命題 1.

f を多様体 M 上の滑らかな関数とする．このとき

$$N \coloneqq \{p \in M : |f| \text{ は } p \text{ で微分不可能 }\}$$

は M において測度 0 である．

(証明)

$f(p) \neq 0$ の点 p の近傍では f は $\pm f$ のどちらかだから，p において微分可能であるので，$p \notin N$ である．$f(p) = 0$ であっても，$df_p = 0$ の場合は $|f|$ は微分可能である(微分可能の定義にしたがって確認できる)．ゆえに

$$N \subset \{p \in M : f(p) = 0,\ df_p \neq 0\} =: L$$

である．L が測度 0 であることを示せば良い．各 $p \in L$ に対し，p の M における開近傍 $U_p \subset M$ であって，任意の $q \in U_p$ で $df_q \neq 0$ となるものを取る．$f|_{U_p}$ を考えると，U_p 上の点は全て $f|_{U_p}$ の正則点であるから，$0 = f(p)$ は $f|_{U_p}$ の正則値である．よって正則値定理より，$(f|_{U_p})^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cap U_p$ は U_p の $n-1$ 次元正則部分多様体であるから，特に測度 0 である．ここで，

$$\begin{aligned} q \in U_p \cap L &\iff q \in U_p,\ \ f(q) = 0,\ \ df_q \neq 0 \\ &\iff q \in U_p,\ \ f(q) = 0 \\ &\iff q \in f^{-1}(0) \cap U_p \end{aligned}$$

であるので，

$$L \subset \bigcup_{p \in L} (U_p \cap L) = \bigcup_{p \in L} \left(f^{-1}(0) \cap U_p \right)$$

である．L は第二可算より Lindelöf 空間なので，L の開被覆 $\{U_p \cap L\}_{p \in L}$ の可算部分被覆 $\{U_i \cap L\}_{i \in \mathbb{N}}$ が取れる．よって

$$L \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (U_i \cap L) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(f^{-1}(0) \cap U_i \right)$$

が成り立つ．右辺は測度 0 の集合の可算和だから測度 0 であり，したがって L もそうである． $\square$

参考文献

[1] Loring W. Tu 著，枡田幹也・阿部拓・堀口達也 訳「トゥー多様体」裳華房