Coend in L^p and its dual space

@takapad0123

2022 年 2 月 10 日

Definition 1.(有向点族 (nets)) X 有向集合であるとは, ある反順序が定義されており, 任意の元 x, y 対して, $x < z, y < z$ となるような z が存在する集合である. 有向集合 Λ から 集合 X への函数 x を有向点族といい, $\{x_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ と簡易的に記する. 特に, 有向集合 (directed sets) が自然数であるならば, その有向点族を数列と呼ぶ. φ を有向集合 M から Λ への写像とする. φ が単調増加であるとは M 上で $x < y$ ならば, Λ 上で $\varphi x < \varphi y$ を満たすことであり, 共終 (cofinal) であるとは, 任意の $x \in \Lambda$ に対して $x < \varphi y$ なる $y \in M$ が存在するばあいである. 集合 X 上の有向点族 x と単調増加共終函数 φ に対して, $x \circ \varphi$ を x の X 上の部分有向点族という.

Definition 2.(収束) $\{x_\lambda\}$ を空でない位相空間 X 上の有向点族とする. $\{x_\lambda\}$ が点 x に収束する, $\{x_\lambda\} \to x$, とは 点 x の任意の近傍 U に対して $\lambda > \alpha \Rightarrow x_\lambda \in U$ なる α が存在することである. また, 有向点族 $\{x_\lambda\}$ が集積点 (cluster points) x を持つとは, x に収束する部分有向点族があることである. 位相空間 X が Hausdorff であるとは, X 上の任意の有向点族の収束先が一意的であることである. 位相空間 X から位相空間 Y への写像 f が連続であるとは, X 上の任意の収束する有向点族 $\{x_\lambda\} \to x$ に対して, Y 上で $\{fx_\lambda\} \to fx$ を満たすことである. 位相空間 X と $X_\alpha (\alpha \in \lambda)$ そして, $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}$ に対して, X の $\{f_\alpha\}$ に依存した弱位相 (weak topology induced by $\{f_\alpha\}$) とは 各 f_α を連続ならしめる最弱の位相である.

Definition 3.(Compact) 位相空間 X が compact であるとは, X 上の任意の有向点族が集積点を持つことであり, 点列 compact であるとは, X 上の任意の数列が集積点を持つことである.

Definition 4.(稠密集合 (dense set)) 位相空間 X の部分集合 E が稠密であるとは, X 上の任意の点が E 上の有向点族の収束先となり得るときである. また, X が可分であるとは, 稠密かつ可算無限なる部分集合を持つときである.

Definition 5.(分解 (decompostion)) 位相空間 X に対する分解 $\mathscr{D}$ は互いに交わらない空でない部分集合よりなる集合のうち和集合が X になるものである. 分解空間の部分集合が開集合であるとは, その和集合が開集合であることである. また, $h : X \to \mathscr{D}, x \mapsto D(\ni x)$ を分解写像という.

Definition 6.(L^p 空間) X を可測集合とし, f を可測函数とする. $1 \le p < \infty$ に対して, L^p ノルムは $\|f\|_p = (\int_X |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ により定まる $\mathbb{R}$ への写像である. 各 p に対して, $L^p(X)$ は L^p ノルムが有限値となるような可測函数からなる集合とする. また, 有限測度の下では次が成り立つ. $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$ と $\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2}$.

Definition 7.(双対空間 (dual spaces)) X を可測集合とし, $1 \le p < \infty$ とする. $L^p(X)$ 上の線形汎函数 (liner functional) $T : L^p(X) \to \mathbb{R}$ は各 $f, g \in L^p(X)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して次を満たす写像である. $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$. また, $L^p(X)$ 上の線形汎函数が有界であるとは, 任意の $f \in L^p(X)$ に対して, $|Tf| \le c\|f\|_p$ なる c が存在せしときである. また有界な線形汎函数からなる集合を $L^p(X)$ の双対空間といい, $L^p(X)^*$ と記する. また, 線形汎函数の連続性はことさらなり.

Theorem 8. 可測集合 X と $1 \le p < \infty$ に対して, $L^p(X)$ は可分である.

Definition 9.(圏 (catogories)) 有向グラフは対象 (objects) の集合 O, 射 (arrows) の集合 A, 二つの写像 $\mathrm{cod}, \mathrm{dom} : A \to O$ よりなる. このグラフにおける射の合成可能対の集合は $A \times_O A = \{\langle g, f\rangle; g, f \in A \ and \ \mathrm{dom} g = \mathrm{cod} f\}$ であり, "O 上の積" と呼ぶ. 圏とは, グラフに恒等射および合成と呼ばれる二つの函数 $\mathrm{id} : O \to A, c \mapsto \mathrm{id}_c$ と $\circ : A \times_O A \to A, \langle g, f\rangle \mapsto g \circ f$ が加わり, すべての対象 $a \in O$ と射のすべての合成可能対 $\langle f, g\rangle \in A \times_O A$ について, $\mathrm{dom}(\mathrm{id} a) = a = \mathrm{cod}(\mathrm{id} a)$, $\mathrm{dom}(gf) = \mathrm{dom} f$, $\mathrm{cod}(gf) = \mathrm{cod} g$ であり次の公理を満たすものである. 以後, 射の合成は単に $fg(= f \circ g)$ と表す.

結合性 (associativity).
二つの合成可能対 $\langle f,g\rangle$ と $\langle g,h\rangle$ に対して, $(fg)h=f(gh)=fgh$ が成立する. これは次の図式の可換性を述べている;

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & d \\ b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "hg"] & c \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

単位元律 (unit low).
合成可能対 $\langle \mathrm{id},f\rangle$ と $\langle g,\mathrm{id}\rangle$ に対して, $\mathrm{id}f=f$ と $g\mathrm{id}=g$ が成立する. これは次の図式の可換性を述べている;

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "g"] & \\ & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

また, 圏 C に対して, C^{op} は圏であり C の射の向きを反対にしたものである. 以後, 圏 C に対して, 対象の集合を $\mathrm{Ob}C$, 射の集合を $\mathrm{Ar}C$ とする.

Definition 10. **Set** は全ての小さい集合を対象とし, 全ての小さい集合間の写像を射とする圏である. **Top** は全ての位相空間を対象とし, すべての位相空間間の連続写像を射とする圏である.

Definition 11.(函手 (functors)) C,D を圏とする. 函手 $F:C\to D$ は対象函数と射函数からなり次を満たすする. C の対象 c と射 $f:c'\to c''$ に対し, $T(c)$ は D の対象であり, $T(f):T(c')\to T(c'')$ は D は D の射であり, $T(1c)=1T(c)$ と $T(fg)=T(f)T(g)$ を保つ.

圏 A,B,C と函手 $F:C\to B, S:B\to A$ に対して, 合成函手 $T\circ S:C\to A$ は $f\mapsto T(S(f))$ により定まる函手である. この合成は結合的である.

圏 C,D とその対象 $d\in\mathrm{Ob}D$ に対して, $f\in\mathrm{Ar}C$ に対して, $\mathrm{id}_b\in\mathrm{Ar}D$ を対応させる函手 $C\to D$ は自然に存在し, b で表す.

Definition 12.(部分圏 (subcategories)) 圏 C の部分圏 D は次を満たす圏である. 各 D の対象と射は C のものに含まれる. 各対象 $c\in\mathrm{Ob}D$ に対して, $\mathrm{id}_c\in\mathrm{Ar}D$ である. 各射 $f:c\to c'\in\mathrm{Ar}D$ に対して, $c,c'\in\mathrm{Ob}D$ である. C の合成可能対 $\langle f,g\rangle$ に対し, $f,g\in\mathrm{Ar}D$ ならば, $fg\in\mathrm{Ar}D$ である.

Definition 13.(自然変換 (narural transformations)) $S,T:C\to B$ を函手とする. 自然変換 $\tau:S\xrightarrow{\bullet}T$ は次のような写像である. 各 $c\in\mathrm{Ob}C$ に対して, $\tau_c(=\tau c):Sc\to Tc$ は B の射であり, 任意の $f\in\mathrm{Ar}C$ に対して次の図式が可換となる.

$$c \xrightarrow{f} c'$$

$$\begin{tikzcd} Sc \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, "\tau_c"] & Sc' \arrow[d, "\tau_{c'}"] \\ Tc \arrow[r, "Tf"] & Tc' \end{tikzcd}$$

また, このとき τ_c は c で自然であるといい, τ_c を τ の c での成分という.

Definition 14.(Hom 集合 (Hom sets)) C を小さな hom 集合, $\hom(a,b)=\{f;C$ の射 $f:a\to b\}$, をもつ圏とする. 各対象 $a\in\mathrm{Ob}C$ に対して, 共変 hom 函手 (covariant hom-functor) $C(a,-):C\to\mathbf{Set}$ は $k:b\to b'\in C$ に対して, $\hom(a,f):\hom(a,b)\to\hom(a,b'), f\mapsto kf$ を対応させる函手である. 双対的に 反変 hom 函手 (cotravariant hom-functor)$\hom(-,a):C\to\mathbf{Set}$ は $k:b\to b'$ に対し, $\hom(k,a):\hom(b',a)\to\hom(b,a)$ を対応させる函手であり, $\hom(a,f)$ を f_*, $\hom(k,a)$ を k^* と表す. また, $f\in\hom(a',b)$ と $g:a\to a'$, $k:b\to b'$ に対して, $(kf)g=k(fg)$ を満たすことより次の図式の可換性が保証される.

$$\begin{tikzcd} \hom(a',b) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "k_*"'] & \hom(a,b) \arrow[d, "k_*"] \\ \hom(a',b) \arrow[r, "g^*"] & \hom(a,b') \end{tikzcd}$$

Definition 15.(水平合成 (horizontal composition)) $R,S,T:B\to C$ を函手とし, $\tau:R\xrightarrow{\bullet}S, \sigma:S\xrightarrow{\bullet}T$ を自然変換とする. このとき, $c\in C$ に対して, $\sigma_c\circ\tau_c$ を与え得る 自然変換, $\sigma\cdot\tau:R\xrightarrow{\bullet}T$, を水平合成という. これは次の図式の可換性を意味する.

$$\begin{tikzcd} Rc \arrow[r, "Rf"] \arrow[d, "\tau_c"'] \arrow[dd, bend right=60, "(\sigma\cdot\tau)_c"'] & Rc' \arrow[d, "\tau_{c'}"] \arrow[dd, bend left=60, "(\sigma\cdot\tau)_{c'}"] \\ Sc \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, "\sigma_c"'] & Sc' \arrow[d, "\sigma_{c'}"] \\ Tc \arrow[r, "Tf"] & Tc' \end{tikzcd}$$

Definition 16.(函手圏 (functor caregories)) 圏 C,B に対して, 函手圏 C^B は 函手 $B\to C$ を対象とし, 自然変換 $\tau:(S:B\to C)\xrightarrow{\bullet}(T:B\to C)$ を射とする圏である.

Definition 17.(積圏 (product categories)) 圏 C,D に対して, 積圏 $C\times D$ は C,D の対象と射, c,f,d,g に対し, $\langle c,d\rangle$ を対象とし $\langle f,g\rangle$ を射とする圏であり, $\langle f:c\to c',g:d\to d'\rangle$ と $\langle f':c'\to c'',g':$

$d' \to d''\rangle$ の合成は $\langle f'f : c \to c'', g'g : d \to d''\rangle$ で定まる．積の射影 $P : C \times D \to C$, $Q : C \times D \to D$ は函手であり, $P\langle f, g\rangle = f, Q\langle f, g\rangle = g$ を満たすものである．

また, 圏 B に対して, $R : B \to C$, $T : B \to D$ なる函手が存在するならば, 次の図式を可換となる $F : B \to C \times D$ なる函手が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, dashed, "F"] \arrow[dr, "T"] & \\ C & C \times D \arrow[l, "P"] \arrow[r, "Q"'] & D \end{tikzcd}$$

さらに, $U : B \to B'$, $V : C \to C'$ に対し, 次の図式を可換となる $U \times V : B \times C \to B' \times C'$ なる函手が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "U"'] & B \times C \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, dashed, "U\times V"] & C \arrow[d, "V"] \\ B' & B' \times C' \arrow[l, "P'"] \arrow[r, "Q'"'] & C' \end{tikzcd}$$

Definition 18.(双函手 (bifunctors)) $B \times C \to D$ なる函手を双函手と呼ぶ．

C を小さな hom 集合を持つ圏としたとき, $\hom : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ は双函手である．ここで, 共変, 反変函手は $\hom(-, c), \hom(c, -)$ である．

Definition 19.(極限と余極限 (limits and colimits)) 函手 $F : D \to C$ に対し, F の極限は対象 $b \in \mathrm{Ob}C$ であり, また, 自然変換 $\tau : b \xrightarrow{\bullet} F$ であり, 各 $\mu : d \xrightarrow{\bullet} F$ に対して, 次の図式が可換となる $h : d \to b$ なる射が一意的に存在するときである．

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dd, "f"] & F(i) \arrow[dd, "F(f)"'] & b \arrow[l, "\tau_i"'] \arrow[ddl, "\tau_j"] \\ & & \\ j & F(j) & d \arrow[l, "\mu_j"] \arrow[uul, "\mu_i"'] \arrow[uu, dotted, "h"'] \end{tikzcd}$$

また, F の極限を $\varprojlim F$ また明示的に, $\varprojlim_i F(i)$ と表す．

双対的に, 函手 $F : D \to C$ に対し, F の余極限は対象 $b \in \mathrm{Ob}C$ でありまた, 自然変換 $\tau : F \xrightarrow{\bullet} b$ であり, 各 $\mu : F \xrightarrow{\bullet} d$ に対して, 次の図式を可換となる $h : d \to b$ なる射が一意的に存在するときである．

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dd, "f"] & F(i) \arrow[dd, "F(f)"'] \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[ddr, "\mu_i"'] & b \arrow[dd, dotted, "h"] \\ & & \\ j & F(j) \arrow[r, "\mu_j"'] \arrow[uur, "\tau_j"] & d \end{tikzcd}$$

また, F の極限を $\varinjlim F$ また明示的に $\varinjlim_i F(i)$ と表す．

Definition 20.(フィルター圏 (Filtered categories)) フィルター圏は, 任意の対象 a, b に対して, $a \to \cdot \leftarrow b$ なる射が存在する圏である．

Theorem 21. P を有限圏とし, J をフィルター圏とする．また, $F : P \times J \to \mathbf{Set}$ に対し, $\varinjlim_j \varprojlim_p F(p, j) \to \varprojlim_p \varinjlim_j F(p, j)$ なる射が存在するならば, 同型である．

Definition 22.(対角自然変換 (dinatural trasformations)) $S, T : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ を函手とする．対角自然変換 $\tau : S \xrightarrow{\bullet\bullet} T$ は $c \mapsto \tau_c : S(c, c) \to T(c, c)$ という対応をもち, 各 $f : c' \to c \in \mathrm{Ar}C$ に対して次の図式が可換となる写像である．また, 各 τ_c を τ の $c \in \mathrm{Ob}C$ での成分 (component) という．

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[dd, "f"] & & S(c,c) \arrow[r, "\tau_c"] & T(c,c) \arrow[dr, "T(f,\mathrm{id})"] & \\ & S(c,c') \arrow[ur, "S(\mathrm{id},f)"] \arrow[dr, "S(f,\mathrm{id})"'] & & & T(c',c) \\ c & & S(c',c') \arrow[r, "\tau_{c'}"] & T(c',c') \arrow[ur, "T(\mathrm{id},f)"'] & \end{tikzcd}$$

Definition 23.(特別自然変換 (extranatural transformations)) $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ を函手とする．このときある $b \in \mathrm{Ob}B$ に対して, $- \mapsto \mathrm{id}_b$ を与える自明な函手 $T : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ が存在する．これによる対角自然変換 $\tau : S \xrightarrow{\bullet\bullet} T$ を特別自然変換といい．次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & S(c,c') \arrow[dl, "S(f,\mathrm{id})"'] \arrow[dr, "S(\mathrm{id},f)"] & \\ S(c',c') \arrow[d, "\tau_{c'}"] & & S(c,c) \arrow[d, "\tau_c"] \\ b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, equal] & b \end{tikzcd}$$

Definition 24.(Coend) C, D を圏とし, $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ を双函手とする．$\tau : S \xrightarrow{\bullet\bullet} b$ が特別自然変換で次を満たすならば, τ または $\langle b, \tau\rangle$ を S の coend といい, $b = \int^c S(c, c)$ と表す．各特別自然変換 $\mu : S \xrightarrow{\bullet\bullet} c$ に対して次の図式が可換となる射 $h : b \to c$ が一意的に存在し得る．

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & S(c,c') \arrow[dl, "S(f,\mathrm{id})"] \arrow[dr, "S(\mathrm{id},f)"] & \\ S(c',c') \arrow[d, "\mu_{c'}"] \arrow[drr, "\tau_{c'}"] & & S(c,c) \arrow[d, "\tau_c"] \arrow[dll, "\mu_c"] \\ c & & b \arrow[ll, dotted, "h"] \end{tikzcd}$$

また, coend の普遍性は明らかである．すなわ

ち, $\langle e,w\rangle$ と $\langle e',w'\rangle$ が共に函手の coend なれば, $w'=uw$ なる $u:e\to e'$ が一意的に存在する.

Theorem 25. P を有限圏とし, J をフィルター圏とする. また $F:P\times J^{\mathrm{op}}\times J\to\mathbf{Set}$ に対し, $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}_p\int^j F(p,j,j)\to\int^j\underleftarrow{\mathrm{Lim}}_p F(p,j,j)$ なる射が存在すれば同型である.

Theorem 26.(The Riesz Representation Theorem) $\mathbb{R}$ 上の可測集合 E (以後, 断りない限り E を $\mathbb{R}$ 上の可測集合とする.) と $1\le p<\infty$ に対して, $L^p(E)$ 上の任意の有界なる線形汎函数がある $g\in L^q(X)$ を以てして汎函数 $f\mapsto\int_E fg$ と同一視可能である. ここで, q は p の Hölder 共役である (i.e. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

Theorem 27.(Helley's thorem) X を可分な線形ノルム空間とし, $\{T_n\}$ をその双対空間上の数列とする. この数列が有界ならば集積点をもつ.

Theorem 28. E と $1\le p<\infty$ に対し, $L^p(E)$ 上の数列は $L^p(E)^*$ に依存した弱位相により集積点を持つ.

Theorem 29. X を小さい集合とし, V_X は各写像 $h:X\to A$ と $x\in X$ に対して, 値を与える写像とする. A が小さい集合として定まっている際に, V_X は次のような各 $X\in\mathrm{Ob}\mathbf{Set}$ に対し函数として同一視可能である,

$$V_X:\hom(X,A)\times X\to A,\ \langle h,x\rangle\mapsto hx,$$

ここで, 各 $f:Y\to X\in\mathrm{Ar}\mathbf{Set}$ に対し, $h(fx)=(hf)x$ が満たされるならば, 次の図式は可換となる,

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \quad & \hom(X,A)\times Y & \xrightarrow{(\mathrm{id},f)} & \hom(X,A)\times X \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle (f^*,\mathrm{id})} & & \downarrow{\scriptstyle V_X} \\
X & & \hom(Y,A)\times Y & \xrightarrow{\quad V_Y \quad} & A
\end{array}$$

すると, V_X は $V:\hom(-,A)\times-\xrightarrow{\bullet\bullet}A$ なる特別自然変換の成分となり, X および A で自然となる.

Definition 30. 可測集合 Y に対して, $L(Y)$ を各 $L^p(Y)(1\le p<\infty)$ を対象とし, 射を包含写像からなる圏すれば, フィルター圏となる. $X\in\mathrm{Ob}L(E)$ に対して, 以後断りがない場合は, $\hom(X,\mathbb{R})$ を有界なる線形汎函数からなる集合とし, 対象 $L^p(X)$ を単に p とも表す. いま $V_X:\hom(X\in\mathrm{Ob}L(E),\mathbb{R})\times X\to\mathbb{R},\langle T,f\rangle\mapsto Tf$ なる写像を定めたとき, $f\in\mathrm{Ar}L(E)$ に対して, $T(fx)=(Tf)x$ を満たすので, 先述した通り, 特別自然変換 $V:\hom(-,\mathbb{R})\times-\xrightarrow{\bullet\bullet}\mathbb{R}$ が得られる.

Theorem 31. $L(E)$ の射は連続である.

Definition 32. 各 $X\in\mathrm{Ob}L(E)$ に対して, 集合 $\hom(X,\mathbb{R})\times X$ 上で $T_1(f_1)=T_2(f_2)$ ならば $\langle T_1,f_1\rangle\sim\langle T_2,f_2\rangle$ なる同値関係を定める. 以後, $\hom(X,\mathbb{R})\times X$ はこの同値関係による分解とする.

Theorem 33. 特別自然変換 $V:\hom(-,\mathbb{R})\times-\xrightarrow{\bullet\bullet}\mathbb{R}\in\mathrm{Ob}\mathbf{Top}$ は coend である.

Proof 始めに V の各成分が連続かつ全単射であることを示す. $\{x_\lambda\}$ を $\hom(i,\mathbb{R})\times i$ 上の収束する有向点族とする. ならば, 各成分もまた収束し, $x_\lambda(1)\to x(1),x_\lambda(2)\to x(2)$ である. ここで, $x(1)(x(2))$ の近傍を U とすると, $x(1)$ の連続性より, $\lambda>\alpha$ ならば $x(1)(x_\lambda(2))\in U$ である α が存在する. さらに, $x_\lambda(1)\to x(1)$ であるので, $\lambda'>\alpha,\lambda>\beta$ ならば $x_\lambda(1)(x_{\lambda'}(2))\in U$ である β も存在する. 従いて, V の各成分は連続である. また全単射性は明らかである.

$W:\hom(-,\mathbb{R})\times-\xrightarrow{\bullet\bullet}S\in\mathrm{Ob}\mathbf{Top}$ を特別自然変換とする. 各 $x\in\mathbb{R}$ に対し $Tf=x$ なる $\langle T,f\rangle$ に対して, 函数 $\varphi:x\mapsto W_p\langle T,f\rangle$ を与えるものとする. これは, p に依存せずに定まるものであることは同値関係の定義より明らかである.

次にこの φ が連続であることを示す. $\{x_\lambda\}\to x$ を $\mathbb{R}$ 上の収束する有向点族とする. すると, 各 λ に対して, $T_\lambda f_\lambda=x_\lambda$ なる $\langle T_\lambda,f_\lambda\rangle$ と $Tf=x$ なる $\langle T,f\rangle$ が存在し, さらに, $\langle T_\lambda,f_\lambda\rangle=\langle T,f\rangle_\lambda\to\langle T,f\rangle$ であるので, φ は連続である.

参考文献

[1] S.Willard, *General topology*, LYHN H.LOOMIS, (1950)

[2] H.L.Royden, P.M.Fitzpartrick *real analysis*, Pearson Education Asia Limitedd. China Machine Press, (2010)

[3] S.MacLane, *Categorise for the workingmathmatician*, Springer-Verlag New York, (1978)