定義 1. (点列コンパクト)
$K \subset \mathbb{R}$ の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が K の点に収束する部分列 $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ をもつとき，K は点列コンパクトであるという．

補題 2.
(X, d) を距離空間とし，$A \subset X$ とする．
(1) $x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は，x に収束する A の点列が存在することである．
(2) A が X の閉集合であるための必要十分条件は，A の任意の収束点列の極限が A に含まれることである．

(証明)
(1) 点列の収束の命題 5 を参照.
(2) A を X の閉集合，つまり $A = \overline{A}$ とする．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を A の任意の収束点列で，$x_n \to x$ であるとすると，(1) より $x \in \overline{A}$ であり，$A = \overline{A}$ より $x \in A$ となる．逆に A の任意の収束点列の極限が A に含まれると仮定する．このとき $x \in \overline{A}$ を任意に与えると，(1) より x に収束する A の点列が存在し，仮定より $x \in A$ となる．したがって $\overline{A} \subset A$ であり，逆の包含は常に成り立つので $\overline{A} = A$，すなわち A は X の閉集合となる． □

定理 3. (点列コンパクト $\Longleftrightarrow$ 有界閉集合)
$K \subset \mathbb{R}^n$ が点列コンパクトであるためには，K が有界閉集合であることが必要十分である．

(証明)
・必要性：K が点列コンパクトであるとする．まず，K が有界でないとすると，各 $m \in \mathbb{N}$ に対し，$|x_m| > m$ となる $x_m \in K$ が存在する．このようにして K の点列 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を定めると，これの任意の部分列 $(x_{m(k)})_{m\in\mathbb{N}}$ について，$x_{m(k)} \to \infty \ \ (k \to \infty)$ となり，点列コンパクト性に反する．ゆえに K は有界である．また，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意の収束する K の点列とし，極限を x とすると，点列コンパクト性より，K の点に収束する部分列が存在する．すると，収束点列の任意の部

分列の極限は元の点列の極限と一致することから，$x \in K$ が従う．よって補題 2 より，K は閉集合である． $\square$

・十分性：$K \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合ならば，補題 2 より，K の任意の収束点列の極限は K に含まれる．次に有界集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の任意の点列が収束する部分列をもつことを帰納法で示す．$n = 1$ の場合，$K \subset \mathbb{R}$ の任意の点列 (実数列) は有界なのでボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理より，ある x に収束する部分列をもつ．次に $n > 1$ とし，$\mathbb{R}^{n-1}$ の有界集合の任意の点列が収束する部分列をもつと仮定する．このとき $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を有界集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の任意の点列とし，各 m に対し $x_m = (x_{m,1}, \cdots, x_{m,n-1}, x_{m,n})$ と表す．すると $((x_{m,1}, \cdots, x_{m,n-1}))_{m\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の有界集合の点列となるので，帰納法の仮定より，収束する部分列 $((x_{m(k),1}, \cdots, x_{m(k),n-1}))_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．さらに，実数列 $(x_{m(k),n})_{k\in\mathbb{N}}$ は有界なので，ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理から，収束する部分列 $(x_{m(k(l)),n})_{l\in\mathbb{N}}$ をもつ．すると $(x_{m(k(l))})_{l\in\mathbb{N}}$ は，$(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の収束する部分列になる．以上をまとめると，$K \subset \mathbb{R}^n$ が有界閉集合ならば，K は点列コンパクトである． $\square$

参考文献

[1]　杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会