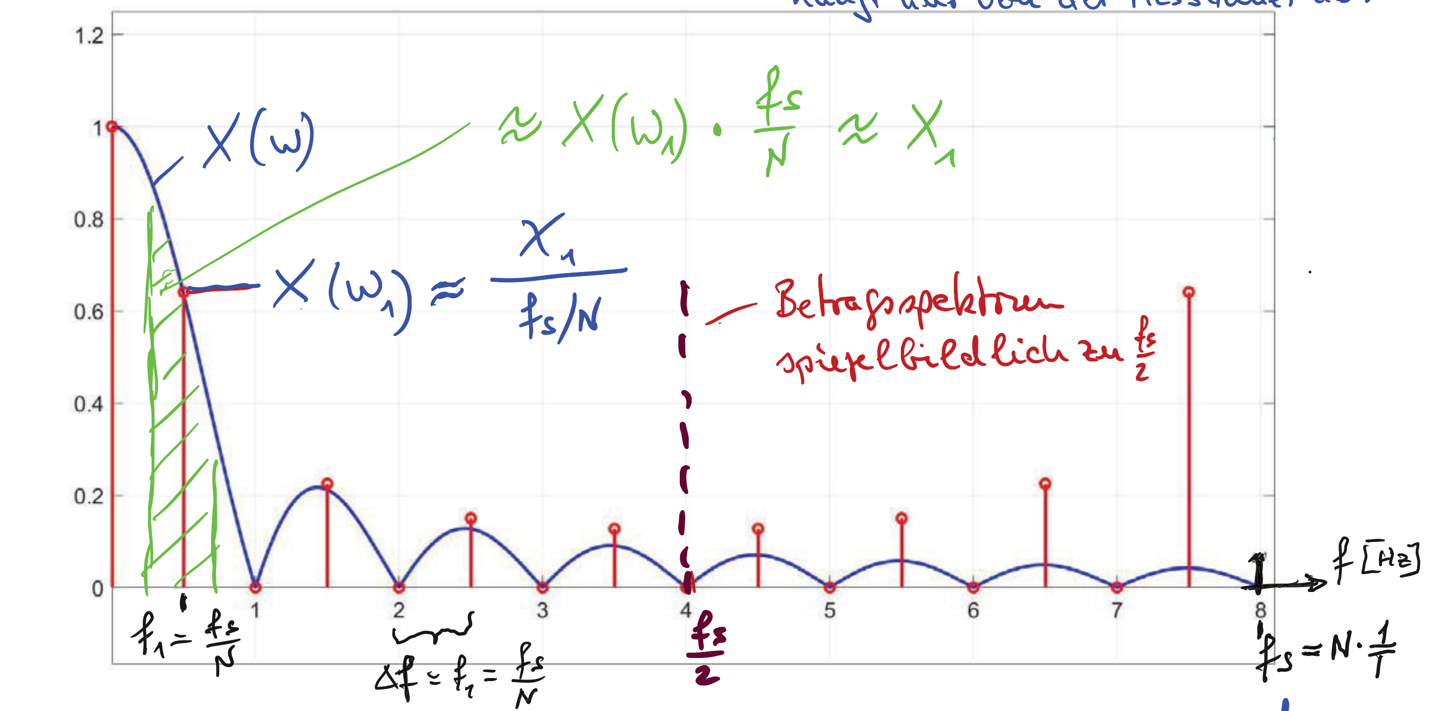
(*)

Im DFT-Spektrum werden die Beträge $|X_n|$ über den zugehörigen Frequenzen

$$f_n = n \cdot \frac{f_S}{N}\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

aufgetragen (Linien im Frequenzabstand $\frac{f_S}{N} = \frac{1}{T}$).

Auflösung des Spektrums hängt nur von der Messdauer ab!



(*) $X_n = \frac{1}{2} \cdot$ Schwingungsamplitude bei Frequenz $f_n = n \cdot \frac{f_S}{N}$

A_n

$$X(\omega_n) = \frac{X_n}{f_S/N}$$

"Amplitude pro Frequenz" – Spektraldichte

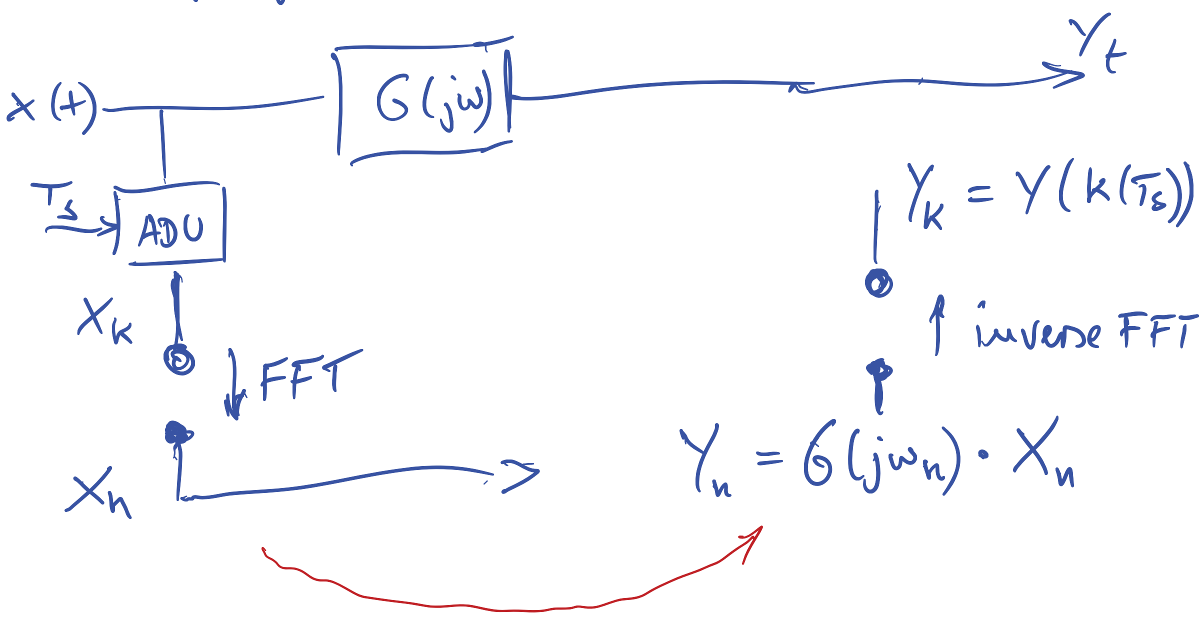
Ein zusätzlicher Effekt der Abtastung ist, dass sich das Spektrum bei Frequenzen oberhalb der Abtastrate wiederholt. Das heißt, **X_n ist periodisch mit Periode N** bzw. mit der Frequenz f_S, also $X_{N+n} = X_n$.

Außerdem ist wegen $X_{N-n} = X_n^*$ das Betragsspektrum im Bereich $0 \leq f < f_S$ spiegelsymmetrisch zur Achse bei $\frac{f_S}{2}$.

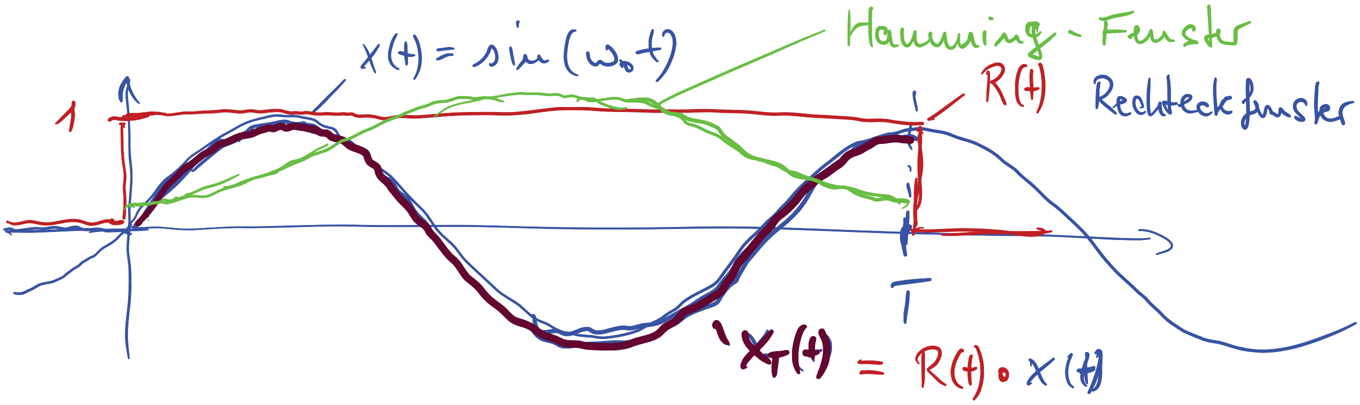
Bei üblichen Darstellungen von Spektren endet deshalb die Frequenzachse bei $\frac{f_S}{2}$.

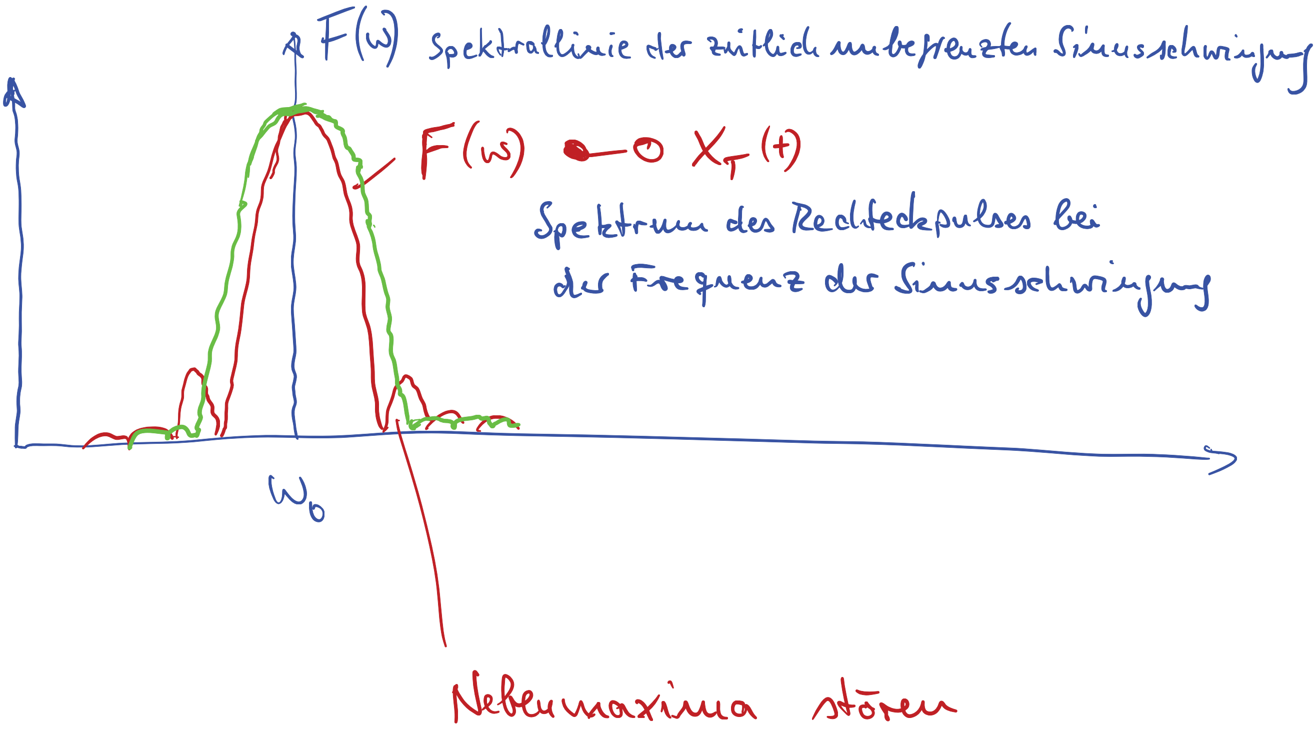
Im Laborversuch wird das Ausgangssignal des Digital-Analog-Umsetzers, der mit relativ geringer Rate arbeitet, vom Picoscope mit deutlich höherer Rate abgetastet. Dadurch ist im Picoscope-Spektrum sowohl die Achsensymmetrie als auch die periodische Wiederholung bei Vielfachen der LabVIEW-Abtastrate zu erkennen.

Weil die DFT im obigen Sinn eine Näherung der Fouriertransformation darstellt, übertragen sich auch die dafür gefundenen Ergebnisse auf die DFT



Möglichkeit zur Implementierung digitales Filter





Picoscope "Fensterfunktion" "rectangular"

Verbreitern das Max. bei ω_0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{"Blackman"} \\ \text{"Hann - Fenster"} \end{array} \right.$

Reduzieren Nebenmaxima