定義 1. (はめ込み，沈め込み)

M, N をそれぞれ m, n 次元 C^∞ 級多様体とし，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．

(1) 点 $p \in M$ における f の微分 $f_{*,p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射 ($\Leftrightarrow \mathrm{rank} f_{*,p} = \dim(T_pM) = m$) であるとき，$f$ を p におけるはめ込みという．M 上すべての点において f がはめ込みのとき，はめ込みという．

(2) 点 $p \in M$ における f の微分 $f_{*,p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が全射 ($\Leftrightarrow \mathrm{rank} f_{*,p} = \dim(T_{f(p)}N) = n$) であるとき，$f$ を p における沈め込みという．M 上すべての点において f が沈め込みのとき，沈め込みという．

定理 2. (階数一定定理)

$U \subset \mathbb{R}^m$ を開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする．f のヤコビ行列 $J_f(r)$ が $p \in U$ の近傍において一定階数 k をもつならば，p の U における近傍上の p を中心とする[1]微分同相写像 φ と，$f(p) \in \mathbb{R}^n$ の近傍上の $f(p)$ を中心とする微分同相写像 ψ が存在して，

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, r^m) = (r^1, \ldots, r^k, 0, \ldots, 0)$$

を満たす．

(証明)

まず，$J_f(p)$ の階数は k なので，$J_f(p)$ は $k \times k$ の正則な部分行列をもつ．そこで，$J_f(p)$ の左上 $k \times k$ ブロックが正則であるとして良い[2]．$\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の座標をそれぞれ，

$$(x, y) = (x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{m-k}), \quad (u, v) = (u^1, \ldots, u^k, v^1, \ldots, v^{n-k})$$

と書くことにする．また，$Q\colon U \to \mathbb{R}^k$, $R\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ をそれぞれ，f の前半の k 成分，後半の $n-k$ 成分を対応させる写像とする．つまり $f(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$ である．すると $(\partial Q^i / \partial x^j)_{1 \leq i, j \leq k}$ は f のヤコビ行列の左上ブロックだから，p において正則である．さて，$p = (a, b)$ $(a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}^{m-k})$ とおき，$\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ を

1　p を中心とするとは，p を原点に移すという意味である．$f(p)$ も同様．

2　何故なら，座標の入れ替えは微分同相だからである．

$\varphi(x,y) \coloneqq (Q(x,y)-Q(p),\, y-b)$ とすると，$\varphi(p)=0$ で，φ のヤコビ行列 J_φ は

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial Q^1}{\partial x^k} & \frac{\partial Q^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial Q^1}{\partial y^{m-k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial Q^k}{\partial x^k} & \frac{\partial Q^k}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial Q^k}{\partial y^{m-k}} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^k} & \frac{\partial y^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial y^{m-k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^{m-k}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{m-k}}{\partial x^k} & \frac{\partial y^{m-k}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial y^{m-k}}{\partial y^{m-k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial Q^i}{\partial x^j})_{1\le i,j\le k} & (\frac{\partial Q^i}{\partial y^j})_{1\le i\le k, 1\le j\le m-k} \\ 0 & E_{m-k} \end{pmatrix}$$

となる (E_s は s 次単位行列)．よって，$(\partial Q^i/\partial x^j)(p)_{1\le i,j\le k}$ の正則性から $J_\varphi(p)$ は正則なので，逆関数定理より，p の U における近傍 W と $\varphi(p)=0$ の $\mathbb{R}^n$ における近傍 V が存在して，$\varphi|_W\colon W\to V$ が微分同相写像になる．今，p のある近傍上で J_f の階数が k で一定なので，W, V を小さく取り直し，W 上で J_f が一定階数 k をもち，かつ V が開立方体としても良い．このとき，$\varphi^{-1}\colon V\to W$ の前半の k 成分を A，後半の $m-k$ 成分を B とおくと，任意の $(x,y)\in V$ に対して

$$(x,y) = (\varphi\circ\varphi^{-1})(x,y) = \varphi(A(x,y),B(x,y)) = \Big((Q\circ\varphi^{-1})(x,y)-Q(p), B(x,y)-b\Big)$$

であるので，成分を比較することで

$$x = (Q\circ\varphi^{-1})(x,y)-Q(p), \quad y = B(x,y)-b$$

が得られる．ゆえに，$R\circ\varphi^{-1}=\tilde{R}$ とおくと，任意の $(x,y)\in V$ に対して

$$(f\circ\varphi^{-1})(x,y) = \Big(Q(\varphi^{-1}(x,y)), R(\varphi^{-1}(x,y))\Big) = (x+Q(p), \tilde{R}(x,y))$$

となる．ここで，$W=\varphi^{-1}(V)$ 上 $\mathrm{rank} J_f = k$ で，V 上 $J_{\varphi^{-1}}$ は正則だから，V 上 $J_{f\circ\varphi^{-1}}(x,y) = J_f(\varphi^{-1}(x,y))\cdot J_{\varphi^{-1}}(x,y)$ の階数は k である．すると

$$J_{f\circ\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ (\frac{\partial\tilde{R}^i}{\partial x^j})_{i,j} & (\frac{\partial\tilde{R}^i}{\partial y^\ell})_{i,\ell} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1\le i\le n-k \\ 1\le j\le k,\ 1\le\ell\le m-k \end{pmatrix}$$

だから，これが V 上階数 k をもつためには，V 上で $\frac{\partial\tilde{R}^i}{\partial y^\ell}=0$ $(\forall i,\ell)$ でなくてはならない．したがって，V の連結性から V 上 $\tilde{R}$ は y に依らないので，$\tilde{R}(x,0)=S(x)$ とおけば，

$$(f\circ\varphi^{-1})(x,y) = (x+Q(p), S(x)), \quad \forall(x,y)\in V$$

である[3]．さて $W \subset \mathbb{R}^n$ を

$$W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \mid (u - Q(p), 0) \in V\} \quad (0 \in \mathbb{R}^{m-k})$$

で定義する．これは $f(p)$ を含み[4]，V が開立方体であるから

$$W = \{u \in \mathbb{R}^k \mid u - Q(p) \in \mathrm{pr}_k(V)\} \times \mathbb{R}^{n-k} \qquad (\mathrm{pr}_k\colon \mathbb{R}^m \ni (x,y) \mapsto x \in \mathbb{R}^k)$$

と書けて，射影 (と平行移動) は開写像より，W は開集合と分かる．そこで

$$\psi\colon W \to \mathbb{R}^n,\ \psi(u,v) = \Bigl(u - Q(p),\, v - S(u - Q(p))\Bigr)$$

と定義すると，$\psi(f(p)) = (0, R(p) - S(0)) = \Bigl(0, R(p) - R(\varphi^{-1}(0))\Bigr) = 0$ であり，

$$(s,t) \mapsto (s + Q(p),\, t + S(s)) \quad (s \in \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{R}^{n-k})$$

を逆写像にもつ．ψ とその逆写像のいずれも C^∞ 級なので，ψ は微分同相である．また，$(f \circ \varphi^{-1})(V) \subset W$ である．実際，$(x,y) \in V$ とすれば

$$(f \circ \varphi^{-1})(x,y) = (x + Q(p),\, S(x)) = \Bigl(\mathrm{pr}_k(x,y) + Q(p),\ S(x)\Bigr) \in W$$

より，確かに $(f \circ \varphi^{-1})(V) \subset W$ となる．よって $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon V \to \mathbb{R}^n$ が定義でき，

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x,y) &= (x + Q(p) - Q(p),\ S(x) - S(x + Q(p) - Q(p))) \\ &= (x, 0)\end{aligned}$$

を満たす． □

定理 3. (多様体上の階数一定定理)
M, N をそれぞれ m, n 次元 C^∞ 級多様体とする．C^∞ 級写像 $f\colon M \to N$ のヤコビ行列が $p \in M$ の近傍において一定階数 k をもつなら，p を中心とする M のチャート (U, φ) と $f(p)$ を中心とする N のチャート (V, ψ) が存在して，

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, r^m) = (r^1, \ldots, r^k, 0, \ldots, 0)$$

を満たす．

3　V を開立方体としているので，任意の $(x,y) \in V$ に対して $(x,0) \in V$ であり，S が定義されている．
4　$f(p) = (Q(p), R(p))$ で，$(0,0) \in V$ だから．

(証明)
p の周りのチャート $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ と $f(p)$ の周りのチャート $(\tilde{V},\tilde{\psi})$ を取ると，$\tilde{\varphi},\tilde{\psi}$ は微分同相写像だから，$\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ のヤコビ行列は f のヤコビ行列と同じ階数をもつ．ゆえ，$\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ は $\tilde{\varphi}(p)$ のある近傍で一定階数 k をもつ．よって定理 2 より，$\tilde{\varphi}(p)$ の $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ における近傍 $\hat{U}$ 上の $\tilde{\varphi}(p)$ を中心とする微分同相写像 $\hat{\varphi}$ と，$\tilde{\psi}(f(p))$ の $\tilde{\psi}(\tilde{V})$ における近傍 $\hat{V}$ 上の $\tilde{\psi}(f(p))$ を中心とする微分同相写像 $\hat{\psi}$ が存在して

$$(\hat{\psi}\circ(\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1})\circ\hat{\varphi}^{-1})(r^1,\dots,r^k,\dots r^m)=(r^1,\dots,r^k,0,\dots,0)$$

となる．そこで，$U\coloneqq\tilde{\varphi}^{-1}(\hat{U}),\ V\coloneqq\tilde{\psi}^{-1}(\hat{V})$ とし，$\varphi\coloneqq\hat{\varphi}\circ\tilde{\varphi},\ \psi\coloneqq\hat{\psi}\circ\tilde{\psi}$ とすれば，(φ,U) は p を中心とする M のチャート，(ψ,V) は $f(p)$ を中心とする N のチャートとなり，$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=\hat{\psi}\circ(\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1})\circ\hat{\varphi}^{-1}$ より，これが目的のチャートである． $\square$

系 4.
C^∞ 級多様体 M,N の間の C^∞ 級写像 $f\colon M\to N$ について，M が連結なら，以下は同値である．

(1) 各 $p\in M$ において，p の周りのチャート (U,φ) と $f(p)$ の周りのチャート (V,ψ) で，$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ が線型写像となるものが存在する．
(2) f のヤコビ行列は一定階数をもつ．

(証明)
(1) $\Rightarrow$ (2) について，そのようなチャートを $(U,\varphi),(V,\psi)$ とすると，線型性から

$$J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}(r^1,\dots,r^m)=\begin{pmatrix} f^1(1,0,\dots,0) & \cdots & f^1(0,\dots,0,1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f^n(1,0,\dots,0) & \cdots & f^n(0,\dots,0,1)\end{pmatrix}$$

より，f のヤコビ行列は各点の近傍で一定階数をもつ．連結な位相空間上の局所定値写像[5]は定値写像なので，f のヤコビ行列の階数は M 上一定である．逆は，定理 3 から分かる． $\square$

5　各点の近傍上で定値である写像のこと．連続である必要はない．

系 5. (階数一定レベル集合定理)
C^∞ 級多様体 M, N の間の C^∞ 級写像 $f\colon M \to N$ について，f が $c \in N$ の逆像 $f^{-1}(c)$ を含む開集合上で一定階数 k をもつなら，$f^{-1}(c)$ は M の $m-k$ 次元正則部分多様体である．
(証明)
$p \in f^{-1}(c)$ を任意に与えると，定理 3 より，p を中心とするチャート $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^m)$ と $f(p) = c$ を中心とするチャート $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ が存在して

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r^1, \dots, r^m) = (r^1, \dots, r^k, 0, \dots, 0)$$

となる．よって

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) = \{(r^1, \dots, r^m) \in \varphi(U) \mid r^1 = \dots = r^k = 0\}$$

である．実際,

$$\begin{aligned}(r^1, \dots, r^m) \in (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) &\iff (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r^1, \dots, r^m) = 0 \\ &\iff r^1 = \dots = r^k = 0\end{aligned}$$

である．また，$\psi^{-1}(0) = f(p) = c$ なので

$$\varphi(f^{-1}(c)) = \varphi(f^{-1}(\psi^{-1}(0))) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)$$

であるから，以上より

$$f^{-1}(c) \cap U = \{q \in U \mid x^1(q) = \dots = x^k(q) = 0\}$$

となる．$f^{-1}(c)$ の各点でこのようなチャートが取れるから，$f^{-1}(c)$ は M の $m-k$ 次元の正則部分多様体である． □

命題 6.
$f\colon M \to N$ を多様体間の C^∞ 級写像，$(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^m)$ を M におけるチャートとする．このとき，$D(f) \coloneqq \{p \in U \mid f_{*,p}$ は p で最大階数をもつ $\}$ は U の開集合である[6].

6　最大階数をもつとは，$\operatorname{rank} f_{*,p} = \min\{m, n\}$ ということ．

(証明)

$k=\min\{m,n\}$ とする．すると

$$
\begin{aligned}
p \in U \setminus D(f) &\iff \operatorname{rank} J_f(p) = \operatorname{rank} f_{*,p} < k \\
&\iff J_f(p) \text{ のすべての } k \times k \text{ 部分行列は正則でない} \\
&\iff \det\Big(J_f(p) \text{ の } k \times k \text{ 部分行列}\Big) = 0 \\
&\iff p \text{ は } J_f \text{ のすべての } k \times k \text{ 部分行列の行列式の零点}
\end{aligned}
$$

であるから，$U \setminus D(f)$ は連続関数の零点の共通部分となる．ゆえに $U \setminus D(f)$ は U の閉集合だから，$D(f)$ は U において開である． □

系 7.

C^∞ 級写像 $f\colon M \to N$ の $p \in M$ における微分が単射ならば，f は p の近傍で一定階数 m をもち，全射ならば，f は p の近傍で一定階数 n をもつ．

(証明)

$f_{*,p}$ が単射 $\iff$ $m \leq n$ かつ $\operatorname{rank} f_{*,p} = m$ なので，p の座標近傍 U を取れば，$D(f)$ は p を含み，命題 6 より U の開集合だから p の近傍であって，$D(f)$ 上 f のヤコビ行列の階数は m である．全射の場合も同様に，$f_{*,p}$ が全射 $\iff$ $m \geq n$ かつ $\operatorname{rank} f_{*,p} = n$ よりしたがう． □

系 8. (はめ込み定理・沈め込み定理)

f を m 次元 C^∞ 級多様体 M と n 次元 C^∞ 級多様体 N の間の C^∞ 級写像とする．

(1) f が $p \in M$ におけるはめ込みなら，p を中心とするチャート (U,φ) と $f(p)$ を中心とするチャート (V,ψ) が存在して，

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r^1,\dots,r^m) = (r^1,\dots,r^m,0,\dots,0)$$

と表せる．

(2) f が $p \in M$ における沈め込みなら，p を中心とするチャート (U,φ) と $f(p)$ を中心とするチャート (V,ψ) が存在して，

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r^1,\dots,r^n,\dots,r^m) = (r^1,\dots,r^n)$$

と表せる．

(証明)
それぞれ系 7 より p の近傍で f のヤコビ行列の階数が m, n で一定となるから，定理 3 より成り立つ. $\square$

系 9.
沈め込み $f\colon M \to N$ は開写像である.
(証明)
O を M の開集合とする．$f(p) \in f(O)$ を任意に与えると，p において f は沈め込みだから，系 8 の (2) より

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(r^1, \ldots, r^n, \ldots, r^m) = (r^1, \ldots, r^n)$$

となるようなチャート $(U, \varphi), (V, \psi)$ が存在する．ただし U は十分小さくとって $U \subset O$ となるようにする．これは射影だから開写像である．つまり，$\psi(f(U))$ は $\psi(V)$ の開集合なので，$f(U)$ は V の開集合である．すると $f(p) \in f(U) \subset f(O)$ で，$f(p)$ は任意だったから，$f(O)$ は N の開集合である. $\square$

系 10. (正則レベル集合定理)
f を m 次元 C^∞ 級多様体 M と n 次元 C^∞ 級多様体 N の間の C^∞ 級写像とする．$c \in N$ を f の正則値で，逆像 $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ を満たすとすると，$f^{-1}(c)$ は M の $m-n$ 次元正則部分多様体である.
(証明)
c は臨界点の像ではないので，$f^{-1}(c)$ の任意の点は臨界点ではない．つまり，$f^{-1}(c)$ の任意の点において，f の微分は全射，つまり最大階数 n をもつ．最大階数をもつ点の集合は開集合だったから，$f^{-1}(c)$ を含む開集合上で f は一定階数 n をもつことになる．よって系 5 より，$f^{-1}(c)$ は M の $m-n$ 次元正則部分多様体である. $\square$

参考文献

[1] Loring W. Tu 著，枡田幹也・阿部拓・堀口達也 訳「トゥー多様体」裳華房

[2] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, 2013.