情報工学科 講義 ディジタル信号処理A (2025/04/24)

第3回
ラプラス変換から z 変換へ

情報工学科 准教授　高道 慎之介

Takamichi Laboratory
慶應義塾大学 高道研究室

ディジタル信号処理Aの授業予定 (仮)

第XX回	日付	内容（順次変わっていくので予想）
第01回	2025/04/10	イントロダクション，ディジタル信号処理
第02回	2025/04/17	フーリエ級数展開・フーリエ変換から離散フーリエ変換へ
第03回	**2025/04/24**	**ラプラス変換から z 変換へ**
第04回	2025/05/01	インパルス応答と伝達関数，安定性
第05回	2025/05/08	ディジタルフィルタ
第06回	2025/05/15	高速フーリエ変換と短時間フーリエ変換
第07回	2025/05/22	総合演習．期末試験の練習としての立ち位置．
期末試験	2025/06/??	(日程は後日アナウンス)

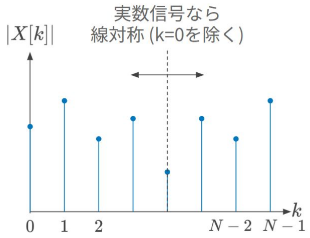
応用数学の復習

昨年のBの途中まで

前回の課題の解答

以下の課題についてレポートを作成し，LMS 上で提出せよ。

1. 周期関数 x(t) のフーリエ級数 c_k と c_{-k}は複素共役であることを示せ



2. フーリエ変換の時間シフトを証明せよ

3. サンプリング周波数を 4000 Hz とする．離散フーリエ変換の周波数解像度 (k と k - 1 の周波数軸上の間隔) を 20 Hz としたい．そのときに，必要な信号時間長 T を答えよ

4. 離散フーリエ変換は行列として表現することができる．この行列を Python で記述せよ．詳細は次のページ

周期関数 x(t) のフーリエ級数 c_k と c_{-k}は複素共役であることを示せ

- c_k の項と c_{-k} の項の和を考える

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

- 和は以下の通り。(他の項は直交するので無視してよい)

$$(a_k + jb_k)e^{j\frac{2\pi kt}{T}} + (a_{-k} + jb_{-k})e^{j\frac{-2\pi kt}{T}}$$

- x(t) は実数関数なので、その虚部は 0 になる

$$b_k\cos(\frac{2\pi kt}{T}) + a_k\sin(\frac{2\pi kt}{T}) + b_{-k}\cos(\frac{2\pi kt}{T}) - a_{-k}\sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

- これが成立するには、a_k = a_{-k}, b_{k} = - b_{-k} (複素共役)

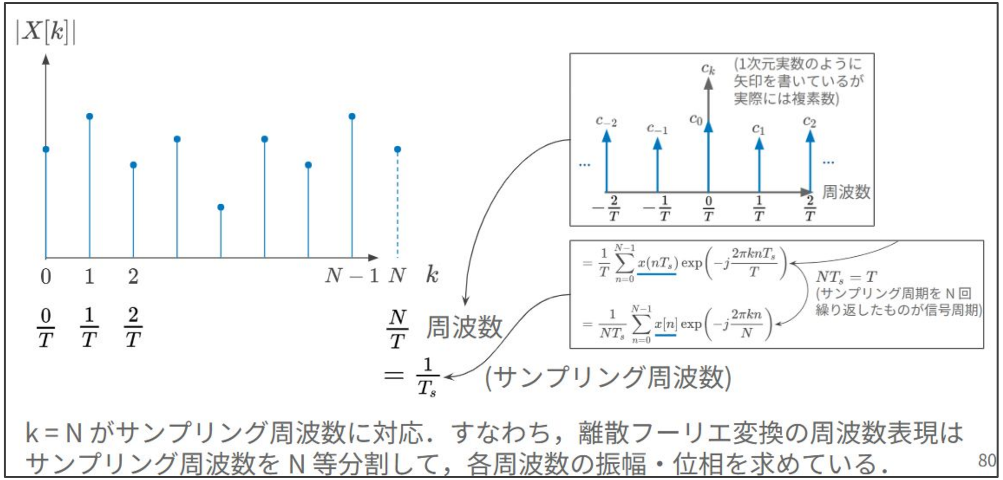
- 別解：c_k の定義から。x(t) が実数関数なので成り立つ

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right)dt \qquad c_{-k} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right)dt = \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(j\frac{-2\pi kt}{T}\right)dt\right)^* = c_k^*$$

フーリエ変換の時間シフトを証明せよ

- $\tau = t - a$ として積分の変数変換すれば解ける。

サンプリング周波数を 4000 Hz とする．離散フーリエ変換の周波数解像度
(k と k - 1 の周波数軸上の間隔) を 20 Hz としたい．
そのときに，必要な信号時間長 T を答えよ



- サンプリング周波数1/T_{s} = 4000 Hz, 周波数間隔 20Hz
- N = 4000 / 20 = 200, T = 200 / 4000 = 0.05[sec]

- 別解：周波数解像度の逆数が信号時間長 1/20 = 0.05 [sec]

離散フーリエ変換は行列として表現することができる．この行列を Python で記述せよ．

```python
import numpy as np

def DFT_matrix(N):
  W = np.zeros((N,N), dtype=complex) # N-by-N zero matrix
  """
  Generate DFT matrix of size N.
  """
  for n in range(N):
    for k in range(N):
      W[n][k] = np.exp(- 2j * np.pi * n * k / N)
  return W

xn = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]) # input signal
W = DFT_matrix(len(xn))

# check
print("your answer:\n", W @ xn) # Xk = W xn
print("numpy:\n", np.fft.fft(xn)) # reference. OK if your answer matches to this.
```

(「python で多重ループを書くな」という話はありますが簡単のために)

本日の内容

ハウリング：時間とともに信号が増幅する現象

本日の内容

- ラプラス変換
- z 変換

ラプラス変換，z 変換，フーリエ変換との関係を理解しよう．
これまでにやった ”周波数” を拡張します．

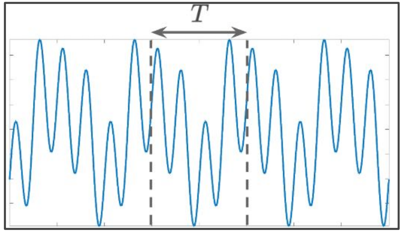
復習：フーリエ変換

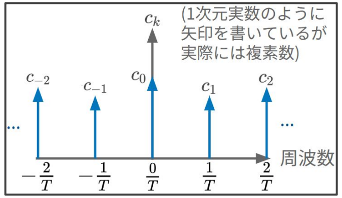
手法の比較

連続時間信号

フーリエ級数展開

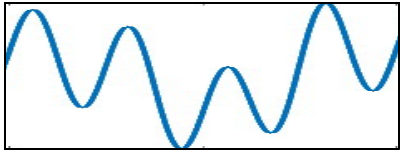
周期**連続**時間信号 → **離散**周波数

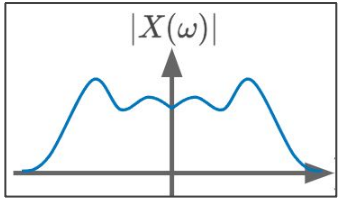




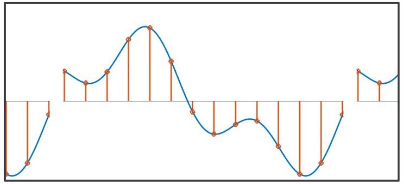
フーリエ変換

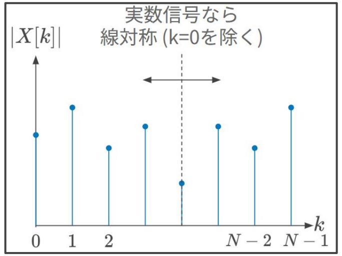
非周期**連続**時間信号 → **連続**周波数





離散時間信号





本講義ではやりません．
興味があれば調べてください．

離散フーリエ変換

周期**離散**時間信号 → 周期**離散**周波数

離散時間フーリエ変換

非周期**離散**信号 → **連続**周波数

離散周波数 (信号の周期性を仮定)

連続周波数 (信号は非周期で良い)

フーリエ変換 とその逆変換 (ωは角周波数，2π×周波数)

- Fourier 変換： 連続時間信号 → 連続周波数

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$\mathcal{F}\left[x(t)\right] = X(\omega)$$

- 逆Fourier 変換： 連続周波数 → 連続時間信号

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[X(\omega)\right] = x(t)$$

離散フーリエ変換とその逆変換

- 離散 Fourier 変換： 離散時間信号 → 離散周波数

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad \mathrm{DFT}\left[x[n]\right] = X[k]$$

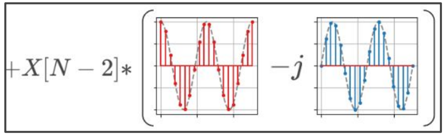
$$(k \in \{0, 1, \ldots, N-1\})$$

- 逆離散 Fourier 変換： 離散周波数 → 離散時間信号

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad \mathrm{DFT}^{-1}\left[X[k]\right] = x[n]$$

$$(n \in \{0, 1, \ldots, N-1\})$$

振幅スペクトル $|X[k]|$ と位相スペクトル $\arg(X[k])$

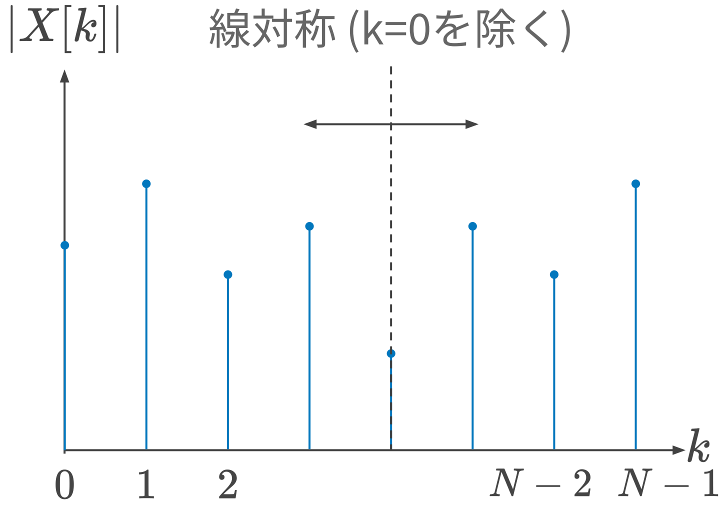


$$X[k] = |X[k]| e^{j\arg(X[k])}$$

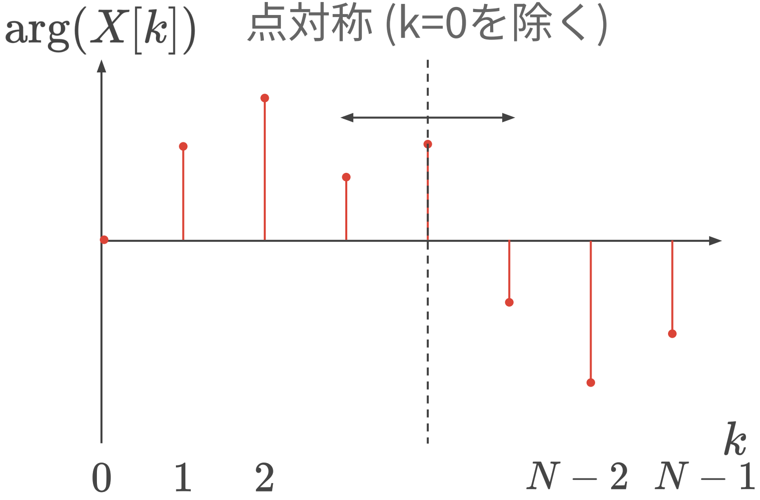
$\exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right)$ の大きさを何倍するか

$\exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right)$ の開始時刻をどれくらい動かすか

実数信号なら
線対称 (k=0を除く)



実数信号なら
点対称 (k=0を除く)

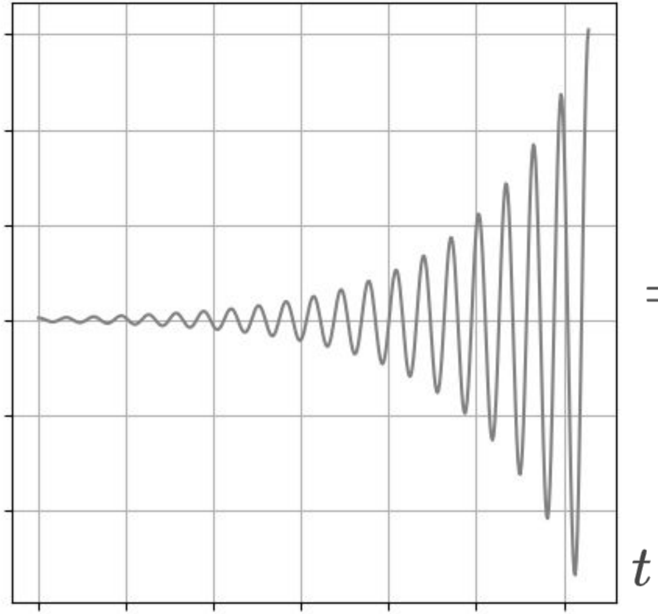


実数信号を離散フーリエ変換する場合には N-1の半分まででよい (図示する場合もそう)

ラプラス変換
(Laplace transformation)

フーリエ変換は全ての信号を変換できるわけではない

ハウリングのように
時間とともに無限大に増大する信号



全ての基底波の
足し合わせ

基底波
(cos 波と sin 波)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

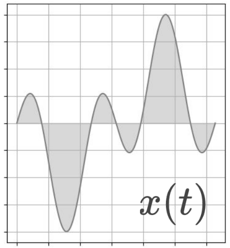
振幅(大きさ)と
位相 (時間遅れ)

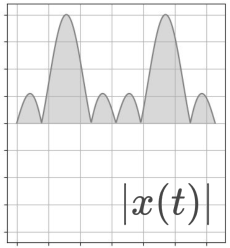
|X(ω)| が有限の値である限り，無限大に増大する信号を，基底波の足し合わせで表すことはできない

フーリエ変換できるのは絶対可積分関数のみ

- 関数 x(t) が絶対可積分であるとは，絶対値の積分値が上に有界

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$





- 絶対可積分関数なら，フーリエ変換は上に有界 (有限の値になる)

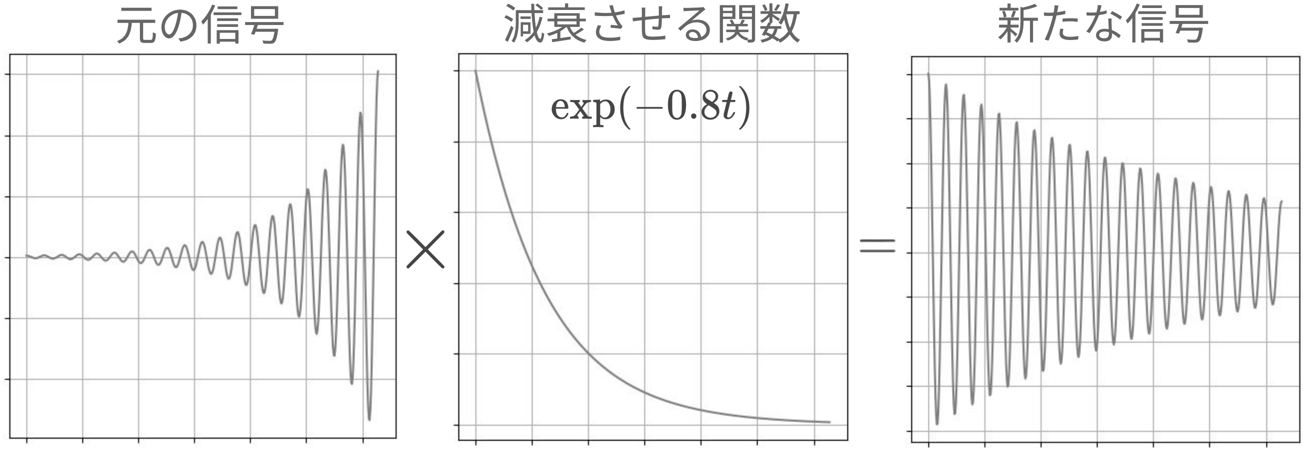
$$\begin{aligned}
|X(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) \exp(-j\omega t)|\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt \\
&< \infty
\end{aligned}$$

積分の絶対値は，絶対値の積分以下

exp項の大きさは 1

絶対可積分の条件

じゃあどうする？：
時間とともに減衰させる関数を乗算すればよい



$$\times$$

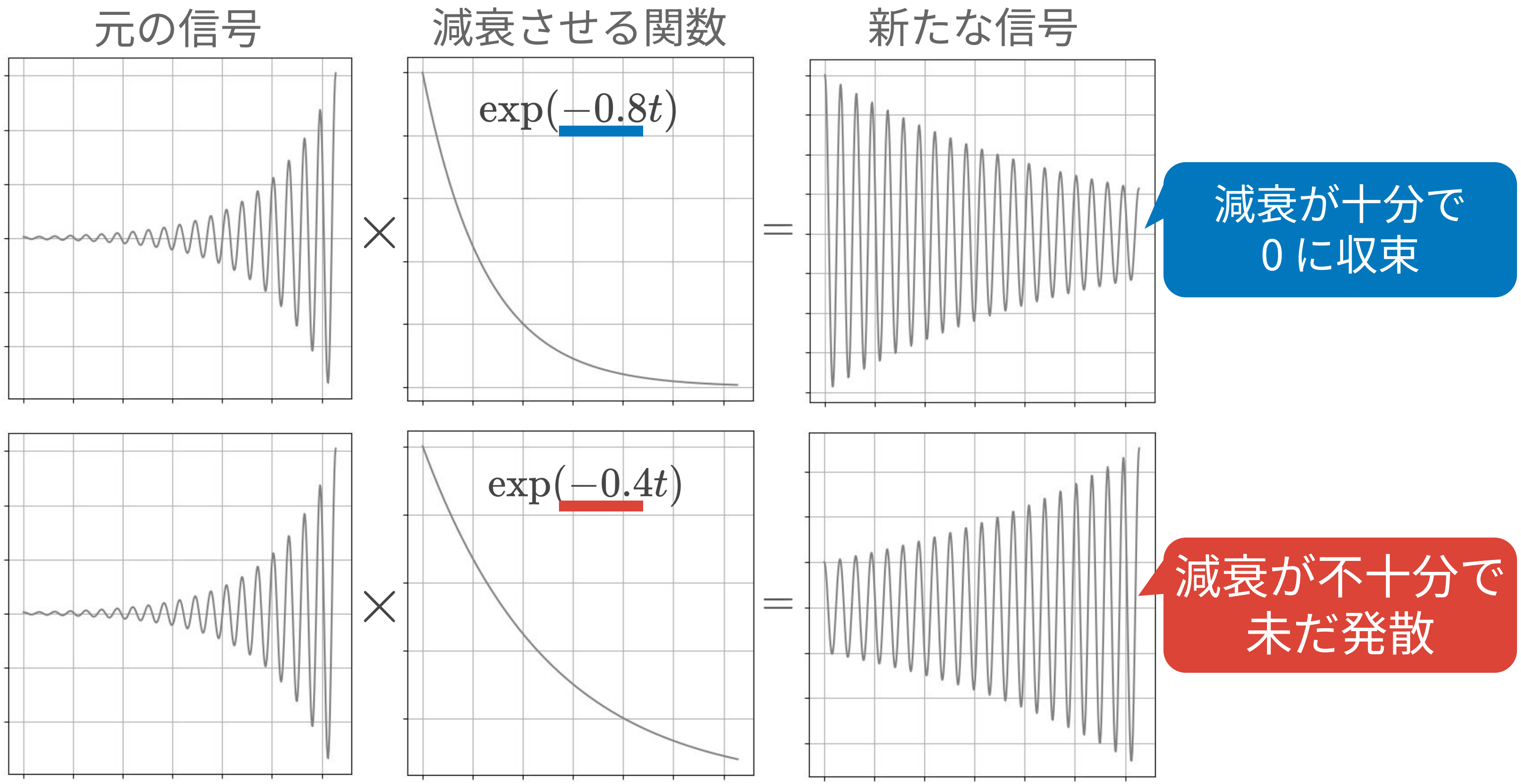
$$=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

これだったら
求められそう

時間とともに減衰させることで，変換可能な信号になりそう

さらにイメージしてみよう：
減衰の強さで信号の増減が分かる



関数の減衰パラメータの大小で，元の信号の増減具合を分析できそう

ラプラス変換の定義

- ラプラス変換： 連続時間信号 → **複素**周波数

複素数　　複素数 $s = \sigma + j\omega$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \qquad \mathcal{L}\left[x(t)\right] = X(s)$$

負の時刻で発散しないよう正の時刻のみを扱う

- 逆ラプラス変換： **複素**周波数 → 連続時間信号

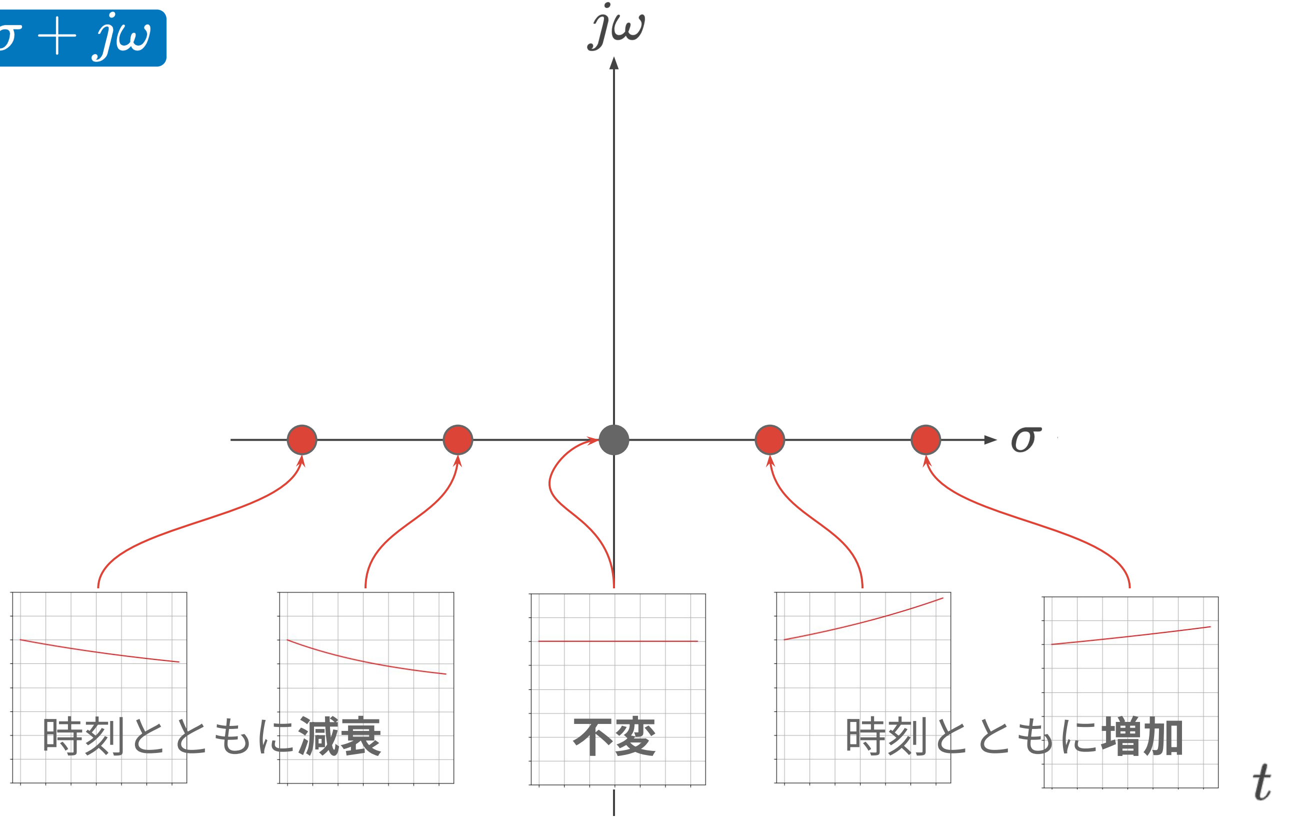
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \exp(st) ds \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = x(t)$$

端的に言うなら…

- ラプラス変換は，時間減衰関数を導入することで，フーリエ変換できなかった信号も変換できるようにしたもの
- フーリエ変換で使われる振動だけでなく，信号の増減も表せるもの
- 減衰関数の強さで信号の増減を解析できるもの

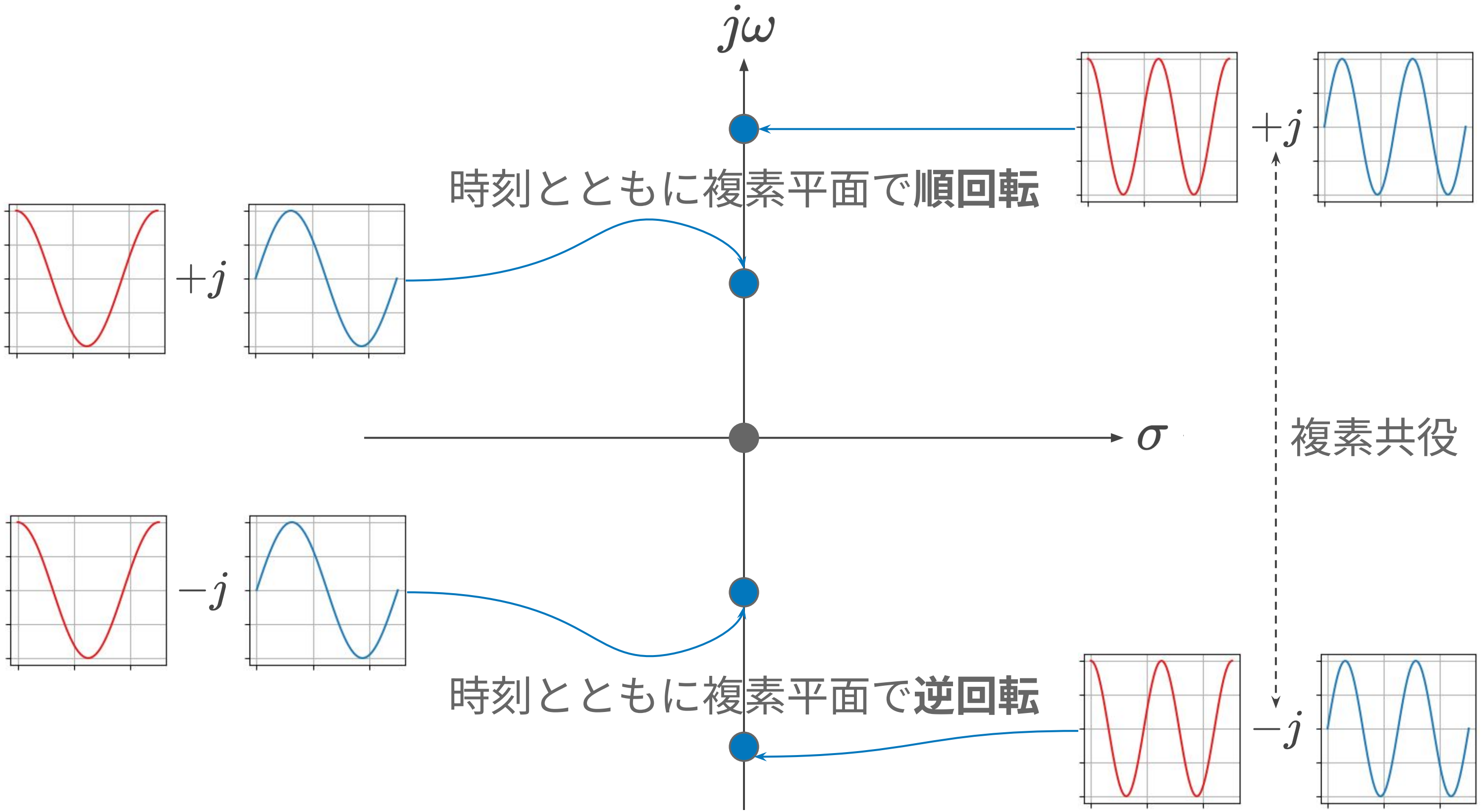
“複素”周波数の意味するところ (s 平面)

複素数 $s = \sigma + j\omega$



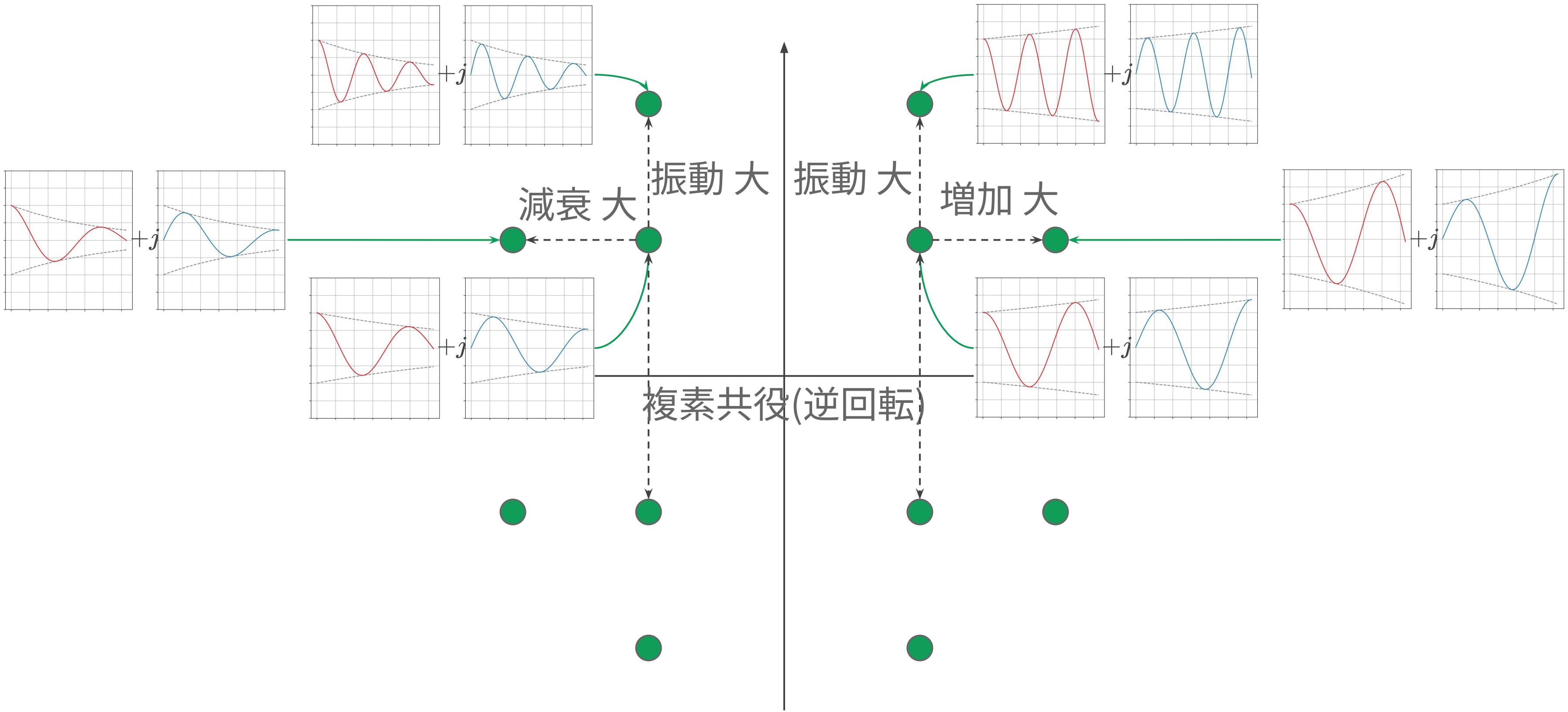
s 平面の**実軸**は時刻とともに {増加，不変，減衰} する**実指数関数**を表す．

“複素”周波数の意味するところ (s 平面)



s 平面の**虚軸**は時刻とともに {順回転，逆回転}する**複素指数関数**を表す．

“複素”周波数の意味するところ (s 平面)



ラプラス変換してみよう

- ステップ関数

$$x(t) = \{1\ (t > 0), 0\ (t \leq 0) \xrightarrow{\text{基本形は 1/s}} \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

- 指数関数 (a > 0)

減衰項で左にシフト
(増加項で右)

$$x(t) = e^{-at} \longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

- 正弦波関数 (ω_0 > 0)

振動項で
上下にシフト

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

- 指数関数×正弦波関数

左にシフト＆
上下にシフト

$$x(t) = e^{-at}\sin(\omega_0 t) \longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{-at}}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)\right] = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

X(s) を可視化してみよう ([Google colab版])

```python
# try on Google Colab or Jupyter Notebook
# from IPython.display import display
import sympy as sp # for symbolic calculation
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go # for dynamic drawing
sp.init_printing()

# define symbols, signal, and calculate Laplace transformation
s, t = sp.symbols("s t")
x = sp.exp(-0 * t)
X = sp.laplace_transform(x, t, s, noconds=True)

# print symbols
for message, variable in zip(["x(t)", "L[x(t)]"], [x, X]):
  print(message, "=")
  display(variable)


# convert it to a numerical function for plotting.
X_func = sp.lambdify(s, X, 'numpy')

# create a grid of s values (complex numbers)
real_s, imag_s = np.linspace(-0, 3, 50), np.linspace(-3, 3, 50)
real_s, imag_s = np.meshgrid(real_s, imag_s)
s_vals = real_s + 1j * imag_s

# evaluate the Laplace transform for the complex values of s
X_vals = X_func(s_vals)

# Extract real and imaginary parts
real_X, imag_X = np.real(X_vals), np.imag(X_vals)
```

```python
# plot real part
fig = go.Figure(data=[go.Surface(
    z=real_X, x=real_s, y=imag_s, hidesurface=True,
    contours=dict(
        x=dict(show=True, color="red", start=-0, end=3, size=0.25),
        y=dict(show=True, color="red", start=-3, end=3, size=0.25),
    ))])

fig.update_layout(
    scene=dict(xaxis_title='Re(s)', yaxis_title='Im(s)',
zaxis_title='Re[X(s)]'),
    width=None, height=None, autosize=True,
    )
# fig.show()

# plot imag part
# fig = go.Figure(data=[go.Surface(
#     z=imag_X, x=real_s, y=imag_s, hidesurface=True,
#     contours=dict(
#         x=dict(show=True, color="blue", start=-0, end=3, size=0.25),
#         y=dict(show=True, color="blue", start=-3, end=3, size=0.25),
#     ))])

# fig.update_layout(
#     scene=dict(xaxis_title='Re(s)', yaxis_title='Im(s)',
zaxis_title='Im[X(s)]'),
#     width=None, height=None, autosize=True,
#     )
```

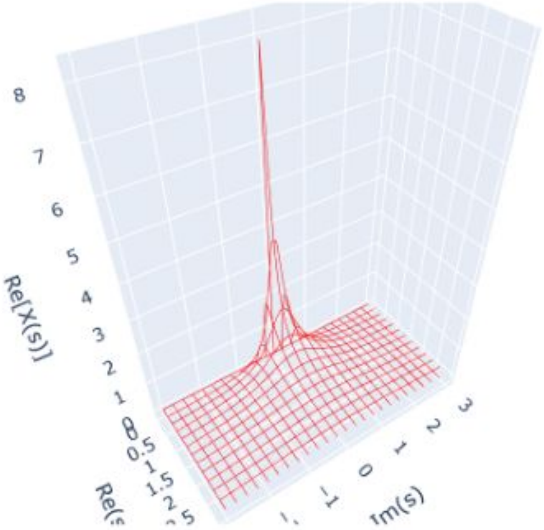
X(s) を可視化してみよう

$x(t) = 1$

$L[x(t)] = \frac{1}{s}$

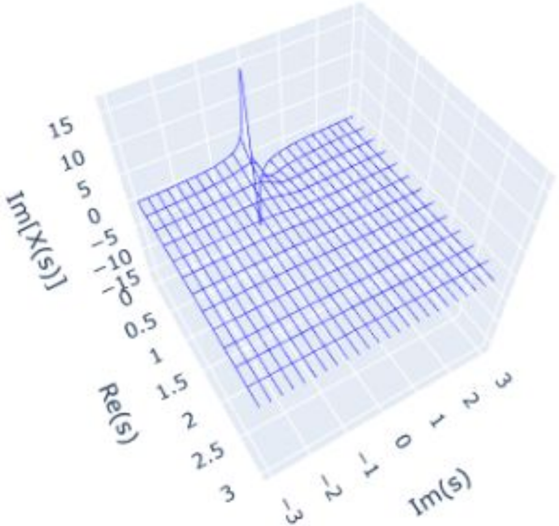
sympy はラプラス変換を
代数的に解いて
くれるので便利
(↑はステップ関数)

X(s) 実部



実軸で線対称

X(s) 虚部



実軸で点対称

ラプラス変換もフーリエ変換と同様の対称性を持つ．(実数関数を変換するとき，虚数部をキャンセルしなければならないため複素共役になる)

演習 (残りは課題)

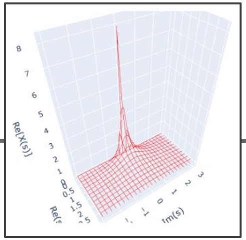
- 以下の関数についてX(s) の実部・虚部をプロットし、その形状を比較・考察せよ。a, ω_0 には適当な値を使用せよ。
  - ステップ関数 ← 前のページのやつ
  - 指数関数 (a > 0)
  - 正弦波関数 (ω_0 > 0)

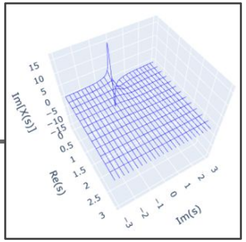
- sympy の関数
  - numpy と同じように定義されているケースが多い
  - sp.exp(), sp.sin(), sp.pi

- プロットする s の範囲を適宜変更せよ。

極と定義域 (収束域) について

- X(s) が無限となる時の s を**極 (pole)** と呼ぶ

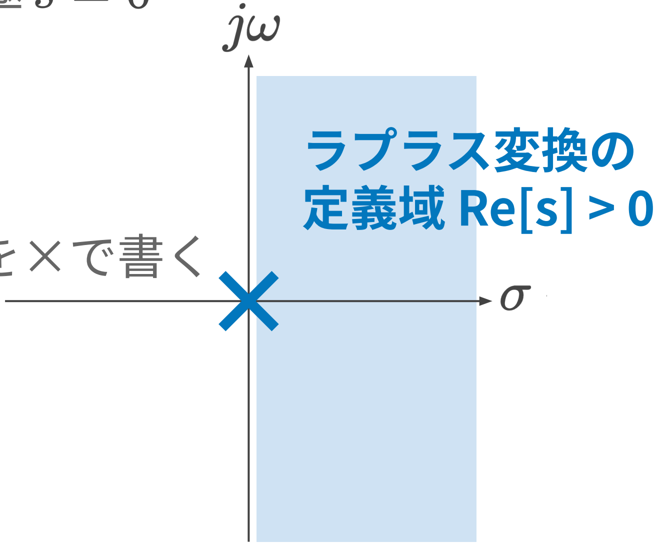




$$x(t) = 1 \longrightarrow \mathcal{L}\left[x(t)\right] = \frac{1}{s}$$

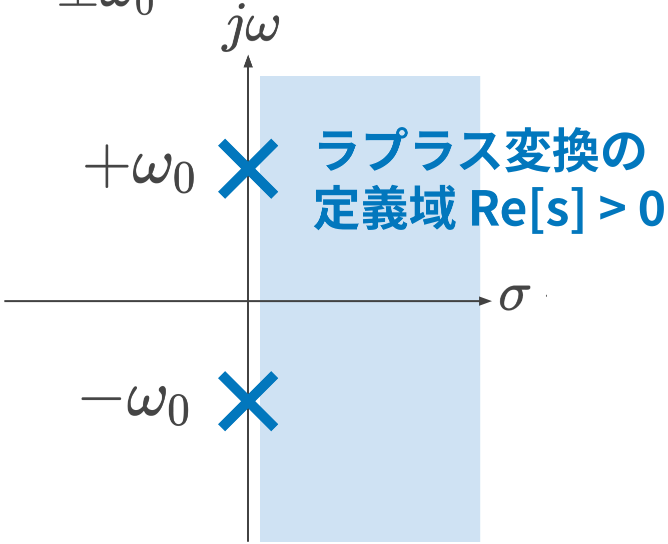
極 $s = 0$

極を×で書く



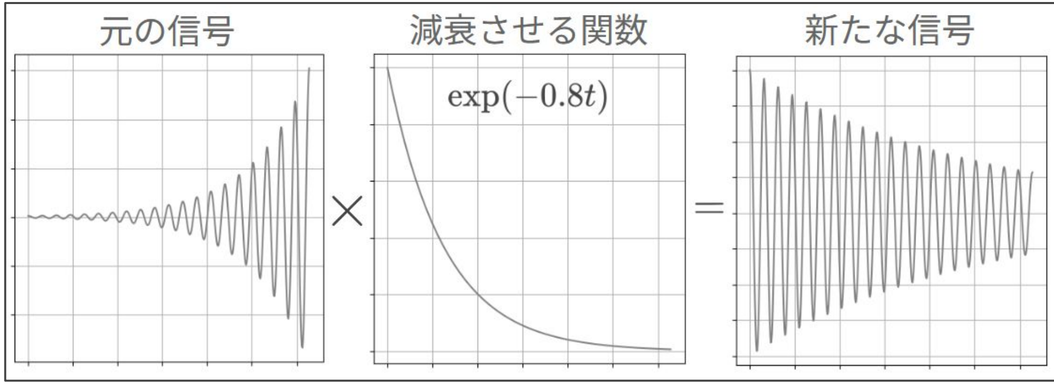
$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \longrightarrow \mathcal{L}\left[x(t)\right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

極 $s = \pm\omega_0$



極の右側がラプラス変換の定義域になる。すなわち、ラプラス変換が有限の値として存在する s の範囲のこと。複数の極があるときは、一番右側の極の右側。

定義域 (収束域) の直感的な説明



$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

これだったら
求められそう

$\bigcirc\exp(at)$ $\quad\times\quad$ $\exp(-\sigma t)$ $\quad=\quad$ $\propto \exp((a-\sigma)t)$

新たな信号が絶対可積分になるために：

- a - σ < 0, → a < σ であれば，t の増加とともに 0 に収束する．
- すなわち，極の右側が収束域になる．
  - 元の信号が時間とともに減少 (〇exp(-at)) であれば，
    -a < σ となり非負のσ (すなわち時間増加関数) も収束域に含まれる．

フーリエ変換で成り立つ性質はラプラス変換でも成り立つ

種々の性質 (詳細は応用数学の資料を参考)

- 線形性
  - “N倍はN倍，和は和のまま”

$$\mathcal{F}[ax(t) + by(t)] = aX(\omega) + bY(\omega)$$

- 相似性
  - “時間が a 倍されると周波数は1/a倍”

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$$

- 時間シフト
  - “時間シフトは周波数領域で exp 項”

$$\mathcal{F}[x(t-a)] = X(\omega)e^{-ja\omega}$$

- 周波数シフト
  - “周波数シフトは時間領域で exp 項”

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega - a)] = x(t)e^{ja\omega}$$

- 変調定理
  - “余弦波の乗算は周波数の変調”

$$\mathcal{F}[x(t) * 2\cos(at)] = X(\omega - a) + X(\omega + a)$$

- 微分定理
  - “時間の微分は周波数の乗算”

$$\mathcal{F}[\frac{\partial}{\partial t}x(t)] = j\omega X(\omega)$$

- パーセバルの定理
  - “フーリエ変換はエネルギーを保存”

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

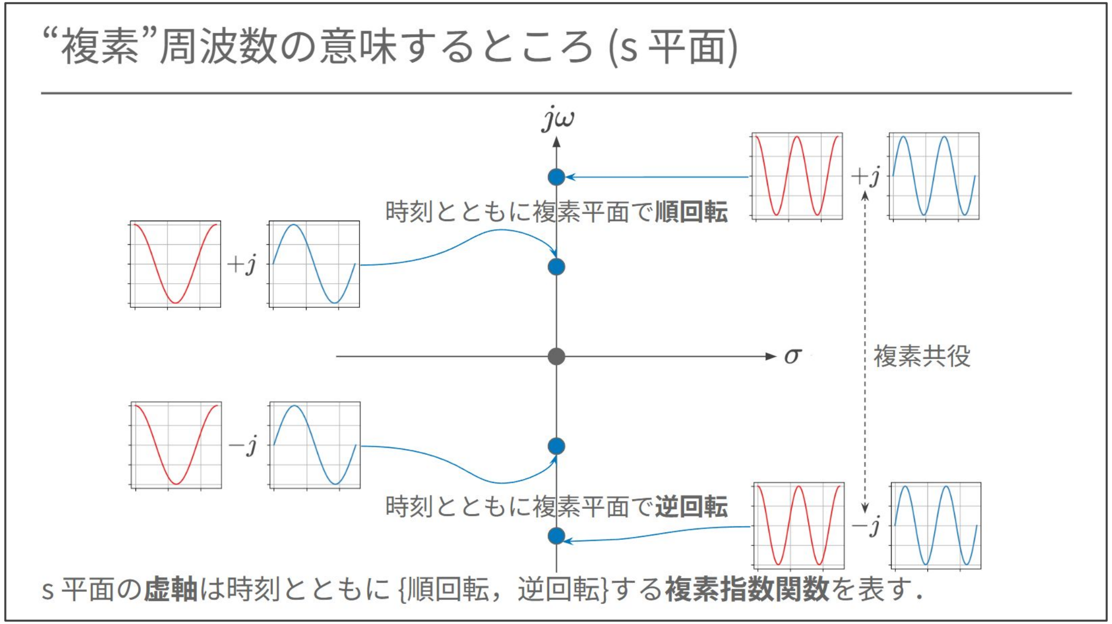
L[x(t-a)] = X(s) e^{-sa}

これらの性質は，後述する離散フーリエ変換でも成立する．

41

ラプラス変換はフーリエ変換に対応する

- ラプラス変換はフーリエ変換の一般化である
  - 具体的には，増加減衰の波を扱うようになった
- 言い換えれば，増加減衰を扱わない範囲はフーリエ変換に一致
  - すなわち，虚軸はフーリエ変換に一致



ラプラス変換はフーリエ級数展開にも対応する

- フーリエ級数展開はラプラス変換の特殊化ではない
  - フーリエ級数展開は周期信号，ラプラス変換は非周期信号
- しかし，周期信号を区間 [0, ∞] でラプラス変換すると対応を見れる．

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

周期信号 x(t+T) = x(t)

積分範囲を分割

$$= \int_0^T x(t)e^{-st}dt + \int_T^{2T} x(t)e^{-st}dt + \int_{2T}^{3T} x(t)e^{-st}dt + \ldots$$

変数変換 t = τ + T．
dt = dτ．積分範囲 [0, T]

$$= \int_0^T x(t)e^{-st}\left(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots\right)dt$$

等比級数の和

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T x(t)e^{-st}dt$$

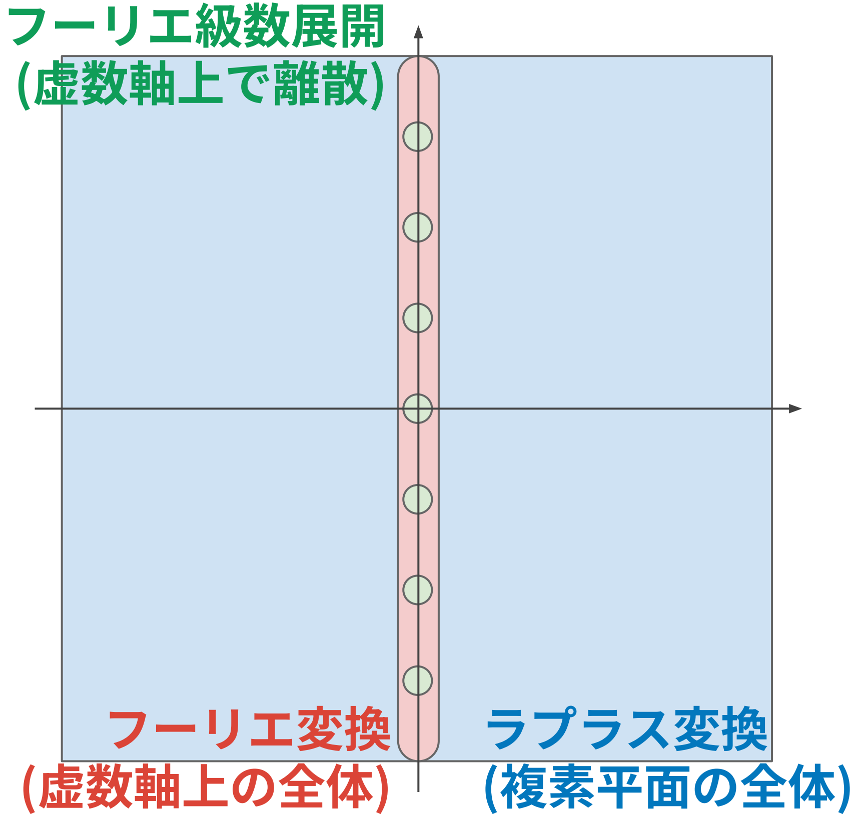
フーリエ級数

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right)dt$$

$s = e^{j2\pi k/T}$で一致

ラプラス変換を虚数軸上の間隔 1/T の点に限定すると，フーリエ級数展開に対応
(級数展開可能な関数に限る)

ラプラス変換とフーリエ{級数展開, 変換}の周波数対応



閑話休題：高道研における卒業研究の紹介 (テストには出ない)

三人称ゲーム実況音声に対する時間遅延許容量の測定

松下 嶺佑 , 阪井 瞭介 , 福田 航希 , 高道 慎之介 , 井浦 昂太 , 齋藤 佑樹 , ニュービッグ グラム , 須藤 克仁 , 高村 大也 , and 石垣 達也

In 電子情報通信学会 音声研究会 , 2025

BIB PDF SLIDES

https://takamichi-lab.github.io/publications/

研究背景

- スポーツやゲームの試合映像の価値を高めるために，
  実況を自動生成する技術が開発されている[Ishigaki 21]．

入力：実況をつけたい動画 → 実況自動生成 → 出力：実況のついた動画

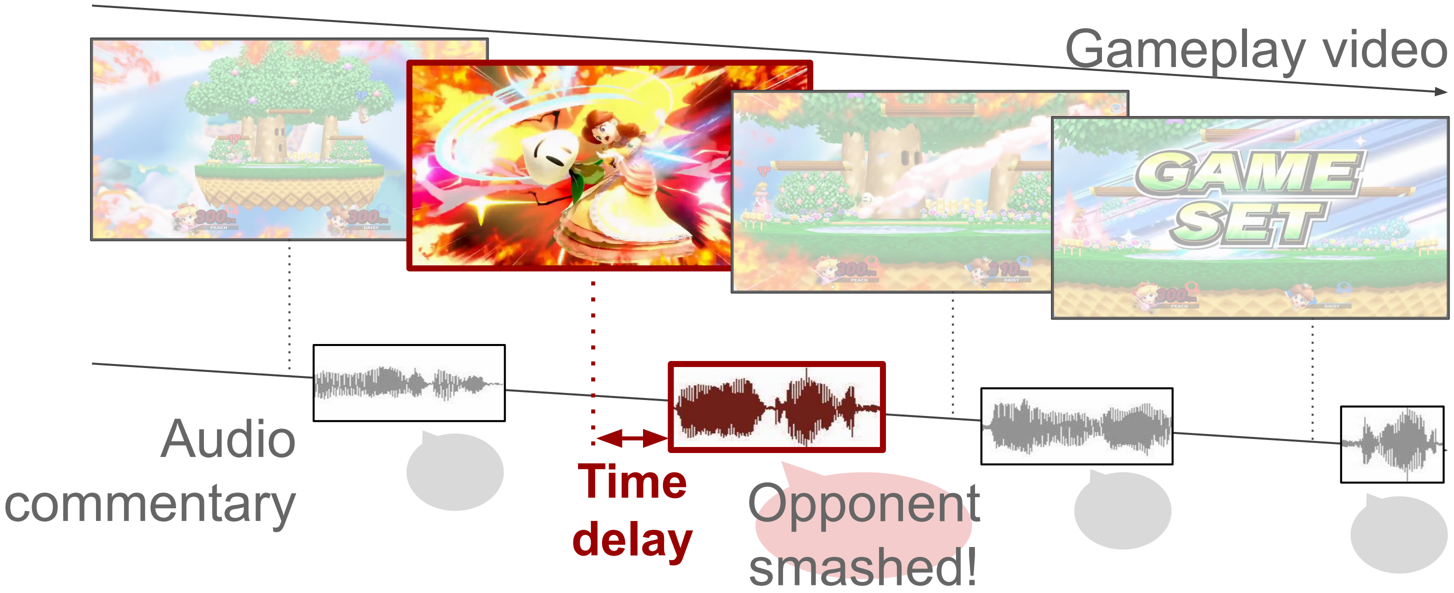
実況音声の遅延

- 一方で，実況を自動生成する場合，動画理解や実況音声の合成に時間を要するため，実況音声に遅延が生じる．
- 自然な実況音声生成のために，**許容される時間**内に遅延を抑えたい．

音声の遅延が大きい例

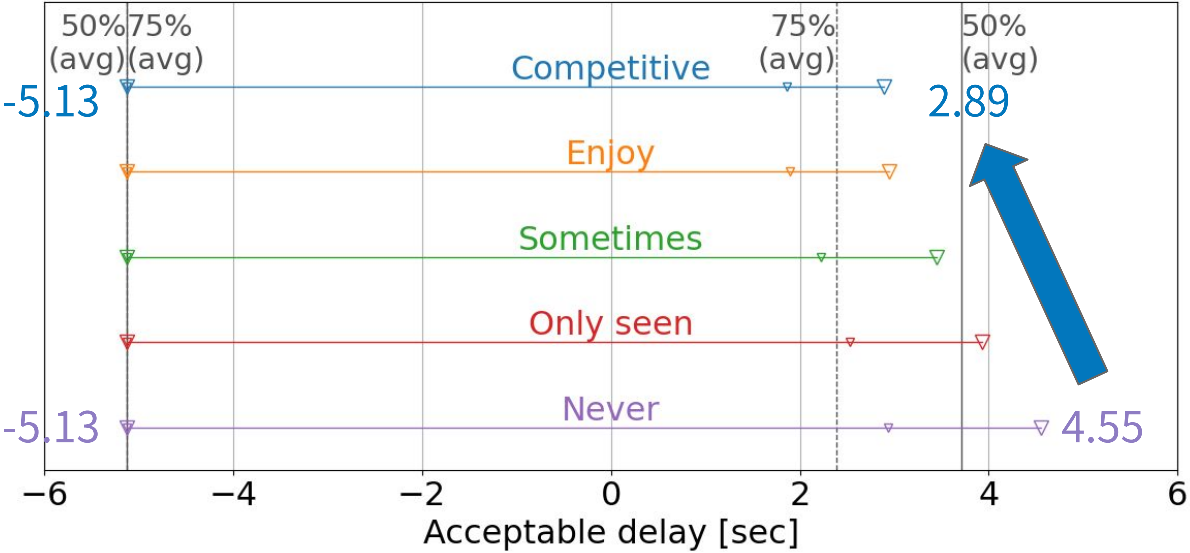
本研究の立ち位置

- 大乱闘スマッシュブラザーズSPECIALのプレイ動画を用い，
  実況の遅延時間について，どれくらい許容できるかを測定する．



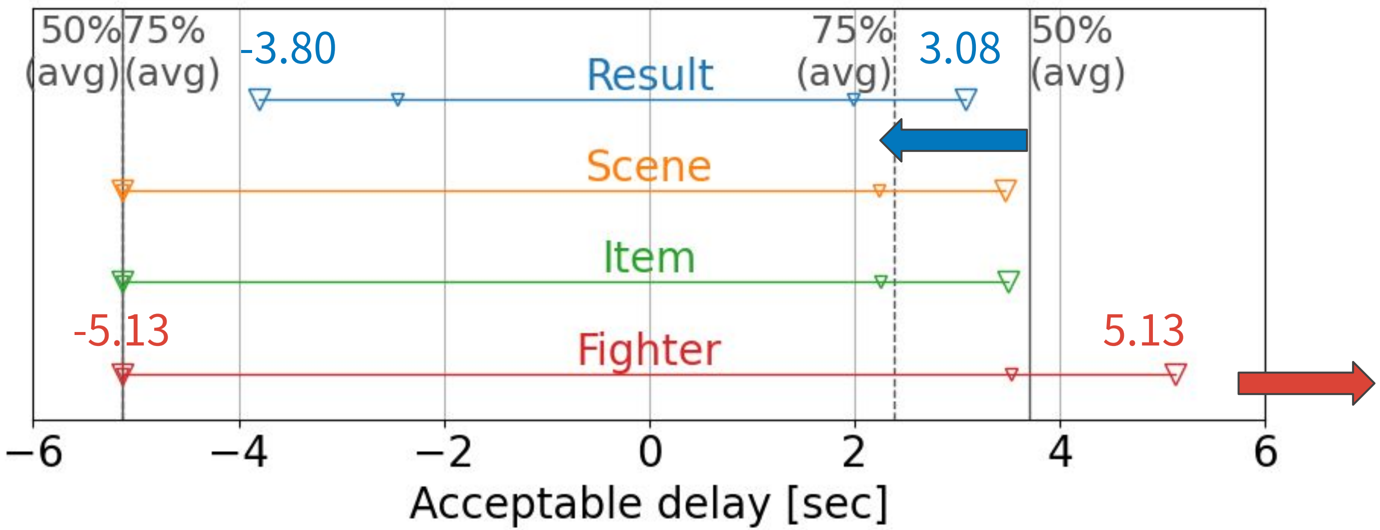
How much delay in commentary is acceptable to viewers?

実験結果：ゲームプレイ経験別



- 許容遅延時間はゲームプレイ経験が深くなるほど短い．
  - 経験のある方が反応時間が早くなるという関連研究 [Repp 06] に一致するため，被験者属性による許容遅延時間の差はあると考えられる．
  - 視聴者層に合わせて，実況自動生成をする必要がある．

実験結果：トピックタグ



- 許容遅延時間は**Result**では極端に短く，**Fighter**では極端に長い．
  - Resultは，視聴者の関心が向くので，許容遅延時間が短い．
  - Fighterは，内容が予測がしやすいので，許容遅延時間が長い．

実際の実況（Result）

遅延0秒

遅延+1.75秒

- Resultは，遅延時間が大きくなると違和感を覚えやすい．

実際の実況（Fighter）

遅延0秒

遅延+1.75秒

- Fighterは，遅延時間が大きくなっても違和感を覚えにくい．

z 変換
(z-transformation)

連続時間信号を振動だけでなく増幅・減衰で扱うのがラプラス変換だった.
じゃあ，それの離散時間信号版はあるの？ ある！

ラプラス変換から z 変換を導出する

$$X(s) = \int_0^\infty \underline{x(t)} \exp(-st)dt$$

$$= \int_0^\infty \underline{\sum_{n=0}^\infty x(nT_s)\delta(t-nT_s)} \exp(-st)dt$$

離散時間信号の連続時間信号的表現
(便宜上等号で結んでいる)

積分と総和の順序入れかえ

$$= \sum_{n=0}^\infty x(nT_s) \underline{\int_0^\infty \delta(t-nT_s)\exp(-st)dt}$$

デルタ関数の定義 $\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\delta(t)dt = \varphi(0)$

$$= \sum_{n=0}^\infty x(nT_s) \underline{\exp(-nsT_s)}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty x[n](\underline{\exp(sT_s)})^{-n}$$

= z (複素数)と定義する **→ z 変換**

z変換の定義

- z 変換： 離散時間信号 → 複素周波数

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\mathcal{Z}\left[x[n]\right]=X(z)$$

- 逆z 変換： 複素周波数 → 離散時間信号

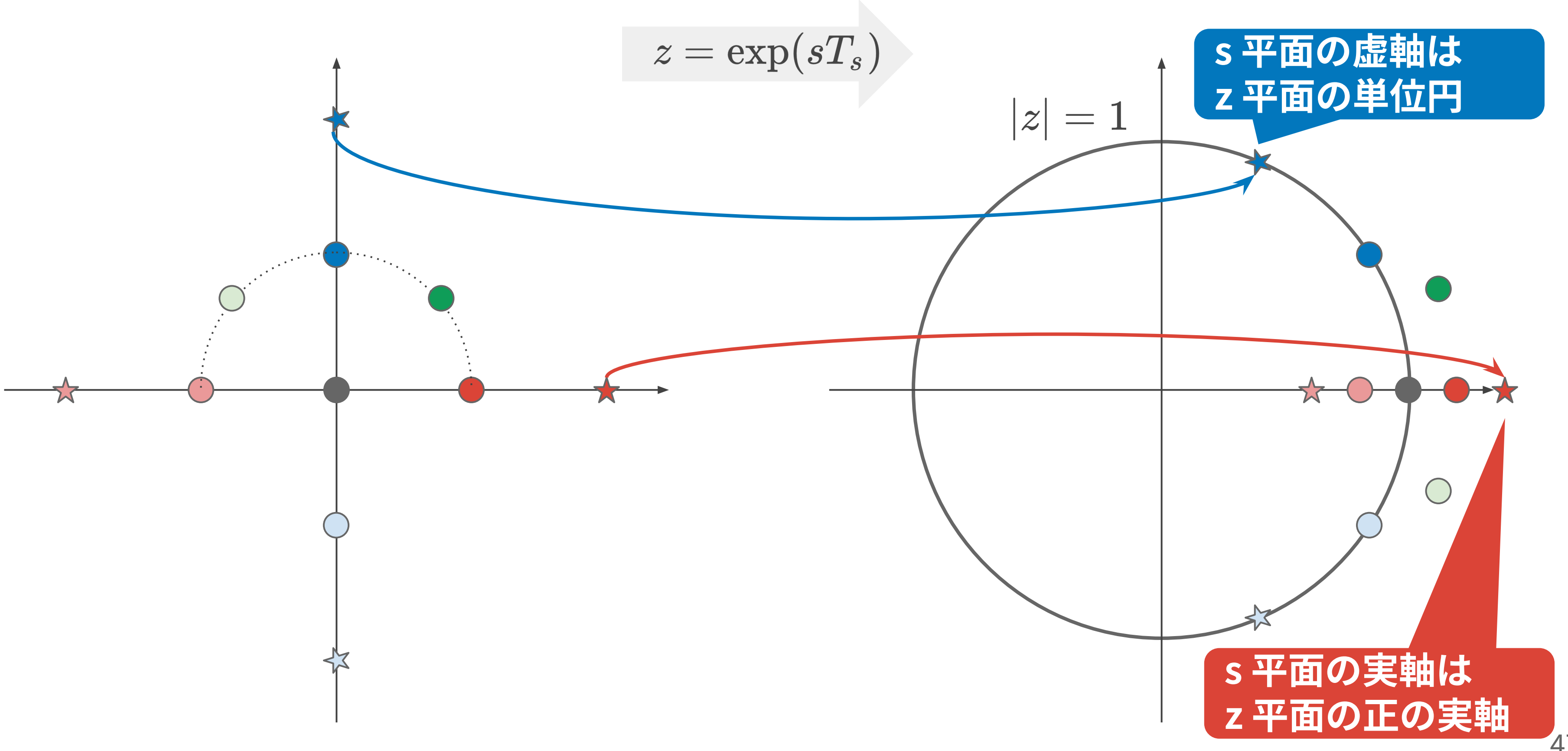
$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}}X(z)z^{n-1}dz$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right]=x[n]$$

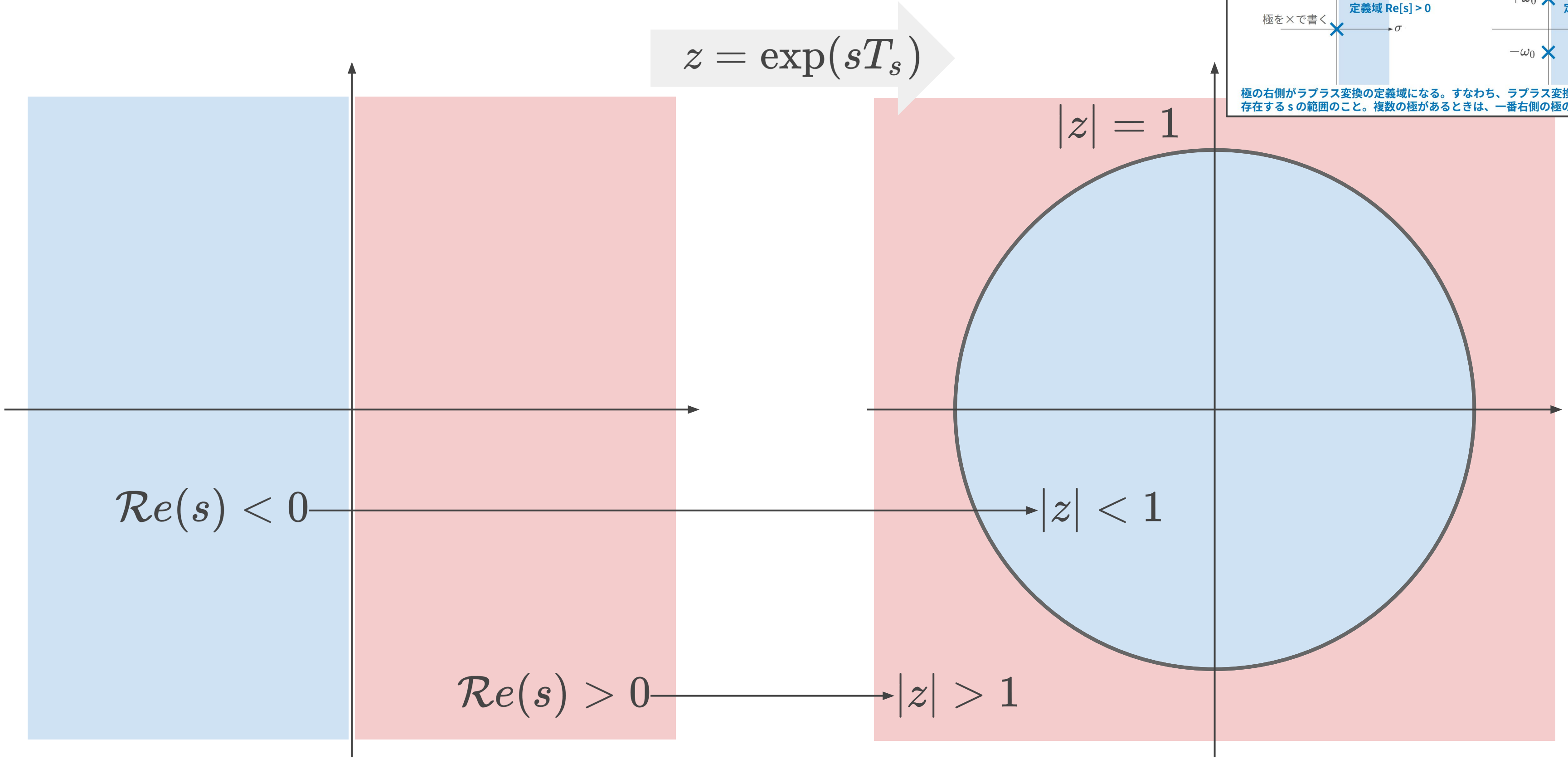
端的に言うなら…

- z 変換は，ラプラス変換の離散時間信号版
- ラプラス変換と同様に，信号の増減を表現できる

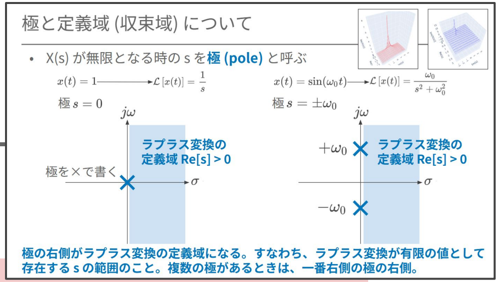
s 平面と z 平面の対応



s 平面と z 平面の対応



$z = \exp(sT_s)$
$|z| = 1$
$\mathcal{R}e(s) < 0$
$|z| < 1$
$\mathcal{R}e(s) > 0$
$|z| > 1$



極と定義域 (収束域) について
• X(s) が無限となる時の s を**極 (pole)** と呼ぶ
$x(t) = 1 \longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s}$
極 $s = 0$
$j\omega$
ラプラス変換の定義域 Re[s] > 0
極を×で書く
σ
$x(t) = \sin(\omega_0 t) \longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
極 $s = \pm\omega_0$
$j\omega$
$+\omega_0$
ラプラス変換の定義域 Re[s] > 0
σ
$-\omega_0$
極の右側がラプラス変換の定義域になる。すなわち、ラプラス変換が有限の値として存在する s の範囲のこと。複数の極があるときは、一番右側の極の右側。

z 変換してみよう

- 単位パルス信号

$$x[n]=\delta[n] \xrightarrow{\text{基本形は 1}} \mathcal{Z}[x[n]]=1$$

- 有限長の信号

$$x[n]=4\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2] \xrightarrow{\text{単位遅れは z^\{-1\}}} \mathcal{Z}[x[n]]=4+2z^{-1}+z^{-2}$$

- ステップ信号

$$x[n]=u[n] \xrightarrow{\text{1ずつ乗算されると 1/(1-z^\{-1\})}} \mathcal{Z}[x[n]]=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

- 等比数列信号

$$x[n]=a^n \xrightarrow{\text{aずつ乗算されると 1/(1-az^\{-1\})}} \mathcal{Z}[x[n]]=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

- 等差数列信号

$$x[n]=n \longrightarrow \mathcal{Z}[x[n]]=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

逆変換も可能

- 例えば

$$X(z) = \frac{7z^2 - 10z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$X(z) = \frac{7 - 10z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{7 - 10z^{-1}}{(1 - 1z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

$$X(z) = 3\frac{1}{1 - z^{-1}} + 4\frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

$$x[n] = 3u[n] + 4 \cdot 2^n$$

z 変換してみよう

- 単位パルス信号

$$x[n] = \delta[n] \xrightarrow{\text{基本形は 1}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1$$

- 有限長の信号

単位遅れは

$$x[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \xrightarrow{\text{z^\{-1\}}} \mathcal{Z}[x[n]] = 4 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

- ステップ信号

1ずつ乗算されると

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{\text{1/(1-z^\{-1\})}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 等比数列信号

aずつ乗算されると

$$x[n] = a^n \xrightarrow{\text{1/(1-az^\{-1\})}} \mathcal{Z}[x[n]] = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

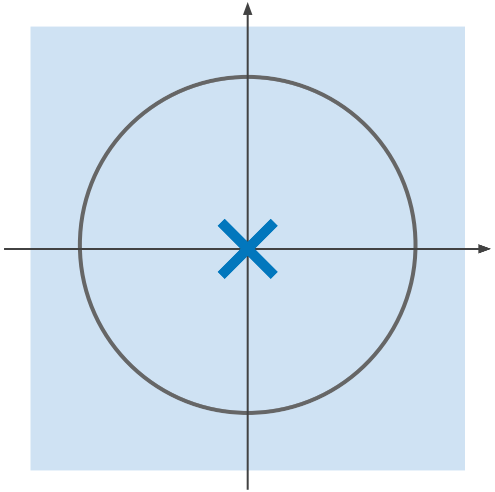
- 等差数列信号

$$x[n] = n \longrightarrow \mathcal{Z}[x[n]] = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

50

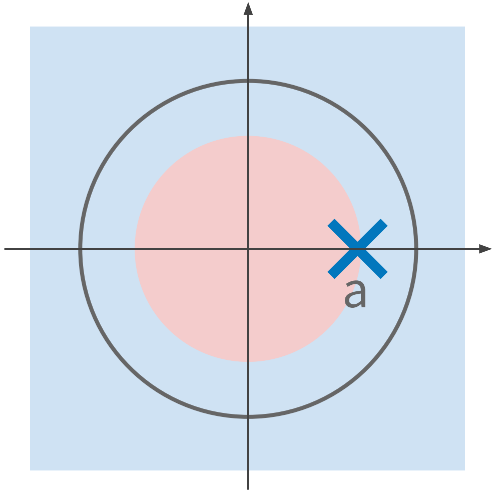
極と定義域 (収束域) について：
X(z) が無限大に発散する z が極になる．

$$\mathcal{Z}[x[n]] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$



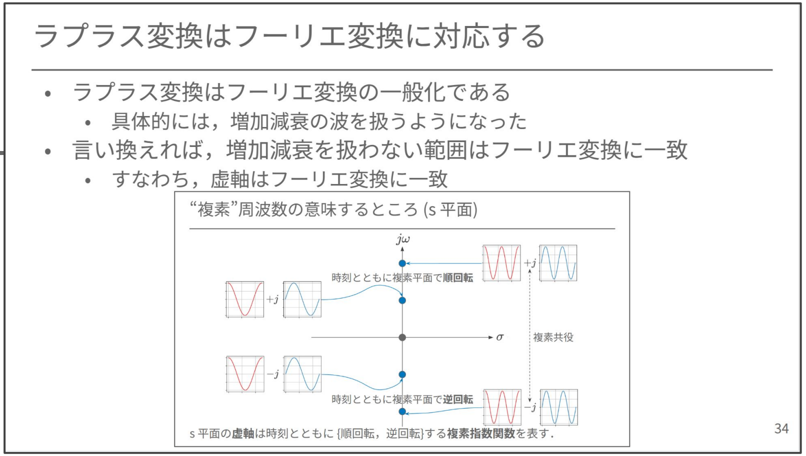
$$\mathcal{Z}[x[n]] = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

(0 < a < 1)



極の絶対値の外側がz変換の定義域になる。すなわち、z変換が有限の値として存在する z の範囲のこと。複数の極があるときは、一番外側の極の外側。

離散フーリエ変換との関係



- z 変換も離散フーリエ変換に対応する

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

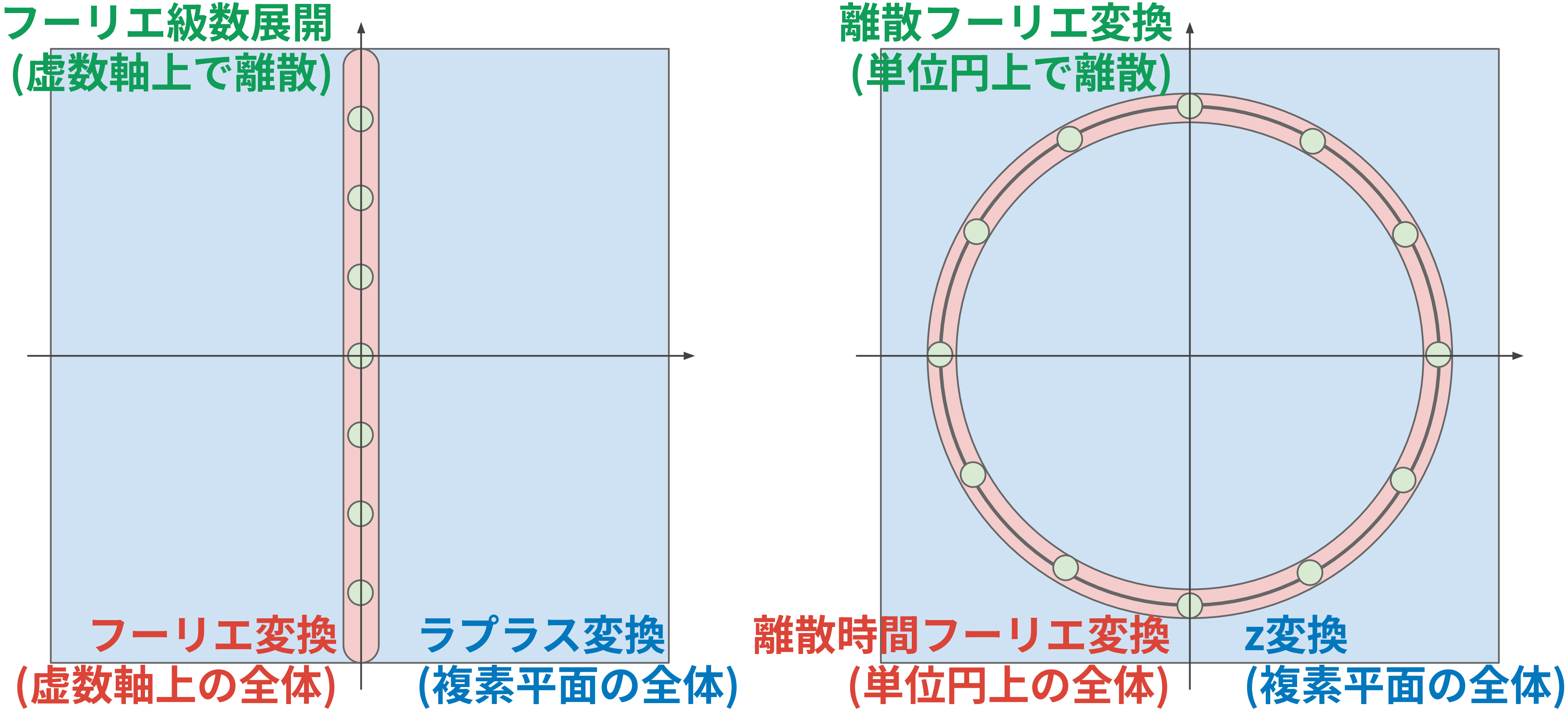
- 上式で z = e^{jω} にする
  - → すなわち単位円上だけを考えると**離散時間フーリエ変換**

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- さらに，ω = 2π k / N で離散化して区間を限定する
  - →すなわち，単位円上を N 等分割すると**離散フーリエ変換**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

離散フーリエ変換との関係

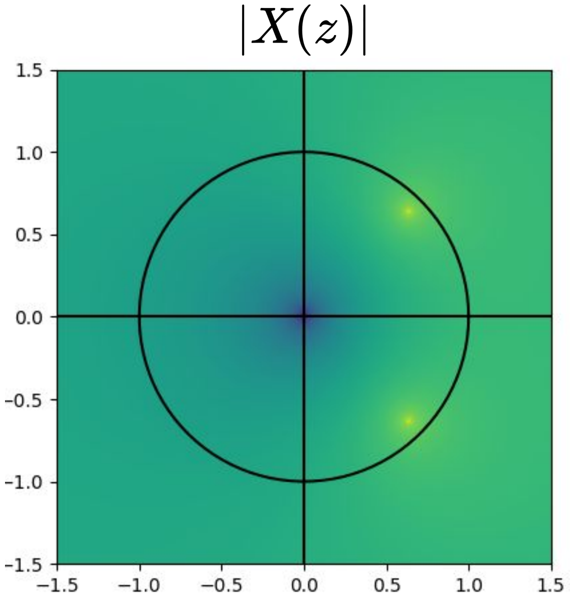


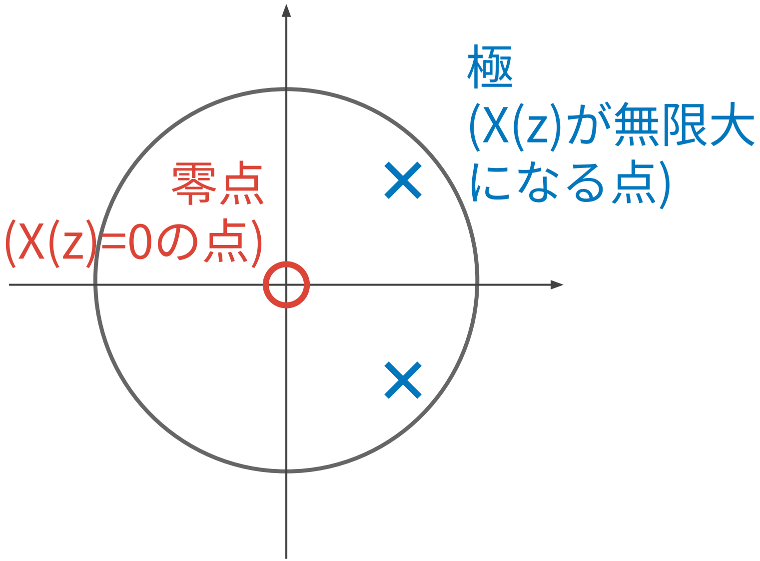
z変換の絶対値 |X(z)|

$$X(z) = \frac{1}{(1-0.9e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.9e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$

|X(z)| の解析解の導出手順は概略.

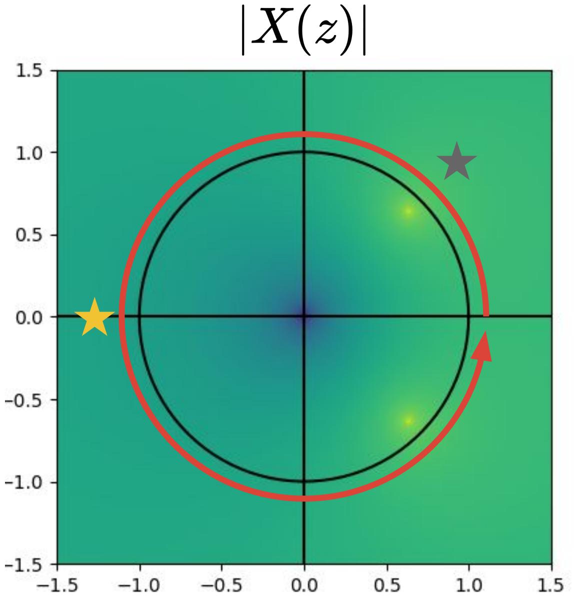
- 分母と分子に z^2 を乗算する.
- z = a + jb と置く.
- 分母と分子に，分母の複素共役を乗算して分母を実数にする

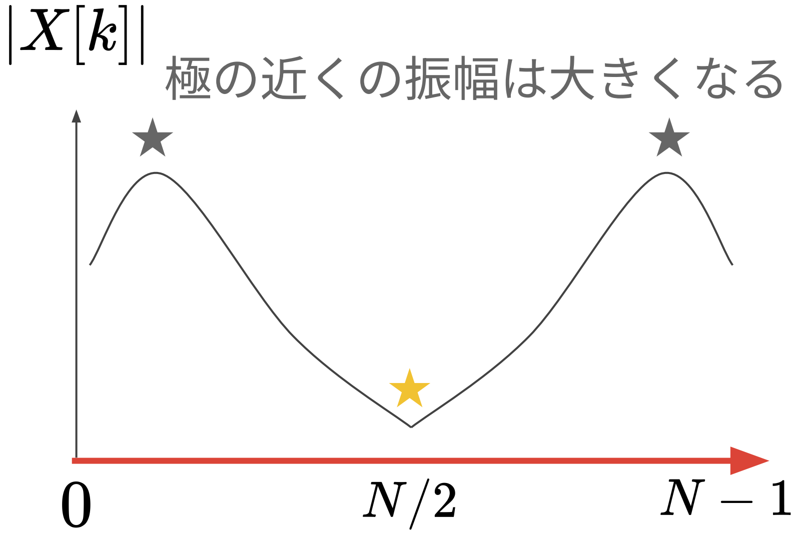




実数信号を扱う場合，極 (と零点) は実軸で線対称になる

z変換の振幅がわかれば，離散フーリエ変換の振幅スペクトルの概形がわかる





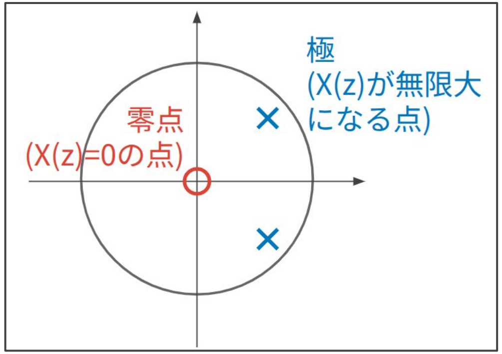
{離散時間, 離散}フーリエ変換の振幅スペクトルは単位円上の絶対値に等しい

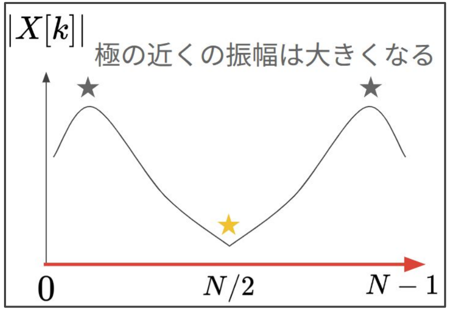
演習 (残りは課題)

- 次の離散時間信号について
  - z 変換を求めよ．
  - 極の位置を描画せよ．
  - 収束域を答えよ．
  - 極の位置から，離散フーリエ変換の振幅スペクトルの概形を描画せよ．

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^8}\right)^k \delta[n-8k]$$

(8サンプルごとに非零の値になり値が 1/2^8 ずつ小さくなる等比数列)



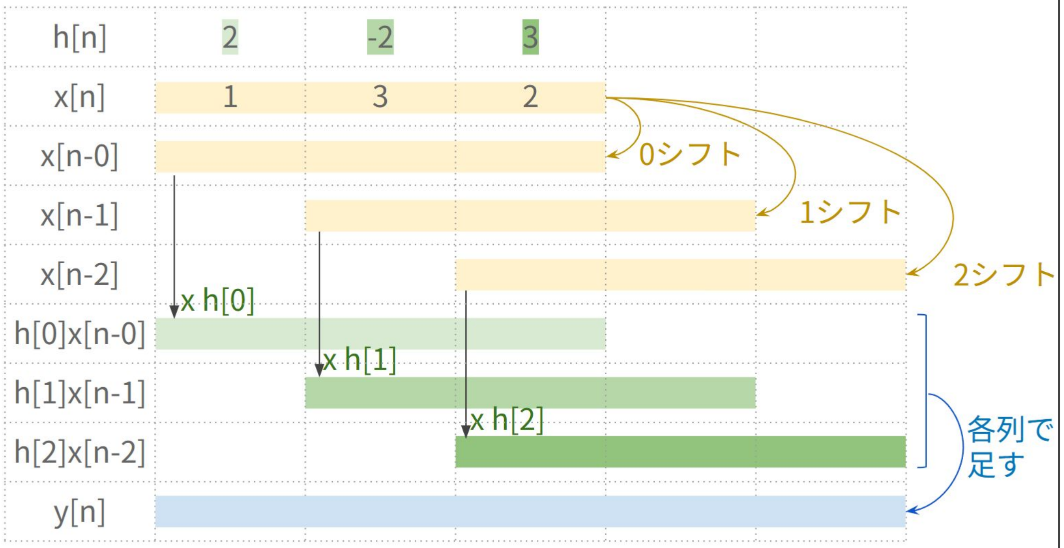


- ヒント
  - 等比数列の形（○^k）の形に変形する．
  - 極は実数解だけでない．複素解析の授業を思い出すこと．
  - 収束域は，最も外側にある極の外側．

時間領域の畳み込み演算は z 領域で乗算になる (これはフーリエ変換，ラプラス変換でも共通する)

$$\mathcal{Z}\left[h[n] * x[n]\right] = H(z)X(z)$$

x = [1, 3, 2], h = [2, 2, 3] とする．畳み込み結果 y [n] を求めよ．



$H(z)$

$X(z)$

$X(z)z^{-0}$

$X(z)z^{-1}$

$X(z)z^{-2}$

$h[0]X(z)z^{-0}$

$h[1]X(z)z^{-1}$

$h[2]X(z)z^{-2}$

$$\underbrace{(h[0]z^{-0} + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2})}_{H(z)}X(z)$$

第1回のスライドから

まとめ
(matome)

まとめ

- ラプラス変換
  - ラプラス変換は，時間減衰関数を導入することで，フーリエ変換できなかった信号も変換できるようにしたもの
  - フーリエ変換で使われる振動だけでなく，信号の増減も表せるもの
  - 減衰関数の強さで信号の増減を解析できるもの

- z変換
  - z 変換は，ラプラス変換の離散時間信号版
  - ラプラス変換と同様に，信号の増減を表現できる

課題
(exercise)

以下の課題についてレポートを作成し，LMS 上で提出せよ。

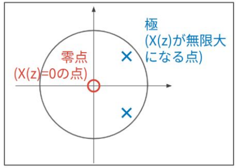
演習 (残りは課題)

- 以下の関数についてX(s) の実部・虚部をプロットし、その形状を比較・考察せよ。a, ω_0 には適当な値を使用せよ。
  - ステップ関数 ← 前のページのやつ
  - 指数関数 (a > 0)
  - 正弦波関数 (ω_0 > 0)
- sympy の関数
  - numpy と同じように定義されているケースが多い
  - sp.exp(), sp.sin(), sp.pi
- プロットする s の範囲を適宜変更せよ。

29

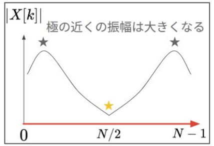
演習 (残りは課題)

- 次の離散時間信号について
  - z 変換を求めよ．
  - 極の位置を描画せよ．
  - 収束域を答えよ．
  - 極の位置から，離散フーリエ変換の振幅スペクトルの概形を描画せよ．



$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^8}\right)^k \delta[n-8k]$$

(8サンプルごとに非零の値になり値が 1/2^8 ずつ小さくなる等比数列)



- ヒント
  - 等比数列の形（◯^k）の形に変形する．
  - 極は実数解だけでない．複素解析の授業を思い出すこと．
  - 収束域は，最も外側にある極の外側．

56