定義 1. (開同値関係)
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係，$(X/{\sim},\overline{\mathcal{O}})$ を商位相空間とする．自然な射影[1] $\pi : X \to X/{\sim}$ が開写像であるとき，同値関係 $\sim$ は開であるという．

命題 2. (開同値性の言い換え)
$\sim$ が $(X,\mathcal{O})$ 上の開同値関係であるための必要十分条件は，任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して $\bigcup_{x\in U}[x] \in \mathcal{O}$ が成り立つことである．
(証明)
π を自然な射影とすると，商位相の定義[2]より

$$\sim \text{ が開} \iff \text{任意の } U \in \mathcal{O} \text{ に対して } \pi^{-1}(\pi(U)) \in \mathcal{O}$$

である．また

$$\begin{aligned} y \in \pi^{-1}(\pi(U)) &\iff \pi(y) \in \pi(U) \\ &\iff (\exists x \in U)(\pi(y) = \pi(x)) \\ &\iff (\exists x \in U)(y \sim x) \\ &\iff (\exists x \in U)(y \in \pi(x)) \\ &\iff y \in \textstyle\bigcup_{x\in U}[x] \end{aligned}$$

より $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x\in U}[x]$ である．以上より，示したかったことが従う．　□

定理 3. (商位相空間がハウスドルフであるための条件)
$\sim$ を $(X,\mathcal{O})$ 上の開同値関係とする．このとき，$(X/{\sim},\overline{\mathcal{O}})$ がハウスドルフ空間であるための必要十分条件は，$R := \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ が直積空間 $X \times X$ の閉集合となることである．
(証明)

$$\begin{aligned} R \text{ が } X\times X \text{ の閉集合} &\iff (X\times X)\setminus R \text{ が } X \times X \text{ の開集合} \\ &\iff \text{任意の } (x,y) \in (X\times X)\setminus R \text{ に対し，ある } U,V \in \mathcal{O} \text{ が} \\ &\qquad \text{存在して，} (x,y) \in U \times V \subset (X\times X)\setminus R \text{ を満たす} \end{aligned}$$

1　$\pi : x \mapsto [x]$ のこと．ここで $[x]$ は x の同値類である．
2　$V \in \overline{\mathcal{O}} :\Leftrightarrow \pi^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ である．この定義により，π は連続である．

である．ここで $(x, y) \in (X \times X) \setminus R$ は $x \nsim y$，つまり $[x] \neq [y]$ を意味し，また $U \times V \subset (X \times X) \setminus R$ は，U の任意の元はいかなる V の元とも同値でないこと，つまり $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ を意味するので

R が $X \times X$ の閉集合 $\Longleftrightarrow$ 任意の相異なる 2 点 $[x], [y] \in X/\sim$ に対し，X における x の開近傍 U と y の開近傍 V で，$\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ となるものが存在する　$(\bigstar)$

が成り立つ．この右側の主張 $(\bigstar)$ は，$X/\sim$ がハウスドルフであることと同値である．実際，$(\bigstar)$ を仮定すると，開同値性から $\pi(U), \pi(V)$ はそれぞれ $[x], [y]$ の $X/\sim$ における開近傍になるので，$X/\sim$ はハウスドルフである．逆に $X/\sim$ がハウスドルフであると仮定すると，任意の相異なる $[x], [y] \in X/\sim$ に対し，$X/\sim$ における $[x]$ の開近傍 A と $[y]$ の開近傍 B で $A \cap B = \emptyset$ となるものが存在する．このとき $U = \pi^{-1}(A), V = \pi^{-1}(B)$ とおくと，π の連続性から U, V はそれぞれ X における x, y の開近傍である．また π は全射なので，$\pi(U) = A, \pi(V) = B$ より $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ である．よって $(\bigstar)$ が従う．以上より，定理が証明できた．　$\square$

定理 4. (商位相空間の開基)
$\sim$ を $(X, \mathcal{O})$ 上の開同値関係とする．このとき $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の開基とすると，$\overline{\mathcal{B}} = \{\pi(B_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は $(X/\sim, \overline{\mathcal{O}})$ の開基である．
(証明)
$\sim$ が開同値関係だから，$\overline{\mathcal{B}}$ は $X/\sim$ の開集合からなる．$U \in \overline{\mathcal{O}}$，$[x] \in U$ を任意に与えると，$\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}$，$x \in \pi^{-1}(U)$ である．すると $\mathcal{B}$ は X の開基だから，$x \in B_\alpha \subset \pi^{-1}(U)$ を満たす $B_\alpha \in \mathcal{B}$ が存在する．よって $[x] \in \pi(B_\alpha) \subset U$ が成り立ち，ゆえに $\overline{\mathcal{B}}$ は $X/\sim$ の開基である．　$\square$

系 5.
$\sim$ が第 2 可算空間 X 上の同値関係なら，商位相空間 $X/\sim$ は第 2 可算である．
(証明)
X の可算開基 $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を取ると，定理 4 より $\{\pi(B_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $X/\sim$ の開基であり，可算である．　$\square$

定義 6. (実射影空間)
$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff \text{ある } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ が存在して，} y = tx \text{ となる}$$

と定める．この同値関係による $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の商位相空間[3]を実射影空間といい，$\mathbb{R}P^n$ とかく．また，点 $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の同値類を $[a_1, \ldots, a_{n+1}]$ と表し，$\mathbb{R}P^n$ の斉次座標と呼ぶ.

命題 7.
$\mathbb{R}P^n$ の定義の $\sim$ は開同値関係である.
(証明)
$U \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を任意の開集合とする．命題 2 より，$\bigcup_{x \in U} [x]$ が $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合であることを示せば良い．さて，$\sim$ の定義から

$$\begin{aligned} \bigcup_{x \in U} [x] &= \bigcup_{x \in U} \{tx \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \bigcup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{tx \mid x \in U\} \end{aligned}$$

である．ここで各 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し，$\{tx \mid x \in U\}$ は $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合である．何故なら，各 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \mapsto tx \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

は同相写像で，$\{tx \mid x \in U\}$ はこの写像による U の像だからである．以上より，$\{tx \mid x \in U\}$ は $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合であるから，$\sim$ は開である． □

命題 8. ($\mathbb{R}P^n$ のハウスドルフ性)
実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ はハウスドルフ空間である.
(証明)
$X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ とおく．命題 7 と定理 3 より

$$R \coloneqq \{(x, y) \in X \times X \mid \text{ある } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ が存在して，} y = tx\}$$

が $X \times X$ の閉集合であることを示せば良い.

3 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ には，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ からの相対位相を入れている.

まず，$i,j=1,2,\ldots,n+1\ (i<j)$ に対し，$F_{ij}:\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ を

$$F_{ij}(X_1,\ldots,X_{n+1},Y_1,\ldots,Y_{n+1}) \coloneqq X_iY_j - X_jY_i$$

と定める．これは，1 列目が ${}^t(X_1,\ldots,X_{n+1})$，2 列目が ${}^t(Y_1,\ldots,Y_{n+1})$ であるような $(n+1)\times 2$ 行列の i 行目と j 行目を取り出して作った 2×2 部分行列の行列式である．すると，行列の階数は正則な部分行列の最大次数であることから，

$$\begin{aligned}
(x,y)\in R &\iff \text{行列 } [x\ \ y] \text{ の列空間の次元が } 1 \quad (x,y \text{ を列ベクトルと見ている}) \\
&\iff \mathrm{rank}[x\ \ y]=1 \\
&\iff [x\ \ y] \text{ の } 2\times 2 \text{ 小行列式は全て } 0 \text{ で，かつ } x,y\neq 0 \\
&\iff \text{すべての } i,j \text{ に対して } F_{ij}(x,y)=0 \text{ で，かつ } x,y\neq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．$x,y\neq 0 \Leftrightarrow (x,y)\in X\times X$ なので，したがって

$$R=\left(\bigcap\nolimits_{i,j} F_{ij}^{-1}(\{0\})\right)\cap(X\times X)$$

である．ここで各 $F_{ij}^{-1}(\{0\})$ は $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ の閉集合より[4]，その有限個の共通部分も $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ の閉集合であるから，R は $X\times X$ の閉集合となる．ゆえに，$\mathbb{R}P^n$ はハウスドルフである． □

命題 9. ($\mathbb{R}P^n$ の第 2 可算性)
実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は第 2 可算空間である．
(証明)
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ は第 2 可算だから，その部分位相空間 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ も第 2 可算である．よって命題 7 と系 5 から，$\mathbb{R}P^n$ は第 2 可算である． □

補題 10.
各 $i=1,\ldots,n+1$ に対し，$U_i\coloneqq\{[a_1,\ldots,a_{n+1}]\in\mathbb{R}P^n \mid a_i\neq 0\}$ は $\mathbb{R}P^n$ の開集合である[5]．

---

4 F_{ij} は連続なので，$\mathbb{R}$ の閉集合 $\{0\}$ の F_{ij} による逆像は $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ において閉である．

5 $a_i\neq 0$ という条件は代表元の取り方に依らないから，$\mathbb{R}P^n$ 上で意味を持つ．一方で，例えば $a_i=1$ という条件は代表元の取り方に依るため，$\mathbb{R}P^n$ 上では意味を持たない．

(証明)
$\pi^{-1}(U_i)=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid a_i\neq 0\}$ であるので，$\pi^{-1}(U_i)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合であり，$\pi^{-1}(U_i)=\pi^{-1}(U_i)\cap(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})$ である．よって $\pi^{-1}(U_i)$ は $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の開集合であるから，U_i は $\mathbb{R}P^n$ の開集合である． □

命題 11. ($\mathbb{R}P^n$ は多様体)
実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．
(証明)
$\mathbb{R}P^n$ がハウスドルフかつ第 2 可算であることは，命題 8 と命題 9 で既に示したので，あとは n 次元チャートからなる C^∞ 級アトラスを構成すれば良い．
U_i を補題 10 で定義した開集合とし，写像 $\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}^n$ を

$$\varphi_i([a_1,\dots,a_{n+1}])=\left(\frac{a_1}{a_i},\dots,\widehat{\frac{a_i}{a_i}},\dots,\frac{a_{n+1}}{a_i}\right)$$

と定める．ただし，記号 ^ はその成分を取り除くという意味である．なお，$[a_1,\dots,a_{n+1}]=[b_1,\dots,b_{n+1}]$ ならば，ある実数 $t(\neq 0)$ が存在して $(b_1,\dots,b_{n+1})=(ta_1,\dots,ta_{n+1})$ なので，

$$\varphi_i([b_1\dots,b_{n+1}])=\left(\frac{ta_1}{ta_i},\dots,\widehat{\frac{ta_i}{ta_i}},\dots,\frac{ta_{n+1}}{ta_i}\right)=\varphi_i([a_1,\dots,a_{n+1}])$$

より，φ_i は矛盾なく定義されている．ここで

$$\varphi_i':\pi^{-1}(U_i)\to\mathbb{R}^n,\ (a_1\dots,a_{n+1})\mapsto\left(\frac{a_1}{a_i},\dots,\widehat{\frac{a_i}{a_i}},\dots,\frac{a_{n+1}}{a_i}\right)$$

は連続であり，$\varphi_i\circ\pi=\varphi_i'$ より，φ_i は φ_i' により誘導される写像だから，連続である．さらに

$$\psi_i:\mathbb{R}^n\to U_i,\ (b_1,\dots,b_n)\mapsto[b_1,\dots,b_{i-1},1,b_i,\dots,b_n]$$

は φ_i の逆写像で，連続写像 $(b_1,\dots,b_n)\mapsto(b_1,\dots,b_{i-1},1,b_i,\dots,b_n)$ と π の合成だから，連続である．以上より，φ_i は同相写像であるから，(U_i,φ_i) は $\mathbb{R}P^n$ の n 次元チャートであり，また $\mathbb{R}P^n=\bigcup_{i=1}^{n+1}U_i$ なので，$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は $\mathbb{R}P^n$ のアトラスである．最後に，任意の座標変換が C^∞ 級であることを示す．どれでも同様なので，U_1 と U_2 について考える．$(U_1,\varphi_1)=(U_1,x_1,\dots,x_n)$ とおき，$[a_1,\dots,a_{n+1}]\in U_1\cap U_2$ と

すると $a_1, a_2 \neq 0$ であり，

$$\varphi_1([a_1, \ldots, a_{n+1}]) = \left(\frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_1}\right)$$

であるから $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 上で第 1 座標 x_1 は 0 にならない．よって

$$\begin{aligned}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_2([1, x_1, \ldots, x_n]) \\ &= \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)\end{aligned}$$

より，$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 上で C^∞ 級である．同様に $(U_2, \varphi_2) = (U_2, y_1, \ldots, y_n)$ とすると

$$\varphi_2([a_1, \ldots, a_{n+1}]) = \left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_2}\right)$$

であるから $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ 上で第 1 座標 y_1 は 0 にならず，

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(y_1, \ldots, y_n) &= \varphi_1([y_1, 1, y_2, \ldots, y_n]) \\ &= \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right)\end{aligned}$$

より，$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ も $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 上で C^∞ 級である．以上より，$(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ は C^∞ 級で両立しており，他の座標変換に関しても同様の結果が得られるから，$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は C^∞ 級アトラス[6]である． □

補題 12. (実射影空間の別の表現)
n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ 上の同値関係を

$$x \sim y \iff x = \pm y \qquad \text{(対蹠点を同一視)}$$

によって定めると，商位相空間 $S^n/\sim$ は $\mathbb{R}P^n$ と同相である．
(証明)
$f : \mathbb{R}^{n+1}/\{0\} \to S^n$ を，$f(x) \coloneqq x/\|x\|$ で定め，$\bar{f} : \mathbb{R}P^n \to S^n/\sim$ を $\bar{f}([x]_A) \coloneqq [f(x)]_B$ で定める[7]．$[x]_A = [x']_A$ なら，ある $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して $x = tx'$ なので

$$f(x') = \frac{tx}{\|tx\|} = \pm\frac{x}{\|x\|} = \pm f(x)$$

6　標準アトラスと呼ぶ．
7　同値類の記号は，$\mathbb{R}P^n$ の元を $[\cdot]_A$ で表し，$S^n/\sim$ の元を $[\cdot]_B$ で表すことにする．

より，$[f(x')]_B = [f(x)]_B$ となる．よって $\bar{f}$ は矛盾なく定義されている．次に包含写像 $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を考え，$\bar{\iota} : S^n/\!\sim\, \to \mathbb{R}P^n$ を $\bar{\iota}([y]_B) \coloneqq [\iota(y)]_A = [y]_A$ で定める．$[y]_B = [y']_B$ なら $y = \pm y'$ より，$[y]_A = [y']_A$ であるので，$\bar{\iota}$ は矛盾なく定義されている．すると，

$$
\begin{aligned}
(\bar{\iota} \circ \bar{f})([x]_A) &= \bar{\iota}([f(x)]_B) = \left[\frac{1}{\|x\|}x\right]_A = [x]_A & (\forall [x]_A \in \mathbb{R}P^n) \\
(\bar{f} \circ \bar{\iota})([y]_B) &= \bar{f}([y]_A) = \left[\frac{1}{\|y\|}y\right]_B = [1 \cdot y]_B = [y]_B & (\forall [y]_B \in S^n/\!\sim)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$\bar{f}, \bar{\iota}$ は互いに逆写像である．さらに，$\pi_A : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ と $\pi_B : S^n \to S^n/\!\sim$ を自然な射影とすれば

$$
\bar{f} \circ \pi_A = \pi_B \circ f, \quad \bar{\iota} \circ \pi_B = \pi_A \circ \iota
$$

なので，$\bar{f}, \bar{\iota}$ はそれぞれ $\pi_B \circ f,\ \pi_A \circ \iota$ によって誘導される写像であり，$\pi_B \circ f,\ \pi_A \circ \iota$ はどちらも連続写像の合成なので，連続である．したがって $\bar{f}, \bar{\iota}$ は連続だから，$\bar{f}$ は同相写像である．つまり，$S^n/\!\sim$ と $\mathbb{R}P^n$ は同相である． □

命題 13. ($\mathbb{R}P^n$ のコンパクト性)
実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ はコンパクトである．
(証明)
S^n はコンパクトであり，$\pi_B : S^n \to S^n/\!\sim$ を自然な射影とすると $\pi_B(S^n) = S^n/\!\sim$ であるから，$S^n/\!\sim$ はコンパクト集合の連続像より，コンパクトである．補題 12 より $\mathbb{R}P^n$ は $S^n/\!\sim$ と同相なので，$\mathbb{R}P^n$ もコンパクトである． □

参考文献

[1] Loring W. Tu 著，枡田幹也・阿部拓・堀口達也 訳「トゥー多様体」裳華房