定義１．(ハウスドルフ空間)
位相空間 X の任意の相異なる２点 x, y に対し，X の開集合 U, V が存在して

$$x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$$

を満たすとき，X はハウスドルフ空間であるという．

定義２．(有向集合，有向点列，有向点列の収束)
集合 A 上の二項関係 $\leq$ が次を満たすとする．
(D1) 任意の $a \in A$ に対し，$a \leq a$ である．(反射律)
(D2) 任意の $a, b, c \in A$ に対し，$a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ である．(推移律)
(D3) 任意の $a, b \in A$ に対し，$a \leq c$ かつ $b \leq c$ を満たす $c \in A$ が存在する．
このとき，$(A, \leq)$ を有向集合といい，ある有向集合 A から位相空間 X への写像 φ のことを X における有向点列という．
また，$x \in X$ とする．x の任意の近傍 V_x に対し，ある $a_0 \in A$ が存在して，$a_0 \leq a$ である全ての $a \in A$ について $\varphi(a) \in V_x$ が成り立つとき，有向点列 φ は x に収束するという．

命題３．(ハウスドルフ性と有向点列の収束点の一意性)
位相空間 X に対し，次の２つは同値である．
(1) X はハウスドルフ空間である．
(2) X における任意の有向点列の収束点は高々１つである．
(証明)
(1)⇒(2)：$(X, \mathfrak{O})$ をハウスドルフ空間とし，X における有向点列 $\varphi : A \to X$ が異なる２点 $x, y \in X$ に収束すると仮定する．このとき，ハウスドルフ性から，$U, V \in \mathfrak{O}$ であって

$$x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$$

を満たすものが存在する．ここで，U は x の近傍，V は y の近傍であり，φ は x にも y にも収束するので，ある $a_0, a_1 \in A$ が存在して

$$a_0 \leq a \Rightarrow \varphi(a) \in U, \quad a_1 \leq a \Rightarrow \varphi(a) \in V$$

が成り立つ．A は有向集合なので，(D3) より $a_0 \leq a_2$ かつ $a_1 \leq a_2$ を満たす $a_2 \in A$ が存在し，$\varphi(a_2) \in U \cap V$ である．これは $U \cap V = \varnothing$ に反するから，φ の収束点は高々１つである．　∎
(2)⇒(1)：対偶を示すため，$(X, \mathfrak{O})$ がハウスドルフ空間でないとする．このとき，ある異なる２点 $x, y \in X$ であって，x を含む任意の $U \in \mathfrak{O}$ と y を含む任意の $V \in \mathfrak{O}$ が $U \cap V \neq \varnothing$ を満たすものが存在する．ここで

$$A = \left\{ U \cap V \mid U, V \in \mathfrak{O} \left(x \in U, y \in V \right) \right\}$$

と定めると，集合 A 上の逆包含関係 $\supset$ は (D1) ~ (D3) を満たす[1]ので，$(A, \supset)$ は有向集合である．$U \cap V \neq \varnothing$ より，任意の $a \in A$ は $a \neq \varnothing$ を満たすから，有向点列 $\varphi : A \to X$ を $\varphi(a) \in a$ となるように定めることができる．このとき，x の任意の近傍 V_x と y の任意の近傍 V_y を与えると，近傍の定義から $x \in \mathrm{Int}(V_x), y \in \mathrm{Int}(V_y)$ であり，$\mathrm{Int}(V_x), \mathrm{Int}(V_y)$ はともに開集合．したがって $a_0 := \mathrm{Int}(V_x) \cap \mathrm{Int}(V_y)$ とおくと

$$a_0 \supset a \Rightarrow \varphi(a) \in a \subset a_0 = \mathrm{Int}(V_x) \cap \mathrm{Int}(V_y)$$

が成り立つ．$\mathrm{Int}(V_x) \cap \mathrm{Int}(V_y) \subset V_x \cap V_y$ より，整理すると

$$a_0 \supset a \Rightarrow \varphi(a) \in V_x \cap V_y$$

となるので，φ は x にも y にも収束する．よって (2) は成り立たない． ∎

(参考文献)

[1]　松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店

[2]　“有向点族”. Wikipedia. 2023-01-24. https://ja.wikipedia.org/wiki/有向点族

[3]　“ネットによる位相空間論”. Mathpedia. 2023-01-24. https://math.jp/wiki/ネットによる位相空間論

[1] 実際，(D1)と(D2)は明らかである．(D3)に関して，A の任意の２つの元を $a := U_1 \cap V_1, b := U_2 \cap V_2$ とする．$c := a \cap b$ とすれば $a \supset c$ かつ $b \supset c$ を満たし，また，$U_1 \cap U_2$ は x を含む開集合，$V_1 \cap V_2$ は y を含む開集合なので，$c = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \in A$ である．