Labor 1

Montag, 18. Oktober 2021 11:06

Vorbereitung

1) Die Bauteilwerte eines RC Glieder

$\Omega = \frac{V}{A}$

$F = \frac{s}{\Omega} = \frac{As}{V}$

$\tau = R \cdot C$

$T = \Omega \cdot F$

$T = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$ ✓

2)

a)

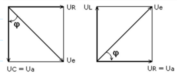
$u_a = \frac{Z_C}{R + Z_C} \cdot u_e$

$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

$\frac{u_a}{u_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = G(j\omega)$

$u_e = u_a\sqrt{2}$?

$\frac{u_a}{u_e} = \frac{u_a}{u_a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



RC-Tiefpass

$U_e = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$

$\tan\varphi = \frac{U_R}{U_C}$

RL-Tiefpass

$U_e = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$

$\tan\varphi = \frac{U_L}{U_R}$

bei gleichen Zeigerlängen und somit gleichen Spannungswerten folgt

$\tan\varphi = 1$ $\quad \varphi = |45°|$

$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$ $\quad X_L = 2\pi f L$

bei $R = X$

$f_g = \frac{1}{2\pi RC}$ $\quad f_g = \frac{R}{2\pi L}$

bei $U_a = U_X = U_R$

$U_e = \sqrt{2U_a^2} = U_a\sqrt{2}$

$U_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_e = 0{,}707 \cdot U_e$

b)

$\omega = 2\pi f$; $f = \frac{\omega}{2\pi}$; $\omega_g = \frac{1}{RC}$

$\frac{f}{f_g} = \frac{\omega}{\omega_g} \Rightarrow \frac{\frac{\omega}{2\pi}}{f_g} = \frac{\omega}{\frac{1}{RC}} \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\frac{1}{RC}} f_g$

$\frac{\cancel{\omega}}{2\pi} \frac{\frac{1}{RC}}{\cancel{\omega}} = f_g$ $\quad \underline{\underline{= \frac{1}{2\pi RC}}}$

c)

Aus der Anstiegszeit t_r lässt sich die Grenzfrequenz f_g bestimmen.

$\frac{u_a}{u_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j2\pi f_g RC}$

$\underline{U}_a(j\omega) = G(j\omega) \cdot \underline{U}_e(j\omega)$. $\quad$ n $\underline{I} = \frac{U_e}{R + Z_C}$ und $\underline{I} = \frac{U_a}{Z_C}$ gil

$f_g = \frac{1}{2\pi T}$ und $T \approx 0{,}455 \cdot t_r$

$f_g \approx \frac{0{,}35}{t_r}$

bzw.

$T \approx 0{,}455 \cdot t_r$ und $f_g = \frac{1}{2\pi T} \approx \frac{0{,}35}{t_r}$

$u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

$\ln\left(\frac{u_t}{u_0}\right) = -\frac{t}{T}$

$t = -T \ln\left(\frac{u(t)}{u_0}\right)$

$t_{90} = -T \ln\left(\frac{0{,}9\, u_0}{u_0}\right) = -T \cdot \ln(0{,}9) = T \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right)$

$t_{10} = -T \ln\left(\frac{0{,}1 u_0}{u_0}\right) = -T \ln(0{,}1) = T \ln(10)$

$t_r = t_{10} - t_{90} = T \ln(10) - T \ln\left(\frac{10}{9}\right) = T \ln(9)$

$t_r \approx 2{,}2 \cdot T$

bzw

$T \approx 4{,}55\, t_r$

$u_e = I \cdot (R + Z_C)$ $\quad u_a = I \cdot Z_C$

$\frac{u_a}{u_e} = \frac{\cancel{I} \cdot Z_C}{\cancel{I} \cdot (R + Z_C)} = \frac{Z_C}{R + Z_C}$

$\omega_g = \frac{1}{RC}$; $\Omega = \frac{f}{f_g} = \frac{\omega}{\omega_g}$

$RC = \frac{1}{\omega_g}$

$\frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = \frac{1}{1 + j\Omega} =$

$\frac{1 - j\Omega}{(1 + j\Omega)(1 - j\Omega)} = \frac{1 - j\Omega}{1 + \Omega^2}$

$G(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1 + \Omega^2}}_{Re} - \underbrace{\left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2}\right) j}_{Im}$

$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$

Ersatzmöglichkeiten
$\omega = 2\pi f$ $\quad s = j\omega$
mit Normierung folgt

$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$ oder $\underline{G}(s) = \frac{1}{1 + sRC}$

mit $\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ und $\Omega = \frac{f}{f_g} = \frac{\omega}{\omega_g}$

$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + \Omega j} = \frac{1 - \Omega j}{(1 + \Omega j)(1 - \Omega j)} = \frac{1 - \Omega j}{1 + \Omega^2}$

$\underline{G}(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1 + \Omega^2}}_{Re} - \underbrace{\left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2}\right) j}_{Im}$

$|\underline{G}(j\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$

$|\underline{G}(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\Omega}{1 + \Omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{(1 + \Omega^2)^2}}$

$|\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$ $\quad$ bei fg mit Ω=1 ⇨ |G|= 0,707

Amplitudengang

$\varphi(j\omega) = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-\Omega}{1 + \Omega^2}}{\frac{1}{1 + \Omega^2}}\right)$

$\varphi(j\omega) = -\arctan(\Omega)$ $\quad$ bei fg ⇨ φ = -45°

Phasengang

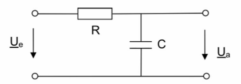
3)

$Z_L = \frac{R_0}{1 + j\omega R_0(C_K + C_0)}$ $\quad$ herleiten

Der nachteil, dass das Signal um den Faktor $\frac{1}{10}$ geschwächt wird steht gegenüber dem vorteil, dass die grenzfrequenz um den Faktor 10 steigt.

Ausarbeitung nicht viel länger als seine Aufgabe

Um Signalverläufe zu glätten und hochfrequente Störungen zu mindern, werden **Tiefpassfilter** eingesetzt. Am einfachsten ist der **RC-Tiefpass**



Wegen $\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{R+\underline{Z}_C}$ und $\underline{I} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_C}$ gilt in der Zeigerdarstellung mit komplexen Impedanzen auch die Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{R+\underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

Für die Amplituden gilt

$$\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

Die Spannungsverstärkung der Schaltung ist also von der Frequenz abhängig und geht für sehr hohe Frequenzen ($\omega \to \infty$) gegen Null.

Abschriben lol

Wegen $\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{R+\underline{Z}_C}$ und $\underline{I} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_C}$ gilt in der Zeigerdarstellung mit komplexen Impedanzen auch die Spannungsteilerregel

Grenzfrequenz aus $|G(j\omega_g)| = \frac{\max(|G(j\omega)|)}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{R+\underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

$\omega_g = 2\pi f_g$

$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi}$

Für die Amplituden gilt

(Dämpfung)

Verstärkung von U_e zu U_a, frequenzabhängig

$$\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

Die Spannungsverstärkung der Schaltung ist also von der Frequenz abhängig und geht für sehr hohe Frequenzen ($\omega \to \infty$) gegen Null.

Man nennt das Verhältnis der Spannungszeiger den **Frequenzgang** der Filterschaltung und schreibt

Noch omega g auflösen