

## 2 命題

### 2.1 命題

#### 定義

- 命題とは  
正しいか正しくないか定まり文句のこと。  
正しいとき → **真**  
正しくないとき → **偽**
- 条件とは  
変数を含む式で、その変数に値を代入すると  
真偽が定まる式。  
ex.  $x < 3$ .  $x=1$  のとき → 真  
 $x=5$  のとき → 偽
- 命題「 $p \Rightarrow q$ 」は  **$p$  が真のとき  $q$  も真**。  
...「 $p$  が真ならば  $q$  も真」を意味する。  
 $p \Rightarrow q$  は **仮定**  $q$  は **結論**
- 反例  
命題「 $p \Rightarrow q$ 」は偽なとき。  
 $p$  が真でも  $q$  が真でないものがある例を **反例** と呼ぶ。  
 $p \Rightarrow q$  の偽を意味する反例は「 $p$  と  $q$ 」。

[命題  $p \Rightarrow q$  と集合]

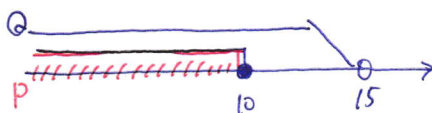
例.  $x \in \mathbb{R}$ .

$$p: x \leq 10, \quad q: x < 15$$

つまり、

$$P = \{x \mid x \leq 10, x \in \mathbb{R}\}$$

$$Q = \{x \mid x < 15, x \in \mathbb{R}\}$$



$P \subset Q$  が成立.

また、 $p \Rightarrow q$  も成立.

一般に、

$U$ : 全体集合.

$P$ : 条件  $p$  を満たすものの全体集合

$Q$ : 条件  $q$  を満たすものの全体集合 と可なり.

命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真なとき  $P \subset Q$  が成立.

### 2.2 必要条件・十分条件

#### 定義

- 命題  $p \Rightarrow q$  が真のとき、  
 $p$  は  $q$  であるための **十分条件**.
- 命題  $p \Leftarrow q$  が真のとき、  
 $p$  は  $q$  であるための **必要条件**.
- また、  
 $p \Rightarrow q$ ,  $p \Leftarrow q$  がともに成立するとき、  
 $p$  は  $q$  であるための **必要十分条件** である。  
このとき、  
 $p$  と  $q$  は **同値** であるといえる。  
 $p \Leftrightarrow q$  と書く。

たとえば、

2つの条件「 $x=1$ 」と「 $x^2=1$ 」について、

$$x=1 \Rightarrow x^2=1 \text{ は成立する。}$$

$$x^2=1 \Rightarrow x=1 \text{ は不成立。}$$

つまり、

「 $x=1$ 」は「 $x^2=1$ 」であるための **十分条件**。

2つの条件「 $x=\pm 1$ 」と「 $x^2=1$ 」について、

$$x=\pm 1 \Rightarrow x^2=1$$

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \text{ も成立。}$$

つまり、

「 $x=\pm 1$ 」は「 $x^2=1$ 」であるための **必要十分条件**。

「 $x=\pm 1$ 」と「 $x^2=1$ 」は **同値**。

$$x=\pm 1 \Leftrightarrow x^2=1$$