CHƯƠNG II:ĐẠI SỐ BOOLE

I Khái niệm đại số Boole

Định nghĩa: Đại số Boole đưa ra các phép toán và quy tắc làm việc với tập {0,1}. Trong các mạch điện của máy tính, các dụng cụ điện tử và quang học được nghiên cứu bằng cách dùng tập này và các quy tắc của đại số Boole

Các phép toán thường dùng trong đại số Boole

- Phần bù của một phần tử
  $\overline{0}$ = 1 và $\overline{1}$ = 0
- Phép lấy tổng Bool (Ký hiệu + hoặc OR)
  1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0
- Phép lấy tích Bool (Kí hiệu . hoặc AND)
  1.1=1, 1.0=0, 0.1=0, 0.0=0

Thứ tự thực hiện các pháp toán Boole
- Lấy phần bù
- Phép lấy tích
- Phép lấy tổng

Ví dụ: Tìm giá trị của phép tính sau
$(1.0) + \overline{(0+1)}$

II Định nghĩa/Tính chất

Định nghĩa: Hàm Boole thường được biểu diễn bằng cách dùng các biểu thức được tạo bởi các biến và các phép toán Boole
Cho B = {0,1}. Một ánh xạ
f: $B^n \to B$
$(x_1, x_2, ..., x_n) \to f(x_1, x_2, ..., x_n)$
Gọi là **hàm Boole** bậc n theo n biến $x_1, x_2, ..., x_n$

Ví dụ: Hàm Boole 2 biến f(x,y) với giá trị bằng 1 khi x=1, y=0 và bằng 0 với mọi khả năng còn lại của x và y có thể được cho trong bảng sau

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Ví dụ: Cử tri A_1, A_2, A_3,tham gia bỏ phiếu trong cuộc bầu cử có ứng cử viên D. Các biến Boole tương ứng là x_1, x_2, x_3

Với $x_j = \begin{cases} 1 \text{ nếu } A_j \text{ bầu phiếu cho } D \\ 0 \text{ nếu } A_j \text{ không bầu phiếu cho } D \end{cases}$

(1≤ j ≥ 3)

x_1	x_2	x_3	F(x_1, x_2, x_3)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Các hằng đẳng thức đại số Boole

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$\overline{\overline{x}} = x$	luật phần bù kép
$x + x = x$ $x.x = x$	luật luỹ đẳng
$x + 0 = x$ $x.1 = x$	luật đồng nhất
$x + 1 = 1$ $x.0 = 0$	luật nuốt
$x + y = y + x$ $xy = yx$	luật giao hoán
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	luật kết hợp
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	luật phân phối
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x}.\overline{y}$	luật De Morgan

Tính đối ngẫu đại số Boole

Định nghĩa: Đối ngẫu của một biểu thức Boole là một biểu thức Boole nhận được bằng cách các tổng và tích Boole đổi chỗ cho nhau, các số
0 và 1 đổi chỗ cho nhau.
Ví dụ:
Đối ngẫu của (x.$\bar{y}$)+z là (x+$\bar{y}$).z
Đối ngẫu của $\bar{x}.1 + (\bar{y}$ +z) là ($\bar{x}$+0)($\bar{y}$.z)

Nguyên lý đối ngẫu

Định nghĩa: Một hằng đẳng thức giữa các hàm được biểu diễn bởi các biểu thức Boole vẫn còn đúng nếu ta lấy đối ngẫu 2 vế của nó
Ví dụ: Lấy đối ngẫu 2 vế của hằng đẳng thức

x(x+y) = x

ta được x+ xy = x

III Khai triển hàm Boole

2 vấn đề trong đại số Boole:
- Cho các giá trị của một hàm Boole n biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Làm thế nào để tìm được biểu thức Boole biểu diễn hàm đó?
- Có biểu thức nào đơn giản hơn để biểu diễn cùng một hàm Boole hay không?

Khai triển tổng các tích

Khái niệm:
- Đơn tử: Là một biến Boole hoặc phần bù của nó
- Tiểu hạng: Là tích các đơn tử
- Tổng các tiểu hạng biểu diễn hàm Boole được gọi là *khai triển tổng các tích* hay *dạng tuyển chuẩn tắc* hàm Boole

VD:

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\bar{y}z$$
$$\boldsymbol{G}(x, y, z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

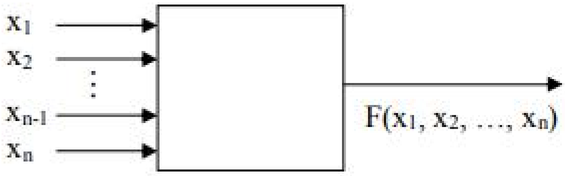
Tìm dạng chuẩn tắc đầy đủ hàm Boole

$$f(x,y,z) = x.y.\bar{z} + \bar{y}.z$$
$$= x.y.\bar{z} + \bar{y}.z(z+\bar{x})$$
$$= x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.z$$

Bài tập: f(x,y,z)=xy + xz + $\bar{y}$.z

IV Mạch Logic

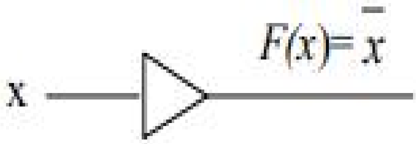
Một máy tính cũng như một dụng cụ điện tử được tạo bởi nhiều mạch, mỗi một mạch có thể được thiết kế bằng cách dùng các phép toán của đại số Boole. Các mạch logic được tạo thành từ các mạch cơ sở, gọi là cổng logic.



Cổng NOT

Cổng NOT thực hiện hàm phủ định, chỉ có 1 đầu vào, đầu ra F(x) là phủ định của đầu vào x

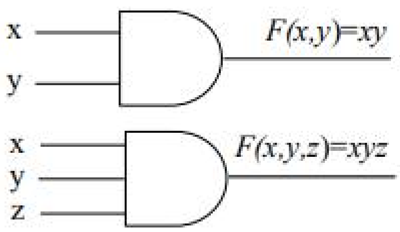
$$F(x) = \bar{x} = \begin{cases} 0 \; khi = 1, \\ 1 \; khi \; x = 0. \end{cases}$$



Cổng AND

Cổng AND thực hiện hàm hội, đầu ra F(x,y) là tích (hội) các đầu vào

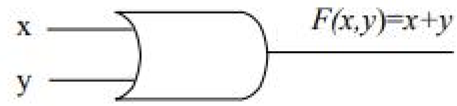
$$F(x,y) = xy = \begin{cases} 1 \; khi \; x = y = 1, \\ 0 \;\; trong \; các \; trường \; hợp \; khác. \end{cases}$$

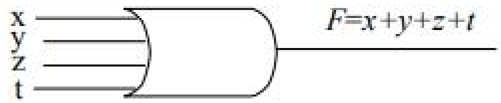


Cổng OR

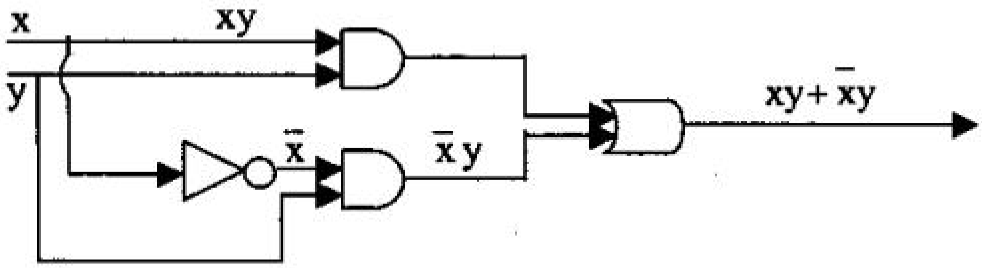
Cổng OR thực hiện hàm tuyển, đầu ra F(x,y) là tổng (tuyển) các đầu vào

$$F(x,y)=x+y=\begin{cases}1\ khi\ x=1\ hay\ y=1,\\ 0\ khi\ x=y=0.\end{cases}$$





Thiết kế mạch tổ hợp có đầu ra là biểu thức xy+$\bar{x}y$



Thiết kế mạch tổ hợp có đầu ra là biểu thức

f(x,y,z)=xyz + xy$\bar{z}$ + $\overline{xy}$z

V Tối thiểu hóa hàm Boole

Tối thiểu hóa hàm Boole là tìm dạng biểu thức Boole đơn giản nhất của hàm Boole đó

- Phương pháp biển đổi đại số
- Phương pháp bảng Karnaugh

1.Phương pháp biến đổi đại số

Phương pháp này dựa các luật, hay các hằng đẳng thức của đại số Boole để tối thiểu hóa các biến và các phép toán trên biểu thức Boole

Ví dụ: Tối thiểu hóa hàm Boole

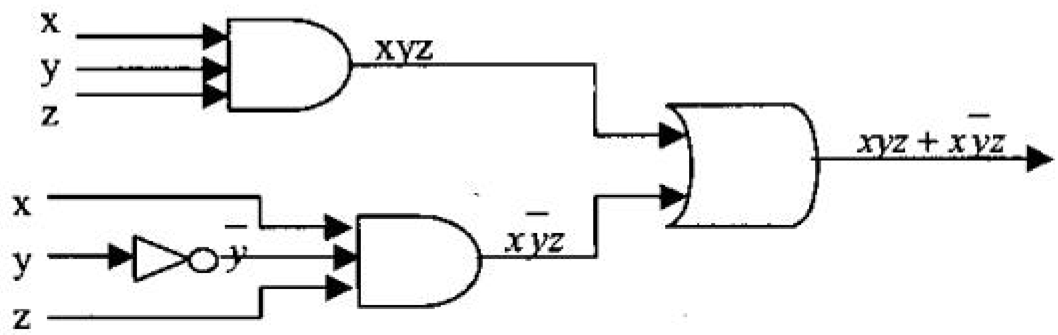
f(x,y,z)= xyz + x$\bar{y}z$

Thiết kế mạch tổ hợp của f(x,y,z) và mạch tổ chợp tối thiểu của nó.

f(x,y,z)= xyz + x$\bar{y}z$

= (y+$\bar{y}$)xz

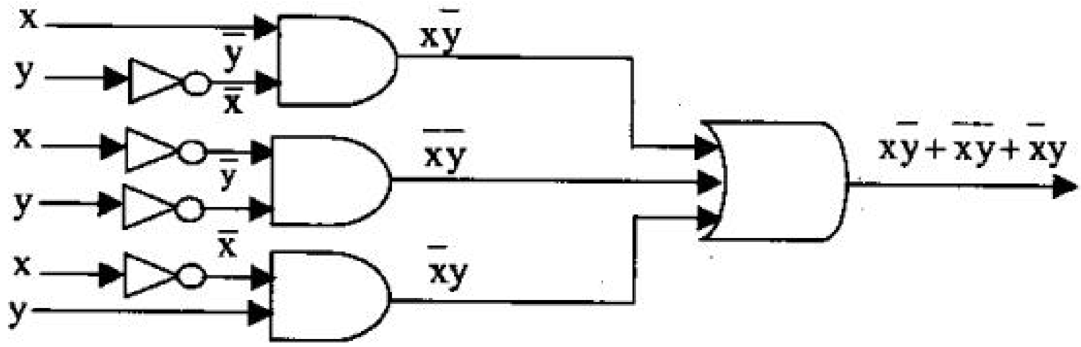
= 1.xz = xz



Ví dụ: Tối thiểu hóa hàm Boole

f(x,y,z)= x$\bar{y}$+ $\overline{xy}$ +$\bar{x}$y

Thiết kế mạch tổ hợp của f(x,y,z) và mạch tổ chợp tối thiểu của nó.



2.Phương pháp bảng Karnaugh

- Do Karnaugh đề xuất năm 1953, được dùng để tìm các số hạng có thể tổ hợp được của hàm Boole.
- Có bốn hội sơ cấp khác nhau trong khai triển tổng các tích của một hàm Boole có hai biến x và y. Một bản đồ Karnaugh đối với một
hàm Boole hai biến này gồm bốn ô vuông, trong đó hình vuông biểu diễn hội sơ cấp có mặt trong khai triển được ghi số 1. Các hình ô được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

VD: xy + $\bar{x}$y

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

Dạng tối thiểu hóa

F(x,y) = y

VD: x$\overline{y}$ + $\overline{x}$y+$\overline{xy}$

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

Bảng Karnaugh ba biến là một hình chữ nhật được chia thành 8 ô

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

- Các khối 2 ô kề nhau có thể được tổ hợp lại thành tích của 2 biến
- Các khối 4 ô kề nhau có thể tổ hợp lại thành một biến duy nhất
- Khối các 8 ô biểu diễn một tích không có biến nào

VD: xy$\overline{z}$ +x$\overline{yz}$+$\overline{x}$yz+$\overline{xyz}$ = x$\overline{z}$ +$\overline{yz}$ + $\overline{x}$yz

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

VI Các dạng bài tập

Bài 1:Tìm đối ngẫu các biểu thức sau

- x.y.z + $\overline{x.y.z}$

- x.$\overline{z}$ + x.0 + $\overline{x}.1$

Bài 2: Khai triển tổng các tích (tìm dạng chuẩn tắc đầy đủ) các hàm Boole sau

f(x,y,z)= xy$\overline{z}$+ $\overline{y}z$

f(x,y,z)= xy+ xz+$\overline{y}$z

f(x,y,z)= xyt+ xz yzt

Bài 3: Dùng phương pháp Karnaugh, tối thiểu hóa các hàm Boole sau, vẽ mạch Logic trước và sau khi tối thiểu

a) $F = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$.

b) $F = xyz + xy\bar{z} + + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$.

c) $F = xy\bar{z} + + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$.

d) $F = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Bài 4: Tìm đầu ra các mạch tổ hợp sau