定義１．(点列，点列の極限)
X を位相空間とする．
(1) $f(n) = x_n$ で定義される写像 $f : \mathbb{N} \to X$ のことを X の点列といい，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と表す．
(2) $x \in X$ の任意の近傍 V に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ となる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in V$ が成り立つとき，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は x に収束するといい，$x_n \to x$ と書く．また，このとき x を $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限(点)という．

命題２．(収束の同値な定義)
X を位相空間とし，$x \in X$ とする．また，$\mathcal{U}(x)$ を x の X における基本近傍系とする．X の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し，次は同値である．
(1) $x_n \to x$ である．
(2) 任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ となる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in U$ が成り立つ．

(証明)
(1)⇒(2)：任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ は x の近傍であるから，(1)より，(2)が従う．
(2)⇒(1)：V を x の任意の近傍とすると，基本近傍系の定義から，ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して，$U \subset V$ となる．すると(2)より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ となる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in U \subset V$ が成り立つ．よって(1)が成り立つ．　∎

命題３．(距離空間の点列の収束)
距離空間 (X, d) の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し，次は同値である．
(1) $x_n \to x$ である．
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ となる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $d(x_n, x) < \varepsilon$ が成り立つ．
(3) $\mathbb{R}$ の点列 $(d(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に収束する．

(証明)
(1)⇔(2)：X は距離空間なので，$\mathcal{U}(x) := \{B_d(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ は $x \in X$ の基本近傍系である．ただし $B_d(x, \varepsilon) := \{y \mid y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$ である．よって命題２から

$$\begin{aligned} x_n \to x &\iff (\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow x_n \in U) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow x_n \in B_d(x, \varepsilon)) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon) \end{aligned}$$

となる．

(3)⇔(2)：$\{B_{d_{\mathbb{R}}}(0,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ は 0 の $\mathbb{R}$ における基本近傍系である．$y_n = d(x_n, x)$ とおくと，命題２から

$$\begin{aligned} d(x_n, x) = y_n \to 0 &\iff (\forall U \in \{B_{d_{\mathbb{R}}}(0,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\})(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow y_n \in U) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow y_n \in B_{d_{\mathbb{R}}}(0,\varepsilon)) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon) \end{aligned}$$

となる． ∎

命題４． (距離空間の点列の極限の一意性)
距離空間 (X, d) における任意の点列の極限は高々１つである．

(証明)
(X, d) の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が異なる２点 $x, y \in X$ に収束すると仮定すると，$d(x, y) > 0$ となる．よって，点列の収束の定義から，ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N_1 \Rightarrow d(x_n, x) < 2^{-1}d(x, y)$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow d(x_n, y) < 2^{-1}d(x, y)$$

が成り立つ．ゆえに $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると

$$d(x_N, x) < 2^{-1}d(x, y), \quad d(x_N, y) < 2^{-1}d(x, y)$$

$$\therefore d(x, y) \leq d(x_N, x) + d(x_N, y) < d(x, y)$$

となって矛盾する．したがって $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限は高々１つである． ∎

命題５． (距離空間の点列と閉包)
(X, d) を距離空間，$x \in X$，A を X の部分集合とする．このとき次は同値である．
(1) $x \in \bar{A}$ である．つまり x は A の触点である．
(2) x に収束する A の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する[1]．

(証明)
(1)⇒(2)：任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$B_d(x, 1/n)$ は x の近傍である．また $x \in \bar{A}$ であることは，x の任意の近傍と A の共通部分が空でないことと同値である．したがって，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，x_n を $x_n \in B_d(x, 1/n) \cap A$ となるように選べる[2]．ここで，$U(x) := \{B_d(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は x の基本近傍系であり，任意の $U \in U(x)$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $U = B_d(x, 1/N)$ と表せる．このとき $n \geq N$ ならば $U = B_d(x, 1/N) \supset B_d(x, 1/n)$ となるので

$$x_n \in B_d(x, 1/n) \cap A \subset B_d(x, 1/n) \subset B_d(x, 1/N) = U$$

が成り立つ．よって命題２より，点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する A の点列である． ∎

---

[1] X の部分集合 A の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とは，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in A$ となる X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のこと．

[2] 選択公理より．

(2)⇒(1)：$\mathcal{U}(x)$ を x の基本近傍系とすると，A の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，命題２より

$$(\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow x_n \in U \cap A)$$

である．つまり，任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し，$x_N \in U \cap A$ となるような x_N が存在するので，このとき $U \cap A \neq \emptyset$ である．また，基本近傍系の定義より x の近傍 V を任意に与えると，ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \subset V$ となる．以上より，x の任意の近傍 V に対して $V \cap A \supset U \cap A \neq \emptyset$ となるので，$V \cap A \neq \emptyset$，つまり $x \in \bar{A}$ である．　∎

(参考文献)

[1]　松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店
[2]　“入門テキスト「位相空間論」”．Mathpedia. 2023-02-27. https://math.jp/wiki/入門テキスト「位相空間論」
[3]　杉浦光夫「解析入門Ｉ」東京大学出版会