【点の存在範囲】〈例題１〉

複素数 α,β は $|\alpha-1|=1,|\beta-i|=1$ を満たす。

(１) $\alpha+\beta$ が存在する範囲を複素数平面状に図示せよ。

(２) $(\alpha-1)(\beta-1)$ が存在する範囲を複素数平面状に図示せよ。

(一橋)

複素数平面の方針

(イ)z1 文字で

(ロ) 極形式　←回転、累乗等

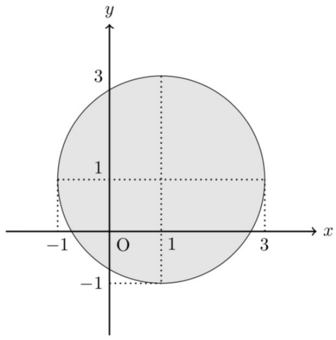
(ハ)$x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ ←座標の問題に言い換える

今回は与えられている図形が極形式表示できるので絶対値を外し変換先の図形を極形式で追うとよい。(2) は $(\alpha-1)$ そのまま極形式に表すことができるのでもう一方の $(\beta-1)$ がどんな点であるかを考えよう。

解答

(1) $\alpha+\beta=z$ とおくと、$(\alpha-1)+(\beta-i)=z-1-i\cdots$ ①
ここで $|\alpha-1|=1$ より $\alpha=1=\cos p+i\sin p(0\leqq p\leqq 2\pi)$, 同様にして、$\beta-i=\cos q+i\sin q(0\leqq q\leqq 2\pi)$
よって ① は

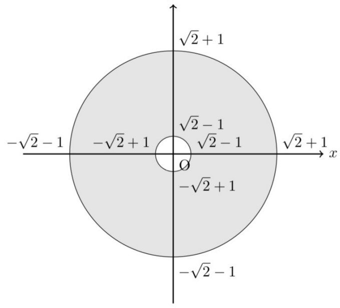
$$\begin{aligned}
z-1-i&=(\cos p+i\sin p)+(\cos q+i\sin q)\\
&=(\cos p+\cos q)+i(\sin p+\sin q)\\
&=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}+2i\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
&=2\cos\frac{p-q}{2}(\cos\frac{p+q}{2}+i\sin\frac{p+q}{2})\\
\therefore |z-1-i|&=2|\cos\frac{p-q}{2}||\cos\frac{p+q}{2}+i\sin\frac{p+q}{2}|\\
&=2|\cos\frac{p-q}{2}| \qquad \because (|\cos\frac{p+q}{2}+i\sin\frac{p+q}{2}|=1)\\
&\leqq 2 \qquad \because (-\pi<\frac{p-q}{2}<\pi)
\end{aligned}$$



これより z の存在範囲は、点 $1+i$ を中心とする半径 2 の円の内部および周上であり右図 (境界線を含む)

(2)$|\beta-i|=1$ より、点 β は点 i を中心とする半径 1 の円の周上を動く。
よって点 $\beta-1$ は点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円の周上の点である。
また $|\alpha-1|=1$ より $\alpha-1=\cos p+i\sin p$ であるので
$(\alpha-1)(\beta-1)=(\cos p+i\sin p)(\beta-1),(0\leqq p<2\pi)$

複素数極形式の積の利用：$\beta-1$ が 1 回転する



で定まる点は点 $-1+i$

を中心とする半径 1 の円を原点の周りに 1 回転させて図形を形成する。

よって求める存在範囲は原点を中心とする半径 $\sqrt{2}-1$ の円と半径$\sqrt{2}+1$

の円とで囲まれた範囲であり上図の斜線部分である (境界線を含む)

【点の存在範囲】〈復習問題〉

複素数 α, β は $|\alpha-1-i|=1, |\beta-i|=1$ を満たす。

(1)$\alpha-\beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2)$(\alpha-1-i)(\beta-2)$ が存在する範囲を複素数平面状に図示せよ。

【点の存在範囲】〈類題〉

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と、$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して、$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする。このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し、その面積を求めよ。

(京大理系 2024)

方針

全問と同様に極形式で攻めましょう。2 変数がそれぞれ独立に動くときは片方を固定するととらえやすいのでまずは 2 変数を分離するところから始めるとよいでしょう。

解答

・ $y-(8+6i)=3(\cos p+i\sin p), (0 \leqq p \leqq 2\pi)$ $\cdots\cdots$ ① とできて, これは中心 $8+6i$, 半径 3 の円 を表す。
・ $|x| \leqq 2$ $\cdots\cdots$②, これは半径 2 の円板である。

$z=\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\alpha+\beta$ とする。

・ α は ② より半径 1 の円板である。$\cdots\cdots$ ②'
・ β は ① より $\beta=\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{2}(\cos p+i\sin p)+(4+3i)$,
　これは $4+3i$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を示す。$\cdots\cdots$ ①'

ここで p を p' に固定したときの点を β' とする。
するとこの時の z は, $z=\alpha+\beta$' でありこれは ①'②' より
$\beta'=\dfrac{3}{2}(\cos p'+i\sin p')+(4+3i)$
　を中心とする半径 1 の円板 を表す。

次に p の固定を外し、$0 \leqq p < 2\pi$ の範囲で動かすと β' は ①' により $4+3i$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円周上を動くのでそれに伴って半径 1 の円板も動くので z のえがく領域は右図。
外側の円の半径は $\dfrac{5}{2}$, 内側の円の半径は $\dfrac{1}{2}$
より求める面積は
$\left\{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}\pi=6\pi$