情報工学科 講義 ディジタル信号処理A (2025/05/08)

第5回
フィルタ

情報工学科 准教授　高道 慎之介

ディジタル信号処理Aの授業予定 (仮)

第XX回	日付	内容（順次変わっていくので予想）
第01回	2025/04/10	イントロダクション，ディジタル信号処理
第02回	2025/04/17	フーリエ級数展開・フーリエ変換から離散フーリエ変換へ
第03回	2025/04/24	ラプラス変換からｚ変換へ
第04回	2025/05/01	インパルス応答と伝達関数，安定性
第05回	**2025/05/08**	**ディジタルフィルタ**
第06回	2025/05/15	高速フーリエ変換と短時間フーリエ変換
第07回	2025/05/22	総合演習．期末試験の練習としての立ち位置．
期末試験	2025/06/??	(日程は後日アナウンス)

応用数学の復習

昨年のBの途中まで

前回の課題の解答

教員の不手際で提出リンクが締切日当日 (水曜) まで開いていませんでした．
そのため，今回に限り締切を金曜までに設定してあります．

以下の課題についてレポートを作成し，LMS 上で提出せよ。

演習 (残りは課題)

以下の差分方程式を持つシステムについて以下の問いに答えよ．

1. 伝達関数を求めよ
2. 零点と極を求めよ
3. システムが安定か不安定か

$$y[n] - 0.5y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n] - x[n-2]$$

$$y[n] - 2y[n-1] + 0.8y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

概要だけ説明

$$y[n] - 0.5y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n] - x[n-2]$$

$$y[n] - 2y[n-1] + 0.8y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

1. 伝達関数は z 変換して (2次式) / (2次式) になるはず.
2. 分子と分母のそれぞれを因数分解．分子 = 0 で零点，分母 = 0 で極.
   a. 複素数解になるので注意.
3. システムが安定か否かは，極の半径に依存．一番外側の極が単位円より外側にあるなら不安定．それ以外なら安定.
   a. 零点の位置は無関係.
   b. 1問目は安定，2問目は不安定 (だったはず)

本日の内容

エフェクタ (フィルタ) の話

https://www.amazon.co.jp/Roland-%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%83%89-VT-4-%E3%83%9C%E3%82%A4%E3%82%B9%E3%83%88%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%82%B9%E3%83%95%E3%82%A9%E3%83%BC%E3%83%9E%E3%83%BC-%E3%80%90%E4%B8%A6%E8%A1%8C%E8%BC%B8%E5%85%A5%E3%80%91/dp/B07JKLMDGX

こんなフィルタも

これもフィルタ

本日の内容

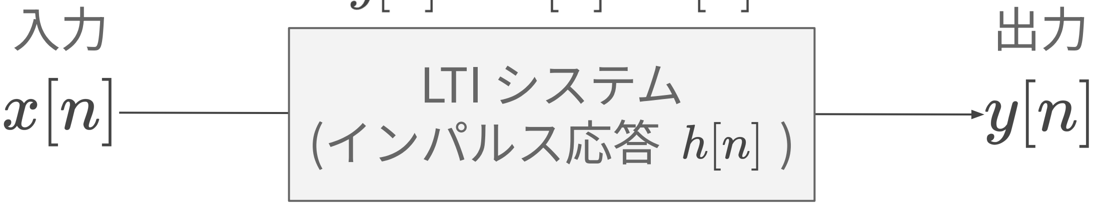
- 伝達関数から周波数特性を求める
- ディジタルフィルタ
- バターワースフィルタ
- アナログフィルタからディジタルフィルタを作る

フィルタの型と種類を理解しよう

復習：インパルス応答と伝達関数

LTIシステムを考える

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

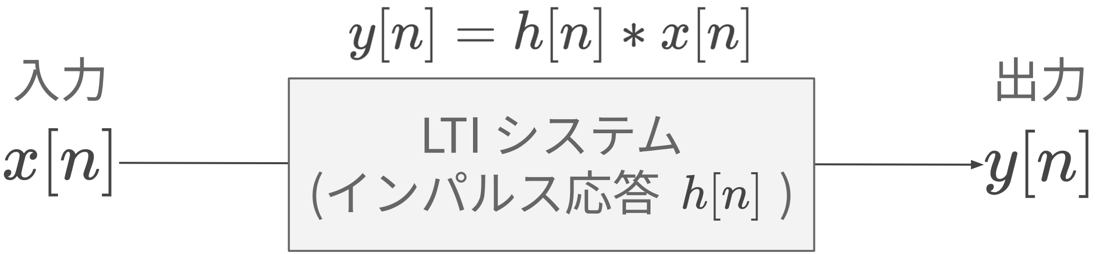


- 何かの入力信号が入ったら何かの出力信号を出すシステムを考える.
  - x[n] = δ[n] (インパルス)のときの出力 y[n]を**インパルス応答**と呼ぶ.
  - 差分方程式で記述する.

システムの特性を
時間波形として表したもの

- 簡単のため LTI システムを考える
  - **LTI (線形時不変, Linear time-invariant)** … 入力が N 倍されると出力も N 倍され，入力が m 遅れると出力も m 遅れるシステム.
  - LTI でないものは，例えば y[n] = x[n]^2

差分方程式から伝達関数を求めてみよう



z 変換　$X(z)$　$H(z)$　$Y(z)$

- インパルス応答の z 変換 H(z) を**伝達関数**と呼ぶ.
- 差分方程式から H(z) を求めることができる.
  - H(z) を逆変換するとインパルス応答になる.

システムの特性を
周波数特性として表したもの

差分方程式と伝達関数の典型例

過去から現在の入力に依存．発散とは無関係．有限長の出力．並列計算可能．

過去の出力のフィードバック．係数によって発散．無限長の出力．並列困難．

$$y[n] = \sum_m \bigcirc_m x[n-m] + \sum_l \triangle_l y[n-l]$$

入力に依存する項は零点に関係

$$H(z) = \frac{\sum_m \bigcirc_m z^{-m}}{\sum_l \triangle_l z^{-l}}$$

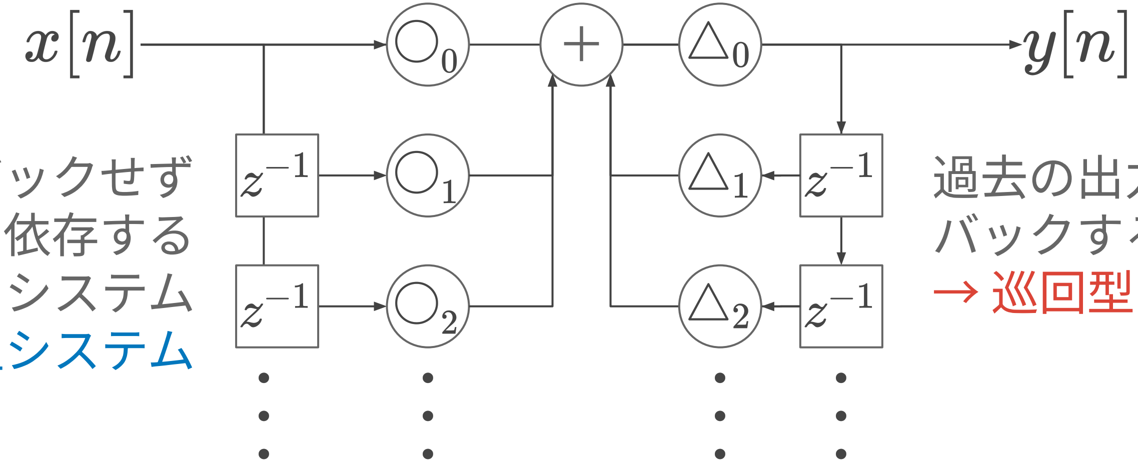
出力フィードバックの項は極に関係

次回以降のフィルタ設計でも登場する．

こういうブロック図で書くこともできる

$$y[n] = \sum_m \bigcirc_m x[n-m] + \sum_l \triangle_l y[n-l]$$

フィードバックせず
入力のみに依存する
システム
→ 非巡回型システム



過去の出力をフィード
バックするシステム
→ 巡回型システム

極と零点

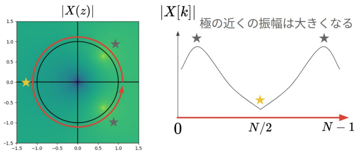
零点 (H(z)=0 となる z)

$$H(z) = \frac{\sum_m \bigcirc_m z^{-m}}{\sum_l \triangle_l z^{-l}} = k \frac{\prod_m (1 - \bullet_m z^{-1})}{\prod_l (1 - \blacktriangle_l z^{-1})}$$

極 (H(z) → ∞ となる z)

- システムにおける極と零点
  - **零点**：入力に対して出力が 0 になる複素周波数
    - 極がピークに対応し，零点がノッチに対応
  - **極**： 出力が発散する複素周波数
    - 極が単位円の外側にあるとき，システムは**不安定 (unstable)**
      - 複数の極があるとき，1つでも外側にあれば不安定
    - 極が単位円の内側にあるとき，システムは**安定 (stable)**
    - (極が単位円上にあるとき，出力は振動)

z変換の振幅がわかれば，離散フーリエ変換の
振幅スペクトルの概形がわかる



{離散時間, 離散}フーリエ変換の振幅スペクトルは単位円上の絶対値に等しい

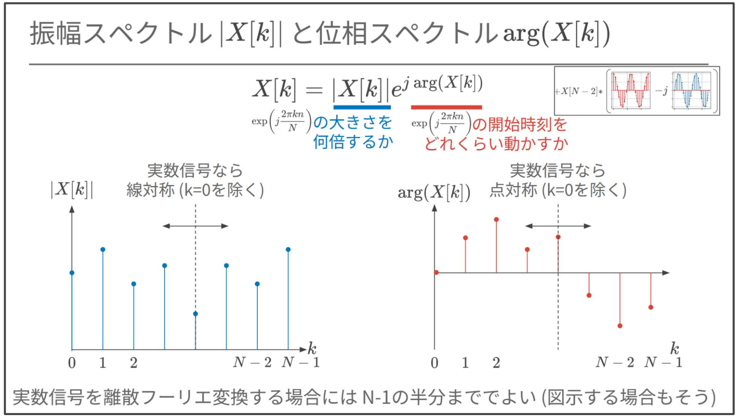
伝達関数から周波数特性を求める
(Calculating frequency characteristics from transfer function)

周波数特性を求める

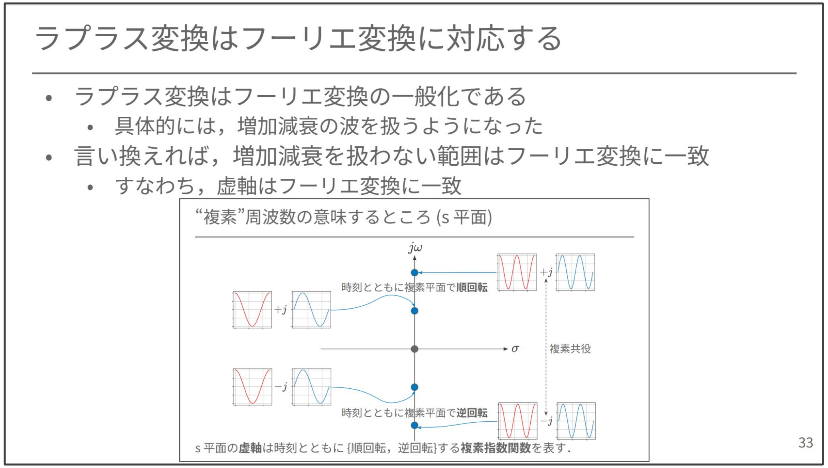
$$y[n] = h[n] * x[n]$$

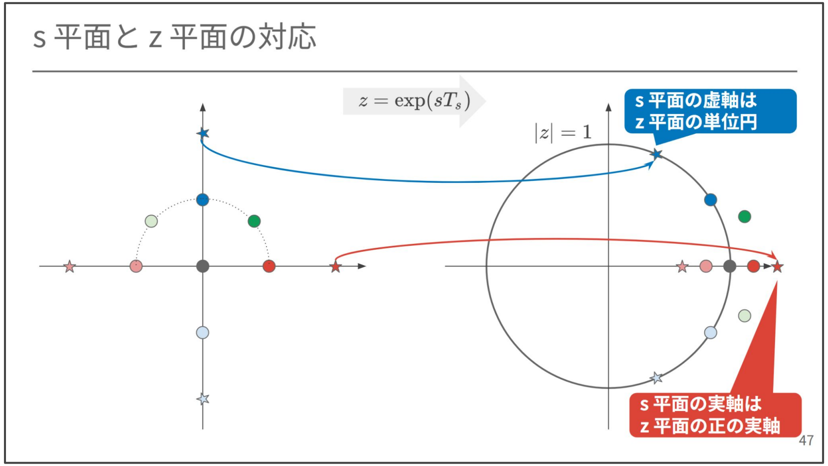
入力 $x[n]$ → LTI システム (インパルス応答 $h[n]$) → 出力 $y[n]$

- このシステムの周波数特性 (周波数応答) を求めてみよう．具体的には
  - 振幅特性 (振幅スペクトル)
  - 位相特性 (位相スペクトル)
- を求める．これにより，(実) 周波数に対応するシステムの応答を調べられる



伝達関数から周波数特性を求める



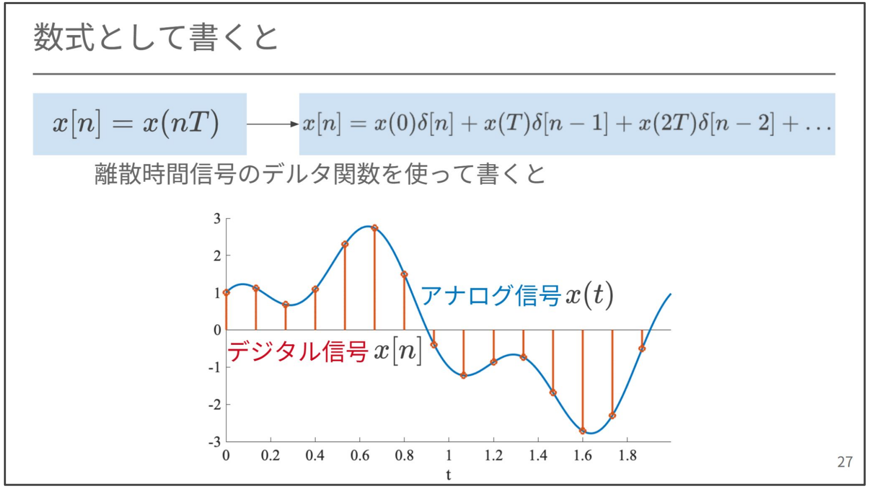


$s = j\omega$でラプラス変換→フーリエ変換 $z = \exp(sT_s)$でラプラス変換→z変換

$z = \exp(j\omega T_s)$で周波数特性になる．その絶対値が振幅特性，偏角が位相特性

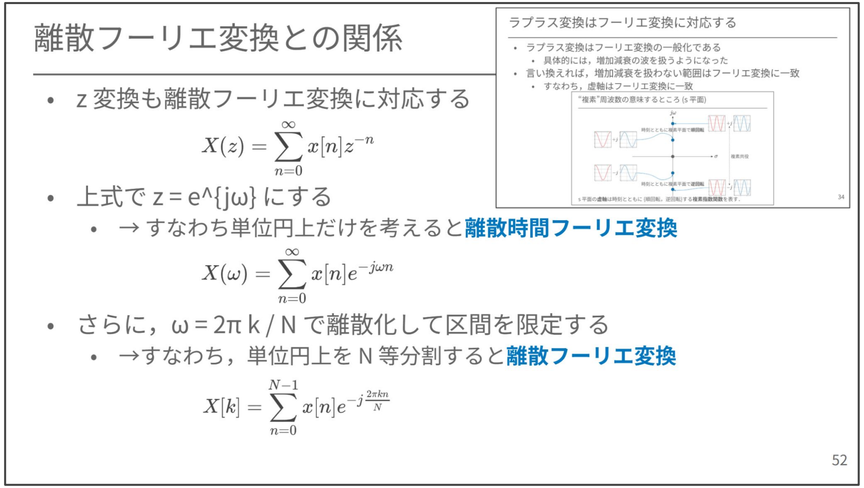
余談：(非)正規化時間と(非)正規化周波数

第1回のスライドより引用



- nT は時間 [sec] (回によってはn T_s)
- それを T (サンプリング周期)で割って正規化して n にすることで，T に依存しない時刻を新たに定義している
  → **正規化時間 (単位は[サンプル])**

第3回のスライドより引用



- 正規化時間 n にかかる ω は，正規化角周波数 (単位は [rad/サンプル])
- サンプリング周波数に対応させたい場合は，ω T (ω T_s)を周波数として扱う
  → **非正規化角周波数 (単位は [rad/sec])**

例題①：以下の伝達関数の振幅特性と位相特性を求めよ

$$H(z) = 1 + 0.5z^{-1}$$

- $z = \exp(j\omega T_s)$ に置き換える

$$H(\omega) = 1 + 0.5e^{-j\omega T_s}$$

- 実部と虚部を求める

$$\mathcal{R}e[H(\omega)] = 1 + 0.5\cos(\omega T_s),\ \ \mathcal{I}m[H(\omega)] = 1 - 0.5\sin(\omega T_s)$$

- 絶対値と偏角を求める

$$|H(\omega)| = \sqrt{(1.25 + \cos\omega)}\ \ \arg H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{0.5\sin\omega}{1 + 0.5\cos\omega}$$

例題②：振幅と位相特性を計算しよう

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

- $z = \exp(j\omega T_s)$ に置き換える
- 実部と虚部を求める
- 絶対値と偏角を求める

演習 (残りは課題)

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

- $z = \exp(j\omega T_s)$ に置き換える
- 実部と虚部を求める
- 絶対値と偏角を求める

直線位相と群遅延

- 群遅延 (group delay) とは，システムを通過したときに各周波数成分に生じる時間遅延量のこと．

$$\tau(\omega) = -\frac{\partial(\text{位相特性})}{\partial\omega}$$

- 位相は 角周波数 × 時間で計算されるため，角周波数で微分することで時間が出てくる．

- 群遅延が一定，すなわち，位相特性が “●ω” であるとき，その位相特性を**直線位相 (linear phase)** と呼ぶ．

直線位相の意味

- システムが直線位相のとき，波形の崩れは生じない．これを直感的に理解するために，周波数の異なる2つの正弦波を考える．

$$\sin(\omega_1 t) \qquad \sin(\omega_2 t)$$

- システムを通すことで，両方が時間τだけ遅れたとする．

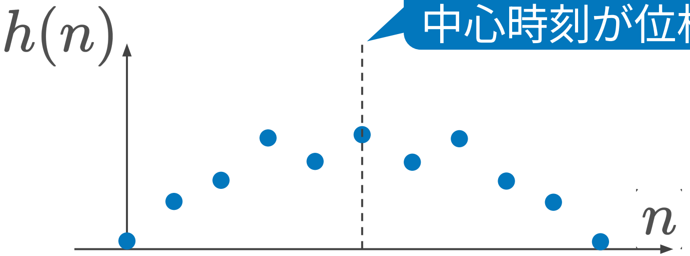
$$\sin(\omega_1(t-\tau)) = \sin(\omega_1 t - \omega_1 \tau) \qquad \sin(\omega_2(t-\tau)) = \sin(\omega_2 t - \omega_2 \tau)$$

- このときの位相特性は$-\omega_1\tau, -\omega_2\tau$であり，すなわち直線位相となる．換言すれば，**直線位相とは，全周波数で時間遅れが一定であること**．

インパルス応答の対称性，零位相

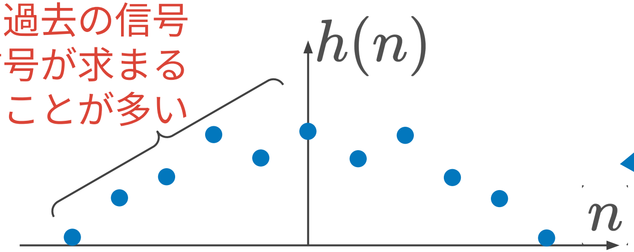
- インパルス応答の形状が中心時刻で線対称なら，そのシステムの位相特性は直線位相である．

線対称なら複素共役の exp 項が現れ，
中心時刻が位相特性に現れる (前述の例題②)



- 中心時刻が 0 かつ左右対称のとき，位相特性は零位相 (全ての周波数で位相が 0) となる．

零位相は因果性 (現在と過去の信号だけから，現在の信号が求まる性質) を満たさないことが多い



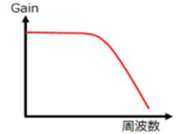
直線位相のインパルス応答を
時間シフトしても直線位相

ディジタルフィルタ
(digital filter)

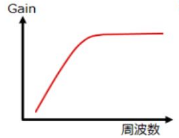
どの周波数を強めるか／弱めるかを決めるフィルタを **周波数選択性フィルタ**と呼ぶ.

入力 $x[n]$ → 周波数選択性フィルタ $h[n]$ → $y[n]$ 出力

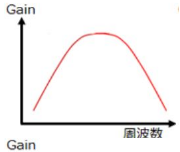
周波数選択フィルタは 5 種類に大別される．Gain は |H(ω)| のこと



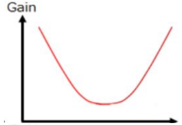
低域通過フィルタ (low pass filter, LPF)：低周波数を通過させ，高周波数を遮断するフィルタ．高周波数を遮断することを強調してハイカットフィルタとも言う



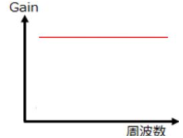
高域通過フィルタ (high pass filter, HPF)：高周波数を通過させ，低周波数を遮断するフィルタ．低周波数を遮断することを強調してローカットフィルタとも言う



帯域通過フィルタ (band pass filter, BPF)：中間帯域を通過させるフィルタ



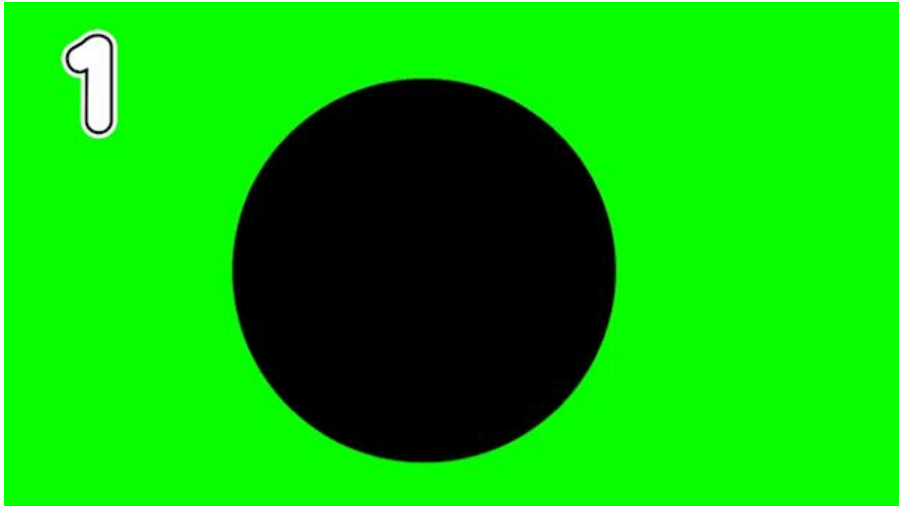
帯域遮断フィルタ (band elimination filter, BEF)：中間帯域を遮断するフィルタ



全域通過フィルタ (all pass filter, APF)：全帯域を同一ゲインで通過させるフィルタ
[Q. これは何に使うのだろうか？]

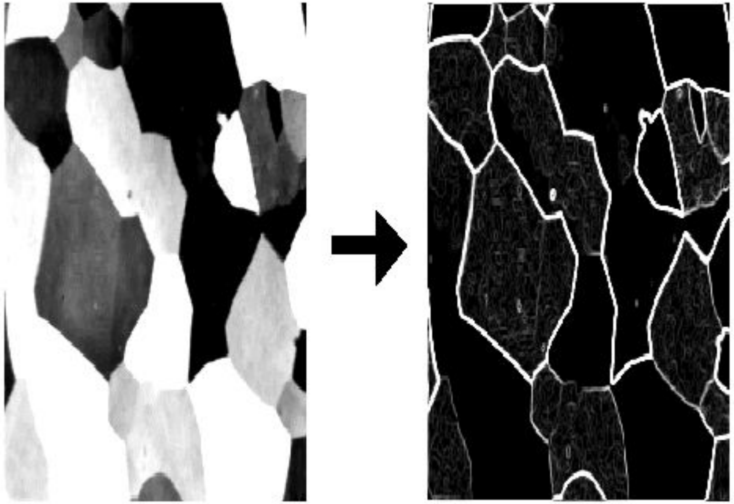
クイズ：以下の画像処理は LPF と HPF のどちら？

画像ぼかし



https://tips.clip-studio.com/ja-jp/articles/5757

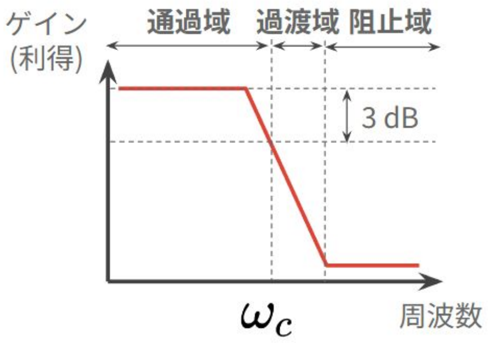
エッジ抽出



https://mc-hakuto.jp/webhelp/edge_filters.htm

LPF or HPF?

理想フィルタ．そして理想と現実．



周波数帯域ごとの名称

- **通過域**：利得が 3 dB 減衰する周波数までの範囲。この 3 dB 減衰する周波数のことを遮断周波数あるいはカットオフ周波数 (cut-off frequency) という。
- **過渡域**：通過域と阻止域の間で利得が減衰する周波数範囲
- **阻止域**：大きく減衰する周波数範囲

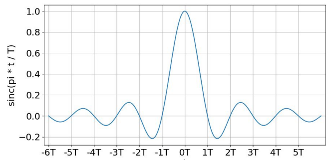
$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega \geq \omega_c \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x(t) \propto \mathrm{sinc}\left(\omega_c t\right)$$

理想フィルタ

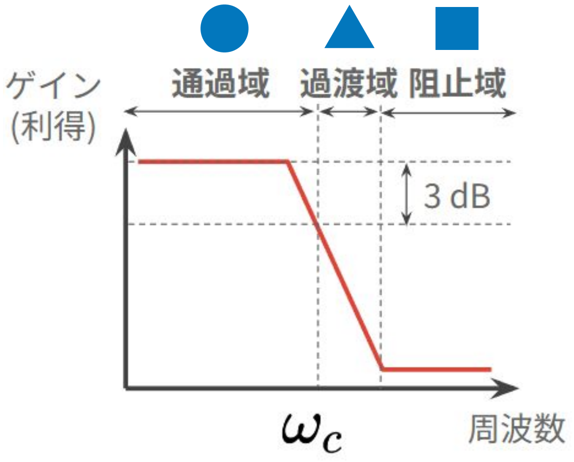
- 通過域は加工無し，過渡域の周波数幅が0，阻止域の利得は0
- このフィルタのインパルス応答は sinc 関数
  - → **時間長が無限になり実現しえない**



- 条件を緩和し，フィルタが満たすべき条件を考えよう

周波数選択フィルタの満たすべき条件．利用シーンに応じて満たすべき条件を定め，フィルタを設計すべし．

- **通過域の利得が一定であること ●**
  - 通過する周波数帯域では各周波数で同じように増幅されること
- **過渡域の利得の傾きが急峻であること ▲**
  - 中途半端に増幅される周波数帯域が狭いこと
- **阻止域の利得が 0 であること ■**
  - 遮断したい周波数帯域は完全に遮断できること
- **直線位相であること**
  - 位相特性がひずまないこと



フィルタの形状の種類

FIR (finite impulse response) filter

差分方程式

入力にのみ依存

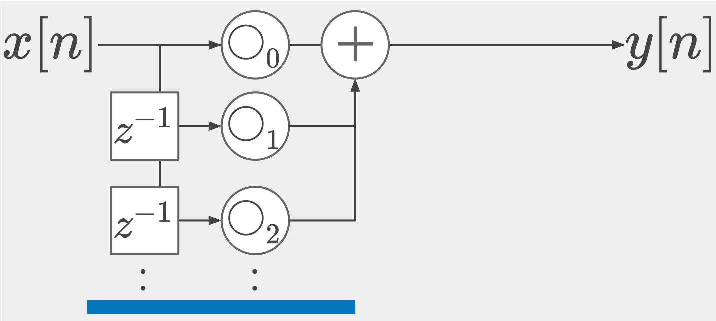
$$y[n] = \sum_m \bigcirc_m x[n-m]$$

伝達関数

分子のみ

$$H(z) = \sum_m \bigcirc_m z^{-m}$$

ブロック図



フィードフォワードのみ

IIR (infinite impulse response) filter

差分方程式

過去の出力にも依存

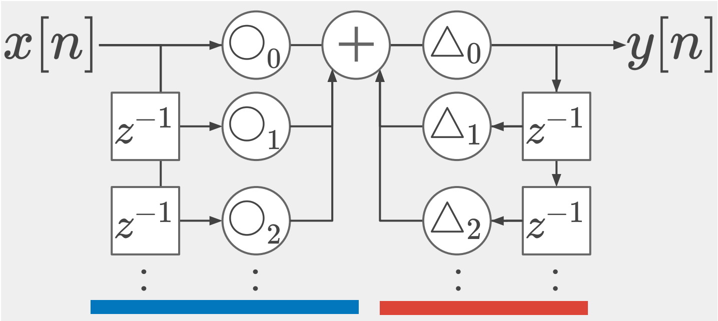
$$y[n] = \sum_m \bigcirc_m x[n-m] + \sum_l \triangle_l y[n-l]$$

伝達関数

$$H(z) = \frac{\sum_m \bigcirc_m z^{-m}}{\sum_l \triangle_l z^{-l}}$$

分母もある

ブロック図



フィードバック構造あり

フィルタの形状の種類

FIR (finite impulse response) filter

インパルス応答長
- 有限長

伝達関数と安定性
- 零点のみで**必ず安定**

位相特性
- 対称性により**線形位相を実現**できる

振幅特性
- 係数数が少ないと**急さな特性は無理**

計算量
- 振幅特性によって**係数数が多くなる**

IIR (infinite impulse response) filter

インパルス応答長
- (理論上は) 無限長

伝達関数と安定性
- 零点と極で，**極によっては不安定**

位相特性
- 一般に**非線形位相**

振幅特性
- 少量の次数で**急さな特性を表現可能**

計算量
- 同じ振幅特性なら**係数数が少ない**

余談：こういうのも一種の(アナログ)フィルタ

閑話休題：高道研における卒業研究の紹介 (テストには出ない)

ELEVATE：学習者自身の自己聴取音声で聴く講義システム

福田 航希, 阪井 瞭介, 松下 嶺佑, 國見 友亮, and 高道 慎之介

In 情報処理学会 インタラクション, Jun 2025

BIB PDF SLIDES

https://takamichi-lab.github.io/publications/

自問自答→自教自答：自分の声で学ぶと記憶力向上

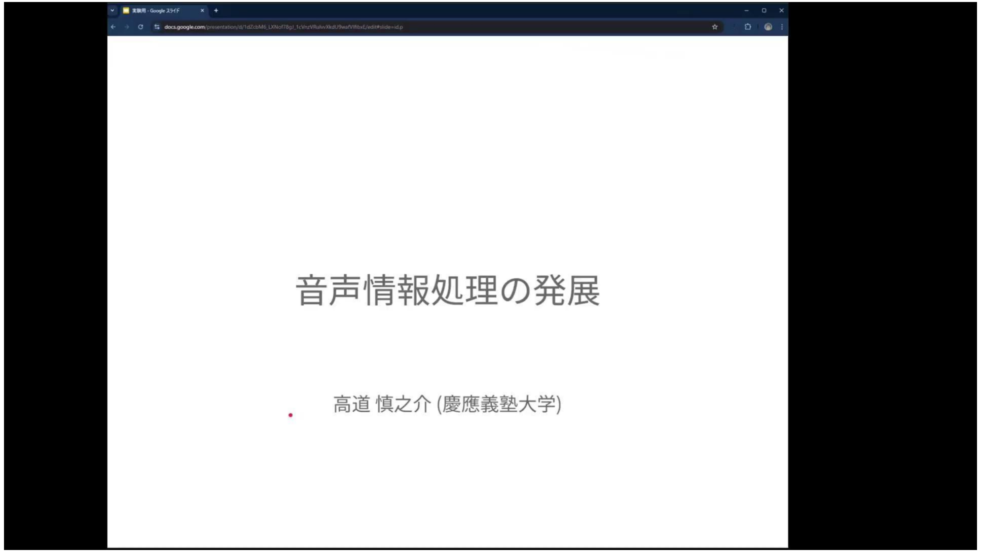
通常の授業

提案する授業

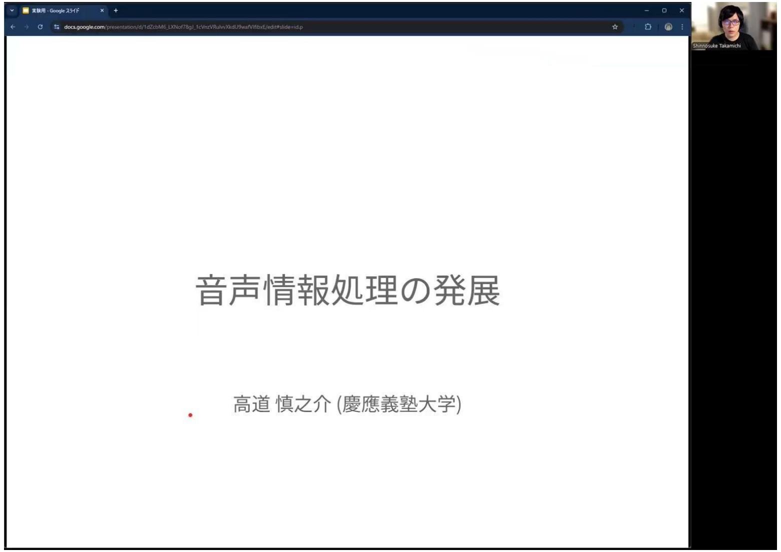
自問自答は「自分に問う(教える)役」に対し行為主体感 (agency) を持っている．
では，教師の声が自分に (= agency を持つ声に) なったら？→ 記憶力が向上する

自問自答→自教自答：自分の声で学ぶと記憶力向上

通常の授業



提案する授業



自問自答は「自分に問う(教える)役」に対し行為主体感 (agency) を持っている．
では，教師の声が自分に (= agency を持つ声に) なったら？→ 記憶力が向上する

バターワースフィルタ (Butterworth filter)

フィルタ設計には種類がある

- 周波数選択フィルタの満たすべき条件を全て満たすことは難しい
  - → いくつかの条件について良好なフィルタを設計しよう

- **バターワースフィルタ (Butterworth filter)**
  - 過渡域の落ち方は緩やかだが、通過帯域が可能な限り平坦。Stephen Butterworth による作。食べるバターではない。

- **チェビシェフフィルタ（Chebyshev filter）**
  - 通過帯域にリプルがあるが、過渡域が急さに落ちる。Pafnuty Lvovich Chebyshev による作.

- 他にも色々

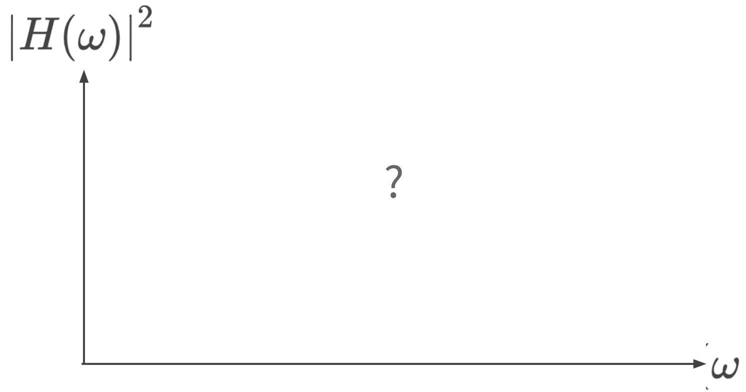
バターワースフィルタ
(一旦，連続時間のフィルタを考える)

- 次式のパワースペクトル (振幅スペクトルの二乗) を持つフィルタ

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2N}}$$

ω_c, N : カットオフ周波数, フィルタ次数 (係数数)

- [演習] カットオフ周波数と次数を変えたら $|H(\omega)|^2$ はどう変わる？
  - プログラムで図示して考察せよ．



ラプラス変換を利用して極を求め伝達関数を導出しよう

$$
\begin{aligned}
|H(\omega)|^2 &= \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2N}} \\
|H(s)|^2 &= \frac{1}{1+(-j)^{2N}(s/\omega_c)^{2N}} \\
&= \frac{1}{1+(-1)^{N}(s/\omega_c)^{2N}}
\end{aligned}
$$

$s = j\omega$

$|H(s)|^2 = \infty$となる s が極．k 番目の極 p_k は

$$p_k = \omega_c e^{j(\pi+2\pi k)/(2N)} \ (N \text{ is even}),\ \ \omega_c e^{j2\pi k/N} \ (N \text{ is odd})$$

そのうち，安定な極は s 平面の左側にある．安定な極だけを使ってフィルタを形成する．N = 2 の場合は

$$H(s) = \frac{1}{(s-\omega_c e^{j3\pi/4})(s-\omega_c e^{j5\pi/4})} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}\omega_c s+\omega_c^2}$$

周波数変換することで LPF を他のフィルタに変換できる
→ LPFの設計法さえ分かれば，他のフィルタも導出可能

変換前 → 変換後	変換式	備考
LPF → LPF	$s \to \dfrac{s}{\omega_l}$	遮断周波数 ω_l
LPF → HPF	$s \to \dfrac{\omega_h}{s}$	遮断周波数 ω_h
LPF → BPF	$s \to \dfrac{s^2 + \omega_1\omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)s}$	通過域 $[\omega_1, \omega_2]$
LPF → BEF	$s \to \dfrac{(\omega_2 - \omega_1)s}{s^2 + \omega_1\omega_2}$	遮断域 $[\omega_1, \omega_2]$

例えば, $\omega_c = 1, N = 2$ のバターワースフィルタ (LPF) から $\omega_h = 2$ の HPFを導出可能

$$H_{\mathrm{HPF}}(s) = \frac{1}{(\omega_h/s)^2 + \sqrt{2}\omega_h/s + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}$$

アナログフィルタからディジタルフィルタを作る (converting analogue filter to digital filter)

アナログフィルタからディジタルフィルタを作る

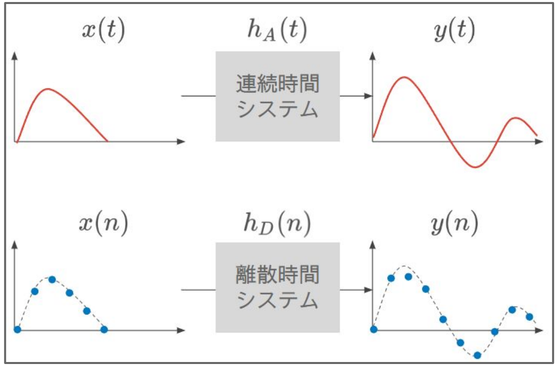
- 例えばバターワースフィルタのように，所望の特性を持つアナログフィルタ (連続時間信号のためのフィルタ) から，同じ特性を持つディジタルフィルタを形成しよう.

- **インパルス不変法 (impulse invariant method)**
  - アナログフィルタのインパルス応答を周期 T_s でサンプリングする
  - 長所：実装が簡単，元のフィルタが安定なら変換後も安定
  - 短所：サンプリング定理を満たさない場合がある

- **双一次変換 (Bilinear transform)**
  - ラプラス変換と z 変換の変換式を 線形で近似
  - 長所：サンプリング定理を必ず満たす．元フィルタが安定なら変換後も安定
  - 短所：周波数対応が線形でない

インパルス不変法：インパルス信号を入力したときの出力が変わらないよう (不変になるよう) に設計する方法

- アナログフィルタのインパルス応答を周期 T_s でサンプリングすればよい．



- 例：あるアナログフィルタの伝達関数を考える

$$H_A(s) = \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{a_N}{s - s_N}$$

逆ラプラス変換

$$h_A(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \ldots + a_N e^{s_N t}$$

サンプリング定理を満たす必要がある
→ LPF, BPF しか変換できない

インパルス不変法で**サンプリング**

$$h_D[n] = h_A(nT_s) = a_1 e^{s_1 n T_s} + a_2 e^{s_2 n T_s} + \ldots + a_N e^{s_N n T_s}$$

z 変換 (各項が等比級数)

$$H_D(z) = \frac{a_1}{1 - e^{s_1 T_s} z^{-1}} + \frac{a_2}{1 - e^{s_2 T_s} z^{-1}} + \ldots + \frac{a_N}{1 - e^{s_N T_s} z^{-1}}$$

極．$s = \sigma + j\omega$ としたら $\left|e^{sT_s}\right| = \left|e^{\sigma T_s}\right| \left|e^{j\omega T_s}\right| = \left|e^{\sigma T_s}\right|$

元フィルタが安定 (左半面)
→ 変換後も安定 (単位円内)

アナログフィルタの伝達関数が別の形でも，上記の形に持ってこれれば同様に変換

双一次変換：ラプラス変換→ z 変換の変換式を (一次式) / (一次式) で近似して変換

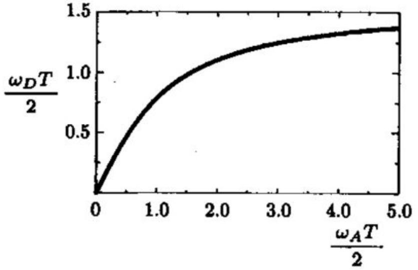
ラプラス変換→ z 変換の変換式を近似．具体的は分母と分子をテイラー展開．

$$z = e^{sT_s} = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \simeq \frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2} \longrightarrow s = \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

双一次変換の式

変換式の意味を考えよう．{連続, 離散}時間信号の角周波数を ω_A, ω_D とし，{ラプラス, z}変換をそれぞれ対応するフーリエ変換に置き換えると

$$j\omega_A = \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega_D T}}{1+e^{j\omega_D T}} \longrightarrow \omega_A = \frac{2}{T}\tan(\omega_D T/2)$$



連続時間信号の角周波数は，離散時間信号のそれに非線形に対応 (インパルス不変法は線形に対応)．全ての角周波数は一定範囲に変換され，サンプリング定理を自動で満たす．

まとめ
(matome)

まとめ

- 伝達関数から周波数特性を求める
  - z 変換の z を置き換えて、単位円上の周波数のみを扱う
  - 絶対値が振幅、偏角が位相。位相が直線的であるとき直線位相と呼ぶ。

- ディジタルフィルタ
  - LPF, HPF, IIR, FIR

- バターワースフィルタ
  - 通過域が平坦な IIR

- アナログフィルタからディジタルフィルタを作る
  - インパルス不変法，双一次変換

課題
(exercise)

以下の課題についてレポートを作成し，LMS 上で提出せよ。

演習 (残りは課題)

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

- $z = \exp(j\omega T_s)$ に置き換える
- 実部と虚部を求める
- 絶対値と偏角を求める

23

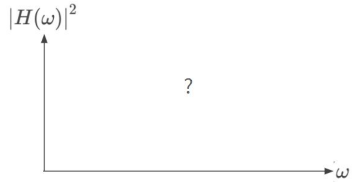
バターワースフィルタ (一旦，連続時間のフィルタを考える)

- 次式のパワースペクトル (振幅スペクトルの二乗) を持つフィルタ

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

ω_c, N : カットオフ周波数, フィルタ次数 (係数数)

- [演習] カットオフ周波数と次数を変えたら $|H(\omega)|^2$ はどう変わる？
  - プログラムで図示して考察せよ．



41