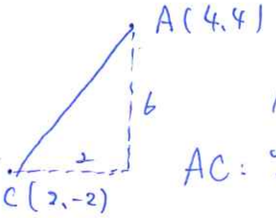
39 xy 平面上の 3 点 A(4, 4), B(−1, 1), C(2, −2) について, 以下の問いに答えよ. (岩手県大)

(1) 点 A と点 C を通る直線に関して, 点 B と対称な点の座標を答えよ.

(2) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を x と y を用いて表せ.

(3) 点 B と点 C を通る直線上に点 D がある. △ABD の面積が △ABC の面積の $\frac{1}{2}$ となる点 D の座標を全て求めよ.

(4) 点 (1, −1) を通り, △ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を x と y を用いて表せ.



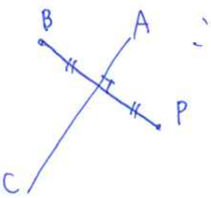
ACの傾き $\frac{6}{2}=3$ より

AC: $y-4=3(x-4)$

$y=3x-8$

対称な点をP(p, q)とおく.

AC⊥BP なので BPの傾きは $-\frac{1}{3}$.



∴ $\frac{q-1}{p-(-1)}=-\frac{1}{3}$

$3(q-1)=-(p+1)$

$p+3q-2=0$ —①

BPの中点 $\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ がAC上にあるので

$\frac{q+1}{2}=3\cdot\frac{p-1}{2}-8$

$q+1=3(p-1)-16$

$3p-q-20=0$ —②

①, ②より

$p=\frac{31}{5}$, $q=-\frac{7}{5}$

∴ $P\left(\frac{31}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

(2). 求める円の方程式を

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく.

(4, 4) 通るので

$32+4a+4b+c=0$ —①

(−1, 1) 通るので

$2-a+b+c=0$ —②

(2, −2) 通るので

$8+2a-2b+c=0$ —③

①, ②から.

$30+5a+3b=0$. —④

②, ③から.

$6+3a-3b=0$ —⑤

→ $b=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{9}{2}$

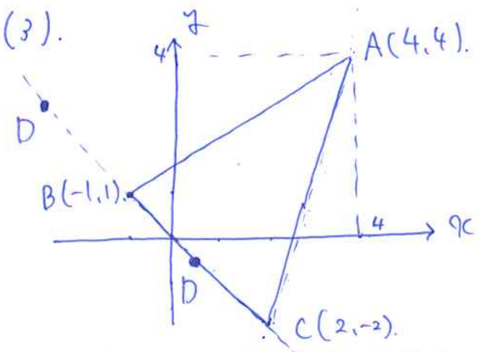
②に代入して

$c=-4$

∴求める円の方程式は

$x^2+y^2-\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}y-4=0$

(3).



BCを底辺として△ABCを考えると, BC上の点Dについて,

△ABDの面積が△ABCの$\frac{1}{2}$倍になるには,

$BD=\frac{1}{2}BC$ となればよい.

そのような点は, 上図中にDで表したように,

BCの中点, or BCを1:3に外分する点.

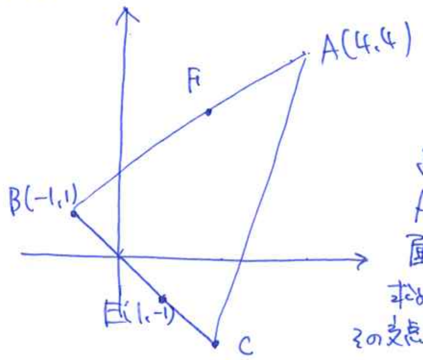
のいずれか.

BCの中点 $\left(\frac{2-1}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

外分点 $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

∴ Dは $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(4).



E(1, −1)とおく.

BE:EC=2:1.

点Eを通る直線がACと交点をもつ場合は面積で1:1にはならないので求める直線は線分ABと交点をもち, その交点をFとする.

△BEA = $\frac{2}{3}$△ABC. であるので,

△BEF = $\frac{1}{2}$△ABC にするためには,

△BEF = $\frac{3}{4}$△BEA にする必要がある.

(そうすれば, △BEF = $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$△ABC = $\frac{1}{2}$△ABC).

∴ FはBAを3:1に内分する点.

F $\left(\frac{-1+12}{3+1}, \frac{1+12}{3+1}\right)=\left(\frac{11}{4}, \frac{13}{4}\right)$.

よって, EFの傾きは $\frac{-1-\frac{13}{4}}{1-\frac{11}{4}}=\frac{-17}{-7}=\frac{17}{7}$

∴求める直線は

$y+1=\frac{17}{7}(x-1)$ ∴ $17x-7y-24=0$