作成日：2020 年 1 月 11 日
更新日：2020 年 1 月 12 日

トロピカル線形代数と最短経路問題

酒井高良

概要

本稿では，トロピカル線形代数と最短経路問題の関連性について整理する．トロピカル線形代数 (幾何学) は，max-plus 代数あるいは min-plus 代数と呼称される方が一般的である．本稿では，響きが良いのでトロピカルと統一して呼称する．

目次

1　はじめに

本稿では，トロピカル線形代数と最短経路問題の関連性について整理する．

2　準備

本題であるトロピカル線形代数の解説に入る前に，いくつかの数学的概念について示す．

定義 1. **モノイド**：集合 $\mathbb{R}$ とその上の二項演算：$\mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ に対し，以下に示す結合則が成立しかつ単位元 e が存在するとき，組 $\mathbb{S}, \cdot, e$ をモノイドと呼ぶ．

■結合則：　S の任意の元 a, b, c に対して，$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ を満足する

■単位元の存在　$\mathbb{S}$ の元 e が存在して，$\mathbb{S}$ の任意の元 a に対して，$a \cdot e = e \cdot a = a$ を満足する

定義 2. **半環**：以下の性質を満たす 2 つの二項演算を備えた集合 $\mathbb{R}$ を半環と呼ぶ．

1. $(\mathbb{R}, +)$ は，単位元 0 を持つ可換モノイドをなす：

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{1}$$

$$0 + a = a + 0 = 0 \tag{2}$$

$$a + b = b + a \tag{3}$$

2. $(\mathbb{R}, \cdot)$ は，単位元 1 を持つ可換モノイドをなす：

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{4}$$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \tag{5}$$

3. 乗法は加法の上に分配的である：

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \tag{6}$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \tag{7}$$

4. 0-倍は $\mathbb{R}$ を零化する：

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \tag{8}$$

3　トロピカル半環

トロピカル半環を以下のように定義する．

定義 3. トロピカル半環：実数 $\mathbb{R}$ および実数に含まれない何か ∞ からなる集合 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に，以下の二項演算 $\oplus$，$\otimes$ を与えたものをトロピカル半環と呼ぶ．

- $x \oplus y = \min(x, y)$
- $x \otimes y = x + y$

ここで，

- $\infty \oplus x = x \oplus \infty = x$
- $\infty \otimes x = x \otimes \infty = \infty$

と定義する．これにより，∞ は零元 (加法の単位元) となる．商法の単位元は 0 である．

4　トロピカル線形代数

トロピカル半環の元を要素とするベクトル，行列およびそれらの演算を以下のように定義する．

■ベクトル：　トロピカル半環の元はベクトル化できる．

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

■ベクトルの演算：　ベクトルの演算を以下のように定義する．

$$\alpha \otimes \boldsymbol{x} \equiv \alpha \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \otimes x_1 \\ \alpha \otimes x_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \oplus y_1 \\ x_1 \oplus y_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

■ベクトルの内積：　ベクトルの内積を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \equiv x_1 \otimes y_1 \oplus x_2 \otimes y_2 \tag{12}$$

■行列：　ベクトルと同様に行列も以下のように定義できる．

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

■行列積：　行列と行列の積は以下となる．

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \otimes b_{11} \oplus a_{12} \otimes b_{21} & a_{11} \otimes b_{12} \oplus a_{12} \otimes b_{22} \\ a_{21} \otimes b_{11} \oplus a_{22} \otimes b_{21} & a_{21} \otimes b_{12} \oplus a_{22} \otimes b_{22} \end{bmatrix} \tag{14}$$

■単位行列：　トロピカル行列における単位行列を考える．通常の単位行列は，

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

である．対角成分に乗法の単位元 1 を並べ，非対角成分には零元 0 を並べている．同様に，対角成分にはトロピカル半環の乗法の単位元を並べ，非対角成分にはトロピカル半環の零元を並べると以下を得る．

$$\boldsymbol{I} =\equiv \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

■行列式： 行列式は，以下のように定義される．

$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \otimes a_{22} \oplus a_{12} \otimes a_{21} \tag{17}$$

5 最短経路問題との関連

方向付きリンクの集合 $\mathcal{L}$，ノードの集合 $\mathcal{N}$ からなるネットワークを考える．各リンクにはコスト c_{ij} が定義されている．隣接行列 $\boldsymbol{A}$(ノード × ノード) の各要素 a_{ij} は以下の値をとる：

$$a_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{if} \quad (i,j) \in \mathcal{L} \\ \\ \infty & \text{if} \quad (i,j) \notin \mathcal{L} \end{cases} \tag{18}$$

補題 1. 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を，トロピカル半環の元を要素とするトロピカル行列とみなす．このとき，$\boldsymbol{A}$ をトロピカル行列の行列積で m 乗した行列 $\boldsymbol{A}^{\otimes m}$ の i, j 要素は，頂点 i から j まで m 回で到達できる経路のうち最小の距離を持つものの距離と対応する．

■証明： $m = 1$ のときは，隣接行列そのものが 1 回で到達可能なノードに対する最短距離を与えていることは明らかである．$m = r$ の時の i, j 成分を $a_{ij}^{(r)}$ とし，これが r 回のノード移動で到達可能な経路の最短距離を表しているとする．このとき，$m = r + 1$ の時の $\boldsymbol{A}^{\otimes r+1}$ における各成分 $a_{ij}^{(r+1)}$ は，

$$a_{ij}^{r+1} = \bigoplus_k a_{ik}^r \oplus a_{kj} = \min_{k \in \mathcal{N}} \{a_{ik}^r + a_{kj}\} \tag{19}$$

となる．これは，i から j まで $r+1$ 回のノード移動で到達可能な経路の最短距離である．帰納法により，補題は示された．