定義１. (被覆)
位相空間 X の部分集合族 $\mathfrak{U}$ が $\bigcup \mathfrak{U} = X$ を満たすとき，$\mathfrak{U}$ を X の被覆という．被覆 $\mathfrak{U}$ の要素が全て X の開集合であるとき，$\mathfrak{U}$ を X の開被覆という．被覆 $\mathfrak{U}$ の部分集合 $\mathfrak{U}'$ もまた X の被覆であるとき，$\mathfrak{U}'$ を $\mathfrak{U}$ の部分被覆という．

定義２. (コンパクト)
位相空間 X の任意の開被覆が有限な部分被覆をもつとき，X はコンパクトであるという．

定義３. (有限交叉性)
位相空間 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ について，$\mathfrak{A}$ の任意の有限部分集合 $\mathfrak{A}'$ が $\bigcap \mathfrak{A}' \neq \varnothing$ を満たすとき，$\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもつという．

命題４. (コンパクト性と有限交叉性)
位相空間 X について，以下は同値である．
(1) X はコンパクトである．
(2) X の閉集合からなる，任意の有限交叉性をもつ族 $\mathfrak{A}$ は $\bigcap \mathfrak{A} \neq \varnothing$ を満たす．

(証明)
(1)⇒(2)：背理法で示す．X をコンパクト空間とし，X の閉集合からなる，有限交叉性をもつ族 $\mathfrak{A} := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で $\bigcap \mathfrak{A} = \varnothing$ となるものが存在すると仮定する．$\mathfrak{U} = \{X \setminus A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおくと，各 $X \setminus A_\lambda$ は X の開集合であり

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda = X \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = X \setminus \varnothing = X$$

を満たすから，$\mathfrak{U}$ は X の開被覆である．仮定より X はコンパクト空間だから，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ を適当に選んで $\bigcup_{i=1}^{n} X \setminus A_{\lambda_i} = X$ とできる．このとき $X = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} \right)$ となるので，$\mathfrak{A}$ の有限部分集合 $\mathfrak{A}' := \{A_{\lambda_i} \mid i = 1, \cdots, n\}$ は $\bigcap \mathfrak{A}' = \varnothing$ を満たす．しかし，これは $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつことに反する．
(2)⇒(1)：対偶を示す．X がコンパクトでないとすると，X の開被覆 $\mathfrak{U}$ で，有限部分被覆をもたないものが存在する．このとき $\mathfrak{A} = \{X \setminus U \mid U \in \mathfrak{U}\}$ とおくと，$\mathfrak{A}$ は X の閉集合からなる．また，$\mathfrak{A}$ の任意の有限部分集合 $\mathfrak{A}'$ は

$$\mathfrak{A}' = \{X \setminus U \mid U \in \mathfrak{U}'\} \quad (\mathfrak{U}' \text{ は } \mathfrak{U} \text{ の有限部分集合})$$

と表すことができ，$\mathfrak{U}$ は有限部分被覆をもたないので

$$\bigcap \mathfrak{A}' = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}'} X \setminus U = X \setminus \left(\bigcup \mathfrak{U}' \right) \neq \varnothing$$

が成り立つ．以上より，$\mathfrak{A}$ は X の閉集合からなり，有限交叉性をもつ．一方，$\mathfrak{U}$ は X の開被覆であるから，$\bigcup \mathfrak{U} = X$ となるので，$\bigcap \mathfrak{A} = X \setminus \left(\bigcup \mathfrak{U} \right) = \varnothing$ である．よって X がコンパクトでないとすると，(2)の否定が成り立つ． ∎

定義５．(部分集合の開被覆)
位相空間 X の部分集合 A に対し，X の開集合からなる族 $\mathfrak{U}$ が $A \subset \bigcup \mathfrak{U}$ を満たすとき，$\mathfrak{U}$ は A の X における開被覆であるという．このとき，$\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ もまた A の X における開被覆であるとき，$\mathfrak{U}'$ を $\mathfrak{U}$ の部分被覆という．

命題６．(コンパクト集合)
位相空間 X の部分集合 A について，以下は同値である．
(1) A は X からの相対位相についてコンパクトである(このことを，部分集合 A はコンパクトである とか，A は X のコンパクト集合である という)．
(2) A の X における任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ は有限部分被覆をもつ．
(証明)
(1)⇒(2)：$\mathfrak{U}$ を A の X における開被覆とすると $\bigcup \mathfrak{U} \supset A$ である．$\mathfrak{U}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathfrak{U}\}$ とおくと，$\mathfrak{U}_A$ は A の開集合からなり

$$\bigcup \mathfrak{U}_A = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} (U \cap A) = \left(\bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U \right) \cap A = A$$

が成り立つから，$\mathfrak{U}_A$ は A の開被覆である．仮定より A はコンパクトであるから，$\mathfrak{U}_A$ は有限部分被覆 $\mathfrak{U}'_A$ をもち，$\mathfrak{U}'_A$ は $\mathfrak{U}'_A = \left\{ U \cap A \mid U \in \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U} \ (\mathfrak{U}' \text{は有限集合}) \right\}$ と表せる．
よって，このとき

$$A = \bigcup \mathfrak{U}'_A = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}'} (U \cap A) = \left(\bigcup \mathfrak{U}' \right) \cap A$$

となるから，$\bigcup \mathfrak{U}' \supset A$ が成り立つ．つまり，$\mathfrak{U}'$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆である．
(2)⇒(1)：$\mathfrak{U}_A$ を A の開被覆とすると，$\mathfrak{U}_A$ は X の開集合からなる族 $\mathfrak{U}$ を用いて $\mathfrak{U}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathfrak{U}\}$ と表せて

$$A = \bigcup \mathfrak{U}_A = \left(\bigcup \mathfrak{U} \right) \cap A$$

となるから，$\bigcup \mathfrak{U} \supset A$ となる．よって $\mathfrak{U}$ は A の X における開被覆であるから，仮定より有限部分被覆 $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ が存在する．このとき $\mathfrak{U}'_A = \{U \cap A \mid U \in \mathfrak{U}'\}$ とおけば

$$\bigcup \mathfrak{U}'_A = \left(\bigcup \mathfrak{U}'\right) \cap A = A$$

となるので，$\mathfrak{U}'_A$ は $\mathfrak{U}_A$ の有限部分被覆である．よって A はコンパクト集合である． ∎

命題７．(コンパクト集合の有限和)
X の部分集合 $A_1, \cdots, A_n$ がコンパクトならば，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ もコンパクトである．

(証明)

$\mathfrak{U} = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を $A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ の X における開被覆とすると，$\mathfrak{U}$ は X の開集合からなり，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \supset A$ である．このとき，任意の $i = 1, \cdots, n$ に対して $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \supset A_i$ であるから，$\mathfrak{U}$ は各 A_i の X における開被覆でもある．よって仮定より，各 i に対し，有限部分被覆 $\mathfrak{U}'_i = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda_i \subset \Lambda\}$ (Λ_i は有限集合) が存在して $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_i} U_\lambda \supset A_i$ が成り立つ．よって $\Lambda' = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$ とおき，$\mathfrak{U}' = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda'\}$ とおくと，$\mathfrak{U}'$ は有限集合で $\bigcup \mathfrak{U}' \supset A$ となる．つまり，$\mathfrak{U}'$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆である．したがって A はコンパクトである． ∎

命題８．(コンパクト空間の閉集合)
コンパクト空間 X の閉集合 F はコンパクトである．
(証明)

$\mathfrak{U}$ を F の X における開被覆とすると，$\bigcup \mathfrak{U} \supset F$ であるから，$\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \cup \{X \backslash F\}$ とおくと

$$\bigcup \mathfrak{V} = \bigcup \mathfrak{U} \cup (X \backslash F) = X$$

となる．$X \backslash F$ は X の開集合だから，よって $\mathfrak{V}$ は X の開被覆である．X はコンパクトより，$\mathfrak{V}$ は有限部分被覆 $\mathfrak{V}'$ をもつ．ここで $\mathfrak{U}' = \mathfrak{V}' \backslash \{X \backslash F\}$ とおくと，$\mathfrak{U}'$ は有限で，$\mathfrak{U}$ の要素のみからなる．つまり $\mathfrak{U}'$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分集合である．このとき，$\mathfrak{V}'$ が $X \backslash F$ を要素にもたないならば，$\mathfrak{V}' = \mathfrak{U}'$ となるので

$$X = \bigcup \mathfrak{V}' = \bigcup \mathfrak{U}' \supset F$$

となる．$\mathfrak{V}'$ が $X \backslash F$ を要素にもつならば，$\mathfrak{V}' = \mathfrak{U}' \cup \{X \backslash F\}$ となるから

$$X = \bigcup \mathfrak{V}' = \bigcup \mathfrak{U}' \cup (X \backslash F) \quad \therefore F \subset \bigcup \mathfrak{U}'$$

となる．以上より $\mathfrak{U}'$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆なので，F はコンパクトである． ∎

命題９．(コンパクト空間の連続像)
$(X, \mathfrak{O}_X)$ をコンパクト空間，$(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とする．$f : X \to Y$ を連続写像とすると，$f(X)$ は Y のコンパクト集合である．

(証明)

$\mathfrak{U}=\{U_\lambda\in\mathfrak{O}_Y | \lambda\in\Lambda\}$ を $f(X)$ の Y における開被覆とすると $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\supset f(X)$ である．このとき，両辺の逆像を考えると

$$f^{-1}(f(X))\subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(U_\lambda)$$

であり，$X\subset f^{-1}(f(X))$ だから，$X\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(U_\lambda)$ となる．逆の包含は明らかで，また，f が連続より，各 λ について $f^{-1}(U_\lambda)\in\mathfrak{O}_X$ であるので，$\{f^{-1}(U_\lambda) | \lambda\in\Lambda\}$ は X の開被覆である．X はコンパクトより，有限個の $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ を選んで $X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(U_{\lambda_i})$ とできる．したがって

$$f(X)=f\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(U_{\lambda_i})\right)=\bigcup_{i=1}^{n}f(f^{-1}(U_{\lambda_i})\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}$$

が成り立つ．ゆえに $\{U_{\lambda_i}\in\mathfrak{U} | i=1,\cdots,n\}$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆である．つまり，$f(X)$ は Y のコンパクト集合である． ∎

系10.

コンパクト性は位相的性質である．

(証明)

X,Y を同相な位相空間とし，X がコンパクトであるとする．同相写像 $f:X\to Y$ は連続だから，命題 9 より $f(X)=Y$ は Y のコンパクト集合，すなわち Y はコンパクトである．逆も同様． ∎

命題11. (コンパクト集合と開基)

A を位相空間 X の部分集合，$\mathfrak{B}$ を X の開基とする．このとき次は同値である．

(1) A はコンパクトである．

(2) $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{B}$ であるような，A の X における任意の開被覆は有限部分被覆をもつ．

(証明)

(1)⇒(2)：A はコンパクトより，A の X における任意の開被覆は有限部分被覆をもつ．

(2)⇒(1)：$\mathfrak{B}=\{V_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ を A の X における開被覆とすると，$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ が成り立つので，任意の $a\in A$ に対し，ある $\lambda_a\in\Lambda$ が存在して，$a\in V_{\lambda_a}$ となる．このとき V_{λ_a} は X の開集合であるので，$B_{\lambda_a}\in\mathfrak{B}$ であって，$a\in B_{\lambda_a}\subset V_{\lambda_a}$ を満たすものが存在する．そのような B_{λ_a} の集合 $\mathfrak{U}=\{B_{\lambda_a}\in\mathfrak{B} | a\in A\}$ を考えると

$$\bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{a \in A} B_{\lambda_a} \supset A \quad (\because a \in B_{\lambda_a})$$

より，$\mathfrak{U}$ は A の X における開被覆である．また，$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ も満たす．ゆえに仮定から，有限個の $a_1, \cdots, a_n \in A$ を用いて $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\lambda_{a_i}}$ とでき，このとき $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\lambda_{a_i}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_{a_i}}$ より $\mathfrak{B}' := \{V_{\lambda_{a_i}} \mid i = 1, \cdots, n\}$ は $\mathfrak{B}$ の有限部分被覆だから，A はコンパクトである． ∎

(参考文献)

[1]　松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店

[2]　”コンパクト性”. Mathpedia. 2023-03-27. https://math.jp/wiki/位相空間論9：コンパクト性