1 集合

1.1 集合の記法

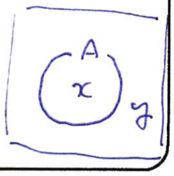
定義

- **集合**：範囲がはっきりしたものの集まり。

  ex.
  1以上10以下の自然数の集まり。

- **要素**：集合を構成する1つ1つのもの

- **x が集合 A に属する**：
  xが集合Aの要素であること。
  $x \in A$ と書く。
  一方，yがAの要素でないこと。
  $y \notin A$ と書く。



有名な数の集合

- **N**：自然数全体の集合
  Natural Number
- **Z**：整数全体の集合
  Integer
  → Zahlen (独語の整数)
- **Q**：有理数全体の集合
  Rational Number
  → Quotient ：商
- **R**：実数全体の集合
  Real Number

記法

外延的記法

… 要素を1つ1つ書き並べる方法。

例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

内包的記法

… 要素のみたす条件を書いて表す方法。

例

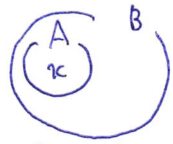
$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5,\ n \in \mathbb{N}\}$.

$B = \{2n \mid 1 \leq n \leq 5,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1.2 部分集合

定義

2つの集合A, Bに対し，
$x \in A$ ならば $x \in B$
が成立するとき，AをBの部分集合という。
このとき，
・AはBに含まれる
・BはAを含む



といい，$A \subset B$ or $B \supset A$ と書く。

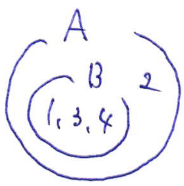
注) AはA自身の部分集合でもある。

AとBの要素がすべて一致しているとき，
AとBは等しい といい， $A = B$ と書く。

要素が1つもない集合のことを空集合といい，$\emptyset$ と書く。
注) 空集合は，どのような集合Aに対しても その部分集合。
i.e. $\emptyset \subset A$.

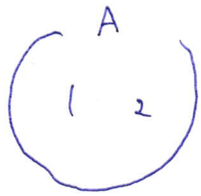
例.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 3, 4\}$ のとき



$A \supset B$ である。

集合 $\{a, b\}$ に対する部分集合



この集合の部分集合は，

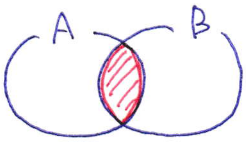
$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$ の4つ。

1.3 共通部分と和集合

定義

- **共通部分**

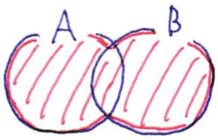
…2つの集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合



$A \cap B$ で表す.

- **和集合**

…2つの集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合.



$A \cup B$ で表す.

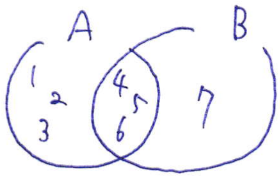
例.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$ に対し.

$A \cap B = \{4, 5, 6\}$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

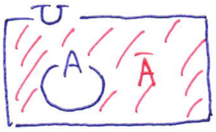


1.4 補集合

定義

様々な集合を考える上で、前提となる集合のことを全体集合という。(U で書くことが多い. Universal set)

全体集合 U の部分集合 A に対し,
U の要素であり A の要素ではないものの集まりを A の補集合という.
$\overline{A}$ で書き表す.



補集合の性質

U : 全体集合, $A, B \subset U$ とする.

(i) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

(ii) $A \cup \overline{A} = U$

(iii) $\overline{\overline{A}} = A$

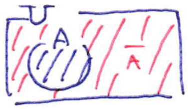
(iv) $A \subset B$ ならば $\overline{A} \supset \overline{B}$

〈ベン図を用いた説明〉

(i) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

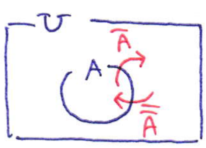
A と $\overline{A}$ の共通部分なし.

(ii) $A \cup \overline{A} = U$



A と $\overline{A}$ をあわせると全体になる.

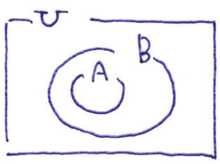
(iii) $\overline{\overline{A}} = A$



A から外に出る → $\overline{A}$

$\overline{A}$ から外に出る → $\overline{\overline{A}}$ = A にもどる.

(iv) $A \subset B$ ならば $\overline{A} \supset \overline{B}$



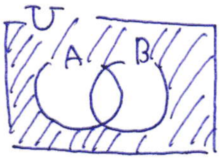
B の外の要素をとると
必ず A には含まれない
→ $\overline{B}$ の要素は $\overline{A}$ に含まれる.

ド・モルガンの法則

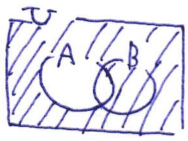
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

〈ベン図を用いた証明〉

◦ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ について.



左図斜線部が $\overline{A\cup B}$ である.



左斜線部は $\overline{A}$

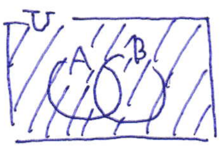
左斜線部 $\overline{B}$.

よって $\overline{A}\cap\overline{B}$ は下図斜線部

これは $\overline{A\cup B}$ と一致.

◦ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ について.

$\overline{A\cap B}$は



であれば, $\overline{A}\cup\overline{B}$ とも一致