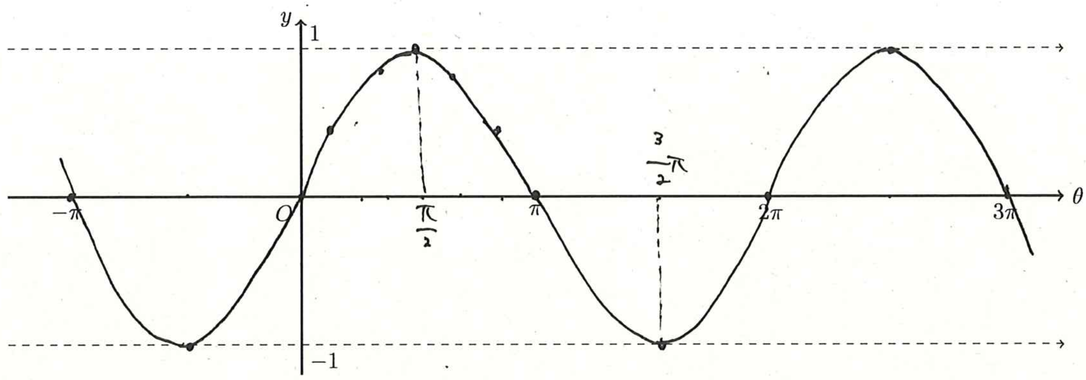
5　三角関数のグラフ

5.1　基本

(1) $y = \sin\theta$

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π
y	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0	0



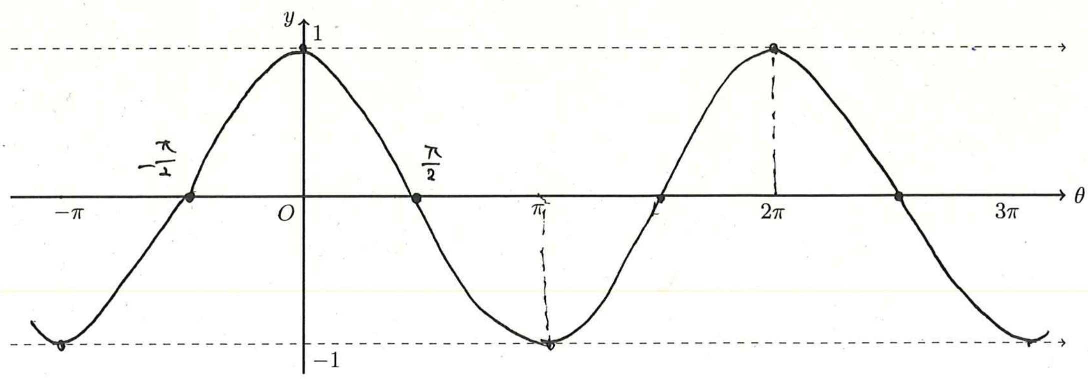
特徴

- 2π ごとに同じ形を繰り返している．(周期が 2π)
- 値域は -1 $\leqq y \leqq$ 1
- 原点 に関して対称．(奇関数という)

(2) $y = \cos\theta$

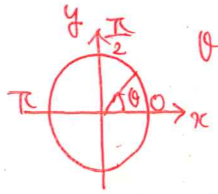
θ	$-\pi$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π
y	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	-1

特徴



- 周期が 2π
- 値域は -1 $\leqq y \leqq$ 1
- y軸 に関して対称．(偶関数という)

傾き!!



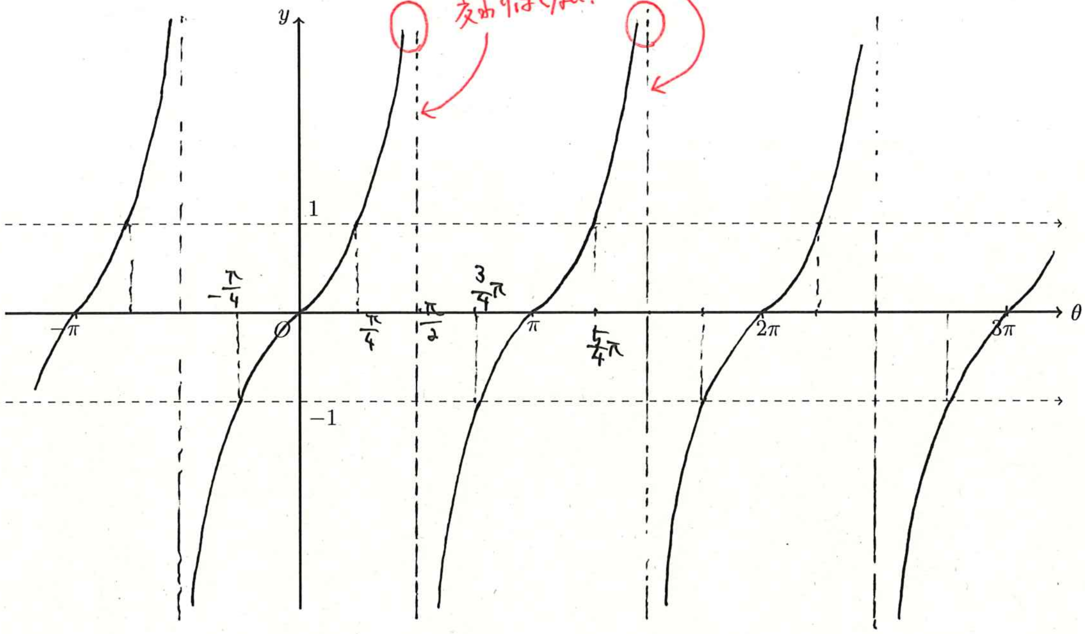
$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき傾きはなし!!

(3) $y = \tan\theta$

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	3π
y		0	−1	0	1	×	−1	0	

特徴

漸近線
どんどん近づくけど、交わりはしない。

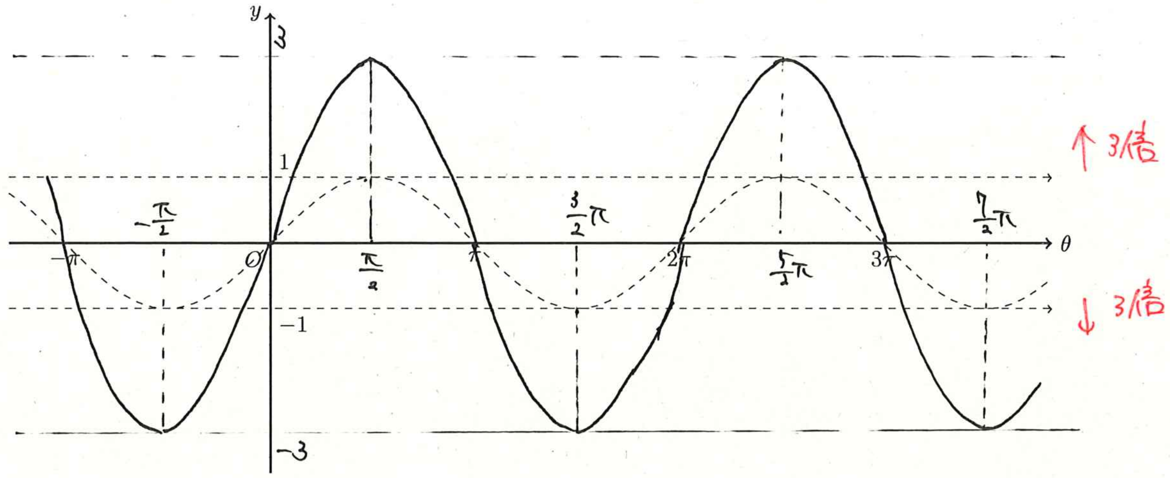


- 周期が π
- 値域は 実数すべて
- 原点 に関して対称.
- $y = \tan\theta$ のグラフは, θ が $\frac{1}{2}\pi$ に近づくと, 直線 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ に近づく. (グラフが限りなく近づく直線を漸近線という.)

5.2　**拡大・縮小・平行移動**

(1) $y = 3\sin\theta$

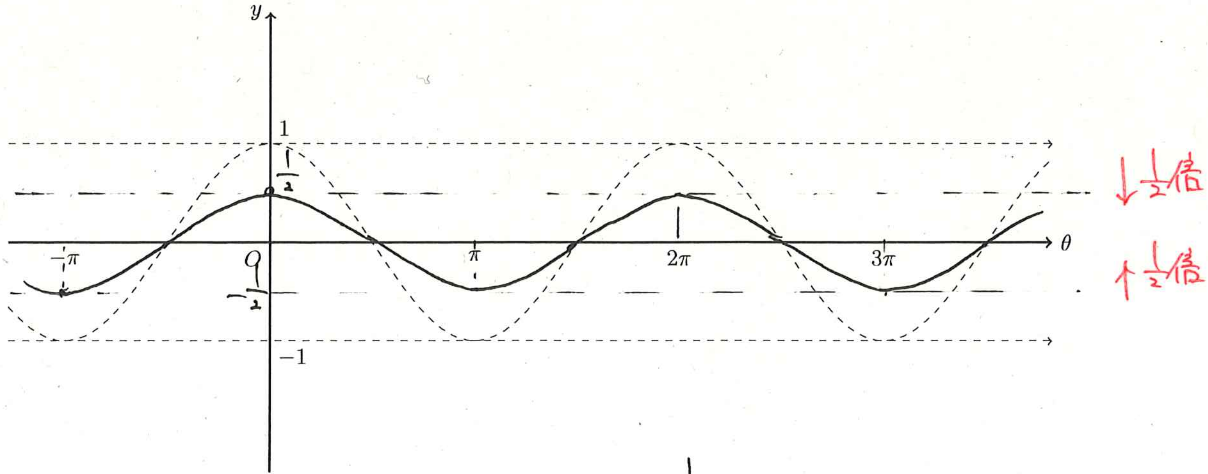
θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π
y	0	-3	0	3	0	0	0



$y = 3\sin\theta$ のグラフは, $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸を基準に, y 軸方向に　3　倍したグラフ.

(2) $y = \frac{1}{2}\cos\theta$

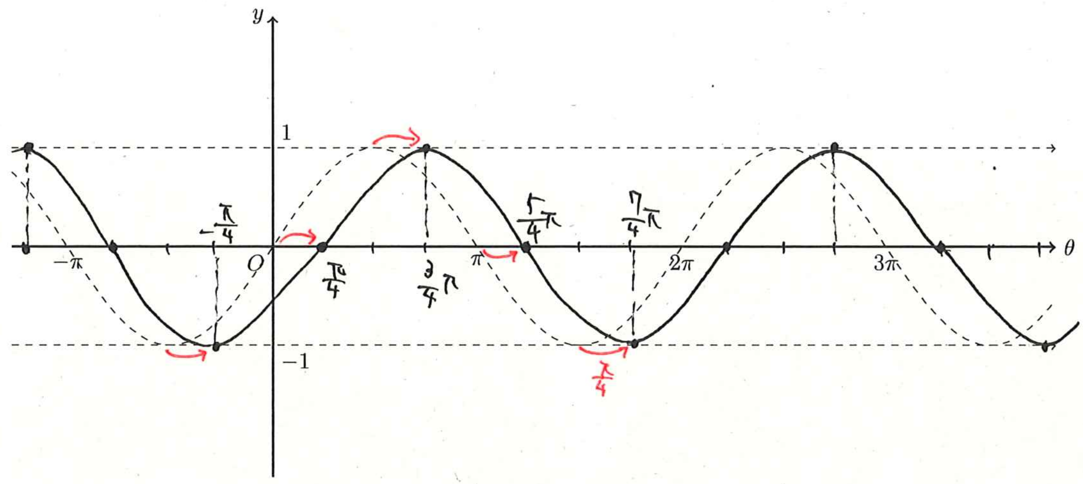
θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π
y	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$



$y = \frac{1}{2}\cos\theta$ のグラフは, $y = \cos\theta$ のグラフを θ 軸を基準に, y 軸方向に　$\frac{1}{2}$　倍したグラフ.

(3) $y = \sin\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right)$

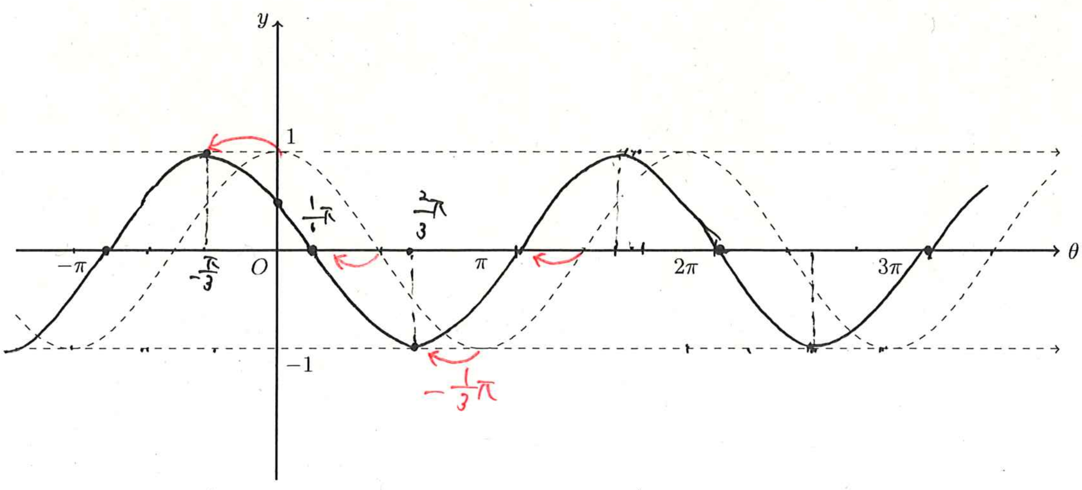
θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	3π
y		-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	



$y = \sin\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right)$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\underline{\frac{1}{4}\pi}$ だけ平行移動したグラフ．

(4) $y = \cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right)$

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	3π
y		1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	



$y = \cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right)$ のグラフは，$y = \cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\underline{-\frac{1}{3}\pi}$ だけ平行移動したグラフ．

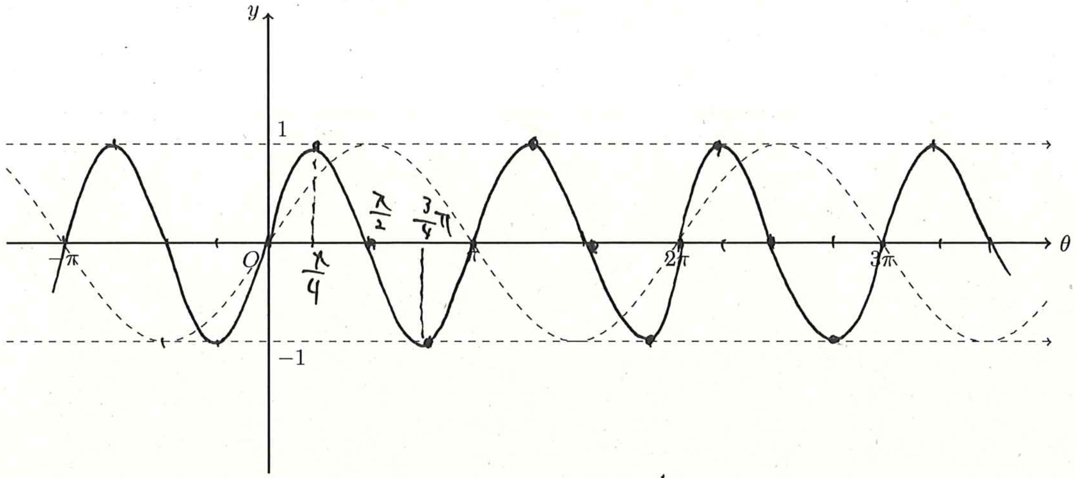
θが 1, 2, 3, …
2θは 2, 4, 6, …

2倍の速さですすむ!!

→ sin θ が 1往復する間に
sin 2θ は 2往復!!

(5) $y = \sin 2\theta$

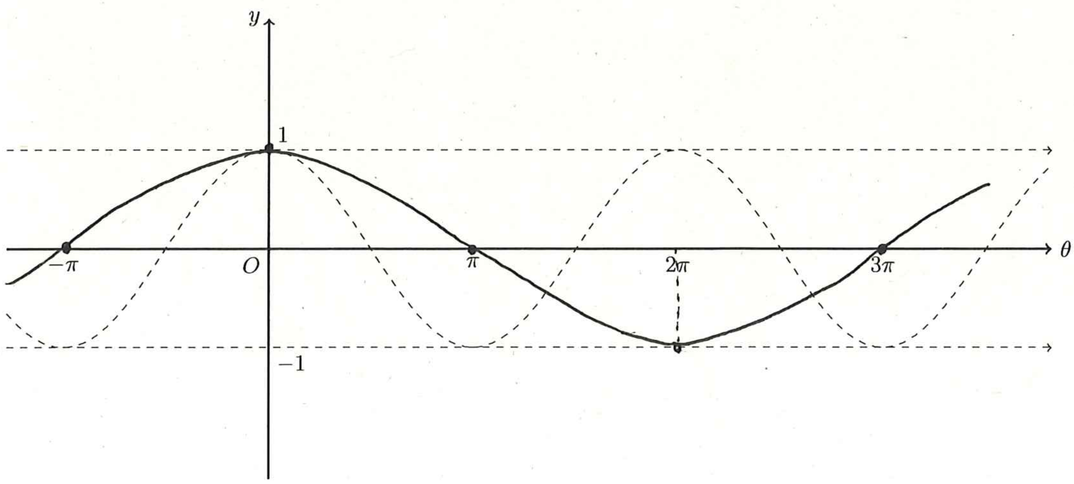
θ	$-\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	2π	3π
y		0	1	0	-1	0		0



$y = \sin 2\theta$ のグラフは, $y = \sin\theta$ のグラフを y 軸を基準に, θ 軸方向に $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$ 倍したグラフ.

(6) $y = \cos\frac{1}{2}\theta$

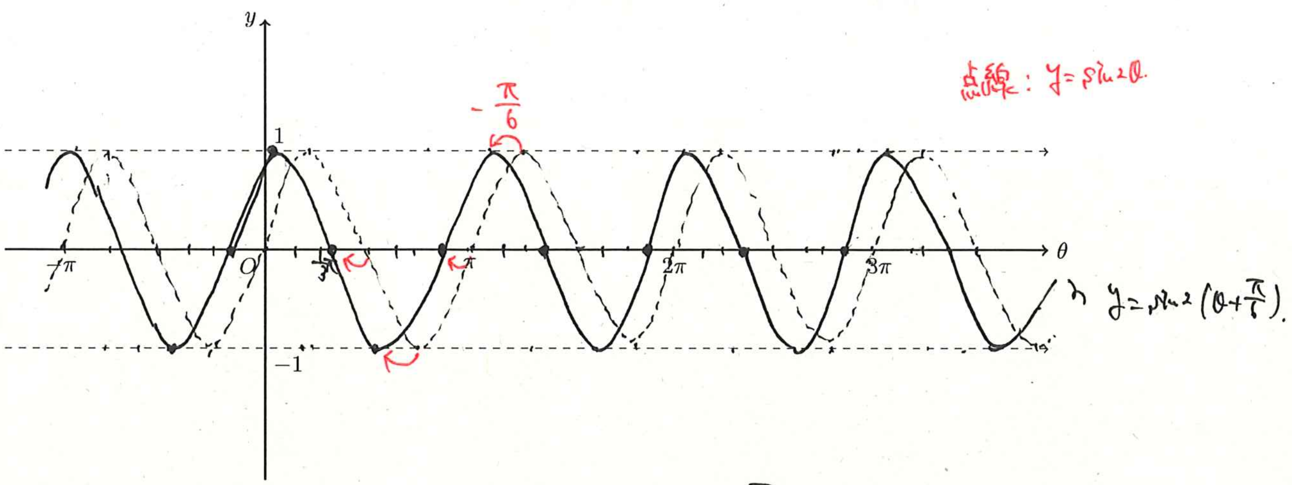
θ	$-\pi$	0	π	2π	3π
y	0	1	0	-1	0



$y = \cos\frac{1}{2}\theta$ のグラフは, $y = \cos\theta$ のグラフを y 軸を基準に, θ 軸方向に $\underline{\quad 2 \quad}$ 倍したグラフ.

(7) $y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

θ	$-\pi$	0	3π
y			

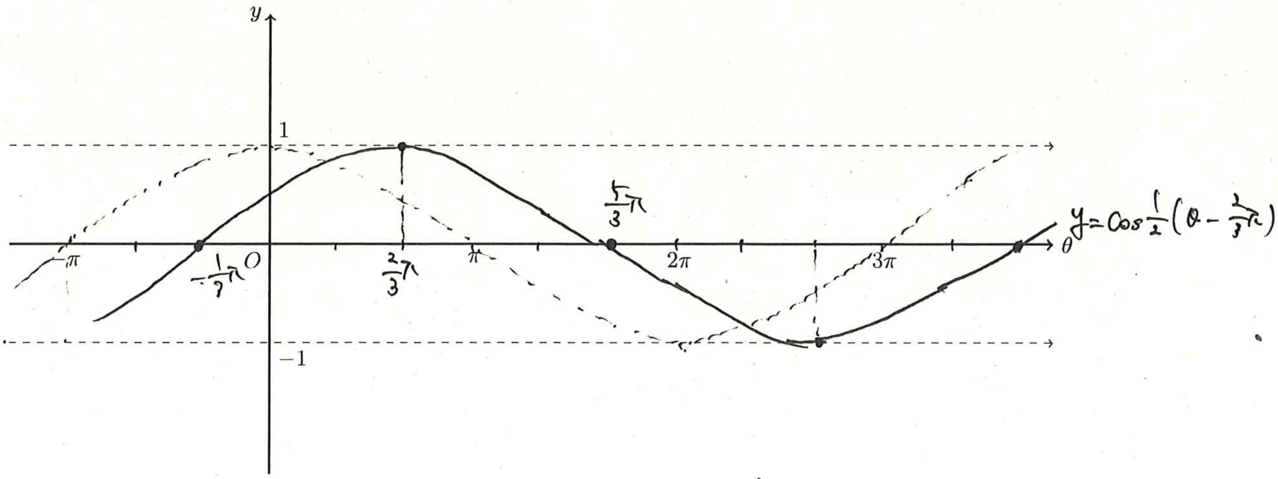


$y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは, $y =$ $\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したグラフ.

周期は π

(8) $y = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)$

θ	$-\pi$	0	3π
y			



$y = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは, $y =$ $\cos\frac{1}{2}\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したグラフ.

周期は 4π

6　三角関数と二次関数

例題

$y = \sin^2 x - 2\sin x + 3 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $t = \sin x$ とおいたとき，t の値の範囲を求めよ．

$0 \leq x < 2\pi$ で　$-1 \leq \sin x \leq 1$ なので

$-1 \leq t \leq 1$

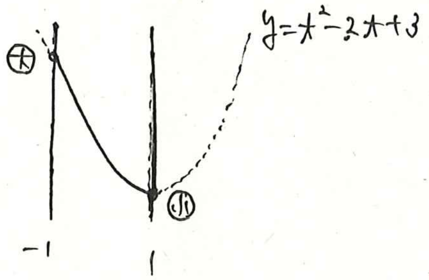
(2) y を t の式で表せ．

$y = t^2 - 2t + 3$

(3) y の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

$y = t^2 - 2t + 3$
$= (t-1)^2 + 4 \qquad (-1 \leq t \leq 1)$

軸　$t = 1$.



上図より
$t=1$ で Min. 4
$t=-1$ で Max 8

ここで，
$t=1$ のとき
$\sin x = 1$.　$x = \frac{\pi}{2}$

$t=-1$ のとき
$\sin x = -1$.　$x = \frac{3}{2}\pi$

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{2}$ で Min 4
$x = \frac{3}{2}\pi$ で Max 8

練習 1

$y = 2\cos^2 x - 4\cos x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $t = \cos x$ とおいたとき，t の値の範囲を求めよ．

$0 \leq x < 2\pi$ で　$-1 \leq \cos x \leq 1$ なので

$-1 \leq t \leq 1$.

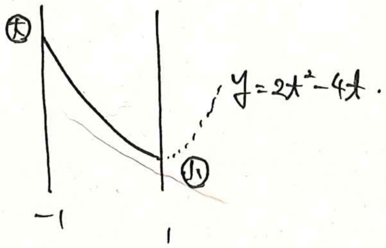
(2) y を t の式で表せ．

$y = 2t^2 - 4t$

(3) y の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

$y = 2t^2 - 4t$
$= 2(t-1)^2 - 2. \qquad (-1 \leq t \leq 1)$

軸　$t = 1$.



上図より
$t=1$ で Min. -2
$t=-1$ で Max 6

ここで，
$t=1$ のとき　$\cos x = 1$.
$x = 0$

$t=-1$ のとき　$\cos x = -1$.
$x = \pi$

$\therefore$ $x=0$ で Min -2
$x=\pi$ で Max 6

加法定理
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ → 2倍角
$\cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\sin\theta$
$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

練習 2

$y = \cos 2x + 4\cos x - 2 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $t = \cos x$ とおいたとき, t の値の範囲を求めよ.

$0 \leq x < 2\pi$ で　$-1 \leq \cos x \leq 1$ なので

$-1 \leq t \leq 1$

(2) y を t の式で表せ.

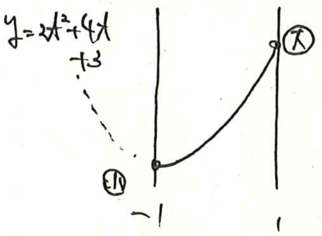
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$
$= 2\cos^2 x - 1. = 2t^2 - 1.$

$\therefore\ y = 2t^2 + 4t - 3$

(3) y の最大値, 最小値と, そのときの x の値を求めよ.

$y = 2t^2 + 4t - 3$
$= 2(t+1)^2 - 5 \quad (-1 \leq t \leq 1)$

軸 $t = -1$.



左図より
$t = -1$ で Min -5
$t = 1$ で Max 3.

ここで, $t = -1$ のとき
$\cos x = -1. \quad x = \pi$

$t = 1$ のとき
$\cos x = 1. \quad x = 0$

$\therefore\ x = \pi$ で Min -5
$x = 0$ で Max 3

練習 3

$y = \cos 2x + 2\sin x - 2 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $t = \sin x$ とおいたとき, t の値の範囲を求めよ.

$0 \leq x < 2\pi$ で　$-1 \leq \sin x \leq 1$ なので

$-1 \leq t \leq 1.$

(2) y を t の式で表せ.

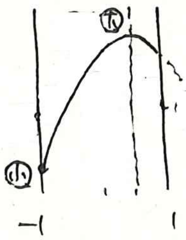
$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
$= 1 - 2t^2$

$\therefore\ y = -2t^2 + 2t - 1.$

(3) y の最大値, 最小値と, そのときの x の値を求めよ.

$y = -2t^2 + 2t - 1.$
$= -2(t^2 - t) - 1$
$= -2\left((t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right) - 1$
$= -2(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 1.$
$= -2(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$

軸 $t = \frac{1}{2}$



左図より
$t = -1$ で Min -4
$t = \frac{1}{2}$ で Max $-\frac{1}{2}$

$t = -1$ のとき　$\sin x = -1.$
$x = \frac{3}{2}\pi$

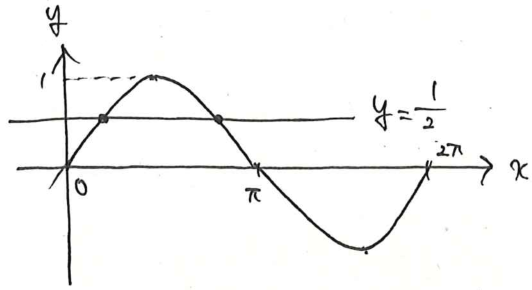
$t = \frac{1}{2}$ のとき　$\sin x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}\pi$ で Min -4
$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で Max $-\frac{1}{2}$

6.1　実数解の個数

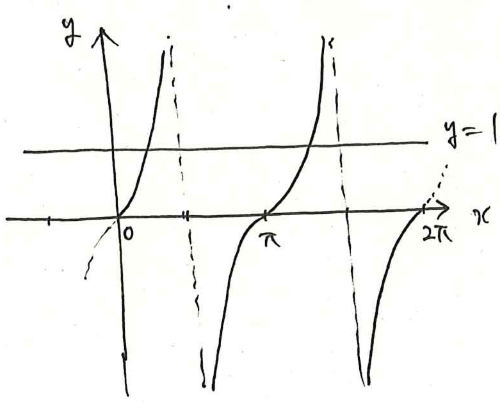
確認

(1) $y = \sin x$ と $y = \frac{1}{2}$ の $(0 \leqq x < 2\pi)$ における共有点の個数を求めよ．



上図より　2コ

(2) $y = \tan x$ と $y = 1$ の $(0 \leqq x < 2\pi)$ における共有点の個数を求めよ．



上図より　2コ

$y = \sin^2 x + 2\sin x + 1$ と $y = k$ のグラフの共有点が何コあるか？

例題

方程式 $\sin^2 x + 2\sin x + 1 = k$　$(0 \leqq x < 2\pi)$ の実数解の個数を求めよ

与えられた方程式の実数解の個数は、

2つの曲線

$y = \sin^2 x + 2\sin x + 1$

$y = k$

の共有点の個数である。

$y = \sin^2 x + 2\sin x + 1$ について、

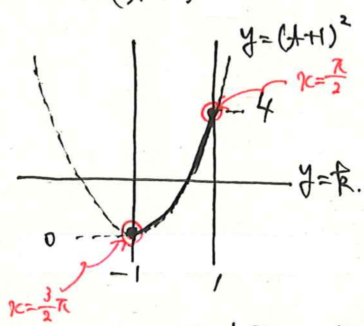
$\sin x = t$ とおくと

$0 \leq x < 2\pi$ なので

$-1 \leq \sin x \leq 1$. ∴ $-1 \leq t \leq 1$.

$y = t^2 + 2t + 1$

$= (t+1)^2$



注意!!

$t=1$ のとき $\sin x = 1$.　$x = \frac{\pi}{2}$

$t=-1$ のとき $\sin x = -1$.　$x = \frac{3}{2}\pi$.

$t=\frac{1}{2}$ のとき $\sin x = \frac{1}{2}$　$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

i.e. $t = 1, -1$ → x は1コ

それ以外 → x は2コ

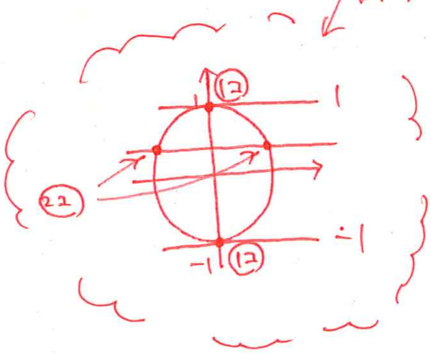
$t = -1, 1$ のときは、対応する x の値は1つずつ。

$-1 < t < 1$ のときは、対応する x の値は2つずつ。

∴ 上の図から、

- $k < -1$, $4 < k$ で　実数解0コ.
- $k = -1, 4$ で　実数解は1コ
- $-1 < k < 4$ で　実数解2コ

図的には



練習問題 1

方程式 $\cos^2 x - 2\cos x + 3 = k \quad (0 \leqq x < 2\pi)$ の実数解の個数を求めよ

与えられた方程式の実数解のコ数は、

2つの曲線、

$y = \cos^2 x - 2\cos x + 3$

$y = k$

の共有点のコ数である。

$y = \cos^2 x - 2\cos x + 3$ について、

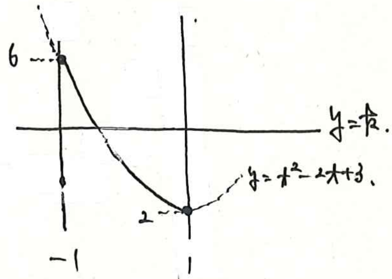
$\cos x = t$ とおくと

$0 \leq x < 2\pi$ なので

$-1 \leq \cos x \leq 1$. ∴ $-1 \leq t \leq 1$.

$y = t^2 - 2t + 3$

$= (t-1)^2 + 2$. 軸 $t = 1$.



$t = -1, 1$ のときは対応する x の値は1つずつ.

$-1 < t < 1$ のときは対応する x の値は2つずつ.

∴ 上の図から、

$k < 2$, $6 < k$ で 実数解 0コ.

$k = 2, 6$ で 実数解 1コ

$2 < k < 6$ で 実数解 2コ

$-(\cos 2x + 4\sin x) = k$.

練習問題 2

方程式 $\cos 2x + 4\sin x + k = 0 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$ の実数解の個数を求めよ

与えられた方程式の実数解のコ数は、

2つの曲線

$y = -(\cos 2x + 4\sin x)$

$y = k$.

の共有点のコ数である。

$y = -\cos 2x - 4\sin x$ について、

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ であるので、

$y = -(1 - 2\sin^2 x) - 4\sin x$

$= 2\sin^2 x - 4\sin x - 1$.

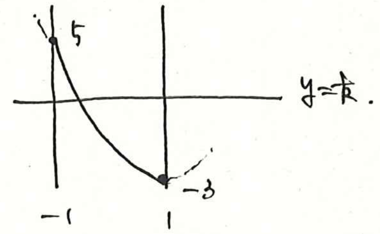
$\sin x = t$ とおくと

$0 \leq x \leq 2\pi$ なので $-1 \leq \sin x \leq 1$.

∴ $-1 \leq t \leq 1$.

$y = 2t^2 - 4t - 1$.

$= 2(t-1)^2 - 3$. 軸 $t = 1$.



$t = -1, 1$ のとき、対応する x の値は1つずつ.

$-1 < t < 1$ のとき、対応する x の値は2つずつ.

∴ 上の図から、

$k < -3$, $5 < k$ で 実数解 0コ.

$k = -3, 5$ で 実数解 1コ.

$-3 < k < 5$ で 実数解 2コ