定理１． (区間縮小法)
有界閉区間の列 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が

任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $I_n \supset I_{n+1}$　(このとき $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少であるという)

であるとき，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$ である．また，$I_n=[a_n,b_n]$ と表したとき，$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ ならば，共通部分は一点集合，つまり $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\{a\}$ であり，$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ である．

(証明)
$I_n=[a_n,b_n]$ とすると，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n\le b_n$ である．$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少というのは

$$a_0\le a_1\le\cdots\le a_n\le b_n\le\cdots\le b_1\le b_0$$

ということなので，(a_n) は上に有界な単調増加数列，(b_n) は下に有界な単調減少数列である．よって実数の連続性[1]から，$a_n\to\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$, $b_n\to\inf\{b_n|n\in\mathbb{N}\}$　$(n\to\infty)$ である．
$\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}=a$, $\inf\{b_n|n\in\mathbb{N}\}=b$ とおく．このとき，もし $a>b$ であるとすると，$a-b>0$ である．ゆえに，数列の収束の定義より，十分大きい $N\in\mathbb{N}$ に対し

$$|a_N-a|<\frac{a-b}{2},\quad |b_N-b|<\frac{a-b}{2}$$

$$\therefore b_N<b+\frac{a-b}{2}=a-\frac{a-b}{2}<a_N$$

となる．これは任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n\le b_n$ であることに反するから，$a\le b$ となる．
このこと上限と下限の定義から，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n\le a\le b\le b_n$ となるので，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $[a,b]\subset I_n$ が成り立つ．すなわち $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n\neq\varnothing$ である．

また $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ であるとする．$c\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ を任意に与えると，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\le c\le b_n$ となるから，特に c は $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ の上界である．よって $c-a\ge 0$ であるから，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$0\le c-a\le b_n-a_n\quad(\because c\le b_n,\ -a\le -a_n)$$

が成り立つ．$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ と合わせると，任意の $\varepsilon>0$ に対して $0\le c-a<\varepsilon$ が成り立つから，$c-a=0$，すなわち $c=a$ となって[2] $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\{a\}$ が言える．

さらに $b\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ であるから，$\lim_{n\to\infty}b_n=b=a=\lim_{n\to\infty}a_n$ となる．　■

---

[1] ここでは，上(下)に有界な単調増加(減少)実数列は上限(下限)に収束するという性質．

[2] もし $c-a>0$ なら，実数の稠密性から $c-a$ と 0 の間に(正の)実数が存在し，矛盾する．

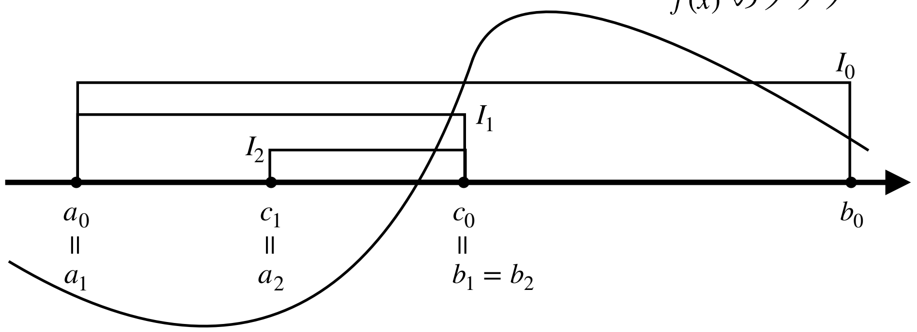
定理２.
$f: I \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上連続な関数とする．このとき，$f(a) < 0, f(b) > 0$ (または $f(a) > 0, f(b) < 0$) ならば，$f(c) = 0$ となる $c \in I$ が存在する．

(証明)

どちらも同じことなので，$f(a) < 0 < f(b)$ の場合を示す．$a_0 = a, b_0 = b, I_0 = [a_0, b_0]$ とおいて，$I_n = [a_n, b_n]$ を次のように帰納的に定義する．

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, c_n] & \left(f(c_n) > 0\right) \\ [c_n, b_n] & \left(f(c_n) \leq 0\right) \end{cases}$$

ただし，$c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ である．



◀ $f(c_0) > 0, f(c_1) \leq 0$ の場合の図．
$I_1 = [a_1, b_1] = [a_0, c_0]$
$I_2 = [a_2, b_2] = [c_1, b_1]$
となっている．

このとき，閉区間の列 $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は単調減少であり，$b_n - a_n = 2^{-n}(b - a) \to 0 \quad (n \to \infty)$ が成り立つから，定理 1 より

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}, \quad c = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$$

となる．そこで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n) \; \cdots \; (\bigstar)$ となることを帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$a_0 = a, b_0 = b$ だから，$f(a_0) < 0 < f(b_0)$ で $(\bigstar)$ が成り立つ．

$n = k(\geq 0)$ のとき，$(\bigstar)$ が成り立つと仮定すると

・$f(c_k) > 0$ のとき $f(a_{k+1}) = f(a_k) \leq 0, f(b_{k+1}) = f(c_k) > 0$ より $f(a_{k+1}) \leq 0 < f(b_{k+1})$

・$f(c_k) \leq 0$ のとき $f(a_{k+1}) = f(c_k) \leq 0, f(b_{k+1}) = f(b_k) \geq 0$ より $f(a_{k+1}) \leq 0 \leq f(b_{k+1})$

となるから，$n = k + 1$ でも $(\bigstar)$ が成り立つ．

よって，確かに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\bigstar)$ が成り立つから，$(\bigstar)$ において $n \to \infty$ とすれば，f の連続性より $f(c) = 0$ となり $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset I_0 = I$ である． ∎

定理３. (中間値の定理)
$f: I \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上連続な関数とする．このとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 γ に対し，$f(c) = \gamma$ となる $c \in I$ が存在する．

(証明)

γ を $f(a)$ と $f(b)$ の間の実数とする．どちらも同じことなので，$f(a) \leq f(b)$ であるとする

と，$f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ である．γ と $f(a)$ または $f(b)$ が等しければ，明らかに定理は成り立つので，$f(a) < \gamma < f(b)$ であるとする．$g(x) = f(x) - \gamma$ とおくと，g は I 上連続な関数かつ $g(a) < 0, g(b) > 0$ である．よって g は定理２の仮定を満たすから，$g(c) = f(c) - \gamma = 0$ となる $c \in I$ が存在する．　∎

(参考文献)

[1]　杉浦光夫「解析入門Ｉ」東京大学出版会