情報工学科 講義 ディジタル信号処理A (2025/05/01)

第4回
インパルス応答と伝達関数，安定性

情報工学科 准教授　高道 慎之介

Takamichi Laboratory
慶應義塾大学 高道研究室

ディジタル信号処理Aの授業予定 (仮)

第XX回	日付	内容（順次変わっていくので予想）
第01回	2025/04/10	イントロダクション，ディジタル信号処理
第02回	2025/04/17	フーリエ級数展開・フーリエ変換から離散フーリエ変換へ
第03回	2025/04/24	ラプラス変換から z 変換へ
第04回	**2025/05/01**	**インパルス応答と伝達関数，安定性**
第05回	2025/05/08	ディジタルフィルタ
第06回	2025/05/15	高速フーリエ変換と短時間フーリエ変換
第07回	2025/05/22	総合演習．期末試験の練習としての立ち位置．
期末試験	2025/06/??	(日程は後日アナウンス)

応用数学の復習

昨年のBの途中まで

前回の課題の解答

以下の課題についてレポートを作成し，LMS 上で提出せよ。

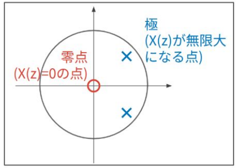
演習 (残りは課題)

- 以下の関数についてX(s) の実部・虚部をプロットし、その形状を比較・考察せよ。a, ω_0 には適当な値を使用せよ。
  - ステップ関数 ← 前のページのやつ
  - 指数関数 (a > 0)
  - 正弦波関数 (ω_0 > 0)
- sympy の関数
  - numpy と同じように定義されているケースが多い
  - sp.exp(), sp.sin(), sp.pi
- プロットする s の範囲を適宜変更せよ。

29

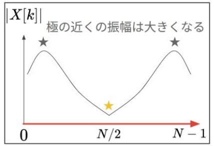
演習 (残りは課題)

- 次の離散時間信号について
  - z 変換を求めよ.
  - 極の位置を描画せよ.
  - 収束域を答えよ.
  - 極の位置から，離散フーリエ変換の振幅スペクトルの概形を描画せよ.



$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^8}\right)^k \delta[n-8k]}$$

(8サンプルごとに非零の値になり値が 1/2^8 ずつ小さくなる等比数列)



- ヒント
  - 等比数列の形（◯^k）の形に変形する.
  - 極は実数解だけでない．複素解析の授業を思い出すこと.
  - 収束域は，最も外側にある極の外側.

56

準備で力尽きたので口頭で…．すみません

本日の内容

インパルスの話

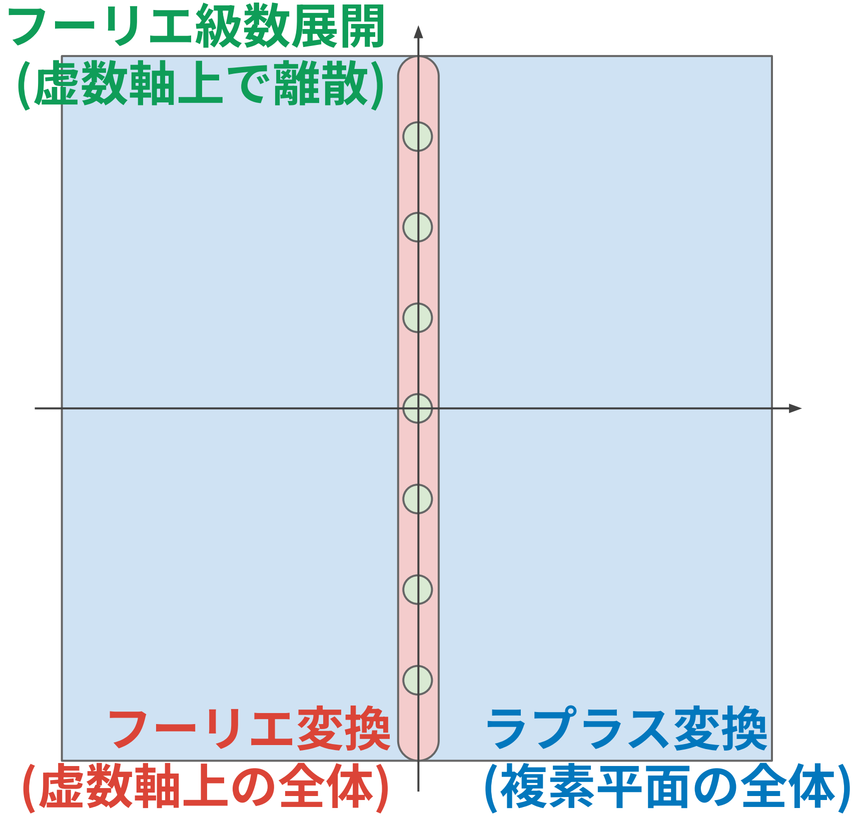
本日の内容

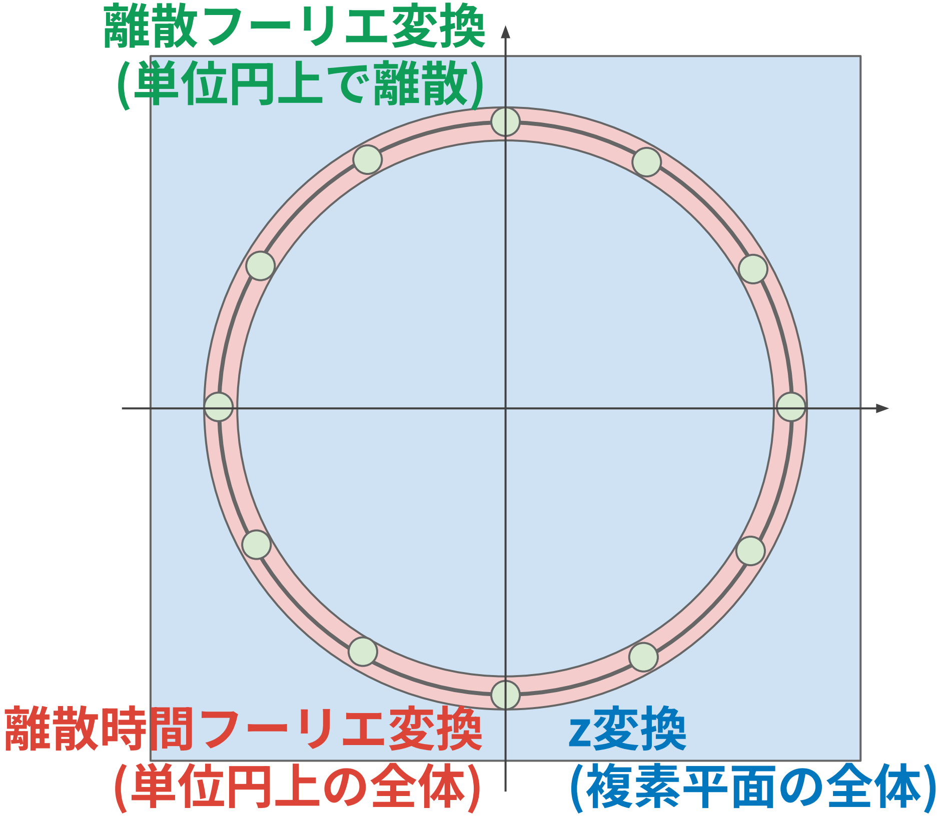
- インパルス応答と伝達関数
- 伝達関数から周波数特性を求める

ある信号をいれたら何かが出てくるシステムがあるとする。
そのシステムの特性を数式で表そう。

復習：ラプラス変換と z 変換

離散フーリエ変換との関係





ラプラス変換の定義

- ラプラス変換： 連続時間信号 → **複素**周波数

複素数　　複素数 $s = \sigma + j\omega$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad \mathcal{L}\left[x(t)\right] = X(s)$$

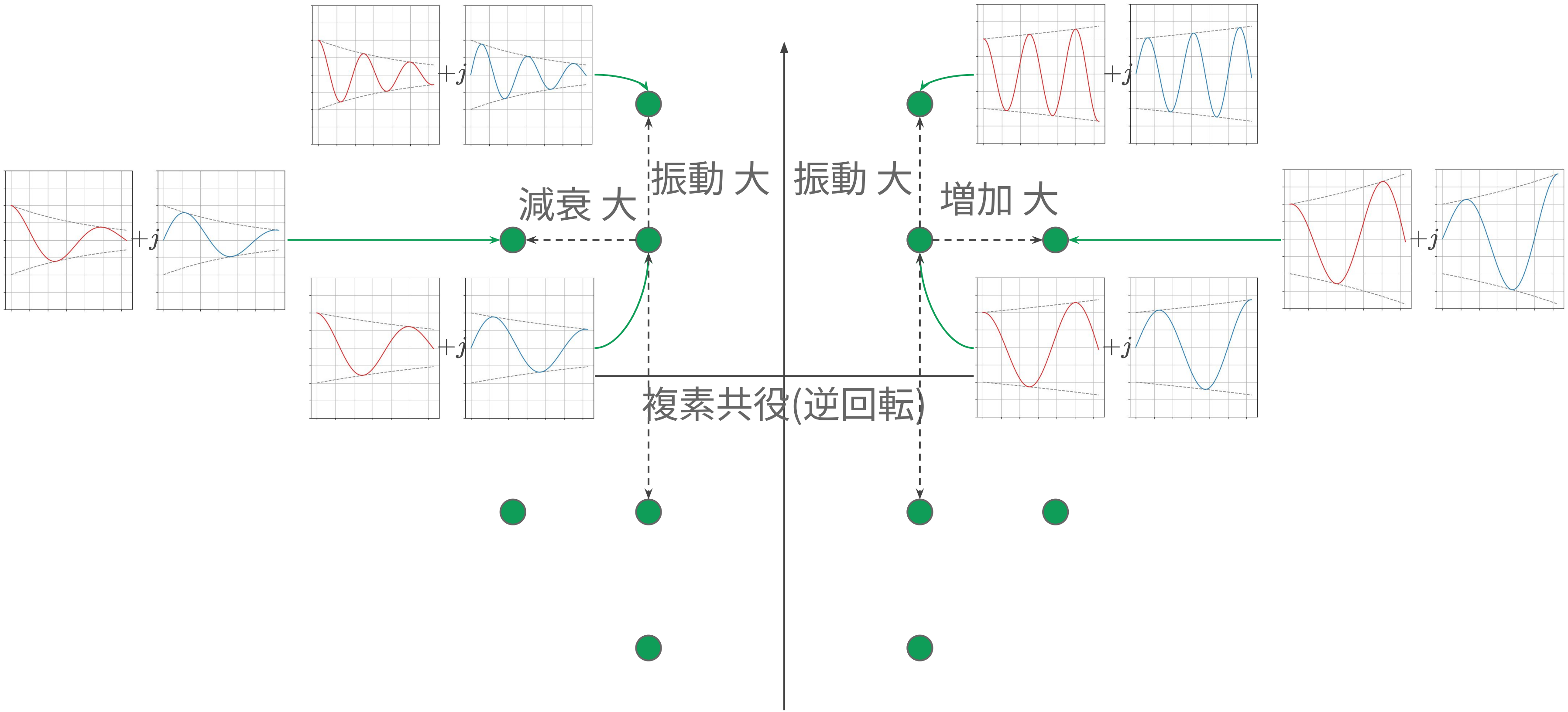
負の時刻で発散しないよう正の時刻のみを扱う

- 逆ラプラス変換： **複素**周波数 → 連続時間信号

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\exp(st)ds \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = x(t)$$

端的に言うなら…
- ラプラス変換は，時間減衰関数を導入することで，フーリエ変換できなかった信号も変換できるようにしたもの
- フーリエ変換で使われる振動だけでなく，信号の増減も表せるもの
- 減衰関数の強さで信号の増減を解析できるもの

“複素”周波数の意味するところ (s 平面)



z変換の定義

- z 変換： 離散時間信号 → 複素周波数

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\mathcal{Z}\left[x[n]\right] = X(z)$$

- 逆z 変換： 複素周波数 → 離散時間信号

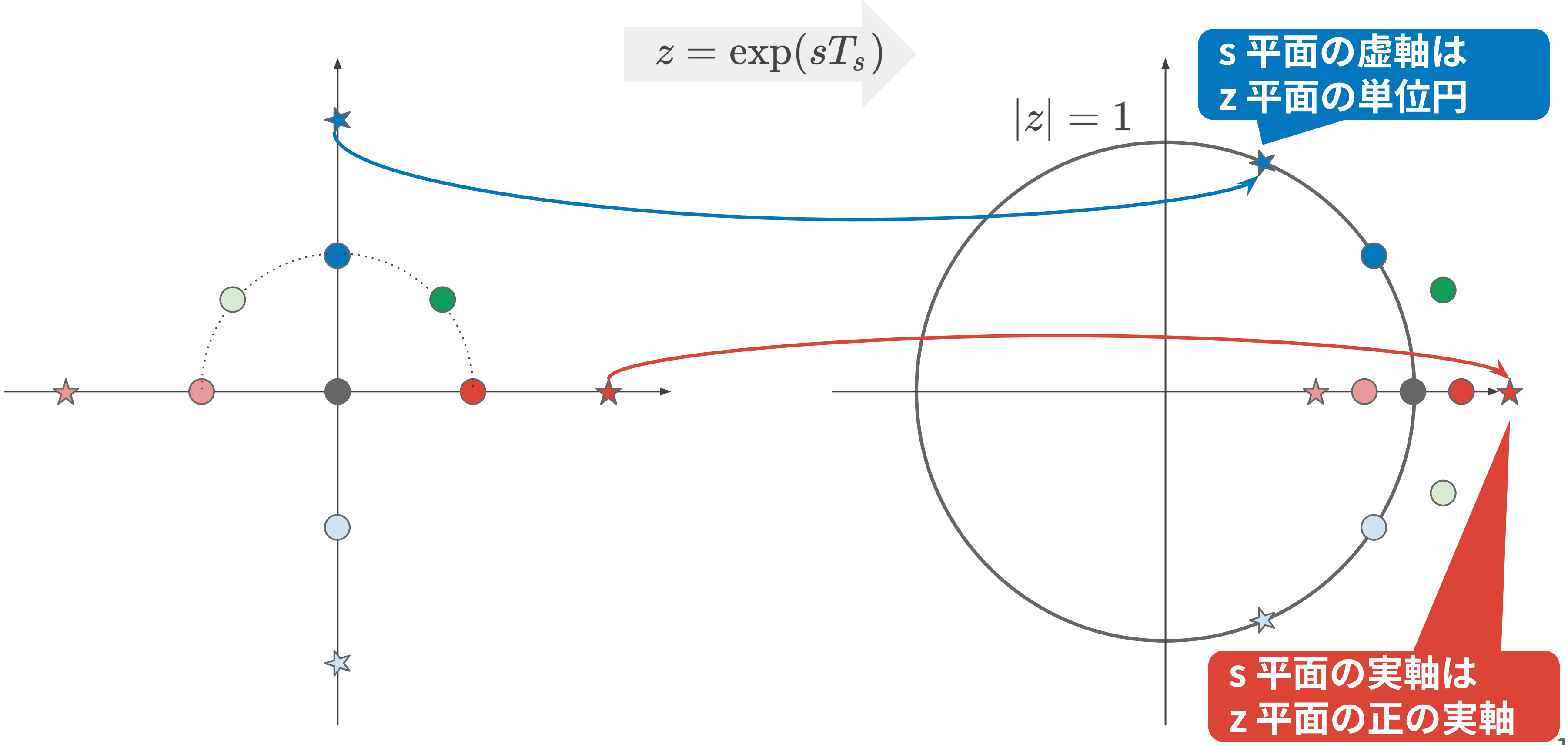
$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{C} X(z) z^{n-1} dz$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = x[n]$$

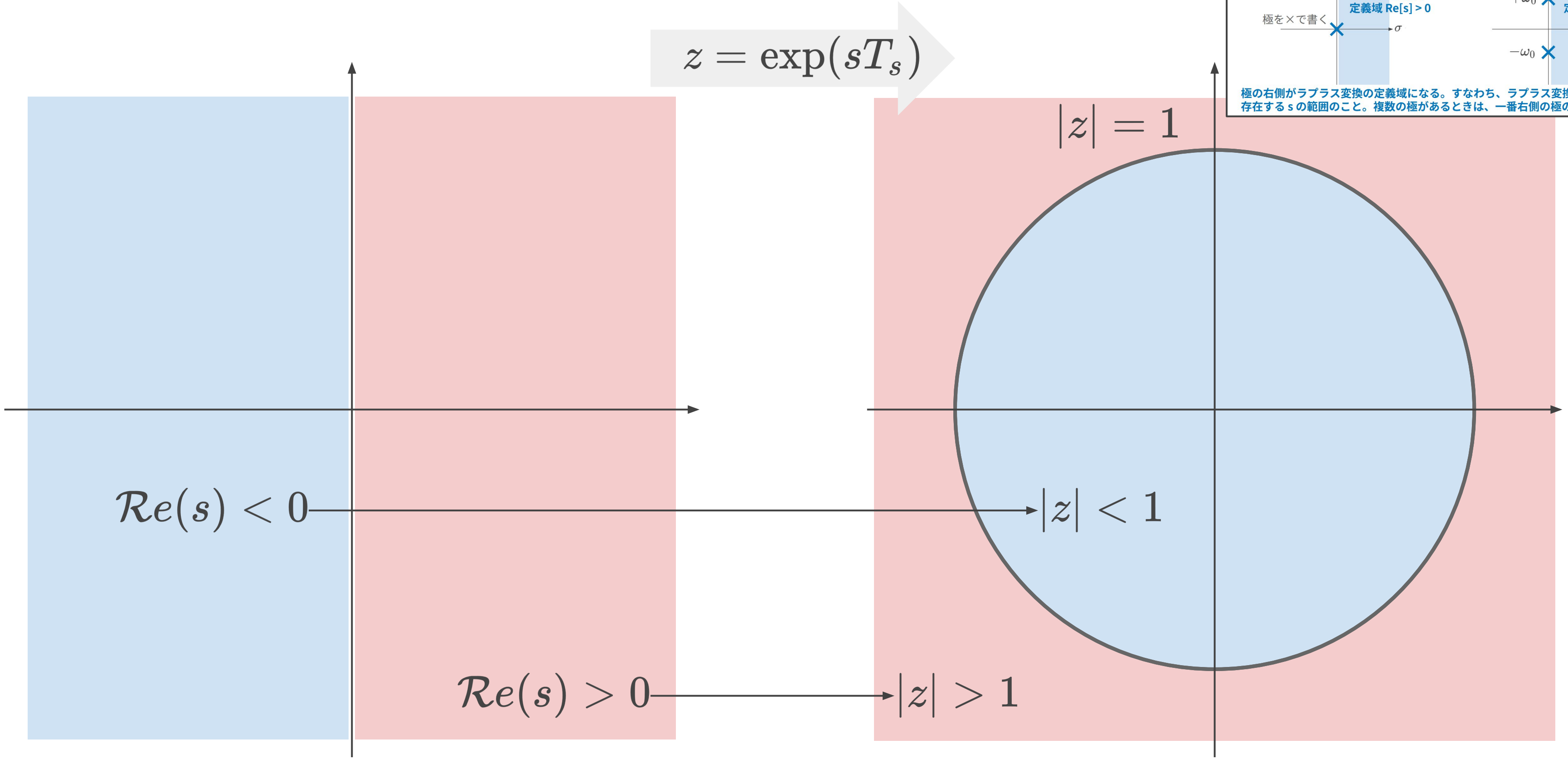
端的に言うなら…

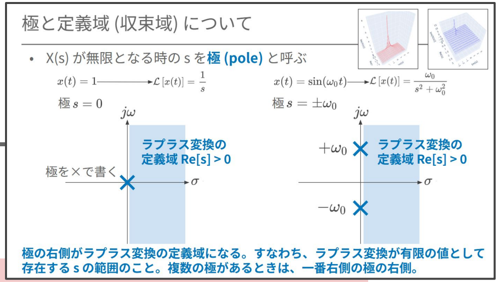
- z 変換は，ラプラス変換の離散時間信号版
- ラプラス変換と同様に，信号の増減を表現できる

s 平面と z 平面の対応



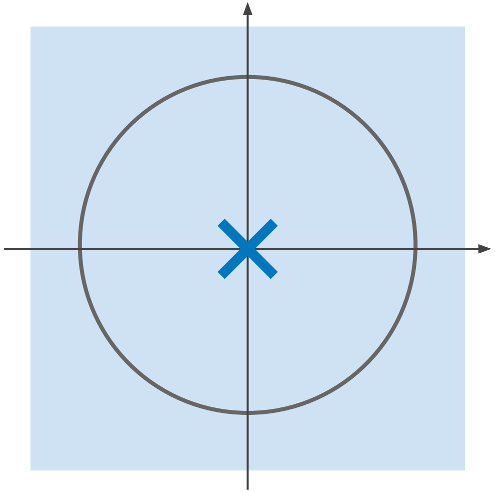
s 平面と z 平面の対応


$z = \exp(sT_s)$
$|z| = 1$
$\mathcal{R}e(s) < 0$
$|z| < 1$
$\mathcal{R}e(s) > 0$
$|z| > 1$


極と定義域 (収束域) について
X(s) が無限となる時の s を極 (pole) と呼ぶ
$x(t) = 1 \longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s}$
極 $s = 0$
$x(t) = \sin(\omega_0 t) \longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
極 $s = \pm\omega_0$
$j\omega$
σ
ラプラス変換の定義域 Re[s] > 0
極を×で書く
$+\omega_0$
$-\omega_0$
極の右側がラプラス変換の定義域になる。すなわち、ラプラス変換が有限の値として存在する s の範囲のこと。複数の極があるときは、一番右側の極の右側。

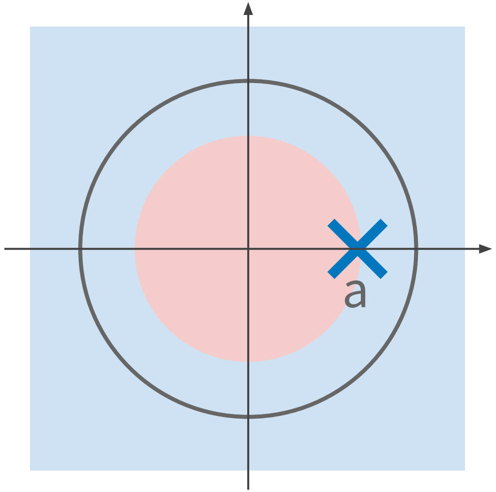
極と定義域 (収束域) について：
X(z) が無限大に発散する z が極になる．

$$\mathcal{Z}[x[n]] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$



$$\mathcal{Z}[x[n]] = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

(0 < a < 1)



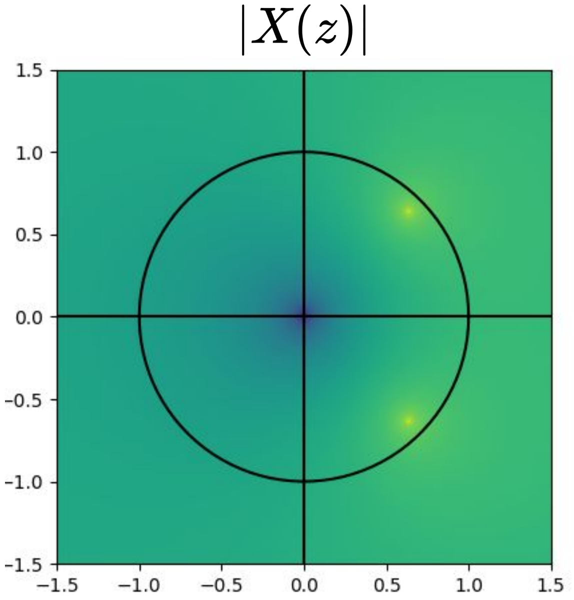
極の絶対値の外側がz変換の定義域になる。すなわち、z変換が有限の値として存在する z の範囲のこと。複数の極があるときは、一番外側の極の外側。

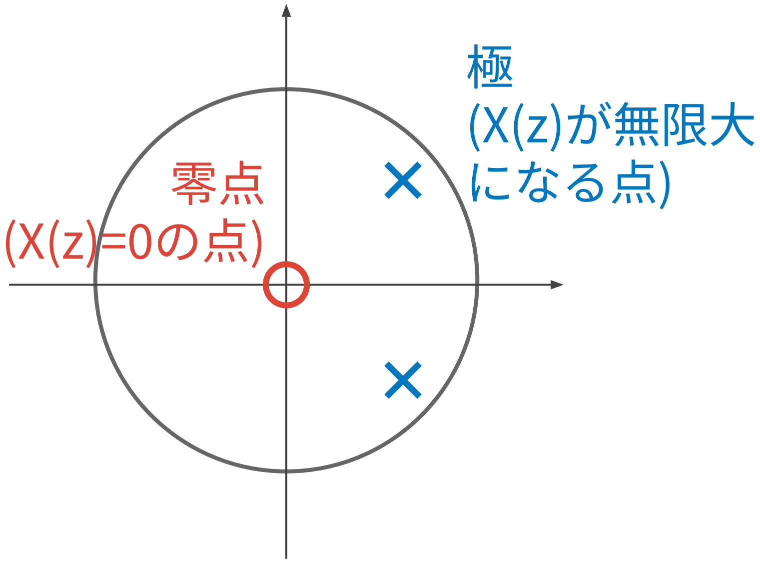
z変換の絶対値 |X(z)|

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0.9e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

|X(z)| の解析解の導出手順は概略.

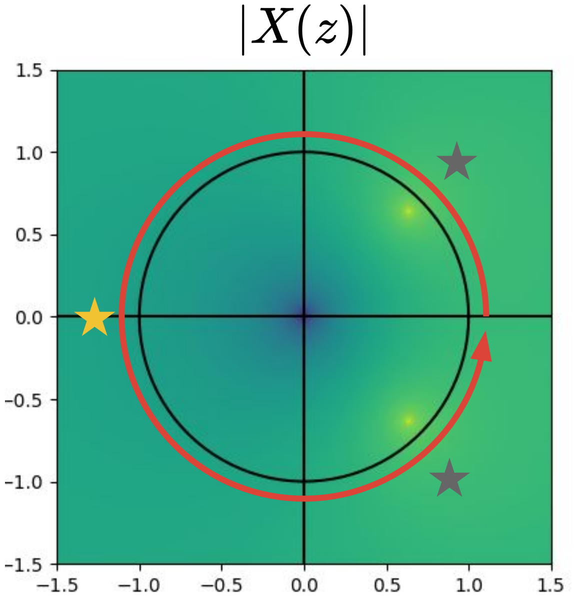
- 分母と分子に z^2 を乗算する.
- z = a + jb と置く.
- 分母と分子に，分母の複素共役を乗算して分母を実数にする

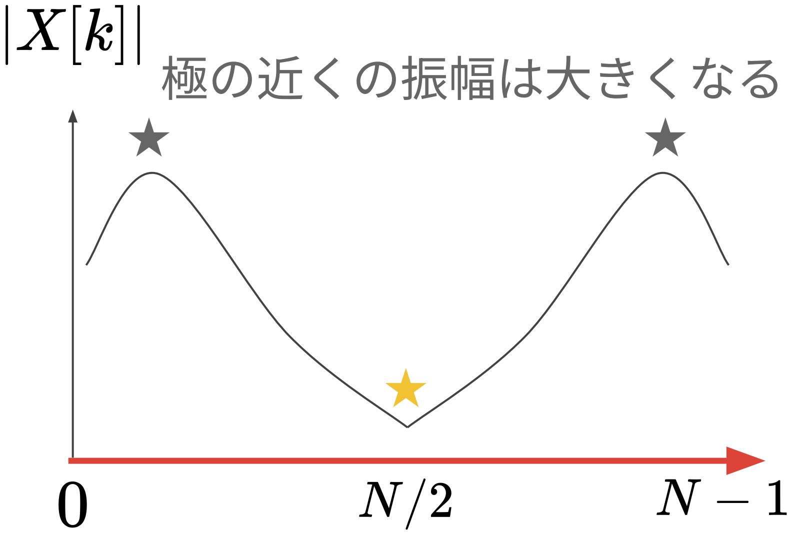




実数信号を扱う場合，極 (と零点) は実軸で線対称になる

z変換の振幅がわかれば，離散フーリエ変換の振幅スペクトルの概形がわかる

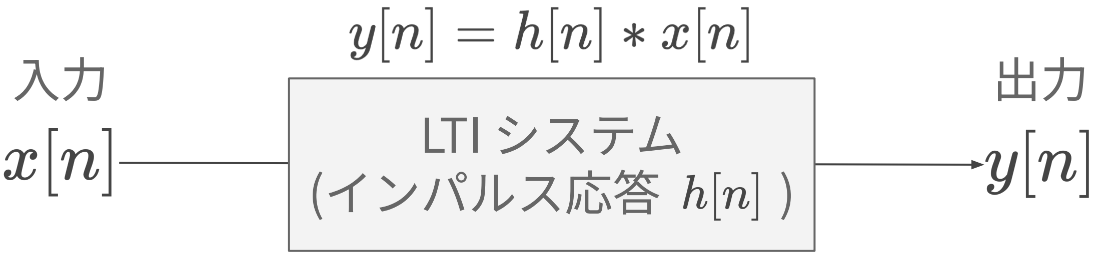




{離散時間, 離散}フーリエ変換の振幅スペクトルは単位円上の絶対値に等しい

インパルス応答と伝達関数
(Impulse response & transfer function)

LTIシステムを考える



- 何かの入力信号が入ったら何かの出力信号を出すシステムを考える．
  - x[n] = δ[n] (インパルス)のときの出力 y[n]を**インパルス応答**と呼ぶ．
  - 差分方程式で記述する．

システムの特性を
時間波形として表したもの

- 簡単のため LTI システムを考える
  - **LTI (線形時不変, Linear time-invariant)** … 入力が N 倍されると出力も N 倍され，入力が m 遅れると出力も m 遅れるシステム．
  - LTI でないものは，例えば y[n] = x[n]^2

計算してみよう：差分方程式から，インパルスを入力したときの出力を計算する

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

計算してみよう：差分方程式から，インパルスを入力したときの出力を計算する

$$y[n] = 0.8y[n-1] + x[n]$$

計算してみよう：差分方程式から，インパルスを入力したときの出力を計算する

$$y[n] = 1.2y[n-1] + x[n]$$

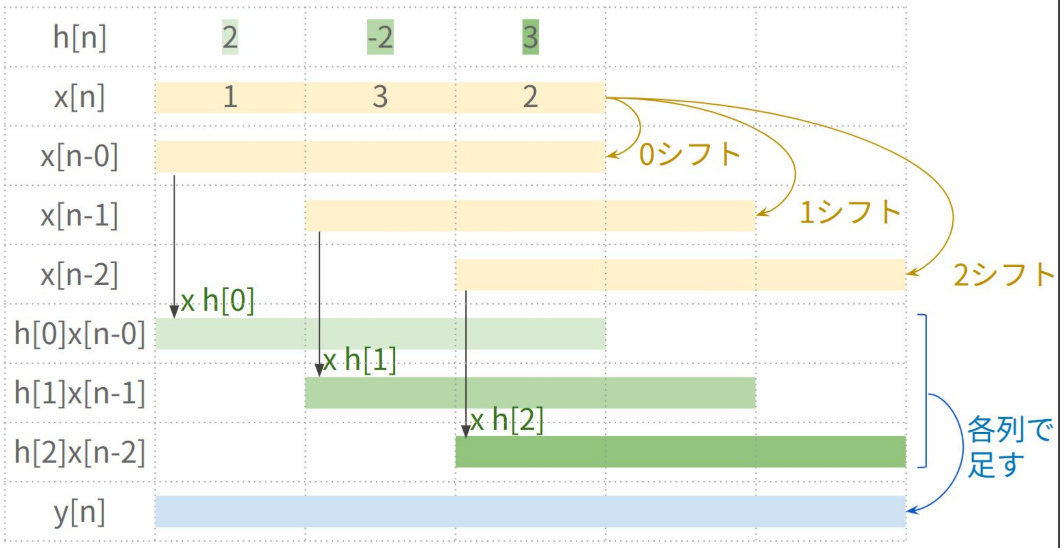
計算してみよう：差分方程式から，インパルスを入力したときの出力を計算する

$$y[n] - 1.2y[n-1] + 0.32y[n-2] = 0.5x[n] + 0.3x[n-1] + 0.1x[n-2]$$

時間領域の畳み込み演算は z 領域で乗算になる
(これはフーリエ変換，ラプラス変換でも共通する)

$$\mathcal{Z}\left[h[n] * x[n]\right] = H(z)X(z)$$

x = [1, 3, 2], h = [2, 2, 3] とする．畳み込み結果 y [n] を求めよ．



$H(z)$

$X(z)$

$X(z)z^{-0}$

$X(z)z^{-1}$

$X(z)z^{-2}$

$h[0]X(z)z^{-0}$

$h[1]X(z)z^{-1}$

$h[2]X(z)z^{-2}$

$$\underbrace{(h[0]z^{-0} + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2})}_{H(z)}X(z)$$

第1回のスライドから

差分方程式から伝達関数を求めてみよう

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

入力 $x[n]$ → LTI システム (インパルス応答 $h[n]$) → 出力 $y[n]$

z 変換　$X(z)$　$H(z)$　$Y(z)$

- インパルス応答の z 変換 H(z) を**伝達関数**と呼ぶ.
- 差分方程式から H(z) を求めることができる.
  - H(z) を逆変換するとインパルス応答になる.

システムの特性を
周波数特性として表したもの

復習：z 変換してみよう

- 単位パルス信号

$$x[n] = \delta[n] \xrightarrow{\text{基本形は 1}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1$$

- 有限長の信号

$$x[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \xrightarrow[\text{z^\{-1\}}]{\text{単位遅れは}} \mathcal{Z}[x[n]] = 4 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

- ステップ信号

$$x[n] = u[n] \xrightarrow[\text{1/(1-z^\{-1\})}]{\text{1ずつ乗算されると}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 等比数列信号

$$x[n] = a^n \xrightarrow[\text{1/(1-az^\{-1\})}]{\text{aずつ乗算されると}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- 等差数列信号

$$x[n] = n \longrightarrow \mathcal{Z}[x[n]] = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

伝達関数を求めてみよう

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \longrightarrow Y(z) = \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$y[n] = 0.8y[n-1] + x[n] \longrightarrow$$

$$y[n] = 1.2y[n-1] + x[n] \longrightarrow$$

$$y[n] - 1.2y[n-1] + 0.32y[n-2] = 0.5x[n] + 0.3x[n-1] + 0.1x[n-2]$$

$$\longrightarrow$$

復習：逆変換も可能

- 例えば

$$X(z) = \frac{7z^2 - 10z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$X(z) = \frac{7 - 10z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{7 - 10z^{-1}}{(1 - 1z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

$$X(z) = 3\frac{1}{1 - z^{-1}} + 4\frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

$$x[n] = 3u[n] + 4 \cdot 2^n$$

z 変換してみよう

- 単位パルス信号

$$x[n] = \delta[n] \xrightarrow{\text{基本形は 1}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1$$

- 有限長の信号

$$x[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \xrightarrow[\text{z\^{}\{-1\}}]{\text{単位遅れは}} \mathcal{Z}[x[n]] = 4 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

- ステップ信号

$$x[n] = u[n] \xrightarrow[\text{1/(1-z\^{}\{-1\})}]{\text{1ずつ乗算されると}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 等比数列信号

$$x[n] = a^n \xrightarrow[\text{1/(1-az\^{}\{-1\})}]{\text{aずつ乗算されると}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- 等差数列信号

$$x[n] = n \longrightarrow \mathcal{Z}[x[n]] = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

50

知っている形になれば
逆変換が楽

逆変換してインパルス応答を求めてみよう

$$y[n] - 1.2y[n-1] + 0.32y[n-2] = 0.5x[n] + 0.3x[n-1] + 0.1x[n-2]$$

- z 変換を求めると…
- 分母と分子から z の負値乗を消してみると…
- 分母を D(z) として，伝達関数を (定数) + (1次式)/ D(z) の形にすると…
- 部分分数展開して (定数) + (定数)/(1次式) + (定数)/(1次式) にすると…
- 逆変換すると…

差分方程式と伝達関数の典型例

過去から現在の入力に依存．発散とは無関係．有限長の出力．並列計算可能．

過去の出力のフィードバック．係数によって発散．無限長の出力．並列困難．

$$y[n] = \sum_m \bigcirc_m x[n-m] + \sum_l \triangle_l y[n-l]$$

入力に依存する項は零点に関係

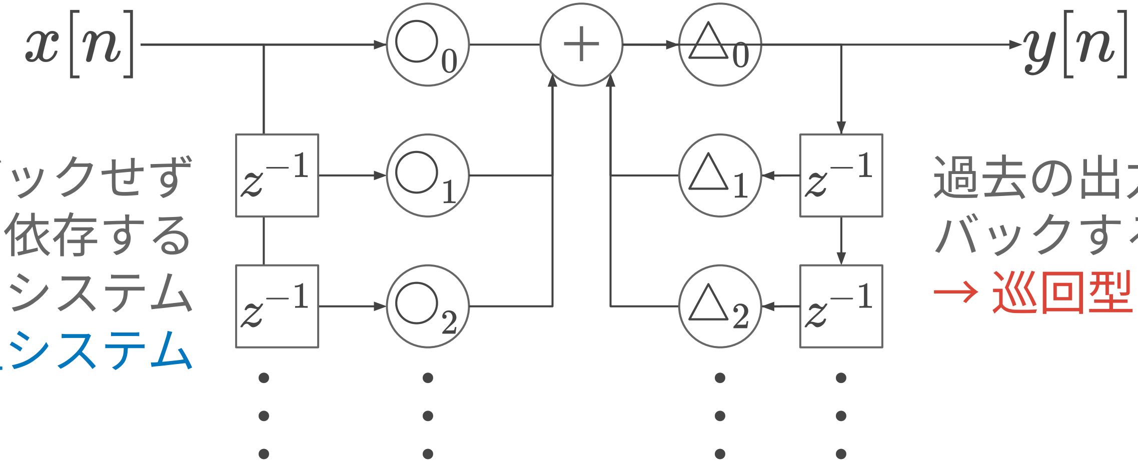
$$H(z) = \frac{\sum_m \bigcirc_m z^{-m}}{\sum_l \triangle_l z^{-l}}$$

出力フィードバックの項は極に関係

次回以降のフィルタ設計でも登場する．

こういうブロック図で書くこともできる

$$y[n] = \sum_m \bigcirc_m x[n-m] + \sum_l \triangle_l y[n-l]$$



フィードバックせず入力のみに依存するシステム
→ 非巡回型システム

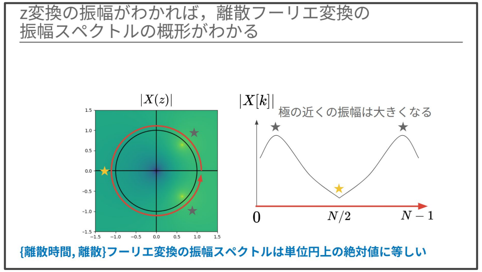
過去の出力をフィードバックするシステム
→ 巡回型システム

極と零点

零点 (H(z)=0 となる z)

$$H(z) = \frac{\sum_m \bigcirc_m z^{-m}}{\sum_l \triangle_l z^{-l}} = k\frac{\prod_m (1 - \bullet_m z^{-1})}{\prod_l (1 - \blacktriangle_l z^{-1})}$$

極 (H(z) → ∞ となる z)



- システムにおける極と零点
  - **零点**：入力に対して出力が 0 になる複素周波数
    - 極がピークに対応し，零点がノッチに対応
  - **極**： 出力が発散する複素周波数
    - 極が単位円の外側にあるとき，システムは**不安定 (unstable)**
      - 複数の極があるとき，1つでも外側にあれば不安定
    - 極が単位円の内側にあるとき，システムは**安定 (stable)**
    - (極が単位円上にあるとき，出力は振動)

演習 (残りは課題)

以下の差分方程式を持つシステムについて以下の問いに答えよ．

1. 伝達関数を求めよ
2. 零点と極を求めよ
3. システムが安定か不安定か

$$y[n] - 0.5y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n] - x[n-2]$$

$$y[n] - 2y[n-1] + 0.8y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

閑話休題：高道研における卒業研究の紹介 (テストには出ない)

ELEVATE：学習者自身の自己聴取音声で聴く講義システム

福田 航希, 阪井 瞭介, 松下 嶺佑, 國見 友亮, and 高道 慎之介

In 情報処理学会 インタラクション, Jun 2025

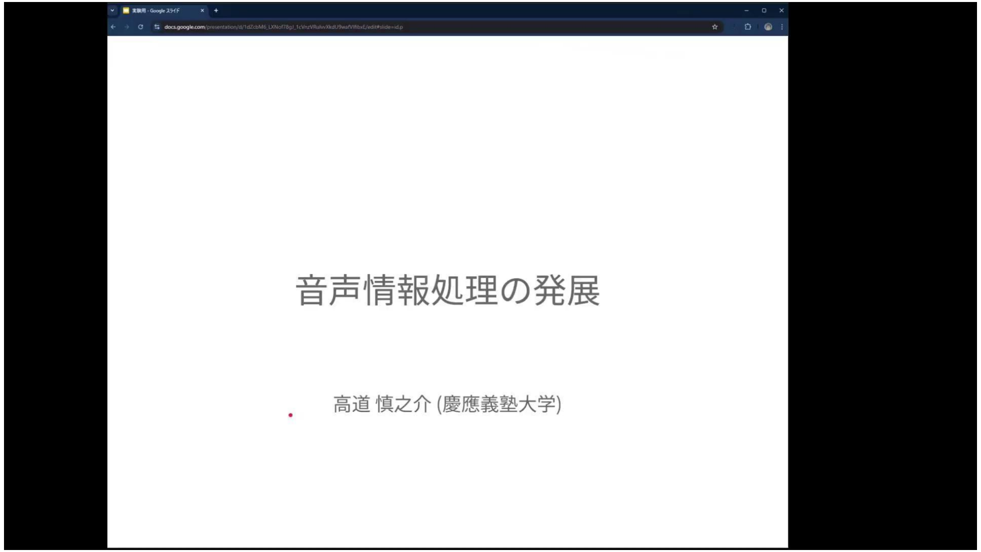
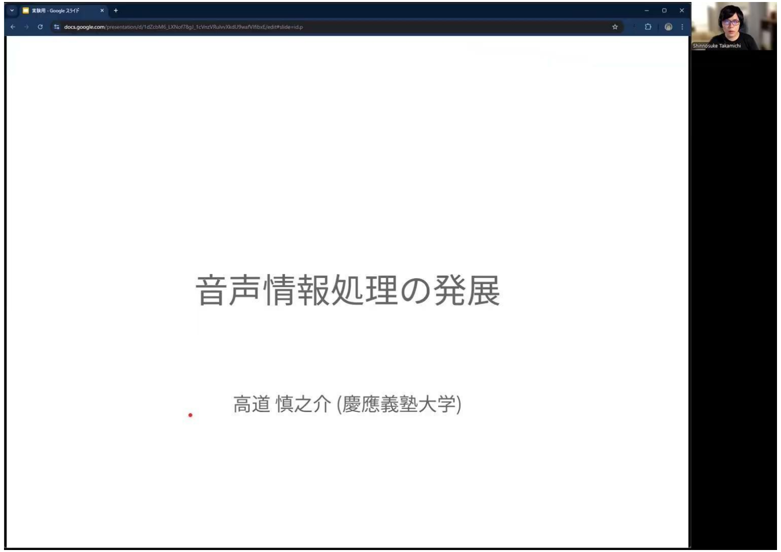
BIB PDF SLIDES

https://takamichi-lab.github.io/publications/

自問自答→自教自答：自分の声で学ぶと記憶力向上

自問自答は「自分に問う(教える)役」に対し行為主体感 (agency) を持っている．
では，教師の声が自分に (= agency を持つ声に) なったら？→ 記憶力が向上する

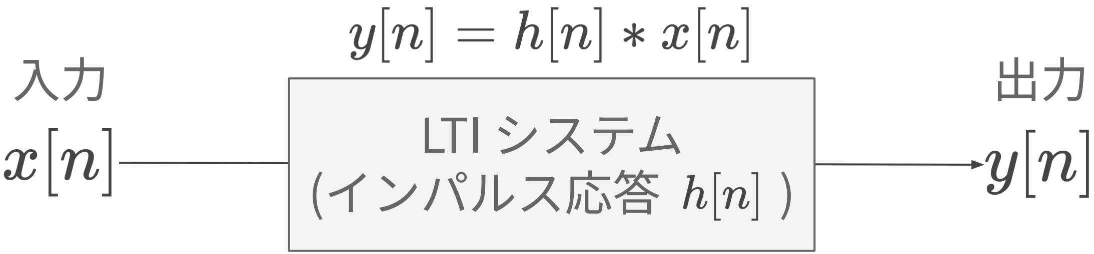
自問自答→自教自答：自分の声で学ぶと記憶力向上

通常の授業	提案する授業
	

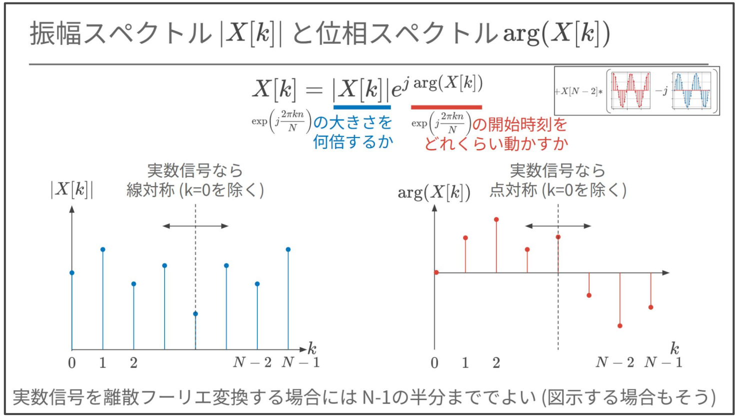
自問自答は「自分に問う(教える)役」に対し行為主体感 (agency) を持っている．
では，教師の声が自分に (= agency を持つ声に) なったら？→ 記憶力が向上する

伝達関数から周波数特性を求める
(Calculating frequency characteristics from transfer function)

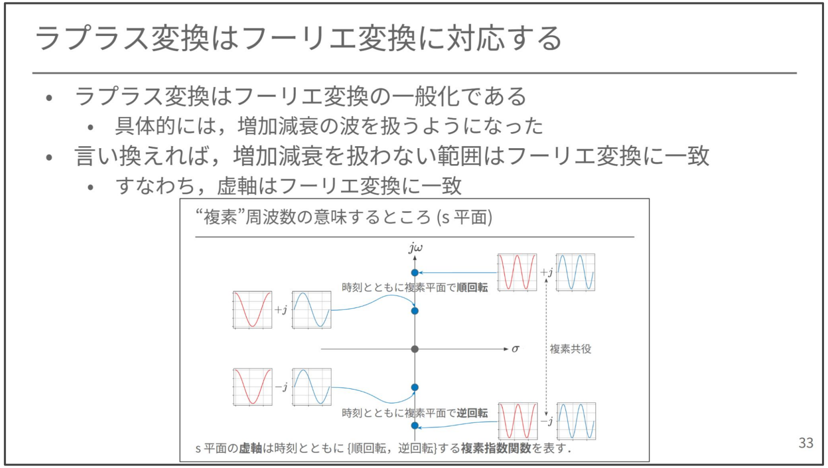
周波数特性を求める

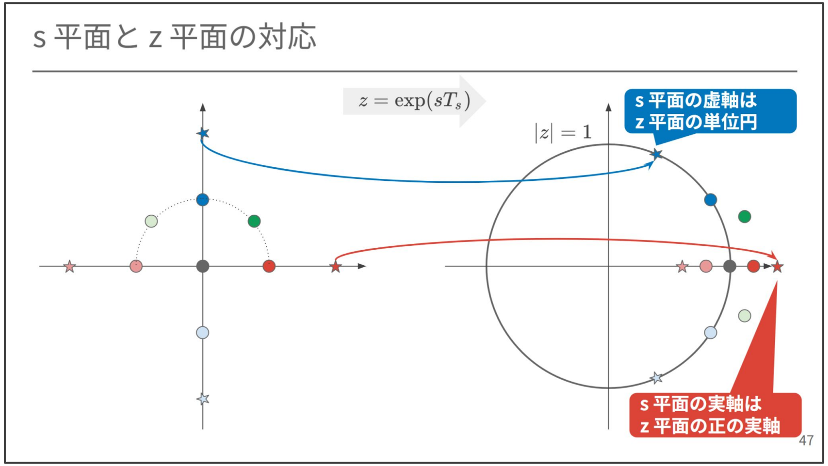


- このシステムの周波数特性 (周波数応答) を求めてみよう．具体的には
  - 振幅特性 (振幅スペクトル)
  - 位相特性 (位相スペクトル)
- を求める．これにより，(実) 周波数に対応するシステムの応答を調べられる



伝達関数から周波数特性を求める



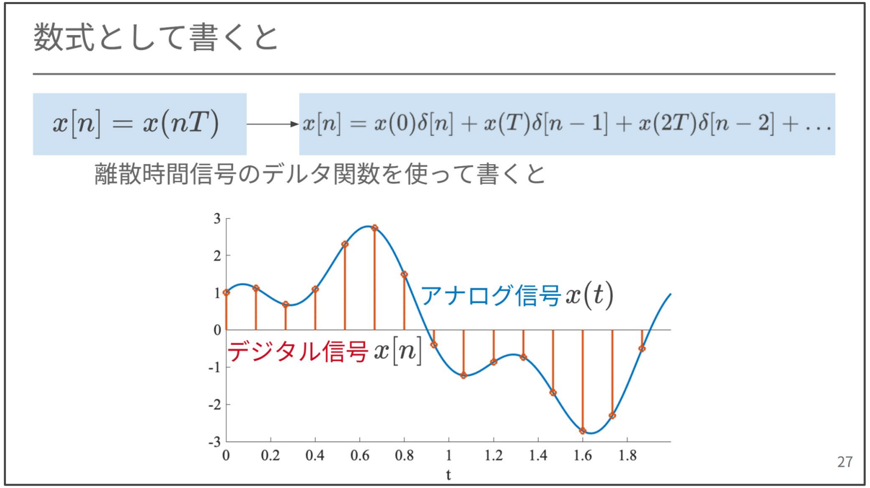


$s = j\omega$でラプラス変換→フーリエ変換　$z = \exp(sT_s)$でラプラス変換→z変換

$z = \exp(j\omega T_s)$で周波数特性になる．その絶対値が振幅特性，偏角が位相特性

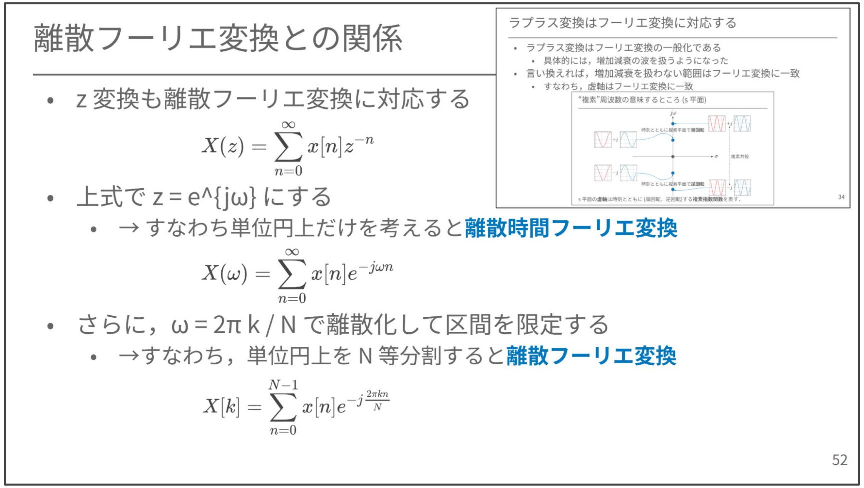
余談：(非)正規化時間と(非)正規化周波数

第1回のスライドより引用



- nT は時間 [sec] (回によってはn T_s)
- それを T (サンプリング周期)で割って正規化して n にすることで，T に依存しない時刻を新たに定義している
  → **正規化時間 (単位は[サンプル])**

第3回のスライドより引用



- 正規化時間 n にかかる ω は，正規化角周波数 (単位は [rad/サンプル])
- サンプリング周波数に対応させたい場合は，ω T (ω T_s)を周波数として扱う
  → **非正規化角周波数 (単位は [rad/sec])**

例題①：以下の伝達関数の振幅特性と位相特性を求めよ

$$H(z) = 1 + 0.5z^{-1}$$

- $z = \exp(j\omega T_s)$ に置き換える

$$H(\omega) = 1 + 0.5e^{-j\omega T_s}$$

- 実部と虚部を求める

$$\mathcal{R}e[H(\omega)] = 1 + 0.5\cos(\omega T_s),\ \ \mathcal{I}m[H(\omega)] = 1 - 0.5\sin(\omega T_s)$$

- 絶対値と偏角を求める

$$|H(\omega)| = \sqrt{(1.25 + \cos\omega)} \quad \arg H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{0.5\sin\omega}{1 + 0.5\cos\omega}$$

例題②：振幅と位相特性を計算しよう

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

- $z = \exp(j\omega T_s)$ に置き換える
- 実部と虚部を求める
- 絶対値と偏角を求める

演習 (残りは課題)

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

- $z = \exp(j\omega T_s)$ に置き換える
- 実部と虚部を求める
- 絶対値と偏角を求める

直線位相と群遅延

- 群遅延 (group delay) とは，システムを通過したときに各周波数成分に生じる時間遅延量のこと．

$$\tau(\omega) = -\frac{\partial(\text{位相特性})}{\partial\omega}$$

- 位相は 角周波数 × 時間で計算されるため，角周波数で微分することで時間が出てくる．

- 群遅延が一定，すなわち，位相特性が “●ω” であるとき，その位相特性を**直線位相 (linear phase)** と呼ぶ．

直線位相の意味

- システムが直線位相のとき，波形の崩れは生じない．これを直感的に理解するために，周波数の異なる2つの正弦波を考える．

$$\sin(\omega_1 t) \qquad \sin(\omega_2 t)$$

- システムを通すことで，両方が時間 τ だけ遅れたとする．

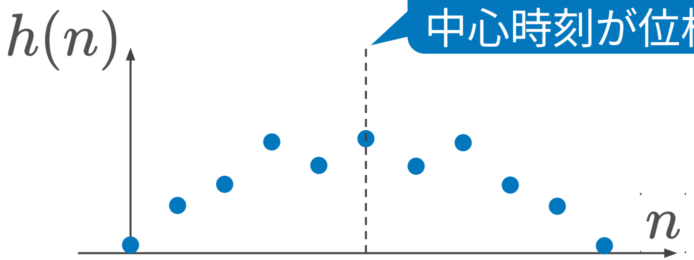
$$\sin(\omega_1(t-\tau)) = \sin(\omega_1 t - \omega_1 \tau) \qquad \sin(\omega_2(t-\tau)) = \sin(\omega_2 t - \omega_2 \tau)$$

- このときの位相特性は $-\omega_1\tau, -\omega_2\tau$ であり，すなわち直線位相となる．換言すれば，**直線位相とは，全周波数で時間遅れが一定であること**．

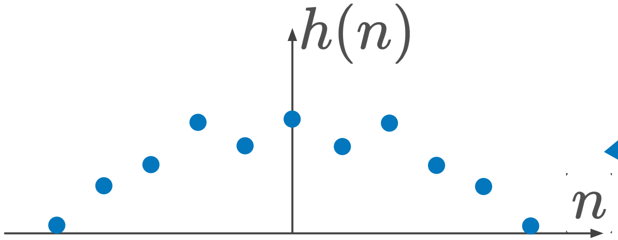
インパルス応答の対称性，零位相

- インパルス応答の形状が中心時刻で線対称なら，そのシステムの位相特性は直線位相である．

線対称なら複素共役の exp 項が現れ，
中心時刻が位相特性に現れる (前述の例題②)



- 中心時刻が 0 かつ左右対称のとき，位相特性は零位相 (全ての周波数で位相が 0) となる．



直線位相のインパルス応答を
時間シフトしても直線位相

まとめ
(matome)

まとめ

- インパルス応答と伝達関数
  - インパルス応答：インパルスを入力したときの出力
    - システムの特性を時間領域で表現したもの
  - 伝達関数：インパルス応答の z 変換
    - システムの特性を複素周波数領域で表現したもの
    - 極がシステムの安定性を決める

- 伝達関数から周波数特性を求める
  - z 変換の z を置き換えて、単位円上の周波数のみを扱う
  - 絶対値が振幅、偏角が位相。
  - 位相が直線的であるとき直線位相と呼び、そのシステムは、全ての周波数で同じ時刻だけ遅れて信号が出力される。

課題
(exercise)

演習

スライド中の「演習 (残りは課題)」の2問

→ **前半の 1 問だけ回答せよ**