講義にうまく乗る!!

$\boxed{55}$ $0 < x < 3$ とする. 以下の問いに答えよ.

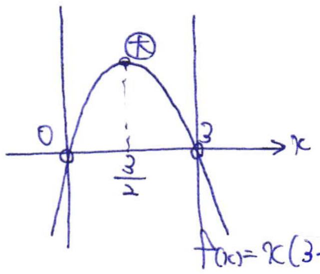
(1) $f(x) = x(3-x)$ の最大値を求めよ.

(2) $g(x) = \dfrac{1}{x(3-x)}$ の最小値を求めよ.

(3) $h(x) = \dfrac{2}{x(1-x)} + \dfrac{2}{(x-1)(2-x)} + \dfrac{2}{(x-2)(3-x)}$ の最小値を求めよ. ただし, $x \neq 1, 2$ とする.

(4) $h(x)$ のとる最小の整数値と, そのときの x の値を求めよ.

(1)



上図より $x=\frac{3}{2}$ で最大値.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ //

(2) $g(x)$ が最小値をとるのは,

分母 $x(3-x)$ が最大となるとき.

$\therefore$ $x = \frac{3}{2}$ で $g(x)$ は最小値.

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$ //

(3)

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{(x-1)(2-x)} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{(x-2)(3-x)} = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x-2}$$

$$\therefore h(x) = 2\left(\cancel{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{x} + \cancel{\frac{1}{2-x}} + \cancel{\frac{1}{x-1}} + \frac{1}{3-x} + \cancel{\frac{1}{x-2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x}\right)$$

$$\therefore h(x) = \frac{6}{x(3-x)}$$

$$= 6 \times g(x)$$

ここで (2)より $g(x)$ の最小値は $\frac{4}{9}$

$\therefore$ $h(x)$ の最小値は $x = \frac{3}{2}$ で

$6 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{3}$ //

(4) (3)の結果より

$$h(x) \geqq \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

さて, 整数値としてとり得るのは, 3以上.

・$\dfrac{6}{x(3-x)} = 3$

$2 = x(3-x)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x = 1, 2.$

これは不適.

・$\dfrac{6}{x(3-x)} = 4$

$3 = 2x(3-x)$

$2x^2 - 6x + 3 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

どちらも $0 < x < 3$ をみたす.

$\therefore$ $h(x)$ の最小整数値は4, そのとき $x = \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ //