

信号処理の基礎演習

東 広志 higashi@comm.eng.osaka-u.ac.jp

1. 概要

決定論的な信号処理は、通信や情報処理の基本である。本演習では、連続時間信号に対するサンプリング・フーリエ変換・フィルタリングを、各自コンピュータ上にてプログラミングし、その出力波形を実際に計算し、解析解との比較を行う。

2. 目的

信号処理の基礎である、連続信号のサンプリング・フーリエ変換・フィルタリングを理解する。

3. 演習

3.0 事前作業

各自 PC に Python などのプログラミング言語が使用できる環境を整え、簡単なプログラミングを実装できるようにすること。本演習では、Python におけるライブラリ numpy と matplotlib を使用することを前提に説明する。なお、Python をインストールする際は、主要ライブラリも一緒にインストールされるディストリビューション Anaconda を用いることを推奨する。なお、演習前に、一度は Python (anaconda の場合、統合ソフトの Spyder) を動かしてみること。Anaconda をインストールしても Spyder が立ち上がらないなどの問題がないかチェックしておくこと。また、別の実行環境として、Google Colaboratory も使用できる。使用には Google アカウントによるログインが必要である。アカウントは各自準備し、簡単なコードが実行できるかチェックしておくこと。

3.1 正弦波のサンプリングとフーリエ変換

- (1) 振幅 $\sqrt{2}$ および周波数 2 kHz の正弦波データを生成する。ここでは、サンプリング周波数を 10 kHz (すなわち、サンプリング時間間隔 0.1 ms)，サンプル数(配列の要素数)を 10^5 として、正弦波データ配列を生成し、その時間波形数周期分を図示せよ。図 1(a)を参考にするとよい。サンプリングデータを丸でプロットし、より時間解像度が細かいデータ(例えばサンプリング周波数 100 kHz とした場合)での正弦波を破線で示すことで、正弦波が正しく 10 kHz にてサンプリングされていることを確認せよ。
- (2) 前項(1)にて生成した 2 kHz 周波数の正弦波データを電圧もしくは電流の波形と考える。時間波形全体のエネルギーとパワーを計算せよ。それらが解析解と一致することを確認せよ。得られたパワーは離散時間サンプルの平均強度に一致することも確認せよ。なお、強度は振幅の二乗で定義される。
- (3) 前項(1)にて生成した 2 kHz 周波数の正弦波データをフーリエ変換し、その振幅絶対値のグラフ(スペクトル波形と呼ぶ)を示せ。図 1(b)を参考にせよ。振幅絶対値スペクトル波形では ± 2 kHz においてピークが生じることを確認せよ。また、スペクトル波形における強度の平均を求めよ。それを時間波形から得られたものと比較し、パーセバルの定理が成り立つことを確認せよ。
- (4) サンプリング周波数を 1 kHz から 10 kHz まで 0.5 kHz 間隔で変化させ、振幅 $\sqrt{2}$ および周波数 2 kHz の余弦波データを生成する。それらをフーリエ変換して、その振幅絶対値スペクトル波形のピークを検出する。サンプリング周波数とピーク周波数の関係をグラフに示せ。図 2 のようなグラフが得られるはずである。この結果から、2 kHz の余弦波を正しくサンプリングするためのサンプリング周波数条件を求めよ。

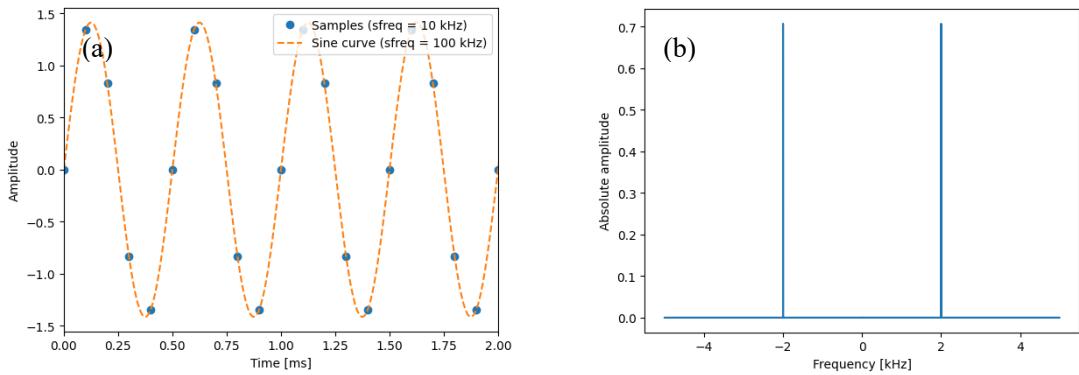


図 1 周波数 2 kHz の正弦波の(a)時間波形と(b)絶対値振幅スペクトル波形. (a)内の赤点は 10 kHz でサンプリングしたデータ.

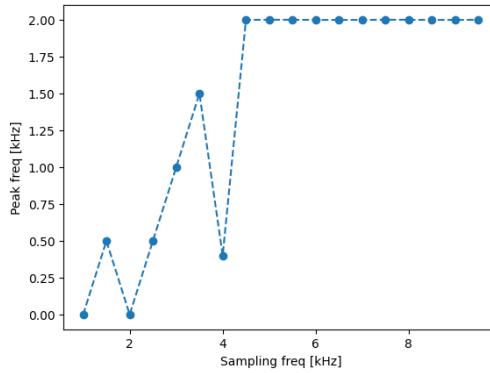


図 2 余弦波周波数とサンプリング後ピーク周波数の関係.

3.2 矩形信号のフィルタリング

(1) 以下の様に、時間幅 τ の矩形信号 $r(t)$ を定義する。

$$r(t-T_0) = \begin{cases} 1 & |t-T_0| \leq \tau/2 \\ 0 & |t-T_0| > \tau/2 \end{cases} \quad (1)$$

サンプリング周波数 10 kHz, サンプル数 10^5 (-5—5 秒)において時間幅 $\tau = 100 \text{ ms}$, $T_0=0$ の矩形信号データを生成せよ. 図 3(a)のようなグラフになるはずである. そのフーリエ変換を行い, 振幅絶対値スペクトル波形を示せ(図 3(b)を参考にせよ). それと矩形信号 $r(t)$ のフーリエ変換である解析解 $R(f)$ を比較せよ.

(2) 前項(1)にて生成した矩形信号に対して, 以下で定義される帯域 W を有するローパスフィルタ(low-pass filter: LPF) $H(f)$ を通過させる.

$$H(f) = \begin{cases} 1+0j & |f| \leq W/2 \\ 0+0j & |f| > W/2 \end{cases} \quad (2)$$

ただし, $H(f)$ は複素数であることに注意せよ. ここでは, フィルタ帯域 $W = 0.1 \text{ kHz}$ とする. 矩形信号スペクトル $R(f)$ にローパスフィルタ $H(f)$ を乗算させれば, フィルタ出力におけるスペクトル波形が得られる. そのスペクトル波形を逆フーリエ変換することで, フィルタ出力における時間波形が得られる. なお, 逆フーリエ変換したサンプルは実数となることに注意せよ. 図 4 に示すように, フィルタ出力時間波形と絶対値振幅スペクトル波形を求めよ. また, フィルタ帯域 W を 0.1 kHz より広くおよび狭くした際の出力波形も計算せよ.

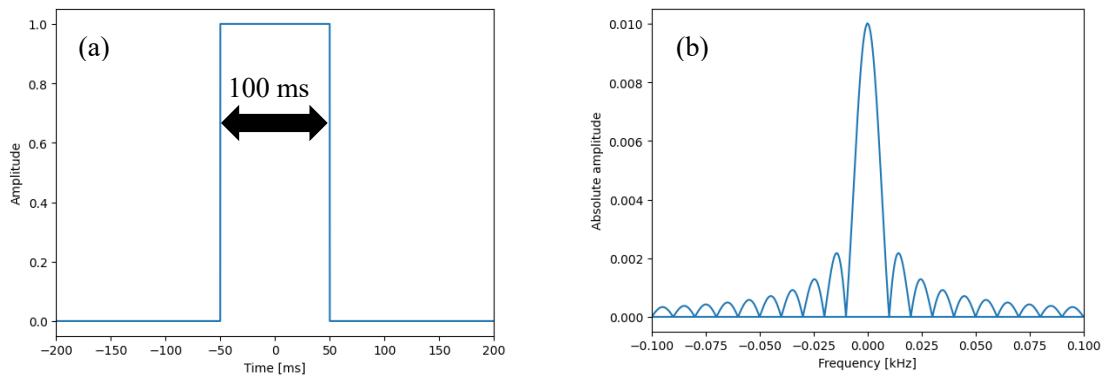


図 3 矩形信号の(a)時間波形と(b)絶対値振幅スペクトル波形.

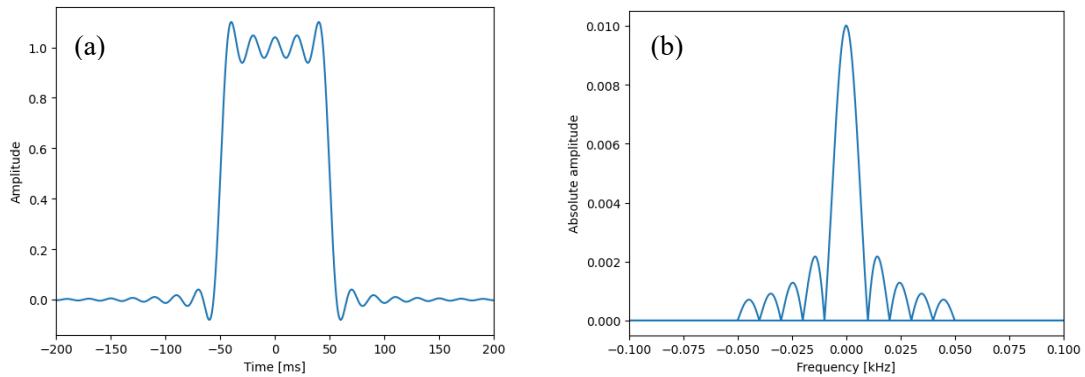


図 4 フィルタ出力における(a)時間波形と(b)絶対値振幅スペクトル波形. フィルタ帯域は 0.1 kHz.

3.3 白色ガウス雑音のフィルタリング

- (1) サンプリング周波数 10 kHz において, 平均ゼロで分散 1 の離散実数加法性白色ガウス雑音 (additive white Gaussian noise: AWGN) サンプルを作成せよ. サンプル数は 10^5 とする. そのパワーと分散が等しくなることを確認せよ. また, 白色ガウス雑音のヒストグラムを計算せよ. 図 5 に示すように, 平均ゼロ・分散 1 のガウス分布 $N_0(0, 1)$ を雑音ヒストグラムに併記し, 両者が良く一致することを確認せよ.
- (2) 前項(1)で生成した白色ガウス雑音をフーリエ変換し, 式(2)で定義されるローパスフィルタに通過させる. 帯域 $W = 5 \text{ kHz}$ のとき, フィルタ出力における振幅絶対値スペクトル波形を示せ. 図 6(a)および(b)に示したように, フィルタ入出力における白色ガウス雑音の振幅絶対値スペクトル波形を図示するとフィルタの効果がわかりやすい. また, フィルタ入出力における白色ガウス雑音ヒストグラムを比較せよ. 参考例として, フィルタ入出力における雑音ヒストグラムを図 7 に示す. $W = 5 \text{ kHz}$ では, 出力ヒストグラムの分散が入力の半分となる.

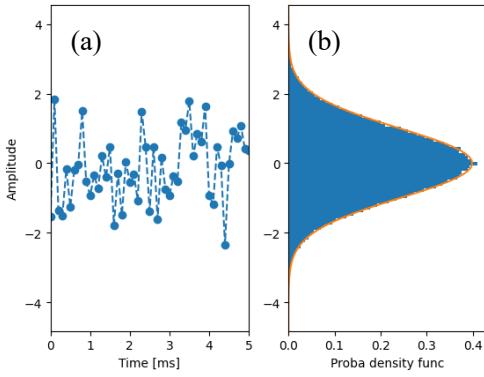


図 5 白色ガウス雑音サンプルの(a)時間波形と(b)ヒストグラム.

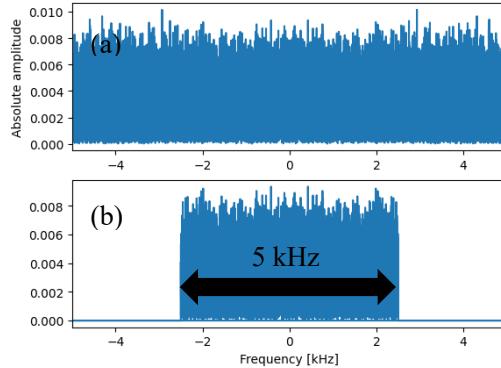


図 6 ローパスフィルタの(a)入力および(b)出力における白色ガウス雑音の振幅絶対値スペクトル波形.

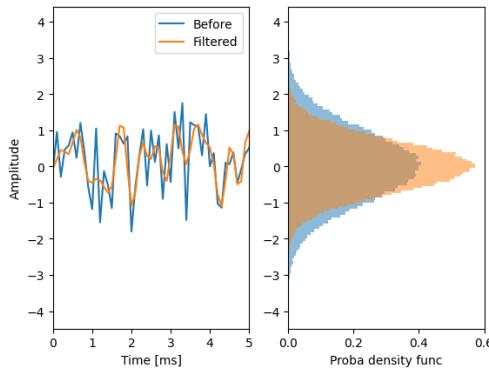


図 7 ローパスフィルタの入力および出力における白色ガウス雑音の時間波形とヒストグラム.

3.4 白色ガウス雑音を付加した矩形信号のフィルタリング

サンプリング周波数 10 kHz , サンプル数 10^5 において, 時間幅 100 ms の矩形信号を生成する. それに, 分散 1 の白色ガウス雑音を付加させた後, 帯域 $W = 0.1 \text{ kHz}$ のローパスフィルタを通過させる. このフィルタの入力および出力における時間波形を図示せよ. フィルタ出力では雑音が抑圧されていることを示せ. グラフの一例として, 図 8 に雑音付加する前の矩形信号, 雜音を加えた際の信号, フィルタリングした後の時間波形 (a) と振幅絶対値スペクトル (b) を示す. フィルタによって雑音が抑圧できている様子が示されている. なお, 矩形信号の波形自体もフィルタによって歪むことに注目してほしい. ローパスフィルタの帯域 W を 0.1 kHz よりも広くおよび狭くさせた場合を計算し, 矩形信号の波形歪みと雑音の抑圧の傾向を議論せよ.

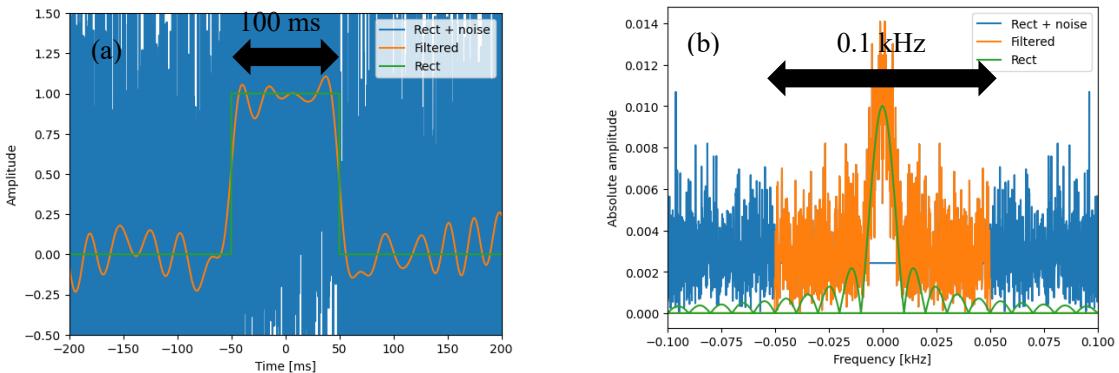


図 8 矩形信号, 雑音付加信号, フィルタ出力の (a) 時間波形と (b) 振幅絶対値スペクトル.

4. 結果および考察

4.1 レポートにおける結果と考察の意味

- レポートは「目的」「原理」「シミュレーション方法」「シミュレーション結果」「考察」という章分けをし, 各章で適切な内容を示すこと. レポートのポイントは「シミュレーション結果」と「考察」である.
- 本演習で計算したグラフ全てをレポートに示すこと. グラフには, 軸目盛・数値・軸タイトル・図キャプションを必ず示す. 本テキストで示しているグラフを参考に, まずは真似することから始めてほしい. なお, グラフで示せば, その配列数値の表をレポートに示す必要はない.
- グラフをレポートに示した際は, 本文においてその傾向や特徴的な点を文章で説明する. 例えは, 「sinc 関数のような波形が得られた」は傾向の説明にならない. 「ゼロ値となる周期が○○で振動する波形が得られた」のように事実を示すことが重要である.
- レポートにはプログラムを示さないこと.
- 理系レポートにおける考察とは, 何かと何かを定量的に比較することである. 本演習での比較は以下である.
 - Python で計算した波形(シミュレーション結果)に対して, 信号を表す実関数やそのフーリエ変換との比較
 - Python で計算されたパワー(シミュレーション結果)と実関数理論値との比較
- 本演習においてシミュレーション結果と比較するものを「原理」の章で記述する.

4.2 正弦波のサンプリングとフーリエ変換: 演習 3.1 に対する結果・考察

- 演習 3.1(1)(3)を行い, 図 1(a)(b)と同様に 2 kHz の正弦波の波形を示すこと.
- 正弦波サンプルから計算したパワーと, 正弦波実関数から計算したパワー(3.1(2))が一致することを示せ.
- 振幅 $\sqrt{2}$ ・周波数 f_0 の正弦波は $\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$ と実関数で表現される. このフーリエ変換と, シミュレーションで得られた絶対値振幅スペクトル波形(3.1(3))が一致することを示せ.
- 正弦波の時間領域でのパワー(3.1(2))と周波数領域での平均強度(3.1(3))がパーセバルの定理を満たすことを確認せよ.
- 演習 3.1(4)を行い, その結果を図 2 と同様に, グラフを示せ.
- 周波数 f_0 の余弦波をサンプリング周波数 f_s でサンプリングしたもののフーリエ変換を計算せよ(つまり, 数式を求めよ). サンプリング定理を満たさない $f_0 > f_s/2$ におけるフーリエ変換を解析的に求め, 演習 3.1(4)で得られた図 2 と結果と比較せよ.

4.3 矩形信号のフィルタリング：演習 3.2 に対する結果・考察

- 図 3 と同様に、矩形信号の時間波形および絶対値振幅スペクトル波形を示すこと(3.2(1)).
- 矩形信号のフーリエ変換 $R(f)$ を解析的に求め、シミュレーションで得られた絶対値振幅スペクトル波形(3.2(1))と比較せよ.
- 図 4 と同様に、ローパスフィルタ出力における時間波形と絶対値振幅スペクトル波形を示せ(3.2(2)).
- ローパスフィルタの帯域 W を 0.1 kHz よりも広くおよび狭くした際のフィルタ出力における時間波形と絶対値振幅スペクトル波形を計算し、グラフで示せ。特に、ローパスフィルタ帯域に対して矩形信号の時間波形歪みがどのような傾向にあるかを説明せよ(3.2(2)).

4.4 白色ガウス雑音のフィルタリング：演習 3.3 に対する結果・考察

- 演習 3.3(1)を行い、図 5 と同様に、白色ガウス雑音の時間波形とヒストグラムを示せ。また、雑音ヒストグラムに、平均 0・分散 1 のガウス分布 $N_0(0, 1)$ を併記し、両者が一致することを示せ。
- 白色ガウス雑音のパワーと分散が等しくなることを解析的に(数式を用いて)示し、シミュレーションで得られたパワーと分散(3.3(1))も等しくなることを確認せよ。
- 図 6 の様に、ローパスフィルを通過した前後における白色ガウス雑音の絶対値振幅スペクトル波形をレポートに示せ(3.3(2)).
- 白色ガウス雑音をローパスフィルタに通過させた前後におけるヒストグラムを計算し、図 7 と同様にグラフで示せ。フィルタ帯域が $W = 5 \text{ kHz}$ の場合、白色ガウス雑音の分散は半分に減少する。その理由を説明せよ(3.3(2)).

4.5 白色ガウス雑音を付加した矩形信号のフィルタリング：演習 3.4 に対する結果・考察

- 図 8 を参考にして、白色ガウス雑音を含む矩形信号をローパスフィルタに通過させたとき、そのフィルタ前後での時間波形・スペクトルを示せ。
- ローパスフィルタの帯域を 0.1 kHz よりも広くおよび狭くしたときの、フィルタ入出力波形を示せ。矩形信号の波形歪みと白色ガウス雑音の抑圧はローパスフィルタの帯域に依存する。どのような傾向があるかを説明せよ。