

3 以下の問いに答えよ。

(1) $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + a)^2 + b(x + c)^2$ が恒等式となるような整数 a, b, c を求めよ。

(2) 方程式 $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$ を複素数の範囲で解け。

(1)

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= x^4 + 2ax^2 + a^2 \\ &\quad + bx^2 + 2bcx + bc^2 \\ &= x^4 + (2a+b)x^2 + 2bcx + (a^2+bc^2) \end{aligned}$$

係数を比較して、

$$\begin{cases} -2 = 2a+b & \text{①} \\ -8 = 2bc & \text{②} \\ -3 = a^2+bc^2 & \text{③} \end{cases}$$

a, b, c は整数であり、

②より

$$bc = -4$$

③より、 $b < 0, c > 0$ となる。

b と c の組み合わせは

b	c	
-1	4	(i)
-2	2	(ii)
-4	1	(iii)

a について、

①のとき、③より

$$-3 = a^2 - 16 \quad a^2 = 13$$

a : 整数 ではない。

②のとき、同様に不適。

③のとき、

$$-3 = a^2 - 4 \quad a^2 = 1$$

$$\therefore a = \pm 1$$

$$\text{①より、} -2 = 2a - 4$$

$$a = 1 \text{ (より) } -1 \text{ は不適}$$

$$\therefore a = 1, b = -4, c = 1$$

(2) (1)の結果より、

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 - 8x - 3 &= (x^2 + 1)^2 - 4(x + 1)^2 \\ &= (x^2 + 1 - 2(x + 1)) \\ &\quad \times (x^2 + 1 + 2(x + 1)) \end{aligned}$$

$$= (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 3)$$

$$\therefore (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 3) = 0 \quad x \text{ 解か}$$

求める解は $x = 1 \pm \sqrt{2}$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ より}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ より}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

よって、

$$x = 1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2}i$$