補題 1. (行列のノルムの性質)
$m \times n$ 実行列全体からなるベクトル空間を $M(m,n:\mathbb{R})$ とし[1]，$A=(a_{ij}) \in M(m,n:\mathbb{R})$ のノルム $|A|$ を

$$|A| := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

と定める[2]．また，$x \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $|Ax| \leq |A||x|$ である．

(2) A が n 次正則行列のとき， $\rho = |A^{-1}|^{-1}$ とおくと $|Ax| \geq \rho |x|$ である．

(証明)

(1) A の第 i 行ベクトルを a_i $(i=1,\cdots,n)$ と表すと，コーシー・シュワルツの不等式より

$$|Ax| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \langle {}^t a_i, x \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 |x|^2 \right)^{1/2} = |A||x|$$

が成り立つ．

(2) A は正則行列より，A^{-1} が存在する．よって (1) より

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq |A^{-1}||Ax|$$

である．ゆえに $\rho = |A^{-1}|^{-1}$ とおくと，$|Ax| \geq \rho |x|$ である． □

定理 2. (逆関数定理)
$f: W \to \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 W 上の C^r 級関数とし，$p \in W$ とする．このとき，次の 2 つは同値である．

(1) p を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U \subset W$ が存在して，$f(U)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，f の U への制限 $f|_U : U \to f(U)$ が C^r 級微分同相写像となる．

(2) p におけるヤコビアン $\det J_f(p)$ が 0 でない．

(証明)
(2) $\Rightarrow$ (1)：まず $r=1$ の場合を示す．$A = J_f(p)$ とおくと，仮定より A は逆行列を

1　これは数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{mn}$ と同型である．
2　このノルムをフロベニウスノルムという．

もつので，$\rho = |A^{-1}|^{-1}$ とおく．f が W 上 C^1 級より，$x \mapsto J_f(x),\ x \mapsto \det J_f(x)$ は $x = p$ において連続であるから，$r > 0$ を十分小さく取れば，任意の $x \in B(p,r)$ に対して ($B(p,r)$ は p を中心とした半径 r の開球)

$$|J_f(x) - A| \leq K$$
$$|\det J_f(x) - \det A| \leq \frac{1}{2}|\det A|$$

が成り立つようにできる．ただし，K は $0 < K < \rho/\sqrt{n}$ を満たす定数である．2 つ目の式において $|\det J_f(x) - \det A| \geq \Big||\det J_f(x)| - |\det A|\Big|$ より

$$|\det J_f(x)| \geq \frac{1}{2}|\det A| > 0 \quad (\forall x \in B(p,r))$$

が成り立つので，$B(p,r)$ 上で $\det J_f(x) \neq 0$ である．

ここから，$B(p,r)$ 上で f が単射であることを示す．そのため，$a, b \in B(p,r)$ を任意の異なる 2 点とし，a, b を結ぶ線分

$$L = \{c(t) := a + t(b-a) \,|\, t \in [0,1]\}$$

を考える．ここで $g(x) = f(x) - Ax$ とおくと，$J_g(x) = J_f(x) - A$ より

$$|J_g(x)| = |J_f(x) - A| \leq K \quad (\forall x \in B(p,r))$$

が成り立つ．また，$B(p,r)$ は凸集合より $L \subset B(p,r)$ である．このとき合成関数 $g \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ を考えると，各 $i = 1, \cdots, n$ について，$g \circ c$ の第 i 成分関数 $g_i \circ c$ は $[0,1]$ 上連続で $(0,1)$ 上微分可能であるので，平均値の定理より

$$(g_i \circ c)(1) - (g_i \circ c)(0) = \frac{d(g_i \circ c)}{dt}(\theta_i)$$

となる $0 < \theta_i < 1$ が存在する．ゆえに，各 i について

$$|g_i(b) - g_i(a)| = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(c(\theta_i))\frac{dc_j}{dt}(\theta_i)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(c(\theta_i))(b_j - a_j)\right|$$

となる．右辺はベクトル $J_g(c(\theta_i))(b-a)$ の i 番目成分の絶対値であるから

$$|g_i(b) - g_i(a)| \leq |J_g(c(\theta_i))(b-a)| \leq |J_g(c(\theta_i))| \cdot |b-a| \quad (\because \text{補題 } 1)$$

が成り立ち，$c(\theta_i) \in B(p,r)$ より，さらに

$$|g_i(b) - g_i(a)| \leq K|b-a|$$

が成り立つ．以上より

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a) - A(b-a)| = |g(b) - g(a)| &= \left(\sum_{i=1}^{n} |g_i(b) - g_i(a)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{n} K |b-a| \end{aligned}$$

となり，$|f(b) - f(a) - A(b-a)| \geq \Big| |f(b) - f(a)| - |A(b-a)| \Big|$ より

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\geq |A(b-a)| - \sqrt{n}K|b-a| \\ &\geq \rho|b-a| - \sqrt{n}K|b-a| \quad (\because \text{補題 } 1) \end{aligned}$$

である．したがって

$$|f(b) - f(a)| \geq (\rho - \sqrt{n}K)|b-a| \tag{★}$$

が得られる．すると a, b が異なることと K の定義より，右辺は正なので，このとき $f(b) \neq f(a)$ である．したがって f は $B(p,r)$ 上で単射である．

次に，$B(p,r)$ の中に閉球 $\overline{B}(p,\, r/2)$ を取り，その境界を S とおく．つまり S は p を中心とした半径 $r/2$ の球面である．このとき S 上の連続関数を $x \mapsto |f(x) - f(p)|$ で定めると，S はコンパクトだから，この関数は最小値 δ をもつ．すると $p \notin S$ より，f の単射性から S 上では $f(x) \neq f(p)$ なので，$\delta > 0$ である．この δ に対して，$V = B(f(p),\, \delta/3)$ とおく．ここから，任意の $y_0 \in V$ に対し，ある $x_0 \in B(p,\, r/2)$ が存在して $f(x_0) = y_0$ となることを示す．そのため，$y_0 \in V$ を任意に与えて固定し，関数 $h : \overline{B}(p,\, r/2) \to \mathbb{R}$ を

$$h(x) = |f(x) - y_0|^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - y_0^i)^2 \ \ (f_i,\, y_0^i \text{ はそれぞれ } f,\, y_0 \text{ の第 } i \text{ 成分})$$

と定める．すると h はコンパクト集合上の連続関数だから，ある 1 点 x_0 で最小値をとる．このとき $x_0 \in S$ であると仮定すると，δ の定義より

$$\begin{aligned} \delta &\leq |f(x_0) - f(p)| = |f(x_0) - y_0 + y_0 - f(p)| \\ &\leq |f(x_0) - y_0| + |y_0 - f(p)| \end{aligned}$$

である．今 $y_0 \in B(f(p),\,\delta/3)$ より $|y_0 - f(p)| < \delta/3$ だから，上と合わせて

$$|f(x_0) - y_0| > \frac{2}{3}\delta$$

$$\therefore h(x_0) = |f(x_0) - y_0|^2 > \frac{4}{9}\delta^2 > \left(\frac{1}{3}\delta\right)^2 > |f(p) - y_0|^2 = h(p)$$

となる．しかし，これは h が x_0 で最小値をとることに矛盾するので，$x_0 \notin S$，つまり $x_0 \in B(p,\,r/2)$ である．この x_0 が $y_0 = f(x_0)$ を満たすことを示す．さて，f は $B(p,\,r/2)$ 上で C^1 級で，h は $x \mapsto f(x) - y_0$ と ${}^t(z_1, \cdots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^n z_i^2$ の合成であるから C^1 級である．したがって

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_0) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であって，左辺は

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_0) = \Big(2(f_1(x_0) - y_0^1), \cdots, 2(f_n(x_0) - y_0^n)\Big)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

となるから，よって

$$(f_1(x_0) - y_0^1, \cdots, f_n(x_0) - y_0^n)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

となる．これは各 j に対して ${}^t(f(x_0) - y_0)J_f(x_0)$ の第 j 成分が 0 であることを意味するから，すなわち ${}^t(f(x_0) - y_0)J_f(x_0) = 0$ である．すると x_0 は特に $B(p, r)$ の点なので，$\det J_f(x_0) \neq 0$ であるから逆行列が存在する．ゆえに $f(x_0) = y_0$ が成り立ち，これより $V \subset f(B(p,\,\delta/2))$ が成り立つ．

以上より，$U = B(p, r/2) \cap f^{-1}(V)$ とおくと，$U \subset W$ は p を含む開集合であり[3]，また $f(U) = V$ である．実際，$f(U) \subset V$ は U の定義から言えて，$f(U) \supset V$ は $V \subset f(B(p,\,\delta/2)) \subset f(U)$ より言える．さらに f は $U \subset B(p, r)$ 上単射である．したがって，$f|_U : U \to f(U) = V$ は p を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U \subset W$ から $\mathbb{R}^n$ の開集合 V への全単射である．

$f|_U : U \to V$ の逆写像を単に f^{-1} とかく．f^{-1} の連続性を示すため，V の点 x, y を任意に与える．$f^{-1}(x),\, f^{-1}(y)$ に対して (★) を使うと

$$|x - y| = |f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(y))| \geq (\rho - \sqrt{n}K)|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|$$

$$\therefore |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq (\rho - \sqrt{n}K)^{-1}|x - y|$$

3　$B(p, r/2)$ は p を含む開集合で，$f^{-1}(V)$ は開集合 $V = B(f(p), \delta/3)$ の連続写像 f による逆像だから開集合で，さらに p を含む．

が得られる．この不等式において $y \to x$ とすれば，右辺が $\to 0$ となるので $f^{-1}(y) \to f^{-1}(x)$ となる．つまり f^{-1} は x において連続であり，x は任意だったから，f^{-1} は V 上で連続である．

次に f^{-1} が C^1 級であることを示す．$y \in V$ を任意に与え，$f^{-1}(y) = x$ とおく．そして十分小さい $R > 0$ に対し[4]，$\varepsilon : B(0, R) \to \mathbb{R}^n$ を

$$\varepsilon(h) = f(x+h) - f(x) - J_f(x)h$$

と定める．すると f は C^1 級より x で微分可能だから，$\varepsilon(h)/|h| \to 0 \ \ (h \to 0)$ である．また $R' > 0$ を十分小さく取れば，任意の $k \in B(0, R')$ に対し，$f^{-1}(y+k)$ が定義できて，かつ

$$|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)| < R$$

を満たすようにできる[5]．よって，$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$ は ε の定義域に属するので，$h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$ とおくと

$$\varepsilon(h) = f(x + f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)) - f(x) - J_f(x)(f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y))$$

となる．右辺の第 1 項は $f^{-1}(y) = x$ より $f(f^{-1}(y+k)) = y + k = f(x) + k$ であり，また $x \in U \subset B(p, r)$ より $J_f(x)$ は逆行列をもつから，それを左からかけて整理すると

$$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (J_f(x))^{-1}k = (J_f(x))^{-1}\varepsilon(h)$$

が得られる．さて，$f(x) + k = f(x+h),\ f^{-1}(y) + h = f^{-1}(y+k)$ と f, f^{-1} の連続性より，$h \to 0$ と $k \to 0$ は同値である．また $h \neq 0$ と $k \neq 0$ も同値である．よって $k \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{|(J_f(x))^{-1}\varepsilon(h)|}{|k|} &\leq \frac{|(J_f(x))^{-1}| \cdot |\varepsilon(h)|}{|f(x+h) - f(x)|} \quad (\because \text{補題 } 1) \\
&\leq |(J_f(x))^{-1}| \cdot \frac{|\varepsilon(h)|}{|h|} \cdot \frac{1}{\rho - \sqrt{n}K} \quad (\because (\bigstar))
\end{aligned}$$

である．ここで $k \to 0$ とすると，$h \to 0$ となるから，$\varepsilon(h)/|h| \to 0 \ \ (h \to 0)$ より最右辺は 0 に収束する．したがって

$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (J_f(x))^{-1}k}{|k|} = 0$$

4　具体的には $B(x, R) \subset U$ となるように取る．

5　なぜなら y は開集合 V の点で，かつ f^{-1} は y で連続であるため．

となるので，f^{-1} は y で微分可能で，$J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$ である．y は V の任意の点だったので，f^{-1} は V 上微分可能で

$$J_{f^{-1}}(y) = \left(J_f(f^{-1}(y))\right)^{-1} \quad (\forall y \in V)$$

となる．このことから $y \mapsto J_{f^{-1}}(y)$ は $y \mapsto f^{-1}(y)$ と $x \mapsto (J_f(x))^{-1}$ の合成となる．すると f^{-1} の連続性と f が C^1 級であることから，$y \mapsto J_{f^{-1}}(y)$ は連続写像の合成となるので，連続である．以上より，f^{-1} は C^1 級である．
これで，(2) $\Rightarrow$ (1) の $r = 1$ の場合が証明できた．一般の $1 \leq r \leq \infty$ について，f が W 上の C^r 級関数であるとする．このとき，$f|_U : U \to V$ が C^1 級微分同相であることはすでに示した．また，$y \in V$ における $f^{-1} = (f|_U)^{-1}$ のヤコビ行列 $J_{f^{-1}}(y)$ が $(J_f(f^{-1}(y)))^{-1}$ であることも示した．すると，f^{-1} が C^s 級 $(1 \leq s < r)$ と仮定するとき，$y \mapsto J_{f^{-1}}(y)$ は $y \mapsto f^{-1}(y)$ と $x \mapsto (J_f(x))^{-1}$ の合成である．これは仮定と f が C^r 級より，C^s 級と C^{r-1} 級の合成であるから，C^s 級である．よって f^{-1} は C^{s+1} 級になるので，帰納的に f^{-1} は C^r 級である．
(1) $\Rightarrow$ (2)：$f|_U$ が C^r 級微分同相より，任意の $x \in U,\ y = f(x)$ に対し

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

である．したがって

$$J_{f^{-1}}(y) J_f(x) = E_n, \quad J_f(x) J_{f^{-1}}(y) = E_n$$

となるので，$J_f(x)$ は逆行列 $J_{f^{-1}}(y)$ をもつ．よって特に $\det J_f(p) \neq 0$ である．　□

参考文献

[1]　杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会

[2]　松本幸夫「多様体の基礎」東京大学出版会

[3]　Loring W. Tu 著，枡田幹也・阿部拓・堀口達也 訳「トゥー多様体」裳華房