

定義1. (連結)

- (1) 位相空間 (X, \mathfrak{D}) について, $X = U \sqcup V$ を満たす空でない $U, V \in \mathfrak{D}$ が存在しないとき, X は連結であるという.
- (2) 位相空間 X の部分集合 A が連結であるとは, A が X からの相対位相について連結であることをいう.

命題2. (部分集合の連結性)

位相空間 (X, \mathfrak{D}) と X の部分集合 A について, 次は同値である.

- (1) A は連結である.
- (2) $A \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A = \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ を満たす $U, V \in \mathfrak{D}$ ¹ が存在しない.

(証明)

$A \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A = \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ を (\star) とおく.

(1) \Rightarrow (2) : 対偶を示す. (\star) を満たす $U, V \in \mathfrak{D}$ が存在すると仮定する. \mathfrak{D}_A を A の X からの相対位相とすると, $U \cap A, V \cap A \in \mathfrak{D}_A$ であり, $A \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ より

$$(U \cap A) \cup (V \cap A) = A, \quad (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$$

を満たす. $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ より, A は連結でない.

(2) \Rightarrow (1) : 対偶を示す. A が連結でないと仮定すると, $A = U_A \cup V_A$ かつ $U_A \cap V_A = \emptyset$ を満たす空でない $U_A, V_A \in \mathfrak{D}_A$ が存在する. これらは, ある $U, V \in \mathfrak{D}$ を用いて $U_A = U \cap A$, $V_A = V \cap A$ と表される. このとき, $A = U_A \cap V_A = (U \cup V) \cap A$ より $A \subset U \cup V$ であり, $U_A \cap V_A = \emptyset$ より $U \cap V \cap A = \emptyset$ である. U_A, V_A は空でないから $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ も成り立つ. よって, $U, V \in \mathfrak{D}$ は (\star) を満たす. ■

命題3. (連結性の同値な言い換え)

位相空間 X について, 次は同値である.

- (1) X は連結である.
- (2) $X = F \sqcup H$ を満たす X の空でない閉集合 F, H が存在しない.
- (3) X の開かつ閉集合は \emptyset, X のみである.
- (4) 連続写像 $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ は定値写像に限る. ただし $\{0, 1\}$ は離散位相をもつとする.

(証明)

¹ このような開集合の対を A の分離集合という.

(1)⇒(2)：対偶を示す。 $X = F \sqcup H$ を満たす X の空でない閉集合 F, H が存在すると仮定する。 $X = F \sqcup H$ より、 $X \setminus F = H$, $X \setminus H = F$ なので、 $X \setminus F, X \setminus H$ はどちらも X の空でない開集合であり $X = (X \setminus F) \sqcup (X \setminus H)$ を満たす。よって X は連結でない。

(2)⇒(3)：対偶を示す。 X でも \emptyset でもない、 X の開かつ閉集合 M が存在すると仮定する。このとき $X \setminus M$ も開かつ閉集合であり、 $M \neq X$ より $X \setminus M \neq \emptyset$ である。ゆえに $F = M$, $H = X \setminus M$ とおけば、これらは X の空でない閉集合で $X = F \sqcup H$ を満たす。

(3)⇒(4)：対偶を示す。 $f(x) = 0, f(y) = 1$ となる 2 点 $x, y \in X$ が存在すると仮定する。このとき、 $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})$ はともに \emptyset でも X でもない²。また $\{0, 1\}$ には離散位相が入っているから、 $\{0\}, \{1\}$ はともに $\{0, 1\}$ の開かつ閉集合である。よって f の連続性から、 $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})$ はともに X の開かつ閉集合であり、以上より(3)の否定が成り立つ。

(4)⇒(1)：対偶を示す。 X が連結でない、つまり $X = U \sqcup V$ となる X の開集合 U, V が存在すると仮定する。このとき、連続写像 $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in U) \\ 1 & (x \in V) \end{cases}$$

と定義できる。実際、 $\{0, 1\}$ の開集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ の 4 つであり、これら全てに対し、 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{0\}) = U, f^{-1}(\{1\}) = V, f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ は全て X の開集合であるから、確かに f は連続写像である。この f は定値写像でないから、(4)の否定が成り立つ。 ■

命題4. (連結空間の連続像)

(X, \mathfrak{D}_X) を連結な位相空間、 (Y, \mathfrak{D}_Y) を位相空間とし、 $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とすると、 $f(X)$ は連結である。

(証明)

$f(X)$ が連結でないと仮定すると、命題2より

$$f(X) \subset U \cup V, \quad U \cap V \cap f(X) = \emptyset, \quad U \cap f(X) \neq \emptyset, \quad V \cap f(X) \neq \emptyset$$

を満たす $U, V \in \mathfrak{D}_Y$ が存在する。このことから

$$X \subset f^{-1}(U \cup V), \quad f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = \emptyset, \quad f^{-1}(U \cap f(X)) \neq \emptyset, \quad f^{-1}(V \cap f(X)) \neq \emptyset$$

となって、したがって

$$X \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), \quad f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset, \quad f^{-1}(U) \neq \emptyset, \quad f^{-1}(V) \neq \emptyset$$

が得られる。 f は連続写像だから、 $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathfrak{D}_X$ である。よって、これは X は連結であることに反する。 ■

² もしどちらかが X ならばもう片方は \emptyset となり、 f が定値写像となるため。

系5.

連結性は位相的性質である。

(証明)

X, Y を同相な位相空間とし, X が連結であるとする。同相写像 $f : X \rightarrow Y$ は連続かつ全射なので, 命題4から, $f(X) = Y$ は連結である。 ■

命題6.

B を位相空間 (X, \mathfrak{D}) の連結な部分集合とする。 X の部分集合 A が $B \subset A \subset \text{Cl}_X B$ を満たすとすると, A は連結である。

(証明)

A が連結でないと仮定すると, 命題2より, (\star) を満たす $U, V \in \mathfrak{D}$ が存在する。このとき $B \subset A$ より, B は $B \subset U \cup V$, $U \cap V \cap B = \emptyset$ を満たし, $A \subset \text{Cl}_X B$ より $U \cap \text{Cl}_X B \neq \emptyset$, $V \cap \text{Cl}_X B \neq \emptyset$ が成り立つ。 $x \in U \cap \text{Cl}_X B$ とすると, $x \in \text{Cl}_X B$ より x の任意の近傍 W に対し, $W \cap B \neq \emptyset$ である。 U は x の開近傍であるので, したがって $U \cap B \neq \emptyset$ となる。同様に $V \cap B \neq \emptyset$ となるから, 命題2より B は連結でない。 ■

命題7.

$\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を位相空間 (X, \mathfrak{D}) の連結な部分集合からなる族とし, 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対し, $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \neq \emptyset$ であるとする。このとき, $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は連結である。

(証明)

対偶を示す。 $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が連結でないと仮定すると, 命題2より, (\star) を満たすような $U, V \in \mathfrak{D}$ が存在する。したがって

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset U \cup V, \quad U \cap V \cap A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U \cap V \cap A_\lambda) = \emptyset$$

$$U \cap A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U \cap A_\lambda) \neq \emptyset, \quad V \cap A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V \cap A_\lambda) \neq \emptyset$$

が成り立つ。上段2つの式から, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A_\lambda = \emptyset$ である。一方で下段2つの式から, ある $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対して $U \cap A_{\lambda_1} \neq \emptyset$, $V \cap A_{\lambda_2} \neq \emptyset$ である。よって, もし $U \cap A_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば, A_{λ_2} は連結でないことになるが, これは $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ の条件に反する。ゆえに $U \cap A_{\lambda_2} = \emptyset$ である。同様に $V \cap A_{\lambda_1} \neq \emptyset$ である。よって

$$(U \cup V) \cap (A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}) = (U \cap A_{\lambda_2} \cap A_{\lambda_1}) \cup (V \cap A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}) = \emptyset$$

となるが, 一方で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \subset U \cup V$ なので, 特に $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \subset U \cup V$ だから

$$(U \cup V) \cap (A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}) = A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}$$

となる。以上より、 $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \emptyset$ となるが、これは $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ の条件に反する。 ■

定理8.

実数直線 \mathbb{R} は連結である。

(証明)

\mathbb{R} が連結でないと仮定すると、命題3より $\mathbb{R} = F \sqcup H$ となる \mathbb{R} の空でない閉集合 F, H が存在する。 $a \in F, b \in H$ とすると、 $a \neq b$ であり、 $a < b$ としても一般性を失わない。ここで $B = F \cap (-\infty, b)$ とおくと、 B は a を含むことから空でない。また、任意の $x \in B$ は $x < b$ を満たすから、 b は B の1つの上界である。よって実数の連続性³から $\sup B = c$ が存在する。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $c - \varepsilon$ は B の最小上界 c より小さいので B の上界ではないから、 $c - \varepsilon < b' \leq c$ を満たす $b' \in B \subset F$ が存在する⁴。ゆえに、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ が成り立つので、 $c \in \bar{F}$ であり、 F は閉集合より $c \in F$ である。

一方で、 b は B の上界だから $c \leq b$ であり、 $c = b$ とすると $b \in F$ となって矛盾が生じるから、 $c < b$ である。このとき、 $c < x \leq b$ を満たす任意の x は、 $x = b$ ならば $x \in H$ を満たし、 $x \neq b$ ならば $x > c$ より $x \notin B$ 、つまり $x \notin F$ または $x \notin (-\infty, b)$ であるが、 $x < b$ から $x \notin F$ となるので、結局 $x \in H$ を満たす。したがって $(c, b] \subset H$ が成り立つ。両辺の閉包をとれば $[c, b] \subset \bar{H}$ となり、 H は閉集合より $[c, b] \subset H$ だから、 $c \in H$ である。

以上より、 $c \in F \cap H$ となるので $F \cap H \neq \emptyset$ が成り立つが、これは仮定に反する。よって \mathbb{R} は連結である。 ■

定理9. (実数の連結部分集合)

実数直線 \mathbb{R} の部分集合 A に対して、次は同値である。

(1) A は連結である。

(2) A は区間である。すなわち $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b), (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, b]$, \mathbb{R} のいずれかである。

(証明)

(1) \Rightarrow (2) : A を \mathbb{R} の連結な部分集合とする。 A が1点集合 $\{a\}$ なら、 A は閉区間 $[a, a]$ である。 A が2点以上を含むとする。 A が上下に有界ならば、実数の連続性から $\sup A = b$, $\inf A = a$ が存在し、上限、下限の定義から $A \subset [a, b]$ である。このときもし、ある $c \in (a, b)$ が $c \notin A$ を満たすとすると、 \mathbb{R} の開集合である $(-\infty, c), (c, \infty)$ は

³ ここでは「 \mathbb{R} の空でない、上に有界な部分集合は \mathbb{R} の中に上限をもつ」という性質のこと。

⁴ もしこのような $b' \in B$ が存在しなければ、任意の B の元は $c - \varepsilon$ 以下ということになり、 $c - \varepsilon$ が B の上界になってしまふ。

$$A \subset (-\infty, c) \cup (c, \infty), \quad (-\infty, c) \cap (c, \infty) \cap A = \emptyset$$

を満たす。また、 $\sup A = b$ より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $b - \varepsilon < b' \leq b$ を満たす $b' \in A$ が存在する。よって、 $\varepsilon > 0$ を $c < b - \varepsilon$ となるように取れば $(c, \infty) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ。同様に $\inf A = a$ より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $a \leq a' < a + \varepsilon$ を満たす $a' \in A$ が存在する。よって、 $\varepsilon > 0$ を $a + \varepsilon < c$ となるように取れば $(-\infty, c) \cap A \neq \emptyset$ も言えるから、命題2より、 A は連結でないことになるが、これは矛盾である。よって $(a, b) \subset A$ が成り立つ。

以上をまとめると、 $\sup A = b, \inf A = a$ に対し

$$(a, b) \subset A (\because A \text{ の連結性}), \quad A \subset [a, b] (\because \text{上限, 下限の定義})$$

が成り立つ。 a, b が A に含まれるかどうかで場合分けをする。

- ・ $a, b \in A$ なら、 $[a, b] \subset A$ となるので、 $A \subset [a, b]$ と合わせて $A = [a, b]$ となる。
- ・ $a \in A, b \notin A$ なら、 $A = A \setminus \{b\} \subset [a, b] \setminus \{b\} = (a, b)$ と $(a, b) \subset A$ より $A = (a, b)$ となる。
- ・ $a \notin A, b \in A$ なら、 $A = A \setminus \{a\} \subset [a, b] \setminus \{a\} = (a, b]$ と $(a, b] \subset A$ より $A = (a, b]$ となる。
- ・ $a \notin A, b \notin A$ なら、 $A = A \setminus \{a, b\} \subset [a, b] \setminus \{a, b\} = \emptyset$ となるので、 $(a, b) \subset A$ と合わせて $A = (a, b)$ となる。

よっていずれの場合も A は区間になる。

次に、 A が上にのみ有界な場合、 $\sup A = b$ は存在するが、 $\inf A$ は存在しない。このとき、 $A \subset (-\infty, b]$ である。もし、ある $c \in (-\infty, b)$ が $c \notin A$ を満たすとすると、 \mathbb{R} の開集合である $(-\infty, c), (c, \infty)$ は

$$A \subset (-\infty, c) \cup (c, \infty), \quad (-\infty, c) \cap (c, \infty) \cap A = \emptyset$$

を満たす。 $\sup A = b$ が存在するので、上と同様の議論で $(c, \infty) \cap A \neq \emptyset$ は言える。また、 A が下に有界でないので、十分小さい $d \in \mathbb{R}$ は $d \in (-\infty, c) \cap A$ を満たす。つまり結局 $(-\infty, c) \cap A \neq \emptyset$ が言えて、 A の連結性に反するから、 $(-\infty, b) \subset A$ である。以上より、 b が A に含まれるかどうかの場合分けをすれば、上と同様に $A = (-\infty, b]$ か $A = (-\infty, b)$ となる。同様に A が下にのみ有界な場合も $A = [a, \infty)$ か $A = (a, \infty)$ となり、 A が上にも下にも有界でない場合は $A = \mathbb{R}$ となる。

(2) \Rightarrow (1) : \mathbb{R} は定理8より連結である。ここで開区間 (a, b) は(相対位相に関して) \mathbb{R} と同相であるので、系5から (a, b) も連結である。また、 $\text{Cl}_{\mathbb{R}}(a, b) = [a, b]$ であり $(a, b], [a, b), [a, b]$ はいずれも (a, b) を包み、かつ $[a, b]$ に包まれるので、命題6からこれらも連結である。ゆえに $(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, b]$ についても、それぞれ

$$(a, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, a+n), \quad [a, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, a+n)$$

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b-n, b), \quad (-\infty, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b-n, b]$$

というように互いに共通部分を持たない有界区間の和集合で表せることから、命題7よりこれらも連結である。 ■

(参考文献)

- [1] 松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店
- [2] “連結性”. Mathpedia. 2023-02-21. <https://math.jp/wiki/位相空間論10：連結性>