

6 加法定理

6.1 計算練習

「 75° の三角比を求めたい.」 (← 目標)

加法定理

加法定理を使って 75° の三角比を求めてみよう.

計算練習

(1) 15° の三角比を求めよ.

(2) $\frac{11}{12}\pi$ の三角比を求めよ.

- (3) α の動径が第 3 象限, β の動径が第 4 象限にあり,
 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$ のとき, 以下の問いに答えよ.
(a) $\cos \alpha$ の値を求めよ.

(b) $\sin \beta$ の値を求めよ.

(c) $\sin(\alpha + \beta)$ の値を求めよ.

(d) $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ.

- (4) α の動径が第 2 象限, β の動径が第 1 象限にあり,
 $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{3}{5}$ のとき, $\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha + \beta)$ の値を
求めよ.

6.2 証明

加法定理

< 証明 >

6.3 演習

(1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ のとき, $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$ の値を求めよ.

(2) 2 直線 $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$ のなす鋭角を求めよ.

(3) 原点を通り, 直線 $y = -x + 1$ と $\frac{1}{3}\pi$ の角をなす直線の方程式を求めよ.

7 加法定理の応用

7.1 復習

加法定理を思い出す.

(1) $\sin(\alpha + \beta)$

(2) $\sin(\alpha - \beta)$

(3) $\cos(\alpha + \beta)$

(4) $\cos(\alpha - \beta)$

(5) $\tan(\alpha + \beta)$

(6) $\tan(\alpha - \beta)$

計算練習

(1) $\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi\right)$

(2) $\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

(3) $\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

(4) $\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

(5) $\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

(6) $\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

7.2 2倍角

考える

$2\alpha = \alpha + \alpha$ と考えることで, 2α の三角比を考える.

(1) $\sin(\alpha + \alpha)$ を α の三角比で表そう.

(2) $\cos(\alpha + \alpha)$ を α の三角比で表そう.

(3) $\cos(\alpha + \alpha)$ を $\sin \alpha$ で表そう.

(4) $\cos(\alpha + \alpha)$ を $\cos \alpha$ で表そう.

(5) $\tan(\alpha + \alpha)$ を $\tan \alpha$ で表そう.

練習問題

(1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ のとき, $\sin 2\alpha$ の値を求めよ.

(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ のとき, $\cos 2\alpha$ の値を求めよ.

(3) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき, $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha$ の値を求めよ.

7.3 半角

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta, \quad \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

を式変形して,

$$\sin^2 \theta = \quad, \quad \cos^2 \theta =$$

また,

$$\tan^2 \theta =$$

θ を $\frac{\theta}{2}$ に置き換えて,

半角

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} =$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} =$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} =$$

練習

(1) $\cos \frac{\pi}{8}$ の値を求めよ.

(2) $\sin \frac{\pi}{8}$ の値を求めよ.

(3) $\cos \frac{3\pi}{8}$ の値を求めよ.

(4) $\tan \frac{3\pi}{8}$ の値を求めよ.

練習

(1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ のとき, $\cos \frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.

(2) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ で, $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ のとき, $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.

8 三角関数の合成

問題

以下の方程式を解け.

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

問題

以下の不等式を解け.

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \leq 1$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 以下の方程式を解け.

(1) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$

(2) $\sin x + \cos x = 1$

(3) $\sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0$

(4) $\sqrt{3} \sin x + \cos x \leq \sqrt{3}$