Optimization Algorithms on Riemannian Manifold

小泉孝弥

立命館大学大学院 修士 2 年

April 12, 2022

Contents

Riemmannian Manifold

Definition (Riemmannian Manifold)

M を可微分多様体とする．任意の接空間 T_xM に内積 $g : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ が定まっているとき，組 (M, g) をリーマン多様体 *(Riemmannian Manifold)* といい，g をリーマン計量と呼ぶ．

Definition (Gradient)

(M, g) をリーマン多様体とし，$f : M \to \mathbb{R}$ を可微分写像とする．$x \in M$ について

$$\forall \xi \in T_xM, g(\mathrm{grad} f(x), \xi) = Df(x)[\xi]$$

を満たす一意な $\mathrm{grad} f(x) \in T_xM$ を f の x での勾配 *(Gradient)* と呼ぶ．

Contents

Sphere

Example (Sphere)

自然数 $n \geq 2$ に対して, 球面 $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top z = 0\}$ は可微分多様体となる．また, $x \in S^{n-1}$ での接空間 $T_x S^{n-1}$ は

$$T_x S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid x^\top z = 0\}$$

となる．ここで, $g_x : T_x S^{n-1} \times T_x S^{n-1} \to \mathbb{R}$ を

$$g_x(\xi, \eta) = \xi^\top \eta$$

と定めれば, g_x は $T_x S^{n-1}$ の内積となるので, S^{n-1} はリーマン多様体である．

Stiefel Manifold

Example (Stiefel Manifold)

$X = [x_1 x_2 \cdot x_p] \in \mathbb{R}^{n \times p} (n \geq p)$ で，$\{x_i\}_{i=1}^p$ が正規直交系であるような $n \times p$ 行列全体は可微分多様体となる．この多様体をシュティーフェル多様体 *(Stiefel Manifold)* といい，$\mathrm{St}(p, n)$ と表す．すなわち

$$\mathrm{St}(p, n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid X^\top X = \mathbb{I}_p\}.$$

である．

$X \in \mathrm{St}(p,n)$ での接空間 $T_X St(p,n)$ は,

$$T_X \,\mathrm{St}(p,n) = \left\{ Z \in \mathbb{R}^{n\times p} \mid X^T Z + Z^T X = 0 \right\}$$
$$= \left\{ X\Omega + X_\perp K \mid \Omega \in \mathrm{Skew}(p), K \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p} \right\}$$

となる. ここで $\mathrm{Skew}(p) = \{\Omega \in \mathbb{R}^{p\times p} \mid \Omega^\top = -\Omega\}$ であり, $X_\perp$ は $\mathrm{span}(X)^\perp = \mathrm{span}(X_\perp)$ を満たす $n \times (n-p)$ 行列である.
$g_X : T_X \,\mathrm{St}(p,n) \times T_X \,\mathrm{St}(p,n) \to \mathbb{R}$ を,

$$g_X(\xi,\eta) = \mathrm{tr}(\xi^\top \eta)$$

と定めれば, g_X は内積となるので, $\mathrm{St}(p,n)$ はリーマン多様体である.

Contents

Contents

Contents

Contents

References

[1] P.-A. ABSIL, R. MAHONY, AND R. SEPULCHRE, Optimization Algorithms on Matrix Manifolds, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.