定義１. (極大・極小)
$A \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f : A \to \mathbb{R}$ について，a を中心としたある開球 $B(a, \varepsilon)$ が A に含まれていて($a \in A^\circ$)，$f(a)$ が $B(a, \varepsilon)$ における f の最大値であるとき，f は a で極大であるという．同様に $f(a)$ が $B(a, \varepsilon)$ における f の最小値であるとき，f は a で極小であるという．

命題２.
$A \subset \mathbb{R}$ とする．関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が $a \in A^\circ$ で極大または極小であるとき，f が a で微分可能ならば，$f'(a) = 0$ である．
(証明)
f は a で微分可能より，$f'(a), f'_+(a), f'_-(a)$ が存在して，$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$ が成り立つ[1].
f が a で極大であるとすると，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，f の $B(a, \varepsilon)$ における最大値が $f(a)$ となる．よって，$|h| < \varepsilon$ ならば $a + h \in B(a, \varepsilon)$ だから，$f(a+h) - f(a) \leq 0$ である．このとき，$h > 0$ とすると $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$ となるから

$$f'_+(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

であり，$h < 0$ とすると $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$ となるから

$$f'_-(a) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

が成り立つ．したがって，$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$ より，$f'(a) = 0$ である．　∎

定理３. (ロルの定理)
$a < b$ とする．実数値関数 f が $I = [a, b]$ 上連続で，$I^\circ = (a, b)$ 上微分可能であり，かつ $f(a) = f(b)$ であるならば，$f'(c) = 0$ を満たす $c \in I^\circ$ が存在する．
(証明)
f が I 上定数ならば，任意の $c \in I^\circ$ で $f'(c) = 0$ である．
f が I 上定数でないとすると，$f(x) \neq f(a)$ となる $x \in I^\circ$ が存在する．また，I は閉区間より，$\mathbb{R}$ のコンパクト集合だから，連続像 $f(I)$ は最大値，最小値をもつ．
$f(x) > f(a)$ であるとし，f が I 上最大となる点を c とすると，$f(c) \geq f(x) > f(a) = f(b)$ だから，$c \in I^\circ$ である．よって，c を中心としたある開球 $B(c, \varepsilon)$ が I に含まれ，$f(c)$ は特に $B(c, \varepsilon)$ 上の最大値でもある．つまり f は c で極大であり，かつ f は c で微分可能だから，

[1] 閉区間上の微分の命題２を参照.

命題２より $f'(c)=0$ である．$f(x)<f(a)$ の場合は，f が I 上最小となる点を c とすれば同様に示される． ∎

定理４． (平均値の定理)
$a<b$ とする．実数値関数 f が $I=[a,b]$ 上連続で，$I^\circ=(a,b)$ 上微分可能ならば

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

を満たす $c\in I^\circ$ が存在する．
(証明)
$g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ とおくと，g は I 上連続で，I° 上微分可能である．また

$$g(b)-g(a)=f(b)-f(a)-\big(f(b)-f(a)\big)=0 \qquad \therefore g(a)=g(b)$$

となるから，定理３より

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\ ,$$

つまり $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ を満たす $c\in I^\circ$ が存在する． ∎

定理５． (コーシーの平均値の定理)
$a<b$ とし，$I=[a,b]$，$I^\circ=(a,b)$ とする．実数値関数 f,g が I 上連続で I° 上微分可能，かつ $g(a)\neq g(b)$ で，f',g' は I° 上同時に０にならないとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c\in I^\circ$ が存在する．
(証明)
$\varphi(x)=\big(f(b)-f(a)\big)g(x)-\big(g(b)-g(a)\big)f(x)$ とおくと，φ は I 上連続で I° 上微分可能であり，$\varphi(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)=\varphi(b)$ を満たすので，定理３より，$0=\varphi'(c)(b-a)$ を満たす $c\in I^\circ$ が存在する．よって

$$0=\varphi'(c)=\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)-\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$$

が成り立つ．ここで $g'(c)=0$ と仮定すると，$g(b)-g(a)\neq 0$ より，$f'(c)=0$ となって，条件に反する．したがって $g'(c)\neq 0$ なので，$g(b)-g(a)\neq 0$ と合わせて

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を得る． ∎

(参考文献)

[1]　杉浦光夫「解析入門 I 」東京大学出版会