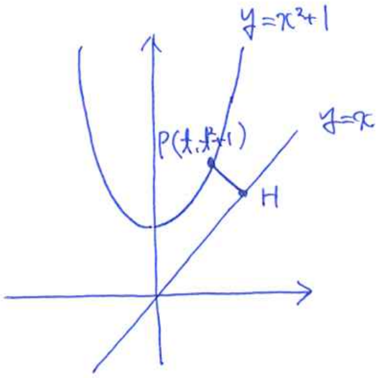
37 xy 平面において, 曲線 $y=x^2+1$ 上の点 $\mathrm{P}(t, t^2+1)$ から直線 $y=x$ に下ろした垂線 PH の長さを $f(t)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(愛知教大)

(1) t の関数 $f(t)$ を求めよ.

(2) $f(t)$ の最小値と, そのときの t を求めよ.

(3) $f(t)$ を最小とするような P, H の座標を求めよ.



直線 $y=x$ は. $x-y=0$ とも書ける.

(1). 点 $\mathrm{P}(t, t^2+1)$ と $x-y=0$ との距離 $f(t)$ は.

$$f(t)=\frac{|t-(t^2+1)|}{\sqrt{1+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|-t^2+t-1\right|$$

(2).

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|-t^2+t-1\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|t^2-t+1\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|$$

$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$ より

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4\sqrt{2}}$$

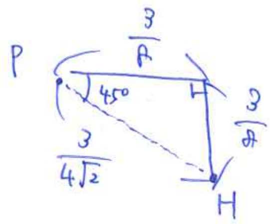
最小値は. グラフの頂点.

$\therefore$ Min $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$, $\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$

(3).

$t=\frac{1}{2}$ より.

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$



左図より. Hは.

Pのx座標 $+\frac{3}{8}$

Pのy座標 $-\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{H}\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)$