QUADRATIC SPLINE

OTAKE Takayoshi, 2019-02-02

Condition

2次元の $n+1$ 個の点の列:

$$P = (p_i)_{i=0}^{n} \tag{1.1}$$

のスプライン曲線を求める。

ここで、各点 p_i を (x_i, y_i) として $x_i < x_{i+1}$ と $n > 0$ を条件とする。

点が $n+1$ 個あるため、スプライン曲線は n 個の区間曲線の列:

$$Spline = (S_i)_{i=0}^{n-1} \tag{1.2}$$

となるが、この区間曲線を2次数関数:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i \tag{1.3}$$

とする。

Solution

区間曲線は区間の端の点を通るため

$$S_i(x_i) = c_i = y_i \tag{2.1}$$

である。また、隣接する区間曲線は同一の点を通るため

$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= S_{i+1}(x_{i+1}) \\ a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i &= y_{i+1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

である。

隣接する区間曲線は滑らかに連続するため、区間曲線の傾き:

$$S_i'(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i$$

は区間曲線の隣接点で等しいため

$$\begin{aligned} S_i'(x_{i+1}) &= S_{i+1}'(x_{i+1}) \\ 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i &= b_{i+1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

である。

eq. (2.2) より

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - a_i(x_{i+1} - x_i) \tag{2.2'}$$

を eq. (2.3) に代入して

$$\begin{aligned} 2a_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - a_i(x_{i+1} - x_i) \\ = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - a_{i+1}(x_{i+2} - x_{i+1}) \end{aligned}$$

$$a_{i+1} = -\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_{i+1}} a_i + \frac{\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_{i+1}} = u_i a_i + v_i \tag{2.4}$$

となる。ここで

$$u_i = -\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$

$$v_i = \frac{\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$

としたが、これらは既知である。

さて、eq. (4) より c_i が求まっていて、eq. $(2.2')$ より b_i は a_i で求まることがわかっている。また、eq. (2.4) より a_i は a_0 に依存することがわかっているため、a_0 が決まればスプライン曲線が得られる。

ここで $a_0 = 0$ としてスプライン曲線を得ることもできるが、P にとってより滑らかなスプライン曲線を求めたい。

区間曲線の曲がり具合は

$$S_i''(x) = 2a_i \tag{3.1}$$

より

$$C_i = a_i^2 \tag{3.3}$$

と表せるため、スプライン曲線全体の曲がり具合を

$$C_S = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \tag{3.4}$$

で評価できる。

区間曲線の曲がり具合 C_i は eq. (2.4) より

$$a_i^2 = (u_{i-1}a_{i-1} + v_{i-1})^2 = u_{i-1}^2 a_{i-1}^2 + 2u_{i-1}v_{i-1}a_{i-1} + v_{i-1}^2 = \cdots$$

と a_i を a_{i-1} で代入する事を繰り返すと a_0 の2次関数となるため、eq. (3.4) も a_0 の2次数関数となる。

ここで

$$U_j a_j^2 + V_j a_j + W_j \Rightarrow U_{j-1} a_{j-1}^2 + V_{j-1} a_{j-1} + W_{j-1} \Rightarrow \cdots$$

と変換を繰り返すイメージで

$$\begin{aligned} u_j^2 a_j^2 + 2u_j v_j a_j + v_j^2 = U_j a_j^2 + V_j a_j + W_j &= U_j (u_{j-1} a_{j-1} + v_{j-1})^2 + V_j (u_{j-1} a_{j-1} + v_{j-1}) + W_j \\ &= U_j u_{j-1}^2 a_{j-1}^2 + (2U_j u_{j-1} v_{j-1} + V_j u_{j-1}) a_{j-1} + (U_j v_{j-1}^2 + V_j v_{j-1} + W_j) \\ &= U_{j-1} a_{j-1}^2 + V_{j-1} a_{j-1} + W_{j-1} \end{aligned}$$

のため

$$\begin{aligned} U_{j-1} &= U_j (u_{j-1}^2) \\ V_{j-1} &= U_j (2u_{j-1} v_{j-1}) + V_j (u_{j-1}) \\ W_{j-1} &= U_j (v_{j-1}^2) + V_j (v_{j-1}) + W_j \end{aligned}$$

となる。ここで $U_j = 1, V_j = 0, W_j = 0$ である。ここで j を添字としたのは、この計算が $\sum_{i=0}^{n-1} C_i$ の各 C_i の算出のために繰り返されるためである。

さて eq. (3.4) は

$$U_C a_o^2 + V_C a_0 + W_C \tag{3.5}$$

のようになるが

$$C_S''(a_0) = 2U_C > 0 \quad (\because u_i^2 > 0) \tag{3.6}$$

であるため

$$C_S'(a_0) = 2U_C a_0 + V_C = 0 \tag{3.7}$$

を満たす

$$a_0 = -\frac{V_C}{2U_C} \tag{3.8}$$

が最良となる。

NOTE: 導出過程で b_i から a_i を求めることも可能であるが、適当な b_0 を決定することができないため、a_i から b_i を算出する。