数理強化学習入門

yataka

目次

第 I 部

数学的知識

第 1 章

集合論

ここでは集合を、ある条件を満たすものを集めたものとして定義する.

1.1 様々な集合

Definition 1.1.1. (部分集合)
X, Y を集合とする.X が Y の部分集合であるとは

$$\forall x \in X, x \in Y$$

が成り立つことであり, X が Y の部分集合であることを

$$X \subset Y \text{ または } Y \supset X$$

と表す.

Definition 1.1.2. (差集合)
X, Y を集合とする. X の元ではあるが Y の元ではないものを集めた集合を差集合といい $X - Y$ と表す. すなわち

$$X - Y = \{x \in X | x \in X \text{ かつ } x \notin Y\}$$

Definition 1.1.3. (全体集合) その状況における一番大きい集合となる集合を全体集合という.

Definition 1.1.4. (補集合)
X を全体集合とする. $A \subset X$ とし差集合 $X - A$ を A の補集合といい A^c で表す. すなわち

$$A^c = \{x \in X | x \in X \text{ かつ } x \notin A\}$$

Definition 1.1.5. (和集合) A, B を集合とする. A の元または B の元を集めた集合を A と B の和集合といい $A \cup B$ と表す. すなわち

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

Definition 1.1.6. (共通集合)
A, B を集合とする．A の元かつ B の元であるものを集めた集合を A と B の共通集合といい $A \cap B$ と表す．すなわち

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

1.2　集合と写像

Definition 1.2.1. (写像)
X, Y を集合とする．f が X の任意の要素を Y の元にただ一つ対応させる操作のことを写像といい，X から Y への写像であるということを

$$f : X \to Y$$

と表す．

Definition 1.2.2. (単射)
f は X から Y への写像であるとする.f が

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

を満たすとき f は単射であるという．

Definition 1.2.3. (全射)
f は X から Y への写像であるとする.f が

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \ s.t. \ y = f(x)$$

を満たすとき f は全射であるという．

Definition 1.2.4. (全単射)
f は X から Y への写像であるとする．f が単射かつ全射であるとき f は全単射であるという．

1.3　上限・下限と最大値・最小値

1.4　集合系と集合族

第 2 章

位相空間論

第 3 章

力学系

第 4 章

測度論

まず初めに測度論に関しての事項をのべる.

4.1 測度空間

まず, 面積を測れる集合である σ-algebra を定義する.

Definition 4.1.1. (σ-algebra)
X を集合とする. X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $$A_i \in \mathcal{F}(i \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

を満たす時 $\mathcal{F}$ を σ-algebra という.

Example 4.1.2. 集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は σ-algebra となる.

Proof. 1.$X \in \mathcal{P}(X)$ は $X \subset X$ より言える.
2.$A \in \mathcal{P}(X) \Longrightarrow A^c \in \mathcal{P}(X)$ を示す.
任意に $A \in \mathcal{P}(X)$ をとる. $X - A \subset X$ より, $A^c \in \mathcal{P}(X)$.
3. $A_i \in \mathcal{P}(X)(i \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}(X)$ を示す.
任意に $A_i \in \mathcal{P}(X)(i \in \mathbb{N})$ をとる.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset X$$

であるので, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}(X)$.

1. 2. 3. より $\mathcal{P}(X)$ は σ-algebra である. $\square$

Theorem 4.1.3. $\mathcal{F}$ を σ-algebra する．この時

1. $\phi \in \mathcal{F}$
2. $$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$
3. $$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

が成立する．

Proof. 1. $X \in \mathcal{F}$ より $\phi = X^c \in \mathcal{F}$.
2. 任意に $\mathcal{F}$ の元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ をとる．この時

$$B_i = \begin{cases} A_i & (1 \leq i \leq n) \\ \phi & (i > n) \end{cases}$$

として $B_i \in \mathcal{F}$ $(i \in \mathbb{N})$ を定義すれば, $\phi \in \mathcal{F}$ より,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$$

3. 任意に $\mathcal{F}$ の元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ をとる．この時定義より $A_1^c, A_2^c, \cdots, A_n^c \in \mathcal{F}$ であり,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c \in \mathcal{F}$$

□

Definition 4.1.4. (可測空間)
集合 X と X 上の σ-algebra の組 $(X, \mathcal{F})$ を可測空間と呼ぶ.

次に面積を測る写像である測度 m を定義する.

Definition 4.1.5. (測度)
$\mathcal{F}$ を σ アルジェブラとする．$\mathcal{F}$ 上の写像 m が,

1. $\forall A \in \mathcal{F}, 0 \leq m(A) \leq \infty$, 特に $m(\phi) = 0$
2. $A_i \in \mathcal{F}(i \in \mathbb{N})$ が互いに排反 $(\forall i, k \in \mathbb{N}, i \neq k \Rightarrow A_i \cap A_k = \phi)$ であるならば

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m\left(A_i\right)$$

を満たす時 m を $\mathcal{F}$ 上の測度という.

Theorem 4.1.6. m を $\mathcal{F}$ 上の測度とする．この時

1. $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ が互いに排反である時

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

2. $A, B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ の時

$$m(A) \leq m(B)$$

が成立し，特に $m(A) < \infty$ の時は

$$m(B - A) = m(B) - m(A)$$

が成立する．

Proof. 1. 任意に互いに排反な $\mathcal{F}$ の元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ をとる．この時

$$B_i = \begin{cases} A_i & (1 \leq i \leq n) \\ \phi & (i > n) \end{cases}$$

として $B_i \in \mathcal{F}$ $(i \in \mathbb{N})$ を定義すれば，$m(\phi) = 0$ より，

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

2. 任意に $A, B \in \mathcal{F}$ をとり $A \subset B$ と仮定する．$C = B - A$ とすれば

$$\begin{aligned} m(B) = m(A \cup C) &= m(A) + m(C) \\ &= m(A) + m(B - A) \\ &\leq m(A) \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで $m(A) < \infty$ とすれば，上記の式より

$$m(B - A) = m(B) - m(A)$$

□

Definition 4.1.7. (測度空間)
$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし $\mathcal{F}$ 上の測度を m とする．この時組 $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間と呼ぶ．

4.2　測度空間と位相空間

ここでは、位相空間から生成される σ-algebra について述べる．

Theorem 4.2.1. X の部分集合からなる任意の集合族 $\mathscr{U}$ に対して，$\mathscr{U}$ を含む最小の σ-algebra が存在する．またこの σ-algebra のことを $\sigma(\mathscr{U})$ と表す．

Definition 4.2.2. (ボレル集合族)
$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．この時 $\mathscr{O}$ を含む最小の σ-algebra のことをボレル集合族といい $\mathcal{B}(\mathscr{O})$ で表す．特に, 位相空間が $(\mathbb{R}, \mathscr{O}_{\mathbb{R}})$ の時は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と表す.

第 5 章

関数解析

第 6 章

確率論

6.1 確率測度・確率空間

いよいよ今まで書いてきた測度論に基づいて確率空間を定義する.

Definition 6.1.1. (確率測度)
$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする. $\mathcal{F}$ から $[0,1]$ への写像 P が

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A_i \in \mathcal{F}(i \in \mathbb{N})$ が互いに排反であるならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

を満たす時, P を確率測度と呼ぶ.

Definition 6.1.2. (確率空間)
$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とし P を確率測度とする. この時, 組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間と呼ぶ. また, Ω を標本空間といい $\mathcal{F}$ の元を事象と呼ぶ.

測度論の節では σ アルジェブラを「面積が図れる集合の集まり」, 測度を「集合の面積」を測る写像と言うようなモチヴェーションで定義したが, 確率空間では σ アルジェブラを「確率が測れる集合の集まり」確率測度を「確率を測れる」写像としてそれぞれに対する解釈を変える.

Theorem 6.1.3. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. この時

$$\forall A \in \mathcal{F}, P(A^c) = 1 - P(A)$$

が成立する.

Proof. 任意に $A \in \mathcal{F}$ をとり $X = \Omega - A$ とする.$A \cap X = \phi$, $\Omega = A \cup X$ であるので.

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A \cup X) \\ &= P(A) + P(X) \end{aligned}$$

$P(A) < \infty$ より

$$\begin{aligned} P(X) &= P(\Omega) - P(A) \\ &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

したがって, $X = \Omega - A = A^c$ で A は任意だったから,

$$\forall A \in \mathcal{F}, P(A^c) = 1 - P(A)$$

が成立する. $\square$

第 II 部

数理強化学習

第 7 章

マルコフ決定過程

参考文献

[1] 内田 伏一 (著)「集合と位相」
[2] 参考文献の名前・著者 2
[3] 参考文献の名前・著者 N