群論という視点

武智

October 27, 2018

はじめに

現代数学では、ほとんど至るところで群論が使われている。

物理学でも使われているが、群論の言葉を明示的には使わずに議論を進めることも多い（当社比)。

情報科学では、暗号理論など一部を除いて、あからさまに群論が使われることは少ない（個人の感想です)。

はじめに

Q. 場の理論、楕円暗号のような、高度に抽象化された場面でしか群論は使えないのだろうか？

$\rightsquigarrow$ A. そんなことはない。

群は色々なところに潜んでいる。ただ、シンプルな系では、群論を意識せずに問題が解けてしまうことが多いため、その御利益に気付きにくい。

流れ

1. 群とは
    1. 置換群
    2. 群の作用
2. 代数方程式の非可解性
3. 群論の応用：2 質点連成振動子系
4. まとめ（まとまっていない）

群とは

初めて群を定義したのは Galois(1832)。

群の定義には至っていないものの、先駆的な研究として Lagrange(1771) や Abel(1824), Ruffini(1799) がある。

置換群

Galois が導入したのは今で言う置換群。

元々 Galois は「置換の集まり」の意味で “groupe de substitusions” と呼んでいた。繰り返し言及するうちに、一般名詞 groupe が数学用語になっていったらしい。

Galois が数学用語としての groupe の定義を書き下したのは、決闘前夜だったという [1]。

置換

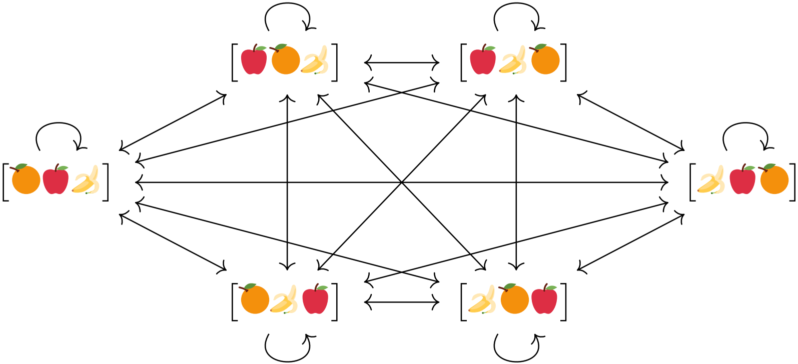
🍎と🍊と🍌の並び方は

$$\Omega = \{\, [🍎🍊🍌], [🍎🍌🍊], [🍊🍌🍎], [🍊🍎🍌], [🍌🍎🍊], [🍌🍊🍎] \,\}$$

の 6 通り。

並び方の間の変換

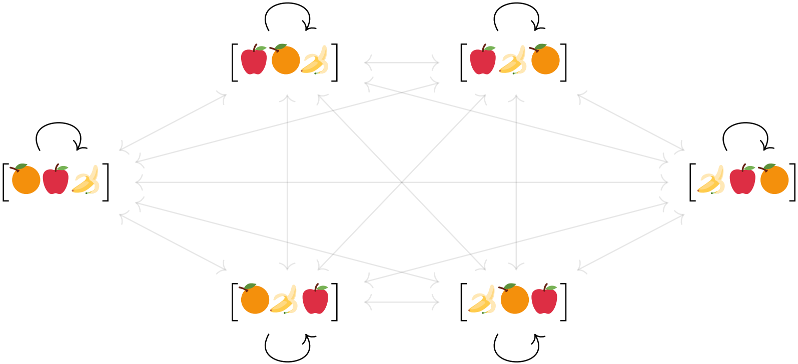
並び方の間の変換を全て考える。$6^2 = 36$ 個。



6 個の並び方それぞれから 6 本の矢印が生える。

e

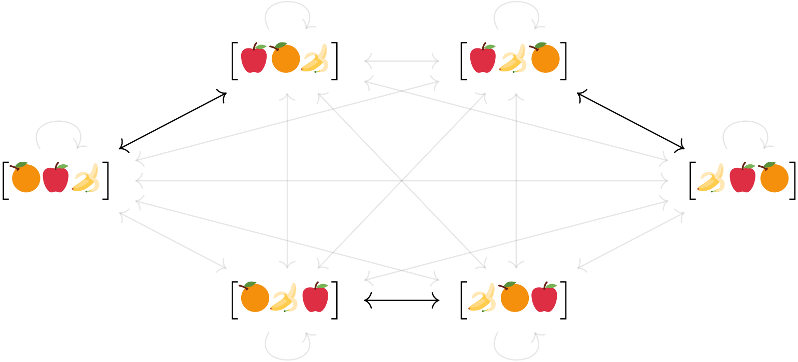
自分自身へ戻る変換（恒等変換）6 本をまとめて e と書く。



e は $\Omega \to \Omega$ の全単射となる。

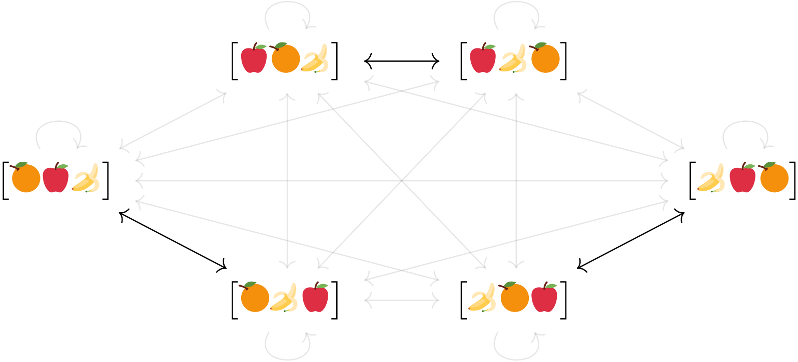
σ_{12}

1 番目と 2 番目を入れ替える変換 σ_{12}



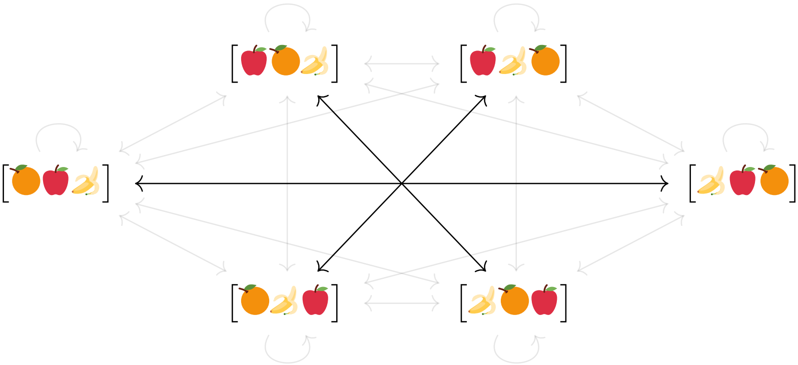
σ_{23}

2 番目と 3 番目を入れ替える変換 σ_{23}



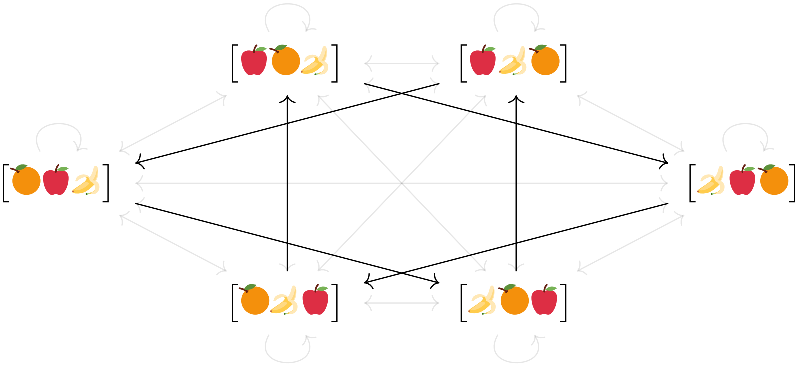
σ_{31}

3 番目と 1 番目を入れ替える変換 σ_{31}



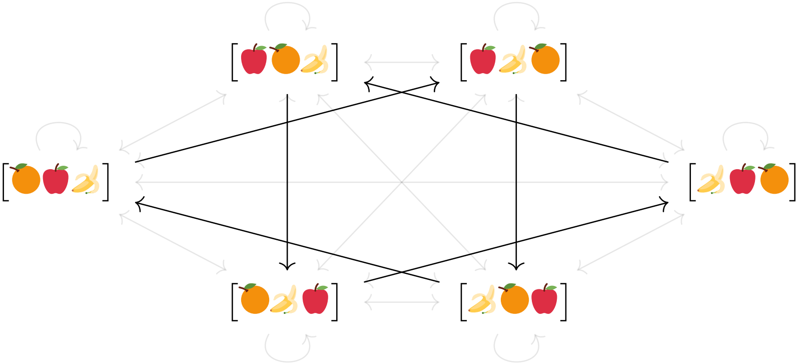
σ_{123}

1 番目 →2 番目 →3 番目 →1 番目と入れ替える変換 σ_{123}



σ_{321}

3 番目 →2 番目 →1 番目 →3 番目と入れ替える変換 σ_{321}



変換の間の関係

この 6 種類の変換をまとめて S_3 と書く。

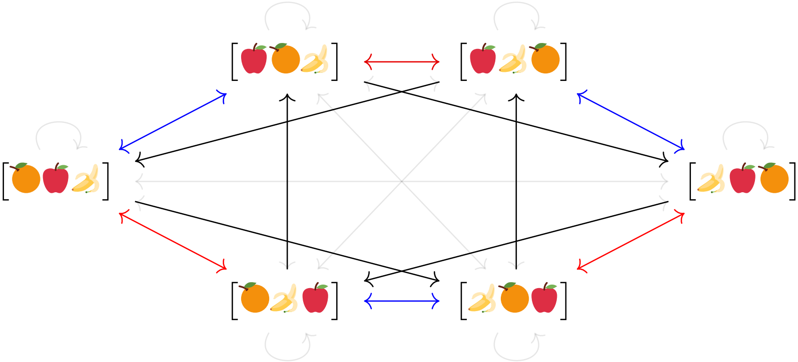
$$S_3 = \{e, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{123}, \sigma_{321}\} \tag{1}$$

S_3 の元は $\Omega \to \Omega$ の写像なので、合成写像を考えることができる。

例えば $e(\sigma_{12}(\Omega)) = \sigma_{12}(\Omega)$ なので e と σ_{12} の合成写像は σ_{12}.

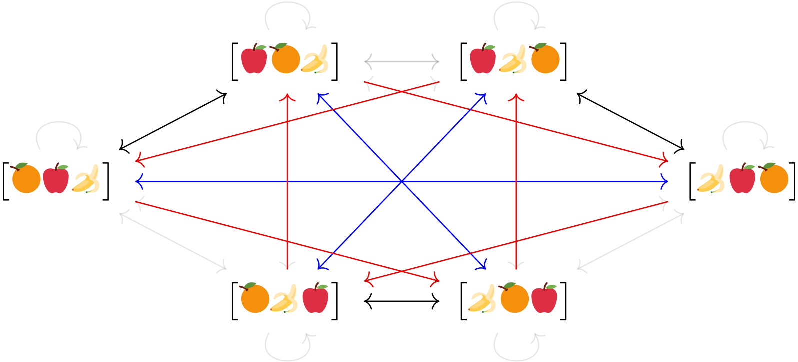
$\sigma_{12} \cdot \sigma_{123} = \sigma_{23}$

$\sigma_{12}(\sigma_{123}(\Omega)) = \sigma_{23}(\Omega)$



$\sigma_{31} \cdot \sigma_{12} = \sigma_{123}$

$\sigma_{31}(\sigma_{12}(\Omega)) = \sigma_{123}(\Omega)$

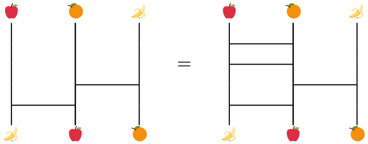


互換と、置換の偶奇

$\sigma_{123}(\Omega) = \sigma_{12}(\sigma_{23}(\Omega)) = \sigma_{31}(\sigma_{12}(\Omega))$.

σ_{12} のような「2 個の交換」を特に互換と呼ぶ。どんな並び方の変換（並び替え）も互換の組み合わせで書ける（cf. あみだくじ）。

並び替えを互換で表す組み合わせは色々あり得るが、互換個数の偶奇は変わらない。



互換の個数が偶数（奇数）になる置換を偶置換（奇置換）と呼ぶ。

合成 = 積

写像の合成を、積の演算とみなす。$\sigma(\sigma'(\Omega)) = (\sigma \cdot \sigma')(\Omega)$

$\sigma \backslash \sigma'$	e	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}	σ_{123}	σ_{321}
e	e	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}	σ_{123}	σ_{321}
σ_{12}	σ_{12}	e	σ_{123}	σ_{321}	σ_{23}	σ_{31}
σ_{23}	σ_{23}	σ_{321}	e	σ_{123}	σ_{31}	σ_{12}
σ_{31}	σ_{31}	σ_{123}	σ_{321}	e	σ_{12}	σ_{23}
σ_{123}	σ_{123}	σ_{31}	σ_{12}	σ_{23}	σ_{321}	e
σ_{321}	σ_{321}	σ_{23}	σ_{31}	σ_{12}	e	σ_{123}

この表だけあれば、並び方 Ω の写像であることを忘れて S_3 だけで計算ができる。$\rightsquigarrow$ S_3 を改めて数学的対象と考える。$\rightsquigarrow$ 群

群の定義

空でない集合 G に 2 項演算 $\cdot$ が定義されていて、次の 3 条件

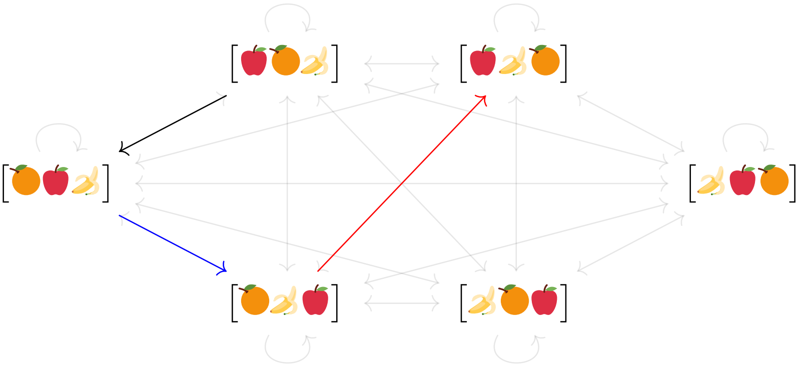
1. 結合則：任意の $a, b, c \in G$ について $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ となる。
2. 単位元の存在：任意の $g \in G$ について $g \cdot e = e \cdot g = g$ となる元 $e \in G$ が存在する。
3. 逆元の存在：任意の $g \in G$ について $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ となる元 $g^{-1} \in G$ が g ごとに存在する。

を満たすとき、G は群であると言う。

S_3 が群であることを確認しよう。

結合則

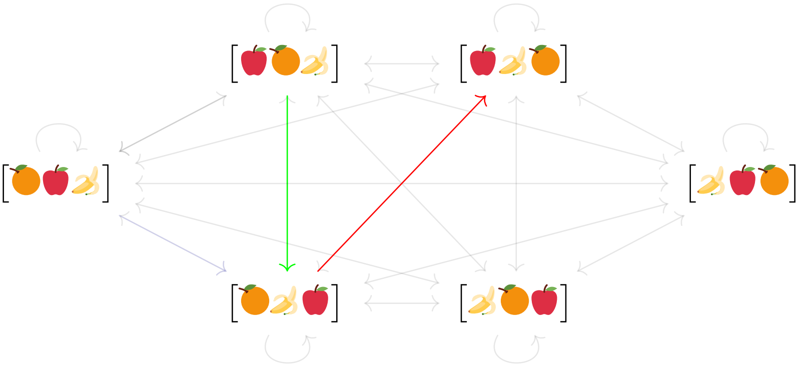
結合則は、$\sigma \in S_3$ が写像なので自然に成立。



$\color{red}{\sigma_{31}} \cdot \color{blue}{\sigma_{23}} \cdot \sigma_{12}$

結合則

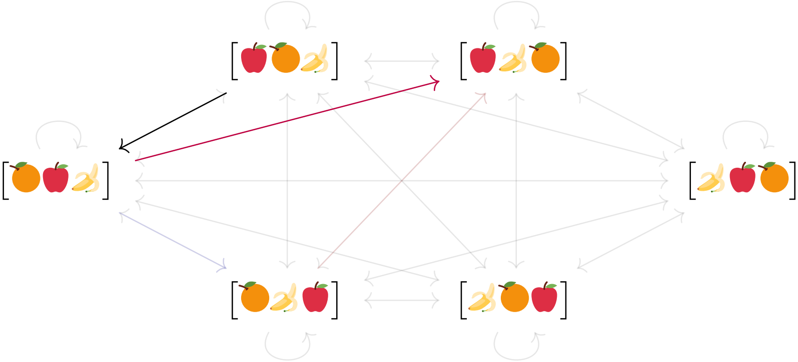
結合則は、$\sigma \in S_3$ が写像なので自然に成立。



$$\sigma_{31} \cdot \sigma_{23} \cdot \sigma_{12} = \sigma_{31} \cdot \left(\sigma_{23} \cdot \sigma_{12}\right) = \sigma_{31} \cdot \sigma_{321}$$

結合則

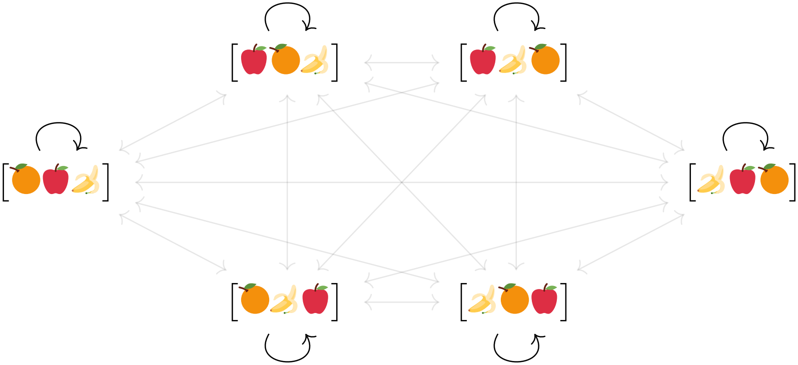
結合則は、$\sigma \in S_3$ が写像なので自然に成立。



$$\sigma_{31} \cdot \sigma_{23} \cdot \sigma_{12} = \left(\sigma_{31} \cdot \sigma_{23}\right) \cdot \sigma_{12} = \sigma_{321} \cdot \sigma_{12}$$

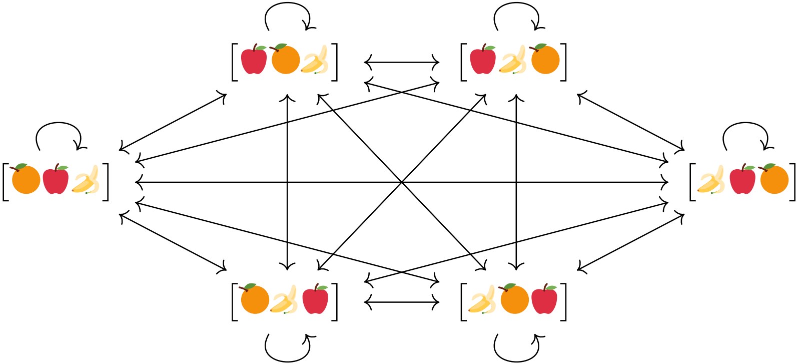
単位元

単位元は恒等写像 e.



逆元

逆元も、$\sigma \in S_3$ が写像（矢印）なので自然に存在。



$\therefore S_3$ は群。S_3 は 3 次対称群と呼ばれる。

自明な群

最も簡単な群は、恒等変換 e だけから成る群である。

1. 結合側：$(e \cdot e) \cdot e = e \cdot (e \cdot e)$
2. 単位元：$e \cdot e = e$
3. 逆元：$e \cdot e = e \Rightarrow e^{-1} = e$

この $\{e\}$ を自明な群と呼ぶ。

部分群

ある群の部分集合だけで群になることがある。

例えば S_3 の中で

$$\Sigma_{12} = \{e,\ \sigma_{12}\},\ \Sigma_{23} = \{e,\ \sigma_{23}\},\ \Sigma_{31} = \{e,\ \Sigma_{31}\}, \tag{2}$$

$$A_3 = \{e,\ \sigma_{123},\ \sigma_{321}\} \tag{3}$$

はそれぞれ群になる。
このようなとき、A_3 は S_3 の部分群であると言う。

3次交代群

A_3 は S_3 の中の偶置換を集めたもの（偶置換同士の積は偶置換）。

	e	σ_{123}	σ_{321}
e	e	σ_{123}	σ_{321}
σ_{123}	σ_{123}	σ_{321}	e
σ_{321}	σ_{321}	e	σ_{123}

一般に、n 次対称群 S_n（n 要素の置換全体のなす群）の中で、偶置換全体のなす部分群 A_n を n 次交代群と呼ぶ。

作用

S_3 は並べ方の集合 Ω 上の変換を集めたものだった。このようなとき、S_3 は Ω に**作用する**という。

一般に、群 $G(\ni g)$ と集合 $X(\ni x)$ について写像 $g(x) \in X$ が存在し

1. $g(h(x)) = (g \cdot h)(x)$
2. $e(x) = x$

が成立するとき、G は X に作用するという。

歴史的には、作用から群が抽出された（作用 $\to$ 群）。

現代数学では抽象的に群を導入し、それを色々な集合に作用させるという使い方が多い（群 $\to$ 作用）。

自分自身への作用

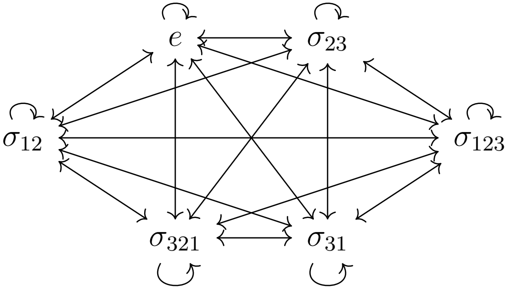
S_3 は並べ方（[🍎🍊🍌] など）に作用する群だったが、S_3 を集合とみなせば、S_3 は S_3 自身に作用することができる。

自分自身への作用の仕方は無数にあるが、例えば $\sigma_a, \sigma_b \in S_3$ について $\sigma_a(\sigma_b) = \sigma_a \cdot \sigma_b \in S_3$ ととればよい。

1. $\sigma_a(\sigma_b(\sigma)) = \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma = (\sigma_a \cdot \sigma_b)(\sigma)$
2. $e(\sigma) = e \cdot \sigma = \sigma$

なので、これは作用になる。

自分自身への作用



整数

自分自身への作用の例として、整数 $\mathbb{Z}$ がある。

整数 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ について 0 を単位元とする群である。

1. $(k+l)+m = k+(l+m)$
2. $k+0 = 0+k = k$
3. $k+(-k) = (-k)+k = 0$

$3+4=7$ は、「3 を足す」と「4 を足す」の合成が「7 を足す」になる、と考えることもできるし、「整数 3」に「4 を足す」を作用させると「整数 7」になる、と考えることもできる。

対称性

群は対称性を記述する道具であると言われる。

集合 X 上のある全単射 $f : X \to X; x \mapsto f(x)$ について、

$$f(\xi) = \xi \tag{4}$$

が成立するとき、ξ は f 不変である、または f 対称であると言う。

対称性と群

$\xi \in X$ について、$f(\xi) = \xi$ となる変換 f の全体を F とすると、F は $f(g(\xi)) = (f \cdot g)(\xi)$ を積演算として群になる。

1. 結合則：$((f \cdot g) \cdot h)(\xi) = f(g(h(\xi))) = (f \cdot (g \cdot h))(\xi)$
2. 単位元：恒等変換 $e(\xi) = \xi$ なので $e \in F$
3. 逆元：$f^{-1}(f(\xi)) = f^{-1}(\xi) = \xi$ なので $f^{-1} \in F$

このようにして、対称性（不変性）と群が対応する。

Abel-Ruffini の定理

5 次以上の方程式は解の公式を持たない。

その証明に、なぜ群が必要だったのか。

真面目にやると 1 学期かかるので、「気分」だけを簡単に。

2 次方程式

2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ を考える。b,c は有理数とする。
2 つの解を α,β とおくと

$$
\begin{aligned}
x^2+bx+c &= (x-\alpha)(x-\beta) \\
&= x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta \qquad (5)
\end{aligned}
$$

より、

$$b=-(\alpha+\beta) \qquad (6)$$

$$c=\alpha\beta \qquad (7)$$

を得る。

置換に対する対称性

$b = -(\alpha+\beta),\ c = \alpha\beta$ は、$\alpha \leftrightarrow \beta$ の置換について不変。
つまり、α と β の互換を $\sigma_{\alpha\beta}$ と書くと、

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(b) &= \sigma_{\alpha\beta}(-(\alpha+\beta)) \\ &= -(\beta+\alpha) = b \qquad (8)\\ \sigma_{\alpha\beta}(c) &= \sigma_{\alpha\beta}(\alpha\beta) \\ &= \beta\alpha = c \qquad (9)\end{aligned}$$

である。（置換群を、多項式に作用させている）

また、$b,\ c$ に四則演算を行った $b+c$ や $c(b+3c/b)$ なども、全て $\sigma_{\alpha\beta}$ について不変。

置換に対する対称性

ところで、解 α そのものに $\sigma_{\alpha\beta}$ を作用させると

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha) = \beta \neq \alpha \tag{10}$$

すなわち α は $\sigma_{\alpha\beta}$ について不変ではない。β も同様。

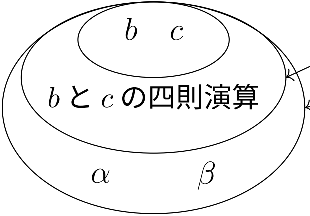
$b,\ c$ に四則演算を行ったものは全て $\sigma_{\alpha\beta}$ について不変だったので、

α と β は $b,\ c$ の四則演算だけで表すことはできない

ということが分かる。

数の空間

つまり、係数 $b,\ c$ の四則演算だけでは解 $\alpha,\ \beta$ に「到達」できない。
（四則演算だけで 2 次方程式の解の公式は得られない）



$S_2 = \{e,\ \sigma_{\alpha\beta}\}$ 不変

e 不変 （= 自明な不変性しかない）

S_2 不変な数の集合から「抜け出す」ための演算が根号 $\sqrt{\ }$ である。

対称性を破る

$\alpha - \beta$ は $\sigma_{\alpha\beta}$ をかけると -1 倍になる（不変でない）

$$\sigma_{\alpha\beta}\left(\alpha - \beta\right) = \beta - \alpha = -(\alpha - \beta) \tag{11}$$

しかし、その 2 乗である $(\alpha - \beta)^2$ は、$(-1)^2 = 1$ なので、

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}\left(\left(\alpha - \beta\right)^2\right) &= \left(\sigma_{\alpha\beta}(\alpha - \beta)\right)^2 \\ &= \left\{ - \left(\alpha - \beta\right) \right\}^2 \\ &= \left(\alpha - \beta\right)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

となり、$\sigma_{\alpha\beta}$ 不変になる。$\Leftrightarrow b,\ c$ で書ける。

根号による対称性の減少

すなわち、

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c \tag{13}$$

$$\alpha-\beta = \pm\sqrt{b^2-4c}. \tag{14}$$

ここの根号 $\pm\sqrt{\ }$ で対称性が崩れる。あとは、これと $\alpha+\beta=-b$ を連立すれば、α, β が解ける。

$\rightsquigarrow$ 2 次方程式の解の公式が存在する。

3 次方程式

3 次方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ についても、解を α, β, γ として

$$b = -(\alpha + \beta + \gamma) \tag{15}$$

$$c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \tag{16}$$

$$d = -\alpha\beta\gamma \tag{17}$$

であり、b, c, d は $[\alpha\beta\gamma]$ の置換 $\sigma \in S_3$ について不変。

3 次方程式の解の対称性

解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$ とする変換 $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ について

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\alpha) = \beta \neq \alpha \tag{18}$$

などとなり、$\alpha,\ \beta, \gamma$ は S_3 不変ではない。

2 次方程式のときと同様、係数 $b,\ c,\ d$ の四則演算で解を記述することはできない。

対称性の分解：$S_3 \to A_3$

2 次方程式における $\alpha - \beta$ に対応するものが

$$T = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \tag{19}$$

である。T に奇置換 $\{\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\alpha}\}$ をかけると -1 倍になる。e.g.

$$\sigma_{\alpha\beta}(T) = (\beta - \alpha)(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta) = -(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = -T$$

一方、偶置換 $\{e, \sigma_{\alpha\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\beta\alpha}\}$ は奇置換 2 個に分解できるので

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(T) = \sigma_{\alpha\beta}(\sigma_{\beta\gamma}(T)) = (-1)^2 T = T \tag{20}$$

となり、T は偶置換で不変。

対称性の分解：$S_3 \to A_3$

T は奇置換で -1 倍、偶置換で 1 倍（不変）であったので、任意の置換 $\sigma \in S_3$ について、T^2 は

$$\sigma(T^2) = (\sigma(T))^2 = (\pm T)^2 = T^2 \tag{21}$$

となり、すなわち S_3 不変。$\Leftrightarrow$ T^2 は係数 b, c, d で書ける。

対称性の分解：$S_3 \to A_3$

したがって、T は $b,\ c,\ d$ と平方根 $\sqrt{\ }$ で記述できることになる。

しかし、T はまだ偶置換 $\{e,\ \sigma_{\alpha\beta\gamma},\ \sigma_{\gamma\beta\alpha}\}$ で不変なので、解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を T で記述することはできない。

対称性の分解：$A_3 \to e$

ここで、1 の立方根 $\omega_\pm = (-1 \pm \sqrt{-3})/2$ を使って

$$U_\pm = \alpha + \beta\omega_\pm + \gamma\omega_\pm^2 \tag{22}$$

と置く。$U_\pm$ に $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ をかけると $\omega_\mp$ 倍になる。

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta\gamma}(U_\pm) &= \beta + \gamma\omega_\pm + \alpha\omega_\pm^2 \\ &= \omega_\pm^3\left(\beta + \gamma\omega_\pm + \alpha\omega_\pm^2\right) \\ &= \omega_\pm^2\left(\alpha + \beta\omega_\pm + \gamma\omega_\pm^2\right) = \omega_\pm^2 U = \omega_\mp U \end{aligned} \tag{23}$$

なお、$\omega_\pm^3 = 1,\ \omega_\pm^2 = \omega_\mp$ を使った。

対称性の分解：$A_3 \to e$

すると、$(\alpha-\beta)^2$ や T^2 と同じ仕組みで、$U_\pm^3$ は偶置換 $\{\sigma_{\alpha\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\beta\alpha}\}$ で不変になる。

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}\left(U_\pm^3\right) = (\omega_\mp U_\pm)^3 = U_\pm^3 \tag{24}$$

$$\sigma_{\gamma\beta\alpha}\left(U_\pm^3\right) = \left(\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2\right)\left(U_\pm^3\right) = U_\pm^3 \tag{25}$$

$U_\pm^3$ は偶置換で不変。$\Leftrightarrow$ $U_\pm^3$ は T を使えば記述できる。

$\Leftrightarrow$ その立方根 $U_\pm$ は、T と立方根 $\sqrt[3]{\ }$ で記述できる。

対称性の分解：$A_3 \to e$

あとは、

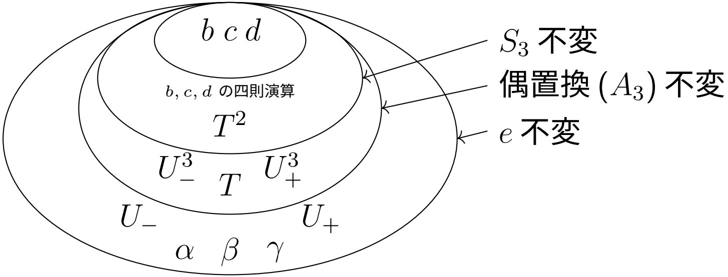
$$-b = \alpha + \beta + \gamma \tag{26}$$

$$U_+ = \alpha + \beta\omega_+ + \gamma\omega_+^2 \tag{27}$$

$$U_- = \alpha + \beta\omega_- + \gamma\omega_-^2 \tag{28}$$

だったので、この 3 元連立方程式を解けば α, β, γ が求められる。
$\rightsquigarrow$ 解が係数 b, c, d と $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ で記述される。
$\rightsquigarrow$ 3 次方程式の解の公式が存在する。

数の空間



5 次方程式の非可解性

	奇置換 $\sigma_{\alpha\beta}$	偶置換 e
係数 b, c	○	○
$(\alpha-\beta)^2$	○	○
$\alpha-\beta$	-1 倍	○
解 α, β	–	○

2 次方程式が解けたのは、

$$\sigma_{\alpha\beta}(P^2) = P^2 \quad \text{かつ} \quad \sigma_{\alpha\beta}(P) \neq P \tag{29}$$

となる式 $P = \alpha - \beta$ が見付かったから。

5 次方程式の非可解性

	奇置換	偶置換	
	$\{\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\alpha}\}$	$\{\sigma_{\alpha\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\beta\alpha}\}$	e
係数 b, c, d	○	○	○
T^2	○	○	○
T	-1 倍	○	○
$U_\pm^3$	–	○	○
$U_\pm$	–	$\omega_\mp$ 倍	○
解 α, β, γ	–	–	○

3 次方程式が解けたのは、e でない偶置換 $\sigma_{\mathrm{ev}} \in \{\sigma_{\alpha\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\beta\alpha}\}$ で

$$\sigma_{\mathrm{ev}}(P^3) = P^3 \text{ かつ } \sigma_{\mathrm{ev}}(P) \neq P \tag{30}$$

となる式 $P = U_\pm$ が見付かったから。

5 次方程式の非可解性

解を $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$ とする 5 次方程式でも、e でない偶置換 σ_{ev} で

$$\sigma_{\mathrm{ev}}(P^3) = P^3 \quad \text{かつ} \quad \sigma_{\mathrm{ev}}(P) \neq P \tag{31}$$

となる式 P を見付けなければならない。
しかし、5 次の場合、5 次巡回置換 σ_{q}(e.g. $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta \to \eta \to \alpha$) があり、任意の式 P は $\sigma_{\mathrm{q}}^5(P) = P$ となる。そして、

$$\left\{\sigma_{\mathrm{q}}^5(P) = P \quad \text{かつ} \quad \sigma_{\mathrm{ev}}(P^3) = P^3\right\} \;\Rightarrow\; \sigma_{\mathrm{ev}}(P) = P \tag{32}$$

が証明できる。すなわち、(31) の条件を満たす式 P は存在しない。

$\rightsquigarrow$ 5 次方程式の解の公式は存在しない。

対称性と空間

実は、ここまでの議論で Galois 理論は使っていない。

Galois 理論は、「数の空間 $\leftrightarrow$ 対称性 $\leftrightarrow$ 群」の対応をより厳密かつスマートに記述する枠組みであり、今回は深入りしない。

ただ、Galois 理論に言及せずとも、ここまでの議論で

対称性で空間を分解する

という発想の一端は垣間見える。そして、その裏には群の作用があることも分かる。

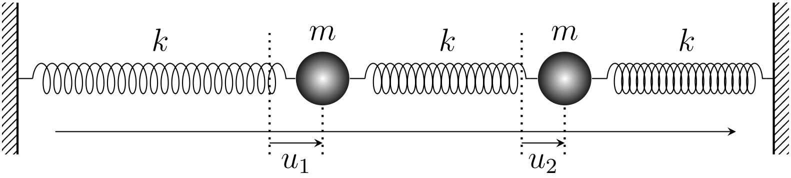
空間の分解

群論の発想は、具体的かつ実際的な問題にも応用できる。

最も分かりやすい例として調和振動子系を考える。

固定端 2 質点連成振動

質量 m の 2 質点がばね係数 k のばね 3 つで下図のように連結している。ばね両端は壁に固定。



自然長（静止状態）からの変位を $u_i (i = 1, 2)$ とする。

運動方程式

2 階の時間微分を $\ddot{u}$ で表すと、運動方程式は

$$m\ddot{u}_1 = -ku_1 + k(u_2 - u_1) \tag{33}$$
$$m\ddot{u}_2 = -k(u_2 - u_1) + k(-u_2) \tag{34}$$

すなわち

$$m\ddot{u}_1 = -2ku_1 + ku_2 \tag{35}$$
$$m\ddot{u}_2 = ku_1 - 2ku_2 \tag{36}$$

となる。

運動方程式

縦ベクトルで

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

とおくと、運動方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} \tag{38}$$

$$= -\frac{k}{m}M\boldsymbol{u} \tag{39}$$

と書ける。

通常の解法

通常は、係数の行列 M を対角化して解く。

$$M = U^{-1}\bar{M}U \tag{40}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{41}$$

(42)

通常の解法

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\frac{k}{m} M \boldsymbol{u} \;\Leftrightarrow\; U\ddot{\boldsymbol{u}} = -\frac{k}{m} U U^{-1} \bar{M} U \boldsymbol{u}$$

$$U\ddot{\boldsymbol{u}} = -\frac{k}{m} \bar{M} U \boldsymbol{u}$$

ここで

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \equiv U\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$

とおくと

通常の解法

$$\ddot{v}_1 = -\frac{k}{m}v_1 \tag{43}$$

$$\ddot{v}_2 = -\frac{3k}{m}v_2 \tag{44}$$

よって

$$v_i = A_i e^{i\omega_i t} v_i \tag{45}$$

ただし $\omega_1 = \sqrt{k/m},\ \omega_2 = \sqrt{3k/m}$ で、A_i は初期条件から決まる定数。

座標変換

この解法の上手いところは、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

という座標変換にある。v_1 を重心座標、v_2 を相対座標と呼ぶこともあるが、このように分解すると 2 変数の絡まりがほどける。

この背景には、鏡映反転に対する対称性がある。

鏡映変換

2 質点の中心を対称面とする鏡映変換は、$\boldsymbol{u}$ を

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

と変換する。つまり、2 質点を入れ替えた上で、その変位の向きを逆にする。

変換行列 D を導入して、次のようにも書ける。

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = D\boldsymbol{u} \tag{48}$$

鏡映変換対称

鏡映変換について不変なベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を考えると

$$\xi_1' \mapsto -\xi_2 = \xi_1 \tag{49}$$

$$\xi_2' \mapsto -\xi_1 = \xi_2 \tag{50}$$

となり、

$$\boldsymbol{\xi} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

という 1 次元空間上のベクトルは鏡映変換対称になる。

鏡映変換反対称

一方、鏡映変換について向きを反転するベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を考えると

$$\eta_1' \mapsto -\eta_2 = -\eta_1 \tag{52}$$

$$\eta_2' \mapsto -\eta_1 = -\eta_2 \tag{53}$$

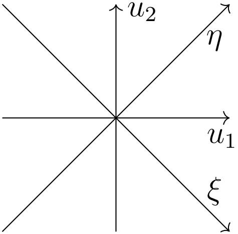
となり、

$$\boldsymbol{\eta} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

という 1 次元空間上のベクトルは鏡映変換反対称になる。

対称性による空間の分解

$\boldsymbol{\xi}$ の方向と $\boldsymbol{\eta}$ の方向は、元の $\boldsymbol{u}$ 空間の直交基底を張っている。



ξ 成分だけでは、鏡映対称な運動しか記述できない。$\rightsquigarrow$ 2 次方程式で、係数 b, c が $\sigma_{\alpha\beta}$ 対称なために解 α, β を記述できないのと同じ。

$\sigma_{\alpha\beta}$ で反転する $\alpha - \beta$ によって解が記述できたように、鏡映変換で反転する η 成分によって任意の（対称性から解放された）運動を記述できる。

この ξ 成分が重心座標、η 成分が相対座標に対応している。

系の持つ対称性

2 次元空間 $\boldsymbol{u}$ を $\{\xi, \eta\}$ で記述するのは、要は座標変換（直交変換）である。

この座標変換が今の 2 質点連成振動子系と相性がいいのは、運動方程式の係数行列 M と、鏡映変換の行列 D が交換可能

$$DM = MD \tag{55}$$

だからである。

交換可能 $\Leftrightarrow$ 同時対角化可能が効いて、鏡映対称性による空間の分解（重心座標、相対座標）が、運動方程式を解く上で有用になる。

変換 $\leftrightarrow$ 対称性

鏡映対称性が、重心座標、相対座標への座標変換を導いたように、空間の対称性と変換は強く対応している。

N 質点の自由端連成振動子系では、鏡映対称性の他に並進対称性 $u_i \mapsto u_i' = u_{j+k}$ があり、この対称性がいわゆる離散 Fourier 変換を導く。

対称性で空間を拡げる

2 質点連成振動子系では、最初に 2 次元空間 $\boldsymbol{u}$ を考えてそれを対称成分 ξ と反対称成分 η に分解した。

最初に対称な空間（= 自由度の低い空間）があり、そこから対称性を破る方向に空間を “拡げる” という発想もあり得る。

例えば、任意のベクトルはある軸について 2π 回転すると元に戻る (2π 回転対称)。
そこで「2π 回転すると -1 倍する」ようなものを考えて、対称性を崩すことで出てきたのがスピノル（スピン)、という解釈もできる。その背景には $SO(3)$ と $SU(2)$ という群がある。

情報科学への応用

例えば画像認識における機械学習において、augmentation として回転変換や並進変換を行うことがある。

それらの変換（画像 $\mapsto$ 画像）は、その画像のクラス（顔、猫、. . .）を変えないという点で “不変” 性を誘導し得る。

その辺りから群論的考察ができる可能性はあるが、今のところ、有用かつ見通しの良い理論は、誰も構築できていないようである。

機械学習の枠組みでは、入力データと予測結果の型（集合）が異なるため、群論における変換との相性が悪い。
（すると、AutoEncoder のようなモデルは都合がいいのかも）

まとめ

1. 群とは変換を集めたもの。
2. 変換の裏には対称性があり、対称性は空間を分解する。
3. 群という視点で、空間を分解したり拡大したりできる。

参考文献

P. M. Neumann, *The Mathematical Writings of Évariste Galois*, (European Mathematical Society, 2011).

平井武, 線形代数と群の表現 *I*, *II*, (朝倉書店, 2001).

lemniscus, *5*次以上の方程式が代数的に解けないことについて, http://d.hatena.ne.jp/lemniscus/20110721/1311263937.

岸根純一郎, "物質科学のための表現論入門", 固体物理 **44**, 553–569 (2009).