定義１．(級数)

$\mathbb{R}^n$ の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_n$ の列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のことを a_n を第 n 項とする級数という．また，級数の第 n 項 s_n のことを $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (または $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$) の第 n 部分和という．

級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき，級数は収束するといい

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

と表す．このとき s を級数の和という．極限が存在しないとき，級数は発散するという．

注意２．

級数 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と級数の和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は別のものであるが，混乱の恐れがない限りは級数自身のことも $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ で表すことが多い．それゆえ，$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を部分和の列と呼んだりする．

命題３．(級数の収束の言い換え)

次は同値である．

(1) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n > m \geq N$ となる $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+2} + a_{m+1}| < \varepsilon$ が成り立つ．

(証明)

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分和の列とする．

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ が収束する} \\
&\iff (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ がコーシー列} \\
&\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(n > m \geq N \Rightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon) \\
&\iff (2) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

定義４．(絶対収束)

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという．

命題５．(絶対収束ならば収束)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．

(証明)

三角不等式から $n > m$ $(m, n \in \mathbb{N})$ に対して

$$|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+2} + a_{m+1}| \leq |a_n| + \cdots + |a_{m+1}| \quad \cdots (\clubsuit)$$

である．仮定より $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ は収束するので，命題３から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n > m \geq N$ ならば $|a_n| + \cdots + |a_{m+1}| < \varepsilon$ が成り立つ．$(\clubsuit)$ と合わせると，命題３より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する． ∎

命題６． (収束する級数の和，差，定数倍)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が s, t に収束するとき，$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s \pm t$，$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = cs$ である．

(証明)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分和の列をそれぞれ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S)_{n\in\mathbb{N}}$ とすると

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \pm \sum_{i=0}^{n} b_i = s_n \pm t_n$$

である．よって $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (s_n \pm t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} t_n = s \pm t$ である．同様に $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分和の列を $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とすると

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} ca_i = c\sum_{i=0}^{n} a_i$$

となるので $\lim_{n\to\infty} T_n = cs$ である． ∎

定義７． (正項級数)

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の項が $a_n \geq 0$ であるとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は正項級数であるという．

命題８． (正項級数の収束)

次は同値である．

(1) 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する．

(2) 部分和の数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界である．

(証明)

(1)⇒(2)：収束する数列は有界である[1]ため．

(2)⇒(1)：$a_n \geq 0$ より，$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加実数列で，仮定より上に有界である．よって実数の連続性から，正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する． ∎

---

[1] 実際，$s_n \to s$ $(n \to \infty)$ とすると，極限の定義より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $|s_n - s| < 1$ が成り立つ．このとき $M = \max\{|s_0|, \cdots, |s_{N-1}|, |s-1|, |s+1|\}$ とおけば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|s_n| \leq M$ が成り立つ．つまり， 収束する数列は有界である．

定理９．(比較判定法)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は正項級数とし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ であるとする．このとき $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束し，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する．
(証明)
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分和の数列を $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とすると，$a_n \leq b_n$ より，$0 \leq s_n \leq t_n$ である．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束する，すなわち $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束すると仮定すると，$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は特に上に有界．ゆえに $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界となり，命題８より，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．
また，今示したことの対偶から，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する．■

命題10．(有限個の項の取り替え)
$\mathbb{R}^n$ の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の有限個の項を取り替えた点列を $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする．$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ が収束(発散)するならば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束(発散)する．
(証明)
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分和の列を $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有限個の項のみが異なるから，$A := \{n \mid a_n \neq a'_n\}$ は有限集合である．よって $n \geq \max A$ に対し

$$s_n = s'_n + \sum_{n\in A}(a_n - a'_n) = s'_n + R \quad (R \text{ は有限値})$$

と表せる．したがって，$(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束(発散)するならば，$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束(発散)する[2]．■

系11．(比較判定法)
定理９の「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して」を「有限個を除く全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して」に変えても同じである．
(証明)
$a_n > b_n$ となるような有限個の a_n を，$0 \leq a_n \leq b_n$ となるように取り替えれば良い．すると取り替え後の数列は定理９の仮定を満たすから，その部分和の数列(すなわち級数)は収束し，元の $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分和の数列も命題10より収束する．■

---

[2] しっかり書くと，$(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を s' とおくと，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N' \in \mathbb{N}$ が存在して，$|s'_n - s'| < \varepsilon$ が成り立つ．このとき $n \geq \max\{N, N'\}$ とすれば $|s_n - (R + s')| < \varepsilon$ となるので，$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も収束する．

命題12.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を正項級数とする.

(1) ある実数 $k \in [0,1)$ が存在し，ある $N \in \mathbb{N}$ 以上の全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{a_n} \leq k$ が成り立つとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) ある実数 $k > 1$ が存在し，ある $N \in \mathbb{N}$ 以上の全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{a_n} > k$ が成り立つとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

(証明)

(1) $k \in [0,1)$ より $\sum_{n=0}^{\infty} k^n$ は収束する．仮定より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ を満たす全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{a_n} \leq k$ が成り立つから，このとき有限個を除く全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq k^n$ である．よって系11より，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $k > 1$ より，$\sum_{n=0}^{\infty} k^n$ は発散する．仮定より，有限個を除く全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > k^n$ であるので，系11より，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する. ∎

命題13.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を正項級数とする.

(1) ある実数 $k \in [0,1)$ が存在し，ある $N \in \mathbb{N}$ 以上の全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$ が成り立つとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) ある実数 $k > 1$ が存在し，ある $N \in \mathbb{N}$ 以上の全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > k$ が成り立つとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

(証明)

(1) 仮定より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ を満たす全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_{n+1} \leq k a_n$ が成り立つので，$a_n \leq k a_{n-1} \leq \cdots \leq k^{n-N} a_N$ となる．よって有限個を除く全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq (k^{-N} a_N) k^n$ である．$k \in [0,1)$ より $\sum_{n=0}^{\infty} (k^{-N} a_N) k^n$ は収束するので，系11より，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) 上と同様に考えると，有限個を除く全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > (k^{-N}a_N)k^n$ である．

$k > 1$ より $\sum_{n=0}^{\infty}(k^{-N}a_N)k^n$ は発散するので，系11より，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は発散する． ∎

定理14. (root テスト，コーシーの判定法)

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ を正項級数とする． $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が存在するとき，$0 \le r < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は収束し，$r > 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は発散する．

(証明)

$0 \le r < 1$ とする．$r < k < 1$ を満たす $k \in \mathbb{R}$ をとると，$k - r > 0$ であるので，仮定より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \ge N \text{ ならば } \left|\sqrt[n]{a_n} - r\right| < k - r$$

$$\therefore n \ge N \text{ ならば } a_n < k^n$$

が成り立つ．$0 \le k < 1$ だから，命題12より $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は収束する．

次に $r > 1$ とする．$1 < k < r$ を満たす $k \in \mathbb{R}$ をとると，$r - k > 0$ であるので，仮定より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \ge N \text{ ならば } \left|\sqrt[n]{a_n} - r\right| < r - k$$

$$\therefore n \ge N \text{ ならば } a_n > k^n$$

が成り立つ．$k > 1$ だから，命題12より $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は発散する． ∎

定理15. (ratio テスト，ダランベールの判定法)

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ を正項級数とする． $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が 存在するとき，$0 \le l < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は収束し，$l > 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は発散する．

(証明)

定理14の証明と全く同様(命題13を使う)． ∎

(参考文献)

[1] 杉浦光夫「解析入門 I 」東京大学出版会

[2] “級数”. Wikipedia. 2023-03-05. https://ja.wikipedia.org/wiki/級数