**38** △ABC は半径 $\sqrt{3}$ の円 O に内接し, $\cos B = \dfrac{11}{14}, \cos C = \dfrac{13}{14}$ であるとする. また, 円 O において, 点 A を含まない方の弧 BC 上に点 P をとる. 以下の問いに答えよ.

(1) $\sin B, \sin C$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $b, c$ の値をそれぞれ求めよ.

(3) $a$ の値を求めよ.

(4) $\cos A$ の値を求めよ.

(5) 四角形 ABCP の面積の最大値を求めよ.

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であり, 角A, B, Cは三角形の内角であり $180°$ 未満なので,

$$\sin B = \frac{\sqrt{14^2-11^2}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{14^2-13^2}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

(2) 正弦定理より. $R=\sqrt{3}$ なので.

$$2\sqrt{3} = \frac{b}{\sin B}$$

$$b = 2\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15}{7}$$

$$2\sqrt{3} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c = 2\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{9}{7}$$

(3) △ABCで余弦定理.

$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$\left(\frac{15}{7}\right)^2 = a^2+\left(\frac{9}{7}\right)^2-\cancel{2}\cdot a\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{11}{\cancel{14}\,7}$$

$$15^2 = 7^2a^2+9^2-9\cdot11a$$

$$7^2a^2-9\cdot11a+9^2-15^2=0$$

$$7^2a^2-9\cdot11a-12^2=0$$

$$(49a+48)(a-3)=0$$

$a>0$ より $a=3$

(4) △ABCで余弦定理.

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$9 = \left(\frac{15}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{7}\right)^2-2\cdot\frac{15}{7}\cdot\frac{9}{7}\cdot\cos A$$

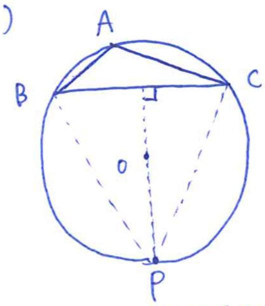
$$9\cdot49 = 225+81-2\cdot15\cdot9\cos A$$

$$441-225-81 = -2\cdot15\cdot9\cos A$$

$$\cancel{135}\,15 = -2\cdot15\cdot\cancel{9}\cos A$$

$$\cos A = -\frac{1}{2}$$

(5)




四角形ABPCの面積が最大となるのは, 左図のように, 直線OPと直線BCが垂直に交わるときである. このとき, BP=PC i.e. △BCPは二等辺三角形である.

さて, 円に内接する四角形の対角の和は $180°$ なので.

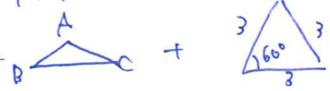
$A+P=180°$.

(4)より $A=120°$ ∴ $P=60°$.

二等辺三角形の1つの角が $60°$ なので, 正三角形で $60°$.

∴ 求める面積 $S_{max}$ は.

$S_{max} =$




$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{7}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4\cdot7\cdot7}(15+7\cdot7)$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{7\cdot7\cdot\cancel{4}}\cdot\cancel{64}\,16$$

$$= \frac{144\sqrt{3}}{49}$$

(5)で, 最大値となる状況を絵で描けるか?がPoint!
3次元(球)についても同様!!