6　実践問題

6.1　問題 1

実数 x に関する 3 つの条件 p, q, r を

$$p: -1 \leqq x \leqq 5,\quad q: 3 < x < 6,\quad r: x \leqq 5$$

とする.

(1) 条件 p, q の否定を, それぞれ $\overline{p}, \overline{q}$ で表すとき, 以下が成立.

- 「p かつ q」は, r であるための $\boxed{\text{ア}}$.
- 「$\overline{p}$ かつ q」は, r であるための $\boxed{\text{イ}}$.
- 「p または $\overline{q}$」は, r であるための $\boxed{\text{ウ}}$.

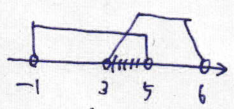
a.　必要条件であるが, 十分条件ではない
b.　十分条件であるが, 必要条件ではない
c.　必要十分条件である
d.　必要条件でも十分条件でもない

(2) 定数 a を正の実数とし,

$$(ax-2)(x-a-1) \leqq 0$$

を満たす実数 x 全体の集合を A とする.
集合 A は, a の値を 3 つの場合に分けて考えると,

- $0 < a < \boxed{\text{エ}}$ 1 のとき, $A = \{x \mid \boxed{\text{オ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{カ}}\}$　$a+1$　$\frac{2}{a}$
- $a = \boxed{\text{エ}}$ 1 のとき, $A = \{\boxed{\text{キ}}\}$ 2
- $\boxed{\text{エ}}$ 1 $< a$ のとき, $A = \{x \mid \boxed{\text{カ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{オ}}\}$　$\frac{2}{a}$　$a+1$



集合 B を

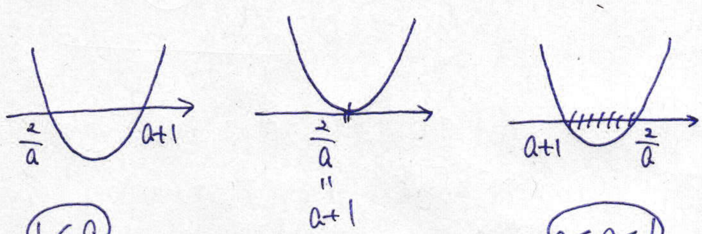
$$B = \{x \mid x \text{ は「} p \text{ かつ } q \text{」を満たす実数}\}$$

$3 < x \leqq 5$

とするとき, $A \cap B$ が空集合となる a の値の範囲は

$$\frac{2}{3}\quad \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{コ}}\ 2$$

$(ax-2)(x-(a+1)) \leqq 0$



$\frac{2}{a} = a+1$

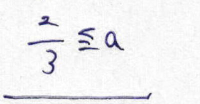
$2 = a(a+1)$

$a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$a=1, -2$

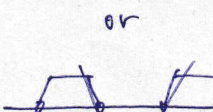
(i) $0<a<1$.



$\frac{2}{a} \leqq 3$

$\frac{2}{3} \leqq a$

(ii) $1<a$



$a+1 \leqq 3$.　∴ $a \leqq 2$

or

6.2 問題 2.0

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, a-1, a+4\}$$
$$B = \{8-a, a+2, 5\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2,5\}$ となるように実数 a の値を定めよ．また，そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ．

$5 \in A$ より．

$a-1=5$ or $a+4=5$

i.e. $a=6$ or $a=1$.

$a=6$ のとき

$B=\{2, 8, 5\}$

$a=1$ のとき

$B=\{7, 3, 5\}$.

$A \cap B = \{2, 5\}$ となるのは $\underline{a=6}$ //

$A \cup B = \{2, 5, 10\} \cup \{2, 8, 5\}$

$= \underline{\{2, 5, 8, 10\}}$ //

6.3 問題 2.1

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$$
$$B = \{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2,5\}$ となるように実数 a の値を定めよ．また，そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ．

$A \ni 5$ より

$a^3-2a^2-a+7=5$

$a^3-2a^2-a+2=0$

$a^2(a-2)-(a-2)=0$

$(a^2-1)(a-2)=0$

$(a-1)(a+1)(a-2)=0$

$a=1, -1, 2$

i) $a=1$ のとき

$B=\{-4, 4, 1, 12\}$

不適

ii) $a=-1$ のとき

$B=\{-4, 2, 5, 4\}$.

$A \cap B = \{2, 5, 4\}$ で 不適.

iii) $a=2$ のとき

$B=\{-4, 5, 2, 25\}$.

$A \cap B = \{2, 5\}$ となる

$\therefore \underline{a=2}$ //

$A \cup B = \{2, 4, 5\} \cup \{-4, 5, 2, 25\}$

$= \underline{\{-4, 2, 4, 5, 25\}}$ //

6.4 問題 3

下記の各命題についてその真偽を記し, 理由を述べよ.
(つまり, 真の場合は示し, 偽の場合は反例を挙げる.)

(1) $\sqrt{7}$ は無理数である. 真.

(2) 和も積もともに 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b はともに有理数である. 偽

(3) a, b, c を実数とする.
全ての実数 x について, $ax^2 + bx + c > 0$ ならば $b^2 - 4ac < 0$ である. 真

(1) <proof>
背理法で示す.
$\sqrt{7}$ が有理数と仮定.
i.e. $\sqrt{7} = \frac{n}{m}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$. 互いに素)
とおく.

$\sqrt{7}\,m = n$

$7m^2 = n^2$ — ※1

左辺 = 7の倍数なので, n^2も7の倍数.
n^2が7の倍数 $\Rightarrow$ nも7の倍数.
∵ 対偶「nが7の倍数でない $\Rightarrow$ n^2が7の倍数でない」を示す。

$n \equiv 1 \mod 7$ のとき $n^2 \equiv 1 \mod 7$
$n \equiv 2 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 4 \mod 7$
$n \equiv 3 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 9 \mod 7 \equiv 2 \mod 7$
$n \equiv 4 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 16 \mod 7 \equiv 2 \mod 7$
$n \equiv 5 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 25 \mod 7 \equiv 4 \mod 7$
$n \equiv 6 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 36 \mod 7 \equiv 1 \mod 7$.

以上より. 対偶は真 ∴ nは7の倍数

∴ $n = 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) とおく.

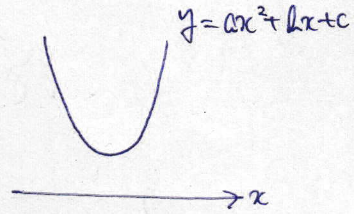
※1から.
$7m^2 = 7^2 k^2$
$m^2 = 7k^2$
同じ議論で mも7の倍数だが, これは nとmが互いに素であることに矛盾.
∴ 仮定が偽. ∴ $\sqrt{7}$は無理数 ∎

(2) 偽

反例. $a = 1 + \sqrt{2}$
$b = 1 - \sqrt{2}$ のとき

$a + b = 2$
$ab = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$.

(3) 真.
$y = ax^2 + bx + c$ とおく.
すべてのxにおいて
$ax^2 + bx + c > 0$ が成立するには,



左図のようになれば である.

グラフとx軸の共有点がなければよい.
i.e. $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D < 0$
∴ $b^2 - 4ac < 0$ が成立. ∎