Hereditarily Ordinal Definable Sets and the Independence of The Axiom of Choice

野呂秀貴

学籍番号:41230007

国立大学法人静岡大学/大学院総合科学技術研究科/理学専攻/数学コース

令和 6 年 2 月 8 日

主題

「AC が ZF から独立である」とは,

- ZF の公理系 から $\neg \mathrm{AC}$ が証明されない.
- ZF の公理系 から AC が証明されない.

主題

「AC が ZF から独立である」とは,

- ZF の公理系 から $\neg$AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF + AC のモデルを構成すればよい.
- ZF の公理系 から AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF +$\neg$AC のモデルを構成すればよい.

ZF (Zermelo-Fraenkel) 公理系

ZF 公理系は, 次の 8 つの公理からなり,

1. 外延性公理,
2. 対の公理,
3. 和集合の公理,
4. 分出公理,
5. 置換公理,
6. 無限公理,
7. 冪集合の公理,
8. 正則性公理.

「もの集まりが集合であること」または「ある集合の存在」を保証する公理系.

AC (選択公理)

空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対して,

$$「f(\lambda) \in X_\lambda \text{ for each } \lambda \in \Lambda」\text{を満たす函数 } f\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ が存在する.}$$

また, 次と同値である:

- 任意の集合に対して, ある整列順序が存在する (整列可能定理),
- Zorn の補題.

主題

AC が ZF(Zermelo-Fraenkel) から独立とは

- ZF の公理系 から $\neg$ AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF + AC のモデルを構成すればよい.
- ZF の公理系 から AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF +$\neg$ AC のモデルを構成すればよい.

AC (選択公理)

空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ に対して,

$$「f(\lambda) \in X_\lambda \text{ for } \lambda \in \Lambda」\text{を満たす函数 } f\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ が存在する.}$$

また, 次と同値である:

- 任意の集合に対して, ある整列順序が存在する (整列可能定理),
- Zorn の補題.

順序数

- ON は順序数からなる集まり,
- ON は整列順序である.
  - 全順序,
  - 空でない部分集合は最小値を持つ.
- 順序数は次の 3 つに分類される.
  - $\alpha = 0$, (最小の順序数)
  - $\alpha + 1$: 後続順序数, (α の直後の順序数)
  - γ : 極限順序数. (それ以外の順序数)

例 1

- 各自然数は順序数である.
  - 特に, 各自然数は後続順序数.
- $\omega = \cup\{\{0\}, \mathbb{N}\}$ は極限順序数.

定義 2 (辞書式順序)

集合 X 上の整列順序 R_X と 集合 Y 上の整列順序 R_Y に対する $X \times Y$ の辞書式順序 R を相異なる元に対して,

$$\langle x_1, y_1 \rangle \; R \; \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} & x_1 \; R_X \; x_2 \\ \textit{or} & x_1 = x_2 \quad \wedge \quad y_1 \; R_Y \; y_2 \end{cases}$$

とする.

定義 2 (辞書式順序)

集合 X 上の整列順序 R_X と 集合 Y 上の整列順序 R_Y に対する $X \times Y$ の辞書式順序 R を相異なる元に対して,

$$\langle x_1, y_1 \rangle \; R \; \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} & x_1 \; R_X \; x_2 \\ \textit{or} & x_1 = x_2 \quad \wedge \quad y_1 \; R_Y \; y_2 \end{cases}$$

とする.

自然数 N について, 集合 X_n 上の整列順序 R_n $(n \leq N)$ に対する $\prod_{n \leq N} X_n$ の辞書式順序 R を相異なる元に対して

$$\langle x_n \, ; \, n \leq N \rangle \; R \; \langle y_n \, ; \, n \leq N \rangle \Leftrightarrow x_m \; R_m \; y_m$$

とする.

ここで, $m = \min\{n \leq N \, ; \, x_n \neq y_n\}$ である.

定義 2 (辞書式順序)

集合 X 上の整列順序 R_X と 集合 Y 上の整列順序 R_Y に対する $X \times Y$ の辞書式順序 R を相異なる元に対して，

$$\langle x_1, y_1 \rangle \; R \; \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} & x_1 \; R_X \; x_2 \\ \text{or} & x_1 = x_2 \quad \wedge \quad y_1 \; R_Y \; y_2 \end{cases}$$

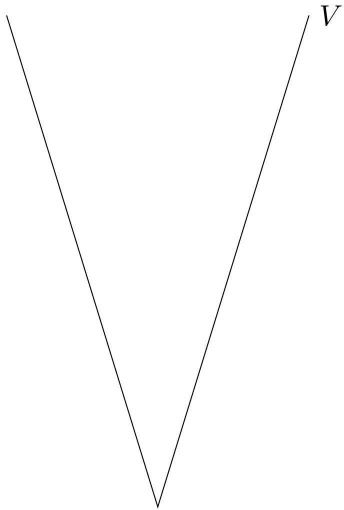
とする．
自然数 N について，集合 X_n 上の整列順序 R_n $(n \leq N)$ に対する $\prod_{n \leq N} X_n$ の辞書式順序 R を相異なる元に対して

$$\langle x_n \, ; n \leq N \rangle \; R \; \langle y_n \, ; n \leq N \rangle \Leftrightarrow x_m \; R_m \; y_m$$

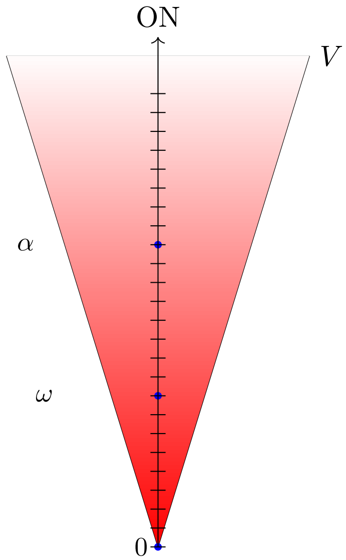
とする．
ここで，$m = \min\{n \leq N \, ; x_n \neq y_n\}$ である．

このとき，整列順序から定まる辞書式順序もまた整列順序である．

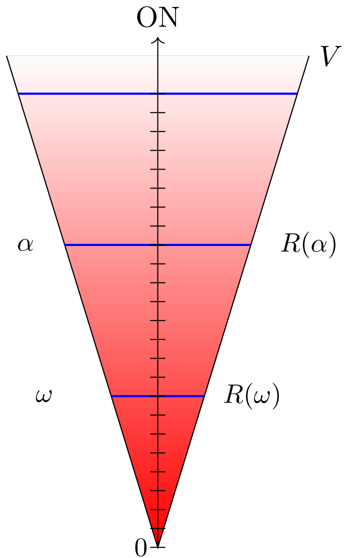
V を ZF のモデルとする.



V を ZF のモデルとする.

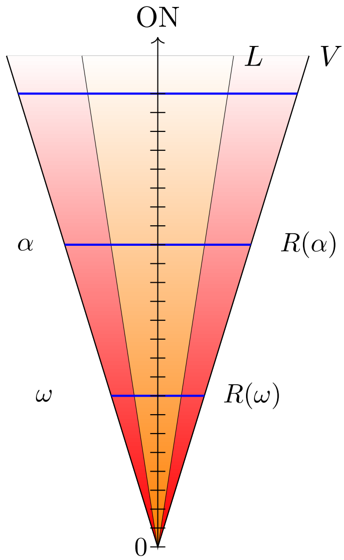


V を ZF のモデルとする.



- 順序数 α に対して, 集合 $R(\alpha)$ は
  1. $R(0) = \emptyset$,
  2. $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$,
  3. $R(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} R(\alpha)$ (γ は極限順序数).
- $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} R(\alpha)$.

V を ZF のモデルとする.



- 順序数 α に対して, 集合 $R(\alpha)$ は
  1. $R(0) = \emptyset$,
  2. $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$,
  3. $R(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} R(\alpha)$ (γ は極限順序数).
- $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{ON}} R(\alpha)$.

$L(\alpha) \subset R(\alpha)$ を満たす整列集合で,

$$L = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{ON}} L(\alpha)$$

が ZF のモデルであれば,
L が ZF + AC のモデルと言える.

$L(\alpha)$ を次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$,
2. $L(\alpha+1) = \{A_{\varphi,\vec{a}} \subset L(\alpha)\,;\, \varphi$: 論理式, $\vec{a} \in L(\alpha)\}$
   - $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数 $\vec{a} \in L(\alpha)$ から一意的に定まる集合.
3. $L(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L(\alpha)$ (γ は極限順序数).

$L(\alpha)$ を次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$,
2. $L(\alpha + 1) = \{A_{\varphi,\vec{a}} \subset L(\alpha)\,;\, \varphi$: 論理式$, \vec{a} \in L(\alpha)\}$
   - $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数 $\vec{a} \in L(\alpha)$ から一意的に定まる集合.
3. $L(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L(\alpha)$ (γ は極限順序数).

$L(\alpha)$ に対する整列順序を帰納的に辞書式順序を用いて次のように定める.

$L(\alpha)$ を次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$,
2. $L(\alpha+1) = \{A_{\varphi,\vec{a}} \subset L(\alpha)\,;\, \varphi$: 論理式$, \vec{a} \in L(\alpha)\}$
   - $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数 $\vec{a} \in L(\alpha)$ から一意的に定まる集合.
3. $L(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L(\alpha)$ (γ は極限順序数).

$L(\alpha)$ に対する整列順序を帰納的に辞書式順序を用いて次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$.
2. $L(\alpha+1)$ の各元 $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数の組 $\vec{a} \in L(\alpha)$ のペアから定まる.

3. $L(\gamma)$. $x <_{L(\gamma)} y$ を

$L(\alpha)$ を次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$,
2. $L(\alpha+1) = \{A_{\varphi,\vec{a}} \subset L(\alpha)\,;\, \varphi$: 論理式$, \vec{a} \in L(\alpha)\}$
   - $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数 $\vec{a} \in L(\alpha)$ から一意的に定まる集合.
3. $L(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L(\alpha)$ (γ は極限順序数).

$L(\alpha)$ に対する整列順序を帰納的に辞書式順序を用いて次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$.
2. $L(\alpha+1)$ の各元 $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数の組 $\vec{a} \in L(\alpha)$ のペアから定まる.
   - 論理式は「有限個の変数」と「有限個の論理結合子」の組み合わせなので, 整列可能.
   - $L(\alpha)$ の有限列全体は, $L(\alpha)$ の整列順序を使うことで整列可能.
3. $L(\gamma)$. $x <_{L(\gamma)} y$ を

$L(\alpha)$ を次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$,
2. $L(\alpha+1) = \{A_{\varphi,\vec{a}} \subset L(\alpha)\,;\, \varphi\colon \text{論理式}, \vec{a} \in L(\alpha)\}$
   - $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数 $\vec{a} \in L(\alpha)$ から一意的に定まる集合.
3. $L(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L(\alpha)$ (γ は極限順序数).

$L(\alpha)$ に対する整列順序を帰納的に辞書式順序を用いて次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$.
2. $L(\alpha+1)$ の各元 $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数の組 $\vec{a} \in L(\alpha)$ のペアから定まる.
   - 論理式は「有限個の変数」と「有限個の論理結合子」の組み合わせなので, 整列可能.
   - $L(\alpha)$ の有限列全体は, $L(\alpha)$ の整列順序を使うことで整列可能.
3. $L(\gamma)$. $x <_{L(\gamma)} y$ を
   - 「$x \in L(\alpha)$ かつ $y \in L(\beta) \setminus L(\alpha)$」または「$x, y \in L(\alpha)$ かつ $x <_{L(\alpha)} y$」 とする.

$L(\alpha)$ を次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$,
2. $L(\alpha+1) = \{A_{\varphi,\vec{a}} \subset L(\alpha)\,;\, \varphi\colon$ 論理式$, \vec{a} \in L(\alpha)\}$
   - $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数 $\vec{a} \in L(\alpha)$ から一意的に定まる集合.
3. $L(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L(\alpha)$ (γ は極限順序数).

$L(\alpha)$ に対する整列順序を帰納的に辞書式順序を用いて次のように定める.

1. $L(0) = \emptyset$.
2. $L(\alpha+1)$ の各元 $A_{\varphi,\vec{a}}$ は論理式 φ と変数の組 $\vec{a} \in L(\alpha)$ のペアから定まる.
   - 論理式は「有限個の変数」と「有限個の論理結合子」の組み合わせなので, 整列可能.
   - $L(\alpha)$ の有限列全体は, $L(\alpha)$ の整列順序を使うことで整列可能.
3. $L(\gamma)$. $x <_{L(\gamma)} y$ を
   - 「$x \in L(\alpha)$ かつ $y \in L(\beta) \setminus L(\alpha)$」または「$x, y \in L(\alpha)$ かつ $x <_{L(\alpha)} y$」 とする.

これより, $L = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{ON}} L(\alpha)$ は整列可能な集まりで, 特に ZF のモデルでもある.

主題

AC が ZF(Zermelo-Fraenkel) から独立とは

- ZF の公理系 から $\neg$ AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF + AC のモデルが構成すればよい.
- ZF の公理系 から AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF $+\neg$ AC のモデルを構成すればよい.

選択公理 (AC)

空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対して,

$$「f(\lambda) \in X_\lambda \text{ for } \lambda \in \Lambda」\text{を満たす函数 } f\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ が存在する.}$$

また, 次と同値である:

- 任意の集合に対して, ある整列順序が存在する (整列可能定理),
- Zorn の補題.

主題

AC が ZF(Zermelo-Fraenkel) から独立とは

- ZF の公理系 から $\neg$ AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF $+$ AC のモデルを構成すればよい.
- ZF の公理系 から AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF $+\neg$ AC のモデルを構成すればよい.

選択公理 (AC)

空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}$ に対して,

$$「f(\lambda)\in X_\lambda \text{ for } \lambda\in\Lambda」を満たす函数\ f\colon\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\ が存在する.$$

また, 次と同値である:

- 任意の集合に対して, ある整列順序が存在する (整列可能定理),
- Zorn の補題.

定義 3

集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が 「良い選択集合」 であるとは,

- $x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus x \notin \mathcal{E}$,
- $x \setminus y$ が有限集合 ならば $x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y \in \mathcal{E}$

が任意の $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して成立することである.

定義 3

集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が「良い選択集合」であるとは,

- $x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus x \notin \mathcal{E}$,
- $x \setminus y$ が有限集合 ならば $x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y \in \mathcal{E}$

が任意の $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して成立することである.

定理 4

AC が成り立てば 良い選択集合 は存在する.

定義 3

集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が「良い選択集合」であるとは,

- $x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus x \notin \mathcal{E}$,
- $x \setminus y$ が有限集合 ならば $x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y \in \mathcal{E}$

が任意の $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して成立することである.

定理 4

AC が成り立てば 良い選択集合 は存在する.

Proof.

次の集合はフィルターであるので,

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\, \mathbb{N} \setminus x \text{ は有限集合 }\}$$

Zorn の補題から, 超フィルター $\mathcal{E} \supset \mathcal{F}$ が取れて, これが良い選択集合となっている. □

事実 5

強制法を用いて, $\mathrm{ZF}+\mathrm{GCH}$ のモデル V に対する拡大モデル $V[G]$ が存在して, 論理式 φ に対して定まる

$$\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\, \varphi(x)\}$$

は 良い選択集合ではない.

事実 5

強制法を用いて, $\mathrm{ZF}+\mathrm{GCH}$ のモデル V に対する拡大モデル $V[G]$ が存在して, 論理式 φ に対して定まる

$$\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\,\varphi(x)\}$$

は 良い選択集合ではない.

事実 6

$V[G]$ の内部モデル $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}}$ は ZF のモデルであり, 各元は

- φ: 論理式,
- $\vec{a} \in \mathrm{ON}$,
- $\vec{b} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

から一意的に定まる集合である.
さらに, $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}}$ の良い選択集合はすべてある論理式 φ を用いて $\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\,\varphi(x)\}$ で表せる.

事実 5

強制法を用いて, $\mathrm{ZF}+\mathrm{GCH}$ のモデル V に対する拡大モデル $V[G]$ が存在して, 論理式 φ に対して定まる

$$\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\, \varphi(x)\}$$

は 良い選択集合ではない.

事実 6

$V[G]$ の内部モデル $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}}$ は ZF のモデルであり, 各元は

- φ: 論理式,
- $\vec{a} \in \mathrm{ON}$,
- $\vec{b} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

から一意的に定まる集合である.
さらに, $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}}$ の良い選択集合はすべてある論理式 φ を用いて $\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\, \varphi(x)\}$ で表せる.

これより, $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}}$ は ZF $+\neg$ AC のモデルである.

主題

AC が ZF(Zermelo-Fraenkel) から独立とは

- ZF の公理系 から $\neg$ AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF + AC のモデルを構成すればよい.
- ZF の公理系 から AC が証明されない.
  - ZF のモデルから ZF $+\neg$ AC のモデルを構成すればよい.

選択公理 (AC)

空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対して,

$$\text{「}f(\lambda) \in X_\lambda \text{ for } \lambda \in \Lambda\text{」を満たす函数 } f\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ が存在する.}$$

また, 次と同値である:

- 任意の集合に対して, ある整列順序が存在する (整列可能定理),
- Zorn の補題.

まとめ.

ZF のモデル V に対して,

- Gödel の構成可能宇宙 $L \subset V$ は $\mathrm{ZF} + \mathrm{AC}$ のモデルである.
  $\Rightarrow$ ZF の公理系から $\neg\,\mathrm{AC}$ は示されない.
- 強制拡大した $V[G]$ の内部モデル $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}}$ は $\mathrm{ZF} + \neg\,\mathrm{AC}$ のモデルである.
  $\Rightarrow$ ZF の公理系から AC は示されない.

以上より, AC が ZF から証明も反証も出来ない, すなわち独立であることが示された.

参考文献

[Kun11] Kenneth Kunen.
Set theory, volume 34 of *Studies in Logic (London)*.
College Publications, London, 2011.

ご清聴ありがとうございました.

$A_{\varphi,\vec{a}}$ の定義

$n+1$-変数論理式 φ と n 個の組 $\vec{a} \in L(\alpha)$ に対して,

$$A_{\varphi,\vec{a}} = \{x \in L(\alpha)\,;\, L(\alpha) \models \varphi(\vec{a}, x)\} \in \mathcal{P}(L(\alpha))$$

と定める.

論理式の整列

論理式 φ は $(,), \wedge, \neg, \exists, \in$ と可算無限個の変数記号 $v_0, v_1, v_2, \ldots$ を並べたものである.

- 集合 $X = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ に通常の順序を入れる.
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ の順序 $<_R$ を 異なる元 x, y に対して $x <_R y$ とは, 次の何れかの条件を満たすとき, またその限るとする.
  - $x, y \in X^n$ であり X^n の辞書式順序 $<^n$ に関して $x <^n y$ である,
  - $x \in X^n$ かつ $y \in X^{n+m}$ である $(n, m$ は自然数).

次のような対応を考えると, 論理式は整列可能である.

1. $(: \ -6,$
2. $): \ -5,$
3. $\wedge: \ -4,$
4. $\neg: \ -3,$
5. $\exists: \ -2,$
6. $\in: \ -1,$
7. $v_0: 0,$
8. $v_1: 1,$
9. $v_2: 2, \ldots,$

変数の組の整列

変数の組全体の集合は $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L(\alpha)^n$ となり，順序 $<_\alpha^{\mathbb{N}}$ を異なる元 x, y に対して，$x <_\alpha^{\mathbb{N}} y$ とは，次のいずれかの条件を満たすとき，またその時に限るとする．

- $\vec{a}, \vec{b} \in L(\alpha)^n$ かつ $L(\alpha)^n$ 上の辞書式順序 $<_\alpha^n$ に関して，$\vec{a} <_\alpha^n \vec{b}$ である，
- $\vec{a} \in L(\alpha)^n$ かつ $\vec{b} \in L(\alpha)^{n+m}$ である．

これにより，変数の組全体の集合は整列可能である．

$L(\alpha+1)$ の整列方法

論理式と変数 ($L(\alpha)$ の任意有限個の組み) のペア $\langle \varphi, \vec{a} \rangle$ からなる集合に対する辞書式順序を $<_l$ とする.
2 つの元 x, y 対して, $\langle \varphi_x, \vec{a}_x \rangle$ と $\langle \varphi_y, \vec{a}_y \rangle$ をそれぞれ x と y の証拠とする.

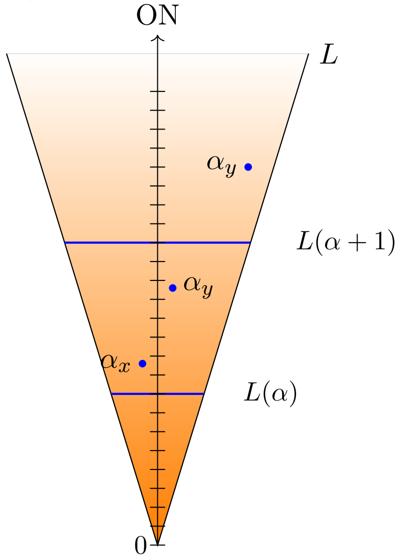
- 特に, $<_l$ に関して最小なペアを取ることができる.

このとき, $L(\alpha+1)$ 上で

$$\langle \varphi_x, \vec{a}_x \rangle <_l \langle \varphi_y, \vec{a}_y \rangle$$

を満たすとき, またその時に限り $x <_{L(\alpha+1)} y$ と定義する.

$L \models \mathrm{AC}$



集合 $A \in L$ に対して，整列順序 $<_A$ が構成出来ればよい．
$x, y \in A$ に対して，α_x, α_y を $x \in L(\alpha_x)$ と $y \in L(\alpha_y)$ を満たす最小の順序数とする．

$<_A$ を次のように定義する：

- $\alpha = \alpha_x = \alpha_y$ のとき，
  - $x <_A y$ iff $x <_{L(\alpha)} y$ とする．
- $\alpha_x < \alpha_y$ のとき，
  - $x <_A y$ とする．

このとき，$<_A$ は A 上の整列順序となるので，L では任意の集合が整列可能となる．

定義 (フィルター)

集合 X に対して, X 上のフィルター $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ とは

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F}$,
- $x, y \in \mathcal{F} \implies x \cup y \in \mathcal{F}$,
- $z \subset x \implies z \in \mathcal{F}$

がすべての $x, y \in \mathcal{F}$ と $z \in \mathcal{P}(X)$ に対して成立する.
フィルター $\mathcal{F}$ が極大フィルターであるとは, $\subset$ に関して極大なフィルターである.

極大フィルターの存在は AC から従い．さらに ZF から独立である.

定理

フィルター $\mathcal{F}$ が極大であることは次と同値:

$$\forall x \in \mathcal{P}(X)\ (x \notin \mathcal{F} \implies X \setminus x \in \mathcal{F})$$