Generative Adversarial Networks and Manifold

小泉 孝弥

1 Intoroduction

2 機械学習の基礎

この節では機械学習の数学的な定式化および, 機械学習の具体例を紹介する. $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を集合とし, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を完備な確率空間とする.

2.1 機械学習の基礎空間

Definition 2.1. (仮説空間, 仮説)
$\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ へのなんらかの条件を満たす写像の集まりのことを仮説空間といい $\mathcal{H}$ と表記する. すなわち,

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \mid f \text{ が満たす条件 }\}$$

である. (条件の具体例は後に述べる). 仮設空間 $\mathcal{H}$ の元のことを仮説と呼ぶ. また, この時の $\mathcal{X}$ を入力空間, $\mathcal{Y}$ を出力空間と呼ぶ.

これ以降, 入力空間を $\mathbb{R}^d$ 出力空間を $\mathbb{R}^m$ とする.

Definition 2.2. (データ)
$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の直積集合 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ の有限部分集合のことを教師ありデータという. また, $\mathcal{X}$ の有限部分集合のことを教師なしデータと呼ぶ.

Definition 2.3. (予測損失)
$\mathcal{H}$ を仮説空間とし, (X, Y) をデータの分布 $\mathbb{P}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ に従う確率変数とする. 以下で定義される $\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を予測損失と呼ぶ.

$$\ell(f) = \mathbb{E}[\|f(X) - Y\|].$$

予測損失が最小となるような $f \in \mathcal{H}$ を求めることが機械学習の目標である. しかし, 一般にデータの分布は未知であるためこの式を解くことができない. そこで、損失関数というものを定義し、それを最小化することを考える.

Definition 2.4. (損失関数)
$\mathcal{H}$ を仮説空間とする. $\mathcal{H}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $\mathcal{L}_D : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を損失関数 (Loss function) と呼ぶ.

Definition 2.5. (機械学習空間)
D をデータ, $\mathcal{H}$ を仮説空間, $\mathcal{L}_D$ を損失関数とする. この時 5 つ組 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$ を機械学習空間 (Machine Learning sapce) という.

Definition 2.6. (学習, 最適仮説)
$\mathcal{H}$ を仮設空間, $Ł : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を損失関数とする.

Definition 2.7. (機械学習)
機械学習空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$ 上での学習を機械学習という.

2.2 機械学習の具体例

前節では, 機械学習の抽象的な枠組みを紹介したが, この説では機械学習空間の具体例を述べる.

2.2.1 単回帰分析

最初に機械学習の最も基本的なモデルである単回帰分析を紹介する。

Example 2.8. (単回帰分析)
機械学習空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$ を以下のように定義する.
$\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \mid f(x) = wx, w \in \mathbb{R}\},$$

$$Ł(f) = \sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - y_i|.$$

この機械学習空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$ 上での学習を単回帰分析という.

単回帰分析の最適仮説は

3 Deep Learning

3.1 Neural Network

3.2 The Universal Theorem of Neural Network

4 Generative Adversarial Networks

4.1 GAN の定式化

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を完備な確率空間とする. $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ を空でない集合とする.

$$\mathcal{H}_1 = \{G : \mathbb{Z} \to \mathcal{X} \ |G \text{ はニューラルネット } \},$$
$$\mathcal{H}_2 = \{D : \mathcal{X} \to [0,1] \ |D \text{ はニューラルネット } \}$$

ここで、$\mathcal{Z}$ は潜在空間と呼ばれる, なんらかの確率分布に従う確率変数の realaization の集合である. すなわち,

$$\mathcal{Z} := \{z \in \mathbb{R}^d \ |\exists X_{\mathrm{R.V.}} : \Omega \to \mathbb{R}^d, \exists \omega \in \Omega \ \mathrm{s.t.} X(\omega) = z\}.$$

5 Applications of GANs

参考文献

[1] https://arxiv.org/abs/1406.2661