定義 1. (limit sequence, quasi-limit)

$\{\alpha_n\colon [0,b_n)\to M\}_{n=0}^{\infty}$ を時空 M 内の未来向き因果的曲線の列とし，$\mathcal{R}$ を M の測地的凸近傍からなる開被覆とする．limit sequence for $\{\alpha_n\}$ relative to $\mathcal{R}$ とは，M の (有限でもよい) 点列 $p_0 < p_1 < \cdots$ で，以下の (L1)，(L2) を満たすもののことをいう (ただし $p<q :\Leftrightarrow q\in J^+(p)\setminus\{p\}$)：

(L1) 各 p_i に対し，$\{\alpha_n\}$ の部分列 $\{\alpha_{n^{(i)}(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ で，以下を満たすものが存在する：
各 k に対し，$\alpha_{n^{(i)}}(k)$ の定義区間内の $i+1$ 個の実数 $s_{n^{(i)}(k),0} < s_{n^{(i)}(k),1} < \cdots < s_{n^{(i)}(k),i}$ であって，

- $\lim_{k\to\infty}\alpha_{n^{(i)}(k)}(s_{n^{(i)}(k),j}) = p_j \quad (j=0,1,\ldots,i)$.
- $j=0,\ldots,i-1$ に対し，p_j, p_{j+1} および $\alpha_{n^{(i)}(k)}\left([s_{n^{(i)}(k),\,j},\ s_{n^{(i)}(k),\,j+1}]\right)$ は，1 つの $V_j\in\mathcal{R}$ に含まれる．

を満たすものが存在する．

(L2) $\{p_i\}$ が無限列ならば収束しない．$\{p_i\}$ が有限列ならば 2 項以上からなり，かつ (L1) を満たす $\{p_i\}$ より長い列は存在しない．

このような列が存在するとき，各 p_j，p_{j+1} 間を $V_j\in\mathcal{R}$ 内の唯一の測地線で結ぶことで区分的に滑らかな因果的曲線が得られる．これを quasi-limit curve という．

命題 2. (十分条件)

時空 M 内の未来向き因果的曲線の列 $\{\alpha_n\colon [0,b_n)]\to M\}_{n=0}^{\infty}$ が，次の 2 条件

(1) 点列 $\{\alpha_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ はある点 $p\in M$ に収束する．
(2) p の近傍で，有限個の $\alpha_n([0,b_n))$ のみを含むものが存在する．

を満たすなら，測地的凸近傍からなる任意の開被覆 $\mathcal{R}$ に対し，$\{p_i\}$: limit sequence for $\{\alpha_n\}$ relative to $\mathcal{R}$ で，$p_0=p$ となるものが存在する．

(証明)

参考文献

[1] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 103, Academic Press, New York, 1983.