# 基数不変量

## evasion and prediction numbers

**修正版**

野呂秀貴

国立大学法人静岡大学/大学院自然科学教育部/情報科学

令和 6 年 10 月 14 日

## 復習 1

*Lebesgue* 測度 $0$ の集合で実数全体を覆うにはどのくらい必要か?

可算個の組み合わせで覆うことはあり得るか?

連続体濃度の組み合わせで覆うことはあり得るか?

## 復習 1

*Lebesgue* 測度 $0$ の集合で実数全体を覆うにはどのくらい必要か?

可算個の組み合わせで覆うことはあり得るか?

ムリ．絶対ムリ．

連続体濃度の組み合わせで覆うことはあり得るか?

## 復習 1

*Lebesgue* 測度 $0$ の集合で実数全体を覆うにはどのくらい必要か?

可算個の組み合わせで覆うことはあり得るか?

ムリ. 絶対ムリ.

連続体濃度の組み合わせで覆うことはあり得るか?

出来うる. 一点集合からなる集まりを考えればよい.

## 復習 1

*Lebesgue* 測度 $0$ の集合で実数全体を覆うにはどのくらい必要か?

可算個の組み合わせで覆うことはあり得るか?

ムリ. 絶対ムリ.

連続体濃度の組み合わせで覆うことはあり得るか?

出来うる. 一点集合からなる集まりを考えればよい.

そのような, 個数の中で最小な個数 (基数) を $\mathbf{cov}(\mathcal{N})$ と呼び, $\aleph_1 \leq \mathbf{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ であった.

## 復習 1

*Lebesgue* 測度 $0$ の集合で実数全体を覆うにはどのくらい必要か?

可算個の組み合わせで覆うことはあり得るか?

ムリ. 絶対ムリ.

連続体濃度の組み合わせで覆うことはあり得るか?

出来うる. 一点集合からなる集まりを考えればよい.

そのような, 個数の中で最小な個数 (基数) を $\mathbf{cov}(\mathcal{N})$ と呼び, $\aleph_1 \leq \mathbf{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ であった.

## 復習 2

$$\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \cap\{\kappa\,;\exists\mathcal{D} \in [{}^{\omega}\omega]^{\kappa}\forall b \in {}^{\omega}\omega\exists a \in \mathcal{D}\ a \not\leq^{*} b\}$$ *(unbonded number)*,

$$\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \cap\{\kappa\,;\exists\mathcal{F} \in [{}^{\omega}\omega]^{\kappa}\forall a \in {}^{\omega}\omega\exists b \in \mathcal{F}\ a \leq^{*} b\},$$ *(dominating number)*.

上で定義される基数は *ZFC* 上でどのような関係が知られているか?

## 復習 1

*Lebesgue* 測度 $0$ の集合で実数全体を覆うにはどのくらい必要か?

可算個の組み合わせで覆うことはあり得るか?

ムリ. 絶対ムリ.

連続体濃度の組み合わせで覆うことはあり得るか?

出来うる. 一点集合からなる集まりを考えればよい.

そのような, 個数の中で最小な個数 (基数) を $\mathbf{cov}(\mathcal{N})$ と呼び. $\aleph_1 \leq \mathbf{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ であった.

## 復習 2

$\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \cap\{\kappa\,;\exists\mathcal{D} \in [{}^\omega\omega]^\kappa \forall b \in {}^\omega\omega \exists a \in \mathcal{D}\ a \not\leq^* b\}$ *(unbonded number)*,

$\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \cap\{\kappa\,;\exists\mathcal{F} \in [{}^\omega\omega]^\kappa \forall a \in {}^\omega\omega \exists b \in \mathcal{F}\ a \leq^* b\}$, *(dominating number)*.

上で定義される基数は *ZFC* 上でどのような関係が知られているか?

*ZFC* から $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$ が示されていた.

## 復習 3 (Cichoń's diagram)

$$\begin{tikzcd}
& 3 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 11 \arrow[r] & 12 \\
& & 5 \arrow[u] \arrow[r] & 8 \arrow[u] & & \\
1 \arrow[r, "\leq"] & 2 \arrow[uu] \arrow[r] & 4 \arrow[u] \arrow[r] & 7 \arrow[u] \arrow[r] & 10 \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

とくに, $4 = 5 \cap 7$ と $9 = 6 \cup 8$ が成立している.

## 復習 3 (Cichoń's diagram)

$$
\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 11 \arrow[r] & 12 \\
 & & 5 \arrow[u] \arrow[r] & 8 \arrow[u] & & \\
1 \arrow[r, "\leq"] & 2 \arrow[uu] \arrow[r] & 4 \arrow[u] \arrow[r] & 7 \arrow[u] \arrow[r] & 10 \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

とくに, $4 = 5 \cap 7$ と $9 = 6 \cup 8$ が成立している.

**語群**

子. $\aleph_1$, 丑. $\mathfrak{c}$, 寅. $\mathfrak{b}$, 卯. $\mathfrak{d}$, 辰. $\mathbf{add}(\mathcal{N})$, 巳. $\mathbf{cof}(\mathcal{N})$,

午. $\mathbf{non}(\mathcal{N})$, 未. $\mathbf{cov}(\mathcal{N})$, 申. $\mathbf{add}(\mathcal{M})$, 酉. $\mathbf{cof}(\mathcal{M})$, 戌. $\mathbf{non}(\mathcal{M})$, 亥. $\mathbf{cov}(\mathcal{M})$.

## 復習 3 (Cichoń's diagram)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathrm{non}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathfrak{c} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{d} & & & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\aleph_1 & \xrightarrow{\leq} & \mathrm{add}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathrm{add}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{non}(\mathcal{N}) & &
\end{array}$$

とくに, $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{b} \cap \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ と $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}) \cup \mathfrak{d}$ が成立している.

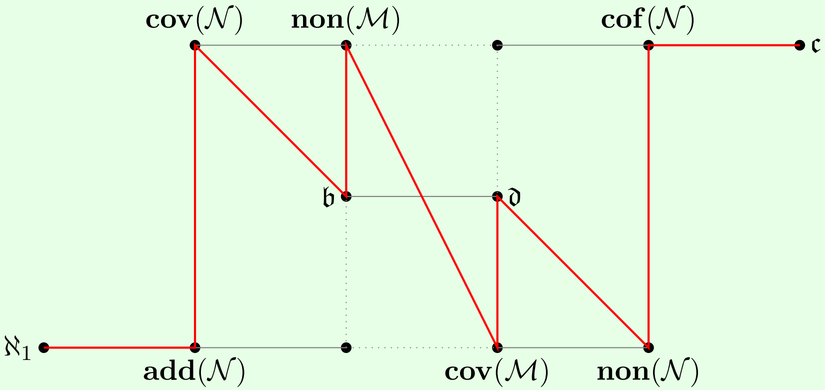
**語群**

子. $\aleph_1$, 丑. $\mathfrak{c}$, 寅. $\mathfrak{b}$, 卯. $\mathfrak{d}$, 辰. $\mathrm{add}(\mathcal{N})$, 巳. $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$,

午. $\mathrm{non}(\mathcal{N})$, 未. $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$, 申. $\mathrm{add}(\mathcal{M})$, 酉. $\mathrm{cof}(\mathcal{M})$, 戌. $\mathrm{non}(\mathcal{M})$, 亥. $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

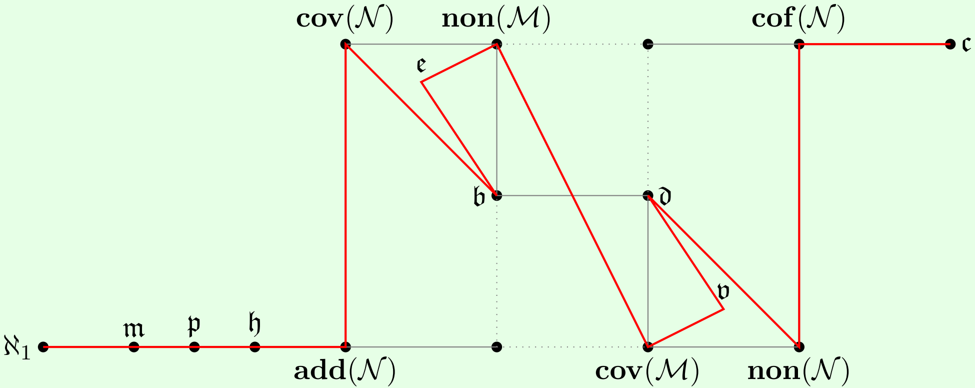
## 定理 4 (Cichoń's maximum [GKS19])

*Cishoń's diagram* に現れる, ($\mathbf{add}(\mathcal{M})$ と $\mathbf{cof}(\mathcal{M})$ を除く) すべての基数を同時に異なる値に強制出来る.



## 定理 5 ([GKMS21, Yam24])

次のように分離可能である.



## 定義 6

*3* つの集合 *(*関係*)* の組 $\mathbf{R} = (A, B, \sqsubset)$ を *relational system* という*.*

$$\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \cap\{\kappa\,; \exists\mathcal{B} \in [B]^\kappa \forall a \in A \exists b \in \mathcal{B}\ a \sqsubset b\},\ \textit{(dominating number)},$$

$$\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \cap\{\kappa\,; \exists\mathcal{A} \in [A]^\kappa \forall b \in B \exists a \in \mathcal{A}\ a \not\sqsubset b\}\ \textit{(unbonded number)}.$$

*2* つの *relational systems* $\mathbf{R} = (A, B, \sqsubset)$ と $\mathbf{S} = (X, Y, \lhd)$ に対して*,*
*Tukey* 射 $\varphi = (\varphi_-, \varphi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$*, Tuker order* $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{S}$*,* とは

$$\varphi_- : A \to X,$$

$$\varphi_+ : Y \to B,$$

$$\varphi_-(a) \lhd y \implies a \sqsubset \varphi_+(y)$$

*for all* $a \in A$ *and* $y \in Y$*.*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, mapsto, "\varphi_-"] & \sqsubset & \varphi_+(y) \\ \varphi_-(a) & \lhd & y \arrow[u, mapsto, "\varphi_+"'] \end{tikzcd}$$

さらに*,* このような *Tukey* 射が存在するとき*,* 次が成立する*.*

$$\mathfrak{b}(\mathbf{R}) \geq \mathfrak{b}(\mathbf{S}), \qquad \mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq \mathfrak{d}(\mathbf{S}).$$

$\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{S}$ かつ $\mathbf{S} \preceq_T \mathbf{R}$ であるとき*,* $\mathbf{R}$ と $\mathbf{S}$ は *Tukey equivalent* といい*,* $\mathbf{R} \cong_T \mathbf{S}$ とかく*.*

## 定義 7 (Slaloms)

函数 $h\colon \omega \to \omega+1\setminus 1$ から定まる *well-pruned* $\omega$-木 $T=\prod f$ と $h\colon \omega \to \omega+1\setminus 1$ に対して, *relational systems* を定める.

*Localozation*

$$\mathbf{Lc}(T,h) = (\prod f, \mathcal{S}(T,h), \in^*)$$

*Anti-localization*

$$\mathbf{aLc}(T,h) = (\mathcal{S}(T,h), T, \not\ni^\infty)$$

ここで集合と関係は次のように定められる.

$$\mathcal{S}(T,h) = \prod \langle [f(n)]^{\leq h(n)} \,;n\in\omega\rangle.$$

$x \in^* \varphi$ *iff* $\forall^\infty n\in\omega\ x(n)\in\varphi(n)$, $\quad$ $x \in^\infty \varphi$ *iff* $\exists^\infty n\in\omega\ x(n)\in\varphi(n)$,

**定理 8 ([Bar84])**

$h \in {}^{\omega}\omega$ が発散するとき, $\mathbf{Lc}({}^{<\omega}\omega, h) \cong_T \mathcal{N}$ が成立する.

**定理 9 ([CM23])**

$h \geq^* 1$ であるとき, $\mathbf{aLc}({}^{<\omega}\omega, h) \cong_T \mathbf{Ed}$ が成立する.
ここで, $\mathbf{Ed} = ({}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, \neq^*)$ である.
さらに, $\mathbf{aLc}({}^{<\omega}\omega, h) \cong_T \mathbf{Ed} \preceq_T \mathbf{C}_{\mathcal{B}}$ である.

**定理 8 ([Bar84])**

$h \in {}^\omega\omega$ が発散するとき, **Lc**$({}^{<\omega}\omega, h) \cong_T \mathcal{N}$ が成立する.

**定理 9 ([CM23])**

$h \geq^* 1$ であるとき, **aLc**$({}^{<\omega}\omega, h) \cong_T$ **Ed** が成立する.
ここで, **Ed** $= ({}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \neq^*)$ である.
さらに, **aLc**$({}^{<\omega}\omega, h) \cong_T$ **Ed** $\preceq_T \mathbf{C}_{\mathcal{B}}$ である.

**定理 10 ([CKM24])**

$\mathfrak{b}($**Lc**$(f,h))$, $\mathfrak{d}($**Lc**$(f,h))$, $\mathfrak{b}($**aLc**$(f,h))$, $\mathfrak{d}($**aLc**$(f,h))$ をそれぞれ連続体個数 互いに異なる値となるモデルが存在する.
ここで, **Lc**$(f,h) =$ **Lc**$(\prod f, h)$ である.

## 定義 11 (Evasion and Prediction)

*well-pruned* $\omega$-木 $T$ と 函数 $h\colon \omega \to \omega + 1 \setminus 1$ に対して, 次の集まりを考える.

$$\mathrm{Pr}^{-}_{T,h} = \left\{ \Pi\colon \mathrm{dom}(\Pi) \to \mathcal{P}(\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \sigma \in \mathrm{dom}(\Pi)\ \Pi(\sigma) \in [\mathrm{succ}_T(\sigma)]^{\leq h(|\sigma|)} \wedge \\ \mathrm{dom}(\Pi) = \cup\{\mathrm{Lv}_n(T) \mid n \in A\} \\ \textit{for some infinite set } A \in [\omega]^{\omega} \end{array} \right\}$$

## 定義 11 (Evasion and Prediction)

*well-pruned* $\omega$-木 $T$ と 函数 $h\colon \omega \to \omega + 1 \setminus 1$ に対して, 次の集まりを考える.

$$\mathrm{Pr}^{-}_{T,h} = \left\{ \Pi\colon \operatorname{dom}(\Pi) \to \mathcal{P}(\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \sigma \in \operatorname{dom}(\Pi)\ \Pi(\sigma) \in [\mathrm{succ}_T(\sigma)]^{\leq h(|\sigma|)} \wedge \\ \operatorname{dom}(\Pi) = \cup\{\mathrm{Lv}_n(T) \mid n \in A\} \\ \textit{for some infinite set } A \in [\omega]^{\omega} \end{array} \right\}$$

さらに, $x \in \lim T$ と $\mathrm{Pr}^{-}_{T,h}$ と $k \in \omega \setminus 1$ に対して, 関係 $\in^k$:

$$x \in^k \Pi \textit{ iff } \forall^\infty n \in \operatorname{dom}(\Pi) \exists l \in A_\Pi\ \ \mathrm{rank}_{A_\Pi \setminus n, \in}(l) \in k \wedge x(n+l) \in \Pi(x|_{n+l})$$

を定義する.

## 定義 11 (Evasion and Prediction)

*well-pruned* $\omega$-木 $T$ と 函数 $h\colon \omega \to \omega + 1 \setminus 1$ に対して, 次の集まりを考える.

$$\mathrm{Pr}^{-}_{T,h} = \left\{ \Pi\colon \mathrm{dom}(\Pi) \to \mathcal{P}(\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \sigma \in \mathrm{dom}(\Pi)\ \Pi(\sigma) \in [\mathrm{succ}_T(\sigma)]^{\leq h(|\sigma|)} \wedge \\ \mathrm{dom}(\Pi) = \cup\{\mathrm{Lv}_n(T) \mid n \in A\} \\ \textit{for some infinite set } A \in [\omega]^{\omega} \end{array} \right\}$$

さらに, $x \in \lim T$ と $\mathrm{Pr}^{-}_{T,h}$ と $k \in \omega \setminus 1$ に対して, 関係 $\in^k$:

$$x \in^k \Pi \textit{ iff } \forall^{\infty} n \in \mathrm{dom}(\Pi) \exists l \in A_{\Pi}\ \ \mathrm{rank}_{A_{\Pi} \setminus n, \in}(l) \in k \wedge x(n+l) \in \Pi(x|_{n+l})$$

を定義する. この関係により, 次の *relational system* と基数不変量が定義できる:

$\textbf{Pre}^{k,-}_{T,h} = \langle \mathrm{Lim}\, T, \mathrm{Pr}^{-}_{T,h}, \in^k \rangle$.

$$\mathfrak{e}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{b}(\textbf{Pre}^{k,-}_{T,h}), \qquad \mathfrak{v}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{d}(\textbf{Pre}^{k,-}_{T,h}).$$

## 定義 11 (Evasion and Prediction)

*well-pruned* $\omega$-木 $T$ と 函数 $h\colon \omega \to \omega + 1 \setminus 1$ に対して, 次の集まりを考える.

$$\mathrm{Pr}^{-}_{T,h} = \left\{ \Pi\colon \mathrm{dom}(\Pi) \to \mathcal{P}(\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \sigma \in \mathrm{dom}(\Pi)\ \Pi(\sigma) \in [\mathrm{succ}_T(\sigma)]^{\leq h(|\sigma|)} \wedge \\ \mathrm{dom}(\Pi) = \cup\{\mathrm{Lv}_n(T) \mid n \in A\} \\ \textit{for some infinite set } A \in [\omega]^{\omega} \end{array} \right\}$$

さらに, $x \in \lim T$ と $\mathrm{Pr}^{-}_{T,h}$ と $k \in \omega \setminus 1$ に対して, 関係 $\in^k$:

$$x \in^k \Pi \textit{ iff } \forall^\infty n \in \mathrm{dom}(\Pi) \exists l \in A_\Pi\ \ \mathrm{rank}_{A_\Pi \setminus n, \in}(l) \in k \wedge x(n+l) \in \Pi(x|_{n+l})$$

を定義する.　この関係により, 次の *relational system* と基数不変量が定義できる:

$$\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h} = \langle \mathrm{Lim}\, T, \mathrm{Pr}^{-}_{T,h}, \in^k \rangle.$$

$$\mathfrak{e}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{b}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}), \qquad \mathfrak{v}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{d}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}).$$

## 定義 11 (Evasion and Prediction)

*well-pruned* $\omega$-木 $T$ と 函数 $h\colon \omega \to \omega+1 \setminus 1$ に対して, 次の集まりを考える.

$$\mathrm{Pr}^{-}_{T,h} = \left\{ \Pi\colon \mathrm{dom}(\Pi) \to \mathcal{P}(\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\sigma \in \mathrm{dom}(\Pi)\ \Pi(\sigma) \in [\mathrm{succ}_T(\sigma)]^{\leq h(|\sigma|)} \wedge \\ \mathrm{dom}(\Pi) = \cup\{\mathrm{Lv}_n(T) \mid n \in A\} \\ \textit{for some infinite set } A \in [\omega]^{\omega} \end{array} \right\}$$

さらに, $x \in \lim T$ と $\mathrm{Pr}^{-}_{T,h}$ と $k \in \omega \setminus 1$ に対して, 関係 $\in^k$:

$$x \in^k \Pi \textit{ iff } \forall^\infty n \in \mathrm{dom}(\Pi) \exists l \in A_\Pi\ \ \mathrm{rank}_{A_\Pi \setminus n, \in}(l) \in k \wedge x(n+l) \in \Pi(x|_{n+l})$$

を定義する.　この関係により, 次の *relational system* と基数不変量が定義できる:

$\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h} = \langle \mathrm{Lim}\, T, \mathrm{Pr}^{-}_{T,h}, \in^k \rangle.$

$\mathfrak{e}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{b}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}),$　　$\mathfrak{v}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{d}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}).$

## 定義 11 (Evasion and Prediction)

*well-pruned* $\omega$-木 $T$ と 函数 $h\colon \omega \to \omega + 1 \setminus 1$ に対して, 次の集まりを考える.

$$\mathrm{Pr}^{-}_{T,h} = \left\{ \Pi\colon \operatorname{dom}(\Pi) \to \mathcal{P}(\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \sigma \in \operatorname{dom}(\Pi)\ \Pi(\sigma) \in [\mathrm{succ}_T(\sigma)]^{\leq h(|\sigma|)} \land \\ \operatorname{dom}(\Pi) = \cup\{\mathrm{Lv}_n(T) \mid n \in A\} \\ \textit{for some infinite set } A \in [\omega]^{\omega} \end{array} \right\}$$

さらに, $x \in \lim T$ と $\mathrm{Pr}^{-}_{T,h}$ と $k \in \omega \setminus 1$ に対して, 関係 $\in^{k}$:

$$x \in^{k} \Pi \textit{ iff } \forall^{\infty} n \in \operatorname{dom}(\Pi) \exists l \in A_{\Pi}\ \ \mathrm{rank}_{A_{\Pi} \setminus n, \in}(l) \in k \land x(n+l) \in \Pi(x|_{n+l})$$

を定義する. この関係により, 次の *relational system* と基数不変量が定義できる:

$$\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h} = \langle \mathrm{Lim}\, T, \mathrm{Pr}^{-}_{T,h}, \in^{k} \rangle.$$

$$\mathfrak{e}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{b}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}), \qquad \mathfrak{v}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{d}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}).$$

## 定義 11 (Evasion and Prediction)

*well-pruned* $\omega$-木 $T$ と 函数 $h\colon \omega \to \omega + 1 \setminus 1$ に対して, 次の集まりを考える.

$$\mathrm{Pr}^{-}_{T,h} = \left\{ \Pi\colon \mathrm{dom}(\Pi) \to \mathcal{P}(\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \sigma \in \mathrm{dom}(\Pi)\ \Pi(\sigma) \in [\mathrm{succ}_T(\sigma)]^{\leq h(|\sigma|)} \wedge \\ \mathrm{dom}(\Pi) = \cup\{\mathrm{Lv}_n(T) \mid n \in A\} \\ \textit{for some infinite set } A \in [\omega]^{\omega} \end{array} \right\}$$

さらに, $x \in \lim T$ と $\mathrm{Pr}^{-}_{T,h}$ と $k \in \omega \setminus 1$ に対して, 関係 $\in^k$:

$$x \in^k \Pi \textit{ iff } \forall^\infty n \in \mathrm{dom}(\Pi) \exists l \in A_\Pi\ \ \mathrm{rank}_{A_\Pi \setminus n, \in}(l) \in k \wedge x(n+l) \in \Pi(x|_{n+l})$$

を定義する. この関係により, 次の *relational system* と基数不変量が定義できる:

$$\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h} = \langle \mathrm{Lim}\, T, \mathrm{Pr}^{-}_{T,h}, \in^k \rangle.$$

$$\mathfrak{e}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{b}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}), \qquad \mathfrak{v}^{k,-}_{T,h} = \mathfrak{d}(\mathbf{Pre}^{k,-}_{T,h}).$$

次のような派生形が考えられる.

$\mathbf{Pre}_{T,h}$, $\mathbf{Pre}^{-}_{T,h}$,
$\mathbf{Pre}^{k}_{T,h}$,

これらの派生形はいずれも, 一般的な形に比べて比較的簡単である.

次のような派生形が考えられる.

$\mathbf{Pre}_{T,h}$, $\mathbf{Pre}^{-}_{T,h}$,
$\mathbf{Pre}^{k}_{T,h}$,

これらの派生形はいずれも，一般的な形に比べて比較的簡単である.

**定理 12 ([Bar84],[Bla10])**

$T = {}^{<\omega}\omega$ のときは特に,

$$\mathbf{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{e}_{T,h} = \mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{T,h},$$

$$\mathbf{cof}(\mathcal{N}) = \mathfrak{v}_{T,h} = \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{T,h}$$

### 事実 13

**Pre**$_{T,h} \preceq_T$ **Lc**$(T, h)$ が成立する.
特に, $h = \omega; n \mapsto \omega$ のとき, **Lc**$(T, \omega) \cong_T$ **Pre**$(T, \omega)$.

## 事実 13

**Pre**$_{T,h} \preceq_T$ **Lc**$(T,h)$ **が成立する**.
**特に**, $h = \omega; n \mapsto \omega$ **のとき**, **Lc**$(T,\omega) \cong_T$ **Pre**$(T,\omega)$.

## Proof.

**Pre**$(T,h) \preceq_T$ **Lc**$(T,h)$.
**次のように**, Tukey **射を定める**:

$$\begin{aligned} \varphi_- &\colon T \to T & ;\sigma \mapsto \sigma \\ \varphi_+ &\colon \mathcal{S}(T,h) \to \mathrm{Pr}(T,h) & ;\pi \mapsto (\Pi\colon \sigma \mapsto \pi(|\sigma|)). \end{aligned}$$

**Lc**$(T,\omega) \preceq_T$ **Pre**$(T,\omega)$
**次のように**, Tukey **射を定める**:

$$\begin{aligned} \varphi_- &\colon T \to T & ;\sigma \mapsto \sigma \\ \varphi_+ &\colon \ \mathrm{Pr}(T,\omega) \to \mathcal{S}(T,\omega) & ;\Pi \mapsto (\pi\colon n \mapsto \cup\{\pi(\sigma)\,;\sigma \in T_n\}). \end{aligned}$$

## 事実 14

$h \leq h'$ のとき, $\mathbf{Pre}_{T,h'} \preceq_T \mathbf{Pre}_{T,h}$,

$T' \subset T$ のとき, $\mathbf{Pre}_{T',h} \preceq_T \mathbf{Pre}_{T,h}$,

$k \in k'$ のとき, $\mathbf{Pre}^{k'}_{T,h} \preceq_T \mathbf{Pre}^{k}_{T,h}$

**定理 15 ([BS03])**

$T = {}^{<\omega}2$, $h = 1$ のとき, 有限個の自然数 $1 \in k_0 \in k_1 \in \dots k_{n-1}$ に対して, 基数 $\kappa_i$, $i \in n$ と *CS*-直積強制法 $\mathbb{P}$ が存在して次が成立する.

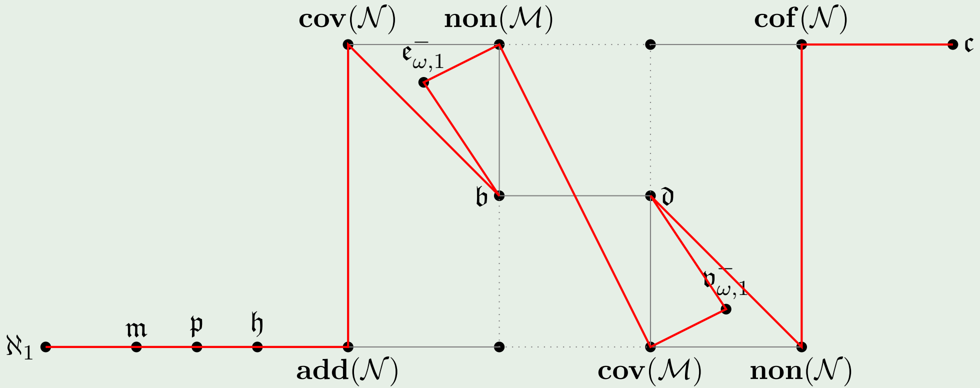
$$V[G] \models \forall i \in n \ \mathfrak{v}(k_i) = \mathfrak{v}(k_{i-1}+1) = \kappa_i.$$

**定理 16 ([BS03])**

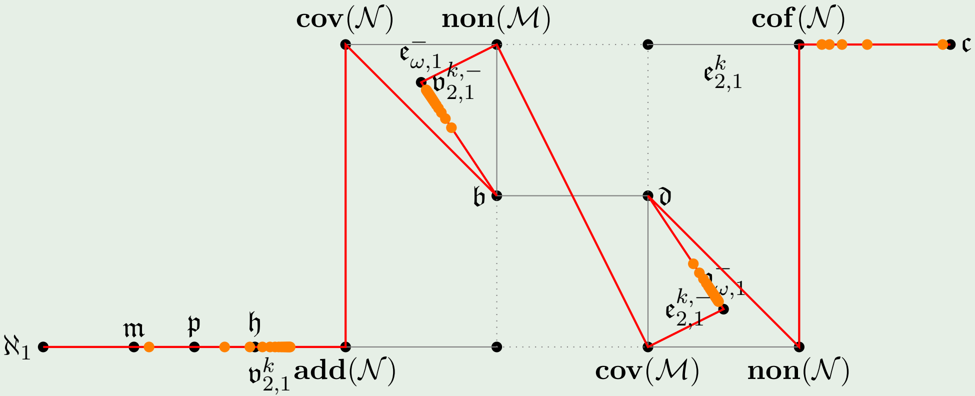
$T = {}^{<\omega}2$, $h = 1$ のとき, $\omega$-個の自然数 $1 \in k_0 \in k_1 \in \dots$ に対して, 基数 $\kappa_i$, $i \in \omega$ と *FS*-反復強制法 $\mathbb{P}$ が存在して次が成立する.

$$V[G] \models \forall i \in n \ \mathfrak{e}(k_i) = \kappa_i.$$

## 復習 17 ([GKMS21, Yam24])

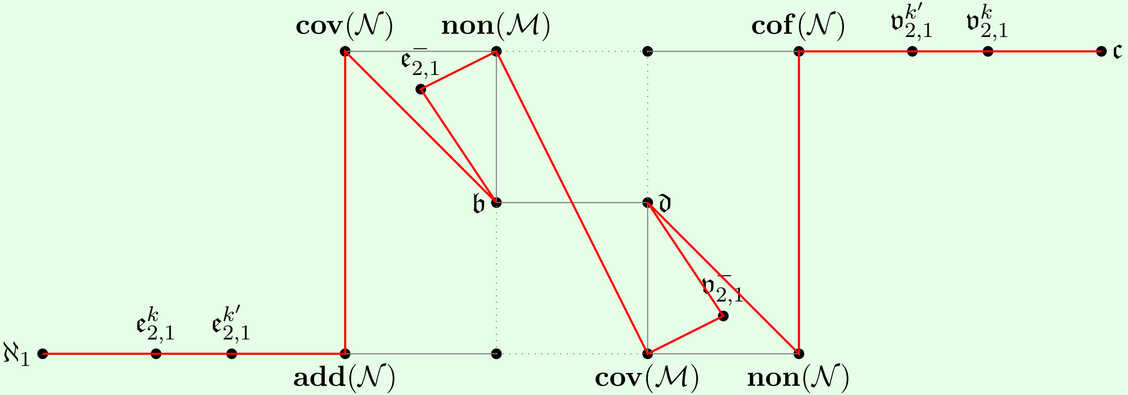


## 復習 18 ([GKMS21, Yam24])



## 定理 19 ([BS03, GKMS21, Yam24])

*Cichoń's maximum* には次のように基数を任意有限個 追加できる.



**定理 20 ([GS93],[Kel08],[CKM24])**

*(クリチャー)* 強制法を用いることで, 連続体個数の函数 $f_\xi, g_\xi \in {}^\omega\omega$ と基数 $\kappa_\xi$ が存在して,

$$V[G] \models \mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{T_\xi, g_\xi} = \mathfrak{v}_{T_\xi, g_\xi} = \kappa_\xi.$$

*where* $T_\xi = \prod f_\xi$.

## 問題

Localization と Prediction に関して:

$T \subsetneq {}^{<\omega}\omega$ のとき, **Pre**$(T,h) \preceq_T$ **Lc**$(T,h)$ が成立/成立しない 組合せはあるのか?

一方が固定された $\mathfrak{v}(T,h)$ が連続体濃度個異なる組合わせはあるのか?

$k \ni 1$ や local case $(-)$ でも同じことが言えるのか.

Cichon's maximum に関して:

**Pre**$^{k,-}_{T,h}$ を可算無限個/任意連続体濃度未満個 追加出来るのか.

変数を固定しても同じことが言えるのか.

[Bar84] Tomek Bartoszyński.
Additivity of measure implies additivity of category.
*Trans. Amer. Math. Soc.*, 281(1):209–213, 1984.

[Bla10] Andreas Blass.
Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.
In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 395–489. Springer, Dordrecht, 2010.

[BS03] Jörg Brendle and Saharon Shelah.
Evasion and prediction. IV. Strong forms of constant prediction.
*Arch. Math. Logic*, 42(4):349–360, 2003.

[CKM24] Miguel A. Cardona, Lukas Daniel Klausner, and Diego A. Mejía.
Continuum many different things: localisation, anti-localisation and Yorioka ideals.
*Ann. Pure Appl. Logic*, 175(7):Paper No. 103453, 58, 2024.

[CM23] Miguel A. Cardona and Diego Alejandro Mejía.
Localization and anti-localization cardinals.
*数理解析研究所講究録 (2261):2023.7*, 2023.

[GKMS21] Martin Goldstern, Jakob Kellner, Diego A. Mejía, and Saharon Shelah.
Controlling cardinal characteristics without adding reals.
*Journal of Mathematical Logic*, 21(03):2150018, 2021.

[GKS19] Martin Goldstern, Jakob Kellner, and Saharon Shelah.
Cichoń’ s maximum.
*Annals of Mathematics*, 190(1), July 2019.

[GS93] Martin Goldstern and Saharon Shelah.
Many simple cardinal invariants.
*Arch. Math. Logic*, 32(3):203–221, 1993.

[Kel08] Jakob Kellner.
Even more simple cardinal invariants.
*Arch. Math. Logic*, 47(5):503–515, 2008.

[Yam24] Takashi Yamazoe.
Cichoń’s maximum with evasion number, 2024.