定義１．(準同型写像)
G, G' を群とし，写像 f を $f : G \to G'$ とする．任意の $x, y \in G$ に対し，$f(xy) = f(x)f(y)$ が成り立つとき，f を G から G' への(群)準同型写像，または単に準同型という．また，全単射である準同型写像を(群)同型写像，または単に同型といい，$G = G'$ の場合は自己同型という．

命題２．(同型写像の逆写像も同型写像)
同型写像 $f : G \to G'$ に対し，逆写像 $f^{-1} : G' \to G$ も同型写像である．
(証明)
f が全単射より，f^{-1} も全単射である．よって任意の $x', y' \in G'$ に対し，$x' = f(x), y' = f(y)$ を満たす $x, y \in G$ が一意的に存在する．このとき，f が準同型だから

$$x'y' = f(x)f(y) = f(xy) \quad \therefore f^{-1}(x'y') = xy$$

となり，$x = f^{-1}(x'), y = f^{-1}(y')$ より，$f^{-1}(x'y') = xy = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$ が成り立つ． ∎

定義３．(同型)
群 G, G' の間に同型写像が存在するとき，G, G' は同型であるといい，$G \cong G'$と表す．

命題４．(準同型写像の性質)
$f : G \to G'$ を準同型写像とすると，以下が成り立つ．
(1) e, e' をそれぞれ G, G' の単位元とすると，$f(e) = e'$ である．
(2) 任意の $g \in G$ に対し，$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ である．
(証明)
(1)：$e^2 = e$ より，$f(e)f(e) = f(e)$ である．両辺に $f(e)$ の逆元を右からかけると，$f(e) = e'$ が成り立つ．
(2)：任意の $g \in G$ に対し，$gg^{-1} = e$ より，$f(g)f(g^{-1}) = f(e) = e'$ である．同様に，$g^{-1}g = e$ だから，$f(g^{-1})f(g) = f(e) = e'$ となる．つまり，$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ である． ∎

定義５．(核と像)
$f : G \to G'$ を準同型写像とする．このとき

$$\ker f := \{x \in G \,|\, f(x) = e'\}, \quad \mathrm{im} f := f(G) = \{f(x) \in G' \,|\, x \in G\}$$

のことをそれぞれ f の核，像という．

定義６．(正規部分群)
H を G の部分群とする．任意の $g \in G$ に対し $gH = Hg$ であるとき[1]，H は G の正規部分群であるといい，$H \lhd G$ と表す．

命題７．(正規部分群の定義の言い換え)
$H \lhd G$ であるための必要十分条件は，任意の $g \in G$ と任意の $h \in H$ に対し，$ghg^{-1} \in H$ が成り立つことである．
(証明)
十分性：$g \in G$ を任意に与える．$x \in gH$ とすると，ある $h \in H$ を用いて $x = gh$ と表せる．このとき仮定から，$ghg^{-1} = xg^{-1} \in H$ となるので，ある $h' \in H$ を用いて $xg^{-1} = h'$ と表せる．よって $x = h'g \in Hg$ であり $gH \subset Hg$ が言える．逆に $x \in Hg$ とすると，ある $h \in H$ を用いて $x = hg$ と表せる．このとき仮定から，$g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg = g^{-1}x \in H$ となるので，ある $h' \in H$ を用いて $g^{-1}x = h'$ と表せる．よって $x = gh' \in gH$ であるので，$gH \supset Hg$ となる．以上より $gH = Hg$，つまり $H \lhd G$ である．
必要性：$g \in G, h \in H$ を任意に与えると，$gh \in gH$ である．このとき仮定から $gH = Hg$ なので，$gh \in Hg$ でもある．したがって，ある $h' \in H$ を用いて $gh = h'g$ と表せる．よって，$ghg^{-1} = h' \in H$ が成り立つ． ∎

命題８．(核と像の性質)
$f : G \to G'$ を準同型写像とする．このとき，$\ker f \subset G$ は G の正規部分群である．また，$\mathrm{im} f \subset G'$ は G' の部分群である(正規部分群とは限らない)．
(証明)
まず，$f(e) = e'$ より $e \in \ker f$ である．また，$x \in \ker f$ とすると $f(x) = e'$ より，$e' = f(x)^{-1}$ が成り立つ．ここで，$f^{-1}(x) = f(x^{-1})$ だから，$x^{-1} \in \ker f$ である．最後に $x, y \in \ker f$ とすると，$f(x) = f(y) = e'$ となる．よって $f(xy) = f(x)f(y) = e'e' = e'$ なので，$xy \in \ker f$ である．以上より，$\ker f$ は G の部分群である．
次に正規部分群であることを示す．$g \in G$ と $x \in \ker f$ を任意に与える．このとき

$$\begin{aligned} f(gxg^{-1}) &= f(g)f(x)f(g^{-1}) \\ &= f(g)f(g^{-1}) \quad (\because x \in \ker f) \\ &= f(gg^{-1}) \\ &= f(e) = e' \end{aligned}$$

となるから，$gxg^{-1} \in \ker f$ である．よって命題７より，$\ker f \lhd G$ である．

---

[1] $Hg := \{hg \mid h \in H\}$ であり，右剰余類という．

$e' = f(e)$ より，$e \in \mathrm{im} f$ である．また，$y \in \mathrm{im} f$ とすると，ある $x \in G$ を用いて $y = f(x)$ とかける．このとき $y^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in \mathrm{im} f$ となる．最後に $y, y' \in \mathrm{im} f$ とすると，ある $x, x' \in G$ を用いて $y = f(x),\ y' = f(x')$ とかけて，$yy' = f(x)f(x') = f(xx') \in \mathrm{im} f$ となる．以上より，$\mathrm{im} f$ は G' の部分群である． ∎

命題９． (左剰余類の演算)
H を G の部分群とする．このとき，以下は同値である．

(1) $H \triangleleft G$ である．

(2) 左剰余類 $g_0H, g_1H \in G/H$ の積を $(g_0H)(g_1H) := g_0g_1H$ と定義すると，この積は一意的である[2]．つまり，$g_0H = g_0'H,\ g_1H = g_1'H$ ならば，$g_0g_1H = g_0'g_1'H$ である．

(証明)

(1)⇒(2)：$g_0H = g_0'H,\ g_1H = g_1'H$ としたとき，ある $h_0, h_1 \in H$ を用いて $g_0 = g_0'h_0,\ g_1 = g_1'h_1$ と表せる．また (1) より，$g_1'^{-1} \in G$ と $h_0 \in H$ に対し，$g_1'^{-1}h_0g_1' \in H$ が成り立つ．ゆえに

$$g_0g_1 = g_0'h_0g_1'h_1 = g_0'\ g_1'g_1'^{-1}\ h_0g_1'h_1 = g_0'g_1'h_2h_1 \quad (h_2 := g_1'^{-1}h_0g_1')$$

が成り立つ．$h_2h_1 \in H$ より，$g_0g_1 \in g_0'g_1'H$ であるから，$g_0g_1H \cap g_0'g_1'H \neq \varnothing$ である．よって，ラグランジュの定理の命題４から，$g_0g_1H = g_0'g_1'H$ である．

(2)⇒(1)：$g \in G, h \in H$ を任意に与える．このとき $gh \in ghH \cap gH$ だから，$ghH \cap gH \neq \varnothing$ である．ゆえに $ghH = gH$ である．これと $g^{-1}H = g^{-1}H$ より，(2) から

$$ghg^{-1}H = gg^{-1}H = eH = H$$

となる．つまり，$ghg^{-1} \in H$ が言えるので，$H \triangleleft G$ である． ∎

命題10． (商群)
H を G の正規部分群とする．G の H に関する左剰余類の集合 G/H は，命題９で定義した積に関して群をなす(この群を G の H に関する商群または剰余群という)．

(証明)

単位元の存在：$e_GH = H$ は G/H の単位元である．実際，任意の $gH \in G/H$ に対して $(e_GH)(gH) = gH, (gH)(e_GH) = gH$ である．

逆元の存在：任意の $gH \in G/H$ に対して $(g^{-1}H)(gH) = e_GH, (gH)(g^{-1}H) = e_GH$ より，$g^{-1}H \in G/H$ はその逆元である．

結合法則：$g_1H, g_2H, g_3H \in G/H$ とすると，$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ より

$$\big((g_1H)(g_2H)\big)(g_3H) = (g_1g_2)g_3H = g_1(g_2g_3)H = (g_1H)\big((g_2H)(g_3H)\big)$$

---

[2] 言い方を変えると，この演算は well-defined であるということ．

が成り立つ． ∎

命題11． (自然な準同型)
H を G の正規部分群とする．$\pi : G \to G/H$ を $\pi(g) = gH$ で定めると，π は全射な準同型写像であり，$\ker\pi = H$ である(以下，この π を自然な準同型と呼ぶ)．
(証明)
$\pi(G) = \{gH \mid g \in G\} = G/H$ より，π は全射．また，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = (g_1H)(g_2H) = g_1g_2H = \pi(g_1g_2)$$

が成り立つから，π は準同型写像である． ∎

命題12． (単射な準同型写像)
$f : G \to G'$ を準同型写像とすると，f が単射であることと $\ker f = \{e_G\}$ であることは同値である．
(証明)
f が単射であると仮定する．$g \in \ker f$ とすると $f(g) = e_{G'}$ である．一方，$f(e_G) = e_{G'}$ であるから，f の単射性より，$g = e_G \in \{e_G\}$ となる．よって $\ker f \subset \{e_G\}$ である．逆の包含は常に言えるので，このとき $\ker f = \{e_G\}$ が成り立つ．
逆に $\ker f = \{e_G\}$ と仮定する．$g_1, g_2 \in G$ とし，$f(g_1) = f(g_2)$ とすると，f は準同型だから

$$e_{G'} = f(g_2)f(g_2)^{-1} = f(g_1)f(g_2^{-1}) = f(g_1g_2^{-1})$$

が成り立つ．すると仮定より $g_1g_2^{-1} = e_G$ だから，$g_1 = g_2$ となる．よって f は単射． ∎

定理13． (準同型定理(第一同型定理))
$f : G \to G'$ を準同型写像とし，$\pi : G \to G/\ker f$ を自然な準同型とする[3]．このとき，同型写像 $\bar{f} : G/\ker f \to \mathrm{im} f$ で，$f = \bar{f} \circ \pi$ となるものがただ一つ存在する．
(証明)
$\ker f = K$ とおき，$\bar{f}$ を $\bar{f}(gK) = f(g)$ と定めると，任意の $g \in G$ に対し

$$(\bar{f} \circ \pi)(g) = \bar{f}(\pi(g)) = \bar{f}(gK) = f(g)$$

より，$f = \bar{f} \circ \pi$ である．$\bar{f}$ が同型写像であることを示す．
まず，$g_1K, g_2K \in G/\ker f$ とすると

$$\begin{aligned} \bar{f}\left((g_1K)(g_2K)\right) &= \bar{f}(g_1g_2K) \\ &= f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) \ (\because f \text{ は準同型}) \\ &= \bar{f}(g_1K)\bar{f}(g_2K) \end{aligned}$$

[3] 命題８より，$\ker f \triangleleft G$ なので，商群 $G/\ker f$ が定義できる．

となるから，$\bar{f}$ は準同型である．

次に，任意の $g' \in \mathrm{im} f$ はある $g \in G$ を用いて $g' = f(g) = \bar{f}(gK)$ とかけるから，$\bar{f}$ は全射である．そして $g'K \in \ker \bar{f}$ とすると，$e_{G'} = \bar{f}(g'K) = f(g')$ より $g' \in \ker f = K$ である．ゆえに $g'K = K$ だから，$\ker \bar{f} \subset \{K\}$となり，逆の包含は常に成り立つので $\ker \bar{f} = \{K\}$である．

よって命題12より，$\bar{f}$ は単射となる．

以上より，$\bar{f}$ は $f = \bar{f} \circ \pi$ を満たす同型写像である．最後に，$\hat{f} : G/K \to G'$ も $f = \hat{f} \circ \pi$ を満たすとすると，任意の $gK \in G/K$ について

$$\begin{aligned}\hat{f}(gK) &= \hat{f}(\pi(g)) \\ &= f(g) \\ &= \bar{f}(\pi(g)) \\ &= \bar{f}(gK)\end{aligned}$$

が成り立つので，$\bar{f} = \hat{f}$ である．よって一意性が従う．　∎

(参考文献)

[1]　木村達雄・竹内光弘・宮本雅彦・森田純「代数の魅力」数学書房

[2]　“群準同型”. Wikipedia. 2023-05-19. https://ja.wikipedia.org/wiki/群準同型

[3]　“商群”. Wikipedia. 2023-05-19. https://ja.wikipedia.org/wiki/商群

[4]　雪江明彦「代数学 1　群論入門」日本評論社