ファイナンスのための確率解析 I
練習問題第１章

練習問題１

(1.1.2) 式の条件 $(0 < d < 1 + r < u)$ が満たされていれば市場は無裁定であることを示す．
初期資本を X_0, 期末資本を X_1 とすると

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \tag{1}$$

が成り立つ．無裁定とは $X_0 = 0, P(X_1 \geq 0) = 1, P(X_1 > 0) > 0$ を満たすΔ_0が存在しないということである．期末に生じうる状態 H, T についてそれぞれ (1) 式を書くと $X_0 = 0$ なので,

$$X_1(H) = \Delta_0 u S_0 - (1+r)\Delta_0 S_0 = \Delta_0 S_0(u-1-r)$$

$$X_1(T) = \Delta_0 d S_0 - (1+r)\Delta_0 S_0 = \Delta_0 S_0(d-1-r)$$

仮定より $u - 1 - r > 0, d - 1 - r < 0$ なので,

$$\Delta_0 > 0 \Rightarrow X_1(H) > 0, X_1(T) < 0$$

$$\Delta_0 = 0 \Rightarrow X_1(H) = 0, X_1(T) = 0$$

$$\Delta_0 < 0 \Rightarrow X_1(H) < 0, X_1(T) > 0$$

となり, 裁定機会は存在しない.

練習問題２

例題 1.1.1 でオプション価格が 1.20 の時, 無裁定であることを示す.
$X_0 = 0$, 株式Δ_0, オプションΓ_0単位保有するとマネーマーケットの保有量は$-(4\Delta_0 + 1.20\Gamma_0)$なので,

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + \Gamma_0(S_1 - 5)^+ - 1.25(4\Delta_0 + 1.20\Gamma_0)$$

状態 H, T についてそれぞれ書くと,

$$X_1(H) = 8\Delta_0 + 3\Gamma_0 - (5\Delta_0 + 1.5\Gamma_0) = 3\Delta_0 + 1.5\Gamma_0$$

$$X_1(T) = 2\Delta_0 + 0 - (5\Delta_0 + 1.5\Gamma_0) = -3\Delta_0 - 1.5\Gamma_0$$

となり,$X_1(H) = -X_1(T)$ が成りたつ.
よって，$X_1(T) \geq 0, X_1(H) > 0$ または $X_1(H) \geq 0, X_1(T) > 0$ となることはない.

練習問題３

$$V_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)] = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)] = S_0$$

練習問題４

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(T) &= \Delta_n S_{n+1}(T) + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n) \\
&= (1+r)X_n + \Delta_n(d-1-r)S_n \\
&= (1+r)V_n + \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{u-d}(d-1-r) \\
&= (1+r)V_n - \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{p}V_{n+1}(T) \\
&= \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T) - \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{p}V_{n+1}(T) = V_{n+1}(T)
\end{aligned}$$

練習問題５

まず定義にしたがい $\Delta_1(H) = \frac{1}{15}$ となるので、富の等式 (1.2.14) に従い計算すると

$$X_2(HH) = 3.2,\ X_2(HT) = 2.4$$

となり確かにヘッジできている. また、$\Delta_2(HT) = -1$ となるので同じく富の等式 (1.2.14) に従い計算すると

$$X_3(HTH) = 0,\ X_3(HTT) = 6$$

となりこの場合も確かにヘッジできている.

練習問題６

株式を Δ 単位保有する (マネーマーケットに -4Δ 投資). そのとき満期におけるポートフォリオのペイオフ V_1 は

$$V_1(H) = 3 + 8\Delta + 1.25 \times (-4\Delta) = 3 + 3\Delta$$

$$V_1(T) = 0 + 2\Delta + 1.25 \times (-4\Delta) = -3\Delta$$

となる. これらが共に 1.5 になるには $\Delta = -0.5$ とおけばよい.

練習問題7

時刻 3 に確実に 2.6875 を得るにはルックバックオプションとは別に、$V_3(HHH) = 2.6875, V_3(HHT) = -5.3125, V_3(HTH) = 2.6875, V_3(HTT) = -3.3125, V_3(THH) = 2.6875, V_3(THT) = 0.6875, V_3(TTH) = 0.6875, V_3(TTT) = -0.8125$ というペイオフを発生させるポートフォリオを株式とマネーマーケットから初期資金 0 で作り出せばよい. そのためには (1.2.16),(1.2.17) を後ろ向きに繰り返し用いれば、

$$\Delta_2(HH) = \frac{1}{3}, \Delta_2(HT) = 1, \Delta_2(TH) = \frac{1}{3}, \Delta_2(TT) = 1, \Delta_1(H) = -\frac{1}{15}, \Delta_1(T) = \frac{13}{30}, \Delta_0 = -\frac{13}{75}$$

と株式を取引すればよいことが分かる.

練習問題8

(i)

$$v_n(s,y) = \frac{2}{5}(v_{n+1}(2s, y+2s) + v_{n+1}(0.5s, y+0.5s))$$

(ii)

(i) の式に従い計算すると次のようになる.

$v_3(32,60) = 11, v_3(8,36) = 5, v_3(8,24) = 2, v_3(2,18) = 0.5, v_3(8,18) = 0.5, v_3(2,12) = v_3(2,9) = v_3(0.5,7.5) = 0, v_2(16,28) = 6.4, v_2(4,16) = 1, v_2(4,10) = 0.2, v_2(1,7) = 0, v_1(8,12) = 2.96, v_1(2,6) = 0.08, v_0 = 1.216$

結果アジアンオプションの価格は 1.216

(iii)

$$\delta_n(s,y) = \frac{v_{n+1}(2s, y+2s) - v_{n+1}(\frac{s}{2}, y+\frac{s}{2})}{2s - \frac{1}{2}s}$$

練習問題9

(i)

$$\begin{aligned} V_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n) =& \frac{1}{1+r_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n)}[\tilde{p}_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n)V_{n+1}(\omega_1\omega_2\dots\omega_n H) \\ &+ \tilde{q}_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n)V_{n+1}(\omega_1\omega_2\dots\omega_n T)] \end{aligned}$$

$$\tilde{p}_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n) = \frac{1+r_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n) - d_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n)}{u_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n) - d_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n)}$$

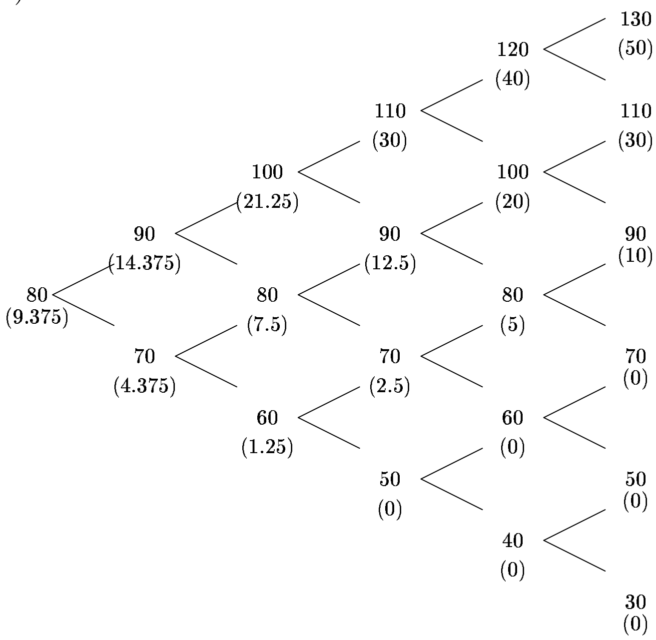
$$\tilde{q}_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n) = \frac{u_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n) - 1 - r_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n)}{u_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n) - d_n(\omega_1\omega_2\dots\omega_n)}$$

というアルゴリズムに従い後ろ向きに計算すれば最終的に時刻 0 での価格が求まることが, 定理 1.2.2 と同じ方法で示される.

(ii)

(1.2.17) 式と同じ.

(iii)



上のツリーの各格子上の数値は株価を表し, カッコ内はオプション価格を表す. また

$$\tilde{p}_n = \frac{1 - \frac{S_n - 10}{S_n}}{\frac{S_n + 10}{S_n} - \frac{S_n - 10}{S_n}} = \frac{1}{2}$$

となることから各格子に対応するリスク中立確率は上下ともに 0.5 で一定であることを計算に用いた. よって時刻 0 におけるオプション価格は 9.375

ファイナンスのための確率解析 I
第 2 章

練習問題 1

(i)

$$\Omega = A \cup A^c, A \cap A^c = \phi \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$

よって $P(A^c) = 1 - P(A)$ が成り立つ.

(ii)

$$P(\cup_{n=1}^{m}) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$$

が成り立つと仮定する. このとき

$$\begin{aligned} P(\cup_{n=1}^{m+1}) &= P(\cup_{n=1}^{m} A_n) + P(A_{m+1}) - P((\cup_{n=1}^{m} A_n) \cap A_{m+1}) \\ &\leq P(\cup_{n=1}^{m} A_n) + P(A_{m+1}) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n) + P(A_{m+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{m+1} P(A_n) \end{aligned}$$

となるので帰納的に題意が示された.

練習問題 2

(i)

$\tilde{P}(S_3 = 32) = \frac{1}{8}, \tilde{P}(S_3 = 8) = \frac{3}{8}, \tilde{P}(S_3 = 2) = \frac{3}{8}, \tilde{P}(S_3 = 0.5) = \frac{1}{8}$

(ii)

$$\tilde{E}[S_1] = 8 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$\tilde{E}[S_2] = 16 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{2}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\tilde{E}[S_3] = 32 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 0.5 \times \frac{1}{8} = \frac{125}{16}$$

平均成長率は 25 %.

(iii)

$P(S_3=32)=\frac{8}{27}, P(S_3=8)=\frac{12}{27}, P(S_3=2)=\frac{6}{27}, P(S_3=0.5)=\frac{1}{27}$

$$
\begin{aligned}
E[S_1] &= 8\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=6\\
E[S_2] &= 16\times\frac{4}{9}+4\times\frac{4}{9}+1\times\frac{1}{9}=9\\
E[S_3] &= 32\times\frac{8}{27}+8\times\frac{12}{27}+2\times\frac{6}{27}+0.5\times\frac{1}{27}=\frac{27}{2}
\end{aligned}
$$

平均成長率は 50 %.

練習問題３

$$E_n[\varphi(M_{n+1})]\geq\varphi(E_n[M_{n+1}])=\varphi(M_n)$$

１つ目の不等号は条件付 Jensen 不等式, ２つ目の等号は (M_n) がマルチンゲールであることによる.

練習問題４

(i)

$$E_n[M_{n+1}]=E_n\Big[\sum_{j=1}^{n+1}X_j\Big]=M_n+E_n[X_{n+1}]=M_n+E[X_{n+1}]=M_n$$

となり (M_n) はマルチンゲール.

(ii)

$$
\begin{aligned}
E_n[S_{n+1}] &= E_n\Big[e^{\sigma M_{n+1}}\Big(\frac{2}{e^\sigma+e^{-\sigma}}\Big)^{n+1}\Big]=e^{\sigma M_n}\Big(\frac{2}{e^\sigma+e^{-\sigma}}\Big)^{n+1}E_n[e^{\sigma X_{n+1}}]\\
&= e^{\sigma M_n}\Big(\frac{2}{e^\sigma+e^{-\sigma}}\Big)^{n+1}E[e^{\sigma X_{n+1}}]=e^{\sigma M_n}\Big(\frac{2}{e^\sigma+e^{-\sigma}}\Big)^{n+1}\Big(\frac{e^\sigma+e^{-\sigma}}{2}\Big)=S_n
\end{aligned}
$$

となり (S_n) はマルチンゲール.

練習問題５

(i)

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(M_{j+1}-M_j)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}M_{j+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1}M_{j+1}M_j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}M_j^2 \\
&= \frac{M_n^2}{2} + \sum_{j=0}^{n-1}M_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1}M_{j+1}M_j + \sum_{j=0}^{n-1}M_j^2 \\
&= \frac{M_n^2}{2} + \sum_{j=0}^{n-1}M_j(M_j - M_{j+1}) = \frac{M_n^2}{2} - I_n
\end{aligned}
$$

よって $I_n = \frac{1}{2}M_n^2 - \frac{n}{2}$ が成り立つ.

(ii)

$$E_n[f(I_{n+1})] = E_n[f(I_n + M_n(M_{n+1}-M_n))] = E_n[f(I_n + M_nX_{n+1})]$$

ここで $h(x,y) = E[f(x+yX_{n+1})]$ と定義すると, 補題 2.5.3 により

$$E_n[f(I_n + M_nX_{n+1})] = h(I_n, M_n)$$

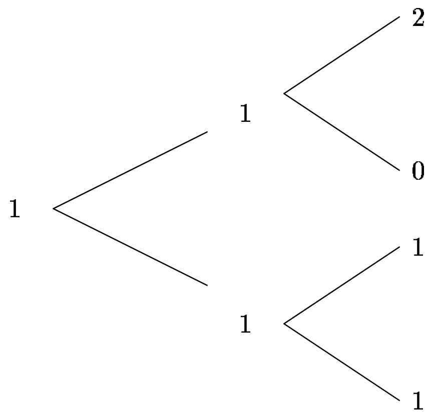
と表せる. また (i) の結果より $h(I_n, M_n) = g(I_n)$ と表せる.

練習問題 6

$$
\begin{aligned}
E_n[I_{n+1}] &= I_n + E_n[\Delta_n(M_{n+1}-M_n)] = I_n + \Delta_n E_n[M_{n+1}-M_n] \\
&= I_n + \Delta_n E[X_{n+1}] = I_n
\end{aligned}
$$

となり (I_n) はマルチンゲール.

練習問題 7



上昇確率 $p = 0.5$ とする.

上図のような二項モデルを考える. これがマルコフ過程になるには $E_1[f(X_2)] = g(X_1)$ が任意の関数 f について成り立つ必要があるが時点 1 を条件として計算すると,

$$\frac{1}{2}(f(2) + f(0)) = f(1) = g(1)$$

とならなければならない. 例えば $f(x) = x^2$ とおくと, これは成り立たないのでこの確率過程はマルコフ過程ではない. しかしマルチンゲールにはなる (計算は省略).

練習問題 8

(i)

$$M_n = \tilde{E}_n[M_N] = \tilde{E}_n[M'_N = M'_n]$$

(ii)

$$\begin{aligned}\tilde{E}_n\Big[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\Big] &= \frac{1}{(1+r)^{n+1}}\tilde{E}_n[V_{n+1}] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{n+1}}[\tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T)] = \frac{V_n}{(1+r)^n}\end{aligned}$$

よって $\{\frac{V_n}{(1+r)^n}\}$ はマルチンゲール.

(iii)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{V'_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\Big] &= \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\tilde{\mathbb{E}}_{n+1}\Big[\frac{V_N}{(1+r)^N}\Big]\Big] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{V_N}{(1+r)^N}\Big] \\ &= \frac{1}{(1+r)^n}\tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\Big] \\ &= \frac{V'_n}{(1+r)^n}\end{aligned}$$

よって $\{\frac{V'_n}{(1+r)^n}\}$ はマルチンゲール.

(iv)
定義より、$\frac{V'_N}{(1+r)^N} = \frac{V_N}{(1+r)^N}$ となるので (i)(ii)(iii) の結果を用いると

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \frac{V'_n}{(1+r)^n}, \forall n \Longleftrightarrow V_n = V'_n, \forall n$$

が成り立つ.

練習問題９

(i)

リスク中立確率は

$$\tilde{p}(\omega_1\omega_2) = \frac{1 + r(\omega_1\omega_2) - d(\omega_1\omega_2)}{u(\omega_1\omega_2) - d(\omega_1\omega_2)}$$

という式で上昇確率が求まるので各事象について計算すると，

$$\tilde{P}_H(HH) = \frac{1}{2}, \tilde{P}_H(HT) = \frac{1}{2}, \tilde{P}_T(TH) = \frac{1}{6}, \tilde{P}_T(TT) = \frac{5}{6}$$

ただし $\tilde{p}_H(HH)$ は (H) の格子上での上昇するリスク中立確率を意味する．これらを用いて時点０を基準とした整合的なリスク中立確率は

$$\tilde{P}(HH) = \frac{1}{4}, \tilde{P}(HT) = \frac{1}{4}, \tilde{P}(TH) = \frac{1}{12}, \tilde{P}(TT) = \frac{5}{12}$$

と計算できる．

(ii)

リスク中立評価式により

$$V_1(H) = \frac{1}{1.25}\Big[\frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 1\Big] = \frac{12}{5}$$

$$V_1(T) = \frac{1}{1.5}\Big[\frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times 0\Big] = \frac{1}{9}$$

となる．また $\tilde{P}(H) = \tilde{P}(T) = 0.5$ なので

$$V_0 = \frac{1}{1.25}\Big[\frac{1}{2} \times \frac{12}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9}\Big] = \frac{226}{225}$$

となる．

(iii)

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{103}{270}$$

(iv)

$$\Delta(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)} = 1$$

練習問題１０

(i)

$$\begin{aligned}\tilde{E}_n\Big[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\Big] &= \tilde{E}_n\Big[\frac{\Delta_n Y_{n+1} S_n}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}\Big] = \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^{n+1}}\tilde{E}_n[Y_{n+1}] + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\ &= \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^{n+1}}[\tilde{p}u + \tilde{q}d] + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} = \frac{X_n}{(1+r)^n}\end{aligned}$$

となり割引富過程はマルチンゲール.

(ii)

まず派生証券の時点 N でのペイオフ V_Nを初めの N 回のコイン投げの結果に依存する確率変数とする. そして (1.2.16) 式を用いて帰納的に V_nを定義する.また, Δ_nも(1.2.17) 式を用いて定義する. さらに, 配当がある場合の富の等式は (2.8.2) 式のようになり, 配当が無い場合の (1.2.14) 式とは一見異なる. しかし実際には (2.8.2) 式も (1.2.14) 式も共に

$$X_{n+1}(\omega_1,\dots,\omega_n,H) = \Delta_n u S_n + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n)$$

$$X_{n+1}(\omega_1,\dots,\omega_n,T) = \Delta_n d S_n + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n)$$

となって等しい. よって定理 1.2.2 と同様の手順で

$$X_n(\omega_1,\dots,\omega_n) = V_n(\omega_1,\dots,\omega_n), \forall n, \forall(\omega_1,\dots,\omega_n)$$

が成り立つことが示せる. つまり配当がある場合の富の等式 (2.8.2) 式から作られるポートフォリオ X_n も派生証券を複製できていることが分かる.

よって, 後は 上で定義した V_nについて 練習問題 8 と同様のプロセスをたどることで配当がある場合でもリスク中立価格評価式

$$V_n = \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\Big]$$

が成り立つことが分かる.

(iii)

$$\tilde{E}_n\Big[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\Big] = \tilde{E}_n\Big[\frac{(1-A_{n+1})Y_{n+1}S_n}{(1+r)^{n+1}}\Big] = \frac{S_n}{(1+r)^{n+1}}[(1-A_{n+1}(H))\tilde{p}u+(1-A_{n+1}(T))\tilde{q}d]$$

割引株価がマルチンゲールになるには

$$\frac{(1-A_{n+1}(H))\tilde{p}u + (1-A_{n+1}(T))\tilde{q}d}{1+r} = 1$$

となる必要があるが, これは常に成り立つとは限らない.

練習問題１１

(i)

まず時刻０でフォワード契約とプットを購入した場合の満期のペイオフは

$$(S_N - K) + (K - S_N)^+ = \begin{cases} S_N - K + K - S_N = 0 & \text{if } K > S_N \\ S_N - K & \text{if } K < S_N \end{cases}$$

これは満期のコールのペイオフと同じ.

(ii)

$$C_n = \tilde{E}_n\Big[\frac{C_N}{(1+r)^{N-n}}\Big] = \tilde{E}_n\Big[\frac{F_N+P_N}{(1+r)^{N-n}}\Big] = F_n + P_n$$

(iii)

$$F_0 = \tilde{E}_0\Big[\frac{F_N}{(1+r)^N}\Big] = \tilde{E}_0\Big[\frac{S_N-K}{(1+r)^N}\Big] = S_0 - \frac{K}{(1+r)^N}$$

(iv)

時刻０で F_0 ではじめ, 必要ならば資金を借りて株式を１単位購入するとき, 満期でのペイオフは (iii) の結果を利用して

$$(1+r)^N(F_0 - S_0) + S_N = -K + S_N$$

となる. つまりフォワード契約を複製できたことになる.

(v)

(i) の結果に $n=0, F_0=0$ を代入すると $C_0 = F_0 + P_0 = P_0$ となる.

(vi)

$$F_n = \tilde{E}_n\Big[\frac{S_N-K}{(1+r)^{N-n}}\Big] = \tilde{E}_n\Big[\frac{S_N-(1+r)^N S_0}{(1+r)^{N-n}}\Big] = S_n - (1+r)nS_0$$

となるがこれは常に０となるわけでないので,(ii) の結果より全ての n について $C_n = P_n$ が成り立つとは限らない.

練習問題１２

練習問題 11 の (v) より満期 N で行使価格 $K = (1+r)^{N-m}S_m$ のコールオプションとプットオプションの時点 m における価格は等しい。また、行使価格 $K > (1+r)^{N-m}S_m$ のときリスク中立評価式より

$$\begin{aligned}F_m &= \tilde{\mathbb{E}}_m\Big[\frac{F_N}{(1+r)^{N-m}}\Big]\\ &= (1+r)^m\tilde{\mathbb{E}}_m\Big[\frac{S_N}{(1+r)^N}\Big] - \frac{K}{(1+r)^{N-m}}\\ &= S_m - \frac{K}{(1+r)^{N-m}} < 0\end{aligned}$$

となるので (ii) より $C_m = F_m + P_m < P_m$ が成り立つ。逆の場合も同様で、まとめると次のようになる。

$$\begin{cases} C_m < P_m & \text{if} \quad K > (1+r)^{N-m} S_m \\ C_m = P_m & \text{if} \quad K = (1+r)^{N-m} S_m \\ C_m > P_m & \text{if} \quad K < (1+r)^{N-m} S_m \end{cases}$$

このことからチューザーオプションでは時点 m における原資産価格 S_m が行使価格 K に対して、1 番目の条件を満たすときプットオプションが選ばれ、2 番目の条件を満たすとき無差別になり、3 番目の条件を満たすときコールオプションが選ばれることが分かる。

一方、時点 0 で行使価格 K、満期 N のプットオプションと満期 m で行使価格 $\frac{K}{(1+r)^{N-m}}$ のコールオプションから成るポートフォリオを考える。このとき時点 m では

(・$S_m > \frac{K}{(1+r)^{N-m}}$ のとき)$\Longleftrightarrow K < (1+r)^{N-m} S_m$
コールオプションからのペイオフは $S_m - \frac{K}{(1+r)^{N-m}}$ なのでポートフォリオの価値は $P_m + S_m - \frac{K}{(1+r)^{N-m}} = P_m + F_m = C_m$、つまり行使価格 K、満期 N の コールオプションの価値と等しくなる。

(・$S_m < \frac{K}{(1+r)^{N-m}}$ のとき)$\Longleftrightarrow K > (1+r)^{N-m} S_m$
コールオプションからのペイオフは 0 なのでポートフォリオの価値は 行使価格 K、満期 N のプットオプションの価値と等しくなる。
また、等号が成り立つときは (v) よりコールオプションとプットオプションの価値が等しくなり、それがポートフォリオの価値となる。

つまりポートフォリオとチューザーオプションの時点 m での価値が確実に等しくなる。よって市場が無裁定ならばこの 2 つの時点 0 での価値は等しくなければならない。

練習問題１３

(i)

$$\tilde{E}_n[f(S_{n+1}, Y_{n+1})] = \tilde{E}_n[f(S_n X_{n+1}, Y_n + Sn + 1)]$$

ただし,$X_{n+1}(H) = u, X_{n+1}(T) = d$ と定義する. このとき補題 2.5.3 より

$$g(s, y) = E[f(sX_{n+1}, y + S_{n+1})]$$

と定義すると $\tilde{E}_n[f(S_{n+1}, Y_{n+1})] = g(S_n, Y_n)$ が成り立つ. つまり (S_n, Y_n) は 2 次元マルコフ過程になる.

(ii)

$$v_n(s,y) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us, y+us) + \tilde{q}v_{n+1}(ds, y+ds)]$$

$$v_N(s,y) = f\Big(\frac{y}{N+1}\Big)$$

練習問題１４

(i)

$n \geq M+1$ の場合は練習問題１３と同じ.$n < M$ の場合も

$$\tilde{E}_n[f(S_{n+1}, Y_{n+1})] = \tilde{E}_n[f(S_{n+1}, 0)] = g(S_n, 0) = g(S_n, Y_n)$$

となる.$n = M$ の場合は

$$\tilde{E}_M[f(S_{M+1}, Y_{M+1})] = \tilde{E}_M[f(S_{M+1}, S_{M+1})] = g(S_M, S_M)$$

となるので, 全て合わせて (S_n, Y_n) は２次元マルコフ過程になる.

(ii)

$$\begin{cases} v_n(s,y) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us, y+us) + \tilde{q}v_{n+1}(ds, y+ds)] & \text{if} \quad n \geq M+1 \\ v_M(s) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{M+1}(us, us) + \tilde{q}v_{M+1}(ds, ds)] & \text{if} \quad n = M \\ v_n(s) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v(us) + \tilde{q}v(ds)] & \text{if} \quad n < M \end{cases}$$

$$v_N(s,y) = f(\frac{y}{N-M})$$

ファイナンスのための確率解析 I
第 3 章

練習問題 1

(i′)

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{P(\omega)}{\tilde{P}(\omega)} > 0, \forall \omega \in \Omega$$

が仮定により成り立つ. よって $\tilde{P}(\frac{1}{Z} > 0) = 1$

(ii′)

$$\tilde{E}\Big[\frac{1}{Z}\Big] = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{P(\omega)}{\tilde{P}(\omega)} \tilde{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

(iii′)

$$\tilde{E}\Big[\frac{1}{Z} Y\Big] = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{P(\omega)}{\tilde{P}(\omega)} Y(\omega) \tilde{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) Y(\omega) = E[Y]$$

練習問題 2

(i)

$$\tilde{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) P(\omega) = E[Z] = 1$$

(ii)

$$\tilde{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \tilde{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)(\omega) P(\omega) = E[ZY]$$

(iii)

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = 0, P(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$$

が仮定および確率測度の性質より成り立つので $P(\omega) = 0, \forall \omega \in A$ がいえる. よって

$$\tilde{P}(A) = \sum_{\omega \in A} Z(\omega) P(\omega) = 0$$

(iv)

$$\tilde{P}(A) = \sum_{\omega \in A} Z(\omega) P(\omega) = 0, Z(\omega) P(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$$

が仮定より成り立つので $Z(\omega)P(\omega) = 0, \omega \in A$ となる. 仮定より $Z(\omega) > 0$ なので $P(\omega) = 0 \forall\omega \in A$ となる. よって $P(A) = 0$.

(v)

P と $\tilde{P}$ の同値性と確率測度の性質より $P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A^c) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A^c) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 1$ となる.

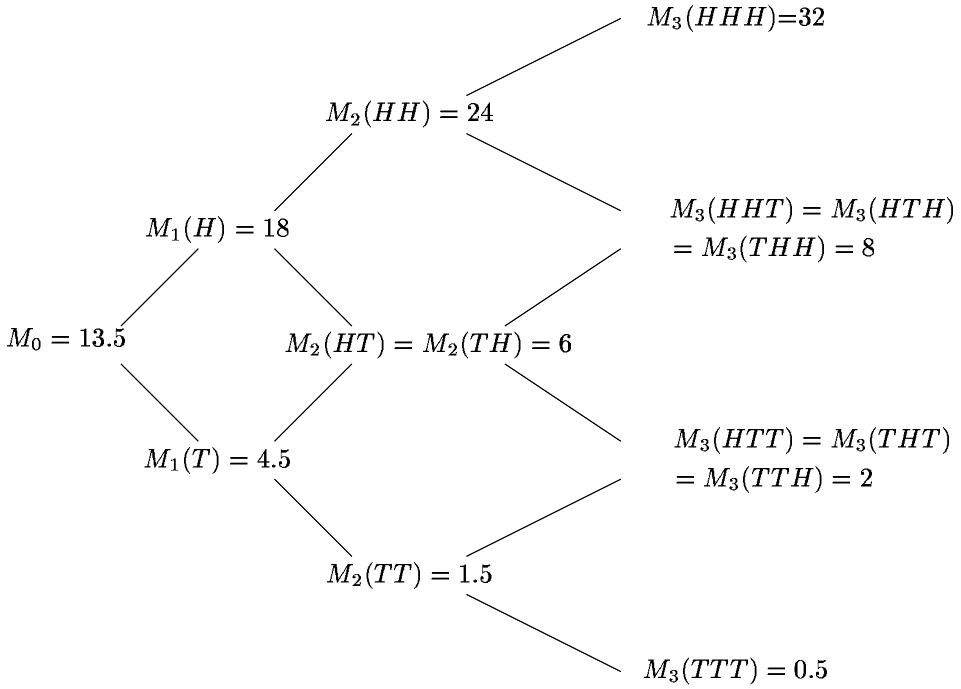
(vi)

確率変数 Z およびその分布を

$$P(Z(\omega_1) = \frac{3}{2}) = \frac{1}{3}, P(Z(\omega_2) = \frac{3}{2}) = \frac{1}{3}, P(Z(\omega_3) = 0) = \frac{1}{3}$$

と定義すると $E[Z] = 1, P(Z \geq 0) = 1$ となる. このとき $\tilde{P}(\omega_3) = 0$ だが $P(\omega_3) = \frac{1}{3} \neq 0$ となり P と $\tilde{P}$ は同値でない.

練習問題３



定義に従い (M_n) を計算すると上図のようになる. また

$$E_n[M_{n+1}] = E_n[E_{n+1}[S_3]] = E_n[S_3] = M_n$$

となるので (M_n) はマルチンゲールである.

練習問題４

(i)

$\zeta_3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 Z_3$ なので

$$\zeta_3(HHH) = \frac{27}{125}, \zeta_3(HHT) = \zeta_3(HTH) = \zeta_3(THH) = \frac{54}{125}$$

$$\zeta_3(HTT) = \zeta_3(THT) = \zeta_3(TTH) = \frac{108}{125}, \zeta_3(TTT) = \frac{216}{125}$$

(ii)

$$V_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \zeta(\omega) P(\omega) V_N(\omega)$$

に従い計算すると,

$$V_0 = \frac{27}{125}\frac{8}{27}11 + \frac{54}{125}\frac{4}{27}(5+2+0.5) + \frac{108}{125}\frac{2}{27}(0.5+0+0) + \frac{216}{125}\frac{1}{27}0 = 1.216$$

となる.

(iii)

$$\zeta_2(HT) = \zeta_2(TH) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 Z_2(HT) = \frac{18}{25}$$

(iv)

$$V_2(HT) = \frac{1}{\zeta_2(HT)} E_2[\zeta_3 V_3](HT) = \frac{25}{18}\left(\frac{2}{3}\frac{54}{125}2 + \frac{1}{3}\frac{108}{125}0.5\right) = 1$$

$$V_2(TH) = \frac{1}{\zeta_2(TH)} E_2[\zeta_3 V_3](TH) = \frac{25}{18}\left(\frac{2}{3}\frac{54}{125}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{108}{125}0\right) = 0.2$$

練習問題5

(i)

定義に従い計算すると

$$Z(HH) = \frac{9}{16}, Z(HT) = \frac{9}{8}, Z(TH) = \frac{3}{8}, Z(TT) = \frac{15}{4}$$

(ii)

$$Z_1(H) = E_1[Z](H) = \frac{2}{3}\frac{9}{16} + \frac{1}{3}\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

$$Z_1(T) = E_1[Z](T) = \frac{2}{3}\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\frac{15}{4} = \frac{3}{2}$$

$$Z_0 = E_0[Z_1] = \frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{2} = 1$$

(iii)

$$V_1(H) = \frac{16}{15}\Big(\frac{2}{3}\frac{9}{16}5 + \frac{1}{3}\frac{9}{8}1\Big) = 2.4$$

$$V_1(T) = \frac{8}{9}\Big(\frac{2}{3}\frac{3}{8}1 + \frac{1}{3}\frac{15}{4}0\Big) = \frac{1}{18}$$

$$V_0 = \frac{16}{25}\Big(\frac{4}{9}\frac{9}{16}5 + \frac{2}{9}\frac{9}{8}1\Big) + \frac{8}{15}\Big(\frac{2}{9}\frac{3}{8}1 + \frac{1}{9}\frac{15}{4}0\Big) = \frac{226}{225}$$

練習問題 6

補題 3.3.4 により問題は

$$\max E[\log(X_N)], \quad s.t. \tilde{E}\Big[\frac{X_N}{(1+r)^N}\Big] = X_0$$

と書き換えられる. これを解く.

$$L = \sum_{\omega\in\Omega} \log(X_N)(\omega) + \lambda\Big(X_0 - \sum_{\omega\in\Omega} \frac{X_N(\omega)}{(1+r)^N} P(\omega)Z(\omega)\Big)$$

とラグラジアンをおく. 一階条件は

$$\frac{P(\omega)}{X_N(\omega)} - \lambda\zeta_N(\omega)P(\omega) = 0$$

となるので $X_N = \frac{1}{\lambda\zeta_N}$ となる. これを制約式に代入すると,$\lambda = \frac{1}{X_0}$ となる. よって $X_0 = X_N\zeta_N$ が成り立つ. 次にこの両辺の条件付期待値を取ると

$$X_0 = E_n\Big[X_N \frac{Z_N}{(1+r)^N}\Big]$$

となる. また補題 3.2.6 より

$$\tilde{E}_n\Big[\frac{X_N}{(1+r)^N}\Big] = \frac{1}{Z_n} E_n\Big[\frac{X_N Z_N}{(1+r)^N}\Big]$$

となることを用いると,

$$E_n\Big[X_N \frac{Z_N}{(1+r)^N}\Big] = Z_n \tilde{E}_n\Big[\frac{X_N}{(1+r)^N}\Big] = Z_n \frac{X_n}{(1+r)^n} = X_n\zeta_n$$

となる. つまり $X_0 = X_n\zeta_n, \forall n$ が成り立つ.

練習問題 7

練習問題 6 と同じく問題を書き換えて解く.

$$L = \sum_{\omega\in\Omega} \log(X_N)(\omega) + \lambda\Big(X_0 - \sum_{\omega\in\Omega} \frac{X_N(\omega)}{(1+r)^N} P(\omega)Z(\omega)\Big)$$

とラグラジアンをおくと一階条件は

$$X_N^{p-1}(\omega)P(\omega) - \lambda P(\omega)\zeta(\omega) = 0$$

となる. これを整理して

$$\lambda = \frac{X_N^{p-1}}{\zeta}$$

となる. これを制約式に代入して整理すると

$$\lambda^{\frac{1}{p-1}} = \frac{X_0}{E[\zeta^{\frac{p}{p-1}}]}$$

となる. よって

$$X_N = \lambda^{\frac{1}{p-1}}\zeta^{\frac{1}{p-1}} = \frac{X_0\zeta^{\frac{1}{p-1}}}{E[\zeta^{\frac{p}{p-1}}]} = \frac{X_0(1+r)^N Z^{\frac{1}{p-1}}}{E[Z^{\frac{p}{p-1}}]}$$

となる.

練習問題 8

(i)

$U(x)$ は凹関数なので $V(x) = U(x) - yx$ も凹関数になる.また $U(x)$ は少なくとも 1 回微分可能なので (そうでないと I を定義できない), $I(y)$ の定義より $V'(I(y)) = 0$ が成り立つ. また 凹関数の性質より

$$V(x) \leq V(I(y)) + V'(I(y))(x - I(y)) = V(I(y))$$

が成り立つので関数 $U(x) - yx$ は $I(y)$ で最大化される.

(ii)

$x = X_N, y = \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}$ を (3.6.3) に代入すると

$$U(X_N) - \frac{\lambda Z X_N}{(1+r)^N} \leq U(X_N^*) - \frac{\lambda Z}{(1+r)^N} I\Big(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\Big)$$

となる. 両辺の期待値を取ると

$$(\text{左辺}) = E[U(X_N)] - E\Big[\frac{\lambda Z X_N}{(1+r)^N}\Big] = E[U(X_N)] - \lambda\tilde{E}\Big[\frac{X_N}{(1+r)^N}\Big] = E[U(X_N)] - \lambda X_0$$

$$(\text{右辺}) = E[U(X_N^*)] - E\Big[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} I\Big(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\Big)\Big] = E[U(X_N^*)] - \lambda X_0$$

(右辺) の最後の等式は (3.3.26) による. よって両辺を比較すると

$$E[U(X_N)] \leq E[U(X_N^*)]$$

が成り立つ.

練習問題 9

(i)

$$X_n = \tilde{E}_n\Big[\frac{X_N}{(1+r)^{N-n}}\Big] \geq 0$$

(ii)

$(0 < y \leq \frac{1}{\gamma})$ の場合

$$(RHS)-(LHS) = 1 - U(x) - y(\gamma - x) = \begin{cases} 1 - y(\gamma - x) \geq 0 & \text{if } 0 \leq x < \gamma \\ -y(\gamma - x) \geq 0 & \text{if } x \geq \gamma \end{cases}$$

$(y > \frac{1}{\gamma})$ の場合

$$(RHS)-(LHS) = -(U(x) - yx) = \begin{cases} yx \geq 0 & \text{if } 0 \leq x < \gamma \\ -1 + yx \geq 0 & \text{if } x \geq \gamma \end{cases}$$

(iii)

$x = X_N, y = \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}$ を (ii) の不等式に代入すると

$$U(X_N) - \frac{\lambda Z X_N}{(1+r)^N} \leq U(X_N^*) - \frac{\lambda Z}{(1+r)^N} I\Big(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\Big)$$

となる. 両辺の期待値をとると $U(x)$ の定義から

$$(左辺) = P(X_N \geq \gamma) - E\Big[\frac{\lambda Z X_N}{(1+r)^N}\Big] = P(X_N \geq \gamma) - \lambda \tilde{E}\Big[\frac{X_N}{(1+r)^N}\Big] = P(X_N \geq \gamma) - \lambda X_0$$

$$(右辺) = P(X_N^* \geq \gamma) - E\Big[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} I\Big(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\Big)\Big] = P(X_N^* \geq \gamma) - \lambda X_0$$

よって両辺を比較して

$$P(X_N \geq \gamma) \leq P(X_N^* \geq \gamma)$$

が成り立つ.

(iv) (3.6.4) 式は

$$X_0 = E\Big[\frac{Z}{(1+r)^N} I\Big(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\Big)\Big] = \sum_{m=1}^{M} \zeta_m I(\lambda \zeta_m) p_m = \sum_{m=1}^{K} \zeta_m \gamma p_m$$

と変形できる. ただし K は$\zeta_K \leq \frac{1}{\gamma\lambda} \leq \zeta_{K+1}$を満たす正の整数と定義する. よって λ の存在は

$$\sum_{m=1}^{K} \zeta_m p_m = \frac{X_0}{\gamma}$$

を満たす K の存在と同値である.

(v)

$X_N^* = I(\lambda\zeta)$ であること, および K の定義より

$$m \leq K \Rightarrow \lambda\zeta_m \leq \frac{1}{\gamma} \Rightarrow X_N^*(\omega^m) = \gamma$$

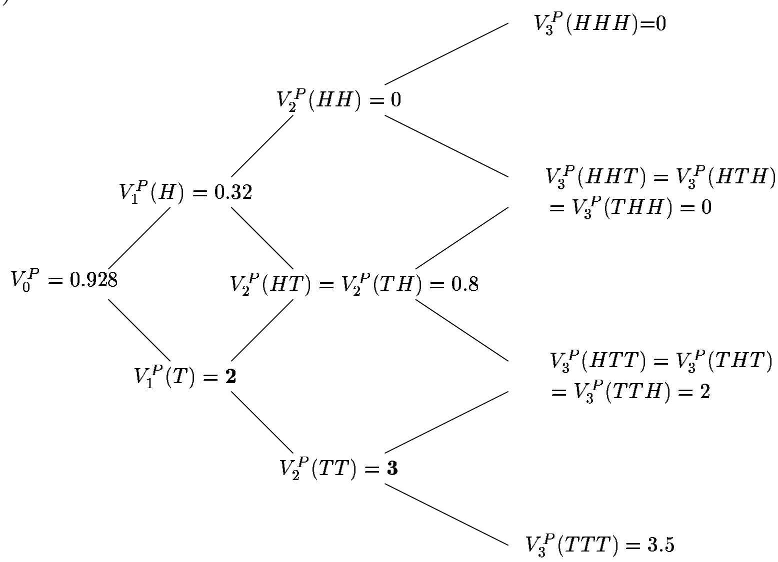
$$m > K \Rightarrow \lambda\zeta_m > \frac{1}{\gamma} \Rightarrow X_N^*(\omega^m) = 0$$

となる.

ファイナンスのための確率解析 I
第４章

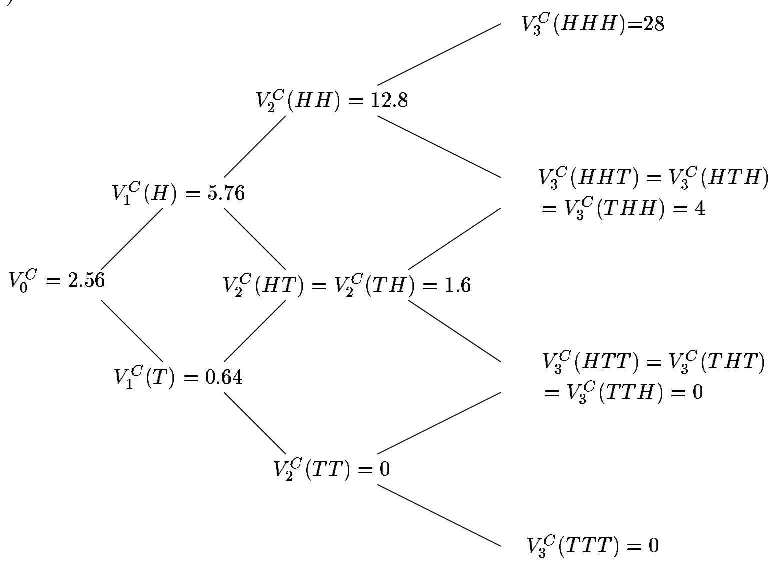
練習問題１

(i)



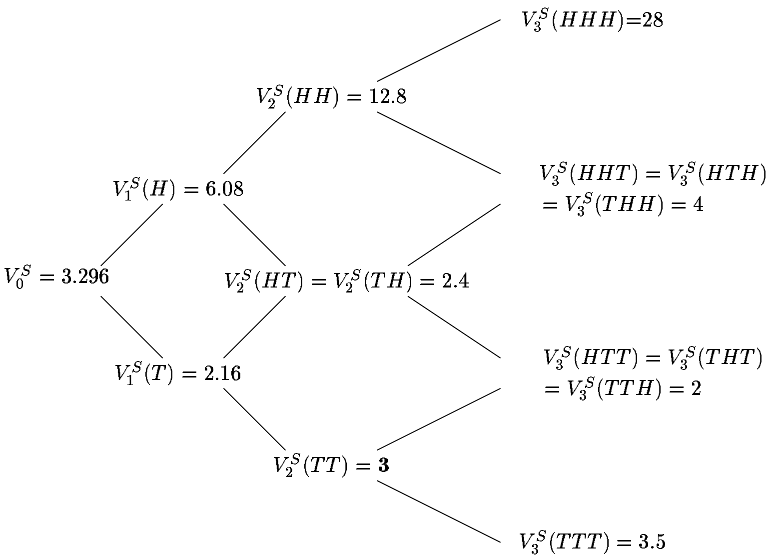
太字は早期行使を表す. よって $V_0^P = 0.928$.

(ii)



よって $V_0^C = 2.56$.

(iii)



よって $V_0^S = 3.296$.

(iv)

$V_0^S = 3.296 < V_0^C + V_0^P = 3.488$. となっている. ストラドルの場合, プットだけを先に行使し, コールをその後で行使するという戦略が取れない. そのため, それができるコールとプットを別々に保有する方が価値が高くなる. この例の場合, 事象 (T) に表れている.

練習問題２

時刻０で株式を Δ_0 単位保有しマネーマーケットに -4 投資すると, アメリカンプットと合わせて時刻１でのポートフォリオの価値 X_1 は

$$X_1(H) = 3\Delta_0 + 0.4, X_1(T) = -3\Delta_0 + 3$$

となる. これが共に $1.36 \times 1.25 = 1.7$ になるには $\Delta_0 = \frac{13}{30}$ とすればよい.

次に時刻２で常に $1.7 \times 1.25 = \frac{17}{8}$ を得るには

$$16\Delta_1(H) + \frac{5}{4}(1.7 - 8\Delta_1(H)) = \frac{17}{8}$$

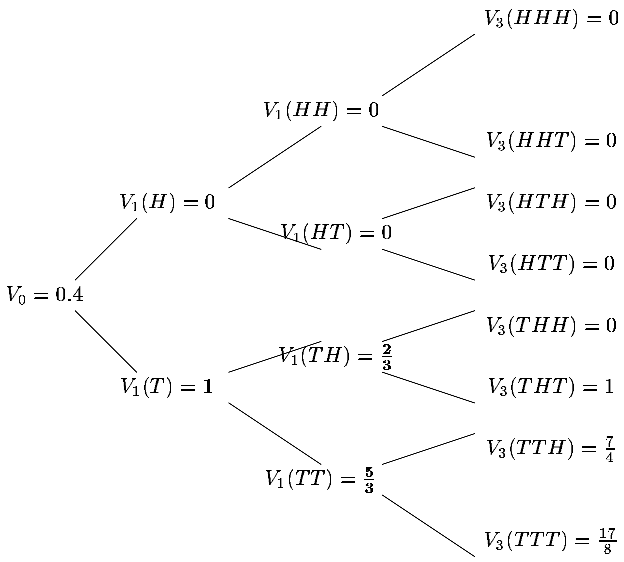
$$4\Delta_1(H) + \frac{5}{4}(1.7 - 8\Delta_1(H)) = \frac{17}{8}$$

$$4\Delta_1(T) + \frac{5}{4}(1.7 - 4\Delta_1(T)) = \frac{17}{8}$$

$$2\Delta_1(T) + \frac{5}{4}(1.7 - 4\Delta_1(T)) = \frac{17}{8}$$

となるよう $\Delta_1(H), \Delta_1(T)$ を定めればよい.$\Delta_1(H) = \Delta_1(T) = 0$.

練習問題 3



よって価格は 0.4. 太字は早期行使を表す. つまり時刻 1 で T が実現すれば早期行使. そうでなければ行使しないという戦略が最適.

練習問題 4

まず $(HH), (HT)$ が実現すると分かっている場合, インサイダーは時刻 0 で早期行使をするが, 売り手は 1.36 受け取っているので支払を履行できる. 次に (TH) が実現すると分かっている場合, インサイダーは時刻 1 で早期行使をするが, この場合も -0.43 単位 株式を保有することで売り手はこの支払に対応できる. そして (TT) が実現すると分かっている場合, インサイダーは時刻 2 で行使するが, この場合も $\Delta_1(T) = -1$ とすることで売り手はこの支払に対応できる. よって, インサイダーに対してより高い価格を請求する必要はない.

練習問題 5

まず停止時刻を列挙する.

$$(1)\tau(HH) = \infty, \tau(HT) = \infty, \tau(TH) = \infty, \tau(TT) = \infty$$

$$(2)\tau(HH) = 2, \tau(HT) = \infty, \tau(TH) = \infty, \tau(TT) = \infty$$

$$(3)\tau(HH) = \infty, \tau(HT) = 2, \tau(TH) = \infty, \tau(TT) = \infty$$

$$(4)\tau(HH) = \infty, \tau(HT) = \infty, \tau(TH) = 2, \tau(TT) = \infty$$

$(5)\tau(HH)=\infty,\tau(HT)=\infty,\tau(TH)=\infty,\tau(TT)=2$

$(6)\tau(HH)=\infty,\tau(HT)=\infty,\tau(TH)=2,\tau(TT)=2$

$(7)\tau(HH)=\infty,\tau(HT)=2,\tau(TH)=\infty,\tau(TT)=2$

$(8)\tau(HH)=\infty,\tau(HT)=2,\tau(TH)=2,\tau(TT)=\infty$

$(9)\tau(HH)=2,\tau(HT)=\infty,\tau(TH)=\infty,\tau(TT)=2$

$(10)\tau(HH)=2,\tau(HT)=\infty,\tau(TH)=2,\tau(TT)=\infty$

$(11)\tau(HH)=2,\tau(HT)=2,\tau(TH)=\infty,\tau(TT)=\infty$

$(12)\tau(HH)=\infty,\tau(HT)=2,\tau(TH)=2,\tau(TT)=2$

$(13)\tau(HH)=2,\tau(HT)=\infty,\tau(TH)=2,\tau(TT)=2$

$(14)\tau(HH)=2,\tau(HT)=2,\tau(TH)=\infty,\tau(TT)=2$

$(15)\tau(HH)=2,\tau(HT)=2,\tau(TH)=2,\tau(TT)=\infty$

$(16)\tau(HH)=2,\tau(HT)=2,\tau(TH)=2,\tau(TT)=2$

$(17)\tau(HH)=1,\tau(HT)=1,\tau(TH)=\infty,\tau(TT)=\infty$

$(18)\tau(HH)=1,\tau(HT)=1,\tau(TH)=\infty,\tau(TT)=2$

$(19)\tau(HH)=1,\tau(HT)=1,\tau(TH)=2,\tau(TT)=\infty$

$(20)\tau(HH)=1,\tau(HT)=1,\tau(TH)=2,\tau(TT)=2$

$(21)\tau(HH)=\infty,\tau(HT)=\infty,\tau(TH)=1,\tau(TT)=1$

$(22)\tau(HH)=\infty,\tau(HT)=2,\tau(TH)=1,\tau(TT)=1$

$(23)\tau(HH)=2,\tau(HT)=\infty,\tau(TH)=1,\tau(TT)=1$

$(24)\tau(HH)=2,\tau(HT)=2,\tau(TH)=1,\tau(TT)=1$

$(25)\tau(HH)=1,\tau(HT)=1,\tau(TH)=1,\tau(TT)=1$

$(26)\tau(HH)=0,\tau(HT)=0,\tau(TH)=0,\tau(TT)=0$

このうちアウト・オブ・ザ・マネーのときに行使されない停止時刻は,1,3,4,5,6,7,8,12,21,22,26. それぞれの停止時刻について

$$\tilde{E}\Big[1_{\{\tau\le 2\}}\Big(\frac{4}{5}\Big)^{\tau}G_\tau\Big]$$

を計算すると (過程は省略)

(1)0,(3)0.16,(4)0.16,(5)0.64,(6)0.8,(7)0.8,(8)0.32,(12)0.96,(21)1.2,(22)1.36,(26)1

となるので (4.4.6) 式の停止時刻, つまり (22) が最大値を与えることが分かる.

練習問題６

(i)

時刻 $N-1$ に早期行使すべきかどうか考える. もし行使しなければ次期に $K-S_N$ のペイオフが発生するが, この $N-1$ 時点における価値はリスク中立評価法によると

$$\frac{1}{1+r}\tilde{E}_{N-1}[(K-S_N)] = \frac{K}{1+r} - S_{N-1}$$

となる. これと早期行使のペイオフ $K-S_{N-1}$ を比べると

$$\frac{K}{1+r} - S_{N-1} - (K - S_{N-1}) = -\frac{rK}{1+r} < 0$$

となるので時点 $N-1$ では早期行使が最適になることが分かる. よって同じ議論で $N-2$ でも早期行使が最適になる. これを繰り返して最適な行使戦略は時点０での行使になることが分かる.

(ii)

(i) の派生証券と満期 N のヨーロピアンコールを持つと, 満期でのペイオフはプットオプションと同じになる. つまり, このポートフォリオはアメリカンプットオプションの最適行使戦略を実行できる. よって (4.8.4) 式が成り立つ.

(iii)

練習問題１１ (ii)(iii) より

$$V_0^{EC} - S_0 + \frac{K}{(1+r)^N} = V_0^{EP}$$

が成り立つ. ヨーロピアンプットはアメリカンプットにおいて停止時刻を

$$\tau(\{K - S_N > 0\}) = N, \tau(\{K - S_N \leq 0\}) = \infty$$

と定めたものに等しいので,$V_0^{EP} \leq V_0^{AP}$ が成り立つ. 合わせて (4.8.5) 式が成り立つ.

練習問題７

時刻 $N-1$ に早期行使すべきかどうか考える. 行使しなければ次期に $S_N - K$ のペイオフが発生する. リスク中立評価法によるとこの価値は

$$\frac{1}{1+r}\tilde{E}_{N-1}[S_N - K] = S_{N-1} - \frac{K}{1+r}$$

となる. 両者を比較すると

$$S_{N-1}-\frac{K}{1+r}-(S_{N-1}-K)=\frac{rK}{1+r}>0$$

となり待つのが最適. 次に時刻 $N-2$ に早期行使すべきかどうか考える. 行使しない場合の価値はリスク中立評価法によると

$$\frac{1}{1+r}\tilde{E}_{N-2}\Big[S_{N-1}-\frac{K}{1+r}\Big]=S_{N-2}-\frac{K}{(1+r)^2}$$

となる. 待つ場合と比較すると上と同様に

$$S_{N-2}-\frac{K}{(1+r)^2}-(S_{N-2}-K)=K\Big(\Big(1-\frac{1}{1+r}\Big)^2\Big)>0$$

となり待つのが最適.

時点 $N-l+1$ での価値が

$$S_{N-(l-1)}-\frac{K}{(1+r)^{l-1}}$$

と仮定すると時点 $N-l$ では

$$\frac{1}{1+r}\tilde{E}_{N-l}\Big[S_{N-(l-1)}-\frac{K}{(1+r)^{l-1}}\Big]-(S_{N-l}-K)=K\Big(1-\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^l\Big)>0$$

となるので待つのが最適でその価値は

$$S_{N-l}-\frac{K}{(1+r)^l}$$

となる. よって後ろ向き帰納的に時点 $N-l$ でのこの派生証券の価値は上式で決定されることが分かる.$l=N$ を代入して時刻0での価値は

$$S_0-\frac{K}{(1+r)^N}$$

となる. 最適行使戦略は満期まで待つことである.

ファイナンスのための確率解析 I
第５章

練習問題１

(i)

$$E[\alpha^{\tau_2}] = E[\alpha^{\tau_2-\tau_1+\tau_1}] = E[\alpha^{\tau_2-\tau_1}]E[\alpha^{\tau_1}] = E[\alpha^{\tau_1}]^2$$

(ii)

$$E[\alpha^{\tau_m}] = E[\alpha^{\sum_{k=0}^{m-1}(\tau_{k+1}-\tau_k)}] = \Pi_{k=0}^{m-1}E[\alpha^{\tau_{k+1}-\tau_k}] = E[\alpha^{\tau_1}]^m$$

(iii)

ランダムウォークが非対称であっても各回のコイン投げの独立性は変わらないので $\{\tau_{k+1}-\tau_k\}_k = 0^{m-1}$ はそれぞれ独立のまま.(ii) の結果はランダムウォークの独立増分性に依存しているので, やはり成立する.

練習問題２

(i)

$$f'(\sigma) = pe^{\sigma} - qe^{-\sigma} = 0, f"(\sigma) > 0$$

となるので $e^{\sigma} = (q/p)^{0.5}$ のとき $f(\sigma)$ は最小となるが, これは $\sigma > 0$ に反するので, $f(\sigma) > f(0) = 1$ が成り立つ.

(ii)

$$E_n[S_{n+1}] = e^{\sigma M_n}\Big(\frac{1}{f(\sigma)}\Big)^n E_n\Big[e^{\sigma X_{n+1}}\Big(\frac{1}{f(\sigma)}\Big)\Big] = S_n\Big(\frac{pe^{\sigma}+qe^{-\sigma}}{f(\sigma)}\Big) = S_n$$

(iii)

任意抽出定理により

$$1 = S_0 = E[S_{n\wedge\tau_1}] = E\Big[e^{\sigma M_{n\wedge\tau_1}}\Big(\frac{1}{f(\sigma)}\Big)^{n\wedge\tau_1}\Big]$$

となる. また

$$\lim_{n\to\infty} S_{n\wedge\tau_1} = \begin{cases} 0 & \text{if } \tau_1 = \infty \\ e^{\sigma}\Big(\frac{1}{f(\sigma)}\Big)^{\tau_1} & \text{if } \tau_1 < \infty \end{cases}$$

また有界収束定理により lim と E は交換可能なので

$$1 = E\Big[1_{\{\tau_1<\infty\}}e^{\sigma}\Big(\frac{1}{f(\sigma)}\Big)^{\tau_1}\Big]$$

よって

$$e^{-\sigma} = E\Big[1_{\{\tau_1<\infty\}}\Big(\frac{1}{f(\sigma)}\Big)^{\tau_1}\Big]$$

となる.$\sigma \downarrow 0$ とすると有界収束定理により $\lim$ と E は交換可能なので

$$1 = P(\tau_1 < \infty)$$

が成り立つ.

(iv)
$\alpha = \frac{1}{f(\sigma)}$ とすると $\alpha p e^{\sigma} + \alpha q e^{-\sigma} - 1 = 0$ となり

$$e^{-\sigma} = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha^2 pq}}{2\alpha q}$$

となる. よって (iii) より

$$1 = E\Big[\frac{2\alpha q}{1-\sqrt{1-4\alpha^2 pq}}\alpha^{\tau_1}\Big]$$

となる. よって

$$E[\alpha^{\tau_1}] = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha^2 pq}}{2\alpha q}$$

となる.

(v)
両辺を α で微分して整理すると

$$E[\tau_1 \alpha^{\tau_1-1}] = \frac{(1-(1-4\alpha^2 pq)^{\frac{1}{2}})}{2\alpha^2 q(1-4\alpha^2 pq)^{\frac{1}{2}}}$$

$\alpha \uparrow 1$ とすると

$$E[\tau_1] = \frac{1-(1-4pq)^{0.5}}{2q(1-4pq)^{0.5}}$$

となる.

練習問題３
(i)

$$pe^{\sigma} + qe^{-\sigma} = 1 \Leftrightarrow (e^{\sigma}-1)(pe^{\sigma}-q) = 0$$

となるので $\sigma_0 = \log(q/p)$.

(ii)

練習問題 2 の (iii) の等式は成り立つ (ただし$\sigma > \sigma_0$) ので $\sigma \downarrow \sigma_0$ とすると

$$e^{-\sigma_0} = P(\tau_1 < \infty)$$

となる. よって $P(\tau_1 < \infty) = \sqrt{p/q}$.

(iii)

$\alpha = \frac{1}{f(\sigma)}$ とすると

$$E[\alpha^{\tau_1}] = E[1_{\{\tau_1 < \infty\}}\alpha^{\tau_1}] + E[1_{\{\tau_1 = \infty\}}\alpha^{\tau_1}] = E[1_{\{\tau_1 < \infty\}}\alpha^{\tau_1}] = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2 pq}}{2\alpha q}$$

となる. 最後の等式は練習問題 2 の (iv) の結果を用いた.

(iv)

練習問題 2 の (v) で $E[\alpha^{\tau_1}]$ を $E[1_{\{\tau_1 < \infty\}}\tau_1]$ に置き換えれば,

$$E[1_{\{\tau_1 < \infty\}}\tau_1] = \frac{1 - (1 - 4pq)^{0.5}}{2q(1 - 4pq)^{0.5}}$$

が成り立つ.

練習問題 4

(i)

$$E[\alpha^{\tau_2}] = \sum_{k=1} P(\tau_2 = 2k)\alpha^{2k} = \sum_{k=1} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$$

となるので級数の各項を比較して

$$P(\tau_2 = 2k) = \frac{(2k)!}{4^k(k+1)!k!}$$

となる.

(ii)

鏡像原理とランダムウォークの対称性により

$$P(\tau_2 \leq 2k) = P(M_{2k} = 2) + 2P(M_{2k} \geq 4) = 1 - P(M_{2k} = -2) - P(M_{2k} = 0)$$

がいえるので

$$\begin{aligned}
P(\tau_2=2k) &= P(\tau_2\le 2k)-P(\tau_2\le 2k-2)\\
&= P(M_{2k-2}=-2)+P(M_{2k-2}=0)-P(M_{2k}=-2)-P(M_{2k}=0)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}\left\{\frac{(2k-2)!}{k!(k-2)!}+\frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!}\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left\{\frac{(2k)!}{(k+1)!(k-1)!}+\frac{(2k)!}{k!k!}\right\}\\
&= \frac{(2k)!}{4^k(k+1)!k!}
\end{aligned}$$

練習問題 5

(i)

ランダムウォークが, 初めてレベル m に達した時点を軸にして, その後 $M_n=b$ となる経路と $M_n=m+(m-b)=2m-b$ となる経路は鏡像経路として対応する．よって,$(b\le m)$ と合わせて,

$$\begin{aligned}
P(M_n^*\ge m, M_n=b) = P(M_n^*\ge m, M_n=2m-b) &= P(M_n=2m-b)\\
&= \frac{n!}{\left(\frac{n-b}{2}+m\right)!\left(\frac{n+b}{2}-m\right)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(ii)

(i) で経路の数は求めてあるので, 各経路の確率 $\frac{1}{2^n}$ を変えればよい.よって求める確率は

$$\frac{n!}{\left(\frac{n-b}{2}+m\right)!\left(\frac{n+b}{2}-m\right)!}p^{\frac{n-b}{2}+m}q^{\frac{n+b}{2}-m}$$

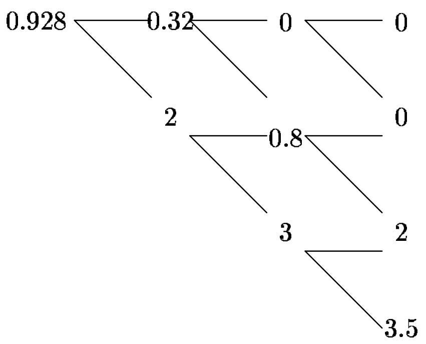
となる.

練習問題 6

問題文の行使日は文脈から察するに満期日の間違いと思われる (恐らく, 満期日を大きくしていくとアメリカンプットの価格が永久プットの価格に近づいていくことを示したいものと思われるので).

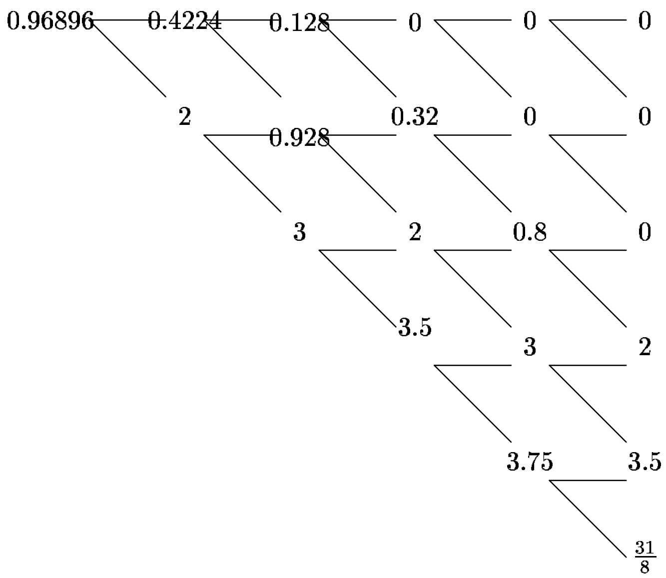
まず満期日が時刻 1 のアメリカンプットの価格は $2\times 0.4=0.8$ となる.

次に満期日が時刻 3 のアメリカンプットの価格は



となり 0.928 である.

そして満期日が時刻 5 のアメリカンプットの価格は



となり 0.96896 である.

練習問題 7

(i)

$(j \geq 0)$ のとき

$$v(2s) = 4 - 2s, v\left(\frac{s}{2}\right) = 4 - \frac{s}{2}$$

$$c(s) = 4 - s - \frac{4}{5}\left(4 - \frac{5}{4}s\right) = 0.8$$

$(j = 1)$ のとき

$$v(2s) = \frac{4}{2s} = 1, v\left(\frac{s}{2}\right) = 4 - \frac{s}{2} = 3$$

$$c(s) = 4 - 2 - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}3\right) = 0.4$$

$(j \geq 2)$ のとき

$$v(2s) = \frac{4}{2s} = \frac{2}{s}, v\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{4}{s/2} = \frac{8}{s}$$

$$c(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{s} + \frac{4}{s}\right) = 0$$

(ii)
$(j \geq 0)$ のとき

$$\delta(s) = \frac{-\frac{3}{2}s}{\frac{3}{2}s} = -1$$

$(j - 1)$ のとき

$$\delta(s) = -\frac{2}{3}$$

$(j \geq 2)$ のとき

$$\delta(s) = \frac{-\frac{6}{s}}{\frac{3}{2}s} = -\frac{4}{s^2}$$

(iii)
次期の株価を s' とするとヘッジポートフォリオの価値 $x(s')$ は

$$x(s') = \delta(s)s' + (1 + r)(v(s) - c(s) - \delta(s)s)$$

となるのでこれが $v(s')$ と等しくなるかどうか確かめる.
$(j \geq 0)$ のとき

$$x(s') = -s' + \frac{5}{4}(4 - s - 0.8 + s) = 4 - s' = v(s')$$

となっていて正しい.
$(j = 1)$ のとき

$$x(s') = -\frac{2}{3}s' + \frac{5}{4}(2 - 0.4 + \frac{2}{3}2) = -\frac{2}{3}s' + \frac{11}{3} = \begin{cases} 1 & s' = 4 \\ 3 & s' = 1 \end{cases}$$

これは共に $v(s')$ と等しいので正しくヘッジできている.
$(j \geq 2)$

$$x(s') = -\frac{4}{s^2}s' + \frac{5}{4}\left(\frac{4}{s} + \frac{4}{s^2}s\right) = -\frac{4s'}{s^2} + \frac{10}{s} = \begin{cases} 2/s & s' = 2s \\ 8/s & s' = s/2 \end{cases}$$

これは共に $v(s')$ と等しいので正しくヘッジできている.

練習問題 8

(i)

$$\tilde{E}_n\Big[\frac{v(S_{N+1})}{(1+r)^{N+1}}\Big] = \tilde{E}_n\Big[\frac{S_{N+1}}{(1+r)^{n+1}}\Big] = \frac{S_n}{(1+r)^n} = \frac{v(S_n)}{(1+r)^n}$$

となるので $\frac{v(S_n)}{(1+r)^n}$ はマルチンゲール. よって優マルチンゲールでもある.

(ii)

時刻 n で常に行使するときの投資の時刻 0 における価値は

$$\tilde{E}\Big[\frac{S_n - K}{(1+r)^n}\Big] = S_0 - \frac{K}{(1+r)^n}$$

となる. これは $n \to \infty$ とすると S_0 に収束する. これはいつまでも行使しないという戦略を意味するのでコールの価値は少なくともその時点での株価以上の価値をもつ.

(iii)

ベルマン方程式の右辺は

$$\max\Big\{s-K, \frac{1}{1+r}[\tilde{p}us + \tilde{q}ds]\Big\} = \max\Big\{s-K, s\Big\} = s = v(s)$$

となるので $v(s) = s$ はベルマン方程式を満たす. また境界条件 (5.4.18) も明らかに満たしている.

(iv)

$v(S_n) = S_n$ は (iii) のベルマン方程式から常に行使しない戦略に対応しているので, 永久アメリカンコールは最適行使時刻をもたない.

練習問題 9

(i)

$v(s) = s^p$ を代入すると

$$s^p = \frac{2}{5}(2s)^p + \frac{2}{5}\Big(\frac{s}{2}\Big)^p \Leftrightarrow s^p(2^{1-p+2^{p+1}-5}) = 0$$

$s^p > 0$ なので

$$2^{1-p+2^{p+1}-5} = 0 \Leftrightarrow 2(2^{2p}) - 5(2^p) + 2 = (2^p - 2)(2(2^p) - 1) = 0$$

これを解くと $p = 1, -1$.

(ii)

$$v(s) = As + \frac{B}{s}$$

に境界条件 $\lim_{s\to\infty} = 0$ を課すと,$A \lim_{s\to\infty} s = 0$ より $A = 0$ が必要.

(iii)

$$f_B(s)' = -\frac{B}{s^2} + 1 = 0, f_B(s)" = \frac{2B}{s^3} > 0$$

より $s = \sqrt{B}$ で $f_B(s)$ は最小値を取る. そのとき

$$f_B(s) = 2\sqrt{B} - 4 > 0 \Leftrightarrow B > 4$$

となるので $B > 4$ のとき $f_B(s)$ は解をもたない. 逆に $B \leq 4$ の場合 $f_B(s)$ は正の値と負の値を取りうる連続関数なので中間値の定理により $f_B(s) = 0$ は解をもつ.

(iv)

リスク中立測度のもとで株価は対称ランダムウォークをもとに決定されるので定理 5.2.3 を用いると

$$v_B(S_0) = \tilde{E}\Big[\Big(\frac{4}{5}\Big)^{\tau}(4 - s_B)\Big] = (4 - s_B)\tilde{E}\Big[\Big(\frac{4}{5}\Big)^{\tau}\Big] = (4 - s_B)\frac{1}{2^{2-j}} = \frac{(4 - 2^j)2^j}{4}$$

となる. また

$$\frac{(4 - 2^{j+1})2^{j+1}}{(4 - 2^j)2^j} > 1 \Leftrightarrow 2^j < \frac{4}{3}$$

となるので $v_B(s)$ は $j = 1$, つまり $s_B = 2$ のときに最大になることが分かる. そのとき $B = 4$.

(v)

(iv) で計算した s_B, B により $v'_B(s_B) = -\frac{4}{2^2} = -1$ となるので $v'_B(s)$ は $s = s_B$において連続.

ファイナンスのための確率解析 I
第 6 章

練習問題 1

(i)

$$
\begin{aligned}
E_n[c_1X+c_2Y](\omega_1\ldots\omega_n) &= \sum_{\omega_{n+1}\ldots\omega_N}(c_1X(\omega_1\ldots\omega_N)+c_2Y(\omega_1\ldots\omega_N))P(\omega_{n+1\ldots\omega_N|\omega_1\ldots\omega_n}) \\
&= c_1\sum_{\omega_{n+1}\ldots\omega_N}X(\omega_1\ldots\omega_N)P(\omega_{n+1}\ldots\omega_N)+ \\
&\quad c_2\sum_{\omega_{n+1}\ldots\omega_N}Y(\omega_1\ldots\omega_N)P(\omega_{n+1}\ldots\omega_N) \\
&= c_1E_n[X](\omega_{n+1}\ldots\omega_N)+c_2E_n[Y](\omega_{n+1}\ldots\omega_N)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
E_n[XY](\omega_1\ldots\omega_n) &= X(\omega_1\ldots\omega_n)\sum_{\omega_{n+1}\ldots\omega_N}Y(\omega_1\ldots\omega_N)P(\omega_{n+1}\ldots\omega_N|\omega_1\ldots\omega_n) \\
&= X(\omega_1\ldots\omega_n)E_n[Y](\omega_1\ldots\omega_n)
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
E_n[E_m[X]] = E_n[Z] &= \sum_{\omega_{n+1}\ldots\omega_N}Z(\omega_1\ldots\omega_m)P(\omega_{n+1}\ldots\omega_N|\omega_1\ldots\omega_n) \\
&= \frac{1}{P(\omega_1\ldots\omega_n)}\sum_{\omega_{n+1}\ldots\omega_m}Z(\omega_1\ldots\omega_m)P(\omega_1\ldots\omega_m) \\
&= \frac{1}{P(\omega_1\ldots\omega_n)}\sum_{\omega_{n+1}\ldots\omega_m}\sum_{\omega_{m+1}\ldots\omega_N}X(\omega_1\ldots\omega_N)\frac{P(\omega_1\ldots\omega_N)}{P(\omega_1\ldots\omega_m)}P(\omega_1\ldots\omega_m) \\
&= E_n[X]
\end{aligned}
$$

(v)

定理 2.3.2 の場合と同じ方法で示せるので省略.

練習問題 2

時点 n で資産を 1 単位買い, 満期 m の割引債を $\frac{S_n}{B_{n,m}}$ 単位売るというポートフォリオの割引価値を考える.$n \le k$ とすると

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_n\Big[\Big(S_k-\frac{S_n}{B_{n,m}}B_{k,m}\Big)D_k\Big] &= \tilde{E}_n[S_kD_k]-\tilde{E}_n\Big[S_nD_k\frac{D_n}{\tilde{E}_n[D_m]}\frac{\tilde{E}_k[D_m]}{D_k}\Big] \\
&= S_nD_n-\frac{S_nD_n}{\tilde{E}_n[D_m]}\tilde{E}_n[D_m]=0
\end{aligned}
$$

このポートフォリの価値は0なので, 割引価値がマルチンゲールになっていることが分かる.

練習問題3

$$B_{n,m}-B_{n,m+1}=\frac{\tilde{E}_n[D_m]}{D_n}-\frac{\tilde{E}_n[D_{m+1}]}{D_n}=\frac{1}{D_n}\tilde{E}_n[D_{m+1}(1+R_m)-D_{m+1}]=\frac{\tilde{E}_n[D_{m+1}R_m]}{D_n}$$

練習問題4

(i)

$$V_1=\frac{\tilde{E}_1\left[D_3\left(R_2-\frac{1}{3}\right)^+\right]}{D_1}$$

より

$$V_1(H)=\frac{2}{3}\frac{3}{7}\frac{2}{3}+\frac{6}{7}0\frac{1}{3}=\frac{4}{21},\ V_1(T)=0$$

(ii)

富の等式 (6.2.6) より, 満期 2 の債券に Δ 単位投資するとき

$$X_1=\Delta B_{1,2}+\left(\frac{2}{21}-\Delta B_{0,2}\right)=\frac{\Delta}{1+R_1}+\left(\frac{2}{21}-\frac{11}{14}\Delta\right)$$

となる. これが H,T でそれぞれ $X_1=V_1$ となるには $\Delta=\frac{4}{3}$ とすればよい.

また代わりに満期 3 の債券に投資するとき

$$X_1=\Delta B_{1,3}+\left(\frac{2}{21}-\Delta B_{0,3}\right)=\Delta B_{1,3}+\left(\frac{2}{21}-\frac{4}{7}\Delta\right)$$

となる. これは H,T ともに $\frac{2}{21}$ となるので V_1 をヘッジできない.

(iii)

$\Delta(T)$ は明らかに 0 なので,$\Delta(H)$ のみを考える. 富の等式は, 時刻 1 で満期 3 の債券に $\Delta(H)$ 単位投資するとき

$$X_2=\Delta(H)B_{2,3}+\left(\frac{4}{21}-\Delta(H)B_{1,3}(H)\right)(1+R_1(H))=\frac{\Delta}{1+R_2}+\left(\frac{4}{21}-\frac{4}{7}\Delta\right)\frac{7}{6}$$

となる. これが HH,HT でそれぞれ $X_2=V_2$ となるには $\Delta(H)=-\frac{2}{3}$ とすればよい.

また代わりに満期 2 の債券に投資するとき

$$X_2=\Delta(H)B_{2,2}+\left(\frac{4}{21}-\Delta(H)B_{1,2}(H)\right)=\Delta(H)+\frac{2}{9}-\frac{7}{6}\frac{6}{7}\Delta(H)=\frac{2}{9}$$

となるので $X_2=V_2$ となるような $\Delta(H)$ は存在しない.

練習問題 5

(i)

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_k^{m+1}[F_{n,m}] &= \frac{1}{D_k B_{k,m+1}} \tilde{E}_k[D_{m+1}F_{n,m}] \\
&= \frac{1}{\tilde{E}_k[D_{m+1}]} \tilde{E}_k\Big[D_{m+1}\frac{\tilde{E}_n[D_m]}{\tilde{E}_n[D_{m+1}]}\Big] - 1 \\
&= \frac{1}{\tilde{E}_k[D_{m+1}]} \tilde{E}_k\Big[\tilde{E}_n[D_{m+1}]\frac{\tilde{E}_n[D_m]}{\tilde{E}_n[D_{m+1}]}\Big] - 1 \\
&= \frac{\tilde{E}_k[D_m]}{\tilde{E}_k[D_{m+1}]} - 1 = F_{k,m}
\end{aligned}$$

(ii)

$F_{n,m}$の定義 (6.3.3) 式に従い計算すると

$$F_{0,2} = 0.05, F_{1,2}(H) = 0.055, F_{1,2}(T) = 0.045$$

となる. このとき

$$\tilde{E}^3[F_{1,2}] = \tilde{P}^3(H)F_{1,2}(H) + \tilde{P}_3(T)F_{1,2}(T) = 0.05$$

となり一致する.

練習問題 6

(i)

時刻 n でのフォワード価格は $\frac{S_n}{B_{n,m}}$ なので, この契約は時刻 m で $S_m - \frac{S_n}{B_{n,m}}$ のペイオフを発生させる. この契約の時刻 $n+1$ での価値 V_{n+1} はリスク中立評価法によると

$$\begin{aligned}
D_{n+1}V_{n+1} &= \tilde{E}_{n+1}\Big[D_m\Big(S_m - \frac{S_n}{B_{n,m}}\Big)\Big] = D_{n+1}S_{n+1} - \frac{S_n}{B_{n,m}}\tilde{E}_{n+1}[D_m] \\
&= D_{n+1}S_{n+1} - \frac{S_n D_{n+1} B_{n+1,m}}{B_{n,m}} \\
&\Leftrightarrow V_{n+1} = S_{n+1} - \frac{S_n B_{n+1,m}}{B_{n,m}}
\end{aligned}$$

となる.

(ii)

金利が定数 r なので債券価格 $B_{n,m} = (1+r)^{-(n-m)}$ となることを用いると, まずフォワード契約の取引からのキャッシュフローは (i) より

$$(1+r)^{m-n-1}(S_{n+1} - S_n(1+r))$$

となる. 次に先物価格の差は

$$\begin{aligned}\mathrm{Fut}_{n+1-m} - \mathrm{Fut}_{n,m} = \tilde{E}_{n+1}[S_m] - \tilde{E}_n[S_m] &= (1+r)^m \Big(\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{S_n}{(1+r)^n} \Big) \\ &= (1+r)^{m-n-1}(S_{n+1-S_n(1+r)})\end{aligned}$$

となり両者は一致する.

練習問題 7

まず 1 つ目の式を示す.

$$\psi_{n+1}(0) = \tilde{E}[D_{n+1}V_{n+1}(0)] = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{(1+r_0)\dots(1+r_n(0))}$$

$$\psi_n(0) = \tilde{E}[D_nV_n(0)] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(1+r_0)\dots(1+r_{n-1}(0))}$$

となるので

$$\psi_{n+1}(0) = \frac{\psi_n(0)}{2(1+r_n(0))}$$

次に 2 つ目の式を示す.

$$\psi_{n+1}(k) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum \frac{1}{(1+r_0)\dots(1+r_n)}$$

ここで和記号は $n+1$ 回のコイン投げで k 回表がでる試行を足し合わせたものである. 同様に

$$\psi_n(k-1) = \frac{1}{2^n} \sum \frac{1}{(1+r_0)\dots(1+r_{n-1)}}$$

ここで和記号は n 回のコイン投げで $k-1$ 回表がでる試行を足し合わせたものである.

$$\psi_n(k) = \frac{1}{2^n} \sum \frac{1}{(1+r_0)\dots(1+r_{n-1})}$$

ここで和記号は n 回のコイン投げで k 回表がでる試行を足し合わせたものである.

$n+1$ 回のコイン投げで k 回表がでるには, (1)n 回のコイン投げで $k-1$ 回表が出て n 回目で表が出る.(2)n 回のコイン投げで k 回表が出て n 回目で裏が出る. の 2 通りがあり, それぞれの経路に対応する割引率は $\psi_n(k-1), \psi_n(k)$ に表れている. それらの時点 n での金利はそれぞれ $1+r_n(k-1), 1+r_n(k)$ なので, 結局それぞれに

$$\frac{1}{2(1+r_n(k-1))}, \frac{1}{2(1+r_n(k))}$$

をかけて足し合わせると $\psi_{n+1}(k)$ になるので,

$$\psi_{n+1}(k) = \frac{\psi_n(k-1)}{2(1+r_n(k-1))} + \frac{\psi_n(k)}{2(1+r_n(k))}$$

が成り立つ.

最後に, 3つ目の式を示す.

$$\psi_{n+1}(n+1) = \tilde{E}[D_{n+1}V_{n+1}(n+1)] = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(1+r_0)\dots(1+r_n(n))}$$

$$\psi_n(n) = \tilde{E}[D_nV_n(n)] = \frac{1}{2^n}\frac{1}{(1+r_0)\dots(1+r_{n-1}(n-1))}$$

となるので

$$\psi_{n+1}(n+1) = \frac{\psi_n(n)}{2(1+r_n(n))}$$