4 背理法

4.1 問題 1

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて, 以下の命題を示せ.

$$1+\sqrt{2} \text{ は無理数である.}$$

＜証明＞.

$1+\sqrt{2}$ が有理数であると仮定.

もとの命題が不成立と仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて

$$1+\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (n \neq 0)$$

と表せる。

その仮定のもと式変形

$$1+\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 1$$

$$= \frac{m-n}{n}$$

さて, m, n : 整数 なので

$m-n$ は整数.

矛盾を導く

$\therefore$ (右辺) = 有理数 となり,

$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾.

矛盾が生じたのは, 仮定が誤っていたから。

$\therefore$ 仮定が誤り

つまり. $1+\sqrt{2}$ は無理数

∎ つまり, もとの命題は真

4.2 問題 2

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて, 以下の命題を示せ.

$$2+5\sqrt{2} \text{ は無理数である.}$$

＜証明＞.

$2+5\sqrt{2}$ が有理数であると仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて,

$$2+5\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (n \neq 0)$$

と表せる.

$$2+5\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$5\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 2$$

$$= \frac{m-2n}{n}$$

$$\sqrt{2} = \frac{m-2n}{5n}$$

さて, m, n は整数なので

$m-2n$ も $5n$ も整数

$\therefore$ (右辺) = 有理数 となり.

$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾.

$\therefore$ 仮定が誤り

つまり $2+5\sqrt{2}$ は無理数 ∎

4.3 問題 3

$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ.

〈証明〉

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (n \neq 0)$$

と書ける.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$n\sqrt{2} = m$$

$$2n^2 = m^2 \quad \text{—— (*)}$$

さて, $2n^2$ は偶数なので, m^2 も偶数.

m^2 が偶数のとき m も偶数

∵ 対偶「m が奇数 ⇒ m^2 が奇数」は,

$m = 2k+1$ (k: 整数) とおくと

$$m^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = (\text{奇数})$$

なので真.

∴ m は偶数なので $m = 2l$ (l: 整数)

とおくと $m^2 = 4l^2$.

(*) より

$$2n^2 = 4l^2$$

$$n^2 = 2l^2$$

(右辺) = (偶数) なので, 同じ議論から.

n も偶数.

さて, m, n はともに偶数だが, これは

m と n が互いに素であることに矛盾.

∴ $\sqrt{2}$ は無理数

□

4.4 問題 4

$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ.

〈証明〉.

$\sqrt{3}$ が有理数であると仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

と書ける.

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

$$n \cdot \sqrt{3} = m$$

$$3n^2 = m^2 \quad \text{—— (*)}$$

さて, $3n^2$ は3の倍数なので, m^2 も3の倍数.

m^2 が3の倍数 ⇒ m も3の倍数.

∵ 対偶「m が3の倍数でない ⇒ m^2 が3の倍数でない」

で示す.

i) $m = 3k+1$ のとき ($k \in \mathbb{Z}$)

$$m^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$$

ii) $m = 3k+2$ のとき. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$m^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1.$$

どちらの場合も m^2 は3の倍数ではない.

∴ 真

∴ m が3の倍数なので, $m = 3l$ ($l \in \mathbb{Z}$)

とおけて, $m^2 = 9l^2$

(*) から.

$$3n^2 = 9l^2$$

$$n^2 = 3l^2$$

(右辺) = (3の倍数) なので, 同じ議論から,

n も3の倍数.

よって, m, n はともに3の倍数だが,

これは互いに素であることに矛盾.

∴ $\sqrt{3}$ は無理数.

□