基数不変量入門

修正版

野呂秀貴

国立大学法人静岡大学

December 9, 2023

定理 1 (Cantor,1874)

自然数の濃度 $\aleph_0$ と実数の濃度 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ の対して, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ である.

予想 2 (連続体仮説 (Cantor))

連続体仮説 *(CH)* すなわち 「$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ が成立する.」 が成立する.

定理 1 (Cantor,1874)

自然数の濃度 $\aleph_0$ と実数の濃度 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ の対して, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ である.

予想 2 (連続体仮説 (Cantor))

連続体仮説 *(CH)* すなわち 「$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ が成立する.」 が成立する.

定理 3 (Gödel,1940)

「*ZFC* から *CH* の否定が証明できない」

定理 4 (Cohen,1966)

「*ZFC* から *CH* が証明できない」

$\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ の間はどれくらい違いがあるのか?

事実 5

- 実数は可算個の疎集合の和集合で表せない.
- 実数上の可算個のルベーグ零集合の和集合はルベーグ零集合である.
- 可算個の自然数の列 $\langle x_i^j \,;\, i \in \omega \rangle$, $j \in \omega$, に対して, ある自然数の列 $\langle x_i \,;\, i \in \omega \rangle$ が存在して 次を満たす:

$$\forall j \in \omega \exists N \in \omega \forall i > N \; x_i^j < x_i$$

- 可算個の有界な実数列 $\langle x_i^j \,;\, i \in \omega \rangle$, $j \in \omega$, に対して, ある無限集合 $A \subset \omega$ が存在して,

$$\forall j \in \omega \text{「} \langle x_i^j \,;\, i \in A \rangle \text{ は収束する. 」}$$

定義 6

集合 X に対して, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ がイデアルであるとは,

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ かつ $X \notin \mathcal{I}$,
- $\forall x, y \in \mathcal{I}\ (x \cup y \in \mathcal{I})$,
- $\forall x \in \mathcal{P}(X) \forall y \in \mathcal{I}\ (x \subset y \implies x \in \mathcal{I})$,
- $\bigcup \mathcal{I} = X$

定義 6

集合 X に対して, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ がイデアルであるとは,

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ かつ $X \notin \mathcal{I}$,
- $\forall x, y \in \mathcal{I}\ (x \cup y \in \mathcal{I})$,
- $\forall x \in \mathcal{P}(X) \forall y \in \mathcal{I}\ (x \subset y \implies x \in \mathcal{I})$,
- $\bigcup \mathcal{I} = X$

例 7

これらはイデアルである.

- $\{X \subset \mathbb{R};$ "X は可算集合." $\}$,
- $\mathcal{N} = \mathcal{L} = \{X \subset \mathbb{R};$ "X はルベーグ零集合." $\}$,
- $\mathcal{M} = \mathcal{B} = \{X \subset \mathbb{R};$ "X は疎集合の可算和集合." $\}$,

定義 8

$\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ のイデアルに対して, 次を定める.

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\, \exists \mathcal{A} \in [\mathcal{I}]^\kappa \ \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$,
- $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\, \exists B \in [X]^\kappa \ B \notin \mathcal{I}\}$,
- $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\, \forall \mathcal{A} \in [\mathcal{I}]^\kappa \ \bigcup \mathcal{A} = X\}$,
- $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\, \exists \mathcal{J} \in [\mathcal{I}]^\kappa \ \forall x \in \mathcal{I} \exists y \in \mathcal{J} \ (x \subset y)\}$.

ここで, $[X]^\kappa = \{Y \subset X\,;\, |Y| = \kappa\}$.

定義 8

$\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ のイデアルに対して, 次を定める.

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\ \exists \mathcal{A} \in [\mathcal{I}]^\kappa\ \ \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$,
- $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\ \exists B \in [X]^\kappa\ \ B \notin \mathcal{I}\}$,
- $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\ \forall \mathcal{A} \in [\mathcal{I}]^\kappa\ \ \bigcup \mathcal{A} = X\}$,
- $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa\,;\ \exists \mathcal{J} \in [\mathcal{I}]^\kappa\ \forall x \in \mathcal{I} \exists y \in \mathcal{J}\ (x \subset y)\}$.

ここで, $[X]^\kappa = \{Y \subset X\,;\ |Y| = \kappa\}$.

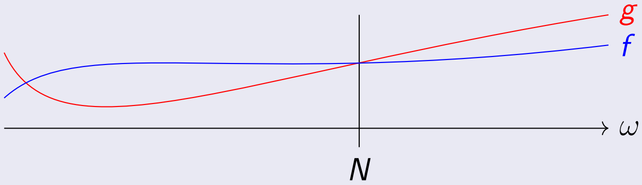
事実 9

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$,
- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$,

定義 10

- $\mathfrak{d} = \min\{\kappa \leq 2^{\aleph_0} ; \exists \mathcal{A} \in [{}^{\omega}\omega]^{\kappa} \forall f \in {}^{\omega}\omega \; \exists g \in \mathcal{A} \; (f <^* g)\}$,
- $\mathfrak{b} = \min\{\kappa \leq 2^{\aleph_0} ; \exists \mathcal{A} \in [{}^{\omega}\omega]^{\kappa} \forall f \in {}^{\omega}\omega \; \exists g \in \mathcal{A} \; \neg(g <^* f)\}$,

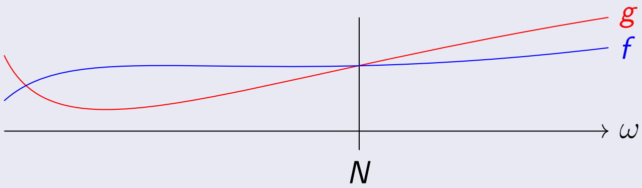
ここで, ${}^{\omega}\omega$ は $f : \omega \to \omega$ な函数からなる集まりで,
$f <^* g$ *iff* $\exists N \in \omega \forall n > N \; f(n) < g(n)$ $(f, g \in {}^{\omega}\omega)$.



定義 10

- $\mathfrak{d} = \min\{\kappa \leq 2^{\aleph_0} ; \exists \mathcal{A} \in [{}^\omega\omega]^\kappa \forall f \in {}^\omega\omega\ \exists g \in \mathcal{A}\ (f <^* g)\}$,
- $\mathfrak{b} = \min\{\kappa \leq 2^{\aleph_0} ; \exists \mathcal{A} \in [{}^\omega\omega]^\kappa \forall f \in {}^\omega\omega\ \exists g \in \mathcal{A}\ \neg(g <^* f)\}$,

ここで, ${}^\omega\omega$ は $f : \omega \to \omega$ な函数からなる集まりで,
$f <^* g$ *iff* $\exists N \in \omega \forall n > N\ f(n) < g(n)\ (f, g \in {}^\omega\omega)$.



事実 11

$\aleph_1 \leq \mathfrak{b} = \mathrm{cof}(\mathfrak{b}) \leq \mathrm{cof}(\mathfrak{d}) \leq \mathfrak{d} \leq 2^{\aleph_0}$.

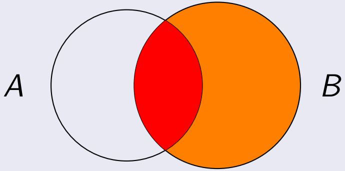
定理 12 (Cichoń's diagram)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

とくに, $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$ と $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ が成立している.

定義 13

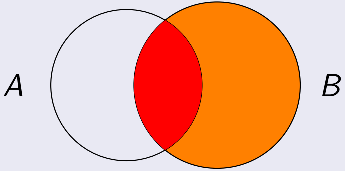
2 つの無限部分集合 $A, B \subset \omega$ に対して，「A は B を分割する」 とは，$A \cap B$ と $B \setminus A$ がともに無限集合であるときである．



- $\mathfrak{s} = \min\{\kappa\,;\,\exists\mathcal{A} \in [[\omega]^\omega]^\kappa \forall B \in [\omega]^\omega \exists A \in \mathcal{A}$「$A$ は B を分割する.」$\}$.
- $\mathfrak{r} = \min\{\kappa\,;\,\exists\mathcal{A} \in [[\omega]^\omega]^\kappa \forall B \in [\omega]^\omega \exists A \in \mathcal{A}\ \neg$「$A$ は B を分割する.」$\}$

定義 13

2 つの無限部分集合 $A, B \subset \omega$ に対して，「A は B を分割する」とは，$A \cap B$ と $B \setminus A$ がともに無限集合であるときである．



- $\mathfrak{s} = \min\{\kappa\,;\, \exists \mathcal{A} \in [[\omega]^\omega]^\kappa \forall B \in [\omega]^\omega \exists A \in \mathcal{A}$「$A$ は B を分割する.」$\}$.
- $\mathfrak{r} = \min\{\kappa\,;\, \exists \mathcal{A} \in [[\omega]^\omega]^\kappa \forall B \in [\omega]^\omega \exists A \in \mathcal{A}\ \neg$「$A$ は B を分割する.」$\}$

事実 14

実数上の有界列からなる集まり B にたいして

$$\mathfrak{r} = \min\{\kappa \leq 2^{\aleph_0}\,;\, \exists \mathcal{A} \in [B]^\kappa \forall A \in [\omega]^\omega \exists f \in \mathcal{A}\text{「}f|_A \text{ は収束しない.」}\}$$

定義 15

2 の函数 $f, g \in {}^{\omega}\omega$ が「やがて異なる」とは, ある $N \in \omega$ が存在して, 任意の $n > N$ に対して $f(n) \neq g(n)$ である.

- $\mathfrak{d}(\boldsymbol{Ed}) = \min\{\kappa\,;\ \exists \mathcal{A} \in [{}^{\omega}\omega]^{\kappa} \forall f \in {}^{\omega}\omega \exists g \in \mathcal{A}$「$g$ と f はやがて異なる」$\}$,
- $\mathfrak{b}(\boldsymbol{Ed}) = \min\{\kappa\,;\ \exists \mathcal{A} \in [{}^{\omega}\omega]^{\kappa} \forall f \in {}^{\omega}\omega \exists g \in \mathcal{A}\ \neg$「$g$ と f はやがて異なる」$\}$

定義 15

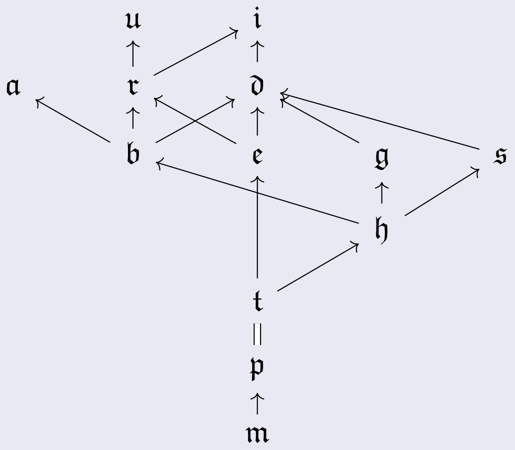
2 の函数 $f, g \in {}^\omega\omega$ が「やがて異なる」とは, ある $N \in \omega$ が存在して, 任意の $n > N$ に対して $f(n) \neq g(n)$ である.

- $\mathfrak{d}(\boldsymbol{Ed}) = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{A} \in [{}^\omega\omega]^\kappa \forall f \in {}^\omega\omega \exists g \in \mathcal{A}$「$g$ と f はやがて異なる」$\}$,
- $\mathfrak{b}(\boldsymbol{Ed}) = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{A} \in [{}^\omega\omega]^\kappa \forall f \in {}^\omega\omega \exists g \in \mathcal{A}\ \neg$「$g$ と f はやがて異なる」$\}$

定理 16

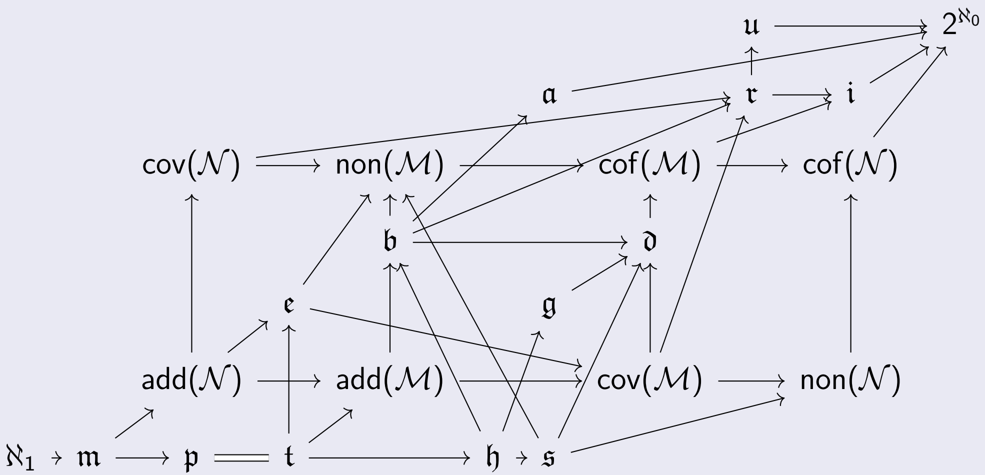
- $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{d}(\boldsymbol{Ed})$,
- $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \mathfrak{b}(\boldsymbol{Ed})$.

定理 17 (Blass diagram)



- $\mathfrak{u}$: *ultrafilter number*
- $\mathfrak{i}$: *indenpendence number*
- $\mathfrak{a}$: *almost disjoint number*
- $\mathfrak{r}$: *unsplitting number*
- $\mathfrak{e}$: *evasion number*
- $\mathfrak{g}$: *gorupwise dense number*
- $\mathfrak{s}$: *splitting number*
- $\mathfrak{h}$: *distributivity number*
- $\mathfrak{t}$: *tower number*
- $\mathfrak{p}$: *pseudointersection number*
- $\mathfrak{m}$: *Martin's axiom number*

定理 18 (Cichoń-Blass diagram)



定義 19

2 つの集合と関係の組 $\mathbf{R} = (A, B, \sqsubset)$ を *relation system* という.

- $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \min\{\kappa\,;\, \exists \mathcal{B} \in [B]^{\kappa} \forall a \in A \exists b \in \mathcal{B}\ a \sqsubset b\}$,
- $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \min\{\kappa\,;\, \exists \mathcal{A} \in [A]^{\kappa} \forall b \in B \exists a \in \mathcal{A}\ a \not\sqsubset b\}$.

2 つの *relation systems* $\mathbf{R} = (A, B, \sqsubset)$ と $\mathbf{S} = (X, Y, \lhd)$ に対して,
Tukey 射 $\varphi = (\varphi_-, \varphi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$, *Tuker order* $\mathbf{R} \leq_T \mathbf{S}$, とは

- $\varphi_- : A \to X$,
- $\varphi_+ : Y \to B$,
- $\varphi_-(a) \lhd y \implies a \sqsubset \varphi_+(y)$ がすべての $a \in A$ と $y \in Y$ に対して成立する.

さらに, このような *Tukey* 射が存在するとき, 次が成立する.

- $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq \mathfrak{d}(\mathbf{S})$,
- $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) \geq \mathfrak{b}(\mathbf{S})$.

$\mathbf{R} \leq_T \mathbf{S}$ かつ $\mathbf{S} \leq_T \mathbf{R}$ であるとき, $\mathbf{R}$ と $\mathbf{S}$ は *Tukey equivalent* といい, $\mathbf{R} \approx_T \mathbf{S}$ とかく.

事実 20

Relation system ${}^{\omega}\omega = ({}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, <^*)$ に対して,

- $\mathfrak{b}({}^{\omega}\omega) = \mathfrak{b}$,
- $\mathfrak{d}({}^{\omega}\omega) = \mathfrak{d}$.

事実 20

Relation system ${}^\omega\omega = ({}^\omega\omega, {}^\omega\omega, <^*)$ に対して,

- $\mathfrak{b}({}^\omega\omega) = \mathfrak{b}$,
- $\mathfrak{d}({}^\omega\omega) = \mathfrak{d}$.

事実 21

イデアル $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して, *relation systems* を定める.

- $\mathcal{I} = (\mathcal{I}, \mathcal{I}, \subset)$,
- $\mathbf{C}_\mathcal{I} = (X, \mathcal{I}, \in)$.

このとき, 次が成立する.

- $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathrm{add}(\mathcal{I})$,
- $\mathfrak{d}(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{I})$,
- $\mathfrak{b}(\mathbf{C}_\mathcal{I}) = \mathrm{non}(\mathcal{I})$,
- $\mathfrak{d}(\mathbf{C}_\mathcal{I}) = \mathrm{cov}(\mathcal{I})$.

Cichoń's diagram(再掲)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

とくに, $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$ と $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ が成立している.

Cichoń's diagram(再掲)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}}) \arrow[r] & \mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}) \arrow[r] & \mathfrak{d}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathfrak{d}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b}({}^{\omega}\omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d}({}^{\omega}\omega) \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathfrak{b}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathfrak{b}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

とくに, $\mathfrak{b}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}})\}$ と $\mathfrak{d}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}), \mathfrak{d}\}$ が成立している.

Cichoń's diagram(再掲)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}}) \arrow[r] & \mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}) \arrow[r, dotted] & \mathfrak{d}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathfrak{d}(\mathcal{N}) \arrow[r, dotted] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b}({}^{\omega}\omega) \arrow[u] \arrow[r, dotted] & \mathfrak{d}({}^{\omega}\omega) \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r, dotted] & \mathfrak{b}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathfrak{b}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r, dotted] & \mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

とくに, $\mathfrak{b}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{d}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}})\}$ と $\mathfrak{d}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{b}(\mathbf{C}_{\mathcal{M}}), \mathfrak{d}\}$ が成立している.

Cichoń's diagram(再再掲)

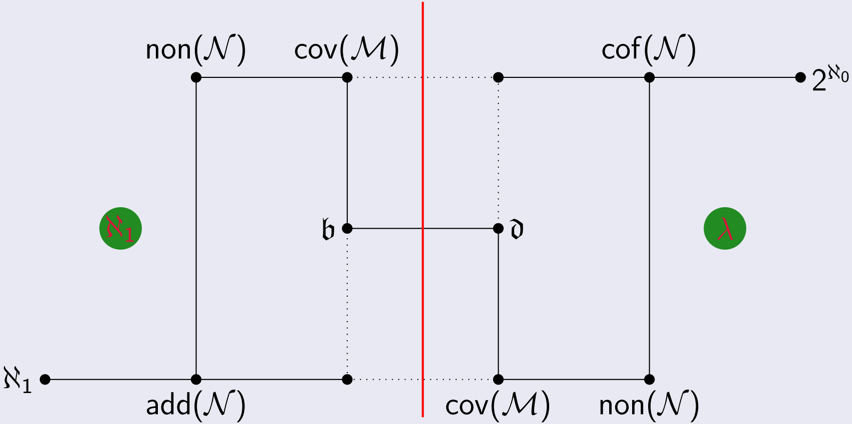
$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

とくに, $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathrm{cov}(\mathcal{M})\}$ と $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ が成立している.

Q. この図式に現れる基数不変量を異なる値に分離させるモデルは存在するのか?

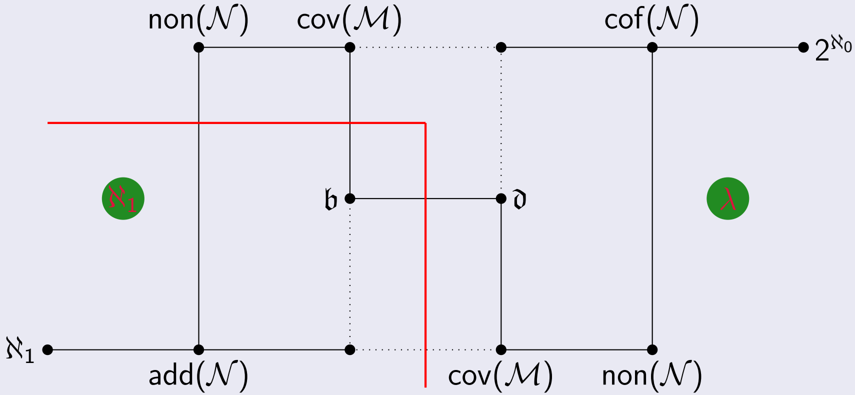
定理 22 (Cohen Forcing)

長さ $\lambda(=\lambda^{\aleph_0})$ の *Cohen forcing* の *FS-itaration* を考えると，以下のように分離できる．



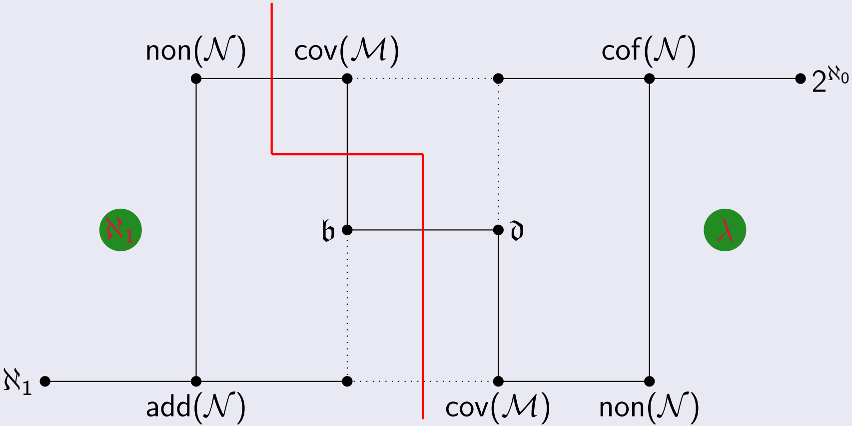
定理 23 (Random Forcing)

長さ $\lambda(=\lambda^{\aleph_0})$ の *Random forcing* の *FS-itaration* を考えると，以下のように分離できる．



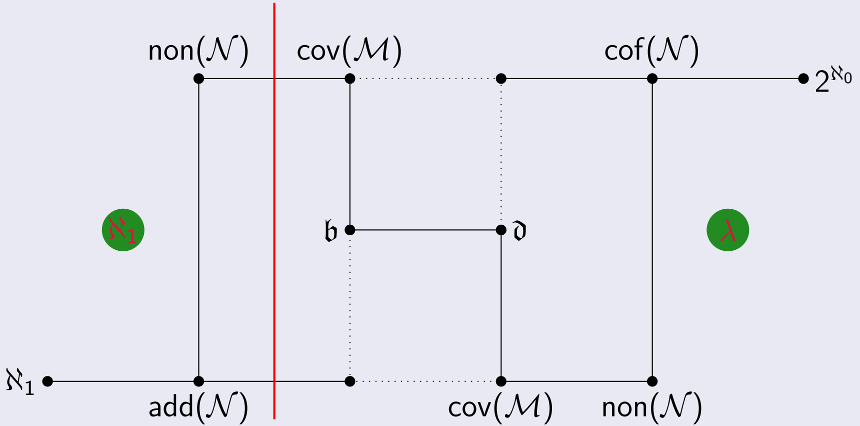
定理 24 (Eventually different Forcing)

長さ $\lambda(=\lambda^{\aleph_0})$ の *ED forcing* の *FS-itaration* を考えると，以下のように分離できる．



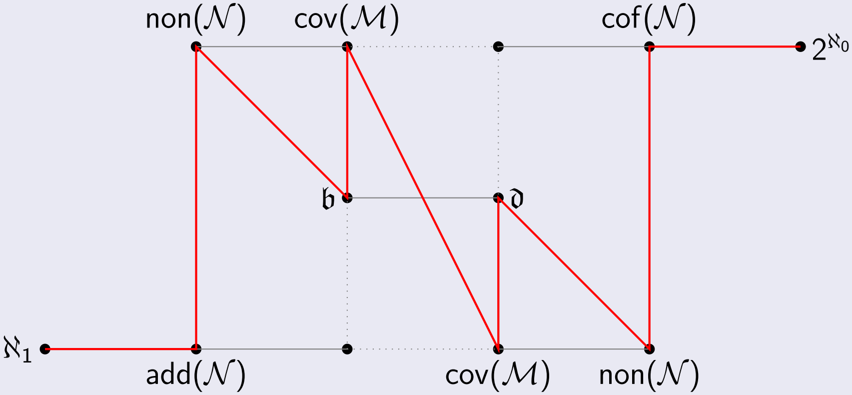
定理 25 (Hechler Forcing)

長さ $\lambda(=\lambda^{\aleph_0})$ の *Hechler forcing* の *FS-itaration* を考えると，以下のように分離できる．



定理 26 (Cichoń's maximum [GKS19])

巨大基数を仮定すれば，*Cishoń's diagram* に現れる，($\mathrm{add}(\mathcal{M})$ と $\mathrm{cof}(\mathcal{M})$ を除く）すべての基数を同時に異なる値に強制出来る．



定義 27 (Slaloms)

不空な可算集合の列 $b = \langle b(n)\,;\, n \in \omega \rangle$ と $\bar{I} = \langle I_n \subset \mathcal{P}(b(n))\,;\, n \in \omega \rangle$ に対し

- *Slaloms*
  - $\mathcal{S}(b, \bar{I}) = \prod_{n \in \omega} I_n$,
  - $x \in \prod_{n \in \omega} b(n)$ と $S \in \mathcal{S}(b, \bar{I})$ に対して,
    - ★ $x \in^* S$ *iff* $\forall^\infty n \in \omega\ x(n) \in S(n)$,
    - ★ $x \in^\infty S$ *iff* $\exists^\infty n \in \omega\ x(n) \in S(n)$.
- *Adaptive Slaloms*
  - $\mathcal{S}_a(b, \bar{I}) = \left\{ \pi\,;\, \mathrm{dom}\,\pi = \bigcup_{n \in \omega} \prod_{k \in n} b(k) \wedge \forall n \in \omega \forall s \in \prod_{k \in n} b(k)\ \pi(s) \in I_n \right\}$
  - $x \in \prod_{n \in \omega} b(n)$ と $\pi \in \mathcal{S}_a(b, \bar{I})$ に対して,
    - ★ $x \in^*_a \pi$ *iff* $\forall^\infty n \in \omega\ x(n) \in \pi(x|_n)$,
    - ★ $x \in^\infty_a \pi$ *iff* $\exists^\infty n \in \omega\ x(n) \in \pi(x|_n)$.

- Slaloms
  - $\mathrm{Lc}(b,\bar{I}) = (\prod_{n\in\omega} b(n), \mathcal{S}(b,\bar{I}), \in^*)$,
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{Lc}(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{Lc}(b,\bar{I}))$,
  - $\mathrm{aLc}(b,\bar{I}) = (\mathcal{S}(b,\bar{I}), \prod_{n\in\omega} b(n), \not\ni^\infty)$.
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(b,\bar{I}))$.
- Adaptive slaloms
  - $\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}) = (\prod_{n\in\omega} b(n), \mathcal{S}_a(b,\bar{I}), \in^*_a)$,
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}))$,
  - $\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}) = (\mathcal{S}_a(b,\bar{I}), \prod_{n\in\omega} b(n), \not\ni^\infty_a)$.
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}))$.

- Slaloms
  - $\mathrm{Lc}(b,\bar{I}) = (\prod_{n\in\omega} b(n), \mathcal{S}(b,\bar{I}), \in^*)$,
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{Lc}(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{Lc}(b,\bar{I}))$,
  - $\mathrm{aLc}(b,\bar{I}) = (\mathcal{S}(b,\bar{I}), \prod_{n\in\omega} b(n), \not\ni^\infty)$.
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(b,\bar{I}))$.
- Adaptive slaloms
  - $\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}) = (\prod_{n\in\omega} b(n), \mathcal{S}_a(b,\bar{I}), \in^*_a)$,
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}))$,
  - $\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}) = (\mathcal{S}_a(b,\bar{I}), \prod_{n\in\omega} b(n), \not\ni^\infty_a)$.
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}))$.

次のようなケースに分類して, 調べていく.

1. I_n が一点集合,
2. $|I_n| \leq k$,
3. $|I_n| \leq h(n)$ $(h \in {}^\omega\omega)$,
4. $I_n = [b(n)]^{<\aleph_0}$,
5. $b(n) \setminus I_n$ が無限集合,
6. I_n は真部分集合.

- Slaloms
  - $\mathrm{Lc}(b,\bar{I}) = (\prod_{n\in\omega} b(n), \mathcal{S}(b,\bar{I}), \in^*)$,
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{Lc}(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{Lc}(b,\bar{I}))$,
  - $\mathrm{aLc}(b,\bar{I}) = (\mathcal{S}(b,\bar{I}), \prod_{n\in\omega} b(n), \not\ni^\infty)$.
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(b,\bar{I}))$.
- Adaptive slaloms
  - $\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}) = (\prod_{n\in\omega} b(n), \mathcal{S}_a(b,\bar{I}), \in^*_a)$,
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{Lc}_a(b,\bar{I}))$,
  - $\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}) = (\mathcal{S}_a(b,\bar{I}), \prod_{n\in\omega} b(n), \not\ni^\infty_a)$.
    - $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}))$,
    - $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}_a(b,\bar{I}))$.

次のようなケースに分類して，調べていく．

1. I_n が一点集合，
2. $|I_n| \leq k$,
3. $|I_n| \leq h(n)$ $(h \in {}^\omega\omega)$,
4. $I_n = [b(n)]^{<\aleph_0}$,
5. $b(n) \setminus I_n$ が無限集合，
6. I_n は真部分集合．

定義 28 (Slaloms ($|I_n| \leq h(n)$))

$h \in {}^\omega\omega$ と 不空集合からなる列 $b = \langle b(n) ; n \in \omega \rangle$ に対して, 次を定める.

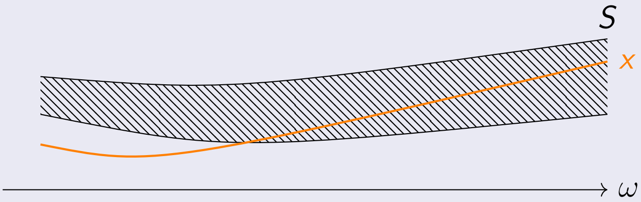
- $\prod b = \prod\{b(n) ; n \in \omega\}$,
- $\mathcal{S}(b,h) = \prod\{[b(n)]^{\leq h(n)} ; n \in \omega\}$.

$x \in \prod b$ と $S \in \mathcal{S}(b,h)$ に対して, 関係を定める.

- $x \in^* S$ iff $\forall^\infty n \in \omega\ x(n) \in S(n)$,
- $x \in^\infty S$ iff $\exists^\infty\ n \in \omega\ x(n) \in S(n)$.

このとき, 2 つの *relation systems* が定義される.

- $\mathrm{Lc}(b,h) = (\prod b, \mathcal{S}(b,h), \in^*)$,
- $\mathrm{aLc}(b,h) = (\mathcal{S}(b,h), \prod b, \not\ni^\infty)$.



定理 29 ([CM23])

$h \geq^* 1$ であるとき, $\mathrm{aLc}(\omega, h) \cong_T \boldsymbol{Ed}$ が成立する.
ここで, $\boldsymbol{Ed} = ({}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \neq^*)$ である.
さらに, $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(\omega, h)) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$, $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(\omega, h)) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ である.

定理 29 ([CM23])

$h \geq^* 1$ であるとき, $\mathrm{aLc}(\omega, h) \cong_T \boldsymbol{Ed}$ が成立する.
ここで, $\boldsymbol{Ed} = ({}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \neq^*)$ である.
さらに, $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(\omega, h)) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$, $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(\omega, h)) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ である.

定理 30 ([Bar84])

$h \in {}^\omega\omega$ が発散するとき, $\mathrm{Lc}(\omega, h) \cong_T \mathcal{N}$ が成立する.

定理 29 ([CM23])

$h \geq^* 1$ であるとき, $\mathrm{aLc}(\omega, h) \cong_T \boldsymbol{Ed}$ が成立する.
ここで, $\boldsymbol{Ed} = ({}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \neq^*)$ である.
さらに, $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(\omega, h)) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$, $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(\omega, h)) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ である.

定理 30 ([Bar84])

$h \in {}^\omega\omega$ が発散するとき, $\mathrm{Lc}(\omega, h) \cong_T \mathcal{N}$ が成立する.

定理 31 ([CKM22])

$\mathfrak{b}(\mathrm{Lc}(h, b))$, $\mathfrak{d}(\mathrm{Lc}(h, b))$, $\mathfrak{b}(\mathrm{aLc}(h, b))$, $\mathfrak{d}(\mathrm{aLc}(h, b))$, はそれぞれ連続体個数互いに異なる値となるモデルが存在する.

Question.

一般の場合でも次のようなことが言えるのか

- Lc などの $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ の値を既知の基数不変量で表示可能か?
- Lc などの $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ の同種類の値を同時に複数個違う値に強制出来るのか?
- Lc などの $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ の異種類の値を同時に複数個違う値に強制出来るのか?

ご清聴ありがとうございました.

[Bar84] Tomek Bartoszyński.
Additivity of measure implies additivity of category.
Trans. Amer. Math. Soc., 281(1):209–213, 1984.

[Bar87] Tomek Bartoszyński.
Combinatorial aspects of measure and category.
Fund. Math., 127(3):225–239, 1987.

[Bla10] Andreas Blass.
Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.
In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 395–489. Springer, Dordrecht, 2010.

[CKM22] Miguel Antonio Cardona, Lukas Daniel Klausner, and Diego Alejandro Mejía.
Continuum many different things: Localisation, anti-localisation and yorioka ideals, 2022.

[CM23] Miguel A. Cardona and Diego Alejandro Mejía.
Localization and anti-localization cardinals, 2023.

[GKMS21] Martin Goldstern, Jakob Kellner, Diego A. Mejía, and Saharon Shelah.
Preservation of splitting families and cardinal characteristics of the continuum.
Israel J. Math., 246(1):73–129, 2021.

[GKS19] Martin Goldstern, Jakob Kellner, and Saharon Shelah.
Cichoń’ s maximum.
Annals of Mathematics, 190(1), July 2019.

[MS15] M. Malliaris and S. Shelah.
Cofinality spectrum theorems in model theory, set theory and general topology, 2015.

[Sch97] Marion Scheepers.
The least cardinal for which the Baire category theorem fails.
Proc. Amer. Math. Soc., 125(2):579–585, 1997.