定義１. (右微分・左微分)

(1) 関数 $f : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ に対し，右側極限 $\displaystyle\lim_{h\to+0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき，f は a で右微分可能といい，その極限を $f'_+(a)$ とかく.

(2) 関数 $f : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ に対し，左側極限 $\displaystyle\lim_{h\to-0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$ が存在するとき，f は b で左微分可能といい，その極限を $f'_-(b)$ とかく.

命題２.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ とし，$t \in (a, b)$ とする．このとき，次は同値である.

(1) f は t で微分可能で，$f'(t) = c$ である.

(2) f は t で左右に微分可能で，$f'_+(t) = f'_-(t) = c$ である.

(証明)

$g(h) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ とおくと，極限の定義から

$$
\begin{aligned}
(1) &\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall h \in \mathbb{R})(0 < |h| < \delta \Rightarrow |g(h) - c| < \varepsilon) \\
&\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall h \in \mathbb{R}\backslash\{0\})(0 < |h| < \delta \Rightarrow |g(h) - c| < \varepsilon) \\
&\iff \begin{cases} (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall h > 0)(0 < |h| < \delta \Rightarrow |g(h) - c| < \varepsilon) \\ (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall h < 0)(0 < |h| < \delta \Rightarrow |g(h) - c| < \varepsilon) \end{cases} \\
&\iff (2)
\end{aligned}
$$

となる.　∎

定義３. (閉区間上の微分)
$f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ とする．f が有界閉区間 I で微分可能であるとは，f が開区間 (a, b) で微分可能，かつ a で右から，b で左から微分可能なことをいう.

命題４. (同値な定義)
関数 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ に対し，以下は同値である.

(1) f は I で微分可能である.

(2) I を含むある開区間 J で微分可能な関数 $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}^n$ が存在して $\tilde{f}|_I = f$ である.

(証明)

(2)⇒(1)：$I \subset J$ より，(2)から f は (a, b) で微分可能であり，かつ a, b で微分可能である．このとき命題２から，f は特に a で右から，b で左から微分可能である．よって f は I で微分可能である.

(1)⇒(2)：J を I を含むある開区間とし，$\tilde{f}: J \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a) + f'_+(a)(x-a) & (x < a) \\ f(x) & (a \le x \le b) \\ f(b) + f'_-(b)(x-b) & (x > b) \end{cases}$$

すると，$\tilde{f}|_I = f$ である．そして(1)より $a < x < b$ において $\tilde{f}$ は微分可能である．$x < a$ においては，絶対値が十分小さい h に対し

$$\frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h} = \frac{f'_+(a)h}{h} = f'_+(a)$$

が成り立つ．よって $h \to 0$ とすれば $\tilde{f}'(x) = f'_+(a)$ が得られるので微分可能である．$x < b$ においても同様に $\tilde{f}'(x) = f'_-(b)$ となるので微分可能である．また $x = a$ において

$$\lim_{h \to +0} \frac{\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f_+(a)$$
$$\lim_{h \to -0} \frac{\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{f'_+(a)h}{h} = f_+(a)$$

となるから，$\tilde{f}'_+(a) = \tilde{f}'_-(a)$ が成り立つ．ゆえに命題２から，$\tilde{f}$ は $x = a$ でも微分可能である．$x = b$ についても同様．したがって $\tilde{f}$ は J で微分可能である．　∎

(参考文献)
[1]　杉浦光夫「解析入門I」東京大学出版会