# Submodular function maximization and Greedy algorithm

yataka

2018 年 12 月 22 日

## 1　はじめに

この方程では $V$ は有限集合であるとする.

## 2　劣モジュラ関数

まず劣モジュラ関数を定義する.

**Definition 2.1.** (Discreate derivative)
$f$ を集合関数とする. $S$ を $V$ の部分集合とし $e$ を $V$ の元とする. この時 $f$ の $S$ での Discreate derivative を

$$\Delta_f(e|S) := f(S \cup \{e\}) - f(S)$$

と定義する.

**Definition 2.2.** (Submodular function)
$f$ を集合関数とする. $f$ が Submodular function であるとは

$$\forall A, B \subset V, \forall e \in V, A \subset B \text{ かつ } e \in V - B \Longrightarrow \Delta_f(e|A) \geq \Delta_f(e|B)$$

を満たすことをいう.

**Theorem 2.3.** $f$ を集合関数とする. この時

1. $f$ は Submodular function である.
2. $\forall A, B \subset V, f(A \cap B) + f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$

は同値である.

***Proof.*** 1. $\Longrightarrow$ 2.)　任意に $A, B \subset V$ をとる. $A - B = \phi$ の時, すなわち $A \subset B$ の時は $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ より成立するので, $A - B \neq \phi$ の時を考える. $|A - B| = m$ とし

$A-B=\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}$ とすると $A_0=A\cap B$, $B_0=B$ として $A_k,B_k(k\in\{1,2,\cdots,m\})$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&A_1=A_0\cup\{i_1\}, \quad &&A_2=A_0\cup\{i_1,i_2\},\cdots, \quad &&A_m=A_0\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_m\} \\
&B_1=B_0\cup\{i_1\}, \quad &&B_2=B_0\cup\{i_1,i_2\},\cdots, \quad &&B_m=B_0\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}
\end{aligned}
$$

この時 $A_m=A$, $B_m=A\cup B$ である．また，

$$\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}, A_{k-1}\subset B_{k-1} \text{かつ } A_k=A_{k-1}\cup\{i_k\} \text{ かつ } B_k=B_{k-1}\cup\{i_k\}$$

が成立するので 1. より

$$\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}, f(A_k)-f(A_{k-1})\geq f(B_k)-f(B_{k-1})$$

が成立する．$k$ についてこの不等式の両辺の和をとると，

$$\sum_{k=1}^{m}\left(f(A_k)-f(A_{k-1})\right)\geq\sum_{k=1}^{m}\left(f(B_k)-f(B_{k-1})\right)$$

両辺を計算すると

$$f(A_m)-f(A_0)\geq f(B_m)-f(B_0)$$

となる．$A,B$ は任意なので $A_m=A$, $B_m=A\cup B$, $B_0=B$ より

$$\forall A,B\subset V, f(A\cap B)+f(A\cup B)\leq f(A)+f(B)$$

が成立する．

2. $\Longrightarrow$ 1.) 任意に $A,B\subset V$ と $i\in V-B$ を $A\subset B$ となるようにとる．$A^{'}=A\cup\{i\}, B^{'}=B$ とすると 2. より

$$f(A^{'})+f(B^{'})\geq f(A^{'}\cup B^{'})+f(A^{'}\cap B^{'})$$

が成立する．ここで $A^{'}\cup B^{'}=B\cup\{i\}$, $A^{'}\cap B^{'}=A$ であることから

$$f(A^{'})+f(B^{'})\geq f(B\cup\{i\})+f(A)$$

$A^{'},B^{'}$ の定義より

$$f(A\cup\{i\})+f(B)\geq f(B\cup\{i\})+f(A)$$

式を整理すると

$$f(A\cup\{i\})-f(A)\geq f(B\cup\{i\})+f(B)$$

したがって，$A,B\subset V$ と $i\in V-B$ は任意だったので，

$$\forall A,B\subset V,\forall e\in V, A\subset B \text{ かつ } e\in V-B\Longrightarrow\Delta_f(e|A)\geq\Delta_f(e|B)$$

したがって，$f$ は Submodular function である．　□

**Definition 2.4.** (Monotone)
$f$ を集合関数とする. $f$ が Monotone であるとは

$$\forall S, T \subset V, S \subset T \Longrightarrow f(S) \leq f(T)$$

を満たすことを言う.

**Theorem 2.5.** $f$ を集合関数とする. このとき

1. $f$ が Monotone である.
2. $\forall S \subset V, \forall e \in V, \Delta_f(e|S) \geq 0$

は同値である.

***Proof.*** まあなんか頑張って証明してください. □

**Problem 2.6.** (読者への演習問題 1)
**Theorem 2.5.** を証明せよ.

**Definition 2.7.** (Monotone Submodular function)
集合関数 $f$ が Submodular かつ Monotone であるとき $f$ を Monotone Submodular function と言う.

# 参考文献


[1] 劣モジュラ最適化と機械学習・河原 吉伸, 永野 清仁・2015
[2] https://las.inf.ethz.ch/files/krause12survey.pdf・Andreas Krause, Daniel Golovin
[3] https://www.openu.ac.il/personal_sites/moran-feldman/publications/Handbook2018.pdf・Niv Buchbinder, Moran Feldman
[4] https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2034&context=cis_reports・Jennifer Gillenwater