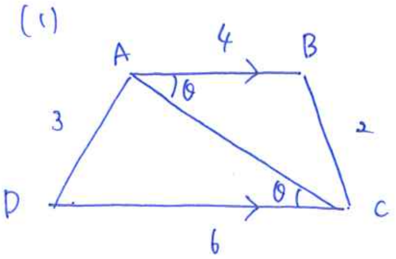
18 四角形 ABCD において, AB∥DC, AB= 4, BC= 2, CD= 6, DA= 3 であるとする.

(1) 対角線 AC の長さを求めよ.

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ.

(信州大)

(1)



錯角なので

∠BAC=∠ACD.

∠BAC=θとおく.

△ABCで余弦定理.

$2^2=4^2+AC^2-2\cdot4\cdot AC\cdot\cos\theta$

$AC\cdot\cos\theta=\frac{AC^2+12}{2\cdot4}$ —①

△ACDで余弦定理.

$3^2=6^2+AC^2-2\cdot6\cdot AC\cdot\cos\theta$ —②

①を代入.

$9=36+AC^2-\cancel{2}\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{AC^2+12}{\cancel{2}\cdot\cancel{4}_{2}}$

$18=72+2AC^2-3(AC^2+12)$

$18=72+2AC^2-3AC^2-36$

$-18=-AC^2$

$AC^2=18$

AC>0より

$AC=3\sqrt2$ //

(2) (1)から $AC=3\sqrt2$ より.

①で

$3\sqrt2\cos\theta=\frac{18+12}{2\cdot4}$

$\cancel{3}\sqrt2\cos\theta=\frac{\cancel{30}\,\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}\cdot4}$

$\cos\theta=\frac{5}{4\sqrt2}=\frac{5\sqrt2}{8}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\sin^2\theta=1-\frac{50}{64}=\frac{14}{64}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt{14}}{8}$ ($\theta<180°$ より $\sin\theta>0$)

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac12\cdot4\cdot3\sqrt2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}+\frac12\cdot6\cdot3\sqrt2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}$

$=\frac{4\cdot3\sqrt2\cdot\sqrt{14}+6\cdot3\cdot\sqrt2\cdot\sqrt{14}}{2\cdot8}$

$=\frac{\overset{15}{\cancel{30}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt7}{\cancel{2}\cdot\cancel{8}_{4}}$

$=\frac{15\sqrt7}{4}$ //

四角形の面積は 2つの三角形の和が基本.