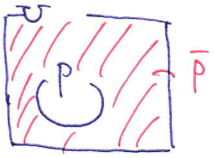
3 命題と証明

3.1 条件の否定

定義

- 否定

…条件 p に対して「p でない」を $\overline{p}$ で表す。



例

p : $x < 0$ に対し、

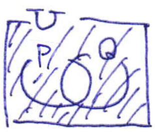
$\overline{p}$: $x \geqq 0$

かつ, またはの否定

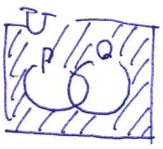
$\overline{p \text{ かつ } q} = \overline{p} \text{ または } \overline{q}$

$\overline{p \text{ または } q} = \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$

★ド・モルガンの法則を思い出す!



$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$



$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$

3.2 逆・裏・対偶

定義

命題「$p \Longrightarrow q$」に対して,

- 逆 $q \Rightarrow p$
- 裏 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$
- 対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

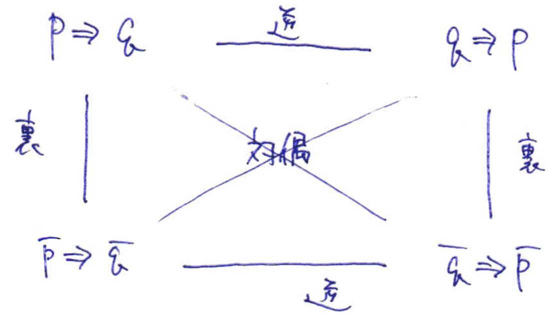
例

命題「$x = -2 \Longrightarrow x^2 = 4$」について　($p$, q ← 真)

逆 : $x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$　偽　反例 $x = 2$

裏 : $x \neq -2 \Rightarrow x^2 \neq 4$　偽　反例 $x = 2$

対偶 : $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq -2$　真.



注)

もとの命題とその逆の真偽は一致するとは限らない。

3.3　対偶証明法

元の命題と，その逆・裏・対偶の真偽について考える．

性質

命題「$p \Longrightarrow q$」の真偽と 対偶「$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$」の真偽は一致

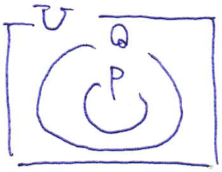
〈簡単な説明〉．

P：条件pをみたすもの全体の集合．

Q：条件qをみたすもの全体の集合．

$p \Rightarrow q$ が真とは．以下の図の状況．

$(P \subset Q)$．



このとき．$\bar{P}$と$\bar{Q}$について．

$\bar{P} \supset \bar{Q}$ である．

つまり．$\bar{Q}$に含まれるものはすべて$\bar{P}$に含まれる．

i.e. $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

問題 1

$n \in \mathbb{Z}$(整数) とする．以下の命題を示せ．

n^2が奇数ならば，n も奇数である．

〈証明〉．

対偶「nが偶数 $\Rightarrow$ n^2が偶数」を示す．

nが偶数なので，

$$n = 2m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

と書ける．

$$\therefore\ n^2 = 4m^2 = 2 \times 2m^2$$ と表せるので

n^2も偶数．

よって対偶は真なので，もとの命題も真 □

問題 2

$n \in \mathbb{Z}$(整数) とする．以下の命題を示せ．

n^2が偶数ならば，n も偶数である．

〈証明〉．

対偶「nが奇数 $\Rightarrow$ n^2も奇数」を示す。

nが奇数なので

$$n = 2m+1 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

と書ける。

$$\therefore\ n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 2(2m^2+2m)+1.$$

であり．(偶数)+1 の形で表せるので，

n^2も奇数．

よって対偶は真なので，もとの命題も真 □