令和5年度 単元テスト (1-4) 三角関数 (その1)

R5. 6. 12

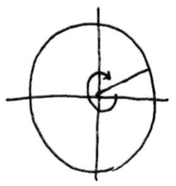
1 以下の表を埋めよ.【8点】

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

θ	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2 $\theta = -\frac{11}{6}\pi$ のとき, $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.【6点】

$-\frac{11}{6}\pi$ の動径は $\frac{1}{6}\pi$ の動径と同じ.



左図より

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ //

3 以下の問いに答えよ.【14点】

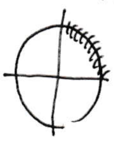
(1) 半径4, 中心角 $\frac{1}{3}\pi$ である扇形の面積と弧の長さを求めよ.

$S = \frac{1}{2}r^2\theta$

$l = r\theta$ より

$S = \frac{8}{3}\pi$, $l = \frac{4}{3}\pi$ //

(2) θ の動径が第1象限にあり, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$

$= \frac{9}{25}$

左図より $\cos\theta > 0$ ∴ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ //

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = \frac{4}{3}$ //

(3) $\tan\theta = 2$ のとき, $\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めよ.

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より.

$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

∴ $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$.

∴ $\sin\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

よって, $\sin\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ (複号同順)

小　計

年＿＿組＿＿番

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ NO.1

合　計

令和 5 年度 単元テスト (1-4) 三角関数 (その 2)

R5. 6. 12

4 以下の問いに答えよ. ($0 \leqq \theta < 2\pi$ とする)【25 点】

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき, $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ.

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{1}{4}$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4} - 1$

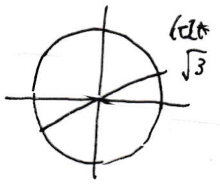
$= -\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$ //

(2) 方程式 $3\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ を解け.

$3\tan\theta = \sqrt{3}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



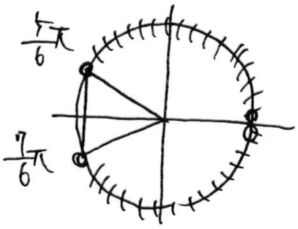
左図より

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$ //

(3) 不等式 $2\cos\theta + \sqrt{3} \geqq 0$ を解け.

$2\cos\theta \geq -\sqrt{3}$

$\cos\theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



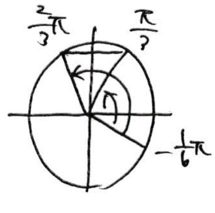
左図より

$0 \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$,

$\frac{7}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$ //

(4) 方程式 $2\sin\left(\theta - \dfrac{1}{6}\pi\right) - \sqrt{3} = 0$ を解け.

$\sin\left(\theta - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



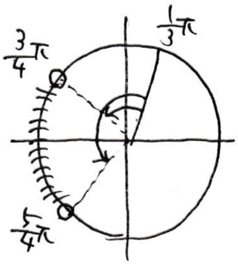
左図より

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$ //

(5) 不等式 $2\cos\left(\theta + \dfrac{1}{3}\pi\right) + \sqrt{2} < 0$ を解け.

$2\cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) < -\sqrt{2}$

$\cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



左図より.

$\frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{11}{12}\pi$ //

令和 5 年度 単元テスト (1-4) 三角関数 (その 3)

R5. 6. 12

5 $\theta = \frac{5}{12}\pi$ について, $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ. 【10 点】

$\frac{5}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi$

$$\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$$
$$= \sin\frac{1}{4}\pi \cdot \cos\frac{1}{6}\pi + \cos\frac{1}{4}\pi \cdot \sin\frac{1}{6}\pi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

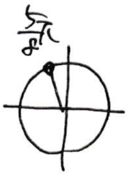
$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$$
$$= \cos\frac{1}{4}\pi \cdot \cos\frac{1}{6}\pi - \sin\frac{1}{4}\pi \cdot \sin\frac{1}{6}\pi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\frac{5}{12}\pi = \frac{\sin\frac{5}{12}\pi}{\cos\frac{5}{12}\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{6+4\sqrt{3}+2}{4} = 2+\sqrt{3}$$

6 $\theta = \frac{5}{8}\pi$ について, $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ. 【10 点】

$\theta = \frac{5}{8}\pi = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\pi$.

$$\cos\frac{5}{4}\pi = 1 - 2\sin^2\frac{5}{8}\pi.$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sin^2\frac{5}{8}\pi$$
$$\sin^2\frac{5}{8}\pi = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$



左図より $\sin\frac{5}{8}\pi > 0$

$$\therefore \sin\frac{5}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$\cos\frac{5}{4}\pi = 2\cos^2\frac{5}{8}\pi - 1$ より

同様にして, 左図から $\cos\frac{5}{8}\pi < 0$ なので

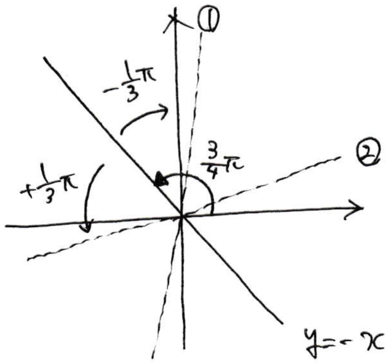
$$\cos\frac{5}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan\frac{5}{8}\pi = \frac{\sin\frac{5}{8}\pi}{\cos\frac{5}{8}\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{-\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$$
$$= -(\sqrt{2}+1)$$

7 直線 $y = -x - 1$ とのなす角が $\frac{\pi}{3}$ である直線で, 原点を通るものの方程式を求めよ. 【6 点】

直線を平行移動させても，なす角は変化しないので，

$y = -x$ とのなす角で考える.



①について，x 軸とのなす角 α は.

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi.$$

∴ ①の傾きは.

$$\tan\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\tan\frac{3}{4}\pi - \tan\frac{1}{3}\pi}{1 + \tan\frac{3}{4}\pi \cdot \tan\frac{1}{3}\pi}$$
$$= \frac{(-1) - \sqrt{3}}{1 + (-1)\cdot\sqrt{3}}$$
$$= \frac{-(1+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$
$$= 2+\sqrt{3}.$$

②について，x 軸とのなす角 β は

$$\beta = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi.$$

∴ ②の傾きは. ①と同様に.

$$\tan\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = 2-\sqrt{3}.$$

よって求める直線は

$$y = (2+\sqrt{3})x, \quad y = (2-\sqrt{3})x$$

年＿＿組＿＿番

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ NO.2

小　計

令和 5 年度 単元テスト (1-4) 三角関数 (その 4)

R5. 6. 12

8 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sin 2\theta = \cos\theta$ を解け. 【7 点】

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$(2\sin\theta - 1)\cos\theta = 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2},\ \cos\theta = 0$

よって $\theta = \frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ //

9 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$ を解け. 【7 点】

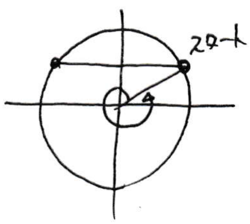
$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$

$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right) = 1$

$2\left(\sin\theta \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta \cdot \sin\frac{1}{6}\pi\right) = 1$

$2 \cdot \sin\left(\theta + \frac{1}{6}\pi\right) = 1$

$\sin\left(\theta + \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$



左図より

$\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi$ //

10 $y = \sin x + \cos x$ の最大値, 最小値を求めよ. 【7 点】

$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{1}{4}\pi + \cos x \cdot \sin\frac{1}{4}\pi\right)$

$= \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$.

ここで,

$-1 \leqq \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \leqq 1$

なので

$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \leq \sqrt{2}$

$x = \frac{1}{4}\pi$ で $y = \sqrt{2}$

$x = \frac{5}{4}\pi$ で $y = -\sqrt{2}$ をとる

$\therefore$ 最大値 $\sqrt{2}$

最小値 $-\sqrt{2}$ //