調和平均

2020 年 5 月 30 日

1　調和平均の性質

定義 1.1 (調和平均)**.** 正の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(x_i \in \mathbb{R}, x_i > 0)$ について

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \tag{1}$$

を調和平均 (harmonic mean) と呼ぶ。

定義 1.2 (相加平均)**.** 正の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(x_i \in \mathbb{R}, x_i > 0)$ について

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2}$$

を相加平均 (または算術平均, arithmetic mean) と呼ぶ。

定義 1.3 (相乗平均)**.** 正の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(x_i \in \mathbb{R}, x_i > 0)$ について

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \tag{3}$$

を相乗平均 (または幾何平均, geomtric mean) と呼ぶ。

定理 1.4 (平均の不等式)**.**

$$H \leq G \leq A \tag{4}$$

が成り立つ。

定義 1.5 (記号)**.** n 個の正の実数の組

$$(a_i, b_i), \qquad a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, a_i > 0, b_i > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{5}$$

に対して、

$$h_i = \frac{2}{\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}}, \qquad {h_i}' = \frac{1}{\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}} \tag{6}$$

とおく。さらに、

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}A_n, \tag{7}$$

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{n}B_n, \tag{8}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} {h_i}', \qquad \bar{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i = \frac{2}{n}H_n, \tag{9}$$

$$\hat{H}_n = \frac{1}{\frac{1}{A_n} + \frac{1}{B_n}}, \qquad \hat{h} = \frac{2}{\frac{1}{\bar{a}} + \frac{1}{\bar{b}}} \tag{10}$$

と記号を定義する。

補題 1.6. $\forall x, y, s, t > 0 (\in \mathbb{R})$ に対して

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{s}} + \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{t}} \leq \frac{1}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{s+t}} \tag{11}$$

が成り立つ。

Proof.

$$\begin{aligned}
&(R.H.S) - (L.H.S) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{s+t}} - \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{s}} + \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{t}} \right) && (12) \\
&= \frac{(x+y)(s+t)}{(x+y)+(s+t)} - \left(\frac{xs}{x+s} + \frac{yt}{y+t} \right) && (13) \\
&= \frac{(x+y)(s+t)}{(x+y+s+t)} - \frac{xs(y+t) + yt(x+s)}{(x+s)(y+t)} && (14) \\
&= \frac{(x+y)(s+t)(x+s)(y+t) - (x+y+s+t)\left\{xs(y+t) + yt(x+s)\right\}}{(x+y+s+t)(x+s)(y+t)} && (15)
\end{aligned}$$

である。分母は明らかに正だから、この分子を計算すると

$$
\begin{aligned}
&(x+y)(s+t)(x+s)(y+t)-(x+y+s+t)\{xs(y+t)+yt(x+s)\} \\
=&(xs+xt+ys+yt)(x+s)(y+t) \\
&-((x+s)+(y+t))\{xs(y+t)+yt(x+s)\} && (16)\\
=&xs(x+s)(y+t)+yt(x+s)(y+t) \\
&+xt(x+s)(y+t)+ys(x+s)(y+t) \\
&-(x+s)xs(y+t)-(y+t)yt(x+s) \\
&-(y+t)xs(y+t)-(x+s)yt(x+s) && (17)\\
=&xt(x+s)(y+t)+ys(x+s)(y+t)-xs(y+t)^2-yt(x+s)^2 && (18)\\
=&xt(xy+xt+sy+st)+ys(xy+xt+sy+st) \\
&-xs(y^2+2yt+t^2)-yt(x^2+2xs+s^2) && (19)\\
=&\underline{x^2yt}_{*1}+x^2t^2+xyst+\underline{xst^2}_{*2}+\underline{xy^2s}_{*3}+xyst+y^2s^2+\underline{ys^2t}_{*4} \\
&-\underline{xy^2s}_{*3}-2xyst-\underline{xst^2}_{*2}-\underline{x^2yt}_{*1}-2xyst-\underline{ys^2t}_{*4} && (20)\\
=&x^2t^2-2xyst+y^2s^2 && (21)\\
=&(xt-ys)^2 && (22)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&(R.H.S)-(L.H.S) \\
=&\frac{(xt-ys)^2}{(x+y+s+t)(x+s)(y+t)} && (23)\\
\geq&\ 0 && (24)
\end{aligned}
$$

が示された。 □

定理 1.7.

$$H_n \leq \hat{H}_n \tag{25}$$

が成り立つ。

Proof. n に関する数学的帰納法で示す。$n=1$ の時は、

$$H_1=\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}},\quad \hat{H}_1=\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}} \tag{26}$$

であるから、明らかに、$H_1 \leq \hat{H}_1$ が成り立つ。$n=2$ の時は、

$$H_2=\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}}+\frac{1}{\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}},\quad \hat{H}_2=\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{b_1+b_2}} \tag{27}$$

であるから、$x = a_1, y = a_2, s = b_1, t = b_2$ と置けば、これは、Lemma 1.6 のクレームそのもので、$H_2 \leq \hat{H}_2$ が成り立つ。

さて $n = k - 1$ の時に成り立つと仮定する。すると $n = k$ の時は、

$$\hat{H}_k = \frac{1}{\frac{1}{A_k} + \frac{1}{B_k}} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{A_{k-1}+a_k} + \frac{1}{B_{k-1}+b_k}} \tag{29}$$

この式に、$x = A_{k-1}, y = a_k, s = B_{k-1}, t = b_k$ として再び (補題 1.6) を適用すれば、

$$\hat{H}_k = \frac{1}{\frac{1}{A_{k-1}+a_k} + \frac{1}{B_{k-1}+b_k}}$$

$$\geq \frac{1}{\frac{1}{A_{k-1}} + \frac{1}{B_{k-1}}} + \frac{1}{\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}} \tag{30}$$

$$= \hat{H}_{k-1} + \frac{1}{\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}} \tag{31}$$

$$\geq H_{k-1} + \frac{1}{\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}} \tag{32}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} {h_i}' + {h_k}' = \sum_{i=1}^{k} h_i = H_k \tag{33}$$

ここで、式 (31) から式 (32) への変形で、帰納法の仮定を適用した。これで、$n = k$ の時も $H_k \leq \hat{H}_k$ が成立することが示された。 □

系 1.8. 調和平均と相加平均に関して、

$$\bar{h} \leq \hat{h} \tag{34}$$

が成り立つ。i.e., ペア毎に調和平均をとってから相加平均を取ったものは、先に a 列 b 列で相加平均を取ってから調和平均を取ったものより大きくはない。

Proof.

$$\bar{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} {h_i}' = \frac{2}{n}H_n \tag{35}$$

である。一方

$$\hat{h} = \frac{2}{\frac{1}{\bar{a}} + \frac{1}{\bar{b}}} \tag{36}$$

$$= \frac{2}{n} \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{A_n/n} + \frac{1}{B_n/n}\right)} \tag{37}$$

$$= \frac{2}{n} \frac{1}{\frac{1}{A_n} + \frac{1}{B_n}} = \frac{2}{n}\hat{H}_n \tag{38}$$

よって、定理より明らかに

$$\frac{2}{n}H_n \leq \frac{2}{n}\hat{H}_n \qquad \text{i.e.,} \qquad \bar{h} \leq \hat{h} \tag{39}$$

が成り立つ。 $\square$