定義 1. (一様コーシー列)

$A \subset \mathbb{R}^d$ 上の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が以下の条件 (一様コーシー条件) を満たすとする：

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n, m > N$ ならば $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ が成り立つ[1].

このとき $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様コーシー列であるという.

定理 2. (一様コーシー $\iff$ 一様収束)

$A \subset \mathbb{R}^d$ 上の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，次の 2 つは同値である.

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上一様収束する.

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様コーシー列である.

(証明)

(1) ⇒ (2)：極限関数を f とする．$\varepsilon > 0$ を任意に与えると，一様収束性より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n > N$ ならば $\|f - f_n\| < \varepsilon/2$ が成り立つ．よって $n,\, m > N$ とすれば，$\|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \varepsilon$ を満たす.

(2) ⇒ (1)：任意の $x \in A$ に対して $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|$ が成り立つことから，一様コーシー条件より，$x \in A$ を任意に固定すると，実数列 $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列となる．よって $\mathbb{R}$ の完備性から，各 x について $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が存在する.

さて，$\varepsilon > 0$ を任意に与えると，一様コーシー条件よりある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n,\, m > N$ ならば，任意の $x \in A$ に対して

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ．このとき $n \to \infty$ とすると $|f_n(x) - f_m(x)| \to |f(x) - f_m(x)|$ より，$m > N$ ならば，任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$$

が成り立つ．よって ε は $\{|f(x) - f_m(x)| : x \in A\}$ の上界だから

$$\|f - f_m\| = \sup_{x\in A} |f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$$

[1] $\|\cdot\|$ は一様ノルム，すなわち $\|f\| := \sup_{x\in A} |f(x)|$ 　($f : A \to \mathbb{R}$ は有界関数) である.

となるので，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束する． $\square$

定理 3. (ワイエルシュトラスの M 判定法)
$A \subset \mathbb{R}^d$ 上の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|f_n\| \leq M_n$ である．

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束する．

を満たす正数列 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在すれば[2]，関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は A 上一様収束する．
(証明)
$s_m = \sum_{n=0}^{m} f_n$, $t_m = \sum_{n=0}^{m} M_n$ とおくと，$p > q$ のとき

$$\|s_p - s_q\| = \left\| \sum_{n=q+1}^{p} f_n \right\| \leq \sum_{n=q+1}^{p} \|f_n\|$$

が成り立つ．ここで (a) より $\sum_{n=q+1}^{p} \|f_n\| \leq \sum_{n=q+1}^{p} M_n = |t_p - t_q|$ であり，(b) より $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は収束するのでコーシー列である．したがって $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は一様コーシー列となるから，定理 2 より，A 上一様収束する． $\square$

注意 4.
定理 3 の条件 (a) は，任意の $x \in A$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(x)| \leq M_n$ である，という条件と同値である．よって (b) と比較判定法より，各 $x \in A$ について $\sum f_n(x)$ は絶対収束する．

参考文献

[1] 杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会

[2] 笠原皓司「微分積分学」サイエンス社

2 級数 $\sum M_n$ を $\sum f_n$ の優級数という．