CHƯƠNG I:CƠ SỞ LOGIC

I Khái niệm

1 Các khái niệm

- Mệnh đề toán học là các phát biểu để diễn đạt một ý tưởng trọn vẹn và ta có thể khẳng định một cách khách quan là nó đúng hoặc sai.
- Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh… không là mệnh đề.
- Tính chất cốt yếu của một mệnh đề là nó đúng hoặc sai, và không thể vừa đúng vừa sai. Giá trị đúng hoặc sai của một mệnh đề được gọi là chân trị của mệnh đề.

Chân trị của mệnh đề: Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng, ngược lại ta nói P có chân trị sai.

VD:
- 1+1=2(là mệnh đề)
- Hôm nay là thứ mấy? (Không phải là mệnh đề)
- **Ký hiệu**: người ta dùng các ký hiệu P, Q, R… để chỉ mệnh đề và chúng cũng được dùng để ký hiệu cho các biến logic, tức là các biến lấy giá trị đúng hoặc sai. Chân trị "đúng" thường được viết là 1, và chân trị "sai" được viết là 0.

2. Mệnh đề sơ cấp – mệnh đề phức hợp

Phân loại: gồm 2 loại
- Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hay, khi và chỉ khi,…) hoặc trạng từ "không"
- Mệnh đề sơ cấp (nguyên thủy): Là mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ "không"

II Định nghĩa/Tính chất

1 Phép phủ định

- Cho p là một mệnh đề, chúng ta dùng ký hiệu ¬p hay $\overline{p}$ để chỉ mệnh đề phủ định của mệnh đề p. “Sự phủ định” được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

P	¬P
1	0
0	1

- Ký hiệu ¬ được đọc là “không”
- Mệnh đề phủ định ¬ p có chân trị là đúng (1) khi mệnh đề p có chân trị sai (0), ngược lại ¬ p có chân trị sai (0) khi p có chân trị đúng (1).

VD:
- 2 là số nguyên tố

Phủ định: 2 không phải là số nguyên tố
- 5 <15

Phủ định: 5>=15

2 Phép hội(nối liền,giao)

- Cho p và q là hai mệnh đề. Ta ký hiệu mệnh đề “p hay q” là p Λ q. Phép “và”, ký hiệu là Λ ,là mệnh đề xác định bởi: p Λ q đúng khi và chỉ khi p và q đồng thời đúng được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p Λ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VD:
P:Hôm nay là chủ nhật
Q:Hôm nay trời mưa
P Λ Q: Hôm nay là chủ nhật và trời mưa

3. Phép tuyển(nối rời, hợp)

- Cho p và q là hai mệnh đề.Ta ký hiệu mệnh đề “p hay q” là p$\vee$q.Phép “hay” ký hiệu là $\vee$,là mệnh đề xác định bởi: p$\vee$q sai khi và chỉ khi p và q đồng thời sai được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p$\vee$q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

VD:
P: Hoa đang xem tivi
Q: Hoa đang đọc sách
P$\vee$Q: “Hoa đang xem tivi hoặc đang đọc sách”.
Nhận xét:
- Cho p là một mệnh đề, ta có mệnh đề p $\vee\bar{p}$ luôn luôn đúng
- Người ta còn sử dụng phép “tuyển loại” trong việc liên kết các mệnh đề.
Cho p và q là hai mệnh đề.Ta ký hiệu mệnh đề “p tuyển loại q” là p$\oplus$q.Phép “tuyển loại”, ký hiệu $\oplus$, được định nghĩa bởi bằng chân trị sau đây

p	q	p$\vee$q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Chân trị của mệnh đề p$\oplus$q phụ thuộc vào các chân trị của 2 mệnh đề p,q: mệnh đề p$\oplus$q đúng khi trong 2 mệnh đề p và q có một mệnh đề đúng, một mệnh đề sai,

4. Phép kéo theo

- Phép kéo theo, ký hiệu bởi →, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện có dạng: “**Nếu…thì…**”.Cho p và q là 2 mệnh đề, ta sẽ viết p→ q để diễn đạt phát biểu ”nếu p thì q” hay “p là điều kiện đủ của q” hay “q là điều kiện càn của p”, là mệnh đề xác định bởi: p→ q sai khi và chỉ khi p đúng mà q sai. Phép toán kéo theo → được định nghĩa bởi bảng chân trị sau đây:

p	q	p→ q
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

VD:

- e>4 kéo theo 5>6
- Nếu hôm nay trời nắng thì chúng tôi sẽ đi học.

5. Phép kéo theo hai chiều

- Phép kéo theo 2 chiều hay phép tương đương, ký hiệu bởi ↔, được đưa ra để mô hình cho loại phát biểu điều kiện hai chiều có dạng: "**…nếu và chỉ nếu…**". Cho p và q là 2 mệnh đề , ta viết p ↔ q để diễn đạt phát biểu "p nếu và chỉ nếu q" hay "p khi và chỉ khi q" hay "p là điều kiện cần và đủ của q", là mệnh đề xác định bởi: p ↔ q đúng khi và chỉ khi p và q có cùng chân trị. Phép toán tương đương ↔ được xác định bởi bảng chân trị sau đây:

p	*q*	p↔ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

III Độ Ưu Tiên

Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được xây dựng từ một số mệnh đề ban đầu và liên kết chúng lại bằng các phép toán logic.
Mệnh đề sơ cấp: không được xây dựng từ các mệnh đề khác qua các phép toán logic.

1.Độ ưu tiên của các toán tử logic

- Tương tự như đối với các phép toán số học, để tránh phải dùng nhiều dấu ngoặc trong các biểu thức logic, ta đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán. Ở trên ta có 5 toán tử logic: ¬ (không), Λ (và), ∨ (hay), → (kéo theo),↔ (tương đương)
¬
Λ , ∨
→ ,↔
Trong đó, các toán tử liệt kê trên cùng dòng có cùng độ ưu tiên
Bảng chân trị của dạng mệnh đề E(p,q,r): là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r. Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2dòng, chưa kể dòng tiêu đề.
VD:

$E(p,q,r)=(p \vee q) \rightarrow r$. Ta có bảng chân trị sau:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

2. Tương đương logic

Hai dạng mệnh đề E và F được gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Ký hiệu E <=> F. (hay $E \equiv F$)

Ví dụ:

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Dạng mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn lấy giá trị 1

Dạng mệnh đề gọi là hằng sai (hay mâu thuẩn) nếu nó luôn lấy giá trị 0.

VD:

Xét công thức $P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Định lý: Hai dạng mệnh đề E và F tương đương với nhau khi và chỉ khi E F là hằng đúng.

Hệ quả logic: F được gọi là hệ quả logic của E nếu $E \rightarrow F$ là hằng đúng.

Ký hiệu $E \equiv F$ hoặc $E = F$

3. Các luật logic

1. Phủ định của phủ định:

$\neg\neg p = p$

2. Qui tắc De Morgan:

$\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

3. Luật giao hoán:
$p \lor q = q \lor p$
$p \land q = q \land p$
4. Luật kết hợp:
$(p \lor q) \lor r = p \lor (q \lor r)$
$(p \land q) \land r = p \land (q \land r)$
5. Luật phân phối:
$p \lor (q \land r) = (p \lor q) \land (p \lor r)$
$p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$
6. Luật lũy đẳng:
$p \land p = p$
$p \lor p = p$
7. Luật trung hòa:
$p \lor 0 = p$
$p \land 1 = p$
8. Luật về phần tử bù:
$p \land \neg p = 0$
$p \lor \neg p = 1$
9. Luật thống trị:
$p \land 0 = 0$
$p \lor 1 = 1$
10. Luật hấp thu:
$p \lor (p \land q) = p$
$p \land (p \lor q) = p$
11. Luật về phép kéo theo:
$p \rightarrow q = \neg p \lor q$
$= \neg q \rightarrow \neg p$
12. Luật chứng minh phản chứng:
$\neg (p \rightarrow q) = p \land \neg q$

IV Suy luận

- Suy luận là rút ra mệnh đề mới từ mệnh đề đã có. Mệnh đề đã có được gọi là giả thiết hay tiền đề, mệnh đề mới được gọi là kết luận

Ví dụ: An đang đi xe máy, bỗng nhiên xe đứng máy, An kiểm tra bình xăng thấy xăng vẫn còn nhiều. An nghĩ xe đứng máy do một bộ phận nào đó của xe bị trục trặc.
-> Xe hết xăng hoặc một bộ phận của xe bị hỏng
Nhưng xe vẫn còn xăng
Vây: Một bộ phận của xe bị hỏng

- Trong toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ gọi là giả thiết, các quy tắc suy diễn được áp dụng để suy ra chân lý của một khẳng định Q là hệ quả logic của $P_1 \land P_2 \land P_3 \ldots \land P_n$
Hay
$P_1 \land P_2 \land P_3 \ldots \land P_n \rightarrow Q$ là một hằng đúng
- Phép suy diễn được mô hình hóa như sau:

Giả thiết P1,P2,P3,…,Pn được viết trên gạch ngang dưới dấu gạch ngang viết kết luận Q
Ký hiệu ∴ thay cho vậy thì trong lập luận

$$\frac{\begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ \dots \\ Pn \end{array}}{\therefore\ Q}$$

1. Qui tắc khẳng định (Modus Ponens):

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore q}$$

$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{\therefore q}$$

VD:
P:Hoạc tốt thi đậu
Q: Sơn học tốt
Suy ra Sơn thi đậu

2. Qui tắc phủ định(Modus Tollens):

$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$$

VD:
- Nếu Hoa chăm học thì Hoa đạt môn toán rời rạc
- Hùng không đạt môn toán rời rạc

3. Qui tắc tam đoạn luận:

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{\therefore p \rightarrow r}$$

VD:
- Nếu trời mưa thì đường ướt
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra nếu trời mưa thì đường trơn

4. Qui tắc mâu thuẫn

$(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge \neg q)] \rightarrow 0$

=> Nếu thêm $\neg$ q vào P cho trước mà dẫn tới mâu thuẫn thì Q là hệ quả logic của P

5. Qui tắc phản chứng:

$[(p \wedge p \wedge ... \wedge p) \rightarrow q] \Leftrightarrow [(p \wedge p \wedge ... \wedge p \wedge \neg q) \rightarrow 0]$

Chứng minh

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \end{array}}{\therefore \neg r \rightarrow s}$$

Giải: CM bằng phản chứng

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ \neg r \\ \neg s \end{array}}{\therefore 0}$$

6. Qui tắc chứng minh theo trường hợp

$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$

7. Phản ví dụ

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay không là một hằng đúng. Ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ

V Các dạng bài tập

1.
Gọi P, Q là các mệnh đề:
P: "Hùng thích bóng đá"
Q: "Hùng ghét nấu ăn"
Viết lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức, sử dụng các phép nối
1. Hùng không thích bóng đá lẫn nấu ăn
2. Hùng thích bóng đá nhưng ghét nấu ăn
3. Hùng thích bóng đá hay Hùng vừa thích nấu ăn vừa ghét bóng đá
4.Hùng thích bóng đá và nấu ăn hay Hùng ghét bóng đá nhưng thích nấu ăn
Giải

1. 1. $\neg P \wedge \neg Q$
2. 2. $P \wedge \neg Q$
3. 3. $P \vee (Q \wedge \neg P)$
4. (4. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

2. Đặt X là mệnh đề: "Minh giỏi toán"; Y là mệnh đề: "Minh yếu anh văn". Hãy viết lại các mệnh đề đề phức hợp sau dưới dạng công thức trong logic mệnh đề:
a. "Minh giỏi toán nhưng yếu anh văn;
b. "Minh yếu cả toán lẫn văn";
c. "Minh giỏi toán hay Minh vừa giỏi anh văn vừa yếu toán";
d. "Nếu Minh giỏi toán thì Minh giỏi anh văn";
Giải

a. a. $X \wedge Y$;

b. $\neg X$ b. $\neg X \wedge Y \wedge Y$;

c. $X \vee ($ c. $X \vee (\neg Y \wedge \neg X) \neg Y \wedge \neg X)$;

d. $X \rightarrow$ d. $X \rightarrow \neg Y$

3. Cho biết các suy luận nào trong các suy luận dưới đây là đúng, và quy tắc suy diễn nào được sử dụng:

- Nếu Hùng thi đỗ đại học thì Hùng được thưởng một xe máy : Đúng (Qui tắc phủ định)
- Nếu được thưởng xe máy Hùng sẽ đi Vũng Tàu : Đúng (Qui tắc phủ định)
- Do đó nếu thi đỗ đại học thì Hùng sẽ đi Vũng Tàu: Đúng(Qui tắc tam đoạn luận)

4. Chứng minh biểu thức mệnh đề Chứng minh biểu thức mệnh đề $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg q$ tương đương với biểu thức $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q))$

Giải

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg q$$
$$\equiv (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \wedge \neg q$$
$$\equiv \neg p \wedge \neg q \quad (1)$$
$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q)) \equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg q$$
$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)$$
$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F \equiv \neg p \wedge \neg q \quad (2)$$

(1) & (2) => $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg q$ tương đương $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q))$

5. Chứng minh biểu thức mệnh đề sau là hằng sai :

$$\neg p \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg r) \wedge (((\neg q \rightarrow r) \vee \neg(q \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))) \wedge p)$$

Giải

$$\neg p \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg r) \equiv \neg(p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r))$$
$$\equiv \neg p$$
$$((\neg q \rightarrow r) \vee \neg(q \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))) \wedge p$$
$$\equiv ((q \vee r) \vee \neg(q \vee (r \wedge (s \vee \neg s)))) \wedge p$$
$$\equiv ((q \vee r) \vee \neg(q \vee r)) \wedge p$$
$$\equiv p$$
$$\neg(p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (p \wedge ((\neg q \rightarrow r) \vee \neg(q \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)))) \equiv \neg p \wedge p \equiv F$$

VI Vị từ - Lượng từ

Định nghĩa:

Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,.. cho trước sao cho:

-Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề

-Nếu thay x,y,.. thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

VD:

-p(n) = "n +1 là số nguyên tố"

- q(x,y) = "x + y = 1"

Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề:

Phủ định: $\neg p(x)$

Phép nối liền (hội, giao): $p(x) \wedge q(x)$

Phép nối rời (tuyển, hợp): $p(x) \vee q(x)$

Phép kéo theo: $p(x) \rightarrow q(x)$

Phép kéo theo hai chiều: $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) được định nghĩa như sau:

-Mệnh đề "Với mọi x thuộc A, p(x) ", kí hiệu: "$\forall x \in A, p(x)$" là mđ đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$. $\forall$ đgl lượng từ phổ dụng

-Mệnh đề "Tồn tại (có ít nhất một) x thuộc A, p(x)" kí hiệu "$\exists x \in A, p(x)$" là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x= a'$\in$ A nào đó sao cho mệnh đề p(a') đúng. $\exists$ đgl lượng từ tồn tại.

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên A×B. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Ví dụ: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- "$\forall x \in R, \forall y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\forall x \in R, \exists y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\exists x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$"
- "$\exists x \in R, \exists y \in R, x + 2y < 1$"

Định lý

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên A×B. Khi đó:

- "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng cách: thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$, và p(x,y,..) thành $\neg$ p(x,y,..).