CUBIC SPLINE

OTAKE Takayoshi, 2019-02-11

Condition

2次元の $n + 1$ 個の点の列:

$$P = (p_i)_{i=0}^{n} \tag{1.1}$$

のスプライン曲線を求める。

ここで、各点 p_i を (x_i, y_i) として $x_i < x_{i+1}$ と $n > 0$ を条件とする。

点が $n + 1$ 個あるため、スプライン曲線は n 個の区間曲線の列:

$$Spline = (S_i)_{i=0}^{n-1} \tag{1.2}$$

となるが、この区間曲線を3次数関数:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \tag{1.3}$$

とする。

Solution

簡単のため

$$x_{d:i} = x_{i+1} - x_i, y_{d:i} = y_{i+1} - y_i$$

とする。

区間曲線は区間の端の点を通るため

$$S_i(x_i) = d_i = y_i \tag{2.1}$$

である。また、隣接する区間曲線は同一の点を通るため

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

$$a_i x_{d:i}^3 + b_i x_{d:i}^2 + c_i x_{d:i} + y_i = y_{i+1}$$

$$a_i x_{d:i}^3 + b_i x_{d:i}^2 + c_i x_{d:i} = y_{d:i} \tag{2.2}$$

である。

隣接する区間曲線は滑らかに連続するため、区間曲線の傾き:

$$S_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i$$

は区間曲線の隣接点で等しいため

$$\begin{aligned} S_i'(x_{i+1}) &= S_{i+1}'(x_{i+1}) \\ 3a_i x_{d:i}^2 + 2b_i x_{d:i} + c_i &= c_{i+1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

である。

eq. (2.2) より

$$c_i = \frac{y_{d:i}}{x_{d:i}} - a_i x_{d:i}^2 - b_i x_{d:i} \tag{2.2'}$$

を eq. (2.3) に代入して

$$\begin{aligned} &2a_i x_{d:i}^2 + b_i x_{d:i} + \frac{y_{d:i}}{x_{d:i}} \\ &= \frac{y_{d:i+1}}{x_{d:i+1}} - a_{i+1} x_{d:i+1}^2 - b_{i+1} x_{d:i+1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる。ここで区間曲線は滑らかに連続するため、区間曲線の曲率:

$$S_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$$

は区間曲線の隣接点で等しいため

$$\begin{aligned} S_i''(x_{i+1}) &= S_{i+1}''(x_{i+1}) \\ 6a_i x_{d:i} + 2b_i &= 2b_{i+1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

である。

eq. (2.5) より

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{3x_{d:i}} \tag{2.5'}$$

を eq. (2.4) に代入して

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}(b_{i+1} - b_i)x_{d:i} + b_i x_{d:i} + \frac{y_{d:i}}{x_{d:i}} \\ &= \frac{y_{d:i+1}}{x_{d:i+1}} - \frac{1}{3}(b_{i+2} - b_{i+1})x_{d:i+1} - b_{i+1} x_{d:i+1} \\ &x_{d:i} b_i + 2(x_{d:i} + x_{d:i+1})b_{i+1} + x_{d:i+1} b_{i+2} \\ &= 3\left(\frac{y_{d:i+1}}{x_{d:i+1}} - \frac{y_{d:i}}{x_{d:i}}\right) = z_{i+1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで $b_0 = b_n = 0$ として、$n-1$ 個の方程式を行列で表すと

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2(x_{d:0}+x_{d:1}) & x_{d:1} & & \mathbf{0} \\ x_{d:1} & 2(x_{d:1}+x_{d:2}) & x_{d:2} & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & x_{d:n-2} & 2(x_{d:n-2}+x_{d:n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot (b_1, b_2, \cdots, b_{n-1})^T = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})^T$$

となり、$\mathbf{X}$ は $(n-1) \times (n-1)$ の正方行列であるため

$$(b_1, b_2, \cdots, b_{n-1})^T = \mathbf{X}^{-1} \cdot (z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})^T \tag{2.7}$$

となる。

eq. (2.7) から b_i が求まると、 eq. $(2.5')$ から a_i が、eq. $(2.2')$ から c_i が求まる。eq. (2.1) より d_i が求まっているためスプライン曲線が得られる。