

# Generative Adversarial Networks and its Instability

小泉 孝弥

## 1 Introduction

皆さんは、GAN というものを知っているだろうか。GAN<sup>\*1</sup>とは敵対的生成ネットワーク (Generative Adversarial Networks) のことであり、2014 年に登場した人工知能の技術である。「敵対的」という単語がついている通り、2 つのニューラルネットワークという関数を競わせることで、学習させていく手法である。今回の方程では、まず、機械学習についての説明をする。その後、GAN の数学的な定式化及び学習の不安定性について述べる。

## 2 Fundamental concepts of Machine Learning

この節では機械学習の数学的な定式化を行う。 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を完備な確率空間とする。 $d, m$  を自然数とする。

**Definition 2.1.** (仮説空間, 仮説)

$\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$  から  $\mathcal{Y} := \mathbb{R}^m$  へのなんらかの条件を満たす写像の集まりのことを仮説空間といい  $\mathcal{H}$  と表記する。すなわち、

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid f \text{ が満たす条件} \}$$

である。(条件の具体例は後に述べる)。仮説空間  $\mathcal{H}$  の元のことを仮説 (またはモデル) と呼ぶ。また、この時の  $\mathcal{X}$  を入力空間、 $\mathcal{Y}$  を出力空間と呼ぶ。

**Definition 2.2.** (データ)

$\mathcal{X}$  と  $\mathcal{Y}$  の直積集合  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  の有限部分集合のことを教師ありデータという。また、 $\mathcal{X}$  の有限部分集合のことを教師なしデータと呼ぶ。

**Remark 2.3.** (データについて)

データ  $D$  は確率分布  $\mathbb{P}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$  にしてがって生成されているものとする。すなわち、 $\mathbb{P}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$  に従う確率変数列  $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1}^N$  の観測値のことをデータと呼ぶ。

---

<sup>\*1</sup> 「ぎゃん」と読む人と、「がん」と読む人がいるが、ここでは「ぎゃん」とすることにする。

**Definition 2.4.** (予測損失)

$\mathcal{H}$  を仮説空間とし,  $(X, Y)$  をデータの分布  $\mathbb{P}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$  に従う確率変数とする. 以下で定義される  $\ell: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  を予測損失と呼ぶ.

$$\ell(f) = \mathbb{E}_{(X,Y) \sim \mathbb{P}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}} [\|f(X) - Y\|].$$

予測損失が最小となるような  $f \in \mathcal{H}$  を求めることが機械学習の目標である. しかし, 一般にデータの分布は未知であるためこの式を解くことができない. そこで, 損失関数というものを定義し, それを最適化することを考える.

**Definition 2.5.** (損失関数)

$\mathcal{H}$  を仮説空間とする.  $\mathcal{H}$  から  $\mathbb{R}$  への写像  $\mathcal{L}_D: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  を損失関数 (Loss function) と呼ぶ.

**Definition 2.6.** (機械学習空間)

$D$  をデータ,  $\mathcal{H}$  を仮説空間,  $\mathcal{L}_D$  を損失関数とする. この時 5 つ組  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を機械学習空間 (Machine Learning space) という.

**Definition 2.7.** (学習, 最適仮説)

$\mathcal{H}$  を仮説空間,  $\mathcal{L}_D: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  を損失関数とする. 損失関数が最大または, 最小となるような  $f^* \in \mathcal{H}$  を求めること<sup>\*2</sup>を学習といい,  $f^* \in \mathcal{H}$  を最適仮説と呼ぶ.

**Definition 2.8.** (機械学習)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  上での学習を機械学習という. 特に,  $D$  が教師ありデータの時, 教師あり機械学習と呼び, 教師なしデータの時, 教師なし機械学習と呼ぶ.

**Remark 2.9.** (訓練データとテストデータ)

機械学習を行う際は, データ  $D$  を全て使って学習させるのではなく, データを訓練データ  $D_{\text{Train}}$  とテストデータ  $D_{\text{Test}}$  に分ける. 訓練データはモデルの学習に用いて, テストデータはモデルの精度の確認のために用いる.

### 3 Some Examples

前節では, 機械学習の抽象的な枠組みを紹介したが, この説では機械学習空間の具体例を述べる.  $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  を教師ありデータとする.

---

<sup>\*2</sup> 機械学習においては厳密に損失関数が最大・最小となる関数が得られるとは限らないが, そのような関数を求めることも学習の定義に含めるものとする.

### 3.1 単回帰分析・重回帰分析

最初に機械学習の最も基本的なモデルである単回帰分析を紹介する。その後、多変数拡張である重回帰分析を紹介する。

**Example 3.1.** (単回帰分析)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する。

$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \mathcal{Y} = \mathbb{R},$

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid f(x) = wx, w \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{L}_D(f) = \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2.$$

この機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  上で,

$$\arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{L}_D(f)$$

を求める問題を単回帰分析という。単回帰分析の最適仮説  $f^* \in \mathcal{H}$  は

$$f^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} w$$

となる。また、 $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}$  である。

**Example 3.2.** (重回帰分析)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する。

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^d (N \geq d), \mathcal{Y} = \mathbb{R},$

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid f(x) = W^\top x + b, W \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{L}_D(f) = \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2.$$

この機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  上で

$$\arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{L}_D(f)$$

を求める問題を重回帰分析という。 $X \in \mathbb{R}^{N \times (d+1)}$  を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1d} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nd} \end{pmatrix}$$

と定義し,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$  とする. この時,  $\text{rank}(X) = d + 1$  ならば, 最適仮説  $f^* \in \mathcal{H}$  は  $[b \ W] = (X^\top X)^{-1} X^\top \mathbf{y}$  とすれば

$$f^*(x) = [b \ W]^\top x$$

である.

## 3.2 線形回帰

前小節で定義した重回帰分析は線形的なデータにしか適応できなかった. それを基底関数と呼ばれる関数列を定義する事で, 非線形データにも対応することができる.

**Definition 3.3.** (基底関数)

$\mathcal{X}$  を入力空間とし, 任意に  $d \in \mathbb{N}$  をとる.  $\mathcal{X}$  上の連続関数列  $\{\phi_n\}_{n=1}^d \subset C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  が一次独立であるとき,  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d)^\top : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}^d$  を基底関数 (basis function) と呼ぶ.

**Example 3.4.** (多項式回帰)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \mathcal{Y} = \mathbb{R},$

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid f(x) = W^\top \Phi(x), W \in \mathbb{R}^{d+1}\},$$

$$\mathcal{L}_D(f) = \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2.$$

ここで,  $\phi_n(x) = x^n, n \in \{0, 1, \dots, d\}$  とする.

この機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  上で

$$\arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{L}_D(f)$$

を求める問題を多項式回帰という.  $X = [\phi_1(x_1), \phi_2(x_2), \dots, \phi_N(x_N)]^\top \in \mathbb{R}^{N \times d}$  とし,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$  とする. この時, 最適仮説  $f^*$  は重回帰分析と同様に  $W = (X^\top X)^{-1} X^\top \mathbf{y}$  とすれば

$$f^*(x) = W^\top x$$

である.

**Remark 3.5.** (ハイパーパラメータと学習パラメータ)

多項式回帰の多項式の次数  $d \in \mathbb{N}$  や基底関数  $\{\phi_n\}_{n=1}^d$  のようにコンピュータに学習させるのではなく, 機械学習モデルの設計者が設定するパラメータのことをハイパーパラメータと呼ぶ. 一方,  $W \in \mathbb{R}^{d+1}$  のように, データからコンピュータが自動で学習するパラメータのことを学習パラメータと呼び,  $\Theta$  と表す.

### 3.3 過学習と正則化

前節の多項式回帰で学習を行うと以下のグラフのように、訓練データに過剰適合してしまい、未知のデータについての汎化性能が小さくなってしまいうことを過学習 (overfitting) という。

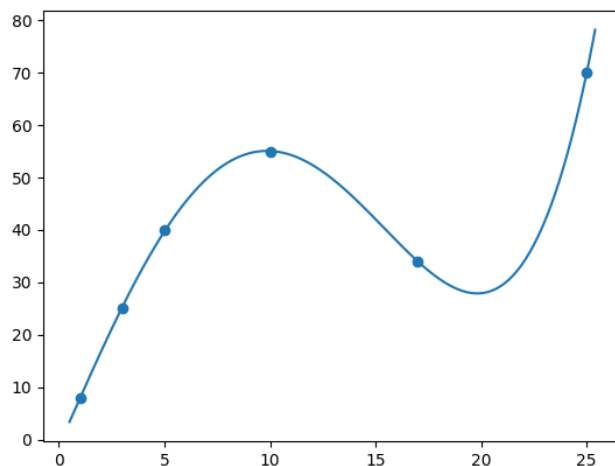


図1  $d = 4$  の時の多項式回帰の過学習

過学習を防ぐための手法が正則化である。

**Definition 3.6.** (正則化)

$\mathcal{L}_D : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  を損失関数とする.  $\mathcal{L}_D^R := \mathcal{L}_D + L^R$  とする. この時,  $\mathcal{L}_D^R$  を  $\mathcal{L}_D$  の正則化と呼び,  $L^R : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  を正則化項と呼ぶ.

**Example 3.7.** (Ridge 正則化多項式回帰)

$\lambda \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  を任意にとる. 機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \mathcal{Y} = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid f(x) = W^\top \Phi(x), W \in \mathbb{R}^{d+1}\},$$

$$\mathcal{L}_D(f) = \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2 + \lambda W^\top W. \quad (W \text{ は } f \text{ のパラメータ})$$

ここで,  $\phi_n(x) = x^n$ ,  $n \in \{0, 1, \dots, d\}$  とする ( $\lambda W^\top W$  が正則化項である).

この機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  上で

$$\arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{L}_D(f)$$

を求める問題を Ridge 正則化多項式回帰という。通常の多項式回帰の時と同様に,  $X = [\phi_1(x_1), \phi_2(x_2), \dots, \phi_N(x_N)]^\top \in \mathbb{R}^{N \times d}$  とし,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$  とする。この時, 最適仮説  $f^*$  は  $W = (X^\top X + \lambda I)^{-1} X^\top \mathbf{y}$  とすれば

$$f^*(x) = W^\top x$$

である。

正則化の結果が以下のグラフである。

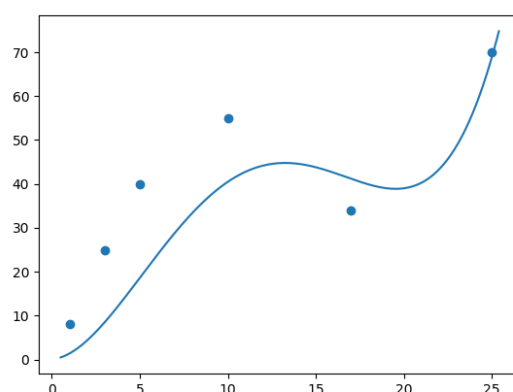


図2  $\lambda = 700, d = 4$  の時の Ridge 正則化多項式回帰

このように正則化をすることで, パラメータが大きくなりすぎることを防ぐことで過学習を防ぐことができる。

**Remark 3.8.** (未学習について)

正則化を行う際にパラメータ<sup>\*3</sup> $\lambda \in \mathbb{R}^+$  は自分で決める必要がある。その際に  $\lambda$  の値を大きくしすぎると未学習 (underfitting) という問題が発生する。未学習とは訓練データに対してモデルが十分に適合できていないことをいう。

---

<sup>\*3</sup> 正則化パラメータという。

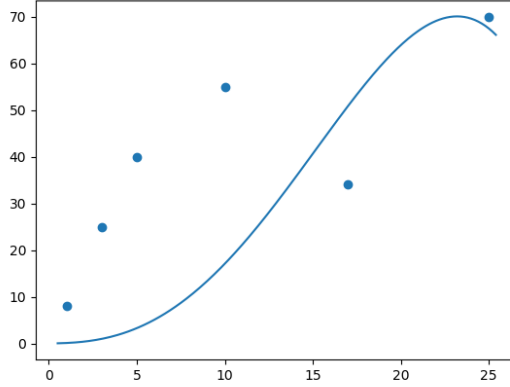


図3  $\lambda = 30000$ ,  $d = 4$  の時の Ridge 正則化多項式回帰の未学習

このように、正則化パラメータは適切に選ぶことが大切である。

### 3.4 ロジスティック回帰と勾配降下法

最後の具体例として、ロジスティック回帰を紹介する。ロジスティック回帰は分類問題を解くための手法の 1 つである。まず、実数値ベクトルを確率に変換するソフトマックス関数および、one-hot ベクトルというものを導入する。

**Definition 3.9.** (ソフトマックス関数)

$\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  を以下で定義する。

$$\psi(x)_i = \frac{\exp(x_i)}{\sum_{k=1}^d \exp(x_k)}$$

この時、 $\psi$  をソフトマックス関数と呼ぶ。

**Definition 3.10.** (one-hot ベクトル)

$y \in \mathbb{R}^m$  が第  $c \in \{1, 2, \dots, m\}$  成分が 1 であり、残りの成分が 0 である時、 $y$  を one-hot ベクトルという。

**Example 3.11.** ( $m$  値分類ロジスティック回帰)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する。

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ ,

$$\mathcal{H} = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid f(x) = \psi(Wx + b), W \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\mathcal{L}_D(f) = - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^m y_{nk} \log f(x_n)_k,$$

ここで  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  はソフトマックス関数であり,  $y_n$  は one-hot ベクトルである.  
この機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  上で

$$\arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{L}_D(f)$$

を求める問題を  $m$  値分類ロジスティック回帰という.

先ほどまでは, 損失関数の最小値を解析的に求めているが, 今回の損失関数の最小値を解析的に求めることはせず, 勾配降下法という連続最適化アルゴリズムを用いて求めることにする. 勾配降下法とは  $C^\infty$  関数  $F$  の最小値を求めるためのアルゴリズムである.

---

**Algorithm 1** Gradient Decent

---

**Require:**  $F$ : smooth function on  $\mathbb{R}^d$

**Require:**  $0 < \alpha < 1$  : learning rate

**Require:**  $\theta$ : Initial parameter vector

$\theta \leftarrow \theta_0$

**while**  $\theta$  not converged **do**

$\theta \leftarrow \theta - \alpha \nabla F(\theta)$

**end while**

**return**  $\theta$

---

勾配降下法の最適解への収束条件を述べておく.

**Definition 3.12.** ( $\beta$ -Lipschitz 連続)

$(X, d_X), (Y, d_Y)$  を距離空間とする.  $f : X \rightarrow Y$  が  $\beta$ -Lipschitz 連続であるとは,

$$\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq \beta d_X(x, y)$$

が成立することである.

**Theorem 3.13.** (勾配降下法の最適化収束条件 [8])

$\mathcal{H}$  をヒルベルト空間とし,  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  関数とする. この時,  $\nabla f$  が  $\beta$ -Lipschitz 連続ならば, 学習率  $\alpha \in \left(0, \frac{2}{\beta}\right)$  で最適解に弱収束する.

**Example 3.14.** (2 次関数における勾配降下法)

$y = x^2$  において勾配降下法を適応した結果を以下の図と表に示す. 本来の最適値である  $x = 0$  に近づいているのが分かる.



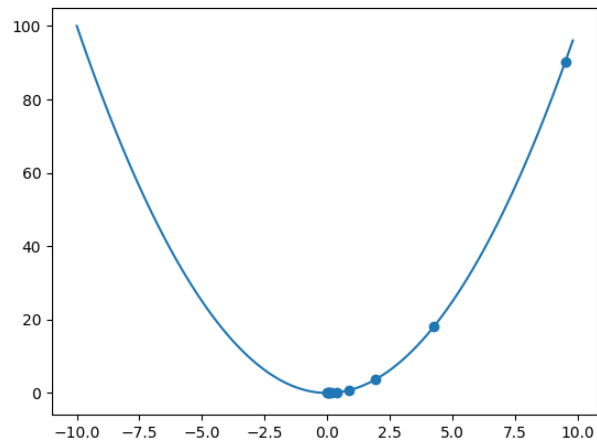


図4  $\alpha = 0.001$  とした時の勾配降下法の結果.

イタレーション数	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600
$\theta$ の値	9.50	4.27	1.91	0.86	0.39	0.17	0.08	0.03	0.02	0.01

表1 値の詳細

### 3.5 MNIST での実験

MNIST とは下記のような 0 から 9 までの自然数が書かれた  $28 \times 28$  ピクセル画像のデータセットの名前である. 今回は,  $m$  値分類のロジスティック回帰を用いて, 画像に書かれている文字を予測する問題を考える. ロジスティック回帰の損失関数  $\mathcal{L}_D$  を勾配降下法を用いて最小化するため, まずは損失関数の勾配を計算する. ここで,  $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^{m \times d+1}$  だから,  $\mathcal{L}_D$  を  $\mathbb{R}^{m \times d+1}$  上の関数と考える.

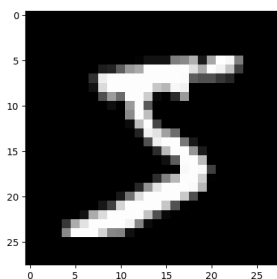


図5 数字の5

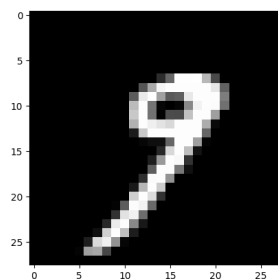


図6 数字の9

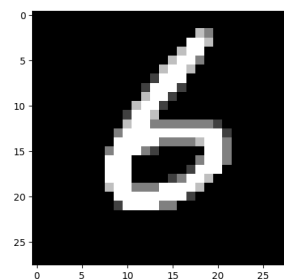


図7 数字の6

**Lemma 3.15.** ([1])

任意の  $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, d\}$  に対して以下が成立する.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial w_{ij}} = - \sum_{n=1}^N (y_{ni} - f(x_n)_i) x_{nj}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial b_i} = - \sum_{n=1}^N (y_{ni} - f(x_n)_i)$$

この補題 3.15 より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial W} &= - \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N (y_{n1} - f(x_n)_1) x_{n1} & \cdots & \sum_{n=1}^N (y_{n1} - f(x_n)_1) x_{nd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^N (y_{nm} - f(x_n)_m) x_{n1} & \cdots & \sum_{n=1}^N (y_{nm} - f(x_n)_m) x_{nd} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} y_{11} - f(x_1)_1 & \cdots & y_{N1} - f(x_N)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1m} - f(x_1)_m & \cdots & y_{Nm} - f(x_N)_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{Nd} \end{pmatrix} \\ &= -(Y - F)X^\top, \end{aligned}$$

ここで,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ ,  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ ,  $F = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)]$  である. また, この計算より  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  とすれば,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial b} = -(Y - F)\mathbf{1}$$

もいえる. これらを用いて学習した結果を以下に示す. また, この例からもわかるように機械学習においてパラメータの次元は非常に高次元なものとなる. (今回は  $10 \times 784 + 10 = 7850$  次元).

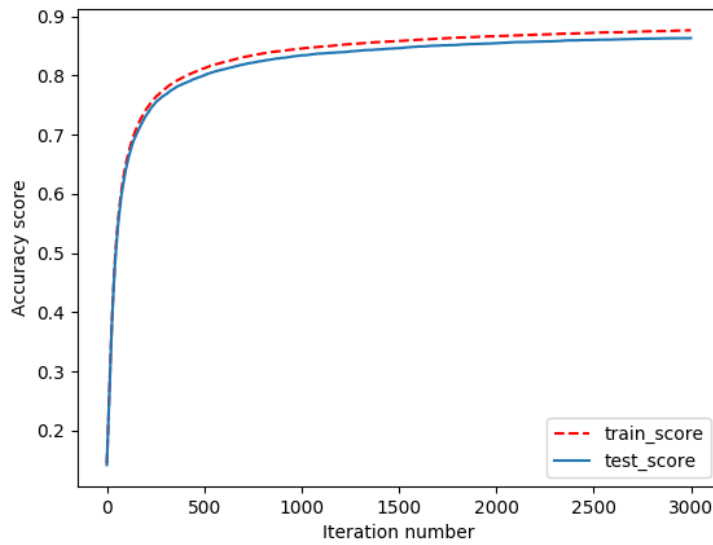


図 8  $\alpha = 0.0001$  とした時の, MNSIT 実験の結果

この例からもわかる通り、機械学習において  $\mathbb{R}^d$  上の関数を学習するのではなく意味のある  $\mathbb{R}^d$  の部分集合上の関数 (今回なら  $[0, 1]^d$ ) を学習していることがほとんどである。

## 4 Deep Learning

ここから、高い表現能力を持つとされるニューラルネットワークについて説明する。ニューラルネットワークとはアフィン変換と活性化関数と呼ばれる関数の合成関数である。前節と同様に  $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  を教師ありデータとする。

### 4.1 Neural Network

**Definition 4.1.** (活性化関数)

$\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  を非線形かつ、Lipschitz 連続な関数とする。この時、 $\sigma$  を活性化関数 (activation function) という。

**Example 4.2.** (活性化関数の具体例)

活性化関数の具体例をいくつか述べる。

$$\sigma(x)_i = \frac{1}{1 + \exp(-x_i)},$$

$$\text{ReLU}(x)_i = \max(x_i, 0).$$

$\sigma$  をシグモイド関数 (sigmoid function), ReLU を正規化線形関数 (Rectified Linear Unit) という。

**Definition 4.3.** (回帰型ニューラルネットワーク)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する。  $L = \{L_1, L_2, \dots, L_K\}$  を自然数列とする。  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d, \mathcal{Y} = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{H} = \left\{ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid \begin{array}{l} f(x) = W^\top g_K \circ g_{K-1} \circ \dots \circ g_1(x) - b, g_i = \eta(W_i x + b_i) \\ W_i \in \mathbb{R}^{L_i \times L_{i-1}}, b_i \in \mathbb{R}^{L_i}, W \in \mathbb{R}^{L_K}, b \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{L}_D(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2,$$

ここで  $\eta$  は活性化関数である。  $f \in \mathcal{H}$  を回帰型 (全結合) ニューラルネットワーク (Full-connected Neural Network for Regression) と呼び、各  $g_i$  を  $f$  の第  $i$  層 (layer) と呼ぶ。

**Definition 4.4.** (分類型ニューラルネットワーク)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する。  $L = \{L_1, L_2, \dots, L_K\}$  を自然数列とす

る.  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d, \mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ ,

$$\mathcal{H} = \left\{ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \left| \begin{array}{l} f(x) = \psi(W g_K \circ g_{K-1} \circ \cdots \circ g_1(x) - b), g_i = \eta(W_i x + b_i) \\ W_i \in \mathbb{R}^{L_i \times L_{i-1}}, b_i \in \mathbb{R}^{L_i}, W \in \mathbb{R}^{m \times L_K}, b \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. \right\},$$

$$\mathcal{L}_D(f) = - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^m y_{nk} \log f(x_n)_k,$$

ここで  $\eta$  は活性化関数,  $y_i$  は one-hot ベクトル,  $\psi$  はソフトマックス関数である.  $f \in \mathcal{H}$  を分類型 (全結合) ニューラルネットワーク (Full-connected Neural Network for Classification) と呼び, 回帰型の時と同様に各  $g_i$  を  $f$  の第  $i$  層と呼ぶ.

以下, ニューラルネットと書けば, 分類, 回帰ニューラルネットワークのいずれかを表すものとする.

**Definition 4.5.** (深層学習)

ニューラルネットワークが  $K \geq 3$  の時に

$$\arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{L}_D(f)$$

を求める問題を深層学習 (Deep Learning) と呼ぶ.

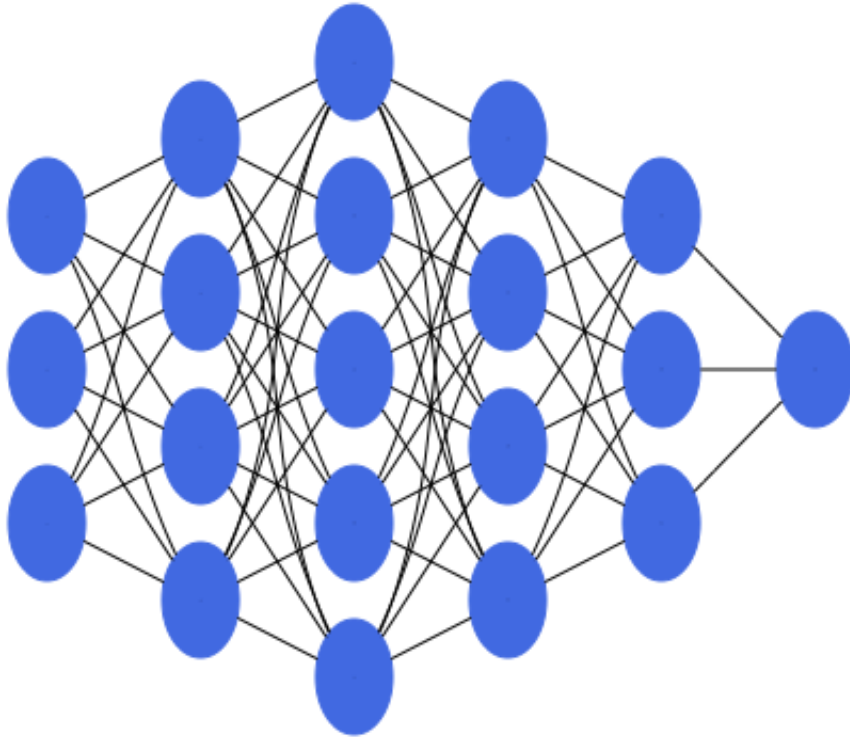


図9 ニューラルネットワークの図

**Remark 4.6.** (フレームワーク)

現在はニューラルネットワークを簡単に実装するための深層学習フレームワークというものはいくつか存在する. 代表なものとして, Facebook の Pytorch や, Google の Tensorflow などがある.

## 4.2 The Universal Theorem of Neural Network

冒頭でも述べたが, 深層学習は前説まで紹介してきた機械学習の手法と比べて, 精度がよくなることが知られている. しかしながら, その数学的な理由については現在も研究途中である. 一方で, ニューラルネットの表現能力についてはいくつかの成果が出ており, その一つである普遍性定理を紹介する. 証明については [3] や [9] を見て欲しい.

**Definition 4.7.** (符号付き測度)

$(X, \mathcal{F})$  を可測空間とする.  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  が, 任意の互いに素な  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  に対して

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

を満たすとき,  $\mu$  を符号付き測度という.

**Definition 4.8.** (正則 Borel 測度)

$(X, \mathcal{O})$  を位相空間とする. Borel 集合族  $\mathcal{B}(X)$  上の Borel 測度  $\mu$  が

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) &= \inf \{ \mu(U) \mid U \supset A, U \in \mathcal{O} \} \\ &= \sup \{ \mu(K) \mid K \subset A, K \text{ is compact and closed} \} \end{aligned}$$

を満たす時, 正則 Borel 測度という.

**Definition 4.9.** (正則符号付き Borel 測度)

$(X, \mathcal{O})$  を位相空間とする.  $(X, \mathcal{B}(X))$  上の符号付き測度  $\mu$  が正則符号付き Borel 測度であるとは, 以下で定義される  $\mathcal{B}(X)$  上の有限測度  $\mu^+, \mu^-$  が共に正則 Borel 測度になることである.

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &= \sup \{ \mu(B) \mid B \in \mathcal{B}(X), B \subset A \}, \\ \mu^-(A) &= -\inf \{ \mu(B) \mid B \in \mathcal{B}(X), B \subset A \}. \end{aligned}$$

また,  $X$  上の正則符号付き測度全体の集合を  $M(X)$  と表記する.

**Definition 4.10.** (Sigmoidal)

関数  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  がシグモイド的関数であるとは

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t) = 0$$

を満たすことである.

**Definition 4.11.** (discriminatory)

$X$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分空間とする. 関数  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が discriminatory 関数であるとは

$$\forall \mu \in M(X), \left( \forall y \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}, \int_X \sigma(\langle x, y \rangle + \theta) d\mu(x) = 0 \right) \implies \mu = 0$$

が成立することである.

**Theorem 4.12.** (普遍性定理)

$X \subset \mathbb{R}^n$  をコンパクト連結部分空間とし,  $\mathcal{H}$  を  $K = 1$  の時の回帰型ニューラルネットの仮説空間とする. この時, 活性化関数  $\eta$  がシグモイド的関数ならば,

$$\forall f \in C(X), \forall \varepsilon > 0, \exists G \in \mathcal{H} \text{ s.t. } \sup_{x \in X} |f(x) - G(x)| < \varepsilon$$

が成立する.

この定理からもわかる通り, ニューラルネットは 1 つの層でどんな連続関数でも近似できるほどの高い近似能力を持つ. しかしながら実用上は, 実際に構成するのは非常に困難であるため, 層を増やすことで表現能力を向上させる.

### 4.3 確率的最適化

前節でも述べてきたが, 機械学習において 10000 を超えるパラメータの勾配を求めなければならないことも珍しくはない. そこで, 確率的最適化というものをを用いて計算量を減らすことを考える.

確率的最適化手法には様々なものが存在するが, ここでは SGD や Adam[2] について紹介する.

**Definition 4.13.** (ミニバッチ)

データ  $D$  に対して, 分割部分集合列  $\{D_k\}_{k=1}^K$  のことを  $D$  のミニバッチと呼び,  $K$  をバッチサイズ (batch size) とよぶ.

以下,  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を機械学習空間とする.

---

**Algorithm 2** Stochastic Gradient Decent

---

$0 < \alpha \leq 1$ : learning rate

**Require:**  $\theta_0$ : Initial parameter vector

$\theta \leftarrow \theta_0$

**while**  $\theta$  not converged **do**

    decompose  $D$  to mini batch  $D_{batch}$  randomly.

**for**  $D_{batch}$  in  $D$  **do**

$\theta \leftarrow \theta - \alpha \nabla_{\theta} \mathcal{L}_{D_{batch}}$

**end for**

**end while**

**return**  $\theta$

---

---

**Algorithm 3** Adaptive Moment Estimation

---

**Require:**  $0 < \alpha \leq 1$  : learning rate

**Require:**  $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1)$

**Require:**  $\theta_0$ : Initial parameter vector

$m_0 \leftarrow 0$

$v_0 \leftarrow 0$

$t \leftarrow 0$

**while**  $\theta_t$  not converged **do**

$t \leftarrow t + 1$

    decompose  $D$  to mini batch  $D_{batch}$  randomly.

**for**  $D_{batch}$  in  $D$  **do**

$g_t \leftarrow \nabla_{\theta} \mathcal{L}_{D_{batch}}$

$m_t \leftarrow \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$

$v_t \leftarrow \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t^2$

$\hat{m}_t \leftarrow m_t / (1 - \beta_1^t)$

$\hat{v}_t \leftarrow v_t / (1 - \beta_2^t)$

$\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} \hat{m}_t / (\sqrt{\hat{v}_t} + \varepsilon)$

**end for**

$\theta \leftarrow \theta_t$

**end while**

**return**  $\theta$

---

## 5 Generative Adversarial Networks

GAN[4] は 2014 年に Goodfellow らによって提案された手法である。その後, WGAN, DCGAN といった様々な亜種が登場し, 現在も様々な手法が提案されている。冒頭でも述べたが, GAN は警察と泥棒の偽札造りに例えられる。  $G$  を泥棒,  $D$  を警察とした時, 以下の作業を繰り返すことで, 偽札の本物具合をあげていくといったものである。

1. 泥棒  $G$  が偽札を作る。
2. 警察  $D$  が偽札であると見破る。
3. 泥棒  $G$  はなぜ, 警察  $D$  に偽札であるとバレたのかを考え, より本物に近い偽札を作れるようになる。

これらは以下のように min-max ゲームとして定式化される。

## 5.1 GAN の定式化

この節では  $D$  は教師なしデータとする。また、データの確率分布を  $\mathbb{P}_{data}$  とする。

**Definition 5.1.** (Generative Adversarial Networks)

機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を以下のように定義する [7].

$\mathcal{X}$  は  $\mathbb{R}^d$  のコンパクト部分集合,  $\mathcal{Y} = [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_G &= \{G: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \mid G \text{ はニューラルネット} \}, \\ \mathcal{H}_D &= \{D: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid D \text{ はニューラルネット} \}, \\ \mathcal{L}_D(D, G) &= \mathbb{E}_{x \sim \mathbb{P}_{data}} [\log D(x)] + \mathbb{E}_{x' \sim \mathbb{P}_G} [\log(1 - D(x'))],\end{aligned}$$

ここで,  $\mathcal{Z}$  は潜在空間と呼ばれる  $\mathbb{R}^d$  の部分空間である。また,  $G \in \mathcal{H}_1$  と確率分布  $\mathbb{P}_Z$  (一様分布や正規分布) に従う確率変数  $Z: \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$  に対し,  $G(Z)$  が従う確率分布を  $\mathbb{P}_G$  とする。  $G \in \mathcal{H}_G$  を Generator と呼び,  $D \in \mathcal{H}_D$  を Discriminator と呼ぶ。  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_D \times \mathcal{H}_G$  とした時, 機械学習空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を敵対的生成ネットワークという。

GAN の目的は,  $\mathbb{P}_G$  を  $\mathbb{P}_{data}$  に近づけることである。そのために, 以下の min-max ゲームを解くことを考える。

$$\arg \min_{D \in \mathcal{H}_D} \arg \max_{G \in \mathcal{H}_G} \mathcal{L}_D.$$

**Remark 5.2.** (Generator と Discriminator の役割について)

Generator  $G \in \mathcal{H}_G$  の役割は,  $z \in \mathcal{Z}$  からデータとよく似た偽物  $G(z) \in \mathcal{X}$  を作成することである。一方, Discriminator  $D \in \mathcal{H}_D$  の役割は,  $x \in \mathcal{X}$  が本物のデータなのか Generator が作った偽物であるのかを判断することである。そのために,  $X \sim \mathbb{P}_X$  が本物である確率を学習する。(すなわち,  $\mathcal{X}$  上の確率測度の近似)

**Definition 5.3.** (最適 Discriminator)

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を GAN とし,  $G \in \mathcal{H}_G$  とする。  $D_G^* \in \mathcal{H}_D$  が

$$\forall D \in \mathcal{H}_D, \mathcal{L}_D(D_G^*, G) \geq \mathcal{L}_D(D, G)$$

を満たす時,  $G$  に関しての最適 Discriminator であるという。

**Proposition 5.4.** ([4])

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を GAN とし,  $G \in \mathcal{H}_G$  とする。この時, 最適 Discriminator は以下で与えられる。

$$D_G^*(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_G(x)},$$

ここで,  $p_{data}$  は  $\mathbb{P}_{data}$  の確率密度関数であり,  $p_G$  は  $\mathbb{P}_G$  の確率密度関数である。



*Proof.* 期待値の計算から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D(G, D) &= \int_{\mathcal{X}} p_{data}(x) \log(D(x)) dx + \int_{\mathcal{X}} p_G(x) \log(1 - D(x)) dx \\ &= \int_{\mathcal{X}} p_{data}(x) \log(D(x)) + p_G(x) \log(1 - D(x)) dx\end{aligned}$$

を得る. ここで, 関数  $F(a, b)(y) = a \log(y) + b \log(1 - y)$  について,

$$\arg \max_{(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}} F(a, b) = \frac{a}{a + b}$$

であることを用いれば主張が従う. □

この命題 5.4 より  $\mathcal{H}_G$  上の関数  $C : \mathcal{H}_G \rightarrow \mathbb{R}$  が

$$C(G) = \mathbb{E}_{x \sim \mathbb{P}_{data}} \left[ \log \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_G(x)} \right] + \mathbb{E}_{x' \sim \mathbb{P}_G} \left[ \log \frac{p_G(x')}{p_{data}(x') + p_G(x')} \right]$$

で定まる. 関数  $C$  を仮想訓練基準 (virtual training criterion) と呼ぶ.

**Theorem 5.5.** (GAN の最小性 [4])

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を GAN,  $C$  を仮想訓練基準とする.  $C$  が最小値  $-\log 4$  を取るための必要十分条件は  $\mathbb{P}_{data} = \mathbb{P}_G$  となることである.

*Proof.*  $\mathbb{P}_{data} = \mathbb{P}_G$  とする. この時,

$$\begin{aligned}C(G) &= \mathbb{E}_{x \sim \mathbb{P}_{data}} \left[ \log \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_G(x)} \right] + \mathbb{E}_{x' \sim \mathbb{P}_G} \left[ \log \frac{p_G(x')}{p_{data}(x') + p_G(x')} \right] \\ &= \mathbb{E}_{x \sim \mathbb{P}_{data}} \left[ \log \frac{1}{2} \right] + \mathbb{E}_{x' \sim \mathbb{P}_G} \left[ \log \frac{1}{2} \right] \\ &= -\log 2 - \log 2 = -\log 4\end{aligned}$$

であるから,  $C$  は常に最小値  $-\log 4$  をとる. 逆に  $C$  の最小値が  $-\log 4$  であるとする. JSD を Jensen-Shannon Divergence とし,  $C$  を変形すると

$$C(G) = -\log 4 + JSD(\mathbb{P}_{data} \| \mathbb{P}_G)$$

となる. ここで  $JSD(\mathbb{P}_{data} \| \mathbb{P}_G) = 0$  と  $\mathbb{P}_{data} = \mathbb{P}_G$  は同値だから  $\mathbb{P}_{data} = \mathbb{P}_G$  である. □

これらからわかる通り, GAN とはデータの確率密度関数をニューラルネットを用いて近似する機構である.

## 5.2 Training Instability of GAN

前節では GAN の定式化及び, いくつかの命題を証明した. ここでは GAN の学習の不安定性についてのべる. 詳しくは [5] を参照してほしい.

**Theorem 5.6.** (The Perfect Discriminator Theorem)

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を GAN とし,  $p_{data}$  を  $\mathbb{P}_{data}$  の確率密度関数,  $p_G$  は  $\mathbb{P}_G$  の確率密度関数とする. この時,

$$\exists M, P \subset \mathcal{X} : \text{compact s.t. } M \cap P = \emptyset, \text{supp}(p_{data}) \subset M \text{ かつ } \text{supp}(p_G) \subset P$$

が成立するならば, 以下の性質を満たす smooth な最適 Discriminator  $D_G^*$  が存在する.

1.  $\mathbb{P}_{data}(D = 1) = 1$  かつ  $\mathbb{P}_G(D = 0) = 1$
2.  $\forall x \in M \cup P, \nabla_x D_G^*(x) = 0$ .

*Proof.*  $P \cap M = \emptyset$  だから,  $\delta = d(P, M)$  とすれば  $\delta > 0$  である. ここで,

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \{x \in \mathcal{X} \mid d(x, M) \leq \delta/3\}, \\ \hat{P} &= \{x \in \mathcal{X} \mid d(x, P) \leq \delta/3\}\end{aligned}$$

と定義する.  $M, P$  がコンパクトであることと,  $\delta$  の定義より  $\hat{M}, \hat{P}$  は共にコンパクトであり,  $\hat{M} \cap \hat{P} = \emptyset$  である. したがって, Urysohn's smooth lemma より

$$\exists D_G^* \in \mathcal{H}_D : \text{smooth s.t. } D_G^*|_{\hat{M}} = 1 \text{ かつ } D_G^*|_{\hat{P}} = 0$$

が成立する. 任意の  $x \in \text{supp}(p_{data})$  に対して,  $D_G^*(x) = 1$  だから,  $\log D_G^*(x) = 0$  である. また, 任意の  $x \in \text{supp}(p_G)$  に対して,  $D_G^*(x) = 0$  だから,  $\log(1 - D_G^*(x)) = 0$  である. これより  $D_G^*$  が最適 Discriminator であること, 及び 1. が従う. また  $D_G^*$  は  $M \cup P$  上で定値写像だから 2. が成立する.  $\square$

**Definition 5.7.** (Discriminator ノルム)

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を GAN とする.  $D \in \mathcal{H}_D \subset C^1(\mathcal{X})$  に対して,

$$\|D\| = \sup_{x \in \mathcal{X}} |D(x)| + \|\nabla_x D(x)\|_2$$

とする. この時,  $\|\cdot\|$  の  $\mathcal{H}_D$  に制限したノルム  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_D}$  を Discriminator ノルムという.

**Theorem 5.8.** (Vanishing gradient on the Generator)

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を GAN とする.  $G_\theta \in \mathcal{H}_G$  とし,  $p_{data}$  を  $\mathbb{P}_{data}$  の確率密度関数,  $p_G$  は  $\mathbb{P}_G$  の確率密度関数とする. この時,

$$\exists M, P \subset \mathcal{X} : \text{compact s.t. } M \cap P = \emptyset, \text{supp}(p_{data}) \subset M \text{ かつ } \text{supp}(p_G) \subset P$$

が成立し,

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } \forall D \in \mathcal{H}_D, \|D_G - D_G^*\|_{\mathcal{H}_D} < \delta \text{ かつ } \mathbb{E}_{z \sim \mathbb{P}_Z} [\|J_\theta G_\theta(z)\|_2^2] \leq M^2$$

が成立するとする. この時,

$$\forall D \in \mathcal{H}_D, \|\nabla_\theta \mathbb{E}_{z \sim \mathbb{P}_Z} [\log(1 - D(G_\theta(z)))]\|_2 < M \frac{\delta}{1 - \delta}$$

が成立する.

*Proof.*  $\|\cdot\|^2$  が凸であることと, Jensen の不等式より

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\theta} \mathbb{E}_{z \sim \mathbb{P}_Z} [\log(1 - D(G_{\theta}(z)))]\|_2^2 &\leq \mathbb{P}_{z \sim \mathbb{P}_Z} \left[ \frac{\|\nabla_{\theta} D(G_{\theta}(z))\|_2^2}{|1 - D(G_{\theta}(z))|^2} \right] \\
&\leq \mathbb{P}_{z \sim \mathbb{P}_Z} \left[ \frac{\|\nabla_x D(G_{\theta}(z))\|_2^2 \|J_{\theta} G_{\theta}(z)\|_2^2}{|1 - D(G_{\theta}(z))|^2} \right] \\
&\leq \mathbb{P}_{z \sim \mathbb{P}_Z} \left[ \frac{(\|\nabla_x D^*(G_{\theta}(z))\|_2 + \delta)^2 \|J_{\theta} G_{\theta}(z)\|_2^2}{(|1 - D^*(G_{\theta}(z))| - \delta)^2} \right] \\
&\leq \mathbb{P}_{z \sim \mathbb{P}_Z} \left[ \frac{\delta^2 \|J_{\theta} G_{\theta}(z)\|_2^2}{(1 - \delta)^2} \right] \\
&\leq M^2 \frac{\delta^2}{(1 - \delta)^2}
\end{aligned}$$

となる. 両辺の平方をとれば題意が従う.  $\square$

**Corollary 5.9.**  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, D, \mathcal{H}, \mathcal{L}_D)$  を GAN とする.  $G_{\theta} \in \mathcal{H}_G$  とし,  $p_{data}$  を  $\mathbb{P}_{data}$  の確率密度関数,  $p_G$  は  $\mathbb{P}_G$  の確率密度関数とする. この時,

$$\exists M, P \subset \mathcal{X} : \text{compact s.t. } M \cap P = \emptyset, \text{supp}(p_{data}) \subset M \text{ かつ } \text{supp}(p_G) \subset P$$

が成立し,

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } \forall D \in \mathcal{H}_D, \|D_G - D_G^*\| < \delta \text{ かつ } \mathbb{E}_{z \sim \mathbb{P}_Z} [\|J_{\theta} G_{\theta}(z)\|_2^2] \leq M^2$$

が成立するとする. この時,

$$\lim_{\|D - D^*\|_{\mathcal{H}_D} \rightarrow 0} \nabla_{\theta} \mathbb{E}_{z \sim \mathbb{P}_Z} [\log(1 - D(G_{\theta}(z)))] = 0$$

が成立する.

これらの定理・系から Discriminator が最適解に近づけば近づくほど, Generator の勾配が 0 に近づき学習が安定しないことがわかる.

### 5.3 GAN の安定化について

今回は, 著者の力不足により紹介することができなかったが, 前節で議論した GAN の不安定性の議論に基づき, GAN の学習を安定させるための手法がいくつか提案されている. それらについて興味のある読者は

- Wasserstein GAN[6]
- Spectral Normalization for Generative Adversarial Networks[7]

を読んでみてほしい.

## 6 Conclusion

3 回生の方では去年から書きたいと思っていた「機械学習」についてまとめるができた。しかし、まだまだ数学的には不厳密な部分が残っている為、定義の改良をしていく必要はあると感じた。その為、今後も数理機械学習の勉強を続けていき、完成度の高い定義を完成させていきたいと考えている。最後に、今回のこの機関紙の添削・推敲に協力していただいた方々、GAN という素晴らしい技術やその数学的な側面を研究されている皆様に感謝を申し上げると共に、2019 年度の方程を完了とする。

## 参考文献

- [1] darden, 多クラス分類ロジスティック回帰,  
<http://darden.hatenablog.com/entry/2018/01/25/222201>, Python と機械学習, 2018
- [2] Diederik P. Kingma and Jimmy Ba, Adam: A Method for Stochastic Optimization, International Conference on Learning Representations, 2015.
- [3] G. Cybenko, Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function, Mathematics of control, signal and systems, vol. 2, no. 4, 1989
- [4] Ian J. Goodfellow, Jean Pouget-Abadie, Mehdi Mirza, Bing Xu, David Warde-Farley, Sherjil Ozair, Aaron Courville and Yoshua Bengio. Generative adversarial nets. In Advances in Neural Information Processing Systems, 2014.
- [5] Martin Arjovsky and Leon Bottou, Towards Principled Methods for Training Generative Adversarial Networks, International Conference on Learning Representations, 2017.
- [6] Martin Arjovsky, Soumith Chintala and Leon Bottou, Wasserstein GAN, International Conference on Learning Representations, 2017.
- [7] Takeru Miyato, Toshiki Kataoka, Masanori Koyama and Yuichi Yoshida, Spectral Normalization for Generative Adversarial Networks, International Conference on Learning Representations, 2018.
- [8] 矢田部 浩平, 信号処理と最適化, [http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/~saruwatari/SP-Grad2018\\_09ProfYatabe.pdf](http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/~saruwatari/SP-Grad2018_09ProfYatabe.pdf), 早稲田大学 表現工学科, 2018.
- [9] mochimochidog, ニューラルネットワークの普遍性定理,  
<https://qiita.com/mochimochidog/items/ca04bf3df7071041561a>, Qiita, 2020.
- [10] Preferred Networks, ディープラーニング入門 Chainer チュートリアル,  
<https://tutorials.chainer.org/ja/index.html>, 2019