VI Vị từ - Lượng từ

Định nghĩa:

Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,.. cho trước sao cho:

-Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề

-Nếu thay x,y,.. thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

VD:

-p(n) = "n +1 là số nguyên tố"

- q(x,y) = "x + y = 1"

Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến x∈A. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề:

Phủ định: $\neg p(x)$

Phép nối liền (hội, giao): $p(x) \wedge q(x)$

Phép nối rời (tuyển, hợp): $p(x) \vee q(x)$

Phép kéo theo: $p(x) \rightarrow q(x)$

Phép kéo theo hai chiều: $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) được định nghĩa như sau:

-Mệnh đề "Với mọi x thuộc A, p(x) ", kí hiệu: "$\forall x \in A, p(x)$" là mđ đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$. ∀ đgl lượng từ phổ dụng

-Mệnh đề "Tồn tại (có ít nhất một) x thuộc A, p(x)" kí hiệu "$\exists x \in A, p(x)$" là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x= a'∈ A nào đó sao cho mệnh đề p(a') đúng. ∃ đgl lượng từ tồn tại.

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Ví dụ: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- "$\forall x \in R, \forall y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\forall x \in R, \exists y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\exists x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$"
- "$\exists x \in R, \exists y \in R, x + 2y < 1$"

Định lý

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

- "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ⇔ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" ⇔ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ⇒ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng cách: thay ∀ thành ∃, thay ∃ thành ∀, và p(x,y,..) thành ¬ p(x,y,..).