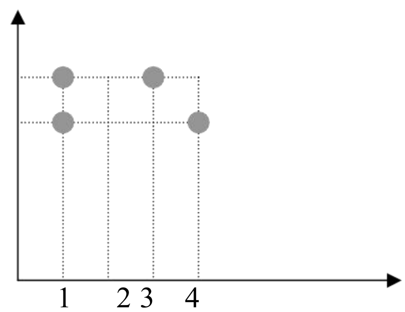
Chương 3. Quan hệ

3.1 Quan hệ

Định nghĩa. Một quan hệ giữa tập hợp A và tập hợp B là một tập con $\Re$ của $A \times B$. Nếu $(a, b) \in \Re$, ta viết $a\Re b$. Đặc biệt, một quan hệ giữa A và A được gọi là một quan hệ hai ngôi trên A.

Ví dụ.

1. A = {1, 2, 3, 4}, B = {4, 5}, $\Re$ ={(1,4),(1,5),(3,5)(4,4)} là một quan hệ giữa A và B. Quan hệ $\Re$ có thể được biểu diễn bởi sơ đồ sau:



2. Quan hệ "=" trên một tập hợp A bất kỳ: $a\Re b \Leftrightarrow a = b$
3. Quan hệ " $\leq$ " trên **N**, **Z** hay **R**: $a\Re b \Leftrightarrow a \leq b$
4. Quan hệ đồng dư trên **Z**: $a\Re b \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod}\,7)$

Các tính chất của quan hệ:

Định nghĩa. Cho $\Re$ là quan hệ hai ngôi trên tập hợp A. Ta nói:

i. $\Re$ có tính phản xạ nếu $\forall x \in A, x\Re x$
ii. $\Re$ có tính đối xứng nếu $\forall x, y \in A, x\Re y \Rightarrow y\Re x$
iii. $\Re$ có tính phản xứng nếu $\forall x, y \in A, x\Re y \wedge y\Re x \Rightarrow x = y$
iv. $\Re$ có tính bắc cầu nếu $\forall x, y, z \in A, x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z$

Nhận xét.

1. Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập A có tính chất phản xạ nếu mọi phần tử của A đều quan hệ với chính nó. Trong trường hợp này, nếu ta biểu diễn quan hệ $\Re$ trên hệ trục thì nó sẽ chứa các điểm nằm trên đường chéo chính.
2. Nếu $\Re$ có tính chất đối xứng thì khi biểu diễn nó trên đồ thị, ta sẽ thấy các điểm được xác định sẽ đối xứng qua đường chéo chính.

3. Hai tính chất đối xứng và phản xứng không phải là ngược nhau. Một quan hệ không có tính chất đối xứng không có nghĩa là nó có tính chất phản xứng và ngược lại. Sẽ có những quan hệ vừa đối xứng vừa phản xứng và cũng sẽ có những quan hệ không đối xứng và cũng không phản xứng.
   Ví dụ. Xét A = {1,2,3,4}, và $\Re$ ={(1,1),(3,3),(4,4)}, khi đó $\Re$ là quan hệ vừa đối xứng vừa phản xứng. Còn nếu xét $\Re$ ' = {(1,2),(2,1),(3,2)} thì $\Re$ ' không đối xứng (vì $(3, 2) \in \Re$ nhưng $(2,3) \notin \Re$) cũng không phản xứng (vì $(1, 2) \in \Re'$ và $(2,1) \in \Re'$ nhưng $1 \neq 2$).

Ví dụ. Xét quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập **Z** được định nghĩa như sau:

$$\forall a, b \in Z, a\Re b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

Chứng minh rằng $\Re$ có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Giải.

- $\Re$ ***phản xạ***. $\forall a \in Z$, ta có $a^2 = a^2$, do đó, theo định nghĩa, ta có $a\Re a$ hay $\Re$ có tính phản xạ
- $\Re$ **đối xứng**. Xét a, b bất kỳ thuộc **Z**, giả sử $a\Re b$, ta sẽ chứng minh $b\Re a$.
  Thật vậy: $a\Re b \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 \Leftrightarrow b\Re a$, suy ra $\Re$ có tính đối xứng.
- $\Re$ **bắc cầu**. Xét a, b, c bất kỳ thuộc **Z**, giả sử $a\Re b$ và $b\Re c$ ta sẽ chứng minh $a\Re c$. Thật vậy: $a\Re b \wedge b\Re c \Leftrightarrow a^2 = b^2 \wedge b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow a\Re c$, suy ra $\Re$ có tính bắc cầu.

3.2 Quan hệ tương đương

Định nghĩa. Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp A được gọi là quan hệ tương đương nếu nó có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ.

1. Quan hệ $\Re$ như đã định nghĩa trong phần trước, $\forall a,b \in Z, a\Re b \Leftrightarrow a^2 = b^2$, chính là một quan hệ tương đương.
2. Cho trước một ánh xạ $f : A \to B$, ta định nghĩa quan hệ $\Re$ trên A như sau:
   $\forall x, y \in A, x\Re y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
   khi đó, ta có thể kiểm chứng được đây là một quan hệ tương đương.
3. Cho trước một số tự nhiên n. Xét quan hệ $\Re$ trên **Z** được định nghĩa như sau:
   $$\forall a, b \in Z, a\Re b \Leftrightarrow a = b(\text{mod } n)$$
   Đây cũng là một quan hệ tương đương trên **Z**.

Định nghĩa. Cho $\Re$ là một quan hệ tương đương trên A và $x \in A$. Khi ấy lớp tương đương chứa x, ký hiệu là $\bar{x}$ hay [x], là tập hợp con của A sau đây:

$$\bar{x} = \{y \in A | y\Re x\}$$

Ví dụ. Xét A = {1,2,3,..10}. Xét quan hệ $\Re$ trên A: $a\Re b \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod } 3)$. Đây là một quan hệ tương đương trên A. Và ta có:

- Lớp tương đương chứa 1: $\bar{1} = \{1,4,7,10\}$

- Lớp tương đương chứa 5: $\overline{5} = \{2, 5, 8\}$
- Để ý rằng: $\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \overline{10}$, $\overline{2} = \overline{5} = \overline{8}$ và $\overline{3} = \overline{6} = \overline{9}$

Định lý. Cho $\Re$ là một quan hệ tương đương trên tập hợp A. Khi ấy:

i. $\forall x \in A, x \in \overline{x}$

ii. $\forall x, y \in A, x \Re y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$

iii. Hai lớp tương đương $\overline{x}$ và $\overline{y}$ sao cho $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ thì trùng nhau.

Chứng minh.

i. Do $\Re$ có tính chất phản xạ nên ta có $\forall x \in A, x \Re x$. Theo định nghĩa của lớp tương đương, ta suy ra $x \in \overline{x}$.

ii. Xét x và y là hai phần tử bất kỳ của A. Giả sử $x \Re y$, ta sẽ chứng minh $\overline{x} = \overline{y}$. Xét z là một phần tử bất kỳ trong $\overline{x}$. Từ định nghĩa của lớp tương đương, ta suy ra $z \Re x$. Mặt khác, do $\Re$ có tính chất bắc cầu nên kết hợp với giả thiết ban đầu là $x \Re y$, ta suy ra $z \Re y$. Điều này cũng có nghĩa là $z \in \overline{y}$. Từ đó, ta có $\overline{x} \subset \overline{y}$. Bằng cách tương tự ta cũng chứng minh được $\overline{y} \subset \overline{x}$.

iii. Giả sử $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại phần tử $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, nghĩa là $z \in \overline{x}$ và $z \in \overline{y}$. Từ đó ta suy ra $z \Re x$ và $z \Re y$, do $\Re$ có tinh đối xứng và bắc cầu nên ta suy ra $x \Re y$. Theo phần ii) ta có $\overline{x} = \overline{y}$. ■

Từ các tính chất trên của các lớp tương đương, ta có thể nói rằng các lớp tương đương tạo thành một phân hoạch của tập A. Nghĩa là hợp của các lớp tương đương sẽ chính bằng A và các lớp tương đương hoặc trùng nhau, hoặc tách rời hẳn nhau.

Ví dụ.

1. Xét quan hệ $\Re$ trên Z: $m \Re n \Leftrightarrow m^2 = n^2$. Ta đã kiểm chứng được đây là một quan hệ tương đương. Các lớp tương đương tạo thành phân hoạch của là:

   {0}, {1,-1}, {2,-2}, …, {k,-k}, …

   và ta nói **Z** được phân hoạch thành vô số lớp tương đương hữu hạn.

2. Xét quan hệ đồng dư theo modulo n trên tập Z. Đây cũng là một quan hệ tương đương và ta có Z sẽ được phân hoạch thành n lớp tương đương:

   $$\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}$$

   mỗi lớp tương đương là một tập con vô hạn của Z, chẳng hạn như $\overline{0}$ là tập hợp tất cả các số nguyên chia hết cho n.

3.3 Quan hệ thứ tự - Biểu đồ Hasse

Định nghĩa. Một quan hệ hai ngôi trên tập hợp A được nói là một quan hệ thứ tự nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi ấy ta nói A là tập hợp có thứ tự hay A là tập hợp được sắp.

Ký hiệu. Thông thường, ta sẽ ký hiệu một quan hệ thứ tự là và ký hiệu cặp $(A, \ )$ là cặp có thứ tự.

Ví dụ.

1. $Z, \le$ là một tập hợp có thứ tự.
2. Trên tập hợp P(E) ta có quan hệ: $A \quad B \Leftrightarrow A \subset B$. Khi đó là một quan hệ thứ tự trên P(E).
3. Xét n là một số nguyên dương. Đặt

   $$U_n = \{a \in Z \mid a \mid n\}$$

   ký hiệu $a \mid n$ để chỉ a là ước số của n (hay n chia hết cho a). U_n chính là tập hợp các ước số của n. Trên U_n ta định nghĩa một quan hệ:

   $$x \quad y \Leftrightarrow x \mid y$$

   Ta sẽ kiểm chứng rằng $(U_n, \ )$ là một tập hợp có thứ tự. Thật vậy dễ thấy rằng có tính phản xạ và bắc cầu. Mặt khác giả sử $a \quad b$ và $b \quad a$, nghĩa là a là ước của b và b là ước của a. Điều này chỉ có thể xảy ra khi và chỉ khi a = b. Vậy có tính phản xứng. Suy ra là quan hệ thứ tự và tập $(U_n, \ )$ là một tập hợp có thứ tự.

Để biểu diễn quan hệ thứ tự, chúng ta có thể sử dụng hai phương pháp là liệt kê hoặc dùng đồ thị. Tuy nhiên cả hai phương pháp này đều không thể hiện được một cách trực quan về quan hệ thứ tự. Chính vì thế, chúng ta sẽ phải dùng một cách khác để biểu diễn: đó là biểu đồ Hasse. Trước hết, ta xét định nghĩa sau:

Định nghĩa. Cho $(A, \ )$ là tập có thứ tự và x, y là hai phần tử bất kỳ trong A.

a. Nếu x y, ta nói y là trội của x hay x được trội bởi y.
b. y là trội trực tiếp của x nếu y là trội của x và không tồn tại một phần tử $z \in A$ nào sao cho $x \quad z \quad y$ và x ≠ y ≠ z .

Ví dụ. Xét tập $(U_{12}, \ )$, dễ dàng nhận thấy rằng:

- Trội của 2 là 4, 6, 12
- Trội trực tiếp của 2 là 4, 6.

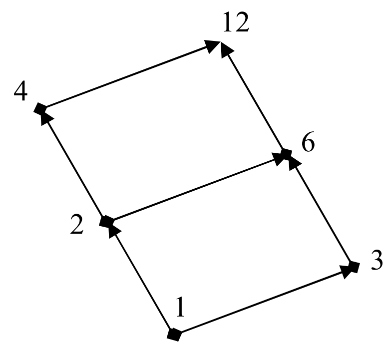
Định nghĩa. Cho $(A, \ )$ là tập có thứ tự hữu hạn. Biểu đồ Hasse của $(A, \ )$ bao gồm:

a. Một tập hợp các điểm trong mặt phẳng tương ứng 1 – 1 với A, gọi là các đỉnh
b. Một tập hợp các cung có hướng nối một số cặp đỉnh: hai đỉnh x và y được nối bằng một cung có hướng (từ x sang y) nếu và chỉ nếu y là trội trực tiếp của x.

Ví dụ. Xét $U_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

a. Biểu đồ Hasse của $(U_{12}, \leq)$ là:

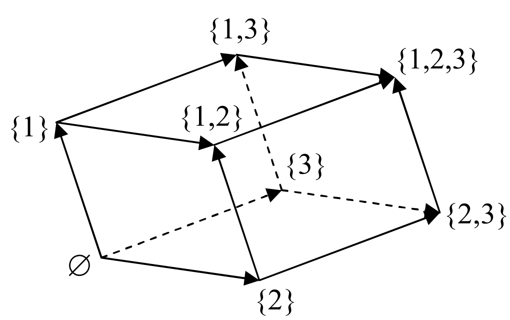
b. Biểu đồ Hasse của $(U_{12}, |)$ là:



c. Cho tập E = {1,2,3}. Xét tập P(E) – tập tất cả các tập con của E. Trên P(E) ta định nghĩa quan hệ như sau:

$$\forall A, B \in P(E), A \quad B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

Khi đó biểu đồ Hasse của $(P(E), \quad)$ như sau:



Định nghĩa. Tập $(A, \quad)$ được nói là có thứ tự toàn phần nếu và chỉ nếu hai phần tử bất kỳ đều so sánh được, nghĩa là mệnh đề sau là đúng:

$$\forall x, y \in A, (x \quad y) \vee (y \quad x)$$

Ví dụ. Tập N, Z, Q, R với thứ tự ≤, ≥ thông thường là các tập có thứ tự toàn phần.

Mệnh đề. Biểu đồ Hasse của $(A, \quad)$ là một dây chuyền khi và chỉ khi $(A, \quad)$ là tập có thứ tự toàn phần.

Định nghĩa. Cho $(A, \quad)$ là một tập có thứ tự. Khi đó ta nói:

a. Một phần tử m của A được nói là tối tiểu (tương ứng là tối đại) nếu m không là trội thực sự của bất cứ phần tử nào (m không được trội thực sự bởi bất cứ phần tử nào) của A.
b. Một phần tử M của A được nói là cực tiểu (tương ứng là cực đại) nếu M được trội bởi mọi phần tử của A (M là trội của mọi phần tử trong A).

Ví dụ.

a. Xét tập $(U_{12}, \leq)$, ta có:
   - Phần tử tối tiểu là 1 – đây cũng là phần tử cực tiểu
   - Phần tử tối đại là 12 – đây cũng là phần tử cực đại

b. Xét tập $(\{1,2,3,4,5,6\}, |)$, ta có:
   - Phần tử tối tiểu là 1 – đây cũng là phần tử cực tiểu
   - Phần tử tối đại là: 4, 5, 6 – không có phần tử cực đại