定義 1. (連続写像)
$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるとは，任意の $V \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ となることを言う．

命題 2. (写像の連続性と同値な条件１)
X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を写像とするとき，次の 2 つは同値である．
(1) f は連続写像である．
(2) Y の任意の閉集合 H に対して $f^{-1}(H)$ は X の閉集合である．
(証明)
(1) $\Rightarrow$ (2)：H を Y の任意の閉集合とすると，$Y \setminus H$ は Y の開集合だから，仮定より $f^{-1}(Y \setminus H) = X \setminus f^{-1}(H)$ は X の開集合，つまり $f^{-1}(H)$ は X の閉集合である．
(2) $\Rightarrow$ (1)：V を Y の任意の開集合とすると，$Y \setminus V$ は Y の閉集合だから，仮定より $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ は X の閉集合，つまり $f^{-1}(V)$ は X の開集合である． □

命題 3. (写像の連続性と同値な条件２)
X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を写像とするとき，次の 3 つは同値である．
(1) f は連続写像である．
(2) 任意の $A \subset X$ に対して $f(\mathrm{Cl}_X A) \subset \mathrm{Cl}_Y f(A)$ である．
(3) 任意の $B \subset Y$ に対して $\mathrm{Cl}_X f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y B)$ である．
(証明)
(1) $\Rightarrow$ (2)：$A \subset X$ を任意に与えると, $\mathrm{Cl}_Y f(A)$ は Y の閉集合だから, 命題 2 と仮定より $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y f(A))$ は X の閉集合である．ここで $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y f(A)) \supset f^{-1}(f(A)) \supset A$ であるから, $f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y f(A))$ は A を含む X の閉集合である．ゆえに $\mathrm{Cl}_X A \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y f(A))$ が成り立つので，$f(\mathrm{Cl}_X A) \subset f(f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y f(A))) \subset \mathrm{Cl}_Y f(A)$ である．
(2) $\Rightarrow$ (3)：$B \subset Y$ を任意に与えると，$f^{-1}(B) \subset X$ なので，仮定の A を $f^{-1}(B)$ として $f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}(B)) \subset \mathrm{Cl}_Y f(f^{-1}(B))$ となる．$\mathrm{Cl}_Y f(f^{-1}(B)) \subset \mathrm{Cl}_Y B$ であることと合わせると，$f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y B) \supset f^{-1}(f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}(B))) \supset \mathrm{Cl}_X f^{-1}(B)$ となる．
(3) $\Rightarrow$ (1)：$H \subset Y$ を Y の任意の閉集合とすると，$\mathrm{Cl}_Y H = H$ なので，仮定の B を H として $\mathrm{Cl}_X f^{-1}(H) \subset f^{-1}(H)$ が成り立ち，逆の包含は常に成り立つので

$\mathrm{Cl}_X f^{-1}(H) = f^{-1}(H)$ となる．すなわち，$f^{-1}(H)$ は X の閉集合なので，f は連続写像である． □

定義 4. (点における連続性)
位相空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が点 $x \in X$ において連続であるとは，$f(x)$ の任意の近傍 V に対し，x の X における近傍 U が存在して，$f(U) \subset V$ となることを言う．

注意 5. (点における連続性の定義について)
「$f(x)$ の任意の近傍 V に対し，x の X における近傍 U が存在して，$f(U) \subset V$ となる」というのは「$f(x)$ の任意の近傍 V に対し，$f^{-1}(V)$ が x の X における近傍である」と同値．実際，前者を仮定すれば $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$ かつ U が x の近傍より $f^{-1}(V)$ は x の近傍である．逆に後者を仮定すると $f(f^{-1}(V)) \subset V$ より，$U = f^{-1}(V)$ とすれば前者が従う．

命題 6. (基本近傍系を用いた言い換え)
X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を写像とする．さらに x を X の点とし，X における基本近傍系を $\mathcal{U}$，$f(x)$ の Y における基本近傍系を $\mathcal{V}$ とすると，次の 2 つは同値である．
(1) f は $x \in X$ において連続である．
(2) 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対し，ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $f(U) \subset V$ となる．
(証明)
(1) ⇒ (2)：$V \in \mathcal{V}$ を任意に与えると，V は特に $f(x)$ の近傍なので，仮定より x の X における近傍 U' が存在して $f(U') \subset V$ を満たす．このとき基本近傍系の定義から $U \in \mathcal{U}$ で $U \subset U'$ となるものが存在し，$f(U) \subset f(U') \subset V$ が成り立つ．
(2) ⇒ (1)：$f(x)$ の任意の近傍 V' を与えると，$V \in \mathcal{V}$ で $V \subset V'$ となるものが存在する．さらに仮定より，ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $f(U) \subset V (\subset V')$ を満たす．U は特に x の近傍なので，f は x において連続である． □

定理 7. (写像の連続性と点における連続性)
X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を写像とすると，次の 2 つは同値である．
(1) f は連続写像である．
(2) 任意の点 $x \in X$ において f は連続である．
(証明)
(1) $\Rightarrow$ (2)：$x \in X$ を任意に取り，$f(x)$ の近傍 V を任意に与える．このとき $f(x) \in \mathrm{Int}_Y V$ であり，$\mathrm{Int}_Y V$ は Y の開集合なので，仮定より $f^{-1}(\mathrm{Int}_Y V)$ は X の開集合である．よって $x \in f^{-1}(\mathrm{Int}_Y V)$ から，$f^{-1}(\mathrm{Int}_Y V)$ は x の近傍である．$f(f^{-1}(\mathrm{Int}_Y V)) \subset \mathrm{Int}_Y V \subset V$ であるから，以上より f は x において連続である．
(2) $\Rightarrow$ (1)：$V \in \mathcal{O}_Y$ を任意に取り，x を $f^{-1}(V)$ の任意の点とする．すると $f(x) \in V$ であるから，V は $f(x)$ の近傍である．よって仮定から，$f(U) \subset V$ となる x の近傍 U が存在する．ここで $U \subset f^{-1}(V)$ より，$\mathrm{Int}_X U \subset \mathrm{Int}_X f^{-1}(V)$ だから，$x \in \mathrm{Int}_X U \subset \mathrm{Int}_X f^{-1}(V)$ が従う．つまり，$f^{-1}(V)$ の任意の点は $f^{-1}(V)$ の内点であるので，$f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ である． $\square$

命題 8. (連続性と点列の収束)
X, Y を位相空間とし，$x \in X$ とする．このとき $f : X \to Y$ が x において連続ならば，x に収束する X の任意の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について，Y の点列 $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束する．X が第一可算空間なら，逆も成り立つ．
(証明)
$f(x)$ の近傍 V を任意に与えると，f の x における連続性より，x の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ を満たす．すると点列の収束の定義から，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば $x_n \in U$ を満たす．よってこのとき $n \geq N$ ならば $f(x_n) \in f(U) \subset V$ が成り立つから，$(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束する．
次に X が第一可算とすると，$x \in X$ の基本近傍系として，$U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ であるような $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が取れる．ここで $f(x)$ の基本近傍系として $f(x)$ の全近傍系を取り，対偶を示すため，f は x において連続でないとする．つまり，$f(x)$ の近傍 V で，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(U_n) \not\subset V$ となるものが存在すると仮定する．このとき，$x_n \to x$ であるが $f(x_n) \to f(x)$ とならない X の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在することを示せば良い．そこで各 $n \in \mathbb{N}$ について，$x_n \in U_n$ となるように点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を定め

ると，$x_n \to x$ となる．実際，x の任意の近傍 U を与えると，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $U \supset U_N \supset U_{N+1} \supset \cdots$ となるから，$n \geq N$ ならば $x_n \in U$ を満たす．しかし，仮定より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(U_n) \not\subset V$ であるような $f(x)$ の近傍 V が存在するから，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束しない．よって対偶が示された． □

参考文献

[1] “入門テキスト「位相空間論」”. Mathpedia. 2023-09-18. https://math.jp/wiki/入門テキスト「位相空間論」

[2] 松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店