

6 実践問題

6.1 問題 1

実数 x に関する 3 つの条件 p, q, r を

$$p: -1 \leq x \leq 5, \quad q: 3 < x < 6, \quad r: x \leq 5$$

とする.

(1) 条件 p, q の否定を, それぞれ \bar{p}, \bar{q} で表すとき, 以下が成立.

- 「 p かつ q 」は, r であるための ア.
- 「 \bar{p} かつ q 」は, r であるための イ.
- 「 p または \bar{q} 」は, r であるための ウ.
 - a. 必要条件であるが, 十分条件ではない
 - b. 十分条件であるが, 必要条件ではない
 - c. 必要十分条件である
 - d. 必要条件でも十分条件でもない

(2) 定数 a を正の実数とし,

$$(ax - 2)(x - a - 1) \leq 0$$

を満たす実数 x 全体の集合を A とする.

集合 A は, a の値を 3 つの場合に分けて考えると,

- $0 < a < \text{エ}$ のとき, $A = \{x \mid \text{オ} \leq x \leq \text{カ}\}$
- $a = \text{エ}$ のとき, $A = \{\text{キ}\}$
- $\text{エ} < a$ のとき, $A = \{x \mid \text{カ} \leq x \leq \text{オ}\}$

集合 B を

$$B = \{x \mid x \text{ は 「} p \text{ かつ } q \text{」 を満たす実数}\}$$

とするとき, $A \cap B$ が空集合となる a の値の範囲は

$$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \leq a \leq \text{コ}$$

6.2 問題 2.0

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, a - 1, a + 4\}$$

$$B = \{8 - a, a + 2, 5\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2, 5\}$ となるように実数 a の値を定めよ. また, そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ.

6.3 問題 2.1

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$$

$$B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2, 5\}$ となるように実数 a の値を定めよ. また, そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ.

6.4 問題 3

下記の各命題についてその真偽を記し, 理由を述べよ.
(つまり, 真の場合は示し, 偽の場合は反例を挙げる.)

- (1) $\sqrt{7}$ は無理数である.
- (2) 和も積もともに 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b はともに有理数である.
- (3) a, b, c を実数とする.
全ての実数 x について, $ax^2 + bx + c > 0$ ならば $b^2 - 4ac < 0$ である.