定義１. (絶対収束)

級数 $\sum a_n$ が絶対収束するとは，$\sum |a_n|$ が収束することである[1].

命題２.

・収束する数列の部分列の極限は元の数列の極限と一致する.

・絶対収束する級数は収束する.

・正項級数が収束することと，部分和の数列が上に有界であることは同値である.

(証明)

一つ目はボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理の命題２を，残りは正項級数の収束判定の命題５，命題８を参照.

定理３. (絶対収束する級数の積)

$\sum a_n$, $\sum b_n$ はともに絶対収束し，$\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ であるとする．このとき，数列を $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ で定めると，級数 $\sum c_n$ は絶対収束し，$\sum c_n = ab$ である.

(証明)

自然数 m に対し，$I(m), J(m)$ を次のように定義する(次ページの図１).

$$I(m) = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \,|\, 0 \leq p \leq m, 0 \leq q \leq m\}, \quad J(m) = \{(p, q) \in I(m) \,|\, 0 \leq p + q \leq m\}$$

すると，$J(m) \subset I(m) \subset J(2m) \subset I(2m)$ が成り立つ.

まず $\sum c_n$ が絶対収束することを示す．三角不等式より

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| = \sum_{n=0}^{m} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \right) = \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{p+q=n} |a_p||b_q| \right) = \sum_{(p,\,q)\in J(m)} |a_p||b_q|$$

となる．また，$J(m) \subset I(m)$ より

$$\sum_{(p,\,q)\in J(m)} |a_p||b_q| \leq \sum_{(p,\,q)\in I(m)} |a_p||b_q| = \sum_{n=0}^{m} |a_n| \sum_{n=0}^{m} |b_n|$$

である．この式の右辺は仮定より収束するので，特に上に有界である．よって２つの不等式を合わせると，正項級数 $\sum |c_n|$ は収束する．つまり $\sum c_n$ は絶対収束する.

ゆえに $\sum c_n$ は収束するから，$\sum c_n = c$ とおく．また，仮定より $\sum a_n$, $\sum b_n$ は収束するので，部分和の数列の部分列 $\left(\sum_{n=0}^{2m} a_n\right)$, $\left(\sum_{n=0}^{2m} b_n\right)$, $\left(\sum_{n=0}^{2m} c_n\right)$ はそれぞれ a, b, c に収束する．ここで，三角不等式と集合の包含関係から

[1] このノート内では，数列は複素数列($\mathbb{R}^2$ の点列)のこととする.

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{2m} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{2m} b_n\right) - \sum_{n=0}^{2m} c_n\right| = \left| \sum_{(p,\,q)\in I(2m)} a_p b_q - \sum_{(p,\,q)\in J(2m)} a_p b_q \right|$$
$$= \left| \sum_{(p,\,q)\in I(2m)\setminus J(2m)} a_p b_q \right|$$
$$\leq \sum_{(p,\,q)\in I(2m)\setminus J(2m)} |a_p||b_q|$$
$$\leq \sum_{(p,\,q)\in I(2m)\setminus I(m)} |a_p||b_q|$$
$$\leq \sum_{n=0}^{2m} |a_n| \sum_{n=0}^{2m} |b_n| - \sum_{n=0}^{m} |a_n| \sum_{n=0}^{m} |b_n|$$

である．仮定より $\sum a_n$, $\sum b_n$ は絶対収束するので，数列 $\left(\sum_{n=0}^{m} |a_n| \sum_{n=0}^{m} |b_n|\right)$ は収束する．したがって，収束する数列の部分列は元の極限に一致することから，上の不等式の最下段の式は 0 に収束する．以上より $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{2m} c_n = c = ab$ となる． ∎

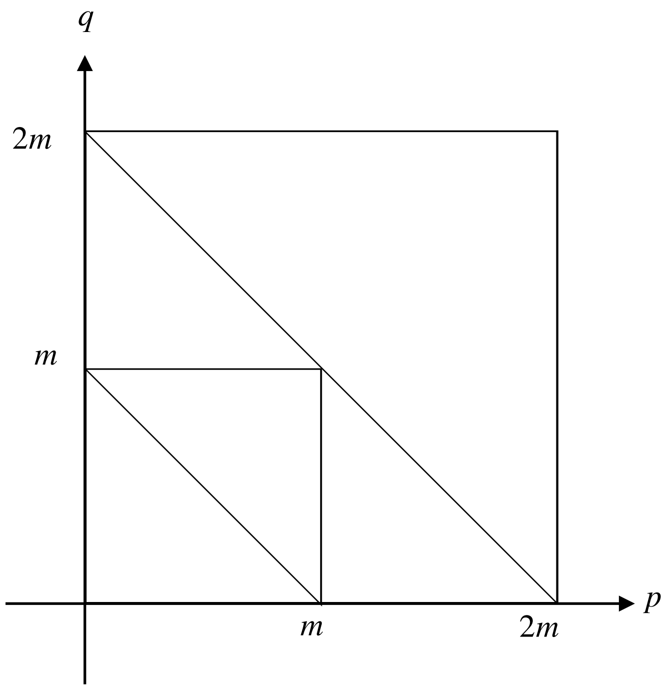

図 1

(参考文献)

[1]　杉浦光夫「解析入門I」東京大学出版会

[2]　川平友規「入門複素関数」裳華房