Optimization Algorithms on Riemannian Manifold

小泉孝弥

立命館大学大学院 修士 2 年

April 12, 2022

Contents

Introduction

本, 発表では制約空間がリーマン多様体となっている非線形連続最適化問題を扱う.

$$\left|\begin{array}{ll}\text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to } x \in M & \end{array}\right.$$

制約空間がリーマン多様体となっている場合, f を M に制限することで, 制約なしの問題と考えることができる. 今回は, 勾配降下法をリーマン多様体上に拡張し, 数値計算を行なった結果を報告する.

Contents

Riemmannian Manifold

Definition (Riemmannian Manifold)

M を可微分多様体とする．任意の接空間 T_xM に内積 $g : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ が定まっているとき，組 (M, g) をリーマン多様体 *(Riemmannian Manifold)* といい，g をリーマン計量と呼ぶ．

Definition (Gradient)

(M, g) をリーマン多様体とし，$f : M \to \mathbb{R}$ を可微分写像とする．$x \in M$ について

$$\forall \xi \in T_xM, g(\mathrm{grad} f(x), \xi) = Df(x)[\xi]$$

を満たす一意な $\mathrm{grad} f(x) \in T_xM$ を f の x での勾配 *(Gradient)* と呼ぶ．

Sphere

Example (Sphere)

自然数 $n \geq 2$ に対して, 球面 $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top z = 0\}$ は可微分多様体となる. また, $x \in S^{n-1}$ での接空間 $T_x S^{n-1}$ は

$$T_x S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid x^\top z = 0\}$$

となる. ここで, $g_x : T_x S^{n-1} \times T_x S^{n-1} \to \mathbb{R}$ を

$$g_x(\xi, \eta) = \xi^\top \eta$$

と定めれば, g_x は $T_x S^{n-1}$ の内積となるので, S^{n-1} はリーマン多様体である.

Stiefel Manifold

Example (Stiefel Manifold)

$X = [x_1 x_2 \cdot x_p] \in \mathbb{R}^{n\times p} (n \geq p)$ で, $\{x_i\}_{i=1}^{p}$ が正規直交系であるような $n \times p$ 行列全体は可微分多様体となる. この多様体をシュティーフェル多様体 *(Stiefel Manifold)* といい, $\mathrm{St}(p, n)$ と表す. すなわち

$$\mathrm{St}(p, n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times p} \mid X^\top X = \mathbb{I}_p\}.$$

である.

$X \in \mathrm{St}(p,n)$ での接空間 $T_X St(p,n)$ は,

$$T_X\,\mathrm{St}(p,n) = \left\{ Z \in \mathbb{R}^{n\times p} \mid X^T Z + Z^T X = 0 \right\}$$
$$= \left\{ X\Omega + X_\perp K \mid \Omega \in \mathrm{Skew}(p), K \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p} \right\}$$

となる. ここで $\mathrm{Skew}(p) = \{\Omega \in \mathbb{R}^{p\times p} \mid \Omega^\top = -\Omega\}$ であり, $X_\perp$ は $\mathrm{span}(X)^\perp = \mathrm{span}(X_\perp)$ を満たす $n \times (n-p)$ 行列である.
$g_X : T_X\,\mathrm{St}(p,n) \times T_X\,\mathrm{St}(p,n) \to \mathbb{R}$ を,

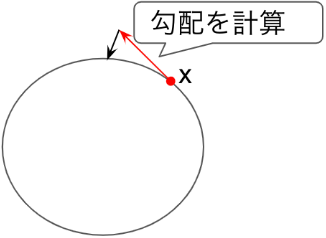
$$g_X(\xi,\eta) = \mathrm{tr}(\xi^\top \eta)$$

と定めれば, g_X は内積となるので, $\mathrm{St}(p,n)$ はリーマン多様体である.

Contents

issue of extension

例として、勾配降下法をリーマン多様体に拡張する．その際に，勾配の部分をリーマン多様体上の勾配に変更するだけでは，リーマン多様体からはみ出てしまうため，制約条件を満たすことが出来ない．そこで，はみ出てしまった点をリーマン多様体に戻す写像を考えることで，制約を満たす点列 $\{x_k\}$ を得ることができる．



Retraction

リーマン多様体 M に対して, 接束を $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ と表し,
$R : TM \to M$ の $T_x M$ への制限を $R_x : T_x M \to M$ と表す.

Definition (Retraction)

M をリーマン多様体, $R : TM \to M$ を C^∞ 関数とする. 任意の $x \in M$ に対して, $R_x : T_x M \to M$ が以下の 2 つの条件を満たすとき, R を M 上のレトラクション (Retraction) と呼ぶ.

1. $R_x(0_x) = x$
2. $DR_x(0_x) = id_{T_x M}$

Riemannian Gradient Decent

M をリーマン多様体, $R : TM \to M$ をレトラクションとする.
リーマン多様体上の勾配降下法 (RGD) を以下のように設計する.

Algorithm 1 Riemannian Gradient Decent(RGD)

Require: f: differentiable function on M
Require: $0 < t < 1$:
  $x \leftarrow x_0 \in M$
  while x not converged **do**
    $x \leftarrow R_x(x - t\,\mathrm{grad} f(x))$
  end while
  return x

Contents

References

[1] P.-A. ABSIL, R. MAHONY, AND R. SEPULCHRE, Optimization Algorithms on Matrix Manifolds, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.