定義 1. (誘導位相)
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．Y の部分集合族 $\mathcal{O}_f$ を

$$\mathcal{O}_f \coloneqq \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}$$

と定めると，$(Y, \mathcal{O}_f)$ は位相空間になる (以下で証明)．$\mathcal{O}_f$ を f から誘導される位相と呼ぶ.

命題 2. (誘導位相が位相であること)
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする.
(1) Y を集合とするとき，$\mathcal{O}_f$ は Y の位相である.
(2) $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_f)$ は連続である.
(証明)
(1) まず, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X$，$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$ であるから, $Y, \emptyset \in \mathcal{O}_f$ である．次に $U, V \in \mathcal{O}_f$ とすると, $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ であり, $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ であるから，$f^{-1}(U \cap V) \in \mathcal{O}_X$，つまり $U \cap V \in \mathcal{O}_f$ である．最後に，$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \mathcal{O}_f$ とすると，$f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{O}_X \ (\forall \alpha \in A)$ より，$\bigcup_{\alpha \in A} q^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{O}_X$ であり，$\bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right)$ であるから，$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \in \mathcal{O}_X$，つまり $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}_f$ である．以上より，$\mathcal{O}_f$ は位相である.
(2) 任意に $U \in \mathcal{O}_f$ を与えると，定義より $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ である．つまり f は連続である. □

命題 3. (誘導位相の同値な定義)
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像，$\mathcal{O}_f$ を f から誘導される位相とする．Y の位相 $\bar{\mathcal{O}}$ を，f を連続にする最強の位相 (最も細かい位相) と定義すると[1]，$\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_f$ である.
(証明)
$U \in \bar{\mathcal{O}}$ とすると，$\bar{\mathcal{O}}$ は f を連続にするから，$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ である．これは $U \in \mathcal{O}_f$

1　$\bar{\mathcal{O}}$ は一般的な記号ではない.

を意味するので，$\bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_f$ である．逆の包含について，命題 2 より $\mathcal{O}_f$ は f を連続にする位相であり，$\bar{\mathcal{O}}$ はそのような位相の中で最も細かいのだから，$\mathcal{O}_f \subset \bar{\mathcal{O}}$ が成り立つ．以上より $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_f$ である．□

定理 4. (誘導位相の特徴)
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，Y を集合，$g\colon X \to Y$ を写像とし，Y に g から誘導される位相 $\mathcal{O}_g$ を入れる．このとき，任意の位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f\colon Y \to Z$ に対して，$f\colon (Y, \mathcal{O}_g) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であることと $f \circ g\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であることは同値である．
(証明)
まず $f\colon (Y, \mathcal{O}_g) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であると仮定する．命題 2 より $g\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_g)$ は連続だから，連続写像の合成である $f \circ g\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ は連続である．逆に，$f \circ g$ が連続であると仮定する．$U \in \mathcal{O}_Z$ を任意に与えると，仮定より $(f \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_X$ である．これは $\mathcal{O}_g$ の定義から，$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_g$ を意味するので，f は連続である．□

定理 5. (誘導位相の一意性)
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，Y を集合，$g\colon X \to Y$ を写像とする．$\tilde{\mathcal{O}}$ を Y の位相で，「任意の位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f\colon Y \to Z$ に対して，$f\colon (Y, \tilde{\mathcal{O}}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であることと，$f \circ g\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であることは同値である」という性質を満たすとする[2]．このとき，$\tilde{\mathcal{O}}$ は g から誘導される位相 $\mathcal{O}_g$ に一致する．つまり，定理 4 を満たすような位相は誘導位相だけである．
(証明)
まず $U \in \mathcal{O}_g$ とする．誘導位相の定義より $g^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ である．位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を $Z = \{0, 1\}$, $\mathcal{O}_Z = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ と定義する．写像 $f\colon Y \to Z$ を

$$f(y) := \begin{cases} 0 & (y \in U) \\ 1 & (y \notin U) \end{cases}$$

2　$\tilde{\mathcal{O}}$ も一般的な記号ではない．

とすると，$f \circ g\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ は連続である．実際，

$$(f \circ g)^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X,\ (f \circ g)^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X,\ (f \circ g)^{-1}(\{0,1\}) = X \in \mathcal{O}_X$$

が成り立つ．すると，仮定の性質から $f\colon (Y, \tilde{\mathcal{O}}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ は連続になるので，$U = f^{-1}(\{0\}) \in \tilde{\mathcal{O}}$ が成り立つ．以上より $\mathcal{O}_g \subset \tilde{\mathcal{O}}$ である．次に逆の包含を示す．恒等写像 $\mathrm{id}_Y\colon (Y, \tilde{\mathcal{O}}) \to (Y, \tilde{\mathcal{O}})$ は連続だから，仮定の性質において，$(Z, \mathcal{O}_Z)$ を $(Y, \tilde{\mathcal{O}})$，f を id_Y として取ることで，$g = \mathrm{id}_Y \circ g\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \tilde{\mathcal{O}})$ は連続となる．すると命題 3 より，誘導位相 $\mathcal{O}_g$ は $g\colon X \to Y$ を連続にする最も細かい位相なので，$\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_g$ である．両方の包含が言えたので，$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_g$ である． □

定義 6. (商位相，商写像)
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，Y を集合とする．$q\colon X \to Y$ が全射のとき，q から誘導される位相 $\mathcal{O}_q$ のことを q から誘導される商位相，$(Y, \mathcal{O}_q)$ のことを商 (位相) 空間といい，$q\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_q)$ を商写像という．

定理 7. (商写像の特徴)
$q\colon X \to Y$ を商写像とする．任意の位相空間 Z を与え，連続写像 $f\colon X \to Z$ で，

$$q(x) = q(x') \text{ を満たす任意の } x, x' \in X \text{ に対して, } f(x) = f(x')$$

を満たすものを考える (このことを，f は q のファイバーの下で一定 という)．このとき，連続写像 $\bar{f}\colon Y \to Z$ で，$f = \bar{f} \circ q$ を満たすものがただ一つ存在する．
(証明)
$y \in Y$ に対し，q の全射性から $y = q(x)$ となる $x \in X$ が少なくとも 1 つ存在するから，そのような x を 1 つとって $\bar{f}(y) \coloneqq f(x)$ とする．これは，$y = q(x)$ を満たす x の取り方に依らない．何故なら，f は q のファイバーの下で一定だから，$q(x) = q(x')$ なら $f(x) = f(x')$ となるためである．この $\bar{f}$ は定義より $f = \bar{f} \circ q$ であり，定理 4 より連続だから，存在が言えた．一意性は，一般に全射 g に対して $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ ならば $f_1 = f_2$ である[3]ので，成り立つ． □

3 ほぼ自明だが，念の為証明しておく．$f_1, f_2\colon Y \to Z$ が全射 $g\colon X \to Y$ に対して $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ なら，全射性より任意の $y \in Y$ に対して $y = g(x)$ となる $x \in X$ が存在するので，$f_1(y) = f_1(g(x)) = f_2(g(x)) = f_2(y)$ となる．全射でない場合は成り立たない．

定理 8. (商空間の一意性)
$q_i\colon X \to Y_i\ \ (i=1,2)$ を商写像で,

$$q_1(x) = q_1(x') \iff q_2(x) = q_2(x') \qquad (\forall x, x' \in X)$$

を満たすものとする．このとき，同相写像 $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ で $\varphi \circ q_1 = q_2$ を満たすものがただ一つ存在する．
(証明)
まず存在したとしたら一意であることは，定理 7 と同様，q_1 の全射性から従う．
商写像 $q_1\colon X \to Y_1$ に対し，$q_2\colon X \to Y_2$ は連続写像であり，かつ定理の仮定より $q_1(x) = q_1(x') \Rightarrow q_2(x) = q_2(x')$ なので，q_2 は q_1 のファイバーの下で一定である．よって定理 7 より，連続写像 $\bar{q_2}\colon Y_1 \to Y_2$ であって，$q_2 = \bar{q_2} \circ q_1$ を満たすものが存在する．q_1 と q_2 の役割を入れ替えることで，連続写像 $\bar{q_1}\colon Y_2 \to Y_1$ であって，$q_1 = \bar{q_1} \circ q_2$ を満たすものも存在する．すると，任意の $y_1 \in Y_1,\ y_2 \in Y_2$ に対し，それぞれ全射性より $y_1 = q_1(x),\ y_2 = q_2(x')$ を満たす $x, x' \in X$ が取れるので,

$$\begin{aligned}(\bar{q_1} \circ \bar{q_2})(y_1) &= (\bar{q_1} \circ \bar{q_2})(q_1(x)) = \bar{q_1} \circ (\bar{q_2}(q_1(x)) = (\bar{q_1} \circ q_2)(x) = q_1(x) = y_1\,, \\ (\bar{q_2} \circ \bar{q_1})(y_2) &= (\bar{q_2} \circ \bar{q_1})(q_2(x')) = \bar{q_2} \circ (\bar{q_1}(q_2(x')) = (\bar{q_2} \circ q_1)(x) = q_2(x) = y_2\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，連続写像 $\bar{q_2},\ \bar{q_1}$ は互いに逆写像である．ゆえに $\varphi = \bar{q_2}\colon Y_1 \to Y_2$ は同相写像である． $\square$

例 9. (等化空間)
X を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係，$[\ ]$ を同値類の記号，$X/{\sim}$ を商集合とする．射影 $\pi\colon X \to X/{\sim},\ x \mapsto [x]$ は全射だから，$X/{\sim}$ に π から誘導される商位相が入り，π は商写像となる．このとき，商空間 $X/{\sim}$ のことを等化空間という．
以下で述べる通り，定理 8 によって任意の商空間は適切な同値関係による等化空間と同相になるので,「商空間」と「等化空間」という用語は普通区別せず，単に別名として用いる．

系 10.

$q\colon X \to Y$ を商写像，$(Y, \mathcal{O}_q)$ を商空間とする．X 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim x' :\Leftrightarrow q(x) = q(x') \quad (x, x' \in X)$$

と定義すると[4]，$\sim$ による等化空間 $X/\sim$ と商空間 Y は同相である．

(証明)

$\pi\colon X \to X/\sim$ を射影 $x \mapsto [x]$ とすると，$\sim$ の定義から

$$\pi(x) = \pi(x') \iff q(x) = q(x')$$

なので，商写像 π, q は定理 8 の条件を満たすので，$X/\sim$ と Y は同相である． □

補題 11. (飽和集合)

$q\colon X \to Y$ を写像とする．任意の $U \subset X$ に対し，以下は全て同値である．

(a) ある $V \subset Y$ が存在して，$U = q^{-1}(V)$ となる (このことを，U は q について飽和しているという).

(b) $U = q^{-1}(q(U))$.

(c) ある $V \subset Y$ が存在して，$U = \bigcup_{y \in V} q^{-1}(y)$ となる[5].

(d) $x \in U$ とすると，$q(x) = q(x')$ を満たす任意の $x' \in X$ に対し，$x' \in U$ である．

(証明)

(a)⇒(b)：$V \subset Y$, $U = q^{-1}(V)$ とする．$U \subset q^{-1}(q(U))$ は一般に言える．逆の包含は，$q(q^{-1}(V)) \subset V$ が一般に言えるので，$q(U) = q(q^{-1}(V)) \subset V$ より，両辺 q^{-1} をとって $q^{-1}(q(U)) \subset q^{-1}(V) = U$ が言える．

(b)⇒(c)：$V = q(U)$ とおけば，$U = q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{y \in q(U)} q^{-1}(y) = \bigcup_{y \in V} q^{-1}(y)$ である．

(c)⇒(d)：$x \in U$, $q(x) = q(x')$ とする．ある $V \subset Y$ を用いて $U = \bigcup_{y \in V} q^{-1}(y)$ と書けるので，ある $y \in V$ が存在して，$x \in q^{-1}(y)$ である．よって $q(x') = q(x) = y \in V$ であるから，$x' \in \bigcup_{y \in V} q^{-1}(y) = U$ となる．

4　自明だが，念の為示しておく．反射性：$q(x) = q(x)$ なので $x \sim x$．対称性：$x_1 \sim x_2$ なら $q(x_1) = q(x_2)$ だから $q(x_2) = q(x_1)$ より $x_2 \sim x_1$．推移性：$x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3$ なら $q(x_1) = q(x_2)$, $q(x_2) = q(x_3)$ だから $q(x_1) = q(x_3)$ より $x_1 \sim x_3$.

5　1 点集合 $\{y\}$ の逆像なので，正確には $q^{-1}(\{y\})$ と書くべきところを，$q^{-1}(y)$ と書いてしまうのが普通である．

(d)⇒(a)：$V=q(U)$ とおくと，一般に $U\subset q^{-1}(q(U))=q^{-1}(V)$ である．$x'\in q^{-1}(V)$ を任意に取ると，$q(x')\in V=q(U)$ より，ある $x\in U$ が存在して，$q(x')=q(x)$ である．このとき $x'\in U$ となるので，$q^{-1}(V)\subset U$ も言えた． □

命題 12. (商写像であることの同値な言い換え)
$q\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ を連続な全射とする．このとき，以下は全て同値である．

(a) q は商写像である (つまり，$\mathcal{O}_Y=\mathcal{O}_q$ である)．

(b) q に関して飽和している任意の開集合 $U\subset X$ に対し，$q(U)$ は Y の開集合である．

(c) q に関して飽和している任意の閉集合 $F\subset X$ に対し，$q(F)$ は Y の閉集合である．

(証明)
$q\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ が連続だから，命題 3 より常に $\mathcal{O}_Y\subset\mathcal{O}_q$ である．
(a)⇒(b)：$\mathcal{O}_Y=\mathcal{O}_q$ と仮定する．$U\in\mathcal{O}_X$ が q に関して飽和しているとすると，補題 11 より $U=q^{-1}(q(U))$ であり，すると $\mathcal{O}_q$ の定義より，$q(U)\in\mathcal{O}_q=\mathcal{O}_Y$ となる．
(b)⇒(a)：$\mathcal{O}_q\subset\mathcal{O}_Y$ を示せば良い．$V\in\mathcal{O}_q$ を任意に取り，$U=q^{-1}(V)$ とおく．U は q に関して飽和していて，$\mathcal{O}_q$ の定義から $U\in\mathcal{O}_X$ であるから，仮定より $q(U)\in\mathcal{O}_Y$ である．さらに q の全射性より $V=q(q^{-1}(V))=q(U)$ なので，$V\in\mathcal{O}_Y$ が従い，ゆえに $\mathcal{O}_q\subset\mathcal{O}_Y$ である．
(b)⇒(c)：F を X の閉集合で，飽和しているとすると，補題 11 より $F=q^{-1}(q(F))$ である．すると $X\setminus F=X\setminus q^{-1}(q(F))=q^{-1}(Y\setminus q(F))$ より，$X\setminus F$ は q に関して飽和している開集合である．さらに q の全射性より $q(X\setminus F)=q(q^{-1}(Y\setminus q(F)))=Y\setminus q(F)$ で，仮定よりこれは Y の開集合だから，$q(F)$ は Y の閉集合である．
(c)⇒(b)：上の証明の F を X の開集合 U として読み替えれば良い． □

系 13.
連続な全射 $q\colon X\to Y$ が開写像もしくは閉写像であるとき，商写像である．
(証明)
q が開写像なら，特に q に関して飽和している X の開集合の q による像は Y の開集合となる．よって命題 12 により，q は商写像である．閉写像の場合も同様． □

命題 14.

(1) 商写像の合成は商写像である．

(2) 単射な商写像は同相写像である．

(3) $q\colon X \to Y$ を商写像とする．$A \subset X$ が q に関して飽和している開集合であるとき，$q|_A\colon A \to q(A)$ は商写像である．

(4) $q\colon X \to Y$ を商写像とする．$A \subset X$ が q に関して飽和している閉集合であるとき，$q|_A\colon A \to q(A)$ は商写像である．

(証明)

(1) $q_1\colon X \to Y,\ q_2\colon Y \to Z$ を商写像とする．命題 12 を用いて $q_2 \circ q_1\colon X \to Z$ が商写像であることを示すため，$U \subset X$ を X の開集合で，$q_2 \circ q_1$ に関して飽和しているものとする．補題 11 より $U = (q_2 \circ q_1)^{-1}(q_2 \circ q_1(U))$ である．このとき，まず $U = q_1^{-1}(q_1(U))$ である．実際，

$$\begin{aligned} x \in q_1^{-1}(q_1(U)) &\Rightarrow q_1(x) \in q_1(U) \\ &\Rightarrow \exists x' \in U,\ q_1(x) = q_1(x') \\ &\Rightarrow q_2(q_1(x)) = q_2(q_1(x')) \in (q_2 \circ q_1)(U) \\ &\Rightarrow x \in (q_2 \circ q_1)^{-1}(q_2 \circ q_1(U)) = U \end{aligned}$$

より $q_1^{-1}(q_1(U)) \subset U$ であり，逆の包含は常に成り立つ．したがって U は q_1 についても飽和している開集合である．すると q_1 は商写像より，命題 12 から $q_1(U)$ は Y の開集合である．次に，$q_1(U)$ は q_2 について飽和していることを示す．これは，$U = (q_2 \circ q_1)^{-1}(q_2 \circ q_1(U)) = q_1^{-1}(q_2^{-1}(q_2 \circ q_1(U)))$ の q_1 による像を考えれば，q_1 の全射性より $q_1(U) = q_2^{-1}(q_2 \circ q_1(U))$ となることから従う．すると q_2 は商写像より，命題 12 によって $q_2 \circ q_1(U)$ は Z の開集合である．再び命題 12 によって，これは $q_2 \circ q_1$ が商写像であることと同値である．

(2) $q\colon X \to Y$ を単射な商写像とする．商写像はそもそも連続な全射なので，q は連続全単射になる．$U \subset X$ を任意の開集合とすると，単射性より $q^{-1}(q(U)) = U$ が成り立つ．つまり，U は q に関して飽和しているから，q が商写像であることと命題 12 により，$q(U)$ は Y の開集合となる．したがって q は連続全単射かつ開写像であるので，同相写像である．

(3) $A \subset X$ を q に関して飽和している開集合とすると，補題 11 より $A = q^{-1}(q(A))$

である．また，命題 12 より $q(A)$ は Y の開集合である．さて，A の開集合 U で，$q|_A$ に関して飽和しているものを任意にとると，$U=(q|_A)^{-1}(q|_A(U))$ と書ける．命題 12 より $q|_A(U)$ が $q(A)$ で開集合であることを示せばよいが，$q(A)$ は Y の開集合だから，$q|_A(U)$ が Y で開集合であることを示せばよい．包含写像を $i\colon A \hookrightarrow X$ とすると

$$\begin{aligned}(q|_A)^{-1}(q|_A(U)) &= i^{-1}(q^{-1}(q\circ i(U)))\\ &= q^{-1}\left(q(U)\right)\cap A\\ &= q^{-1}\left(q(U)\right)\cap q^{-1}\left(q(A)\right) \qquad \left(\because A = q^{-1}(q(A))\right)\\ &= q^{-1}(q(U)\cap q(A)) \ \ \left(= q^{-1}(q(U))\right)\end{aligned}$$

より，U は $q\colon X\to Y$ についても飽和している[6]．加えて U は A の開集合で，A は X の開集合だったから，U は X においても開集合である．よって，q が商写像であることと命題 12 により，$q(U)$ は Y において開集合である．これは $q|_A(U)=q(i(U))=q(U)$ より，$q|_A(U)$ が Y で開集合であることを示しており，これが示したいことであった．

(4) 上の証明で開集合を閉集合に読み替えれば良い． $\square$

6　もし A が q について飽和していないとすると，$A\neq q^{-1}(q(A))$ より $A\subsetneq q^{-1}(q(A))$ であるので，$U\subset A$ が $q|_A$ について飽和しているとき，証明中の式より，$U=(q|_A)^{-1}(q|_A(U))\subsetneq q^{-1}(q(U))$ となって，U は q に関して飽和して「いない」ことが分かる．

参考文献

[1] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, 2011.