HW2

take

2021 5 14

1. Exponential family

< 1번식 >

$$f_Y(y;\theta,\phi) = exp\left[\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right]$$

1) Express the p.d.f of random variable Y

$$Y \sim Bernulli(p)$$

이면,

$$f_Y(y;p) = p^y(1-p)^{(1-y)}$$

이므로, 이 식을 exp 형태로 변형하여 정리하면,

$$= exp[ylnp + (1-y)ln(1-p)]$$

$$= exp[ylnp + ln(1-p) - yln(1-p)]$$

$$= exp[y[lnp - ln(1-p)] + ln(1-p)]$$

$$= exp\left[yln\frac{p}{1-p} + ln(1-p)\right]$$

$$= exp\left[\frac{yln\frac{p}{1-p} + ln(1-p)}{1} + 0\right]$$

이 된다. 이를 맨 위 < 1번식 >과 비교하면,

$\theta = ln\frac{p}{1-p}$ 이고, $b(\theta) = -ln(1-p)$, $a(\phi) = 1$, $c(y,\phi) = 0$임을 알 수 있다.

θ와 p의 식을 이용하여, b(θ) 부분을 좀더 정리하면,

$$\theta = ln\frac{p}{1-p}$$

$$e^\theta = \frac{p}{1-p}$$

$$e^\theta(1-p) = p$$

$$e^\theta = (e^\theta + 1)p$$

$$p = \frac{e^\theta}{e^\theta + 1}$$

이를 b(θ)에 대입하면,

$$b(\theta) = -ln(1-p) = -ln(1-\frac{e^\theta}{e^\theta+1}) = -ln(\frac{e^\theta+1-e^\theta}{e^\theta+1}) = -ln(\frac{1}{e^\theta+1}) = ln(e^\theta+1)$$

따라서,

$\theta = ln\frac{p}{1-p}$ 이고, $b(\theta) = ln(e^\theta+1)$, $a(\phi) = 1$, $c(y,\phi) = 0$이다.

2) Express the p.d.f of random variable Y

$$Y \sim Poisson(\lambda)$$

이면,

$$f_Y(y;\lambda) = \frac{\lambda^y e^{(-\lambda)}}{y!}$$

이므로, 이 식을 exp 형태로 변형하여 정리하면,

$$= exp[yln\lambda + (-y) - ln(y!)]$$

$$= exp\left[\frac{yln\lambda - y}{1} + (-ln(y!))\right]$$

이 된다. 이를 맨 위 < 1번식 >과 비교하면,

$\theta = ln\lambda$ 이고, $b(\theta) = y$, $a(\phi) = 1$, $c(y,\phi) = -ln(y!)$임을 알 수 있다.

θ와 p의 식을 이용하여, b(θ) 부분을 좀더 정리하면,

$\theta = ln\frac{p}{1-p}$ 이고, $b(\theta) = e^\theta$, $a(\phi) = 1$, $c(y,\phi) = 0$이다.

3) Verify the logit link for the logistic regression and the log link for the poisson regression are the canonical link functions.

b’(θ)=μ이므로,

θ = g(μ) = g(b’(θ))이고, 양변에 g의 역함수를 취하면,

g^{-I}(θ) = b’(θ)이 되고,
g(θ) = $[b'(\theta)]^{-I}$ 이 된다.

<1-3)-1. 베르누이>

위 1)에서 구한 b(θ)를 이용하여 정리하면,

$$g(\theta) = b'(\theta)^{-I} = \left(\frac{e^\theta}{e^\theta+1}\right)^{-I} = ln(\frac{\theta}{1-\theta})$$

이므로,

$$g(\mu) = ln(\frac{\mu}{1-\mu}) = \theta$$

가 된다.

<1-3)-2. 프아송>

위 2)에서 구한 b(θ)를 이용하여 정리하면,

$$g(\theta) = b'(\theta)^{-I} = (e^{\theta})^{-I} = ln\theta$$

이므로,

$$g(\mu) = ln\mu = \theta$$

가 된다.

2. Maximum Likelihood Estimator of Poisson Regression

1) Calculate the coefficients by using the following code.

```
example_data <- read.csv("./0514 hw2_table1.csv")
head(example_data)
```

```
##   Policy Policy.Years Gender Territory Claims
## 1      1            5      M      East      0
## 2      2            5      F      East      0
## 3      3            4      M      East      1
## 4      4            3      F      West      1
## 5      5            4      F      East      0
## 6      6            3      F      West      1
```

```
model <- glm(Claims ~ Gender + Territory, family = poisson(link = log), data = example_data)
model$coefficients
```

```
##   (Intercept)       GenderM TerritoryWest
##    -0.9808293     0.5108256     0.5108256
```

2) Find the coefficients of Poisson regression above using an user define R function via gradient descent algorithm.

죄송합니다.