定義１． (部分列)
$n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, k\mapsto n(k)$ を狭義単調増加関数とする．このとき関数 $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^m, n\mapsto a(n)=a_n$，つまり点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，合成関数 $(a\circ n)(k)=a_{n(k)}$，つまり点列 $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ のことを $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列という．

命題２． (部分列の収束)
$a_n, n(k)$ は上で定義したものとする．
(1) 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し，$k\le n(k)$ である．
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ は $\lim_{k\to\infty} a_{n(k)}=a$ を満たす．
(証明)
(1) 帰納法で示す．$n(k)$ の定義より，$k=0$ のとき $0\le n(0)$ である．$k=l(\ge 0)$ のとき $k\le n(k)$ が成り立つと仮定し，$k=l+1$ のときも $k\le n(k)$ となることを示す．
$n(k)$ は狭義単調増加なので $n(l+1)>n(l)$ であり，帰納法の仮定から $n(l)\ge l$ である．このとき $n(l+1)$ は自然数であるから，$n(l+1)\ge l+1$ となり，$k=l+1$ においても $k\le n(k)$ となる．　■
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\ge N$ となるすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $|a_n-a|<\varepsilon$ を満たす．このとき $k\ge N$ とすれば，(1)より $k\le n(k)$ が成り立つので，$n(k)\ge N$ より $|a_{n(k)}-a|<\varepsilon$，つまり $\lim_{k\to\infty} a_{n(k)}=a$ となる．　■

定理３． (ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理)
有界な実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列をもつ．
(証明)
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は上下に有界なので，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $b\le a_n\le c$ となるような $b,c\in\mathbb{R}$ が存在する．つまり $I=[b,c]$ とおくと，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\in I$ である．
$I_0=I$ とし，$b_0=b, c_0=c$ として，区間 $I_m=[b_m,c_m]$ を

$$I_{m+1}=[b_{m+1},c_{m+1}]=\left(\begin{array}{l}[b_m,d_m],[d_m,c_m] \text{ の内，} a_n \text{ を無限個含む方,}\\ \text{どちらもそうなら，} [b_m,c_m].\end{array}\right)$$

のように帰納的に定義する[1]．ただし，$d_m=\dfrac{b_m+c_m}{2}$ である．

[1] a_n を無限個含む方というのは，２つの区間の内 $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n$ がその区間に含まれる$\}$ が無限集合となる方の区間，という意味である．どちらも有限個しか含まないということはあり得ない．

このとき，列 $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は単調減少 $(I_0 \supset I_1 \supset \cdots)$ であり，$b_m - c_m = 2^{-m}(b-c) \to 0\ \ (m \to \infty)$ であるから，区間縮小法 ([中間値の定理]の定理 1 を参照) より

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

が成り立つ．I_m の定義から，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$A_m := \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_m\}$ は無限集合となる．よって，$k \mapsto n(k)$ を，$n(k) \in A_k$ かつ狭義単調増加となるように定めることができる[2]．ゆえに部分列 $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ が定義でき，$n(k) \in A_k$ から $b_k \leq a_{n(k)} \leq c_k$ である．この式において $k \to \infty$ とすれば，$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k = a$ より，はさみうちの原理から $a_{n(k)} \to a$ となる．つまり $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ は収束する． ∎

(参考文献)

[1]　杉浦光夫「解析入門 I 」東京大学出版会
[2]　松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店　　(整列集合に関する記述のみ)

[2] なぜなら，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して A_{k+1} は無限集合なので，$n(k)$ より大きい自然数 N を必ず含む．$\mathbb{N}$ は整列集合だから，そのような自然数 N の集合は必ず最小元をもつ．よってそれを $n(k+1)$ とすれば良い．
※整列集合 … 任意の空でない部分集合が最小元をもつような全順序集合のこと．$\mathbb{N}$ が整列集合であることは帰納法で示せる．