定理 1. (テイラーの定理：ラグランジュの剰余項)
$a \in \mathbb{R}$ とし，I を a を含む区間[1]とする．このとき実数値関数 f が I で n 回微分可能ならば，任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

を満たす c が，a と x の間に存在する[2]．

(証明 1)
$x \in I$ を任意に与える．t の関数 φ, g を

$$\varphi(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \quad g(t) = (t-a)^n$$

と定めると，φ は a, x を両端とする閉区間上で連続であり，a, x を両端とする開区間上で微分可能である．g は $\mathbb{R}$ 上，何回でも微分可能である．ここで φ の m 階導関数は

$$\varphi^{(m)}(t) = \begin{cases} f^{(m)}(t) - \displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-m)!}(t-a)^{k-m} & (m \leq n-1) \\ f^{(n)}(t) & (m = n) \end{cases}$$

であるから，$m \leq n-1$ のとき，$\varphi^{(m)}(a) = 0$ となる．同様に $m \leq n-1$ のとき $g^{(m)}(a) = 0$ である．また，$g(x) \neq g(a)$ であり，g' は a, x を両端とする開区間上では 0 にならないので，φ と g にコーシーの平均値の定理を用いると，a と x の間の実数 c_1 が存在して

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\varphi'(c_1)}{g'(c_1)}$$

を満たす．$n \geq 2$ ならば，a, c_1 を両端とする区間において φ' と g' にコーシーの平均値の定理を用いると，a と c_1 の間の実数 c_2 が存在して

$$\frac{\varphi'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{\varphi''(c_2)}{g''(c_2)}$$

1　ここでは，区間の長さは正とする．
2　$x = a$ の場合，両辺とも $f(a)$ となって $(k = 0$ に注意$)$ 等式は自明だから，以下，$x \neq a$ の場合のみを考える．

を満たす．これを n 回繰り返すことで[3]

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{g(x)-g(a)}=\cdots=\frac{\varphi^{(n-1)}(c_{n-1})-\varphi^{(n-1)}(a)}{g^{(n-1)}(c_{n-1})-g^{(n-1)}(a)}=\frac{\varphi^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}$$

が得られる．すると，c_n は a と x の間に存在していて，左辺と右辺を計算すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right),\\
&\frac{\varphi^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}=\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}
\end{aligned}$$

なので，以上より

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n$$

が成り立つ． □

(証明 2)

$x\in I$ を任意に与え，t の関数 ψ を

$$\begin{aligned}
\psi(t)&=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-A(x-t)^n,\\
A&=\frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)
\end{aligned}$$

で定める．このとき

$$\psi(a)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-A(x-a)^n=0 \tag{1}$$

であり，さらに $\psi(x)=0$ である．よって $\psi(a)=\psi(x)$ であり，また ψ は a,x を両端とする閉区間上で連続で，a,x を両端とする開区間上で微分可能である．ゆえにロルの定理から

$$0=\psi'(c)=-f'(c)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k-\frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1}\right)+nA(x-c)^{n-1}$$

となる c が a と x の間に存在する．すると，和は隣同士打ち消し合うから，

$$-f'(c)-\left(\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}-f'(c)\right)+nA(x-c)^{n-1}=0$$

3　φ は I で n 回微分可能なので，n 回繰り返せる

より，A について解くと

$$A = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

である．これを (1) に代入して整理すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

が得られる． □

定理 2. (テイラーの定理：ペアノの剰余項)
実数値関数 f は $a \in \mathbb{R}$ を含む区間 I で $n-1$ 回微分可能で，a で n 回微分可能とする[4]．このとき，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x), \quad \lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

が成り立つ[5]．
(証明)
$x \in I$ を任意に与える．定理 1 の証明 1 中の φ, g を考えると，φ は I で $n-1$ 回微分可能である．そこで定理 1 の証明 1 のように，コーシーの平均値の定理を $n-1$ 回使うと，x と a の間の実数 c が存在して

$$\frac{\varphi(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\varphi^{(n-1)}(c)}{g^{(n-1)}(c)} = \frac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{n!(c-a)}$$

が成り立つ．また，$r_n(x) = \varphi(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ なので

$$\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi(x)}{g(x)} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

となる．ここで，$x \to a$ とすると $c \to a$ であり，$f^{(n-1)}$ は a で微分可能であるから，以上より

$$\lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{c \to a} \frac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{n!(c-a)} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

が成り立つ． □

4　この条件は定理 1 よりゆるいから，定理 1 は使えない．
5　すなわち，$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$ $(x \to a)$ ということ．

注意 3.
定理 2 は，条件を「f は $a \in \mathbb{R}$ を含む区間 I で n 回微分可能で，$f^{(n)}$ は a で連続」まで強めると，定理 1 から直ちに導ける．実際，この条件下では定理 1 が直接使えて，x, a の間のある実数 c が存在して

$$\frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

が成り立つので，この式で $x \to a$ とすれば $c \to a$ で，$f^{(n)}$ の連続性から右辺は $\to 0$ となる．

定理 4. (テイラーの定理：ロシュの剰余項)
実数値関数 f は $a \in \mathbb{R}$ を含む区間 I で n 回微分可能とする．このとき任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{p(n-1)!}(x-c)^{n-p}(x-a)^p$$

を満たす c が，a と x の間に存在する．
(証明)
$x \in I$ を任意に与え，t の関数 ψ を

$$\psi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - A(x-t)^p,$$
$$A = \frac{1}{(x-a)^p}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

で定める $(1 \leq p \leq n)$．このとき

$$\psi(a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - A(x-a)^p = 0 \tag{2}$$

であり，さらに $\psi(x) = 0$ である．よって，定理 1 の証明 2 と同様にロルの定理を用いると，x, a の間の実数 c が存在して

$$-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + pA(x-c)^{p-1} = 0$$

が成り立つから，これを A について解いて (2) に代入すれば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{p(n-1)!}(x-c)^{n-p}(x-a)^p$$

が得られる． □

注意 5.

(a) ロシュの剰余項で $p = n$ としたものがラグランジュの剰余項 (定理 1) である．また，$p = 1$ としたものをコーシーの剰余項という．

(b) a と x の間の実数 c は，ある $0 < \theta < 1$ を用いて $c = a + \theta(x - a)$ と表せる．この表現を用いると，ロシュの剰余項は

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(c)}{p(n-1)!}(x-c)^{n-p}(x-a)^p &= \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a-\theta(x-a))^{n-p}(x-a)^p \\ &= \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}(x-a)^{n-p}(x-a)^p \\ &= \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}(x-a)^n \end{aligned}$$

という形に書き直せる．

定義 6. (テイラー展開)
実数値関数 f は $a \in \mathbb{R}$ を含む区間 I 上で C^∞ 級であるとする．級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

のことを a を中心とするテイラー級数という．テイラー級数が I 上の各点 x で収束し，その値が $f(x)$ に一致するとき，f は a を中心としてテイラー展開可能という．

命題 7. (テイラー展開可能となるための十分条件)
実数値関数 f は $a \in \mathbb{R}$ を含む区間 I 上で C^∞ 級であるとする．定数 $C \geq 0, M \geq 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{y \in I} |f^{(n)}(y)| \leq CM^n$$

が成り立つとき，f は a を中心にテイラー展開可能である．

(証明)

任意の $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$ に対し，定理 1 から，a, x の間の実数 c が存在して

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| &= \frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}|x-a|^n \\ &\leq \frac{CM^n}{n!}|x-a|^n\end{aligned}$$

が成り立つ．この不等式の右辺を b_n とおくと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n+1}|x-a| = 0$$

なので，ダランベールの判定法 (ratio テスト) から，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ である．ゆえに $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるので，以上より，任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

が成り立つ． □

定義 8. (微分)

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし， $f : U \to \mathbb{R}$ を C^r 級関数，$1 \leq k \leq r$ とする．$x \in U$ に対し，

$$(d^k f)_x(z) \coloneqq \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) z_{i_1} \cdots z_{i_k} \qquad (z \in \mathbb{R}^n)$$

を f の x における k 次微分 (k-th differential) という[6]．

補題 9.

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし， $f : U \to \mathbb{R}$ を C^r 級関数とする．$x, x+h \in \mathbb{R}^n$ を結ぶ線分 $L \coloneqq \{g(t) \coloneqq x + th \mid t \in [0,1]\}$ が U に含まれるとき，$\varphi \coloneqq f \circ g$ は $[0,1]$ 上 C^r 級であり，φ の k 階偏導関数 $(1 \leq k \leq r)$ は

$$\varphi^{(k)}(t) = (d^k f)_{x+th}(h) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x+th) h_{i_1} \cdots h_{i_k} \tag{3}$$

である．

6　導関数 (derivative) を求めるという意味の「微分する」は differentiation である．

(証明)
U は開集合で $L \subset U$ より，$\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば，$I_\varepsilon = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ が $g(I_\varepsilon) \subset U$ となるようにできる．g は I_ε 上 C^∞ 級だから，φ は I_ε 上で C^r 級，したがって $[0,1]$ 上 C^r 級である．(3) が成り立つことを帰納法で証明する．
$k=1$ のとき，連鎖律より

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= f'(g(t))g'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x+th)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x+th)h_n\end{aligned}$$

である．これは $k=1$ の場合の (3) である．$k(<r)$ で (3) が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}\varphi^{(k+1)}(t) &= (\varphi^{(k)})'(t) \\ &= \sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x+th)h_{i_1}\cdots h_{i_k}\right) \\ &= \sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le n}\sum_{i_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x+th)h_{i_{k+1}}h_{i_1}\cdots h_{i_k} \\ &= \sum_{1\le i_1,\ldots,i_{k+1}\le n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k+1}}}(x+th)h_{i_1}\cdots h_{i_{k+1}}\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，最後の式変形は C^r 級関数の $k+1(\le r)$ 階偏導関数は偏微分の順序によらないことによる．ゆえに帰納法により，任意の $k=1,\ldots,r$ に対して (3) が成り立つ． □

定理 10. (多変数のテイラーの定理)
U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f: U \to \mathbb{R}$ を C^r 級関数とする．$x,\ x+h \in \mathbb{R}^n$ を結ぶ線分が U に含まれるとき，$\theta \in (0,1)$ が存在して

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}(d^k f)_x(h) + \frac{1}{r!}(d^r f)_{x+\theta h}(h)$$

が成り立つ．
(証明)
$\varphi(t) = f(x+th)$ とおく．補題 9 より，φ は $[0,1]$ 上 C^r 級である．よって，定理 1 より，$0<\theta<1$ が存在して

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r)}(\theta)}{r!}$$

が成り立つ．すると再び補題 9 より

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!}(d^k f)_x(h) + \frac{1}{r!}(d^r f)_{x+\theta h}(h)$$

を得る． □

参考文献

[1] 杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会

[2] 笠原晧司「微分積分学」サイエンス社