

## 1 指数

### 1.1 復習

以下の計算をせよ. (7) 以降は推測せよ.

(1)  $2^6 =$

(2)  $2^5 =$

(3)  $2^4 =$

(4)  $2^3 =$

(5)  $2^2 =$

(6)  $2^1 =$

(7)  $2^0 =$

(8)  $2^{-1} =$

(9)  $2^{-2} =$

### 1.2 復習, 推測

左の結果も参考にしつつ, 以下の計算をせよ.

(1)  $(-5)^3$

(2)  $(-5)^2$

(3)  $(-5)^1$

(4)  $(-5)^0$

(5)  $(-5)^{-1}$

(6)  $(-5)^{-2}$

(7)  $(-5)^{-3}$

### 1.3 復習

以下の計算をせよ.

(1)  $3^2 2^2$

(2)  $(2^2)^3$

(3)  $(2 \times 3)^3$

(4)  $\frac{2^{10}}{2^5}$

(5)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

### 1.4 一般化

以下の計算をせよ.

(1)  $a^3 a^4$

(2)  $(a^2)^3$

(3)  $(a \times b)^3$

(4)  $\frac{a^9}{a^5}$

(5)  $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

## 1.5 拡張

## 1.6 問題

以下の値を求めよ.

(1)  $9^{\frac{1}{2}}$

(2)  $8^{\frac{2}{3}}$

(3)  $81^{-\frac{1}{4}}$

(4)  $125^{\frac{4}{3}}$

(5)  $3^{\frac{3}{2}} \times 9^{\frac{1}{4}} \times 81^{-\frac{3}{8}}$

(6)  $2^{\frac{5}{2}} \times 8^{\frac{3}{4}} \div 4^{-\frac{1}{4}}$

## 1.7 根号拡張

## 1.8 問題

以下の値を求めよ.

(1)  $\sqrt[3]{8}$

(2)  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

(3)  $\sqrt[4]{81}$

(4)  $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}$

(5)  $(\sqrt[2]{5})^2$

(6)  $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{32}}$

(7)  $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$

(8)  $\sqrt[4]{5} \div \sqrt{5} \times \sqrt[8]{5}$

2 指数関数

2.1 グラフ

指数関数

$y = a^x$

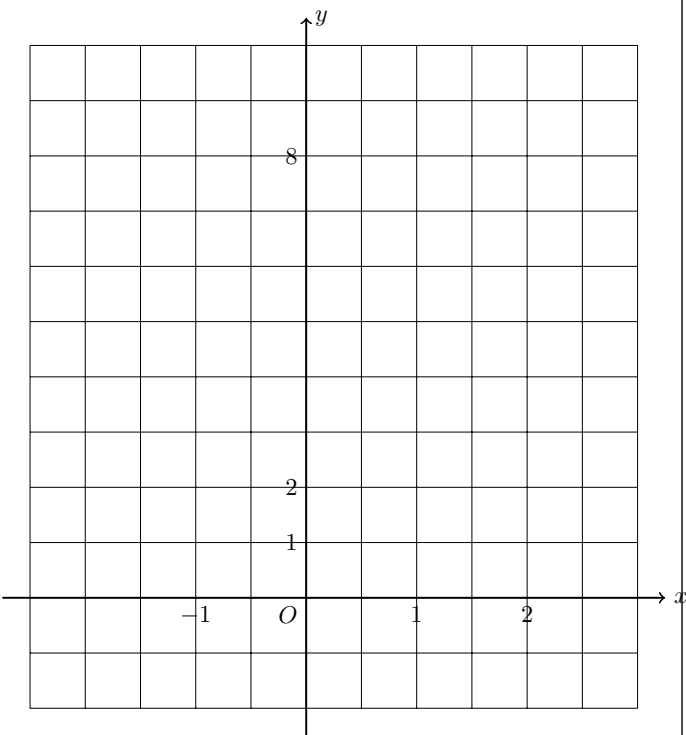
について考える. ( $a > 0, a \neq 1$  とする. )

指数関数  $y = a^x$  について,  $a$  を, \_\_\_\_\_ という.

これまで, 新しい関数のグラフを描くとき, まず表を描いていた.  
今回も同じ手順を踏む.

(1)  $y = 2^x$  について.

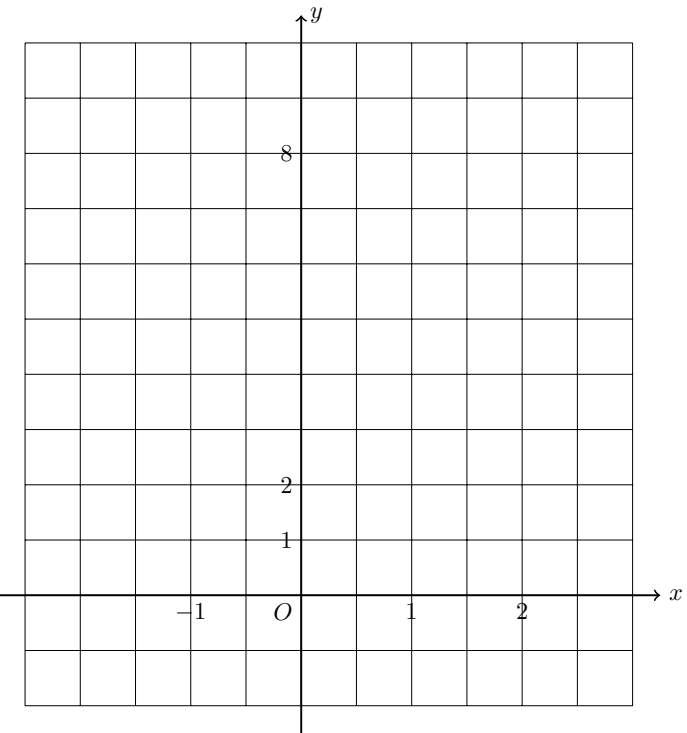
$x$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$y$							



【    のとき】

(2)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  について.

$x$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$y$							

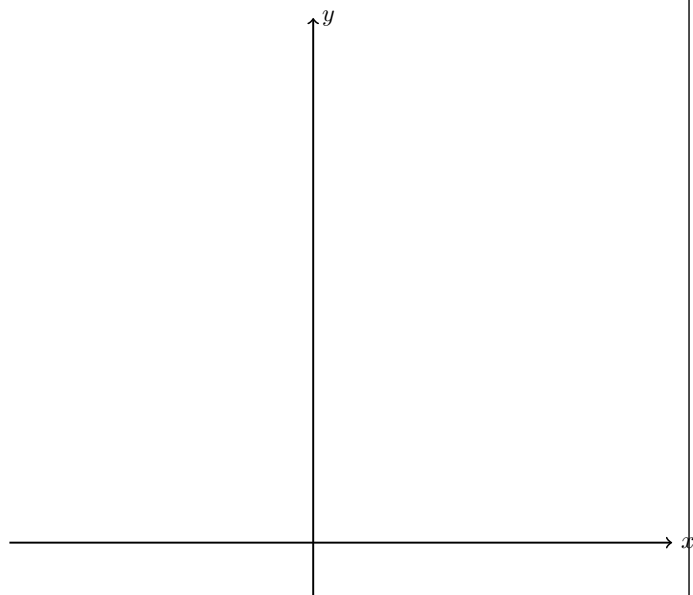


【    のとき】

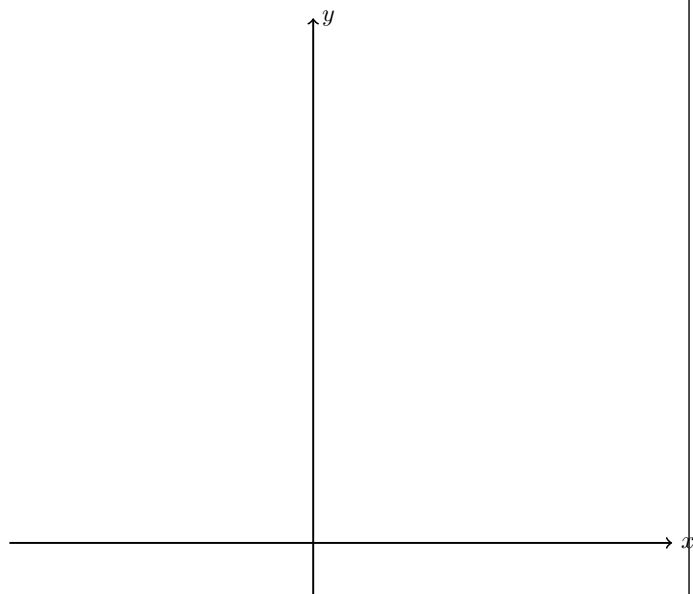
## 2.2 問題

以下のグラフを描け.

(1)  $y = 3^x$



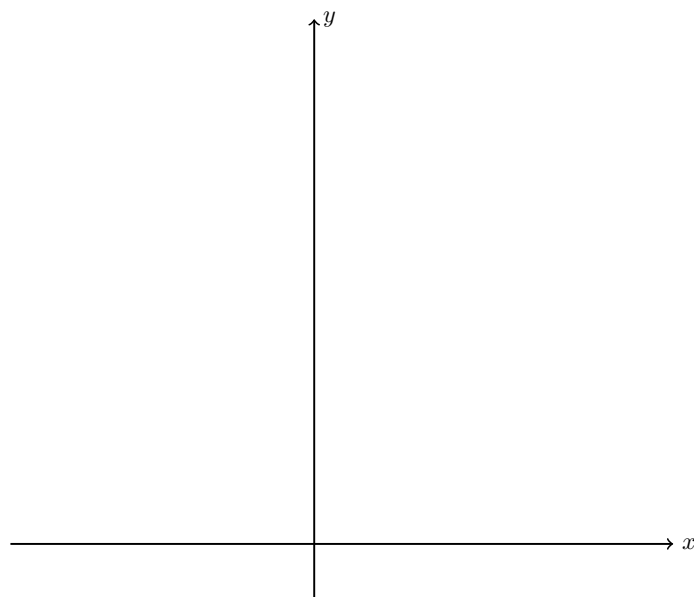
(2)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



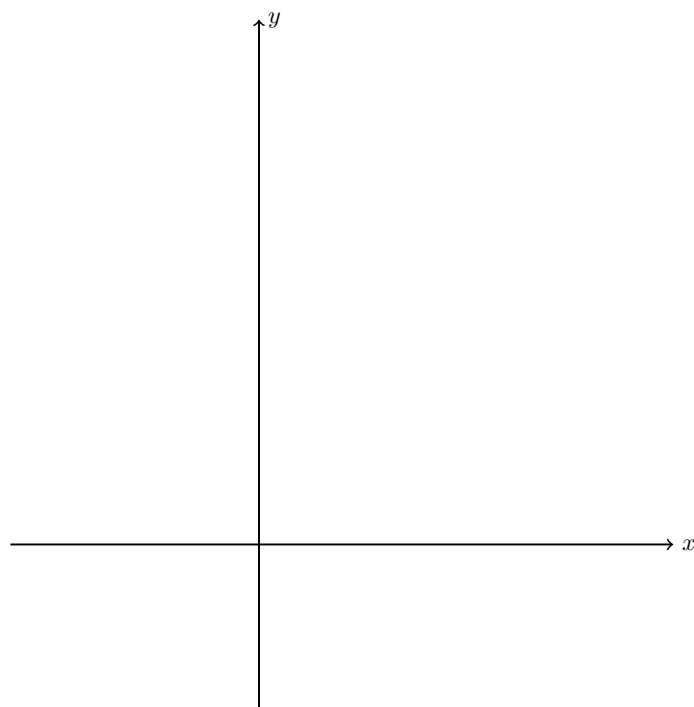
## 2.3 問題 (平行移動)

以下のグラフを描け.

(1)  $y = 3^x + 1$



(2)  $y = 2^{(x-2)} - 1$



## 2.4 大小関係比較

### 例題

以下の 3 つの数の大小関係を不等号を用いて表せ.

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{27}$$

## 2.5 問題

以下の数の大小関係を不等号を用いて表せ.

(1)  $\sqrt{2}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[7]{16}$

(2)  $1, 0.5^3, 0.5^{-1}$

## 2.6 方程式

### 例題

以下の方程式を解け.

$$16^x = 8$$

$$(1) \ 9^x = 27$$

$$(2) \ 2^{x+1} = \frac{1}{8}$$

$$(3) \ 2^{x+1} = 8^x$$

## 2.7 不等式

### 例題

以下の方程式を解け.

$$16^x \geq 8$$

$$(1) \ 9^x \leq 27$$

$$(2) \ \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{16}$$

$$(3) \ 2^x \leq 8^{x+1}$$



## 2.8 二次関数への帰着問題

### 問題

以下の方程式・不等式を解け. ( $0 \leq x < 2\pi$  とする.)

(1)  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

(2)  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 > 0$

### 例題

以下の方程式・不等式を解け.

(1)  $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$

(2)  $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$

## 2.9 練習問題

以下の方程式・不等式を解け.

(1)  $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

(2)  $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

(3)  $4^x - 6 \cdot 2^x - 16 \leq 0$

(4)  $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$

### 3 日常生活

#### 3.1 ドラえもん

- (1) 羽二重餅に、ドラえもんの秘密道具「バイバイン」を使った。  
以下の問いに答えよ。

「バイバイン」の効果

増やしたい物に一滴垂らすと 5 分ごとに数が倍に増える。ただし、増やした物は何らかの方法で処分しない限り無限に増殖し続ける。

(Wikipedia より)

- (a) 30 分放置した場合、羽二重餅は何個になるか。

- (c) 羽二重餅を 1024 個得るためには、何分待つ必要があるか。

- (b) 1 時間放置した場合、羽二重餅は何個になるか。

- (d) 羽二重餅を  $2^{30}$  個 (= 1,073,741,824 個) 以上得るには、最低何分待つ必要があるか。

### 3.2 おかね

S&P500 種株価指数は, 1957 年に導入されて, 年平均で約 10% の上昇率である.

S&P500 をベンチマークとする ETF(上場投資信託) に投資することを考える. 以下の問いに答えよ.

(ただし簡単のため, 年率は 10% の固定で考える.)

(1) 100 万円の投資をした際, 1 年後の評価額はいくらか.

(2) 100 万円の投資をした際, 2 年後の評価額はいくらか.

(3) 100 万円の投資をした際, 10 年後の評価額はいくらか.

(4) 1000 万円の投資をした際, 評価額が 2000 万円を超えるのは, 何年後か.

#### 3.2.1 いろいろなおはなし

## 4 演習問題

### 4.1 例題

- (1) 関数  $y = 4^x - 2^{x+2} + 1$  ( $-3 \leq x \leq 4$ ) の最大値・最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ.
- (2) 関数  $y = 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) + 1$  について、以下の問いに答えよ.
- (a)  $t = 2^x + 2^{-x}$  とおく.  $x$  が全ての実数を動くとき,  $t$  の値の範囲を求めよ.
- (b)  $4^x + 4^{-x}$  を  $t$  を用いて表せ.
- (c)  $y$  を  $t$  の関数として表せ.
- (d)  $y$  の最小値と, そのときの  $x$  の値を求めよ.

## 4.2 問題

(1) 関数  $y = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) の最大値・最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ.

(2) 関数  $y = 9^x + 9^{-x} + 4(3^x + 3^{-x}) - 1$  について, 以下の問いに答えよ.

(a)  $t = 3^x + 3^{-x}$  とおく.  $x$  が全ての実数を動くとき,  $t$  の値の範囲を求めよ.

(b)  $9^x + 9^{-x}$  を  $t$  を用いて表せ.

(c)  $y$  を  $t$  の関数として表せ.

(d)  $y$  の最小値と, そのときの  $x$  の値を求めよ.