【本文（翻訳をお願いします）】

かけ算の順序論争について（日本語版）

# 1.　はじめに

日本の小学校の算数で，2年で学習する重要な事項といえば，「かけ算」である．かけ算の式で表すことを学びながら，九九と呼ばれるかけ算の表を暗記する．現在では，4×12のような九九の範囲を超える式も，2年で学習している<1>[1][2]．筆算は使用しない．例えば，九九による4×9＝36と，乗数が1増えれば積は被乗数だけ増えるという性質により，4×10＝40，4×11＝44，そして4×12＝48を得る．あるいは，交換法則と累加から，4×12＝12×4＝12＋12＋12＋12＝48とすることもできる．

テストでは，次のような問題が見られる（「林檎の問題」と呼ぶ）．

「皿が5枚あります．1皿に林檎が3個ずつ乗っています．林檎は全部で何個あるでしょう」という問題文と，式と答えを書く欄がある．児童が式に「5×3＝15」，答えに「15個」と書いたところ，答えはマルがついて正解だが，式がバツで不正解である．そしてこの問題の正解となる式，「3×5＝15」が，赤ペンで書き加えられている．問題文では5が先，3が後に出現しているが，学習した「かけ算の意味」をもとに，二つの数をひっくり返して「3×5」と書かないといけない．これが，「かけ算の順序」の基本的な考え方である．

これに対し，さまざまな理由で，「5×3＝15」も正解とすべきだという主張がなされている．『かけ算には順序があるのか』と題した書籍[3]も，刊行されている． 2013年10月，韓国のインターネット掲示板でも議論があり<2>，その中で筆者の英語記事<3>がリンクされた．筆者は韓国語が分からないが，いくつかのコメントを機械翻訳にかけてその意図を知り，そこから，かけ算の論争を世界レベルで共有すべきではないかと感じた．

そこでこの文書では，「かけ算の順序」あるいは「かけ算の意味」について，情報の整備を試みた．日本の算数・数学教育の一面について，日本の外で関心のある人々が読めるようにしている．後でも述べるが，筆者は上の答案を不正解とすることに賛成である．

本論に入る前に，日本の教育の前提をいくつか挙げておく．かけ算は「被乗数×乗数＝答え」の式で表される．答案に書かれた赤のマルは正解，バツは不正解を表す．年度は4月に始まり翌年3月に終わる．

# 2.　正解・不正解の理由

## 2.1　正解とする六つの理由

「5×3＝15」を正解とする理由について，インターネット上の情報や書籍で読んできた中から主要なものを選び，以下の六項目からなるリストを作成した．

A-1　被乗数と乗数は交換可能である．乗法の交換法則により，5×3＝3×5が成り立つ．

A-2　トランプ配りをすれば，被乗数と乗数を交換できる．上の問題だと，「5個ずつ3回」になる．

A-3　林檎を長方形に配置すれば，その総数は5×3で表すことができる．

A-4　皿の枚数を被乗数，1皿あたりの林檎の数を乗数と見なせばよい．

A-5　単位を付けて書くと，「5×3個」と「3個×5」，「5枚×3個／枚」と「3個／枚×5枚」は，それぞれ同じである．

A-6　他の国では，式で表したとき，被乗数と乗数の位置が反対になる，もしくは，どちらでもよい．

以下の一連の画像は，トランプ配りをすれば5×3＝15になることを表している．

A-2およびA-4は，「被乗数×乗数」でかけ算の式を表すという算数のルールのもとでも，5×3が正しい式であるという理由を示している．それに対し，A-5およびA-6は，「乗数×被乗数」も，適切なかけ算の式であるという主張となる．

A-5に書いた「単位」について，ウィキペディア日本語版では「助数詞」<4>で詳しく解説している．英語版には“Japanese counter word”<5>がある．しかしこれは日本固有というわけではなく，[4]に記されているreferentが相当しており，日本国外の数学教育の研究にも事例がある．しかし単位付きの式は，算数の教科書には見当たらない．「／（per）」を用いた分離量の単位表記は，1970年ごろ発生したものである（この記号を積極的に推進している数学教育協議会の著作物で，1961年と1971年に発行された『水道方式入門』[5][6]を読み比べるとよい）．

## 2.2　不正解とする六つの理由

「5×3＝15」を不正解とする理由についても，主要なもの選んでリストにした．

B-1　この問題では，1皿あたりの林檎の数が被乗数であり，皿の枚数が乗数となる．

B-2　5×3と3×5は，かけ算の答えは同じでも，意味は異なる．

B-3　5×3＝15の式では，皿の数と林檎の数が反対である．

B-4　5×3＝15の式では，積は皿の枚数になってしまう．

B-5　単位を付けて書くと，「5個×3」と「3個×5」，「5個／枚×3枚」と「3個／枚×5枚」は，それぞれ異なる．

B-6　言語や文化の違いに配慮しながら式で表すことが教育上有益である．

B-3とB-4が絵になった授業例がある[7]．

「自動車が5台あります。タイヤの数はいくつでしょうか」という問題で，「1台にタイヤは4本」というヒントを得て，4×5＝20と書く．ここでもし，「5×4」だったら，5つのタイヤがついて「五輪車が4台」となる図や，家に車が入った「5台ずつが4つ」という図によって，問題に合っていないことが視覚化されている．

## 2.3　各理由の賛否

リストを作ることで，それぞれに対する賛否を明確にしやすくなる．筆者はというと，A-1からA-6までのいずれにも賛同できない．問題文を読み，かけ算で求められると判断すること，すなわち演算決定は，交換法則の適用（A-1）よりも前に行わなければならない．

式に対する解釈の多様性は，A-2だけでなくB-3およびB-4も考慮する必要がある．林檎の問題で「5×3」と書いたら，A-2，B-3，B-4の解釈が可能であるのに対し，「3×5」と書けば，これまで学習してきたかけ算の意味に基づくと，そういった解釈の余地がない，なので誤解のより少ない式を選ぼう，という考え方である．二つの式を比較し選択することは，かけ算の意味を学ぶ際の学習指導案にもよく記載されている．

またトランプ配りは現在，等分除の操作として用いられている[8][9]．配る操作をする際，総数が決まっているからである．それに対し，「a人にb個の林檎を配りたい」という場面では，配る操作をすることなく，総数をかけ算で求めることになる（配る操作と加減乗除との関わりについては[10]が詳しい）．総数が未知で，トランプ配りの操作を考慮した学習指導案もあるが[11]，「置き方ではなく，置いた結果に着目させる」という注意書きをつけてA-2の理由を排除し，一つ分の大きさを決定している．

A-3は「積」のかけ算を手段として「倍」のかけ算の問題を解こうというアプローチである．School Mathematics Study Group（SMSG）が1960年代に提唱し，数学教育の現代化運動とともに消滅したと言ってよい[8]<6><7>．授業例も，学術調査に基づく児童の認識の事例も，見当たらない[12][13]．

A-4は素朴な発想ながら，Vergnaudによる根拠付けもある[14][15]．しかし8～9歳児では認識が困難とも記されている．1950年代の指導例[16]と合わせて，この考え方は4年または5年で，数量関係の理解を通じて学ぶのが適切である．

A-5はB-5と，A-6はB-6との比較である．ところでB-6は日本限定でなく，韓国でも<8>，ベルギー駐在員が学校のテストで零点を取った子どもに対し，自分たちは永住するわけではないのだから，「4つずつで5個のカゴ」と考え，式を書く段階でヨーロッパ式の順序にするよう指示したという事例がある．A-5に賛成する記述を含む文献には[17]があり，A-6には[18]，B-5には[19]，そしてB-6には[20][21][22]がある．これらを比較した結果，複数の理由で得られる式を比較して一つを選ぶという指導を含む，B-5およびB-6がより望ましいと判断した．

ここまでA-1からA-6への反論を書いてきたが，だからといって，B-1からB-6までのすべてに賛成するわけではない．B-1およびB-2については，それらを授業で学習しており，それを踏まえた上でのテストであるという条件のもとで，賛成である．この条件が成立していることは，教科書や学習指導案から推測できる．最近の教育評価論[23]においても，4×8のうち4は「1あたり量」，8は「いくつ分」と，区別することの必要性が記されている．

B-3やB-4は，A-2との対比のために挙げたほか，それぞれ指導の実例がある．上に示した例のほか，B-3については，2011年，「2×8ならタコ2本足」と題する授業例が朝日新聞で取り上げられた<9>．より新しい授業例が[24]にある．B-4については，あとでもう一つ例を挙げる．反対意見をより少なく見せたい人が編集したら，このB-3とB-4を合わせて一つの項目にするだろう．

B-5については，算数教育の範囲を超えるが，「5個×3枚」と「3枚×5個」との比較も不可欠である．Vergnaud [14]は「4×15と15×4は等しいけれども，4個×15セントによって60セントが得られ60個ではないのはなぜか」と指摘しているが，これは「5個×3枚」「1.5kg×4箱」などをふだんから目にすることのできる，今の日本社会に向けた問題の提案といえる．なお日本国外で筆者は，「3×80g」「75g×5」と書かれた商品を購入した．被乗数は単位があり，乗数にはないことで，1個の量はどれだけで，それが幾つあるかを知ることができる．

最後に，B-6について，文化には国際的なものだけでなく，国内の，歴史的な観点が含まれることを挙げておく．いろいろな式の表記や解釈を学び，目の前の問題に対し，子どもたちが答えを出せるようになることを，支援していきたい．

# 3.　かけ算をめぐる状況

## 3.1　乗数が先の文章題

林檎の問題は，乗数が先に，被乗数が後に出現し，「被乗数×乗数＝答え」の式で求めることを意図している．この種の出題には，数十年の歴史がある．

把握している限りで最も古い指導例は，1951年の小学校学習指導要領 算数科編（試案）である<10>．鉛筆の配る本数を求める問題に対し，被乗数と乗数を逆にした式では，「その数の意味を深く考えもしないで，出てくる順に書き並べ，その間に，かけ算記号を書き入れる」「問題に出てくる数を頭の中にいったん収めて，演算の決定に導くように問題の場を組織化する力が欠けている」と分析し，3人の2倍で6人になって問題に合わないと指導している．ここでB-4が用いられている．

社会的には1972年の朝日新聞の記事が重要である<11>．「6人のこどもに、1人4個ずつ蜜柑をあたえたい。蜜柑はいくつあればよいでしょうか」というテストの出題で，「6×4」の式が不正解となったのに対し，ある児童の親が学校や教育委員会，そして文部省まで抗議した．数学者であり算数・数学教育にも深い関わりのある遠山啓は同年，科学朝日に記事を寄せた[25]．トランプ配りを思い浮かべる児童は6×4＝24と書くのが合理的だと述べ，交換法則や机の長方形配置も挙げて，6×4と4×6のどちらでもよいという立場を示している．

しかしながらその後の算数教育では，かけ算の意味を重視する中で，乗数が先に，被乗数が後に出現する文章題が，算数教育に携わる教師による書籍で取り上げられ，学力調査・学術調査でも出題されている．教師には，次の2氏の名前を挙げたい．一人は，「百ます計算」を広めたことで知られる岸本裕史，もう一人は，筑波大学附属小学校で算数を教える田中博史である．それぞれの著書[26][27]で，児童らは十中八九，間違って書くと述べている．

金田茂裕の学術調査[28]によると，その種の文章題に対し，かけ算を学習した後の小学2年生の約20%，大学生の約60%が，乗数×被乗数の式を書いていた．被乗数が先に出現する文章題では，大学生の全員，そして児童もほぼ全員が，被乗数×乗数の式を書いた．

東京都算数教育研究会では，2年に一度，数と計算および数量関係の学力調査を行っており，各学年60,000人前後が解答している．2012年度には，次のような出題があった<12>．

「子どもが3人います．蜜柑を1人に4個ずつ袋に入れて配ります．配る蜜柑は全部で何個いるか考えます」と与えたあと，問題に合う図を二つの中から選択させ，その後，式を書かせている．これにより，文章から場面や数量の関係を適切に把握しているか，および，その関係をかけ算の式で適切に書くことができるかを尋ねている．両方正解したのは54%で，図のみ正解は28%，式のみ正解は6%である．

ここまで見てきた通り，乗数が先に，被乗数を後に置いた文章題で「被乗数×乗数」の式のみを正答とする出題は，少なくとも半世紀以上の歴史があり，現在まで継承されている．もちろん，正解不正解を得るに留まらず，その結果は指導にフィードバックされてきた．ところで，その種の出題は低学年までであり，高学年では，わり算が用いられる．2010年度の全国学力・学習状況調査（全国学力テスト）で小学6年生は「8mの重さが4kgの棒があります。この棒の1mの重さは何kgですか」<13>という問題を解いた．正解となる式は，8÷4ではなく4÷8である．

## 3.2　a×bとb×a

かけ算の意味を定着させるための指導には，乗数を先に書く文章題の他にも方法があり，また日本の外でも見ることができる．それは，a×bとb×aの違いを学ぶことである．

まずは教科書を見ておこう．東京書籍の2011年度版では，「鉛筆を1人に2本ずつ，5人に配ります．鉛筆は全部で何本いりますか」と「鉛筆を2人に5本ずつ配ります。鉛筆は，全部で何本いりますか」を並べて提示している<14>．いずれも2が先，5が後に出現しているが，状況は異なる．そして前者は2×5，後者は5×2と式で表すことが期待される．後者は，乗数が先の文章題でもある．そのため，このペアで式の違いを学習したあと，林檎の問題に「5×3」と書いた児童には，これは「鉛筆を2人に…」の問題と同じ，と復習することができる．大日本図書による同年度の教科書にも，同様のペアがある<15>．

ここからは英語の文献を見ていく．[8]では，4つずつキャンディを持っている3人の子どもたちは，3つずつキャンディを持っている4人の子どもたちよりも幸運であるという例を使って，「4が3つ」と「3が4つ」の違いを説明している．交換法則についても，それは数の性質であり，3×4が4×3と等しいのは事実だが，日常生活においてそれらが同じとは限らないと述べている．これらはB-2およびB-5と関係がある．

純粋な数のかけ算と，算数で答えを求めることとの違いは，他の者も指摘している．Vergnaudは，すでに述べた「4×15と15×4は等しいけれども，4個×15セントによって60セントが得られ60個ではないのはなぜか」を，乗法構造を詳述する直前に記している．またGreerは，「あるロケットは1秒間に0.85マイルのスピードで進む．16秒ではどれだけ進むか」なら，児童らはかけ算を選ぶが，0.85と16を交換した文章題になると16÷0.85を選びやすいと例示し，実験により認められた「乗数効果」を解説している[29]．ここで乗数効果とは，かけ算で求められると認識することの困難さが，乗数が「整数」「1より大きい小数」「1より小さい小数」のうちどれであるかに依存し，被乗数の種類には依存しないことをいう．乗数効果は日本でも確かめられている[30]．

「かけ算の順序」の批判者は，しばしば「被乗数×乗数」は導入時の便法であり，交換法則を学習すれば「乗数×被乗数」としてもよいと説く（例えば[3]）．しかしそれでは，上に挙げたVergnaudやGreerの提案や観察を合理的に説明できない．

## 3.3　「倍」と「積」のかけ算

国内外の文献で，かけ算の分類法を様々な人が提案している．その中でも，かけ算を「倍」に由来するものと「積」に由来するものに大別するのが分かりやすい．「倍」は，被乗数とかけ算の答えが同種の量であり，乗数は単位または助数詞があっても，割合あるいは拡大率とみなして，演算時に無次元となるようなかけ算をいう．「積」は二つの純粋な数どうしのかけ算と，二つの量をかけてそれらと異なる量を得るかけ算からなる．二つに大別した上で，より細かな分類が[29]で表になっている．もし三つに分けるのなら，「倍概念」「比例関数」「複比例」が知られている[14][31]．四つだと，「累加」を加えるとよい[23]．

「倍」と「積」には簡単な識別法がある．a×b＝pで数量の関係が表されるとき，aとbとpがすべて同じ種類の量か，pがaとbのどちらとも異なる種類の量のときは，「積」であり，aとbはpの因数となる．その場合，被乗数・乗数による区別はしない．pがaとbのちょうど一方と同じ種類の量のときは，「倍」であり，もしaとpが同じ種類の量ならば，aが被乗数，bが乗数となる．縦×横や，底面積×高さによって，面積や体積を求めるのは「積」であり，「5個×3枚」や「4個×15セント」は「倍」にあたる．

「倍」と「積」を組み合わせた計算も可能である．10円玉を次のように並べたとき，その総額はいくらだろうか．そしてどのように計算すればよいか．

縦に見れば30円ずつ，横に見れば40円ずつある．だからといって30×40＝1200と計算してはいけない．現実には120円しかない．10円玉の枚数を数えると，3×4＝12で（4×3＝12としてもよい），12枚ある．そして，10×12＝120によって金額が求められる．二つのかけ算の式を組み合わせて，10×3×4＝120とも書ける．左辺を（10×3）×4＝30×4＝120と計算すれば，30円が4列あることを表現できるし，乗法の結合法則も確認できる．

10円玉を，おはじきに取り替えると，それは学習指導要領の解説にも載っている[1]．その総数を求める式が3×4でも4×3でもよいのは，それはデカルト積に基づいた「積」のかけ算だからである．一方，林檎の出題を含め，議論の対象となっているものは「倍」のかけ算に属する．遠山が1972年に[25]を書いた時点では，「倍」と「積」の区別が明確化されていなかったと推測できる．認識の変更が，1979年（死去の半年前）の講演録に見られる[32]．

# 4.　日本の算数教育の特徴

ここまでの内容を整理するとともに補足を加え，日本の算数教育の特徴を述べる．

最も大きな特徴は，授業の仕方である．授業ごとに「めあて」を教師が設定し，通常45分の授業の中で少数の問題に時間をかけ，1つの問題に全員で取り組む．式や答えを書くだけでなく，その根拠を答えることもある．主となる問題では，その反応（式や求め方など）の多様性を重視する[33]．この授業方式は『The Teaching Gap』[34][35]により世界的に有名となった．授業は教科書や教師用指導書をなぞって進めるものではない．それは教師が作成している様々な学習指導案から確認できる[7][11][36]．インターネット上で公開されている学習指導案もあり，教師でなくとも，WordやPDFの文書を読むことができる．かけ算の学習においては，B-1やB-2と密接な関係のある学習指導案が多い．

日本は教育先進国であり，教育内容や指導法の輸出国でもある<16>．算数の教科書を東京書籍と啓林館が英訳して販売しており[37]<17><18><19>，日本の算数教育に関心のある外国の教師・研究者や，海外在住で将来日本に帰国する児童が活用している．

しかしかけ算の順序を含め，日本の方式をそのまま他国に浸透させようというのではなく，各国の言語や文化に対する配慮も見られる．例えば馬場卓也[38]は，タイ語のかけ算の自然な語順は日本語と同じであるが，教科書の式は英語と同じであるという観察から，学習者の認知的な負担を指摘し，他の事例と合わせて，教育の国際協力におけるカリキュラム開発の注意点を提示している．また筑波大学とメキシコ教育省の共同事業によりスペイン語の教師向け指導書が作成され[39]，その理論的検討においてxj（xにjを下付き文字で添えた記号）を日本式のかけ算の記号とし使用し，日本語とスペイン語でのかけ算の式の違いを考慮している．

日本の状況に話を戻すと，かけ算については，「被乗数×乗数」が当然となっている．日常生活においても，寸法や会計は別として，多くの場合，この式から数量を把握できる．「a×b」を「aがb個」と読めばよいからである．ここでaには，数量でないものが書かれることもある．例えばあるビデオゲーム<20>では，棺桶の絵の右下に「×2」を添えて，生き返りを待つ死亡モンスターが2体あることを表現している．

学力調査にも特徴がある．校内の通常のテストや入学試験とは別に実施される，学力調査（学術調査を含む）では，解答者ごとに点数をつけない．児童ごとの正解数や得点よりも，生徒集団の解答類型とその割合を重視し，教育内容の改善に役立てている．そして調査問題は実施後に公開される．全国学力テストは実施後すみやかに試験問題が公表され，数か月後には各問に対する解答類型や正解率を含む表および分析が公開されている（2013年度については<21>）．

全国学力テストでは「乗数と被乗数を入れ替えた式なども許容する」という注意書きがあるため，かけ算の順序は問われていない．それに対し，東京都算数教育研究会の学力調査では，6年生が解く分数のかけ算の文章題で，「乗数×被乗数」の式を不正解としている．この例の他にも，高学年では，被乗数が先，乗数があとに出現する文章題で，二つの数をひっくり返した式を書くと，かけ算の意味を理解していないと判断される事例がある．

# 5.　おわりに

この文書では主に二つのことを述べた．前半では「かけ算の順序」の論点を明らかにしたのち，その論拠となる，正解とする理由および不正解とする理由をリストにした．それぞれの理由を簡潔な記述にすることで，情報を付けた賛否の表明をしやすくしている．A-2，B-3，B-4のように，二つのリストの間での関連も見ることができる．賛成や反対の意見と，このリストとを照合すれば，どの理由を支持しどれを却下しているかが，容易に判断できる．

後半の事例整理は，かけ算を通じた算数教育の国際理解を意図したものである．とはいえ本記事で紹介したのは，「かけ算の意味」の理解状況や指導に関するアウトプットの，ほんの一部分に過ぎない．紹介できなかったが，1970年代に数学者らが著したいくつかの「量の理論」[40][41][42]は，現在でも算数・数学教育の基礎として活用できる．英訳された日本の学習指導要領解説[2]と，米国のCommon Core State Standards for Mathematics <22>との読み比べからも，得られるものが多い．

今後の課題として，算数・数学教育と数学との関わりや，日本の教育と世界の教育との関わりなどについて，文献を整備し，「かけ算の順序」と結びつけた議論に役立てることを考えている．

【追加の文章等（これらも韓国語への翻訳をお願いします）】

* 皿が5枚あります．1皿に林檎を3個ずつ乗せます．林檎は全部で何個あるでしょう．
* この文書の全文は，次のURLよりご覧ください．

【参考資料１：参考文献およびURL（翻訳不要）】

# 参考文献

[1] 文部科学省: 小学校学習指導要領解説 算数編, 東洋館出版社 (2008). [isbn:9784491023731]

[2] Isoda, M. (Ed.): Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics (Grade 1-6), 2010. [http://www.globaledresources.com/products/assets/Teaching%20Guide%20Elementary.pdf]

[3] 高橋誠: かけ算には順序があるのか, 岩波科学ライブラリー180, 岩波書 店 (2011). [isbn:9784000295802]

[4] Schwartz, J. L.: "Intensive quality and referent transforming arithmetic operations", Number concepts and operations in the middle grades, National Counsil of Teachers of Mathematics. pp.41-52 (1988). [isbn:0873532651]

[5] 遠山啓(編): 算数に強くなる水道方式入門, 国土社 (1961). [asin:B000JALYQ0]

[6] 遠山啓, 銀林浩(編): 新版 水道方式入門 整数編, 国土社 (1971). [isbn:4337478094]

[7] 筑波大学附属小学校算数部 (編集): 板書で見る全単元・全時間の授業の すべて 小学校算数2年下, 東洋館出版社 (2003). [isbn:9784491019376]<!--pp.46-47-->

[8] Anghileri, J. and Johnson, D. C.: "Arithmetic Operations on Whole Numbers: Multiplication and Division", Teaching Mathematics in Grades K-8, Longman Higher Education, pp.146-189 (1988). [isbn:0205110762]

[9] 水戸部修治, 笠井健一, 村山哲哉, 杉田洋, 直山木綿子, 澤井陽介: 教科調査官が語るこれからの授業 小学校―言語活動を生かし「思考力・判断力・表現力」を育む授業とは, 図書文化社 (2012). [isbn:9784810026160]

[10] 文部省: 数と計算の指導―小学校算数指導資料, 大日本図書 (1986). [isbn:4477181655]

[11] 前川公一, 志水廣: 365日の算数学習指導案 1・2年編, 明治図書出版 (2011). [isbn:9784180808335]

[12] 中島健三: 乗法の意味の指導について, 日本数学教育会誌, Vol.50, No.2, pp.2-6 (1968). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110003849500]

[13] Mulligan, J.: "Children's Solutions to Multiplication and Division Word Problems: A Longitudinal Study", Mathematics Education Research Journal, Vol.4, No.1, pp.24-41 (1992). [http://www.merga.net.au/documents/MERJ\_4\_1\_Mulligan.pdf]

[14] Vergnaud, G.: "Multiplicative Structures", Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press, pp.127-174 (1983). [isbn:012444220X]

[15] Vergnaud, G.: "Multiplicative Structures", Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Vol.2, pp.141-161 (1988). [isbn:0873532651]

[16] 中野佐三(編): 算数科の教育心理, 児童心理選書 第八巻, 金子書房 (1957). [asin:B000JBN9M6]

[17] 小林道正: 数とは何か?, ベレ出版 (2012). [isbn:9784860643409]

[18] 佐藤俊太郎(編著): 算数・数学教育つれづれ草, 東洋館出版社 (2010). [isbn:9784491026183]

[19] Schuberth, E. (著), 森章吾 (訳): シュタイナー学校の算数の時間, 水声社 (1995). [isbn:4891763159]

[20] 中島健三: 乗法の意味についての論争と問題点についての考察, 日本数学教育会誌, Vol.50, No.6, pp.74-77 (1968). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110003849391]

[21] 森毅: 数の現象学, 筑摩書房 (2009). [isbn:9784480091963]

[22] 守屋誠司: 小学校指導法 算数, 玉川大学出版部 (2011). [isbn:9784472404221]

[23] 田中耕治: 教育評価, 岩波書店 (2008). [isbn:9784000280501]

[24] 礒田正美(監修), 田中秀典, 末原久史(編著): アイディアシートでうまくいく! 算数科問題解決授業スタンダード, 明治図書出版 (2013). [isbn:9784180047208]

[25] 遠山啓: 6×4，4×6論争にひそむ意味, 科学朝日1972年5月号, 朝日新聞社. [43] pp.114-121.

[26] 岸本裕史: どの子も伸びる算数力, 小学館 (2003). [isbn:4093874603]

[27] 田中博史: 田中博史の算数授業のつくり方, 東洋館出版社 (2009). [isbn:9784491023984]

[28] 金田茂裕: 小学2年生の乗法場面に関する理解, 東洋大学文学部紀要 教育学科編, No.34, pp.39-47 (2008). [http://ci.nii.ac.jp/naid/40016569351]

[29] Greer, B.: "Multiplication and Division as Models of Situations, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning", National Council of Teachers of Mathematics, pp.276-295 (1992). [isbn:1593115989]

[30] 小原豊: 小学校児童による有理数の乗法における乗数効果の分析, 鳴門教育大学研究紀要, Vol.22, pp.206-215 (2007). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110006184927]

[31] 森毅, 竹内啓: 数学の世界―それは現代人に何を意味するか, 中央公論新社 (1973). [isbn:4121003179]

[32] 遠山啓: 内包量・外延量と微分積分 (1979). [44] pp.78-91.

[33] 相馬一彦, 早勢裕明: 算数科「問題解決の授業」に生きる「問題」集, 明治図書出版 (2011). [isbn:9784180236275]

[34] Stigler, J. W. and Hiebert, J.: "The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom", Free Press (1999). [isbn:0684852748]

[35] Stigler, J. W., Hiebert, J. (著), 湊三郎 (訳): 日本の算数・数学教育に学べ―米国が注目するjugyou kenkyuu, 教育出版 (2002) [isbn:4316389106]

[36] 高橋昭彦: 算数数学科における学習指導の質を高める授業研究の特性とメカニズムに関する考察―アメリカにおける10年間の試行錯誤から学ぶこと―, 日本数学教育学会誌, Vol.93, No.12 (算数教育60-6), pp.2-9 (2011). [http://ci.nii.ac.jp/naid/110008898076]

[37] Yoshida, M.: "Is Multiplication Just Repeated Addition?―Insights from Japanese Mathematics Textbooks for Expanding the Multiplication Concept", 2009 NCTM Annual Conference (2009). [http://www.globaledresources.com/resources/assets/042309\_Multiplication\_v2.pdf]

[38] 馬場卓也: 数学教育協力における文化的な側面の基礎的研究，平成13年度 国際協力事業団 客員研究員報告書 (2002). [http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA65639013] [http://jica-ri.jica.go.jp/IFIC\_and\_JBICI-Studies/jica-ri/publication/archives/jica/kyakuin/pdf/200203\_08.pdf]

[39] Isoda, M. and Olfos, R.: "La ense&#241;anza de la multiplicaci&#243;n: el estudio de clases y las demandas curriculares", Ediciones Universitarias de Valpara&#237;so, Pontificia Universidad Cat&#243;lica de Valpara&#237;so (2009). [http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA89718362] [http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/upload/MultiplicationIsodaOlfos.pdf]

[40] 小島順: 線型代数, 日本放送出版協会 (1976). [asin:B000JA0OCK]

[41] Nagumo, M.: Quantities and real numbers, Osaka Journal of Mathematics, Vol.14, Num.1, pp.1-10 (1977). [http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200770204]

[42] 田村二郎: 量と数の理論, 日本評論社 (1978). [asin:B000J8KINM]

[43] 遠山啓: 量とはなにか I, 遠山啓著作集数学教育論シリーズ, Vol.5 (1978). [asin:B000J8MZYC]

[44] 遠山啓: 量とはなにか II, 遠山啓著作集数学教育論シリーズ, Vol.6 (1981). [asin:B000J7WQJW]

<1> http://www.mext.go.jp/a\_menu/shotou/new-cs/youryou/syokaisetsu/

<2> http://www.todayhumor.co.kr/board/view.php?table=humordata&no=1454118

<3> http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20111224/1324659582

<4> http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8A%A9%E6%95%B0%E8%A9%9E

<5> http://en.wikipedia.org/wiki/Japanese\_counter\_word

<6> http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20120125/1327442079

<7> http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20120612/1339436326

<8> http://cafe.daum.net/seaugjang/9MER/23

<9> http://www.asahi.com/edu/student/teacher/TKY201101160133.html

<10> http://www.nier.go.jp/guideline/s26em/chap5.htm

<11> http://ameblo.jp/metameta7/entry-10196970407.html

<12> http://tosanken.main.jp/data/H25/happyou/20131018-7.pdf

<13> http://www.nier.go.jp/10chousa/10chousa.htm

<14> http://ten.tokyo-shoseki.co.jp/text/shou/subject/sansu/tsumazuki/ebook/pdf/2.pdf

<15> http://www.dainippon-tosho.co.jp/sho/sansuu/text/index.html

<16> http://www.jica.go.jp/activities/issues/education/index.html]

<17> http://shop.tokyo-shoseki.co.jp/shopap/feature/theme0053/

<18> http://keirin.shop29.makeshop.jp/shopbrand/003/O/

<19> http://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/pr/risukeirin/pdf/no001\_11.pdf

<20> http://www.dqmp.jp/

<21> http://www.nier.go.jp/13chousa/13chousa.htm

<22> http://www.corestandards.org/assets/CCSSI\_Math%20Standards.pdf

【参考資料２：固有名詞等一覧】

Greer　グリア《人名》

Vergnaud　ベルニョ《人名》

啓林館　けいりんかん《企業名》

大日本図書　だいにっぽんとしょ《企業名》

岸本裕史　きしもと ひろし《人名》

数学教育協議会　すうがくきょういくきょうぎかい《団体名》

文部省　もんぶしょう《団体名》（現・文部科学省）

朝日新聞　あさひしんぶん《新聞・雑誌名》

東京書籍　とうきょうしょせき《企業名》

東京都算数教育研究会　とうきょうとさんすうきょういくけんきゅうかい《団体名》

田中博史　たなか ひろし《人名》

科学朝日　かがくあさひ《新聞・雑誌名》

筑波大学附属小学校　つくばだいがく ふぞくしょうがっこう《団体名》

遠山啓　とおやま ひらく《人名》

金田茂裕　きんだ しげひろ《人名》

馬場卓也　ばば たくや《人名》

上記の固有名詞を翻訳する際には，右に添えた読み方に基づき，ハングルで記載してください．

上記にない英語綴りは，原文のまま記載してください．

【参考資料３：専門用語等一覧】

九九

交換法則

累加

算数・数学教育

助数詞

分離量

水道方式

学習指導案

等分除

数学教育の現代化運動

1あたり量

学習指導要領

百ます計算

数と計算

数量関係

倍概念

比例関数

複比例

結合法則

デカルト積

基本的に逐語訳で結構ですが，意味が分からない用語がありましたら，言い換え等可能ですので，お知らせください．

【翻訳にあたってのお願い】

* 翻訳いただいた文章は，ブログ記事および文書（WordおよびPDF）として  
  http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20131115  
  にリンクする形でインターネット上に公開し，多くの人に読んでもらうことを考えています．
* 公表の際には本文中にいくつか，画像を差し込みます．この文書には画像をつけていませんが，翻訳の際，参照する必要がありましたら，以下からご確認ください．  
  http://d.hatena.ne.jp/takehikom/20131116/1384560000
* 原文の算用数字は，翻訳でもそのままとし，ハングルにはしないようお願いします．
* 文献やURLの参照に，[1]や<1>という表記を用いています．これらもそのまま記載してください．いくつか名詞扱い（取り除くと文にならないもの）で書いているところがあり，これについては，翻訳でも名詞扱いとするようお願いします．
* 次の2箇所について，韓国読者向けに変更してください．
  + タイトルのうち「日本語版」は「韓国語版」に置き換えて，翻訳してください．
  + 「10円玉」と日本円を用いた事例は，「10ウォン玉」と韓国の通貨に置き換えて，翻訳してください．
* 原文では句読点を「．，」に統一しています．「、」や「。」を書いているものがもしあっても，「，」「．」と見なしてください．翻訳では，韓国の横書き文書のルールに合わせてください．

【この文書について】

韓国語への翻訳は外注しました．この文書は，依頼時に送った内容を一部変更したものです．変更というのは「謝辞」関連です．翻訳者様より，謝辞への名前掲載を差し控えるよう要望があったため，文書公表にあたり，記述を取り除きました．