数 3 問題集

問題 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\sin x}dx$ を求めよ。ただし $\sin x < x(x>0)$ は用いてよい.

問題 2 座標平面上の点 (a,b) で a,b がともに整数であるものを「格子点」と呼ぶことにする。自然数 n に対して、領域 $M_n : 0 < x \leqq n, 0 < y \leqq \sqrt{x}$ に属する格子点の個数を N_n とする。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ。

問題 3 xyz 空間において、点 $(1,0,1)$ と点 $(1,0,2)$ を結ぶ線分を l とし、l を z 軸の周りに1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸の周りに1 回転してできる立体の体積を求めよ。

問題 4 xyz 空間において、点 $A(0,0,\sqrt{3})$ を頂点とし、xy 平面上の円板

$$x^2+y^2 \leqq 1, z=0$$

を底面とする円錐を考える。この円錐 (内部を含む) を D とし、D を x 軸の周りに回転してできる立体を E とする。E の体積を求めよ。

問題 5 (1)$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=log(x+\sqrt{1+x^2})$ について、導関数 $f'(x)$ を求めよ。
(2) 極方程式 $r=\theta(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ。

問題 6 n を自然数とする。xy 平面内の、原点を中心とする半径 n の円の、内部と周を合わせてものを C_n であらわす。次の条件 (∗) を満たす 1 辺の長さが 1 の正方形の数を $N(n)$ とする。
・(∗) 正方形の 4 頂点はすべて C_n に含まれ、4 頂点の x および y 座標はすべて整数である
このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2}=\pi$ を示せ。

初めに

数 3 の問題では特に式の持つ意味を考え、式 $\leftrightarrow$ 図の行き来が素早くできるように図を書きながら進めるのがいいでしょう。場合によってはどちらでも解答を作ることが可能です。1 つの方針に縛られず自分なりに試行錯誤する姿勢が必要です。

解答

問題 1

分数関数積分の極限

(イ) 分母評価 (式)
(ロ) 面積評価 (図)

今回は容易に分母評価ができるので (イ) で行きましょう。$\dfrac{1}{\sin x}$ の積分が出てきますが基本的な積分は暗記しておくべきです。

(解)

$x>0$ より

$2\sin x < x+\sin x < 2x$

$$\therefore \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x}dx < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\sin x}dx < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2\sin x}dx \cdots\text{①}$$

ここで $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \dfrac{1}{2x}dx = int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \dfrac{1}{2}(\log x)'dx = \dfrac{1}{2}\left[\log x\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\log 2 \quad \cdots\text{②}$$

また $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \dfrac{1}{2\sin x} = \dfrac{1}{2}\left[\log\left|\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{2n}}{\cos\frac{1}{n}\sin\frac{1}{2n}}$$

$$= \log\frac{\cos\frac{1}{2n}}{\cos\frac{1}{n}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}}\cdot 2n$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\log\frac{1}{1}\times 1\times\frac{1}{1}\times 2 = \frac{1}{2}\log 2(n\to\infty) \cdots\text{③}$$

①〜③よりはさみうちの原理で

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\sin x}dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\log\mathbf{2} \cdots\cdots (答)$$

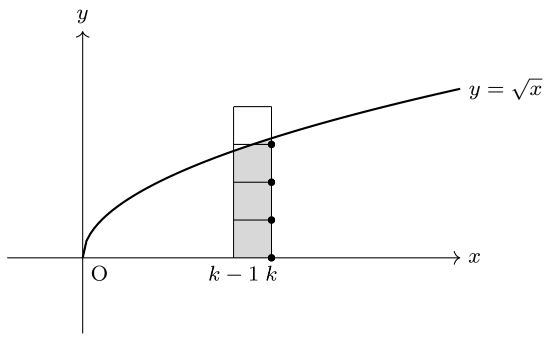
問題 2

格子点の極限

格子点の極限は格子点を面積として扱え

極限の問題では評価はおおざっぱにやってみて次第に厳しくしていくのが一般的ですが、どれくらいがおおざっぱなのかつかみにくいので実験しましょう。本問の場合は $y=\sqrt{x}$ の面積にあたる部分以外は高々 2 (定数) なので極限で飛ばしてしまえば 0 となるので要は定数であれば極限に飛ばしても同じ値に収束するわけです。高々 2 までという記述は自分も初めは書けなかったので覚えておくといいと思います。(少なくとも〜の値にはおさまるだろうという意識を解答に書けばいいのでは？と思っております。)

(解)



M_n内の $x=k-1,k$ の部分の面積を S_kとする。この時図の網掛けでないはみ出している部分をα_kとおけばα_kは $0\leqq\alpha_k\leqq 2$ であるので S_kは

$S_k=\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}dx+\alpha_k$ と書けるのでこれを 1 から n までの和が N_n である。

$$N_n=\int_1^n\sqrt{x}dx+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+\beta_n(0\leqq\beta_n\leqq 2n)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{n^{\frac{3}{2}}}=0$ であるか

ら $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{\beta_n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ ······ (答)

問題 3

回転体の体積は切ってから回せ！

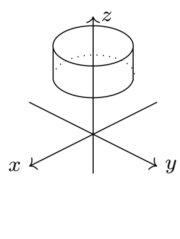
(1) 回転軸に垂直に切った断面 (今回は $x=t$) を考え図を書く。
(2) その軸からの最も遠い距離 (と最も近い距離を考える。)
(3) 円板の面積を出して積分

(2) の断面での距離の考え方

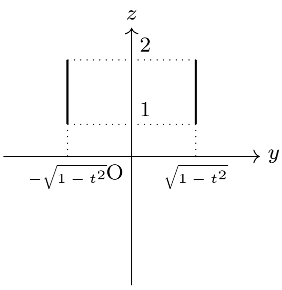
(イ) 断面の図形の具体的な式を求め距離を三平方の定理で出す。←断面の図形が簡単な時に有効
(ロ) $z=\alpha, x=t$ の交わる線分を考え、距離を求め α を動かして最大最小を考える。(予選決勝法と同じ) ←断面の図形が複雑な時に有効

問題 3,4 は回転体の体積で 3 は (イ)、4 は (ロ) の方針が一番簡単な方法です。(ただし、両問ともどの方針でも答えは出るのでやってみましょう。)(ロ) の方針はなじみのない方針かもしれませんが自分で図を書いて式の意味を考えてみれば、予選決勝法の考え方が見えてくるはずです。

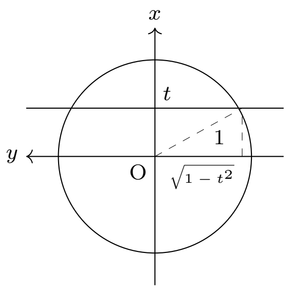
(解)



A は上図で $x=t$ での断面を考えると、



$x=t$ での断面



z 軸正方向から見た図

図より x 軸からの距離を L とすれば

- $L_{\max}^2 = 2^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 = 5-t^2$
- $L_{\min}^2 = 1^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 = 2-t^2$

よって求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} (L_{\max}^2\pi - L_{\min}^2\pi)dt \\
&= 2\pi\int_0^1 (L_{\max}^2 - L_{\min}^2)dt \quad (\because \text{対称性}) \\
&= 2\pi\int_0^1 \left((5-t^2)-(2-t^2)\right)dt \\
&= 2\pi\int_0^1 3dt = \mathbf{6}\boldsymbol{\pi} \cdots\cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

問題 4

回転体の体積は切ってから回せ！

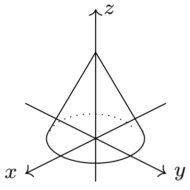
(1) 回転軸に垂直に切った断面 (今回は $x=t$) を考え図を書く。
(2) その軸からの最も遠い距離 (と最も近い距離を考える。)
(3) 円板の面積を出して積分

(2) の断面での距離の考え方

(イ) 断面の図形の具体的な式を求め距離を三平方の定理で出す。←断面の図形が簡単な時に有効
(ロ) $z=\alpha, x=t$ の交わる線分を考え、距離を求め α を動かして最大最小を考える。(予選決勝法と同じ) ←断面の図形が複雑な時に有効

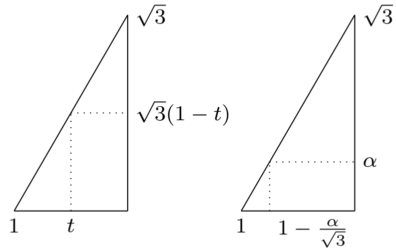
問題 3 の応用問題です。$x=t$ の断面での図形の方程式を求めても良いですが、最長距離が視覚的にわかりやすいわけではないので $z=\alpha$ との共有線分を考えて α を動かしましょう。類題に慶大プレ 2024 の sin カーブの回転体問題がありますのでそちらもぜひ。

(解)

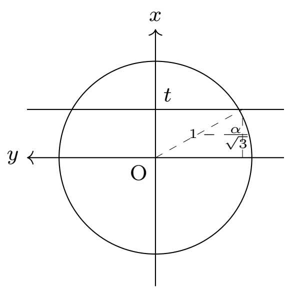


回転軸に垂直な $x=t$ での断面を考えるが対称性より $x \geqq 0$ で考える。$z=\alpha(0 \leqq \alpha \leqq \sqrt{3}), x=t(0 \leqq t \leqq 1)$, D の共有点と $(t,0,0)$ の距離 L_t を求める。

まず、$z=\alpha$と $x=t$ が D の表面で 共有点を持つ条件は y 軸に垂直に $x-z$ 平面をみた時の下図より、$0 \leqq \alpha \leqq \sqrt{3}(1-t)$ である。



今わかっているのは共有点の x, z 座標であるので次に y 座標を求める。



z 軸正方向から見た図

y 座標は上図の円の半径が上のαの図より $1-\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$であることから $\pm\sqrt{\left(1-\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2 - t^2}$

これより共有点は $\left(t, \pm\sqrt{\left(1-\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2 - t^2}, \alpha\right)$ であるので

$$\begin{aligned}
L_t^2 &= \left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2 - t^2 + \alpha^2 \\
&= \frac{4}{3}\alpha^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha^2 + 1 - t^2 \\
&= \frac{4}{3}\left(\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - t^2, (0 \leqq \alpha \leqq \sqrt{3}(1-t))
\end{aligned}$$

α を動かすことにより L_tの最大値がわかり、これが D を $x=t$ で切った断面の $(t,0,0)$ からもっとも離れた点との距離：つまり E を $x=t$ で切った断面の円の半径である。L_t^2 の最大値を $L_{t,max}^2$とすると、

(i) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sqrt{3}(1-t) \quad \therefore 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$のとき
$\alpha = \sqrt{3}(1-t)$ で最大なので $L_{t,max}^2 = 3(1-t)^2$

(ii) $\sqrt{3}(1-t) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき
$\alpha = 0$ で最大なので $L_{t,max}^2 = 1-t^2$

これより求める体積を V とすれば

$$\frac{1}{2}V=\int_0^1 \pi L_{t,max}^2 dt=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}3(1-t)^2dt+\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t^2)dt$$
$$=3\pi\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\pi\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{13}{12}\pi$$
$$\therefore V=\frac{13}{6}\pi\cdots\cdots(答)$$

【類題】

関数 $y=\sin^2 x\left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi\right)$ のグラフを C とする。
曲線 C を y 軸の周りに回転させたときにできる曲面を E, E を x 軸の周りに回転させたときにできる立体を F とする.F の体積を求めよ。

(慶應プレ 2024)

問題 5

曲線の長さ

(イ) 曲線 $x=f(t), y=g(t), (\alpha\leqq t\leqq\beta)$ の長さ L
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
(ロ) 曲線 $y=f(x), (a\leqq x\leqq b)$ の長さ L
$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

今回は (1) をいかに使うかで状況が変わります。
$\int\sqrt{\triangle+x}dx$ と $\int\frac{1}{\sqrt{\triangle+x}}dx$ と関係が強く強引に目的の形に結び付けられることは覚えておいても良いかもしれません。
(解)
(1)
$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \cdots\cdots(答)$$
(2)
$x=r\cos\theta=\theta\cos\theta, y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$ であるので
$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta-\theta\sin\theta\quad\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta$

$$L=\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}d\theta$$
$$=\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}d\theta+\int_0^\pi\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$

ここで強引に目的の形を作り出しましたが運よく目的の形と L に分離することができました。

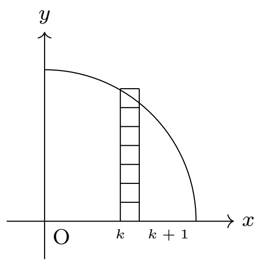
$$2L=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\left[\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^\pi\quad(\because(1))$$
$$=pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$
$$\therefore L=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})\right\}\cdots\cdots(答)$$

問題 6

和の極限

(イ) 無限等比級数の和の公式
(ロ) 区分求積法

一見格子点の問題で問題 2 の方針で行けそうですが、少し複雑です。試しに図を書いて実験してみると、$x=k, x=k+1$ の領域に置ける y 座標が整数になる部分と正方形の個数が一致しそうです。(当たり前)。整数部分を取り出したくかつ、極限の問題、、、あとは言わなくてもわかりますね。はさんでしまえばこっちのもんです。
(解)
対称性より第一象限のみ考えればよい。



上図より $x=k, x=k+1$, 円 で囲まれた領域に含まれる正方形の個数を $S(k)$ とすれば
$S(k)=\left[\sqrt{n^2-(k+1)^2}\right]$ とできる。よって
$$\frac{1}{4}N(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sqrt{n^2-(k+1)^2}\right]$$
$$\therefore N(n)=4\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sqrt{n^2-(k+1)^2}\right]$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{n^2-k^2}\right]$$
$$\therefore 4\sum_{n=1}^{k}\sqrt{n^2-k^2}-4<N(n)\leqq 4\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$$
($\because$ ガウス記号による評価)
$$\therefore\frac{4\sum_{n=1}^{k}\sqrt{n^2-k^2}-4}{n^2}<\frac{N(n)}{n^2}\leqq\frac{4\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}\cdots\cdots(*)$$

ここで

$$\frac{4}{n^2} \longrightarrow 0 (n \longleftrightarrow \infty)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&\longrightarrow \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \quad (n \to \infty) \\
&= \frac{\pi}{4} \quad (\text{半径 1 の円の面積の} \frac{1}{4})
\end{aligned}$$

これより $\lim_{n \to \infty} 4 \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \pi$

よって $(*)$ からはさみうちの原理より

$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n)}{n^2} = \pi \cdots\cdots$ (答)