令和 5 年度 単元テスト前演習 三角関数 (その 1)

R5. 6. 9

1 以下の表を埋めよ.

単位円を思い浮かべる!!

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

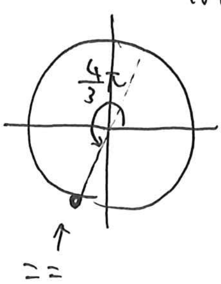
θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2 $\theta = \frac{100}{3}\pi$ のとき, $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

$$\frac{100}{3}\pi = 30\pi + \frac{10}{3}\pi$$
$$= 30\pi + 2\pi + \frac{4}{3}\pi$$
$$= 32\pi + \frac{4}{3}\pi$$

2πで1周

16周



左図より,

$\sin\frac{100}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{100}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{100}{3}\pi = \sqrt{3}$ //

3 以下の問いに答えよ.

(1) 半径 2, 中心角 $\frac{1}{4}\pi$ である扇形の面積と弧の長さを求めよ.

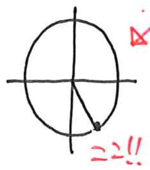
$S = \frac{1}{2}r^2\theta$, $l = r\theta$ より

$l = 2\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$ //

$S = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$ //

注意!!

(2) θ の動径が第 4 象限にあり, $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$

左図より $\cos\theta > 0$.

$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$ //

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = \frac{-4}{3}$ //

(3) $\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので,

$\tan\theta = \frac{\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = \pm 2\sqrt{2}$

(複号同順)

令和5年度 単元テスト前演習 三角関数 (その2)

R5. 6. 9

4 以下の問いに答えよ. $\boxed{(0 \leqq \theta < 2\pi \text{ とする})}$

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ のとき, $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ.

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 2$

(左辺) $= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

∴ $1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2$

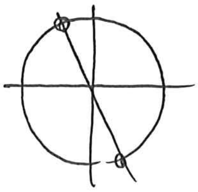
$2\sin\theta\cos\theta = 1$

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$ //

アイデア

sinθ・cosθ というかけ算を作るために2乗した

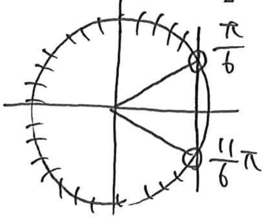
(2) 方程式 $\tan\theta = -\sqrt{3}$ を解け.



左図より

$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ //

(3) 不等式 $\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解け.

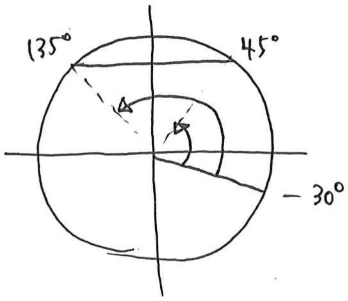


上図より

$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$ //

(4) 方程式 $\sin\left(\theta - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を解け.

スタート地点が $\frac{\pi}{6}$ 下がったところ.



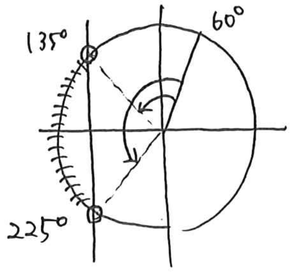
上図から,

$\theta = 30° + 45°,\ 30° + 135°$

$= 75°,\ 165°$

∴ $\theta = \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$ //

(5) 不等式 $\cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解け.



左図より

$135° - 60° < \theta < 225° - 60°$

$75° < \theta < 165°$

∴ $\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{11}{12}\pi$ //

令和５年度 単元テスト前演習 三角関数 (その３)

R5. 6. 9

5 $\theta = \frac{1}{12}\pi$ について, $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

$\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi$ より

$$\sin\frac{1}{12}\pi = \sin\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi\right)$$
$$= \sin\frac{1}{3}\pi \cdot \cos\frac{1}{4}\pi - \cos\frac{1}{3}\pi \sin\frac{1}{4}\pi$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad /\!/$$

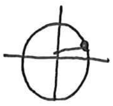
$$\cos\frac{1}{12}\pi = \cos\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi\right)$$
$$= \cos\frac{1}{3}\pi \cos\frac{1}{4}\pi + \sin\frac{1}{3}\pi \cdot \sin\frac{1}{4}\pi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad /\!/$$

$$\tan\frac{1}{12}\pi = \frac{\sin\frac{1}{12}\pi}{\cos\frac{1}{12}\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)}{\cancel{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$
$$= 2 - \sqrt{3} \quad /\!/$$

6 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ について, $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$$\cos\frac{1}{4}\pi = 1 - 2\sin^2\frac{1}{8}\pi.$$
$$2\sin^2\frac{1}{8}\pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$
$$\sin^2\frac{1}{8}\pi = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$



左図より $\sin\frac{1}{8}\pi > 0$

$$\therefore \sin\frac{1}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad /\!/$$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より

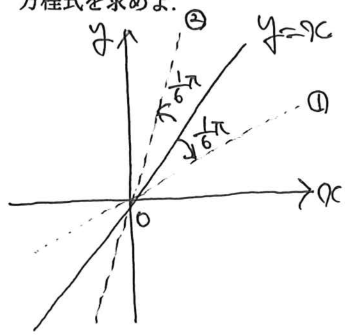
$$\cos\frac{1}{4}\pi = 2\cos^2\frac{1}{8}\pi - 1$$
$$2\cos^2\frac{1}{8}\pi = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$
$$\cos^2\frac{1}{8}\pi = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

上図より $\cos\frac{1}{8}\pi > 0$

$$\therefore \cos\frac{1}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad /\!/$$

$$\tan\frac{1}{8}\pi = \frac{\sin\frac{1}{8}\pi}{\cos\frac{1}{8}\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2} - 1 \quad /\!/$$

7 直線 $y = x$ とのなす角が $\frac{\pi}{6}$ である直線で, 原点を通るものの方程式を求めよ.



①について.

x軸とのなす角は.

$$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi.$$

$\therefore$ 傾きは $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right)$

$$= \frac{\tan\frac{1}{4}\pi - \tan\frac{1}{6}\pi}{1 + \tan\frac{1}{4}\pi \cdot \tan\frac{1}{6}\pi}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$
$$= 2 - \sqrt{3}$$

$\therefore$ ①は $y = (2 - \sqrt{3})x.$

②について.

x軸とのなす角は.

$$\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi.$$

①と同様にして.

傾きは $2 + \sqrt{3}$.

$\therefore$ ②は $y = (2 + \sqrt{3})x$

よって, 求める直線は

$$y = (2 + \sqrt{3})x, \quad y = (2 - \sqrt{3})x \quad /\!/$$

年＿＿組＿＿番

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ NO.2

小　計

令和 5 年度 単元テスト演習 三角関数 (その 4)

R5. 6. 9

$\boxed{8}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sin 2\theta = \cos\theta$ を解け.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$(2\sin\theta - 1)\cdot\cos\theta = 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2},\ \cos\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ について, $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$\cos\theta = 0$ について, $\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\therefore \theta = \frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ //

$\boxed{9}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$ を解け.

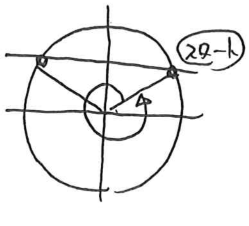
$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$

$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right) = 1$

$2\cdot\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{1}{6}\pi + \cos\theta\cdot\sin\frac{1}{6}\pi\right) = 1$　　加法定理が使える形に!!

$\sin\theta\cdot\cos\frac{1}{6}\pi + \cos\theta\cdot\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\theta + \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$



左図から,

$\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi$ //