(1) は直角のかすぐに見つけられるか？
(2) は、三角比の値の比較から角度比較につなげられるか？
(3) は、様々な解法が考えられるので、いずれの解法でも
1つ1つ丁寧に解くこと！

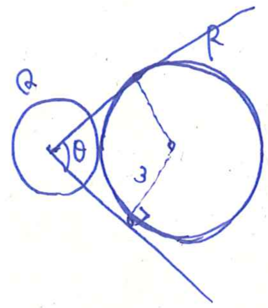
42 いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする．円 Q の中心を端点とし，円 R に外接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．このとき，$\sin\theta$ を求めよ．

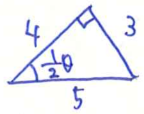
(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ．

(1)



2円の中心間のキョリは $2+3=5$．



左図より．

$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{3}{5}$

$\cos\frac{1}{2}\theta = \frac{4}{5}$

$$\therefore \sin 2\cdot\frac{1}{2}\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cdot\cos\frac{1}{2}\theta$$
$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{24}{25}$$

(2) ＜証明＞

(1) の結果から，

$$\cos 2\cdot\frac{1}{2}\theta = \cos^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\theta$$
$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$
$$= \frac{7}{25}$$

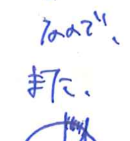
i.e. $\cos\theta = \frac{7}{25}$

$\therefore \sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であり．

$\frac{1}{2}\theta$ は直角三角形の1つの鋭角 $\left(0 < \frac{1}{2}\theta < \frac{\pi}{2}\right)$

なので、　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ —①

また．$\cos\theta = \frac{7}{25} < \frac{1}{2} = \cos\frac{1}{3}\pi$．



左図から．$\theta > \frac{1}{3}\pi$ —②

①，②より．

$\frac{1}{3}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$

証

(3).

(i) $\frac{1}{3}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ から，

$\frac{4}{3}\pi < 4\theta < 2\pi$　なので、4コ配置することは可能である。

(ii) 一方で，

$2\pi < 6\theta < 3\pi$　なので，6コ配置すると

2πを越えるため．6コは配置できない。

(iii) 5コ配置できるか調べる。

i.e. 5θ と 2π について調べる。

2πを越えたか否かの判定として．

$\sin 5\theta > 0$ か否かで判定する

下線部が成立 ⟺ 2πを越える
i.e. 配置不可．

まず．

$$\sin 5\theta = \sin(3\theta + 2\theta)$$
$$= \sin 3\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta\sin 2\theta$$

ここで，

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$$
$$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta$$
$$= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$
$$= 3\cdot\frac{24}{25}\cdot\left(\frac{7}{25}\right)^2 - \left(\frac{24}{25}\right)^3$$

同様に

$$\cos 3\theta = \left(\frac{7}{25}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^2\cdot\frac{7}{25}$$

また，

$$\cos 2\theta = \left(\frac{7}{25}\right)^2 - \left(\frac{24}{25}\right)^2$$
$$\sin 2\theta = 2\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{7}{25}$$

なので

$$\sin 5\theta = \left(\frac{1}{25}\right)^5\left\{(3\cdot 24\cdot 7^2 - 24^3)\cdot(7^2 - 24^2) + (7^3 - 3\cdot 7\cdot 24^2)\,2\cdot 24\cdot 7\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{25}\right)^5\cdot 24\cdot(233\cdot 24^2 - 1483\cdot 7^2)$$
$$= \left(\frac{1}{25}\right)^5\cdot 24\cdot(134208 - 72667) > 0$$

$\therefore \sin 5\theta > 0$ であるため，5コ配置できない。

(i)～(iii)より，∴最大 4コ配置できる。