(1) では一般に状況をはあくできるか？
(2) の証明は、(3) への誘導。

$\boxed{9}$ 自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して，座標が $(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$ である単位円上の点 P_n が，以下の規則 (i), (ii) で定められている．

(i) $\theta_1=0, \theta_2=\frac{1}{3}\pi$ とし，各 n について，

$$\theta_n < \theta_{n+1} < \theta_{n+2} < \theta_n + 2\pi$$

が成り立つ．

(ii) 各 n について，P_{n+2} は，P_n, P_{n+1} を両端とする弧のうち，P_{n+2} を含む弧を 2 等分する点である．

このように定めるとき，$\theta_3=\frac{7}{6}\pi$ であることがわかる．以下の問いに答えよ．

(1) θ_4, θ_5 を求めよ．

(2) $\theta_{n+1}-\theta_n=\beta_n$ とおくとき，$\beta_{n+1}=-\frac{1}{2}\beta_n+\pi$ を示し，数列 $\{\beta_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)

θ_2, θ_3, θ_4, $\theta_2+2\pi$

$\frac{1}{3}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\xleftrightarrow{\text{中央}}$, $\frac{7}{3}\pi$

θ_4 は $\frac{7}{6}\pi$ と $\frac{7}{3}\pi$ の中央値．

$\therefore \theta_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\pi+\frac{7}{3}\pi\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{21}{6}\pi = \frac{7}{4}\pi$ //

θ_3, θ_4, θ_5, $\theta_3+2\pi$

$\frac{7}{6}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\xleftrightarrow{\text{中央}}$, $\frac{19}{6}\pi$

$\therefore \theta_5 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{19}{6}\pi\right)$

$= \frac{59}{24}\pi$ //

(2) <証明>.

θ_n, θ_{n+1}, θ_{n+2}, $\theta_n+2\pi$

さて，θ_{n+2} は，θ_{n+1} と $\theta_n+2\pi$ の中央値なので

$$\theta_{n+2} = \frac{\theta_{n+1}+\theta_n+2\pi}{2}$$

$$\theta_{n+2} = \frac{1}{2}\theta_{n+1}+\frac{1}{2}\theta_n+\pi$$

$$\theta_{n+2}-\theta_{n+1} = -\frac{1}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)+\pi$$

$\beta_n=\theta_{n+1}-\theta_n$ とすると

$$\beta_{n+1} = -\frac{1}{2}\beta_n+\pi$$

■

(3). (2)より

$$\beta_{n+1} = -\frac{1}{2}\beta_n+\pi$$

$$\left(\beta_{n+1}-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\left(\beta_n-\frac{2}{3}\pi\right).$$

数列 $\left\{\beta_n-\frac{2}{3}\pi\right\}$ は，

初項．$\beta_1-\frac{2}{3}\pi = \theta_2-\theta_1-\frac{2}{3}\pi$

$= \frac{1}{3}\pi-0-\frac{2}{3}\pi$

$= -\frac{1}{3}\pi$，

公比 $-\frac{1}{2}$

の等比数列．

$\therefore \beta_n-\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\beta_n = \frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\theta_{n+1}-\theta_n = \frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

i.e. $\theta_{n+1} = \theta_n + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}_{\text{階差数列}}$.

$n \geq 2$ において．

$\theta_n = \theta_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\qquad\Big)$

$= 0+\frac{2}{3}\pi(n-1)-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \frac{2}{3}\pi(n-1)-\frac{2}{9}\pi\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$

$n=1$ のとき

$\frac{2}{3}\pi(1-1)-\frac{2}{9}\pi\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^0\right)=1$ で

$n=1$ でも成立．

$\therefore \theta_n = \frac{2}{9}\pi\left(3n-4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ //