◎スカラー、ベクトル、行列

✓スカラー

$x, y, z, M, \underset{1\times 1}{N}$

✓ベクトル

$$\text{太}\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{N\times 1}$$

$$\boldsymbol{x}^{T} = [1, 2, 3]$$

転置

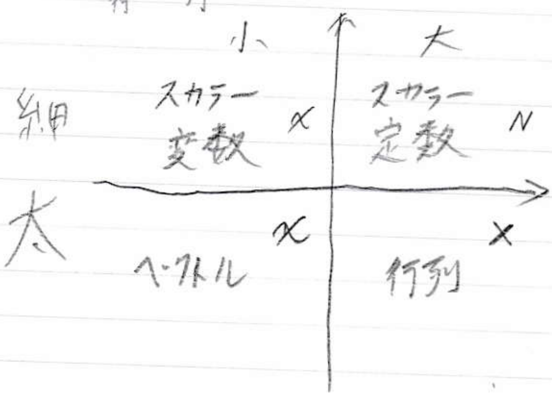
✓行列

$$\text{太}\ X \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

サイズ　3行 × 2列

※ M, N, O, P, L 以外の大文字は行列とする

△テンソル…行列を並べたもの



◎行列の演算

足し算

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6 \\ 2-5 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

ポイント ⇒ サイズが同じであることが条件.

○かけ算（行列積）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8 \\ 3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

ポイント.

（条件）$M=O$

$$\begin{array}{cccc} & A & B & = C \\ \text{サイズ} & N\times \underline{M} & \underline{O}\times P & N\times P \end{array}$$

1) $\underset{1\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}} = 11$

2) $\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1\times5+2\times6 \\ 3\times5+4\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$

3) $\underset{1\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\times\overset{9}{3}+4\times\overset{4}{1} \\ 5\times\overset{15}{3}+6\times\overset{6}{1} \end{bmatrix}$

$$= \underset{1\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 13 \\ 21 \end{bmatrix}}$$
$$= 1\times13+2\times21$$
$$= 55$$

◎サイズ感

(1) [ベクトル] $\begin{bmatrix} ベ \\ ク \\ ト \\ ル \end{bmatrix}$ = スカラー　　$x^T y$ = スカラー

(2) [行列] $\begin{bmatrix} ベ \\ ク \\ ト \\ ル \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ベ \\ ク \\ ト \\ ル \end{bmatrix}$　　$X y$ = ベクトル

(3) [ベクトル] [行列] $\begin{bmatrix} ベ \\ ク \\ ト \\ ル \end{bmatrix}$ = スカラー　　$x^T A y$ = スカラー

◎転置 (Transpose)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

公式

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(AB)^T = B^T A^T$

(3) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

キカガク
No. 線形代数 4
Date

◎単位行列と逆行列

○単位行列

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

スカラーの「1」
に対応
$2 \times 1 = 2$

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(公式)

$$AI = A$$

$$IA = A$$

練習

$$\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times1 \\ 3\times1+4\times0 & 3\times0+4\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

◎逆行列 (インバースマトリックス)　$2 \times \underbrace{2^{-1}}_{\frac{1}{2}} = 1$

スカラーの逆数に対応

$A\boxed{A^{-1}} = I$
Aの逆行列　単位行列

$\boxed{A^{-1}}A = I$
↳エーインバース

条件

Aが正方行列である (最低限)　$3\boxed{A}^{3}$

◎ ベクトルで微分

$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ のとき $\mathbb{C}^T\mathbb{X}$ は?

$\underbrace{\mathbb{C}^T\mathbb{X}}_{\text{スカラー}} = [3 \ \ 4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1 + 4x_2$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{X}}(\mathbb{C}^T\mathbb{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1 + 4x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(3x_1 + 4x_2) \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots Ⓐ \\ \cdots Ⓑ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ⓐ
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1 + 4x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_2)$$
$$= 3\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + 4x_2\frac{\partial}{\partial x_1}(1)$$
$$= 3 \times 1 + 4x_2 \times 0$$
$$= 3$$

Ⓑ
$$\frac{\partial}{\partial x_2}(3x_1 + 4x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(3x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_2)$$
$$= 3x_1\frac{\partial}{\partial x_2}(1) + 4\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2)$$
$$= 3x_1 \times 0 + 4 \times 1$$
$$= 4$$

例) $\frac{\partial}{\partial \mathbb{X}}(1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(1) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbb{O}$ ゼロベクトル

☆ ベクトルで微分の公式

1) $\frac{\partial}{\partial \mathbb{X}}(c) = \mathbb{O}$

2) $\frac{\partial}{\partial \mathbb{X}}(\mathbb{b}^T\mathbb{X}) = \mathbb{b}$

(3) $\frac{\partial}{\partial \mathbb{X}}(\mathbb{X}^T A \mathbb{X}) = (A + A^T)\mathbb{X}$

The matrix cookbook
2.4章