

19 m, n を $0 < m < n$ を満たす整数とする. α, β を $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi, 0 < \beta < \frac{1}{2}\pi, m = \tan \alpha, n = \tan \beta$ を満たす実数とする.

(1) $\tan \frac{7}{12}\pi$ の値を求めよ.

(2) $\alpha + \beta > \frac{7}{12}\pi$ であることを示せ.

(3) $\tan(\alpha + \beta)$ が整数となるような組 (m, n) を全て求めよ.

(神戸大)

$$(1) \frac{7}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{7}{12}\pi &= \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi \right) \\ &= \frac{\tan \frac{1}{4}\pi + \tan \frac{1}{3}\pi}{1 - \tan \frac{1}{4}\pi \cdot \tan \frac{1}{3}\pi} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} \\ &= -(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

(2) m, n は整数であり, $0 < m < n$ である.

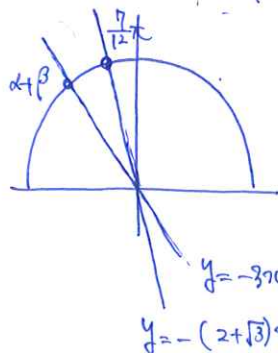
$1 \leq m, 2 \leq n$ である.

$\therefore \alpha + \beta$ の最小値は,

$m=1, n=2$ である.

i.e. $\tan \alpha = 1, \tan \beta = 2$.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{1 + 2}{1 - 1 \cdot 2} \\ &= \frac{3}{1 - 2} = -3 \end{aligned}$$



上図より, 明らかに $\alpha + \beta > \frac{7}{12}\pi$.

$$(3) \tan(\alpha + \beta) = \frac{m + n}{1 - mn}$$

$$(2) \text{より } \alpha + \beta > \frac{7}{12}\pi \text{ である.}$$

$\tan(\alpha + \beta)$ の値は $-1, -2, -3$ である. ($\alpha < \frac{\pi}{2}, \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta < \pi$ である.)

$$(i) \tan(\alpha + \beta) = -1 \text{ である.}$$

$$-1 = \frac{m + n}{1 - mn}$$

$$mn - 1 = m + n$$

$$mn - m - n - 1 = 0$$

$$(m - 1)(n - 1) = 2$$

$0 < m < n$ より
 $1 < m - 1 < n - 1$
 $\therefore m - 1 = 1$
 $n - 1 = 2$ である.
 $\therefore m = 2, n = 3$.

$$(ii) \tan(\alpha + \beta) = -2 \text{ である.}$$

$$-2 = \frac{m + n}{1 - mn}$$

$$2mn - m - n - 2 = 0$$

$$2(m - \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$$

$$(m - \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$$

$0 < m < n$ より
 $-\frac{1}{2} < m - \frac{1}{2} < n - \frac{1}{2}$
 $\therefore m, n$ は整数である.
 $m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $n - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ である.
 $\therefore m = 1, n = 3$.

$$(iii) \tan(\alpha + \beta) = -3 \text{ である.}$$

$$-3 = \frac{m + n}{1 - mn}$$

$$3mn - m - n - 3 = 0$$

$$3(m - \frac{1}{3})(n - \frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$$

$$0 < m < n$$

$$-\frac{1}{3} < m - \frac{1}{3} < n - \frac{1}{3}$$

m, n は整数である.
 $m - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
 $n - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ である.
 $\therefore m = 1, n = 2$.

(i) ~ (iii) より

$$(m, n) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$$

(1), (2) は

$\tan \theta$ の値を求めるときに主値と正解とを比較する問題.

という問題.

(3) は \tan の「整数問題」を扱う問題. おもしろい.