

# 令和 5 年度 思考力養成講座

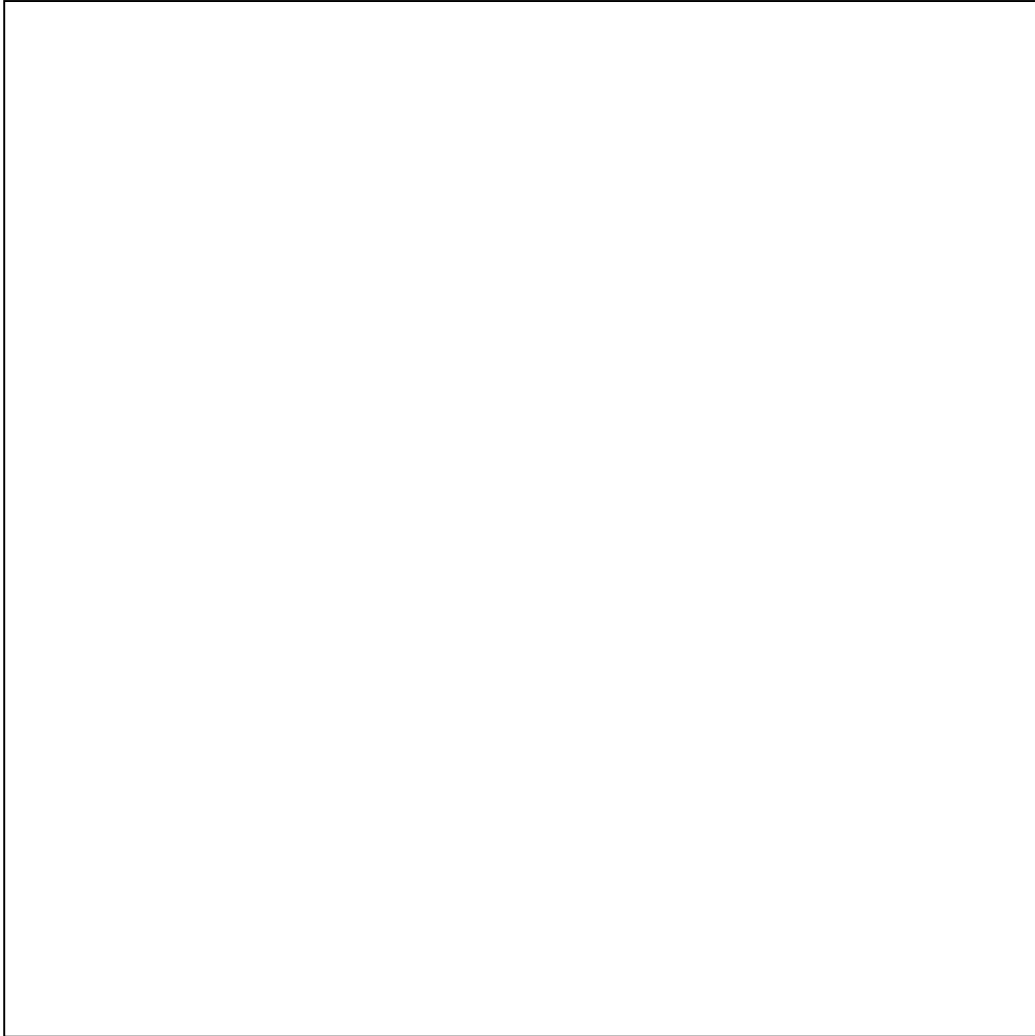
Takenaga Koudai

2023 年 6 月 10 日

## 1 正方形から正三角形を折る

### 1.1 直角三角形を折る

正方形を折ることで,  $1:2:\sqrt{3}$  の直角三角形を作ろう.



### 1.2 説明

上で考えたことに対し,  $1:2:\sqrt{3}$  になる理由を説明しよう.

### 1.3 正三角形

表面で考えた直角三角形を用いて, 正方形に内接する正三角形を折る方法を考えよう.  
(ここで, 「正方形に内接する」とは, 正三角形の少なくとも 2 頂点が正方形の周と接することである.)

### 1.4 面積

上の正三角形の面積を求めよ.

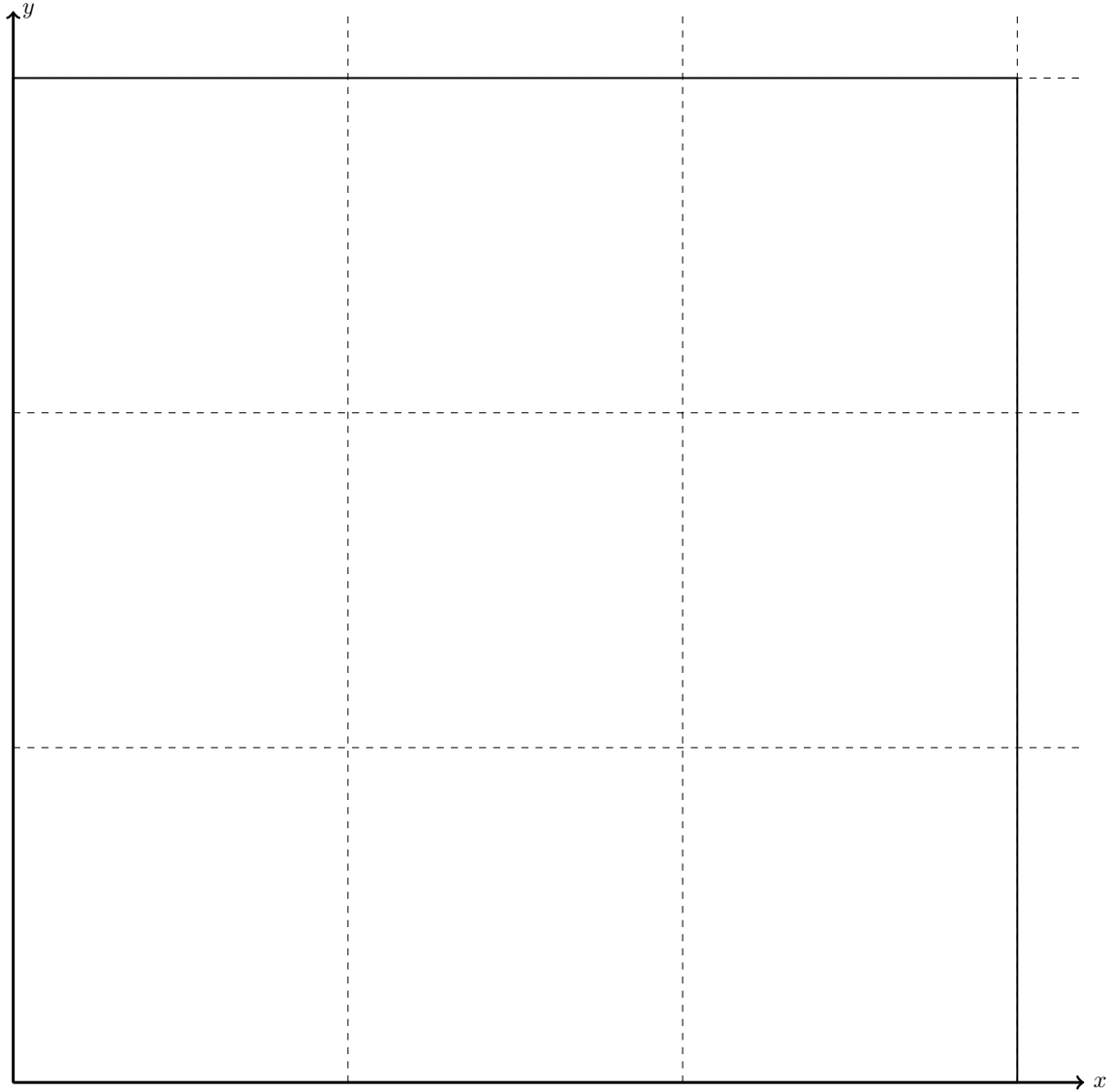
## 1.5 思考力養成

内接する正三角形で, もっと面積の大きいものを折れないか考えよう. 折れる場合は, その折り方とその面積を求めよう.

## 2 $N$ 等分折り紙

### 2.1 考えよう

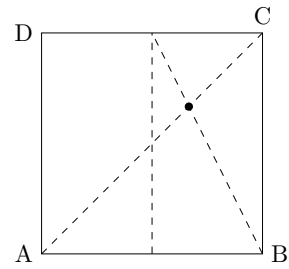
折り紙を正確に三等分する折り方を考えよう.



アイデアの共有

## 2.2 正確な三等分を折る

- (a) 正方形の紙を縦半分に折り, 折り目をつける.
- (b) 対角線にも折り目をつける.
- (c) 上辺の中点と, 右下の頂点とを結ぶ直線に沿って折る.



折り紙添付

問題. 点  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(0,1)$  としたとき,

(1) 手順 (b) と手順 (c) でつけた折り線の交点の座標を求めよ.

(2) 折り紙を正確に 3 等分にする方法を説明しよう.

### 2.3 (発展) $N$ 等分

(1)  $N$  が偶数のときの  $N$  等分の仕方を説明しよう.

(2) 3等分の場合を参考に,  $N$  が奇数のときはどのようにしたら辺の正確な  $N$  等分が折れるだろうか.

### 2.4 課題

さまざまな  $N$  等分折りの仕方が存在するので, 調べてみよう. また, その方法で本当に  $N$  等分できることを確認しよう.

### 3 角の 3 等分

#### 3.1 作図とは

一般に作図では, コンパスと定規のみを用いて, 以下の図形のみが描ける.

- [1] 与えられた 2 点を通る直線
- [2] 与えられた 1 点を中心として, 与えられた半径の円

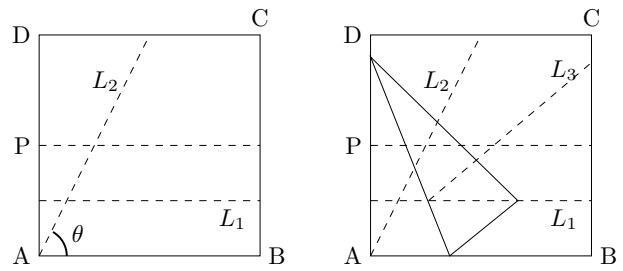
#### 問題

コンパスと定規のみで, 角の 3 等分線を描くことができるだろうか.



### 3.2 正確な角の3等分線を折る

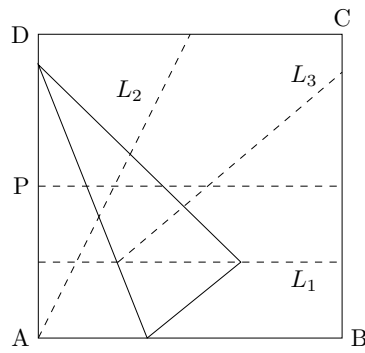
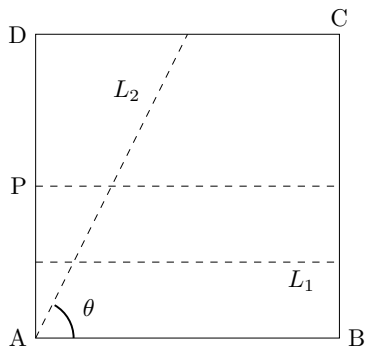
- (a) 辺の下から2等分の位置に線を折る.
- (b) 辺の下から4等分の位置に線  $L_1$  を折る.
- (c) 左下の頂点から任意の角  $\theta$  で直線  $L_2$  を折る.
- (d) 点 A が  $L_1$  上に, かつ点 P が  $L_2$  上に乗るように折る.
- (e) 折った状態のまま, 図のように折り目  $L_1$  を延長するように折る.



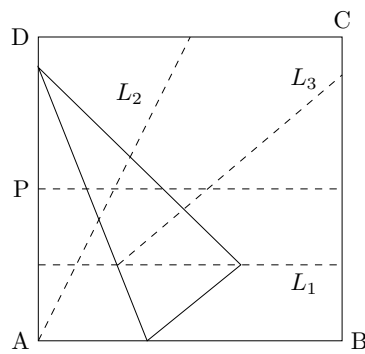
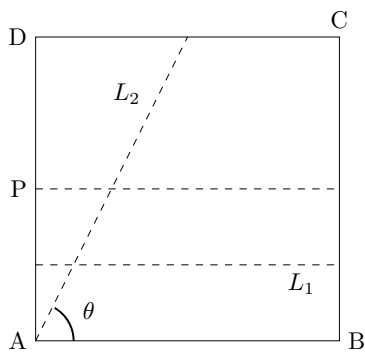
折り紙添付

問題.

(1) 折ったところを戻し,  $L_3$  を延長したとき, それが左下の点  $A$  を通ることを示せ.



(2) 折り目  $L_3$  は, どのような意味があるのか. また, それを示せ.

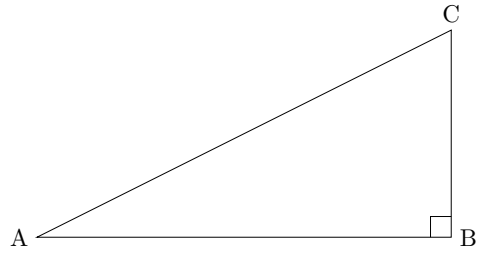


## 4 三角比

### 4.1 倍角の公式

次の手順で右図のような直角三角形の折り紙を折る.

- (a) 頂点 A と C を重なるように折る.
- (b) 折り線と辺 AC, AB の交点を D, E とおく.
- (c) 辺 EC に折り線をつける.



折り紙添付

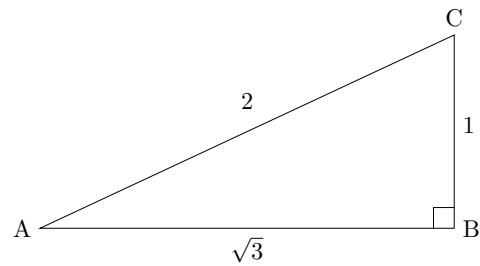
問題.  $AE=1$ ,  $\angle BAC=\theta$  とする.

- (1) 手順 (a) で折った折り線は, 線分 AC の何にあたるか.
- (2)  $\angle CEB$  を  $\theta$  を用いて表せ.
- (3) EC の長さを求めよ.
- (4) 以下の長さを, 角度  $\theta$  の三角比を用いて表せ.
  - (i) AD
  - (ii) CB
  - (iii) DC
  - (iv) EB
- (5) 以上の結果から, 以下の値を角度  $\theta$  の三角比を用いて表せ.
  - (i)  $\sin 2\theta$
  - (ii)  $\cos 2\theta$

## 4.2 特殊角の三角比

次の手順で右図のような  $1:2:\sqrt{3}$  の直角三角形の折り紙を折る.

- (a) 角 A の二等分線を折り, CB との交点を D とおく.
- (b) 点 D を通り, 辺 AC に垂直な線を折る.
- (c) (b) で折った線と辺 AC の交点を E とおく.




折り紙添付

### 問題

- (1) 以下の辺の長さを求めよ.
  - (i) AE
  - (ii) EC
  - (iii) CD
  - (iv) DE
  - (v) AD
- (2)  $\triangle ABD$  の辺 DB の長さを 1 として考えると, 他の辺の長さはいくらか.  
(ただし,  $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$  であることを用いてよい.)
- (3) これらの結果を用いて,  $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ$  を求めよ.

#### 4.3 特殊角の三角比 (直角二等辺三角形 ver)

直角二等辺三角形でも同様の操作をして,  $22.5^\circ$  の三角比も求めてみよう.

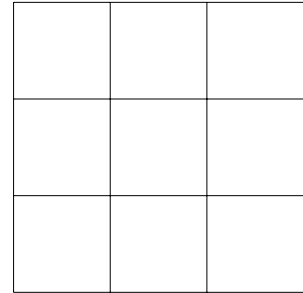


折り紙添付

## 5 数字パズル

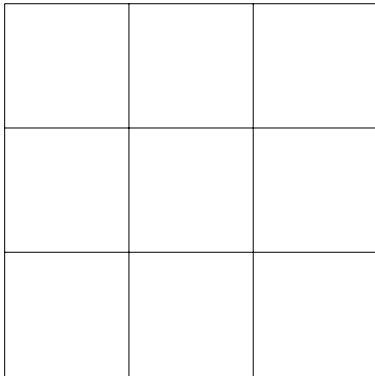
### 5.1 魔法陣

右の図のような  $3 \times 3$  の正方形のマスの中に自然数をいれ、各行、各列、2つの斜めの数の和をすべて同じにするパズルのことを、「 $3 \times 3$  の魔法陣」という。マスの数を  $4 \times 4$  や  $5 \times 5$  のように大きくしていくこともできる。



#### 問題

- (1)  $3 \times 3$  の魔法陣を完成させよう。



- (2) 完成した魔法陣を他の人と比較して、気づくことはあるか。

#### 魔法陣の区別

回転や裏返しによって数の並びが一致するものはすべて、同一の魔法陣とみなす。

- (3) この区別によって、 $3 \times 3$  の魔法陣は何通りできるだろうか。

## 5.2 魔法陣に似た問題

- (1)  $3 \times 3$  のマス目の各マスに 1 以上 9 以下の整数を重複しないように 1 つずつ書き込む. 辺を共有して隣り合うどのマスについても書き込まれる整数の差が 3 以下になすように書き込む方法は何通りあるか.

ただし, 回転や裏返しにより一致するものは同一のものとして数える.










- (2) 縦4個、横4個のマスのそれぞれに1. 2. 3. 4の数字を入れていく。このマスの横の並びを行といい、縦の並びを列という。どの行にも、どの列にも同じ数字が1回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。下図はこのような入れ方の一例である。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1



## 参考文献

- [1] トーマス・ハル著, 羽鳥公士郎訳『ドクター・ハルの折り紙数学教室』, 日本評論社, 2015.
- [2] 『数学オリンピック 2016~2020』, 数学オリンピック財団編, 日本評論社, 2020.
- [3] 『NEXT 数学 A』, 数研出版, 2022.