20 平面上に, 2 点 A と B で交わる 2 つの円 C_1, C_2 がある. C_1, C_2 の半径はともに 1 であり, C_1 の中心 O_1 は C_2 上, C_2 の中心 O_2 は C_1 上にあるとする. C_2 の O_1 を含む方の弧 AB 上を点 P が, C_1 の O_2 を含む方の弧 AB 上を点 Q が, $\angle PAQ = 30°$ を満たしながら動くとする. ただし, 点 P が点 B に一致する場合は考えないものとする. $\theta = \angle ABP$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

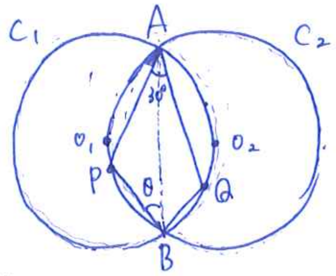
(1) $\angle APB = \angle AQB = 120°$ を示せ.

(2) $\angle ABQ$ を θ を用いて表せ.

(3) 線分 AB の長さを求めよ.

(4) 線分 AP, AQ の長さをそれぞれ θ を用いて表せ.

(5) 点 P が O_1 から B まで動くとき, $\triangle APQ$ の面積の最大値を求めよ.



(島根大)

(1) <証明>.

同一円に対し, 同じ弧に対する円周角の大きさは一定なので,

$\angle APB = \angle AO_1B$.

また, $O_1O_2 = O_1A = 1$. (円 C_1 の半径).

$O_2A = 1$ (円 C_2 の半径

∴ $\triangle O_1O_2A$ は正三角形.

同様に $\triangle O_1O_2B$ も正三角形.

∴ $\angle AO_1B = 120°$

よって $\angle APB = 120°$ で一定.

$\angle AQB$ も同様.

(2) 四角形 APBQ に対し.

$\angle APB = \angle AQB = 120°$,

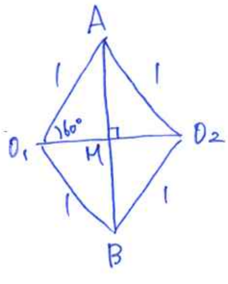
$\angle PAQ = 30°$.

$\angle ABP = \theta$

∴ $\angle ABQ = 360° - (120° \times 2 + 30° + \theta)$

$= 90° - \theta$

(3)



AB と O_1O_2 の交点を M とする.

$AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので

$AM = \sqrt{3}$

(4) $\triangle APB$ と外接円 C_2 で正弦定理. (R_2 : C_2 の半径)

$2R_2 = \frac{AP}{\sin\theta}$

$2 \cdot 1 \cdot \sin\theta = AP$

∴ $AP = 2\sin\theta$.

$\triangle ABQ$ と外接円 C_1 で同様に.

$AQ = 2 \cdot \sin(90° - \theta)$

$= 2\cos\theta$.

(5) $\angle PAQ$ のなす角が 30° なので.

$\triangle APQ$ の面積は

$S = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin 30°$

$= \frac{1}{4} 2\sin\theta \, 2\cos\theta$

$= \sin\theta\cos\theta$

$= \frac{1}{2}\sin 2\theta$.

また, $\angle PBQ = 90°$ より. θ のとり得る値の範囲は対称性も考慮して $0° < \theta \leqq 45°$

このとき $\sin 2\theta$ の最大値は. $\theta = 45°$ のときで,

$\sin 2 \cdot 45° = \sin 90° = 1$.

∴ $S_{max} = \frac{1}{2}$

P = O_1 のとき, ∠PAB が 30° なので, 点 P は AO_1 上にはこない!!
きちんと図が描けていますか?