定義 1. (コーシー点列)
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を距離空間 (X,d) の点列とする．任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n,m\geq N$ ならば $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ が成り立つとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー点列 (または基本点列) であるという．

命題 2. (収束点列はコーシー点列)
距離空間 (X,d) の任意の収束点列はコーシー点列である．
(証明)
X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $x\in X$ に収束するとする．$\varepsilon>0$ を任意に与えると，$x_n\to x$ より，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば $x_n\in B(x,\,\varepsilon/2)$ を満たす．よって，$n,m\geq N$ ならば $x_n,x_m\in B(x,\,\varepsilon/2)$ なので

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

を満たす．よって $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー点列である．□

定義 3. (部分列)
$(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ を狭義単調増加な自然数列とする．位相空間 X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とは $\mathbb{N}$ から X への写像 $n\mapsto x_n$ のことであるが，これと $k\mapsto n(k)$ の合成写像 $k\mapsto x_{n(k)}$ のことを $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列という．

注意 4.
$(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ を狭義単調増加な自然数列とすると，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $k\leq n(k)$ である．実際，$k=1$ のときは $n(1)\geq 1$ であり，$l\in\mathbb{N}$ で $l\leq n(l)$ となると仮定すると，狭義単調増加性より $l<n(l+1)$ であり，$n(l+1)\in\mathbb{N}$ より $l+1\leq n(l+1)$ となるので，$l+1$ でも成り立つ (帰納法)．

命題 5. (収束部分列をもつコーシー点列は収束点列)
距離空間 (X,d) のコーシー点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ が $x\in X$ に収束すれば，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も x に収束する．

(証明)
$\varepsilon > 0$ を任意に与えると，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー点列より，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n, m \geq N_1 \text{ ならば } d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす．また $x_{n(k)} \to x$ より，ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k \geq N_2 \text{ ならば } d(x, x_{n(k)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす．よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，$k \geq N$ のとき

$$d(x, x_k) \leq d(x, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\because n(k) \geq k)$$

を満たす．したがって $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する． □

定義 6. (完備距離空間)
距離空間 (X, d) の任意のコーシー点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する，つまりある $x \in X$ が存在して $x_n \to x$ となるとき，(X, d) は完備であるという．

定理 7. (実数直線の完備性)
距離空間 $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ は完備である．ただし $d^{(1)}$ はユークリッド距離関数である．
(証明)
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ の任意のコーシー点列とすると，$1 > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n, m \geq N$ ならば $|x_n - x_m| < 1$ を満たす．このとき特に $n \geq N$ ならば $|x_n - x_N| < 1$ を満たすから，$|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N|$ より，$n \geq N$ ならば $|x_n| < |x_N| + 1$ となる．したがって $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$ とおけば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| \leq M$ となるので，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界実数列である．
よって，ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理から，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある点 $x \in \mathbb{R}$ に収束する部分列をもつので，命題 5 より $x_n \to x$ である．したがって $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ は完備である． □

命題 8. (完備距離空間の閉部分集合)
(X,d) を完備距離空間とすると，X の閉集合 A は X の部分距離空間として完備である．
(証明)
距離関数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ の定義域を $A\times A$ に制限したものを d_A とする．距離空間 (A,d_A) が完備であることを示す．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を (A,d_A) のコーシー点列とすると，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は (X,d) のコーシー点列と見れるので，X の完備性から，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は (X,d) の収束点列である．すなわち，ある $a\in X$ が存在して「任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば $d(a,a_n)<\varepsilon$」を満たす．ここで，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は距離空間 (X,d) の部分集合 A の点列なので，点列の収束の命題 5 より $a\in\overline{A}$ であり，A は X の閉集合だから $a\in A$ となる．よって $d(a,a_n)=d_A(a,a_n)$ が成り立つから「任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば $d_A(a,a_n)<\varepsilon$」を満たす． つまり，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は距離空間 (A,d_A) の点列として a に収束する．ゆえに (A,d_A) は完備である． □

命題 9. (部分距離空間が完備ならば閉集合)
A を距離空間 (X,d) の部分集合とする．A が X の部分距離空間として完備ならば，A は X の閉集合である．
(証明)
X が距離空間より「A が X の閉集合である」ことと「X の部分集合 A の任意の収束点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限は A に含まれる[1]」ことは同値である．なので $A\subset X$ の収束点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意に与え，その極限 $x\in X$ が $x\in A$ であることを示す．
命題 2 より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は (X,d) のコーシー点列であり，全ての $n,m\in\mathbb{N}$ に対して $d_A(x_n,x_m)=d(x_n,x_m)$ より，(A,d_A) のコーシー点列である．すると部分距離空間 (A,d_A) の完備性から，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は (A,d_A) の収束点列，つまりある $a\in A$ が存在して，$x_n\to a$ となる．よって距離空間の点列の極限の一意性 (点列の収束の命題 4) より，$x=a$ であるから $x\in A$ である．したがって A は X の閉集合である． □

1 X の部分集合 A の収束点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とは，位相空間 X の収束点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，つまりある $x\in X$ が存在して $x_n\to x$ となる X の点列であって，全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して $x_n\in A$ であるもののことである．

参考文献

[1] “入門テキスト「位相空間論」”. Mathpedia. 2023-09-25. https://math.jp/wiki/入門テキスト「位相空間論」

[2] 松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店

[3] 杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会