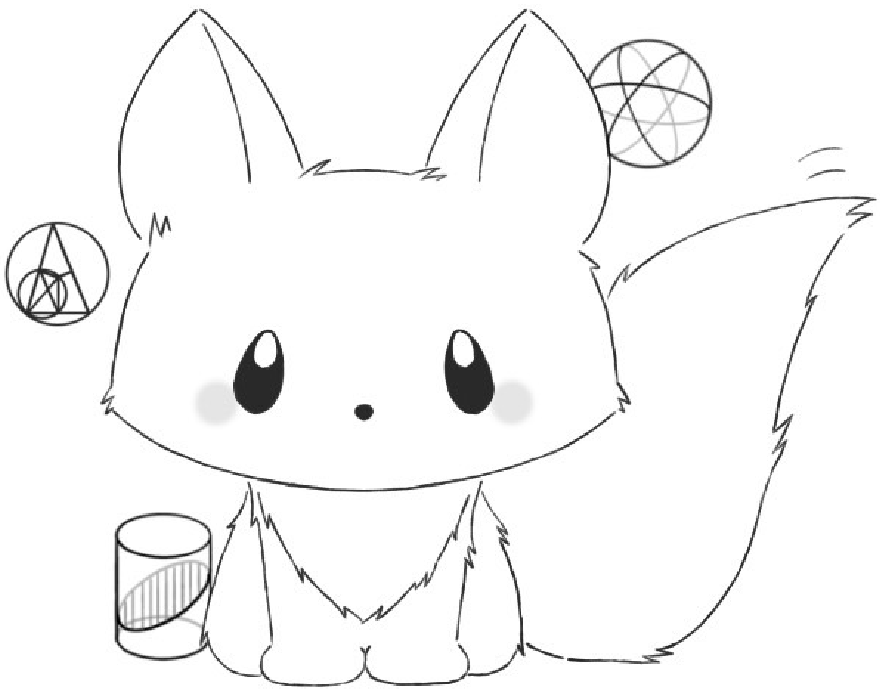
広島大学数学2015　1A2BC版



目次

1　問題・解答

【第 3 問】

空間座標内に 5 点

$$O(0,0,0), A\left(0,0,\frac{3}{4}\right), B\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), C(s,t,0), D(0,u,0)$$

がある。ただし s,t,u は実数で,$s>0, t>0, s+t=1$ をみたすとする。3 点 A,B,C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき, 次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。
(2) u を t を用いて表せ。また $0<u<1$ を示せ。
(3) 点 $(0,1,0)$ を E とする。点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき t の値を求めよ。

(1) 直線 AB の方程式は
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\right)$ と $\mathrm{A}\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ を通ることから
$\left(x,y,z\right) = \left(0,0,\frac{3}{4}\right) + t\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\right)$ である。
x 軸との交点は $y=z=0$ を代入して z の式から
$\frac{1}{4}t = \frac{3}{4}, \therefore t=3$
これを x の式に代入して $\mathbf{x} = \mathbf{\frac{3}{2}} \cdots$(答)

(2) D は平面 ABC と y 軸の交点なので平面 ABC の方程式を求める。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\right), \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(s,t,-\frac{3}{4}\right)$
よりこの 2 つのベクトルの張る平面の法線ベクトル $\vec{n}=(a,b,c)$ を考える。

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}-\frac{c}{4}=0\cdots① \\ sa+tb-\frac{3}{4}c=0\cdots② \end{cases}$$

① より $c=2a$, これと ② より
$b = \frac{3-2s}{2t}a, (\because t>0)$
よって

$$\vec{n} = a\left(1, \frac{3-2s}{2t,}, 2\right)$$

であるので $\vec{n'} = \left(1, \frac{3-2s}{2t,}, 2\right)$ とする。
平面 ABC 上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n'}=0$ をみたすので、
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n'} = \left(x,y,z-\frac{3}{4}\right)\left(1,\frac{3-2s}{2t,},2\right)=0$

$\therefore x+\frac{3-2s}{2t}y+2z-\frac{3}{2}=0$ 求めるのは y 軸との交点なので $x=z=0$ を代入して

$\frac{3-2s}{2t}y-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow u=\frac{3t}{3-2s} \quad (\because 0<s<1)$

$\Leftrightarrow u=\frac{3t}{3-2(1-t)} \quad (\because s+t=1)$

$\mathbf{u} = \mathbf{\frac{3t}{1+2t}} \cdots$(答)

$u = \frac{3}{\frac{1}{t}+2} \quad (0<t<1)$

ここで $0<t<1$ であるので明らかに $u>0$ が成り立つ。また $\frac{1}{t}>1$ より
$u=\frac{3}{\frac{1}{t}+2} < \frac{3}{1+2} = 1$
よって $0<u<1$ ■

(3) 問題の条件から $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(0,\frac{12}{13},0\right)$ したがって
$\frac{3t}{1+2t} = \frac{12}{13}$ を解いて
$\mathbf{t} = \mathbf{\frac{4}{5}} \cdots$(答)

【第 5 問】

m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) $m \geqq 2, n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べる。
このとき、ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2) $n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び、1 列に並べるこの時 a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3) $n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。この時できたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただしどのグループ分けも同様に確からしいとする。

(4) (3) の確率 p_n が $\frac{1}{3}$ 以下になるような n の範囲を求めよ。

(1) m 種類の文字から 2 種類の文字の選び方は ${}_m\mathrm{C}_2$。
2 種類の文字を重複を許して n 個並べる方法は n 個それぞれに 2 通りの選択肢があるから 2^n 通り。
だが例えば 1,2 を並べるとき,
1111111、、、や 222222、、、のように 1 種類のみの場合をのぞかなければならないので $2^n - 2$ 通り。
よって求める場合の数は
${}_{\mathbf{m}}\mathrm{C}_{\mathbf{2}}(\mathbf{2^n - 2}) = \mathbf{m(m-1)(2^{n-1} - 1)} \cdots$(答)

(2) (1) と同様に考える。3 種類の文字を重複を許して n 個並べる方法は n 個それぞれに 3 通りの選択肢があるから 3^n 通り。だが例えば,
$aaaaa$、、、等のように 1 種類のみ選ばれるのは a, b, c の 3 通り。
$abaaab$、、のように 2 種類のみ選ばれるのは (1) と同様に考えて $2^n - 2$ に 3 種類から 2 種類選ぶ 3 通りをかけて $3(2^n - 2)$
以上から求める場合の数は
$3^n - 3 - 3(2^n - 2) = \mathbf{3^n - 3 \cdot 2^n + 3} \cdots$(答)

(3) グループ数が 1 組の時は 1 通り
グループ数が 2 組の時はこのグループに区別できない (グループ A、グループ B のように名前がない) ことを考えれば分け方は $\frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$
グループ数が 3 組の時このグループに区別できない (グループ A、グループ B のように名前がない) ことを考えれば分け方は $\frac{1}{3!}(3^n - 3(2^n-2) + 3) = \frac{3^{n-1}+1}{2} - 2^{n-1}$
よって全体事象 (グループの分け方) は $1 + 2^{n-1} - 1 + \frac{3^{n-1}+1}{2} - 2^{n-1} = \frac{3^{n-1}+1}{2}$
以上から

$$p_n = \frac{2^{n-1} - 1}{\frac{3^{n-1}+1}{2}} = \frac{\mathbf{2(2^{n-1} - 1)}}{\mathbf{3^{n-1} + 1}} \cdots \text{(答)}$$

(4)

$$p_n \leqq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2(2^{n-1} - 1)}{3^{n-1} + 1} \leqq \frac{1}{3}$$
$$\therefore 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 \geqq 0$$

左辺に注目する。

n=3 のとき　-10 となり不適
n=4 のとき　-14 となり不適
n=5 のとき　-8 となり不適
n=6 のとき　58 となり適する。

左辺は $3 > 2$ より n で単調増加する。よって求める n の範囲は $\mathbf{n \geqq 6} \cdots$(答)

2 第 3 問解説

2.1 方針

空間ベクトルの基本的な知識があれば解答できる問題である。空間ベクトルは苦手な人が多いと思うがコツをつかめば平面より扱いやすい分野だと思われる。空間ベクトルの身に着けておいてほしい知識は以下

空間ベクトル

1. 直線のベクトル方程式→本問の (1)
2. 空間の方程式→本問の (2)
3. 平面に対する対称点

詳細なことは後にして問題の解説に入ろう。

(1) 問題文に**直線 AB** とある。これよりまず直線 AB の方程式を立てることがわかるだろう。また明確に x 軸との交点を求めよ。とあるので方程式を立てれば答えがでる。

(2) これは点 D を求める問題である。ここで疑問が出てきそうだから断っておこう。問題文は「u を t で表せ」であるがでは u がどこに現れるかを確認すれば点 D だけである。よって点 D をがわかれば自ずと答えがでるのである。問題文を噛み砕いて言い換える。これは数学に限らず、あらゆる教科・課題解決において重要である。この言いかえのときに客観的に言い換えることを忘れないようにすることが大切だ。u は問題文から t の関数であらわされることになるだろう。そして改めて問題文を見てみれば s, t は範囲が与えられている。よって u を t の関数であらわされれば不等式を導ける。ネタバレになるが u は t の分数関数となる。

分数関数の扱い

(イ) 帯分数化＝「(分母の次数) > (分子の次数)」にする。

(ロ) 変数で割って一部にまとめる

解答では (ロ) の方針を用いている。2 か所に出てくる t を 1 つにすることでとても扱いやすくなっている。(イ) でも解答できるので各自でやってみてほしい。

(3) これは (2) の結果を活用して t を解くだけの計算処理中心の問題である。u に具体的な値が与えられてそれを (2) で表して t について解けばよい。

2.2 基本的手法の解説

まず結論から出しておく。ちなみに以下は $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ のように書く。

ベクトル方程式：基本

直線 点 P が直線 AB 上を動くとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{t} \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} \qquad (s+t=1)\end{aligned}$$

平面 点 P が 3 点 ABC を通る平面を動くとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= (1-t-u)\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \quad (s+t+u=1)\end{aligned}$$

君たちはベクトル方程式を上の 3 行目の形で暗記しているかも知れないがベクトル方程式は暗記するものではない。なぜならば至極当然な式変形の結果であって 1 行目、2 行目などどれを使うかは問題で使い分けるべきでありそれができるようになるには上の 1 行目の式の意味さえ覚えておけばよい。ちなみに数式や文字は必ず意味を読み取っていかなければならない。数式はすべてを語るのである。我々がなにかを考えるとき簡単なモデルをまず考え複雑なモデルに発展させるという手順を踏むことは君たちはすでにわかっているだろう。今回のケースであれば 2 次元のケースを考え 3 次元に発展させていこう。

まず 1 行目の $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

これは日本語で表すと「点 P は O から A のベクトルにそって A までいき AB ベクトルを伸び縮みさせたときに到達する点」である。2 行目は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を分解してまとめただけである。ここで $1-t=s$ とおけば $s+t=1$ のとき 3 行目に書いた式が生まれる。こういった流れである。覚えることはなにもない。もし脳死で暗記していたならば反省していただきたい。

3 次元は直線はそのままだが平面に発展させることができる。それは直線 AB が $t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で平面に変わる

だけである。難しいことはなにもない。本問の (1) はこの直線の方程式で立式する。

ベクトル方程式はこれだけではない。実際にはもう少しあるが内積を用いた直線と平面の方程式を紹介する。

ベクトル方程式: 内積を用いる

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$$

2 次元　点 A を通り $\vec{b}$ に垂直な直線
3 次元　点 A を通り $\vec{b}$ に垂直な平面

平面の方程式

平面の方程式は媒介変数を消去すれば以下で表される

$$ax+by+cz+d=0$$

この式を解読していこう。まず我々の知識でわかることは内積$=0$ より $(\vec{x}-\vec{a})$ と $\vec{b}$ は直行するのである。ここで直線上にある点を考えてみると x, a である。ということは $\vec{b}$ はどのような役割かわかるだろうか。簡単である。直線の法線ベクトルなのだ。3 次元では法線ベクトルに直行する直線は 1 つに定まらない。つまり法線ベクトルに直行する平面になる。

解答では $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より法線ベクトル $\vec{n}$ を文字で置き $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に直行するという条件から求め、この方程式を使って立式している。基本のベクトル方程式は s, t など求めたい座標以外に文字が多く登場する。順序としては

条件から s, t を求める$\rightarrow$ s, t から座標を求める

と 2 段階踏まなければならない。2 次元ならまだいいのだが 3 次元になるとめんどくさい。そこで余計な文字が登場しない内積を用いた方程式を使うため早めに法線ベクトルを求めておけば楽に進むのである。もちろん基本の方でも解答できる。ぜひともやってみてほしい。自分で大変さを実感しないとはじまらない。無論自分に合う方を選んでもらってかまわない。

次は分数関数。上の分数関数の扱いを細かく解説する。今回の分数関数では t で分母分子で割るとなんと $\dfrac{1}{t}$ が 1 箇所にしか登場しない。よって $\dfrac{1}{t}$ の範囲さえわかってしまえばうまく評価することで題意の範囲を示せる。

では (イ) の方をやって見よう。帯分数化とは割り算によって (分母の次数) $>$ (分子の次数) にすればよい。

$$\begin{aligned} u &= \frac{3t}{1+2t} = \frac{\frac{3}{2}(1+2t)-\frac{3}{2}}{1+2t} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2(1+2t)} \end{aligned}$$

上のように変形すると (分母の次数) $=1$ なので (分子の次数) $=1$ から (分子の次数) $=0$ にすることができた。さらに変数 t を 1 箇所にすることにも成功している。よって t の範囲から評価してやればこちらでも解答できるだろう。

ちなみに誤解しないでいただきたいが毎回このように 1 箇所にまとめられるわけではない。微分して関数を考えないといけなかったり相加相乗平均を使わなければならないときもある。だが必ず言えるのは分数関数を扱うとき (イ)(ロ) は非常に有効な手段となる。その後は各自で研究してほしい。(イ) は帯分数化によって多項式部分と分数部分に分けることでそれぞれ別々に扱える。(ロ) は散らばった変数をまとめることに役立つ。**ただルールを覚えるだけでなくどのような時に有効かを考えることが大切である。**

3 第 5 問解説

3.1 方針

この問題も日本語でごまかされているが本質を見れば非常に基本的な問題である。

(1)(2)(3) 文字が多いが動揺しないこと。まず m 種類から 2 つに絞る。→重複を許して並べる。の順で考えよう。ちなみにこの重複を許して並べる問題は諸君がよく知る以下の問題と言い換えると良いだろう。

【基本問題】

n 個のボールを 2 つの箱A，Bに分ける分け方はいくつあるか

これは直感的に納得できないかもしれないが本質的には『分ける主体』が入れ替わっているのである。この類の問題は選択肢を与えると考えればよい。例えば本問なら文字列の 1 番目は 2 つの選択肢、2 番目も 2 つの選択肢､､､ このように考えれば 2^n のように考えて例外をのぞけばよい。同様に基本問題ではそれぞれのボールに A,B どちらに入るかが選択肢として与えられる。よって 2^n。これより例外を引けばよい。以上より本問と基本問題は選択肢を与える主体が違うだけで本質的にはまったく同じだとわかっていただけただろうか。第 3 問と同じで**問題を言い換える**これはとても大事な方針である。本問も (1)(2) は解説の本問側だが (3) は基本問題側である。この本質がわかっていない受験生は (3) から急に問題が変わったように見えてやめてしまうのだろうが、わかっている受験生は (1)(2) は (3) のご親切な誘導になり完答に近づくのだ。(3) は確率の基本方針と同じくすべての場合を数え上げればよい。(1)(2) の結果をそのまま使えるのでそんなに大変ではないだろう。

(4) これは確率ではなく整数問題である。整数問題と聞くと以下を思い出す受験生が多いだろう

整数問題

(イ) 余りに注目
(ロ) 不等式
(ハ) 因数分解

だが困ったことにこの中の方針で使えそうにない。ただ実は整数問題にはもっと根本的な考えがあるのだ。

整数問題の心得

整数問題は積極的に実験せよ

これを試してから上の 3 手段を試してほしい。これより順番に n を入れていけば $n \geqq 6$ で成り立ちそうである。この時にイメージしていただきたいのが指数関数は増加量が二次関数や三次関数よりも爆発的に大きくなるという事実だ。よって本問では $3^{n-1}, 2^n$ があってそれぞれ符号が違うので差はどんどん広がっていく。よって一度越してしまえば差は開くばかりで逆転することはあり得ないのである。ここから以下の原則がわかる。

概算

厳密な計算をする前にスケールの違いを意識して大雑把に計算することも大事

ここでいうスケールとはｎ次関数・指数関数・対数関数などである。あとは単調増加性を示せばよい。

3.2 基本的手法の解説

ここでの解説は余りないので場合の数と整数の一般的な考え方を書いておく。

確率、場合の数

確率、場合の数では公式に頼るな、自分の手で！

どういうことか、それは入試で一般的な問題集に乗っている典型問題がでてくることは余りない。それらの問題集で使われる確率場合の数にある公式は理解せずに乱用していると少し複雑になった問題に必ず誤用する。まずは自分の手で実験して数え上げる姿勢が大事である。めんどくさいで成績はのびない

4　補充・復習問題

【問題 1】

3 点 A($\vec{a}$),B($\vec{b}$),C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC がある。辺 BC を 2 : 3 に内分する点 M($\vec{m}$) を通り、辺 AB に平行な直線のベクトル方程式を求めよ。

【問題 2】

(1) 点 $(1,2)$ を通り,$\vec{d}=(1,-3)$ に平行な直線の方程式を媒介変数 t を用いて表せ。また t を消去した式で表せ。

(2) 点 $(5,2)$ を通り,$\vec{n}=(-3,1)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(3) 点 A$(2,-1,3)$ を通り,$\vec{d}=(4,5,2)$ に平行な直線を求めよ。また xy 平面との交点も求めよ。

【問題 3】

(1) 点 A$(2,3,-1)$ を通り、$\vec{n}=(4,-1,3)$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(2) 3 点 $A(1,3,1), B(2,-3,0), (-2,-3,-2)$ を通る平面の方程式を求めよ。

【問題 4】

(1) n 個のボールを 2 つの箱 A、B にわける総数を求めよ。

(2) n 個のボールを 3 つの箱 A,B，C に分ける総数を求めよ。

(3) 2 つの札A，Bをｎ n 個 1 列に並べる並べ方の総数を求めよ。

5　宿題・あとがき

宿題は本日学習した広島大学の問題・解説を熟読しもう一度解きなおすこと。また補充・復習問題を解いてくること。わからなかったらメモや先生、友達に相談して解決してみよう！

次回は 2016 広島大をやります！この冊子の感想などあったらお願いします！！お疲れ様でした！！