

# Universal Approximation Theorem of Neural Network

数理科学科 3 回生 小泉 孝弥

## 概要

機械学習という単語を一言で説明するならば、「関数近似器」である。今回の ReMakers の機関紙では機械学習および第 3 次人工知能ブームの火付け役となった「深層学習」を数学的に定義し、深層学習の中心となる「ニューラルネットワーク」が万能関数近似器であることを示す。なお、本機関紙の前提知識は数学科 3 回生レベルの数学である。

## 1 人口知能・AI について

現在、人工知能 (Artificial Intelligence) の厳密な定義は完成しておらず、専門家の中でも意見が分かれている。なので、この機関紙では人工知能の定義について触れることはせず、現在の、人工知能の中心技術である「機械学習」について説明する。

### 1.1 機械学習・深層学習

最初に述べたとおり、機械学習 (Machine Learning) とは関数近似器である。もう少し詳細に述べれば、入力空間と呼ばれる集合  $\mathcal{X}$  から出力空間と呼ばれる集合への良い写像  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  を構成するのが機械学習である。機械学習は主に、株価などのあるもの値を予想するモデルである「回帰 (Regression)」, あるものがどのクラスに属しているかを予測するモデルである「分類 (Classify)」の 2 つに分けられる。「機械学習の中でも特にあとで定義する、ニューラルネットワークというものをを用いる学習手法を深層学習 (Deep Learning) という。

### 1.2 深層学習と万能近似性

深層学習は以下の定理から万能関数近似器と呼ばれている。

**定義.** (万能関数近似定理)

$X$  を集合とし  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  を性質の良い関数とする。この時、 $f$  を任意の精度で近似できるようなニューラルネットワークが存在する。

今回の機関紙の目標はこの定理を証明することであるが、今のままでは曖昧な単語が多すぎるため、数学の問題として扱うことができない。したがって、今からこの定理を数学的に述べなければならない。しかしながら、流れの都合上この定理を数学的に述べる前に、この定理の照明に不可欠な

「ハーン・バナッハの拡張定理」と「リースの表現定理」を証明することにする.

## 2 関数解析学

リースの表現定理およびハーンバナッハの拡張定理は共に関数解析学 (Functional Analysis) と呼ばれる分野の定理である. したがって, この説では関数解析学の基礎事項を説明する. なお, 線形空間の係数体は実数体または複素数体とし,  $\mathbb{K}$  で表記する.