Gödel の構成可能宇宙

天下のパクり屋たか

March 15, 2025

I　序説

現代の集合論における研究として命題の独立性を示すことがある．これはある命題 φ が ZF(または ZFC) から証明も反証もできないということである．モデル理論における完全性定理と健全性定理とは,「ZF から φ が証明できない」ことは「ZF のモデルが存在すれば ZF $+\neg\varphi$ のモデルが存在する」ことと同値である．という定理である．ここで, ZF $+\neg\varphi$ とは, ZF を満たすが φ を満たさないモデル, つまり集合の集まりのことである．同じくして,「ZF から $\neg\varphi$ が証明できない」は「ZF のモデルが存在すれば ZF $+\varphi$ のモデルが存在する」と同値となる．つまり, φ が ZF から独立, 証明も反証もできない, ことを示すには, ZF のモデルから ZF $+\varphi$ と ZF $+\neg\varphi$ の 2 つのモデルを構成すれば十分である．ここに出現する仮定「ZF のモデルが存在するならば」で任意に選ぶ ZF のモデルは 1 つ固定されたものと考えて議論することができ, これをグランドモデル V と呼ぶ．このグランドモデル V は ZF だけでなく, ZF から構成可能な ZFC などと仮定しても問題ない．

本稿では, 有名な「選択公理は ZF と独立」の一端である, 選択公理の否定は ZF から導かれない, すなわち ZF のモデルから ZF + AC のモデルを構成することを目標とする．具体的には, Gödel の構成可能宇宙 L が選択公理を満たす ZF のモデルであることを確認する．

II　導入

Definition II.1. 函数 $f\colon A \to B$ の各 $f(a)$, $a \in A$, が空でないとき, 直積 $\prod f$ とは, 次を満たす函数 g の集まりである:

1. $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f)$,
2. 任意の $a \in A$ に対して, $g(a) \in f(a)$,

特に, 集合で添え字づけられた不空集合列 $\langle A_x \in x \in X\rangle$ に対して, 自然に定まる函数 $A\colon X \to \{A_x\,;\, x \in X\}\,;\, x \to A_x$ から定義される直積を単に $\prod\langle A_x\,;\, x \in X\rangle$ と書く．

Definition II.2. $(A, <_A)$ が整列集合であるとは, $<_A$ が A 上で不反射的, 推移的かつ整列である順序であることである．すなわち:

- $<_A \subseteq A \times A$,
- $\neg x <_A x$ が任意の $x \in A$ に対して成立する,
- $x <_A y \wedge y <_A z \implies x <_A z$ が任意の $x, y, z \in A$ に対して成立する,
- $X \neq \emptyset \implies \exists a \in X \forall x \in X \ a <_A x \vee a = x$ が任意の部分集合 $X \subseteq A$ に対して成立する.

混乱を招かない範囲で, 1 つ目の条件は排除される. 具体的に, $\in$ や $\subseteq$ という関係はクラスであるので, $(A, \subseteq|_{A \times A})$ と制限しなければならないが, $(A, \subseteq)$ と略記される.

Definition II.3. 集合 α が順序数であるとは,

- α は $\in$ に関して整列集合である,
- $\gamma \in \beta \wedge \beta \in \alpha \implies \gamma \in \alpha$ が任意の γ, β に対して成立する.

順序数全体からなる集まりを ON とする.

Fact II.4.

1. ON は真クラスである,
2. ON は整列される, つまり, 任意の順序数からなる集合 X に対して, 最小値となる順序数 $\alpha \in X$ が存在する,
3. 任意の自然数は順序数である,
4. 自然数からなる集まり $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ は順序数である, 特に最小の可算無限順序数である.

Definition II.5. $(A_n, \triangleleft_n)$, $n \in \omega$, を可算個の不空整列集合とする. $A = \prod \langle A_n \, ; n \in \omega \rangle$ に定まる辞書式順序 $\triangleleft$ を各 $f, g \in \prod \langle A_n \, ; n \in \omega \rangle$ に対して次で定める:

$$f \triangleleft g \iff f(n) \triangleleft_n g(n)$$

ここで $n = \min\{m \in \omega \, ; f(m) \neq g(m)\}$ である. このとき, $\prod \langle A_n \, ; n \in \omega \rangle$ は辞書式順序について整列集合となる.

Lemma II.6. $(A, \triangleleft)$ 整列順序集合とする. このとき,

1. A^n は辞書式順序について整列可能である.
2. $A^{<\omega} = \cup \{A^n \, ; n \in \omega\}$ は整列可能である. ここで, 各 $f, g \in A^{<\omega}$ に対して $\triangleleft^{<\omega}$ を次 $f, g \in A^{<\omega}$ に対して次で定める:

$$\begin{aligned} f \triangleleft^{<\omega} g \iff & \exists n \in \omega \ f \in A^n \wedge g \notin A^n \quad \text{or} \\ & \exists n \in \omega \ f \triangleleft_n g. \end{aligned}$$

Theorem II.7 (再帰的構成)**.** $(X, <_X)$ を空でない集まりで $<_X$ は整列させるとし 任意の $x \in X$ に対して, $x{\downarrow} = \{y \in X \,;\, y <_X x\}$ が集合であると仮定し, 論理式 φ が $\forall x \forall y \exists! z\ \varphi(x, y, z)$ を満たしているとする. このとき, 次を満たす函数 F が存在する:

1. $\mathrm{dom}(F) = X$,
2. $\varphi(x, F|_{x\downarrow}, F(x))$ が任意の $x \in X$ に対して成立する,

この主張において, 一般に $x{\downarrow}$ が集合であることを要請する必要はない. 集まり X と 順序 $<_X$ の双方が集合であれば, つまり $(X, <_X)$ が整列集合であれば, $x{\downarrow}$ も集合であるためである. 注意するべきなのは $<_X$ が**集合でない**場合である.

Example II.8.

1. 自然数 n に対して, それまでの総和 $S(n) = 1+2+\cdots+n$ を与える函数が存在する. 実際 $X = \omega$ として, 次のような論理式を考えると, 函数 $F \colon \omega \to \omega$ で $F(n) = 1+2+\cdots+n$ という函数の存在が保証される.

$$\varphi(x, y, z) \equiv (x \in \omega \wedge z = 1+2+\cdots+x) \vee (x \notin \omega \wedge z = \emptyset)$$

2. フィボナッチ数列は存在する. 実際 $X = \omega$ として, 次のような論理式を考えると, 函数 $F \colon \omega \to \omega$ で $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ を満たす函数の存在が保証される.

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) \equiv\ & (x = 0 \wedge z = 0) \vee \\ & (x = 1 \wedge z = 1) \vee \\ & (x \in \omega \wedge x \neq 0 \wedge x = 1 \wedge y \in {}^{\omega}\omega \wedge z = y(x-2) + y(x-1)) \vee \\ & (x \notin \omega \wedge z = \emptyset)\end{aligned}$$

ここで, $y \in {}^{\omega}\omega$ は y が ω から ω の函数である. ということである. つまり, ${}^{\omega}\omega$ は $\omega \to \omega$ の函数からなる集合である.

III　Godël の構成可能宇宙

Godël の構成可能宇宙とは, 任意に与えられた ZF(C) のモデルから作られる内部モデルである.　とくに, Godël の構成可能宇宙は ZFC+GCH[i] のモデルである.

Theorem III.1. 順序数 $\alpha \in \mathrm{ON}$ に関して再帰的に $R(\alpha)$ を次のように定める:

1. $R(0) = \emptyset$,
2. $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(\alpha)$,
3. $R(\gamma) = \cup\{R(\alpha) \,;\, \alpha \in \gamma\}$.

[i] 一般連続体仮説 (GCH) は 連続体仮説 (CH) よりも真に強い主張であり, ZF(C) 独立な主張である.

このとき, $V = \cup\{R(\alpha) ; \alpha \in \mathrm{ON}\}$ が成立する. すなわち, ZF(C) で定義される集合はすべてある $R(\alpha)$ の元である.

各順序数 α に対して, $R(\alpha)$ は集合である. $L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$ をみたす部分集合を取ることで, 内部モデル $L = \cup\{L(\alpha) ; \alpha \in \mathrm{ON}\}$ を構成する. この内部モデルを Godël の構成可能宇宙という.

Definition III.2. 集合 A に対して $D^+(A)$ を次で定める. $x \in D^+(A)$ iff 有限列 $\vec{a} = \langle a_i ; i \in n\rangle \subseteq A$ と 1-変数閉論理式 $\varphi(\vec{a}, -)$ と が存在して, $\forall b \in A$ $(b \in x \iff \varphi(\vec{a}, b))$.

各順序数 $\alpha \in \mathrm{ON}$ に対して, $L(\alpha)$ を再帰的に定義する:

1. $L(0) = \emptyset$,
2. $L(\alpha + 1) = D^+(L(\alpha))$,
3. $L(\gamma) = \cup\{L(\alpha) ; \alpha \in \gamma\}$.

また, $L = \cup\{L(\alpha) ; \alpha \in \mathrm{ON}\}$ とする. 特に, $A \in L(\alpha) + 1$ は 有限列 $\vec{a}$ と論理式 φ から定まり, このペアを A の witness[ii] と呼ぶ.

このとき, $L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$ が成立するので, $L \subseteq V$ が成立する. さらに, L は ZF のモデルである.

Theorem III.3 ([Kun11])**.** $L \models \mathrm{ZF}$

次の 2 つの事実より L が AC のモデルであるためには, L 全体で整列されていることが示せればよい.

Fact III.4. 順序数 $\alpha, \beta \in \mathrm{ON}$ に対して, $\alpha \in \beta$ ならば $L(\alpha) \subseteq L(\beta)$ である.

Fact III.5. ZF のモデル V に対して次は同値である:

- $V \models \mathrm{AC}$,
- $V \models$「任意の集合 A は整列可能である.」

Theorem III.6. L は整列可能である.

Proof. 論理式は高々可算個であるので, 論理式全体は整列可能である[iii]. 論理式全体の整列順序を $\triangleleft_f$ とする.

再帰的に $L(\alpha)$ に整列順序 $\triangleleft_\alpha$ を定める.

Case–I. 後続順序数 $\alpha + 1$ のとき. $\triangleleft_\alpha^{<\omega}$ と $\triangleleft_f$ からなる整列順序を $\triangleleft$ とする. $A, B \in L(\alpha + 1)$ に対して, $\vec{a}, \varphi_a$ と $\vec{b}, \varphi_b$ をそれぞれの witness とする. 特に, これらの witness は $\triangleleft$ に関して最小なものとする.

$A \triangleleft_{\alpha+1} B$ iff $\langle \vec{a}, \varphi_a\rangle \triangleleft \langle \vec{b}, \varphi_b\rangle$ で定める. このとき, $(L(\alpha + 1), \triangleleft_{\alpha+1})$ は整列集合となる.

Case–II. 極限順序数 $L(\gamma)$ のとき. $A, B \in L(\gamma)$ に対して, 順序数 $\alpha, \beta \in \gamma$ を $A \in L(\alpha)$, $B \in L(\beta)$ を満たすもので最小なものとする. このとき, $A \triangleleft_\gamma B$ を次で定める:

[ii] 一般に存在を保証する集合などを witness と呼ぶ.

[iii] 可算個の変数と有限個の論理記号の有限列であるため整列可能である

- $\alpha \in \beta$, or
- $\alpha = \beta$ かつ $A \lhd_\alpha B$.

このとき, 各ステージで構成した $<_\alpha$ は $\subseteq$-上昇であるので, クラス $< = \bigcup\{<_\alpha ; \alpha \in \mathrm{ON}\}$ を定めると $<$ は L を整列させる. つまり, 任意の集合 $X \in L$ に対して ある順序数 $\alpha \in \mathrm{ON}$ が存在し, $X \in L(\alpha)$ であり, $<_\alpha$ は X を整列させる. $\square$

References

[Kun11] Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 34 of *Studies in Logic (London)*. College Publications, London, 2011.