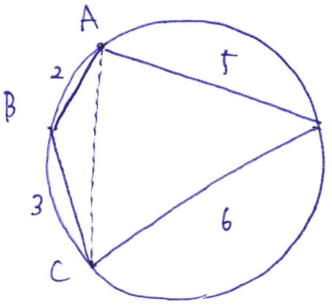
51 $AB = 2, BC = 3, CD = 6, DA = 5$ である四角形 ABCD があり，この四角形は円 O に内接している．

(1) $\cos\angle B$ の値を求めよ．

(2) 円 O の半径を求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

(4) 四角形 ABCD は，ある円に外接している．この円の半径を求めよ．



四角形 ABCD が円に内接しているので

$\angle B + \angle D = 180°$

$\therefore \cos\angle D = -\cos\angle B$．

(1) △ABC で余弦定理．

$$AC^2 = 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\angle B$$
$$= 13 - 12\cos\angle B \quad \text{—①}$$

△ACD で余弦定理

$$AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot\cos\angle D$$
$$= 25 + 36 - 60\cdot(-\cos\angle B)$$
$$= 61 + 60\cos\angle B \quad \text{—②}$$

①，②より

$$13 - 12\cos\angle B = 61 + 60\cos\angle B$$
$$-48 = 72\cos\angle B$$
$$\therefore \cos\angle B = -\frac{2}{3}$$

(2) 円 O の半径を R とおく．

△ABC で正弦定理から．

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle B}$$

さて，①より

$$AC^2 = 13 - 12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$= 21 \qquad \therefore AC = \sqrt{21}$$

また，$\cos\angle B = -\frac{2}{3}$ より

$\sin^2\angle B + \cos^2\angle B = 1$ なんで

$$\sin\angle B = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \left(0° < \angle B < 180° \text{より } \sin\angle B > 0\right)$$

$$\therefore 2R = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$R = \frac{3\sqrt{105}}{10}$$

(3) 求める面積を S とおく．

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD.$$

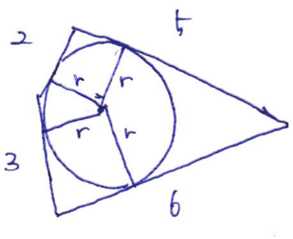
さて，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle B$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2}\cdot CD\cdot DA\cdot\sin\angle D$$
$$= \frac{1}{2}\cdot CD\cdot DA\cdot\sin\angle B$$
$$= \frac{1}{2}\,6\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = 5\sqrt{5}$$

$$\therefore S = \sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

(4) 四角形 ABCD の内接円の半径を r とおく．



$$S = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot r + 3\cdot r + 6\cdot r + 5\cdot r)$$
$$= 8r \qquad \text{とかける.}$$

(3) の結果から．

$$6\sqrt{5} = 8r$$

$$r = \frac{3}{4}\sqrt{5}$$

50 の四角形 ver.