

セミナーまとめ

Takenaga Koudai

2021 年 11 月 2 日

目次

第 I 部	グラフ理論	3
1	2 連結グラフ	4
1.1	パス	4
1.2	2-連結と同値な条件	6
2	3 連結グラフ	7
2.1	縮約	7
2.2	3-連結グラフ	10
3	最大フロー最小カット	11
3.1	ネットワーク	11
3.2	フローネットワーク	12
3.3	最大フロー	13
3.4	最小カット	14
3.5	f -Augmenting Semipaths	15
3.6	最小フロー最小カット定理	16
4	ダイクストラ法	18
4.1	ダイクストラ法アルゴリズム	20
4.2	ダイクストラ法の証明	21
5	5 色定理	22
第 II 部	平坦折り	24
6	単純な展開図の平坦折り	25
7	単頂点展開図の平坦折り可能性	29
7.1	川崎定理	30
7.2	前川定理	31
7.3	その他準備	32
7.4	結論	33
7.5	余談	34
第 III 部	多面体とグラフ	35
8	H -多面体と V -多面体	36
8.1	H -多面体, V -多面体	37
8.2	分離定理	39
8.3	その他準備	41
8.4	V -多面体と H 多面体の同値性	45

9	オイラーの多面体定理	46
9.1	証明	47
9.2	多面体 ver	47
10	シュタイニッツの定理	48
10.1	グラフ上での操作	48
10.2	補題	50
10.3	シュタイニッツの定理の証明	56
11	3次元凸多面体の3連結性	57
11.1	メンガーの定理	57
11.2	ホイットニーの定理	58
11.3	3次元凸多面体の3連結性	59
12	辺による面の特徴づけ	60
第IV部 多面体		63
13	コーシーの剛性定理	64
13.1	コーシーのアーム補題	67
13.2	コーシーの剛性定理の証明 (前半)	69
13.3	コーシーの剛性定理の証明 (後半)	70
14	ふいご予想	73
14.1	ケイリー・メンガー方程式	74
14.2	ケイリー・メンガーの方程式の変形	75
14.3	補題	79
14.4	定理の証明 ~ 予想の証明	82
第V部 多面体の再構成		83
15	アレクサンドロフの定理	83
15.1	一意性について	85
16	アレクサンドロフ条件と同値な条件	90
17	折れる多角形と折れない多角形	92
17.1	折れない多角形	92
17.2	折れる多角形	93
18	平田の半分長定理	94
18.1	ガウス曲率	95
18.2	接着木と回転ベルト	96
18.3	平田の半分長定理の証明	99
18.4	回転ベルトを持つパターン	104
19	ラテンクロスから凸多面体の再構成	108

19.1	多面体再構成	108
19.2	ラテックロスから凸多面体の構成	109
19.3	アレクサンドロフパズル	112
19.4	実際に作成してみる	117
19.5	参考	120

第Ⅰ部

グラフ理論

1 2 連結グラフ

定理

有限グラフ G に対して、以下は同値である.

1. G は 2-連結.
2. G は、閉路から始めてすでに構築されたグラフ H に、 H -パスを加えて構築できる.
3. G は連結で、 G の任意の 2 点に対してそれを含む G 上のサイクルが存在する.

1.1 パス

定義 (パス)

グラフ $P := (V, E)$ がパスであるとは、 $V := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $E := \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n\}$ を満たすこと.
 (x_0, \dots, x_n) は全て異なる点.

<表記>

- P がパスのとき、 $P = x_0x_1 \dots x_n$ と書く.
- x_iPx_j で、 P 中の x_i から x_j までを表す.
- $P = x \dots y \dots a$, $Q = b \dots y \dots z$ としたとき、 $xPyQz = x \dots y \dots z$ と書く.

定義 (サイクル)

$P = x_0, \dots, x_{n-1}$ をパスとする. $n \geq 3$ のとき、

$$c := p + x_{n-1}x_0$$

をサイクルという.

定義 (連結)

グラフ G が連結であるとは、

$$\forall x, y \in V(G), \exists P \subseteq G : \text{path, s.t. } x, y \in P$$

連結でないことを非連結という.

$|G| > k, |X| < k$ ($k \in \mathbb{N}$) となる $\forall X \subset G$ に対し、 $G - X$ が連結であるとき、 G は k -連結であるという.

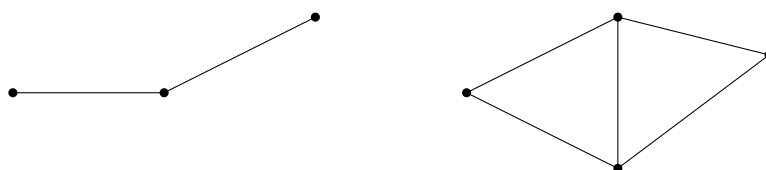


図 1: 1 連結 (左) と 2 連結 (右)

定義 (H -パス)

グラフ H に対して, パス $P(= x_0 \cdots x_k)$ が H -パスである.

$$\iff H \cap P = (\{x_0, x_k\}, \emptyset)$$

ただし, P は自明なグラフ (1 点からなるグラフ) ではないとする.

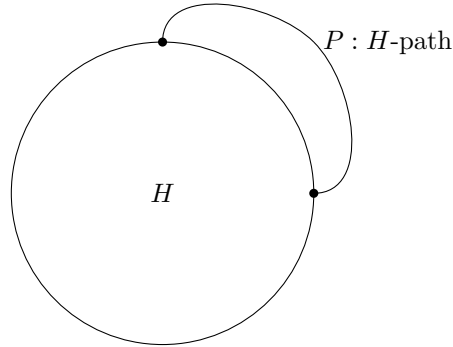


図 2: H -path

補題

2-連結グラフは閉路を含む.

<証明>

G : 2-連結グラフが閉路を含まないとする. G が 2-連結なので, G は連結.

$\exists x, y \in G$ に対し, $\exists! P: \text{path } s.t. P = x \cdots z \cdots y$.

(\therefore 2 つもつ (i.e. $P_1, P_2, P_1 \neq P_2$) とすると, $xP_1yP_2z + zx$ がサイクルとなり矛盾.)

P が一意より, $G-z$ を考えると, $x-y$ を結ぶパスが存在しない. これは 2-連結に矛盾.

□

1.2 2-連結と同値な条件

再掲.

定理

有限グラフ G に対して、以下は同値である.

1. G は 2-連結.
2. G は、閉路から始めてすでに構築されたグラフ H に、 H -パスを加えて構築できる.
3. G は連結で、 G の任意の 2 点に対してそれを含む G 上のサイクルが存在する.

<証明>

- $3 \implies 1$.

G が 2-連結でないとする、仮定より 1-連結であるため、 $\exists z \in G$ s.t. $G - z$: 非連結. よって、 $G - z$ 上で結ばれていないような 2 点 x, y が存在する. すなわち、 $\exists x, y$ s.t. $\forall P: x-y$ パス, $P \not\subset G$.

今、 $x, y \in G - z \subset G$ であることと、仮定から、 x, y を含むような G 上のサイクル C が存在する.

$z \notin C$ とすると、 $C \subset G - z$ より、 x, y を結ぶ $G - z$ 上のパスが存在し、矛盾.

$z \in C$ とすると、サイクルは 2-連結より、 $C - z$ は連結で、 $x, y \neq z$ であるため、 x, y を結ぶ $G - z$ 上のパスが存在し、矛盾.

したがって、 G は 2-連結.

- $1 \implies 2$.

G を 2-連結グラフとすると、 G はサイクルを含む ($\because 3 \implies 1$). したがって、2 のように構成される極大な部分グラフ H を含む. 仮に、 $xy \in E(G) \setminus E(H)$, $x, y \in H$ が存在するとすると、 xy は H -パスとなり、 H の極大性に反する. そのため、 $x, y \in H \implies xy \in H$ であるから、 H は G の誘導部分グラフである. 今、 $G \neq H$ とすると、 H が G の誘導部分グラフであるから、 $|G| > |H|$ がわかる. よって、 $G - H \neq \emptyset$ であり、 G の連結性より、 $\exists vw$ s.t. $v \in G - H \wedge w \in H$. また、 G は 2-連結であるため、 $v-H$ パス: $P \subset G - w$ が存在する. このとき、 wvP は H -パスであり、 G に含まれている. したがって、 $H \cup wvP$ は H より大きい (H を含む)、2 のように構築されるグラフであり、これは H の極大性に反する. したがって、 $G = H$ である.

- $2 \implies 3$.

G をサイクルとする. これは明らかに (3) を満たす.

今、 H を (3) を満たすグラフ、 $P = x \cdots y$ を H -パス、すなわち $H \cap P = (\{x, y\}, \emptyset)$ とする.

H が (3) を満たすことから、 $\forall z \in H$ に対して、 x と y を結ぶパス $Q = x \cdots z \cdots y$ s.t. $Q \subset H$ が存在する. よって、 $P \cap Q = (\{x, y\}, \emptyset)$ より、 $P \cup Q$ はサイクルとなる. このサイクルは P 上の任意の点と H 上の任意の点を含むサイクルとなる. また、このサイクルは P 上の任意の 2 点を含むサイクルにもなっている. したがって、 $H \cup P$ は (3) を満たす. よって、(2) で構築されるグラフは (3) を満たす.

□

2 3 連結グラフ

定理

G が 3-連結グラフ (ただし, K^3 は除く) であるための必要十分条件は, 以下を満たすようなグラフの列 G_0, \dots, G_n が存在することである.

1. $G_0 = K^4 \wedge G_n = G$
2. $\forall i < n, \exists xy \in E(G_{i+1}), (d(x), d(y) \geq 3 \wedge G_i = G_{i+1}/xy)$

まずは, 用語についてまとめておく.

定義 (連結成分)

G : グラフとする.

G の空でない極大な連結部分グラフを連結成分という.

2.1 縮約

定義 (縮約)

$G = (V, E)$: グラフ. $xy \in E$ に対して, $v_{xy} \notin G$ として,
 $(\{V \setminus \{x, y\} \cup \{v_{xy}\}\}, \{vw \in E \mid \{x, y\} \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \{v_{xy}w \mid w \in G \text{ s.t. } xw \in E \setminus \{xy\} \vee yw \in E \setminus \{xy\}\})$

この定義よりただちに,

$$G - \{x, y\} = G/xy - v_{xy}$$

がわかる.

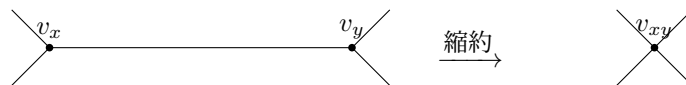


図 3: 縮約

さて, 補題をいくつか準備する.

補題 1

$G = (V, E)$: グラフ, $e = xy \in E$ とする.

$$G \text{ が連結} \iff G/e \text{ が連結.}$$

<証明>

(\implies)

G を連結とする. 任意の G の元 a, b に対し, a と b を結ぶ G 上のパス P が存在する.

1. $\{x, y\} \cap P = \emptyset$ のとき.

- $v_e \cap P = \emptyset$ なので, $P \subset G/e$
2. $\{x, y\} \cap P = \{x\}$ (or $\{y\}$) のとき.
 $P = a \cdots x \cdots b$ より, G/e 上では,
 $P = a \cdots v_e \cdots b$ となり, $P \subset G/e$.
3. $\{x, y\} \cap P = \{x, y\}$ のとき.
 $P = a \cdots xy \cdots b$ より, G/e 上では,
 $P = a \cdots v_e \cdots b$ となり, $P \subset G/e$.
- 逆に関しても同様.

□

ちなみに, 定義をよく見れば, 縮約した後に多重辺が出てきた場合, それは 1 本になる.

補題 2

G : グラフ, $e = xy \in G$, $x, y, v_{xy} \notin S$: 頂点集合.

$$(G - S)/e = G/e - S$$

<証明>

$$\begin{aligned}
V((G - S)/e) &= (V(G) \setminus S) \setminus \{x, y\} \cup \{v_{xy}\} \\
&= (V(G) \setminus \{x, y\} \cup \{x, y\}) \setminus S \quad (\because x, y, v_{xy} \notin S) \\
&= V(G/e - S) \\
E((G - S)/e) &= \{vw \in E(G - S) \mid \{x, y\} \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \\
&\quad \{v_{xy}w \mid w \in V(G - S) \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } xw \in E(G - S) \vee yw \in E(G - S)\} \\
&= \{vw \in E \mid (\{x, y\} \cup S) \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \\
&\quad \{v_{xy}w \mid w \in V(G - S) \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } xw \in E \vee yw \in E\} \\
&\quad (\because V(G - S) = V - S, w \in V(G - S) \wedge x, y \notin S \implies (xw(yw) \in E \iff xw(yw) \in E(G - S))) \\
&= \{vw \in E \mid (\{x, y\} \cup S) \cap \{v, w\} = \emptyset\} \cup \\
&\quad \{v_{xy}w \mid w \in V \setminus \{x, y\} \text{ s.t. } (xw \in E \wedge yw \in E) \vee w \notin S\} \\
&= \{vw \in E(G/e) \mid \{v, w\} \cap S = \emptyset\} \\
&= E(G/e - S)
\end{aligned}$$

□

この定理の嬉しいのは, 引く前に縮約しても引いた後に縮約しても同じものができるというポイントである.
また, これまでの定理より以下がすぐわかる.

補題 3

仮定は上記を引き継ぐ.

$$G - S : \text{連結} \iff G/e - S : \text{連結}.$$

補題 4

G : 3 連結グラフとする.

$$|G| > 4 \implies \exists e \in G \text{ s.t. } G/e : 3 \text{ 連結.}$$

<証明>

そのような辺が存在しない (i.e. $\forall e = xy \in G \text{ s.t. } \kappa(G/e) \leq 2$) とする.

すなわち, $\exists S \subset G/e : \text{頂点集合 } S \text{ s.t. } |S| \leq 2 \wedge G/e - S : \text{非連結.}$

今, $v_{xy} \notin S$ とする^{*1}と, $S \subset E/e - v_{xy} = G - \{x, y\}$ より, $x, y \notin S$ である. よって, 補題 3 より $G - S$ は非連結, なおかつ $\kappa(G) \leq 2$ となり, G が 3-連結であることに矛盾する. よって $v_{xy} \in S$ である.

また, $|S| = 1$ i.e. $S = \{v_{xy}\}$ とすると, これも $G/e - S = G - \{x, y\}$ より, $\kappa(G) \leq 2$ となり矛盾する. したがって, $|S| = 2 \wedge v_{xy} \in S$ がわかる.

S の元で, v_{xy} でないほうの頂点を z とする. $z \notin \{x, y\}$ より,

$$\begin{aligned} G/e - S &= G/e - \{v_{xy}\} - \{z\} \\ &= G - \{x, y, z\} \end{aligned}$$

これらをまとめると,

$$\forall x, y \in G \text{ s.t. } xy \in E(G), \exists z \text{ s.t. } G - \{x, y, z\} : \text{非連結}$$

が導ける. ここで, $G - \{x, y, z\}$ は非連結より, 2 つ以上の連結成分を持ち, G が 3-連結であることから, x, y, z は全ての連結成分と隣接していることに注意する. ここで, $G - \{x, y, z\}$ の中で一番位数が小さい連結成分を C とし, $|C|$ が最小になるように x, y を取り直す. $v \in V(C) \text{ s.t. } vz \in E(G)$ とすると, v の存在は明らか. また, 仮定より G/vz は 3-連結ではないため, $\exists w \in G \text{ s.t. } G - \{z, v, w\} : \text{非連結.}$

x と y が隣接していることから, $G - \{z, v, w\}$ は $D \cap \{x, y\} = \emptyset$ となる連結成分 D をもつ. $u \in V(D) \text{ s.t. } vu \in E(G)$ とすると, u の存在は明らかであり, $v \in V(C)$ より, $u \in V(C)$ i.e. $C \cap D \neq \emptyset$ がわかる. $x, y, z \notin D$ より, D は $G - \{x, y, z\}$ の連結成分の部分グラフであるため, $D \subseteq C$.

また, $v \notin D, v \in C$ であるため, $D \subsetneq C$ である. ゆえに C の最小性に反する.

□

^{*1} $v_{xy} : xy$ によって G を縮約した際に得られる頂点

2.2 3-連結グラフ

再掲

定理

G が 3-連結グラフ (ただし, K^3 は除く) であるための必要十分条件は, 以下を満たすようなグラフの列 G_0, \dots, G_n が存在することである.

1. $G_0 = K^4 \wedge G_n = G$
2. $\forall i < n, \exists xy \in E(G_{i+1}), (d(x), d(y) \geq 3 \wedge G_i = G_{i+1}/xy)$

<証明>

(\implies) 位数が 4 であるような 3-連結なグラフは K^4 のみであるから, 補題 4 より, 各 G_i :3-連結となるようなグラフの列 $G = G_n, \dots, G_0 = K^4$ ($\exists xy \in E(G_{i+1}), G_i = G_{i+1}/xy$) を構成することができる.

また, 任意のグラフ H に対し,

$$\kappa(H) \leq \lambda(H) \leq \delta(H) = \min\{d(x) | x \in H\}$$

であるから, この列は (2) を満たす.

(\impliedby) G_i が 3-連結のとき, G_{i+1} も 3-連結であることを示せば, K^4 が 3-連結であることと, グラフの列が有限であることから, 帰納的に $G = G_n$ が 3-連結であることが導ける.

G_i :3-連結だが G_{i+1} :3-連結ではないと仮定. つまり, $\kappa(G_{i+1}) \leq 2$ と仮定する.

すなわち, $\exists S \subset G_{i+1}$: 頂点集合, s.t. $|S| \leq 2 \wedge G_{i+1} - S$: 非連結である. 今, $\{x, y\} \notin S$ とすると, $S \subset G - \{x, y\} = G/xy - v_{xy}$ より, $v_{xy} \notin S$ である. よって, 補題 3 より, $G_{i+1}/xy - S$: 非連結となり, $\kappa(G_i) \leq 2$ となり, G_i :3-連結グラフに矛盾. よって, $\{x, y\} \cap S \neq \emptyset$ である. また, $S \subseteq \{x, y\}$ とすると, これも $G_{i+1}/xy - \{v_{xy}\} = G_{i+1} - \{x, y\} \subset G_{i+1} - S$ より, $\kappa(G) \leq 2$ となり矛盾.

したがって, $|S| = 2 \wedge x(\text{or } y) \in S$ がわかる. S の元で x ではない方の頂点を z とする. $z \notin \{x, y\}$ より, $G_{i+1} - S = G_{i+1} - \{x, z\}$ である.

ここで, $G_{i+1} - \{x, z\}$ は非連結であるので, 各連結成分 $C_k (k \in \mathbb{N})$ に分離することができ, 特に $y \in C_1$ とすることができる. このとき, C_1 に y 以外の元 v が存在するとすると, 矛盾. $\therefore C_1 = y$. y は $G_{i+1} - S$ における連結成分であるから, $N(y) \subset S$ より, $d(y) = |N(y)| \leq 2$ であるため, 仮定に反する.

□

3 最大フロー最小カット

以下では有向グラフ (digraph) について考える.

定義 (隣接)

グラフ D の有向辺 (u, v) に対して, u は v へ隣接しているといい, 逆に v は u から隣接しているという.

定義 (近傍)

グラフ D の頂点 v に対して,

$$N^+(v) = \{x \in V \mid (v, x) \in E\}$$

$$N^-(v) = \{x \in V \mid (x, v) \in E\}$$

をそれぞれ, グラフ D における v の外近傍, 内近傍という.

定義 (次数)

グラフ D の頂点 v に対して,

$$od(v) = |\{(v, x) \in E \mid x \in V\}|$$

$$id(v) = |\{(x, v) \in E \mid x \in V\}|$$

をそれぞれ, グラフ D における v の外次数, 内次数という.

また, v の次数 $d(v)$ を $d(v) = od(v) + id(v)$ と定める.

3.1 ネットワーク

定義 (ネットワーク)

有向グラフ $D = (V, E)$ が, 始点と終点という2つの異なる頂点 u, v をもち, また, $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+ (= \{x \mid x \in \mathbb{R}\})$ が存在するとき, $N = (D, v, u, c)$ をネットワークという.

また, D を N の基礎有向グラフ (underlying digraph), c を N の容量関数 (capacity function), $e = (x, y) \in E$ に対する $c(e) = c(x, y)$ の値を e の容量 (capacity), v, u 以外の $N(D)$ の頂点を N の中間頂点 (intermediate vertex) という.

<表記>

有向グラフ D , $g : E(D) \rightarrow \mathbb{R}$, $X, Y \subset V(D)$ に対して,

$$[X, Y] = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$g(X, Y) = \sum_{(x, y) \in [X, Y]} g(x, y) \quad ([X, Y] = \emptyset \implies g(X, Y) = 0)$$

また, $x \in V(D)$ のとき,

$$g^+(x) = \sum_{y \in N^+(x)} g(x, y), \quad g^-(x) = \sum_{y \in N^-(x)} g(y, x)$$

とし, より一般に $X \subseteq V(D)$ のとき,

$$g^+(X) = \sum_{x \in X} g^+(x), \quad g^-(X) = \sum_{x \in X} g^-(x)$$

3.2 フローネットワーク

定義 (フロー)

ネットワーク $N = (D, u, v, c)$ に対して, $f: E(D) \rightarrow \mathbb{R}$ が以下を満たしているとき, f は N のフローであるという.

1. $\forall a \in E(D), 0 \leq f(a) \leq c(a)$
2. $\forall x \in V(D) \setminus \{u, v\}, f^+(x) = f^-(x)$

また, $a = (x, y) \in E(D)$ のとき, $f(a) = f(x, y)$ を a に沿ったフロー, 上の 2 つ目の条件をフローの保存則という.

$f: E(D) \rightarrow 0$ の場合, f はフローになる. これをゼロフローという.

$X \subset V(D)$ に対して, $f^+(X) - f^-(X)$ を X から出ていくネットフロー, $f^-(X) - f^+(X)$ を X に入っていくネットフローという. 特に, $x \in V(D)$ に対して, $f^+(x) - f^-(x)$ を x から出ていくネットフロー, $f^-(x) - f^+(x)$ を x に入っていくネットフローという. x が中間頂点であるとき, これらは 0 になる.

$a \in E(D)$ に対して, $f(a) = c(a)$ であるとき, a は f について飽和しているという. そうでないときには不飽和であるという.

定理 1

$N = (D, u, v, c)$: グラフ, f : N 上のフローとする.

$$f^+(u) - f^-(u) = f^-(v) - f^+(v)$$

が成立する.

<証明>

$$\sum_{x \in V(D)} f^+(x) = \sum_{x \in V(D)} f^-(x) \quad i.e. \quad f^+(V(D)) = f^-(V(D))$$

なので, フローの定義 2 より,

$$f^+(u) - f^-(u) = f^-(v) - f^+(v)$$

を導ける.

□

3.3 最大フロー

定義 (バリュウ) —

$N = (D, u, v, c)$ において, u から出ていくネットフローを, フロー f のバリュウ (value) といい, $val(f)$ で表す.

すなわち, $val(f) = f^+(u) - f^-(u)$

定義 (最大フロー) —

$N = (D, u, v, c)$ に対して, value が最大となるフロー f のことを N の最大フローという.

これは一意には定まらないが, 存在することはフローの定義からわかる.

定義 (カット) —

$N = (D, u, v, c)$, $X \subset V(D)$ に対して, $\bar{X} = V(D) - X$ と定める.

$u \in X$ かつ $v \in \bar{X}$ であるとき, $K = [X, \bar{X}] \subset E(D)$ を N のカットという.

u から v へのパスは必ず K を通らなければならない.

補題 1 —

$N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, f : フロー, $X \subset V(D)$ とする. 以下が成立.

$$f^+(X) - f^-(X) = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X)$$

<証明>

$$\begin{aligned}
 f^+(X) - f^-(X) &= \sum_{x \in X} f^+(x) - \sum_{x \in X} f^-(x) \\
 &= \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in N^+(x)} f(x, y) \right) - \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in N^-(x)} f(y, x) \right) \\
 &= \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in N^+(x) \cap X} f(x, y) \right) + \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in N^+(x) \cap \bar{X}} f(x, y) \right) \\
 &\quad - \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in N^-(x) \cap X} f(y, x) \right) + \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in N^-(x) \cap \bar{X}} f(y, x) \right) \\
 &= \sum_{a \in [X, X]} f(a) + \sum_{a \in [X, \bar{X}]} f(a) - \sum_{a \in [X, X]} f(a) - \sum_{a \in [\bar{X}, X]} f(a) \\
 &\quad \because [A, B] = \{(x, y) \in E(D) | x \in A, y \in B\} \\
 &\quad = \{(x, y) | x \in A, y \in B \cap N^+(x)\} \cup \{(x, y) | x \in A \cap N^-(x), y \in B\} \\
 &= \sum_{a \in [X, \bar{X}]} f(a) - \sum_{a \in [\bar{X}, X]} f(a) \\
 &= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X)
 \end{aligned}$$

□

定義 (容量)

$N = (D, u, v, c)$ とカット $K = [X, \bar{X}]$ に対し, カットに含まれる arc の容量の合計値をカット K の容量といい, $\text{cap}(K)$ で表す. すなはち,

$$\text{cap}(K) = c(X, \bar{X}) = \sum_{(x,y) \in [X, \bar{X}]} c(x, y)$$

定理 2

$N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, $f : N$ のフロー, $K = [X, \bar{X}]$ を N のカットとする. 以下が成立.

$$\text{val}(f) = f^+(X) - f^-(X) \leq \text{cap}(K)$$

<証明>

仮定より, $v \notin X$ であり, フローの定義から

$$\forall x \in X - \{u\}, f^+(x) - f^-(x) = 0$$

である. よって,

$$\begin{aligned} f^+(X) - f^-(X) &= \sum_{x \in X} f^+(x) - \sum_{x \in X} f^-(x) \\ &= \sum_{x \in X} (f^+(x) - f^-(x)) \\ &= (f^+(u) - f^-(u)) \\ &= \text{val}(f) \end{aligned}$$

が成立. また, $\forall a \in E(D), 0 \leq f(a) \leq c(a)$ であることから, 補題 1 より

$$\begin{aligned} f^+(X) - f^-(X) &= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \\ &\leq f(X, \bar{X}) \\ &\leq c(X, \bar{X}) \\ &= \text{cap}(K) \end{aligned}$$

となり証明終了.

□

3.4 最小カット

定義 (最小カット)

$N = (D, u, v, c)$ に対して, 容量が最小になるカット K のことを N の最小カットという. すなはち,

$$\forall K' : N \text{ 上のカットに対し, } \text{cap}(K) \leq \text{cap}(K')$$

これは, 一意には定まるかはネットワークに依存するが, 存在はする (\because ネットワークの定義より).

系 1

$N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, $f: N$ のフロー, K を N のカットとする. このとき, $val(f) = cap(K)$ ならば f は N の最大フローであり, K は N の最大カットである.

<証明>

$val(f) = cap(K)$ とすると, 任意の N のフロー f' と, 任意の N のカット K' に対して, 定理 2 より

$$val(f') \leq cap(K) = val(f) \leq cap(K')$$

である. よって, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである.

□

系 2

$N = (D, u, v, c)$: ネットワーク, $f: N$ のフロー, $K = [X, \bar{X}]$ を N のカットとする. このとき,

$$(\forall a \in [X, \bar{X}], f(a) = c(a)) \wedge (\forall a \in [\bar{X}, X], f(a) = 0)$$

ならば, f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである.

<証明>

定理 2 から

$$\begin{aligned} val(f) &= f^+(X) - f^-(X) \\ &= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \\ &= c(X, \bar{X}) - 0 \\ &= cap(K) \end{aligned}$$

よって, 系 1 より f は N の最大フローであり, K は N の最小カットである.

□

3.5 f -Augmenting Semipaths

定義 (Semipath)

有向グラフ D に対して, semipath とは, 以下を満たすような空でない有向グラフ $P = (V, E)$ のことである.

$$V = \{w_i | i = 0, \dots, k\}, E = \{a_i \in E(D) | a_i = (w_{i-1}, w_i) \vee a_i = (w_i, w_1), i = 1, \dots, k\} \text{ (各 } w_i \text{ は異なる)}$$

またこのとき, P を w_0 から w_k への semipath (w_0 - w_k semipath) という. また, このとき E の元について, $a_i = (w_{i-1}, w_i)$ を forward arc, $a_i = (w_i, w_1)$ を backward arc という.

<表記>

この semipath を $P = (w_0, a_1, w_1, \dots, w_{k-1}, a_k, w_k)$ と書き表す.

定義

$N = (D, u, v, c) : \text{ネットワーク}$, $f : N$ のフロー, $P = (w_0, a_1, w_1, \dots, w_{k-1}, a_k, w_k) : D$ の semipath とする. P が以下の条件を満たしているとき, P は f -unsaturated な semipath であるという.

1. $f(a_i) < c(a_i)$ (a_i :forward arc)
2. $f(a_i) > 0$ (a_i :backward arc)

自明な semipath ($P = (w_0)$) は f -unsaturated とする. P が f -unsaturated な u - v semipath であるとき, f -augmenting semipath であるという.

定理 3

$N = (D, u, v, c) : \text{ネットワーク}$ とする. このとき, f が最大フローであることと D 上に f -augmenting な semipath が存在しないことは同値である.

<証明>

(\Rightarrow) f をフローとし, D 上に f -augmenting な semipath P が存在するとする. $P = (w_0, a_1, w_1, \dots, w_{k-1}, a_k, w_k)$ とすると, $w_0 = u$, $w_k = v$ である. P の forward arc a_{i_n} について, $c(a_{i_n}) - f(a_{i_n}) > 0$ であり, $n \leq k < \infty$ であるため, $p_1 = \min\{c(a_{i_n}) - f(a_{i_n}) | a_{i_n} : \text{forward arc}\} > 0$ が存在する. 同様に P の backward arc a_{i_m} についても, $f(a_{i_m})$ であるため, $p_2 = \min\{f(a_{i_m}) | a_{i_m} : \text{backward arc}\} > 0$ が存在する. $p = \min\{p_1, p_2\}$ とすれば,

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + p & \text{if } a \text{ is a forward arc on } P \\ f(a) - p & \text{if } a \text{ is a backward arc on } P \\ f(a) & \text{if } a \notin E(P) \end{cases}$$

は N のフローとなり,

1. $f^+(u) + p = f'^+(u)$ (a_1 :forward arc)
2. $f^+(u) - p = f'^-(u)$ (a_1 :backward arc)

より, $f^+(u) - f^-(u) < f'^+(u) - f'^-(u)$ i.e. $val(f) < val(f')$ であるから, f が最大フローであることに矛盾する. よって, f -augmenting な semipath P は存在しないことがわかる.

(\Leftarrow) f が D 上 f -augmenting な semipath が存在しないような flow とする. このとき, f が最大フローであることを示す. 今, $X = \{x \in V(D) | \exists P : f\text{-unsaturated } u\text{-}x \text{ semipath}\}$ とすると, $u \in X$, $v \notin X$ であるため, $K = [X, \overline{X}]$ はカットとなる. $\forall a \in [X, \overline{X}]$, $\forall b \in [\overline{X}, X]$, $f(a) = f(c)$, $f(b) = 0$ であるから, 系 2 より, f は最大フローである. また, K は最小カットとなっている.

□

3.6 最小フロー最小カット定理

最小フロー最小カット定理

$N = (D, u, v, c) : \text{ネットワーク}$ に対して, 最大フローと最小カットの値は一致する. すなはち, $f : N$ のフロー, $K : N$ のカットに対して,

$$f : \text{最大フロー} \wedge K : \text{最小カット} \iff val(f) = cap(K)$$

<証明>

(\Leftarrow) 系 1 より従う.

(\implies) f : 最大フロー K : 最小カットとする. 定理 3 より, D 上に f -augmenting な semipath は存在せず, $X = \{x \in V(D) \mid \exists P : f\text{-unsaturated } u\text{-}x \text{ semipath}\}$ とすると, $K' = [X, \overline{X}]$ は最小カットとなり,

$$f(a) = \begin{cases} c(a) & \text{if } a \in K' \\ 0 & \text{if } a \in [\overline{X}, X] \end{cases}$$

である. よって, 系 2 より, $val(f) = cap(K') = cap(K)$ となり, 示せた.

□

4 ダイクストラ法

定義

$V (\neq \emptyset)$: 有限集合, E : 有限集合.

$$\text{写像 } f : E \rightarrow V \times V$$

が定まっているとき, (f, V, E) を有向グラフといい, V の元を頂点, E の元を辺という.

$v_1, v_2 \in V$ について, 適当な $e \in E$ が $f(e) = (v_1, v_2)$ あるいは, $f(e) = (v_2, v_1)$ をみたすとき, v_1, v_2 は隣接しているという.

定義

(f, V, E) : 有向グラフとする.

V の有限点列 $(a_i)_{i=0}^k$ について, E の有限列点 $(b_i)_{i=1}^k$ で, 各 $i = 1, \dots, k$ で, $f(b_i) = (a_{i-1}, a_i)$ を満たすものが定まっているとする. このときに,

$$a_0 \xrightarrow{b_1} a_1 \xrightarrow{b_2} \dots \xrightarrow{b_k} a_k$$

を, a_0 から a_k への有向路という. 特に, a_0 を始点, a_k を終点という.

定義

2つの有向グラフ $(f, V, E), (f', V', E')$ が与えられたとして, $V \cap V' = \emptyset, E \cap E' = \emptyset$ を満たすとする. このとき,

$$\mathcal{V} = V \cup V', \mathcal{E} = E \cup E'$$

とおいて, \mathcal{E} から $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ への写像 \mathcal{F} を

$$\mathcal{F}(e) = \begin{cases} f(e) & e \in E \\ f'(e) & e \in E' \end{cases}$$

を定めることで得られる有向グラフ $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ を, (f, V, E) と (f', V', E') の和という.

有向グラフ (f, V, E) が2つのグラフの和として表せないとき, 連結であるという. 任意の $u, v \in V$ について, u から v への有向路が存在するとき, 強連結であるという.

定義

有向グラフ (f, V, E) が任意の $v \in V$ について, $(v, v) \in f(E)$ をみたし, f が単射であるとき, (f, V, E) は単純グラフであるという. 単純グラフ (f, V, E) を単に (V, E) と書くこともある.

定義

(f, V, E) を有向グラフとする. E から \mathbb{R} への写像 w が定まっているとき, (f, V, E, w) を重みつき (有向) グラフといい, w をその重みという.

定義 (最短経路問題)

有向グラフ (f, V, E, w) と, $s \in V$ が与えられたときに, s から各 $v \in V \setminus \{s\}$ への有向路

$$s = a_0 \xrightarrow{b_1} a_1 \xrightarrow{b_2} \cdots \xrightarrow{b_k} a_k = v$$

であって, $\sum_{i=1}^k w(b_i)$ が最小となるようなものを求める.

4.1 ダイクストラ法アルゴリズム

仮定

$$w(b_k) \geq 0 \quad (\forall b_k \in E)$$

アルゴリズム

$\mathcal{P}_0 = \{s\}$: 確定点, $\mathcal{T}_0 = V \setminus \mathcal{P}_0$: 未確定点とおく.

V から $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ への写像 d_0 を

$$d_0(v) = \begin{cases} 0 & (v = s) \\ \min\{w(e) | e \in E, f(e) = (s, v)\} & (\exists e \in E, f(e) = (s, v)) \\ \infty & (otherwise) \end{cases}$$

とする. ここで, $d_0(v_0) = \min\{d_0(v) | v \in \mathcal{T}_0\}$ となるような $v_0 \in \mathcal{T}_0$ を 1 つとる.

$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 \cup \{v_0\}$, $\mathcal{T}_1 = V \setminus \mathcal{P}_1$ とおく.

$$d_1(v) = \begin{cases} d_0(v) & (v \in \mathcal{P}_1) \\ \min\{d_0(p) + \min\{w(e) | e \in E, f(e) = (p, v)\} | p \in \mathcal{P}_1\} & (\exists e \in E, \exists p \in \mathcal{P}_1, f(e) = (p, v)) \\ \infty & (otherwise) \end{cases}$$

ここで, $d_1(v_1) = \min\{d_1(v) | v \in \mathcal{T}_1\}$ となるような $v_1 \in \mathcal{T}_1$ を 1 つとる.

$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \cup \{v_1\}$, $\mathcal{T}_2 = V \setminus \mathcal{P}_2$ とおく.

いま, $\mathcal{P}_i, \mathcal{T}_i$ が定まったとする. ($i \geq 1$)

$$d_i(v) = \begin{cases} d_{i-1}(v) & (v \in \mathcal{P}_i) \\ \min\{d_{i-1}(p) + \min\{w(e) | e \in E, f(e) = (p, v)\} | p \in \mathcal{P}_i\} & (\exists e \in E, \exists p \in \mathcal{P}_i, f(e) = (p, v)) \\ \infty & (otherwise) \end{cases}$$

と定めて, $d_i(v_i) = \min\{d_i(v) | v \in \mathcal{T}_i\}$ なる $v_i \in \mathcal{T}_i$ を 1 つとる. $\mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_i \cup \{v_i\}$, $\mathcal{T}_{i+1} = V \setminus \mathcal{P}_{i+1}$ と定める.

$n = |V| - 1$ に対し, $\mathcal{P}_n = V$ となり終了.

4.2 ダイクストラ法の証明

ダイクストラ法で問題になる点

すべての路を検索していないのに、最短路が求まるのは本当か？

<証明>

帰納法で証明する.

帰納法の仮定

$1 \leq i \leq n$ なる $i \in \mathbb{N}$ において,

" d_{i-1} が s から P_i の点のみを経由して, 各 $v \in P_i$ に到達するための最短経路の長さを与える"

と仮定する.

$v \in P_{i+1}$ を任意にとる. $v \in P_i$ であれば, $d_i(v) = d_{i-1}$ であって, 帰納法の仮定によって, s から v に到達する最短経路の長さは $d_i(v)$.

$v \in P_{i+1} \setminus P_i$ である場合, 任意の $u \in T_i$ に対して,

$$d_i(v) \leq d_i(u)$$

が成立する. s から v への任意の有向路

$$s = a_0 \xrightarrow{b_1} a_1 \xrightarrow{b_2} \dots \xrightarrow{b_k} a_k = v$$

に対し, $d_i(v) \leq \sum_{i=1}^k w(v_i)$ を示せば良い.

- $\{a_0, \dots, a_{k-1}\} \subset P_i$ のとき.

d_i の定義によって,

$$\begin{aligned} d_i(v) &\leq d_{i-1}(a_{k-1}) + w(b_k) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} w(b_i) + w(b_k) \\ &= \sum_{i=1}^k w(b_i) \end{aligned}$$

- $\{a_0, \dots, a_{k-1}\} \not\subset P_i$ のとき.

$a_j \in T_i$ となるような $j (1 \leq j \leq k-1)$ がある.

$$\begin{aligned} d_i(v) &\leq d_i(a_j) \quad (\because a_j \in T_i) \\ &\leq d_{i-1}(a_{j-1}) + w(b_j) \quad (\because \text{def of } d_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} w(b_i) + w(b_j) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &\leq \sum_{i=1}^k w(b_i) \quad (\because w(b_i) \geq 0) \end{aligned}$$

□

5 5 色定理

定義

(V, E) : 平面的グラフが k 彩色可能

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists H : V \rightarrow \mathbb{N} \text{ s.t. } (v_1, v_2 \text{ が隣接} \implies H(v_1) \neq H(v_2)) \text{ かつ } (|H(V)| \leq k)$$

補題 1

連結な単純平面グラフ G が, $n(\geq 3)$ 個の頂点と m 本の辺をもつとき,

$$m \leq 3n - 6$$

<証明>

G の平面描画の面の数を f とする. オイラーの多面体定理より,

$$n - m + f = 2$$

単純性により, 角面は 3 本以上の辺で囲まれている. 全ての辺は高々 2 つの面の境界であるので,

$$3f \leq 2m$$

よって,

$$\begin{aligned} 3f \leq 2m &\iff 3(2 - n + m) \leq 2m \\ &\iff m \leq 3n - 6 \end{aligned}$$

□

補題 2

全ての単純平面的グラフは, 次数 5 以下の点を含む.

<証明>

グラフは連結であるとしてよい.

全ての点の次数が 6 以上であると仮定する. 補題 1 より, 頂点数 n , 辺数 m について,

$$m \leq 3n - 6$$

となる, 一方,

$$6n \leq 2m \quad (\iff 3n \leq m)$$

すると, $3n \leq 3n - 6$ となり, 矛盾

□

5 色定理

全ての単純平面的グラフは、5 彩色可能である。

<証明>

頂点の数に関する帰納法で示す。

(V, E) を、単純平面的グラフとし、その頂点数を n 、辺数を m とする。

$n \leq 5$ のときは明らか。

頂点数 $(n - 1)$ 以下のグラフについては定理が成立すると仮定する。このとき、補題 2 により、 (V, E) には次数 5 以下の点 v が存在する。

1. $\deg(v) \leq 4$ のとき。

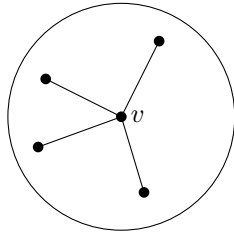


図 4:

頂点 v と、隣接する辺を取り去ったグラフを考える。そのグラフでは、定理が成立する。適当に塗り分けることで、4 点と異なる色を v に与えてやればよい。

2. $\deg(v) = 5$ のとき。

v に隣接する頂点を v_1, \dots, v_5 とおく。 v_1, \dots, v_5 全てが隣接し合っている場合。

K_5 が元のグラフの部分グラフとして現れるが、 K_5 は平面的グラフではないので、元のグラフも平面グラフではない。このとき、元のグラフ (V, E) も平面的ではない。これは矛盾。

よって、 v_1, \dots, v_5 のうち、隣接していない点が存在する。 v_1 と v_3 が隣接していないとする。

辺 vv_1 と vv_3 を縮約してできたグラフの頂点数は、 $n - 1$ 以下なので、定理が成立する。縮約したグラフ

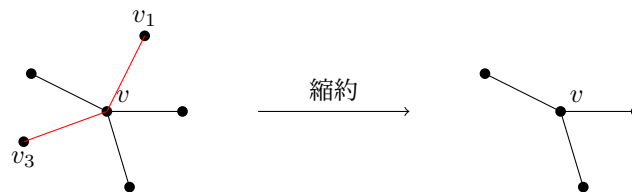


図 5: vv_1 と vv_3 の縮約

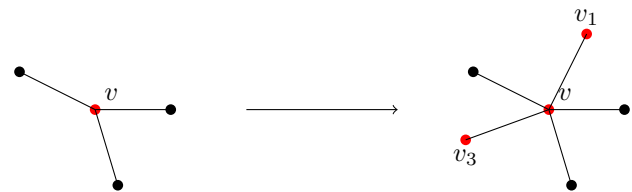


図 6: 元に戻す

で、高々 4 色で 4 つの頂点を塗り分けることができ、元に戻したグラフで v_1, v_3 を v と同じ色で塗れば、 v の周りが高々 4 色。よって、 v を v_1, \dots, v_5 とは異なる色で塗ることができ、定理の成立が示すことができた。

□

第Ⅱ部

平坦折り

6 単純な展開図の平坦折り

以下のようなリボンについて考える.

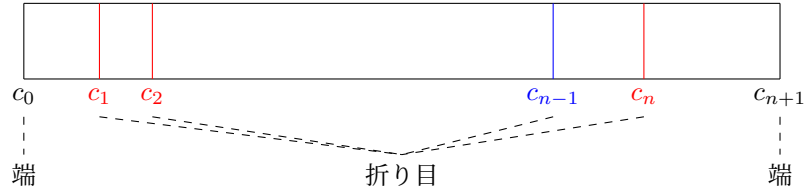


図 7: 折り目の指定されたりボン

定義 (ジグザグ折り (アコーディオン折り))

奇数: 山折り (M), 偶数: 谷折り (V)

… 紙をきちんと段状に積み重ねていくので, 自己交差を起こさない.

段折り可能性と端折り可能性

(c_i, c_{i+1}) のペアが段折り可能

… 2つの連続した折り目 c_i と c_{i+1} に対し, これらに逆の折り方向が割り当てられていて, さらに段折りによって c_i と c_{i+1} の左右関係だけが入れ替わること.

i.e.

$$\begin{cases} (c_i : M \text{ かつ } c_{i+1} : V) \text{ または } (c_i : V \text{ かつ } c_{i+1} : M) \\ |c_{i-1} - c_i| \geq |c_i - c_{i+1}| \leq |c_{i+1} - c_{i+2}| \end{cases}$$

c_{n+1} が端折り可能

… 折られる側が高々同じだけの長さしか持たない.

i.e.

$$|c_{n-1} - c_n| \geq |c_n - c_{n+1}|$$

定義

1次元の山谷付き展開図の上で, 同じ割り当ての折り目が連続する極大な任意の列 c_i, \dots, c_j において,

1. $|c_{i-1} - c_i| \leq |c_i - c_{i+1}|$
2. $|c_{j-1} - c_j| \geq |c_j - c_{j+1}|$

のいずれかが成立するとき, この展開図は束性を持つという.

補題 1

平坦折り可能な全ての 1 次元の山谷付き展開図は束性を持つ。

<証明>

山谷付き展開図の平坦折りを考えて, c_i, \dots, c_j を任意の同じ向きに連続した折り目の極大な列とする。

1. $i = j$ のとき. (i.e. 列が 1 つの折り目しか持たないとき)

c_i の右側の線分が左側以上の長さを持つか, その逆が成立. これは束性の定義を満たす。

2. $i < j$ のとき.

以下の 3 つのいずれかの配置の螺旋構造になる。

(a) (c_{i-1}, c_i) が最も内側の辺, (c_j, c_{j+1}) が最も外側の辺.

(b) (c_{i-1}, c_i) が最も外側の辺, (c_j, c_{j+1}) が最も内側の辺.

(c) 最も外側の辺を共有する 2 つの螺旋構造で, (c_{i-1}, c_i) と (c_j, c_{j+1}) がそれぞれの螺旋の最も内側の辺.

(a) の場合, 螺旋構造に収まるには

$$|c_{i-1} - c_i| \leq |c_i - c_{i+1}|$$

となる必要があり, 束性を持つ. (b),(c) の場合も同様.

□

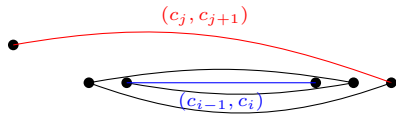


図 8: (a) の場合

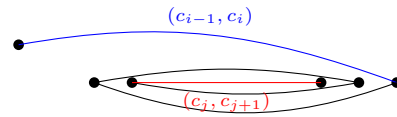


図 9: (b) の場合



図 10: (c) の場合

補題 2

束性を持つ 1 次元の任意の山谷付き展開図には段折り可能なペアか段折り可能な端が存在する。

<証明>

同じ向きに折り目の極大な列の並びを s_1, \dots, s_m とする. 束性の定義より, それぞれの s_i は左端か右端を束ねることができる. 束ねられる端を丸括弧“(,”), 束ねられない端を角括弧“[,”]”で表すことにする。

1. s_1 が左端で束ねられるとき. (i.e. ([, 左端が丸括弧)

c_0 は段折り可能. つまり,

$$|c_0 - c_1| \leq |c_1 - c_2|$$

2. s_m が右端で束ねられるとき. (i.e. ([, 右端が丸括弧)

c_{n+1} は段折り可能. つまり,

$$|c_{n-1} - c_n| \geq |c_n - c_{n+1}|$$

3. 1,2 が不成立.

このとき, 列は $[] [] \dots [] []$ のようになる. それぞれの部分列において, 少なくとも一方の端は束性を表

す. 丸括弧なので, 少なくとも m 個の丸括弧が存在する. ここで, s_i どうしの間に挟まれた線分 (隙間) に注目する. ここで, 少なくとも m 個の丸括弧を $m-1$ 個の隙間に配分する. すると, どこかの隙間で 2 つの丸括弧が背中合わせ (")(" の状態) になっている. これは, 2 つの隣接する列がこれらを繋いでいる線分の部分において, 束性を持っていることを意味している. つまり, 1 本の線分 (c_i, c_{i+1}) がその線分の長さ以上の線分に挟まれていることになり, これは段折りの条件に他ならない.

1~3 より, 端折り可能な端が存在するか, 段折り可能なペアが存在.

□

補題 3

局所的な操作 (端折りと段折り) はどちらも平坦折り可能性を保存する.

<証明>

1. 端折りの場合.

平坦折り可能な山谷付き展開図 P の端の点 c_n が段折り可能であったと仮定する. P の平坦折りを F とする. 以下の図のような状況を考える. この新しい山谷付き展開図 P' は, P の端を切り落としたもので

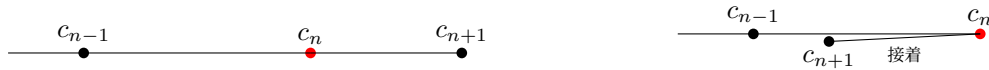


図 11: 端折りでの接着

ある. c_0 から c_n までを F から取り出したものを F' とする. F' は P' の平坦折りである. この F' に $c_n c_{n+1}$ を加えたものを F'' とすれば, これは最初に c_n で段折りを行った P の平坦折りである.

2. 段折りの場合.

平坦折り可能な山谷付き展開図 P の段折り可能なペアを (c_i, c_{i+1}) とする. 対称性から $c_n : M, c_{n+1} : V$ とできる. 左図のような P の平坦折り F を考える. 線分 (c_i, c_{i+1}) は段折りによって反転し, その他は元

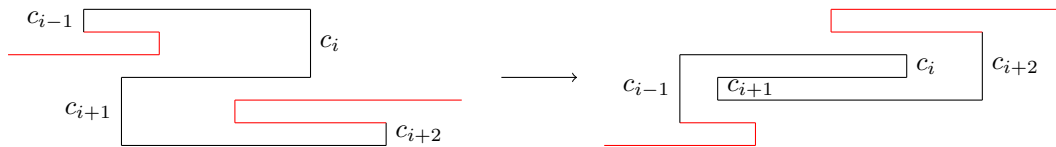


図 12: 段折りでの操作

の向きを保っているという視点で見る. 赤の層を段折りの隙間から追い出せることを示す.

(c_{i-1}, c_i) は, 少なくとも (c_i, c_{i+1}) と同じ長さを持ち, c_i よりも近くに移動を阻むものはないので, この層はそのまま (c_{i+1}, c_{i+2}) の下に移動させることができる. 逆の層も同様.

これにより, (c_i, c_{i+1}) で段折りした P' を平坦折りした F' を構成できた.

□

定理

平坦折り可能な任意の 1 次元山谷付き展開図は，段折りと端折りの列で折ることができる．

<証明>

1. 山谷付き展開図に折り目がない場合．

明らかに成立．

2. n 個の折り目がある場合．

仮定より， P は平坦折り可能なので，補題 1 よりこの展開図は束性を持つ．補題 2 より，局所的な操作は可能である．この操作を実行し，段折り *or* 端折りの部分を接着すれば得られる山谷付き展開図 P' は $n-1$ か $n-2$ の折り目を持つ．補題 3 より，この展開図 P' は平坦折り可能．帰納法により，定理が得られる．

□

7 単頂点展開図の平坦折り可能性

目標

n 個の折り線を持つ平坦折り可能な単頂点の展開図の山谷割り当てが平坦折り可能である必要十分条件を求める.

ここで, 単頂点の展開図とは, 以下の 3 種類を表す.

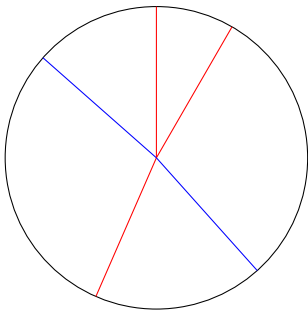


図 13: (a) 平坦: $\sigma = 360^\circ$

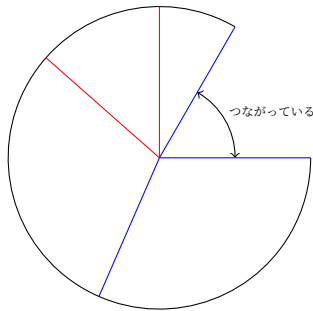


図 14: (b) 円錐: $\sigma < 360^\circ$

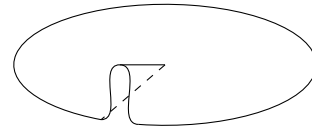


図 15: (c) $\sigma > 360^\circ$

以下, (a),(b) のついでのみ考えていく.

7.1 川崎定理

川崎定理

角度列 $\theta_1 + \dots + \theta_n = 360^\circ$ で表される単頂点展開図が平坦折り可能

$$\iff n : \text{偶数かつ}, \sum_{i:\text{odd}} \theta_i = \sum_{i:\text{even}} \theta_i = 180^\circ$$

補題 1(川崎定理拡張 ver)

角度列 $\theta_1 + \dots + \theta_n \leq 360^\circ$ で表される単頂点展開図が平坦折り可能

$$\iff n : \text{偶数かつ}, \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i = 0^\circ$$

<証明>

(\implies) 折りたたんだ図で考える.

- n : 偶数 であること.

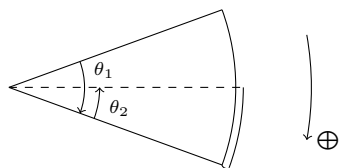


図 16: θ_i と θ_{i+1} は反転する

円弧上の移動を考える. θ_1 上の移動方向を正, θ_2 上の移動方向を負とする. 折り目で反転するので, θ_n 上の移動方向は負である. 正と負は交互に並ぶので, n は偶数.

- 交代和が 0° であること.

円弧上の移動の結果もとの地点に戻るので,

$$\sum_{i:\text{even}} \theta_i = \sum_{i:\text{odd}} \theta_i \quad \therefore \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i = 0^\circ$$

(\impliedby) 山谷割り当てと, 重ね合わせの順序を実際に構成すれば良い.

まず, θ_1 と θ_n の境の折り線で切る. そして, 単純に折り目を山谷交互に折る.

- 2つの端の間に紙の層がない場合.

そのまま切断した折り目を接着して終了.

- 2つの端の間に紙の層がある場合.

\oplus の向きに最大となる折り目を切る. そして, はじめに切った折り線を接着する. すると, 後に切った際にできた端の間には紙の層は存在しない.

\therefore そこで接着して終了.

□

7.2 前川定理

前川定理

角度列 $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 360^\circ$ によって定義される単頂点の平坦折り可能な山谷付き展開図における山の数と谷の数の差はちょうど ± 2 個である。

補題 2(前川定理拡張 ver)

交代和が 0° となる角度列 $\theta_1, \dots, \theta_n$ で定義される単頂点の平坦折り可能な展開図における山の数と谷の数の差はちょうど ± 2 個である。

<証明>

平坦折りした状況で考える。この時の回転角の総和 τ を考える。

時計回りを正とする。折り目における回転は、山: $+180^\circ$ 、谷: -180° であるので

$$180 \times M + (-180) \times V = \tau$$

また、自己交差しない閉路における回転角の総和は $\pm 360^\circ$ であるので

$$\pm 360^\circ = 180 \times M + (-180) \times V$$

$$\therefore \pm 2 = M - V$$

□

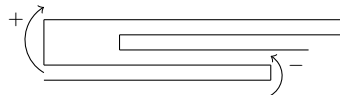


図 17: 折り目の回転の正負の意味

7.3 その他準備

補題 3

$\theta_{i-1} > \theta_i < \theta_{i+1}$ ならば, θ_i の境界の 2 つの折り目は, どんな平坦折り可能な山谷付き展開図においても逆の山谷割り当てである.

<証明>

2 つの隣接する折り目に山折りが与えられたとする. このとき, どんな順序で折っても自己交差を起こしてしまい, 平坦折り不可能.

\therefore 真に極小な角度の境界の 2 つの折り目は逆の山谷割り当て.

□

補題 4

単頂点の山谷付き展開図が平坦折り可能.

\iff 任意の極小な角のまわりで段折した結果が平坦折り可能.

<証明>

\Leftarrow 得られたものが平坦折り可能なので, もとの展開図も平坦折り可能.

\Rightarrow 1 次元の平坦折り可能性の保存と同じ形で示せる.

□

まず, 角度が全て異なる場合について考える.

補題 5

単頂点の山谷付き展開図が平坦折り可能.

\iff 全ての極小な角において, 隣接する折り線の山谷割り当てが逆で, それを段折した結果得られる展開図が平坦折り可能.

<証明>

\Leftarrow 角度が全て異なり, 角度の列は連続しているので, どこかに真に極小な角が存在する. 補題 3 より, この角の境界の折り線は逆の山谷割り当てである. 補題 4 より, ここで段折しても平坦折り可能性は保存される.

\Rightarrow 補題 4 より, もとの展開図も平坦折り可能である.

□

補題 6

単頂点で平坦折り可能な山谷付き展開図を考える.

$\theta_{i-1} > \theta_i = \dots = \theta_{i+k-1} < \theta_{i+k}$ が成立すると仮定.

このとき, 連続する折り目の中で

$$M - V = \begin{cases} \pm 1 & k : \text{even} \\ 0 & k : \text{odd} \end{cases}$$

<証明>

- k が奇数のとき.
回転角の総和は $\pm 0^\circ$ である.
 $\therefore M - V = 0$
- k が偶数のとき.
回転角の総和は, 180° または -180° である.
 $\therefore M - V = \pm 1$

□

7.4 結論

定理

n 個の折り線を持つ平坦折り可能な単頂点の展開図に対して, 山谷割り当てが平坦折り可能.

- \iff
- $n = 2$ で, 2つの角が同じ値で, 2つの折り線が同じ山谷割り当てを持つ.
 - $n \leq 4$ で, 極小な角に隣接する2つの折り線で, 違う山谷割り当てをもち, そこで段折りした結果も平坦折り可能となるものが存在.

<証明>

- $n = 2$ のとき.
 \Leftarrow 明らか.
 \Rightarrow 補題 2 より.
- $n \leq 4$ のとき.
補題 4 より, (\Leftarrow) は O.K. で, (\Rightarrow) は, 段折の存在をいう必要がある.
 - 全ての角が等しい場合.
補題 2 より, $M - V = \pm 2$ なので, 反対の割り当てを持つ2つの連続した折り線が存在.
 - 異なる角度が存在する場合.
全て異なれば, 補題 5 より定理の証明が示せ, 同じ角度が存在する場合も補題 6 を用いることで定理の証明が示せる.

□

7.5 余談

系

単頂点の山谷付き展開図の平坦折り可能性は線形時間で判定できる。

<判定>

1. 交代和の計算. 補題 1 の条件の確認. $O(n)$
2. 極小角のうち, 折り目が逆になっているものをリストに保持. $O(n)$
3. 下記操作をループ. $O(n)$
 - 順に取り出して段折り.
 - 段折の結果できる角と, それに隣接する角が極小か確認. 極小なら折り目は逆かを確認. これらの条件を満たせば, リストに追加.
4. リストが空になったら, 折り線が 0 本もしくは 2 本になっているか確認. 2 本の場合, 同じ折り目か確認. $O(1)$

□

平坦折り可能性判定プログラム (python)

第 III 部

多面体とグラフ

8 H -多面体と V -多面体

定義

集合 X が凸集合であるとは、以下の条件をみたすこと.

$$\forall x, y \in X, \forall t \in [0, 1] \text{ に対し, } tx + (1-t)x \in X$$

定義

$X(\subset \mathbb{R}^d)$:有限集合に対し, X の凸包を以下で定義する.

$$\text{conv}(X) = \cap \{X' \subseteq \mathbb{R}^d | X \subseteq X', X' : \text{凸集合}\}$$

つまり, X の凸包とは, X を含む凸集合の共通部分のことである.

また, 凸包は以下のように書くこともできる.

$$\text{conv}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n | \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} \quad (x_i \in X)$$

同値であることを示す.

<証明の概略>

- $\text{conv}(X)$ は $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n$ を含む.

帰納法で示す.

$x_1, x_2 \in X$ のとき, $0 \leq t \leq 1$ に対し,

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in \text{conv}(X)$$

が成立. (X が凸なので)...

- 逆

X の元 x_1, \dots, x_n に対し, $\{\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n | \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$ は凸で X を含むので成立.

□

定義 (コンパクト集合)

有界な閉集合をコンパクト集合という.

Bolzano-Weierstrass の定理

\mathbb{R}^d 内の任意の有界な数列は, 収束する部分列を持つ.

最小値の定理

X : コンパクト集合 ($\neq \emptyset$). $f: X \rightarrow \mathbb{R}$: X 上の連続関数とする.

このとき, f は X で最小 (大) 値をもつ.

Cauchy-Schwarz の不等式

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

8.1 H -多面体, V -多面体

定義

H -多面体とは

ある \mathbb{R}^d における有限個の閉半空間の交わりで, 有界なもの.

V -多面体とは

\mathbb{R}^d における有限点集合の凸包のこと.

主定理

V -多面体はどれも H 多面体で, H -多面体はどれも V 多面体.

基本的な例

1. 立方体のクラス (d 次元超立方体)

V -多面体としては, $(2^d$ 個の) 点の集合 $\{1, -1\}^d$ の凸包. ($\text{conv}(\{1, -1\}^d)$)

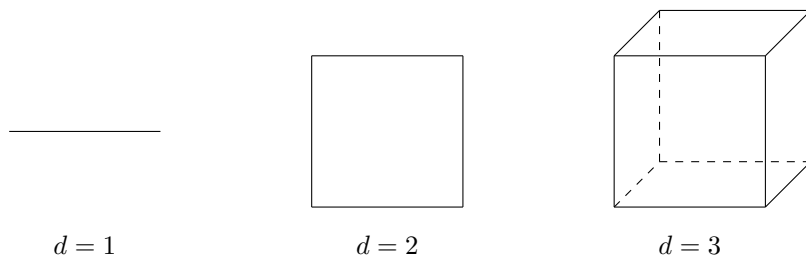


図 18: 立方体

H -多面体としては, $2d$ 個の半空間の交わり. $-1 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, d$)

2. 十次多面体のクラス (d 次元十字多面体)

V -多面体としては, 「座標十字」の凸包.

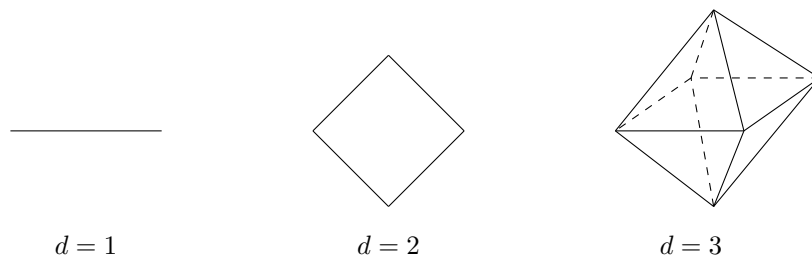


図 19: 十字多面体

i.e. $\text{conv}\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$ (e_i : 標準直交規定ベクトル)

H -多面体としては, 2^d 個の半空間の交わり.

i.e. $\langle \sigma, x \rangle \leq 1$ (σ は $\{1, -1\}^d$ のベクトル全体)

定義 (双対変換)

双対変換とは、写像 D_0 で、点 $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ を

$$\text{超平面 } D_0(a) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x \rangle = 1\}$$

に移し、原点を通らない超平面 $h = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x \rangle = 1\}$ を

$$\text{点 } D_0(h) = a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

に移すもの。

記法 (h が定める閉半空間)

a : 原点でない \mathbb{R}^d における点. h : \mathbb{R}^d における超平面で原点を含まないものとする.

h が定める閉半空間で、原点を含む側を h^- で表す.

$$i.e. h = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x \rangle = 1\} \implies h^- = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x \rangle \leq 1\}$$

定義 (双対集合)

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して、 $X^*: X$ と双対な集合を以下で定義.

$$X^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in X, \langle x, y \rangle \leq 1\}$$

次のことが容易に導かれる.

- $X \subseteq (X^*)^*$ が成立.
 $\because X^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in X, \langle x, y \rangle \leq 1\}, (X^*)^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in X^*, \langle x, y \rangle \leq 1\}$
 であるので、 $\forall x \in X, \forall y \in X^*$ をとれば、 $\langle x, y \rangle \leq 1$ が成立するので、この x は $(X^*)^*$ の元に他ならない.
- X^* は閉凸、原点を含む.
 1. 原点を含むこと.
 $\because \forall x \in X$ に対し、 $\langle x, 0 \rangle = 0 \leq 1$ より.
 2. X^* が閉凸であること.
 \because 閉であることは、

$$X^* = \bigcap_{x \in X} \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \leq 1\}$$

と書け、閉集合の共通部分として書くことができるので閉集合である.

また、凸であることは、 $\forall u, v \in X^*$ をとり、 $\forall t \in [0, 1]$ に対し、 $tu + (1-t)v \in X^*$ を示せば良い.

$\forall x \in X$ をとる. $w = \max\{\langle u, x \rangle, \langle v, x \rangle\}$ とおく. ($w \leq 1 \because u, v \in X^*$)

$$\begin{aligned} \langle tu + (1-t)v, x \rangle &= t\langle u, x \rangle + (1-t)\langle v, x \rangle \\ &\leq tw + (1-t)w \\ &= w \leq 1 \\ \therefore tu + (1-t)v &\in X^* \end{aligned}$$

8.2 分離定理

定理 (分離定理)

$X(\neq \phi) \subset \mathbb{R}^n$: 閉凸集合, $a \notin X$ とする. このとき, $\exists p(\neq 0) \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.t.

1. $\langle p, a \rangle > \alpha$
2. $\langle p, x \rangle \leq \alpha \quad (\forall x \in X)$

<証明>

$x^* : a$ との距離が最小になる点とする.

$r = \|a - x^*\|$ とする. 点 a を中心とする半径 r の球 S を考える.

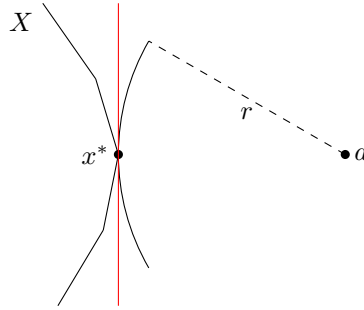


図 20:

$\langle (a - x^*), (a - y) \rangle = r^n \quad (\forall y \in X)$ は, 球 S と点 x^* で接する超平面である.

$\forall x \in X$ に対し,

$$\begin{aligned} \langle (a - x^*), (a - x) \rangle &\geq r^n \iff \langle (a - x^*), a \rangle - \langle (a - x^*), x \rangle \geq r^n \\ &\iff \langle (a - x^*), x \rangle \leq \langle (a - x^*), a \rangle - r^n \\ &< \langle (a - x^*), a \rangle \end{aligned}$$

であるので, p と α を以下のようにおけば条件を満たす.

$$p = a - x^*, \quad \alpha = \langle (a - x^*), a \rangle - r^n$$

残りは, x^* の存在性と一意性を示せば終了.

- 距離が最小になる点の存在性の証明.

S を, 中心 x^* とする開球で, $X' = S \cap X \neq \emptyset$ となるものとする. X' は閉かつ有界ゆえにコンパクトである. $x^* \notin X'$ とする. 写像 $f: X' \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \|x - x^*\|$$

とおく. 最小値の定理から, f は X' で最小値をもち, これがすなはち, x^* との距離が最小となる点が X に存在することを示している.

- 一意性の証明.

$x_1 : a$ との距離が最小となる X の点とする. その距離を d とする.

$$\|x_1 - a\| = \|x_2 - a\| = d$$

なる点 $x_2 \in X$ が存在すると仮定する.

まず,

$$\begin{aligned}\|a - \frac{x_1 + x_2}{2}\| \geq d &\iff \frac{1}{4}\|(a - x_1) + (a - x_2)\|^2 \geq d^2 \\ &\iff \|(a - x_1) + (a - x_2)\|^2 \geq 4d^2\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \langle (a - x_1) + (a - x_2), (a - x_1) + (a - x_2) \rangle \\ &= \|a - x_1\|^2 + \|a - x_2\|^2 + 2\langle a - x_1, a - x_2 \rangle\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\|a - x_1\|^2 &= d^2 \\ \|a - x_2\|^2 &= d^2 \\ \langle a - x_1, a - x_2 \rangle &\leq \|a - x_1\| \cdot \|a - x_2\| = d^2 \quad (\because \text{Cauchy-Schwarz})\end{aligned}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned}d^2 &\leq \langle a - x_1, a - x_2 \rangle \leq d^2 \\ &\therefore \langle a - x_1, a - x_2 \rangle = d^2\end{aligned}$$

さて,

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= \|(a - x_1) + (a - x_2)\| \\ &= \langle (a - x_1) + (a - x_2), (a - x_1) + (a - x_2) \rangle \\ &= \|a - x_1\|^2 + \|a - x_2\|^2 - 2\langle a - x_1, a - x_2 \rangle \\ &= d^2 + d^2 - 2d^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

よって, $x_1 = x_2$

□

8.3 その他準備

補題 1

$C = \text{conv}(X) \subseteq \mathbb{R}^d$ とする. 以下が成立.

$$C^* = \bigcap_{x \in X} D_0(x)^-$$

i.e. 凸包の双対集合は閉半空間の共通部分として書ける.

<証明>

- $C^* \subset \bigcap_{x \in X} D_0(x)^-$ を示す.

$\forall z \in C^*$ をとる. 定義から,

$$z \in \{z \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in C \text{ に対し, } \langle x, z \rangle \leq 1\} \quad \dots (*)$$

さて, $x \in \text{conv}(X)$ のとき, X の元 x_1, \dots, x_n を用いて,

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad (\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1)$$

とかける. 任意の $x \in \text{conv}(X)$ について, $(*)$ が成立するので, ある i に対し, $\lambda_i = 1, \lambda_j = 0 \ (i \neq j)$ としたとき, $\langle x_i, z \rangle \leq 1$ も成立.

$\therefore \forall x_i \in X$ に対し, $\langle x_i, z \rangle \leq 1$ が成立.

$$\begin{aligned} \therefore z \in C^* &\iff z \in \{z \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in C \text{ に対し, } \langle x, z \rangle \leq 1\} \\ &\implies z \in \{z \in \mathbb{R}^d \mid \forall x_i \in C \text{ に対し, } \langle x_i, z \rangle \leq 1\} \\ &\iff z \in \bigcap_{x_i \in X} \{z \in \mathbb{R}^d \mid \langle x_i, z \rangle \leq 1\} \\ &\iff z \in \bigcap_{x \in X} D_0(x)^- \end{aligned}$$

- $C^* \supset \bigcap_{x \in X} D_0(x)^-$ を示す.

さて, これを示すには, 結局は (C) での \implies の部分を逆も成立することを示せば良い.

$x_i, x_j \in X, (i \neq j)$ と, $\forall \in [0, 1]$ に対し,

$$\begin{aligned} \langle tx_i + (1-t)x_j, z \rangle &= t\langle x_i, z \rangle + (1-t)\langle x_j, z \rangle \\ &\leq \{t + (1-t)\} \max\{\langle x_i, z \rangle, \langle x_j, z \rangle\} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

さて, $\text{conv}(X)$ の任意の元 x は, X の元 x_1, \dots, x_n を用いて,

$$x = \sum \lambda_i x_i \quad (\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1)$$

と書けるので, 上の議論の繰り返しで

$$z \in \{z \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in C \text{ に対し, } \langle x, z \rangle \leq 1\} \iff z \in \{z \in \mathbb{R}^d \mid \forall x_i \in C \text{ に対し, } \langle x_i, z \rangle \leq 1\}$$

□

補題 2

$C \subseteq \mathbb{R}^d$: 凸集合とする.

0 が C の内点 $\iff C^*$ が有界.

<準備>

まず, 以下を示す.

$$\cdot \quad D \subseteq C \implies C^* \subseteq D^*$$

$\therefore \forall c \in C^*$ をとる.

$$\forall x \in C \text{ に対して, } \langle c, x \rangle$$

また, $D \subset C$ より,

$$\forall y \in D \text{ に対して, } \langle c, y \rangle$$

も成立する. なので, $c \in D^*$

$$\therefore C^* \subseteq D^*$$

□

<証明>

(\implies) 0 が C の内点であるとき, 凸集合 C は, 各 x_i 軸と正・負の両方とともに交わる. その共有点の座標の大きさの最小値を a とおく.

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

を頂点にもつ凸多面体 (十字多面体) D を考える.

C が凸多面体で, 先の点は全て C に含まれるので, $D \subset C$ である. 準備で示したことから, $C^* \subset D^*$ が成立.

あとは, D の双対集合 D^* が有界であることを示せば良い. x_1 軸に関して,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1 \quad \left\langle \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1$$

をみたす \mathbf{x} は, $-\frac{1}{a} \leq x_1 \leq \frac{1}{a}$.

各軸に関して同様の操作を行うことで, D^* は 1 辺が $\frac{2}{a}$ の d 次元立方体になる.

これは明らかに有界であることから, C^* が有界であることも示される.

(\impliedby) 以下を示す.

原点が C の内点でない $\implies C^*$ は非有界.

分離定理の証明の過程で用いた球 S に接する超平面

$$h = \langle (0 - x^*), (0 - y) \rangle = r^n \quad (\forall y \in X)$$

を考える. h^+ を原点を含まない側の閉半空間とすれば, $h^+ \supset C$ かつ $0 \notin h^+$ である.

補題 2 の証明準備で示した $C \subseteq D \implies D^* \subseteq C^*$ を用いると,

$(h^+)^*$ が非有界

であることを示せば、 C^* も非有界であることがわかる。

ここで、 $-x^*$ は、 h の法線ベクトルのうち、 h^+ の内部の方向でない側へ向かうベクトルである。

$\forall t \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し、半直線 $-tx^* \in (h^+)^*$ を示す。

もし、 $\langle -x^*, x \rangle \geq 1$ なる $x \in h^+$ が存在すると仮定する。

しかし、 $-x^*$ は h の法線ベクトルで、 h^+ に対し外側向きなので、内積の性質から、 h^+ の元 x に対し、 $\langle -x^*, x \rangle < 0$ はなり得ない。

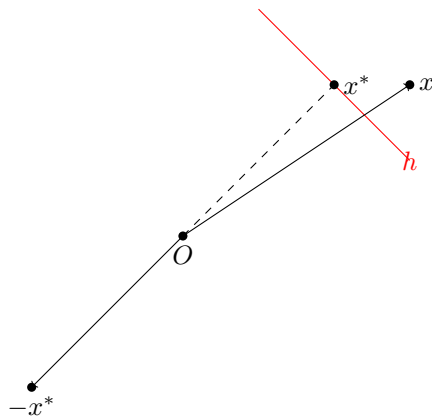


図 21:

よって、 $\forall t \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し、 $\langle -tx^*, x \rangle = t\langle -x^*, x \rangle < 0$

したがって、半直線 $-tx^* \subset (h^+)^*$ であり、 $(h^+)^*$ は非有界。

$\therefore X^*$ も非有界。

□

補題 3

$X \subseteq \mathbb{R}^d$ が原点を含む閉凸集合のとき, $(X^*)^* = X$

<証明>

- $X \subseteq (X^*)^*$ は示した.
- $X \supseteq (X^*)^*$ を示す.

$a \notin X$ をとる. この a が $a \notin (X^*)^*$ をみたすことを示す.

i.e. $a \notin \{a \in \mathbb{R}^d \mid \forall x^* \in X^*, \langle a, x^* \rangle \leq 1\}$ を示す.

i.e. $\forall x^* \in X^*$ に対し, $\langle a, x^* \rangle > 1$ を示す.

これは, $\forall x \in X$ に対し, $\langle x, x^* \rangle \leq 1$ をみたすような x^* に対し, $\langle a, x^* \rangle > 1$ が成り立つことを示せば良い.

さて, X は閉凸集合であり, 分離定理を用いれば,

$$\exists p (\neq 0), \exists \alpha \text{ s.t. } \langle p, a \rangle > \alpha \geq \langle p, x \rangle$$

また, $0 \in X$ から, $\alpha \geq 0$

– $\alpha \neq 0$ のとき.

$p = \alpha x^*$ とおきなおすことで,

$$\begin{aligned} \langle p, a \rangle > \alpha \geq \langle p, x \rangle &\iff \langle \alpha x^*, a \rangle > \alpha \geq \langle \alpha x^*, x \rangle \\ &\iff \alpha \langle x^*, a \rangle > \alpha \geq \alpha \langle x^*, x \rangle \\ &\iff \langle x^*, a \rangle > 1 \geq \langle x^*, x \rangle \end{aligned}$$

より OK.

– $\alpha = 0$ のとき.

$\langle p, a \rangle > \beta > \alpha = 0$ となるような β をとり, 上と同じ操作をすれば良い.

□

8.4 V-多面体と H 多面体の同値性

主定理 (再掲)

V-多面体はどれも H 多面体で, H-多面体はどれも V 多面体.

<証明>

- H-多面体が V-多面体であること.

d に関する帰納法で示す.

– $d = 1$ のとき.

明らか.

– $d \geq 2$ を仮定.

$\Gamma : \mathbb{R}^d$ における閉半空間の有限集合で, $P = \cap \Gamma$ が非空で有界なものとする. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して, $F_\gamma = P \cap \partial\gamma$ は, γ の境界になっている超平面と P との交わり.

非空な F_γ は, どれも次元が $d - 1$ 以下の H-多面体である.

これは, $F_\gamma = P \cap \partial\gamma = (\cap_{\gamma' \in \Gamma \gamma'} \gamma') \cap (\partial\gamma)$ であり, これはつまり, F_γ は超平面 γ 上での閉半空間の共通部分であるから.

帰納法の仮定より, F_γ は有限点集合 $V_\gamma \subset F_\gamma$ の凸包になっている. 以下を示せば良い.

示すこと

$$V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma \text{ としたとき, } P = \text{conv}(V) \text{ であること.}$$

* $P \subset \text{conv}(V)$

$x \in P$ として, x を通るある直線を l とする. $l \cap P$ は線分になっている. この線分の両端を y, z とする. すると,

$$\exists \alpha, \beta \in \Gamma, \text{ s.t. } y \in F_\alpha, z \in F_\beta$$

が成立する.

\therefore) もし, y が $\gamma \in \Gamma$ のどちらの境界にもついていないとすると, y がこの線分の端点であることに矛盾する.

よって, $y \in \text{conv}(V_\alpha)$ かつ $z \in \text{conv}(V_\beta)$ が成立し, $\text{conv}(V_\alpha), \text{conv}(V_\beta) \subset \text{conv}(V_\alpha \cup V_\beta)$ であり, $x = sy + (1-s)z$ ($0 \leq s \leq 1$) とかける (x が線分上より) ので, $x \in \text{conv}(V_\alpha \cup V_\beta)$ が成立. よって, $P \subset \text{conv}(V)$

* $P \supset \text{conv}(V)$

$x \in \text{conv}(V)$ とおけば, $V \subset P$ より明らかに $x \in P$ なので成立.

よって,

$$V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma \text{ としたとき, } P = \text{conv}(V)$$

である.

- V-多面体が H-多面体であること.

有界な V に対して, $P = \text{conv}(V)$ であるとする. また, 0 が P の内点であることを仮定.

補題 1 より, $P^* = \bigcap_{v \in V} D_0(v)^-$. 補題 2 より, これは有界. P^* が H-多面体ゆえ, 先の議論から P^* は V-多面体. さて, 補題 1 より, $(P^*)^*$ は H-多面体. 補題 3 より, $(P^*)^* = P$.

□

9 オイラーの多面体定理

定義

2つの有限集合 $V (\neq \phi)$, E に対し, 写像 $g : E \rightarrow 2^V$ が, 各 $e \in E$ について, $|g(e)| = 1, 2$ を満たすとする. (V, E, G) を, 無向グラフという.

- $|g(e)| = 1 \iff e$ がループ.
- 特に, ループを持たず, g が単射であるようなものを単純グラフという.

定義

(V, E, G) を無向グラフとする. $F : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ を単射とし, G を E の元に対してその始点と終点を結ぶ曲線 $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を対応させる単射とする.

$F(G), G(E)$ は共に有限集合で, 各 $c \in G(E)$ に $\{c(0), c(1)\}$ を対応させる写像を h とすれば, $(F(G), G(E), h)$ は無向グラフとなる. これを, (V, E, g) の描画という.

定義

グラフ (V, E, g) の描画 $(F(G), G(E), h)$ で, $G(E)$ の任意の異なる2元 $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して,

$$c_1((0, 1)) \cap c_2((0, 1)) = \phi$$

が成立するものが存在するとき, (V, E, g) は平面的であるといい, $(F(G), G(E), h)$ を (V, E, g) の平面描画という.

9.1 証明

オイラーの多面体定理

(V, E, g) を連結な平面的グラフの平面描画とする。頂点数 v , 辺数 e , 面数 f について,

$$v - e + f = 2$$

が成立する。

<証明>

辺の数についての帰納法で示す。

- $e = 0$ のときは明らか。
- $e = n$ での定理の成立を仮定する。

$e = n + 1$ のとき, (V, E, g) が閉路がないとき, $e = v - 1, f = 1$ より,

$$v - (v - 1) - 1 = 2$$

閉路を含むときは, 閉路を構成する辺を 1 つ取り去ったグラフを考える。新しくできたグラフは連結で, 辺数は n , 頂点数は v , ジョルダンの閉曲線定理より, 面数は $f - 1$.

$$\therefore v - n + (f - 1) = 2$$

$$\iff v - (n + 1) + f = 2$$

$$\iff v - e + f = 2$$

□

9.2 多面体 ver

オイラーの多面体定理

S^2 に同相な多面体の頂点数 v , 辺数 e , 面数 f について,

$$v - e + f = 2$$

が成立する。

10 シュタイニッツの定理

シュタイニッツの定理

グラフ G が凸多面体として実現可能 $\iff G$ が単純かつ平面的かつ 3 連結

ここでは、以下の定理を認める.

バリンスキーの定理

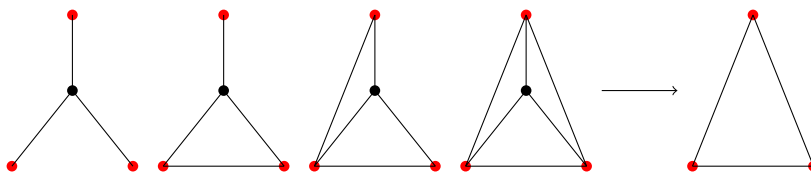
任意の d -多面体 P に対して、そのグラフ $G(P)$ は d -連結である.

10.1 グラフ上での操作

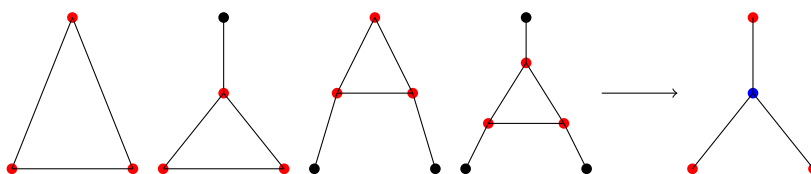
定義 (ΔY 変換)

以下の 2 つの操作をまとめて ΔY 変換という.

$Y - \Delta$ 変換

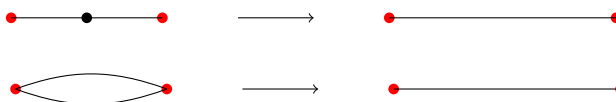


$\Delta - Y$ 変換



定義 (SP 還元)

以下の 2 つの操作をまとめて SP 還元という.



定義 (ΔY 還元)

ΔY 変換をした後に、可能な SP 還元を行うことを ΔY 還元という.

定義

辺の縮約

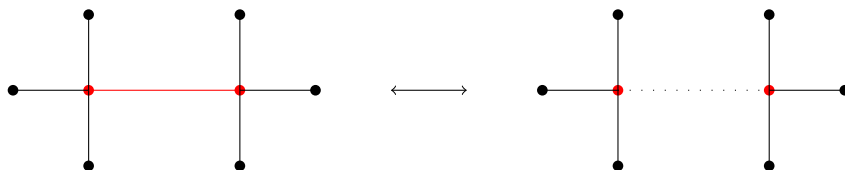


ただし、多重辺や自己ループが生じた際には削除する。

頂点の拡張



辺の除去・追加



ただし、次数 2 の頂点が生じた際には、一方の頂点間の辺は縮約する。

10.2 補題

補題 0

1. ΔY 変換はグラフの 3 連結性を保存する.
2. G : 3 連結平面グラフ, G' : G から ΔY 還元により導かれたグラフとする.

G' が凸多面体として実現可能 $\implies G$ も凸多面体として実現可能

<証明>

1. 背理法により示す.
(Δ - Y 変換)

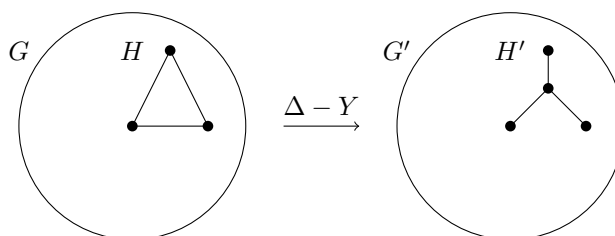


図 22: グラフ上での $\Delta - Y$ 変換

G' が 3 連結ではないと仮定する. つまり, G' の点 v_1, v_2 で, 取り除くと $\forall f_1, f_2 \in G'$ の間にパスが存在しないようになるものが存在するとする. (f_1, f_2 の少なくとも一方は H' 以外の点とする).

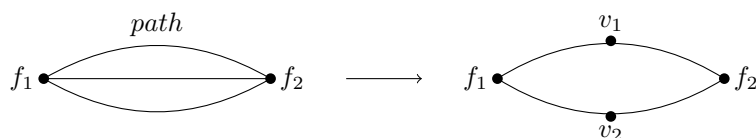


図 23: 3 連結でない

(a) $f_1, f_2 \notin H', v_1, v_2 \notin H'$ のとき

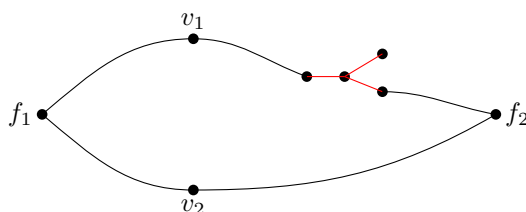


図 24: case 1

G で, v_1, v_2 に対応する点を除いたとき, f_1, f_2 の間にはパスは存在しない. つまり, G は 3 連結ではない.

(b) $f_1, f_2 \notin H', v_1 \notin H', v_2 \in H'$ のとき

v_2 が u_1, u, u_2 のいずれかであるとする、頂点 v_1 を除いたとき、 f_1, f_2 を結ぶパスは、 u_1, u, u_2

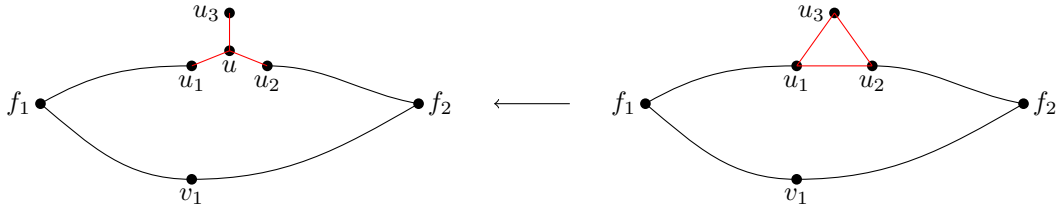


図 25: case 2

を通る。このとき、元のグラフ G では、 u_1, u_2 を必ず通る。ゆえにこの条件のとき、グラフ G は v_2 と u_1 を取り除くことで非連結グラフにすることができる。

(c) $f_1, f_2 \notin H', v_1, v_2 \in H'$ のとき

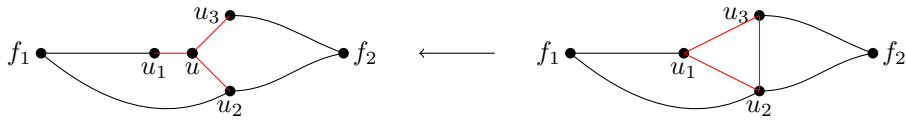


図 26: case 3

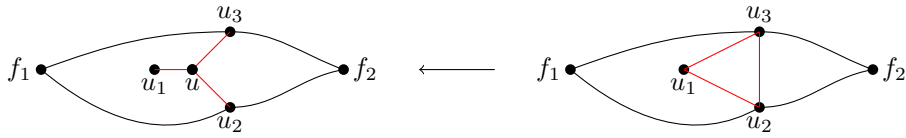


図 27: case 3'

G' で、 u_1, u_2 が v_1, v_2 となると、 G でも対応する点を取り除くことで、非連結なグラフにできる。

u が v_1, v_2 のいずれかのときは、 H' に含まれる 4 点全てが f_1, f_2 を結ぶパス上の点となっている。そのため、 H の 3 点のうちまく 2 点を選択することで、 G で f_1, f_2 の間にパスは存在しない。

(d) $f_1 \notin H', f_2 \in H', v_1, v_2 \notin H'$ のとき

(a) と同様。

(e) $f_1 \notin H', f_2 \in H', v_1 \notin H', v_2 \in H'$ のとき

f_2 が u_1, u_3, u のいずれかとし、 v_2 を u_2 とする。このとき、 v_1 を除いたグラフ上では、 f_1, f_2

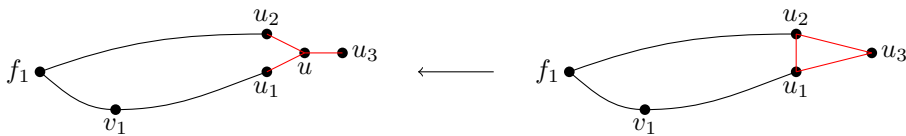


図 28: case 4

を結ぶパスは必ず u_2 を通る。元のグラフ G でも、 v_1 を除くと u_1, u_3 は u_2 を通って f_1 につながる。よって、 G は v_1, u_2 を取り除くことで非連結にできる。

(a)~(e) より, G' が 3 連結でないとは定すると, G も 3 連結ではなく, これは矛盾.

$\therefore \Delta$ -Y 変換は 3 連結性を保存する.

(Y- Δ 変換)

略

2.

(Y- Δ 変換)

次数 3 の頂点を含む三角錐の切り落としに対応.

(Δ -Y 変換)

上の逆操作に対応.

□

補題 1

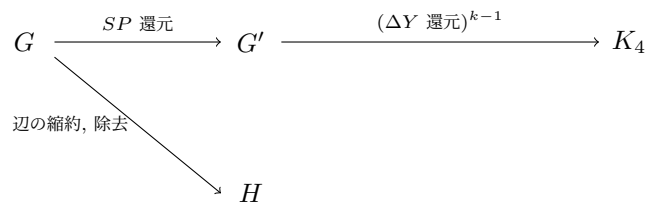
平面グラフ G に有限回 Δ Y 還元を列を施すことで完全グラフ K_4 にできる.

$\implies G$ に有限回辺の縮約と除去を施して得られるグラフ H も同様に K_4 にできる.

<証明>

$G \rightarrow K_4$ の Δ Y 還元列の長さの帰納法で示す.

1. Δ Y 還元操作が SP 還元から始まる時.

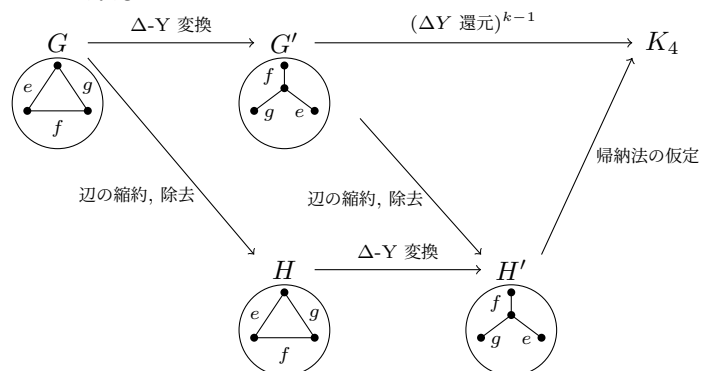


SP 還元は, 辺の縮約と除去の操作の一部である. ゆえに, G' に辺の縮約と除去の列を施して H を得ることができる. 帰納法の仮定より, この H は K_4 に帰着できる.

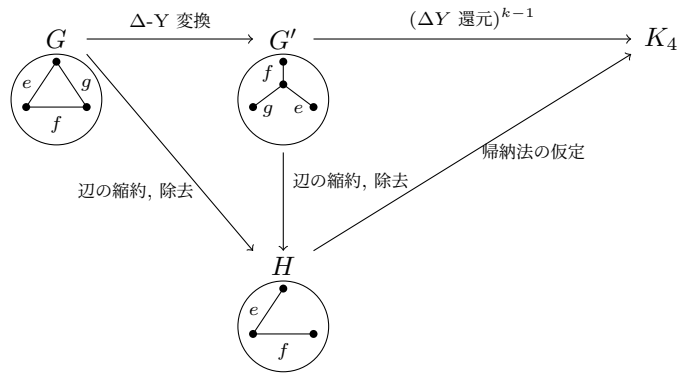
2. Δ -Y 変換から始まる時.

Δ -Y 変換の Δ 部分の 3 辺を e, f, g とおく.

(a) 辺の縮約と除去により, e, f, g 全てがそのまま残るとき.

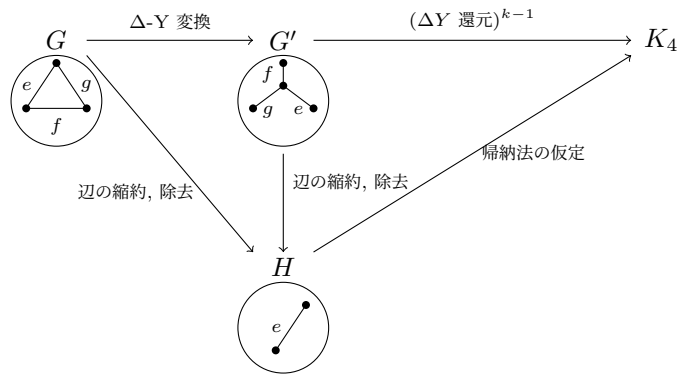


(b) 辺の縮約と除去により, e, f, g のうち, 1 本消えるとき.



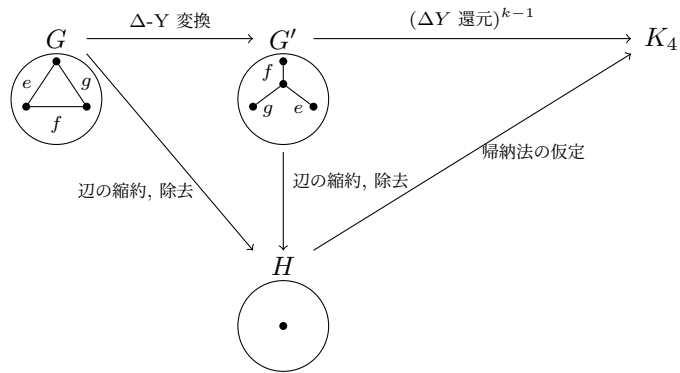
G' から H へは, g の縮約をすればよい.

- (c) 辺の縮約と除去により, e, f, g のうち, 2 本消えるとき.



G' から H へは, e, f の縮約もしくは, e の除去と f の縮約をすればよい.

- (d) 辺の縮約と除去により, e, f, g が消えるとき.



G' から H へは, 3 辺の縮約もしくは, 縮約と除去の組み合わせでできる.

よって, H はそれぞれ帰納法の仮定を用いて K_4 に帰着できる.

3. Y - Δ 変換から始まる時.

2 と同様なので省略.

□

補題 2

格子グラフが ΔY 還元により K_4 に帰着できる.

<証明>

まず, 以下の 2 つの基本変形を考える.

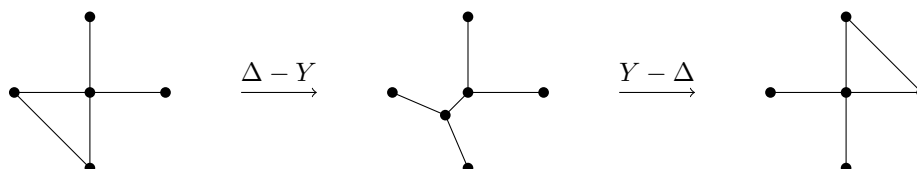


図 29: 基本変形 1

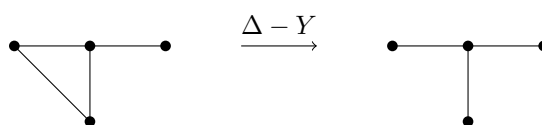


図 30: 基本変形 2

格子グラフの左下隅を見る (四隅であればどこでも良い). この状態に基本変形 1 を有限回繰り返すことで, 緑

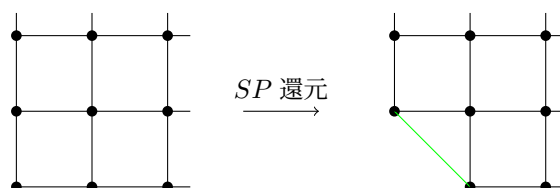


図 31: 隅の SP 還元

の辺を格子の逆の境界に達するまで移動させることができる.

1. 角まで移動する場合

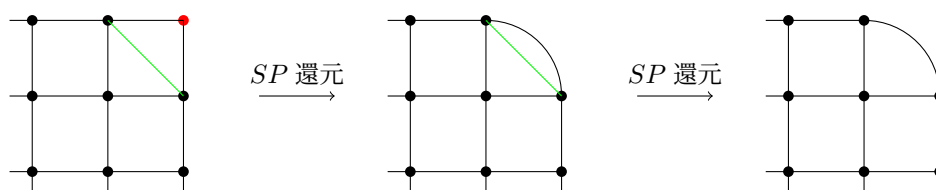


図 32: 隅で辺を消去

2. otherwise



図 33: 辺で辺を消去

これにより, 左下隅の緑の辺を除去することができた.

もう一度左下隅の様子を見る．

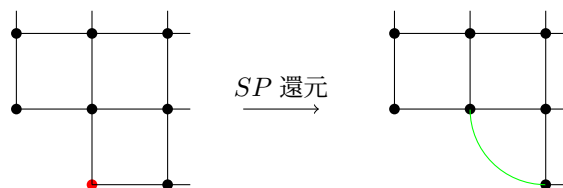


図 34: 繰り返し

緑の辺に対して先の操作を行うことで，この辺も同様に削除できる．

これを繰り返すことで，一番下の行の正方形を削除でき，列に関しても同様で， 3×3 の格子グラフへと帰着できる．

3×3 の格子グラフを以下の操作で完全グラフ K_4 へと帰着できる．

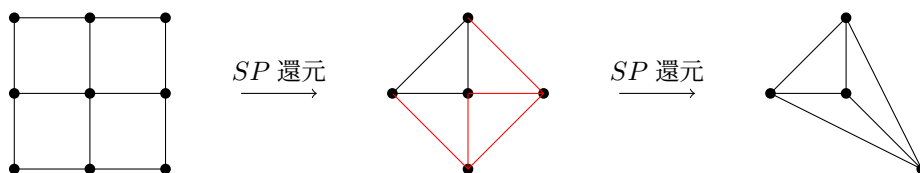


図 35: K_4 への変換

□

補題 3

G が平面グラフ

\implies 格子グラフに有限回の辺の縮約と除去の列を施すことで G を得ることができる．

<証明>

平面グラフ G の，頂点の次数が 3 以下になるように頂点の分割を行う．このグラフを G' とする． G' を有限の格子に埋め込み，格子グラフとして不足している分の辺の追加を施すことで，格子グラフを得ることができる．

この操作の逆操作を行うことで，有限の格子グラフから平面グラフ G を得ることができる．

また，辺の追加，頂点の分割の逆操作はそれぞれ辺の削除と辺の縮約にあたる．

□

10.3 シュタイニッツの定理の証明

シュタイニッツの定理

グラフ G が凸多面体として実現可能 $\iff G$ が単純かつ平面的かつ 3 連結

<証明>

(\Leftarrow)

G が平面グラフであるので補題 3 より、格子グラフに有限回の辺の縮約と除去の列を施したものとして得ることができる。また、補題 2 より、格子グラフは ΔY 還元で K_4 にできる。よって補題 1 から、 G も ΔY 還元で K_4 にできる。 K_4 は四面体として実現が可能であり、これは凸多面体である。まとめると、 K_4 は G から ΔY 還元により導かれるグラフであり、凸多面体として実現可能であるので、補題 0 より、元のグラフ G も凸多面体として実現可能である。

(\Rightarrow)

- 凸多面体は、自己ループや多重辺は存在しないので、 G は単純グラフ。
- 射影の方法により平面グラフにできる。
- バリンスキーの定理より、3 連結である。

□

11 3次元凸多面体の3連結性

定義

G : グラフ, $u, v \in G$ 相異なる頂点とする.

G の u と v の分離集合とは, G の頂点集合 $V(G)$ の $(u, v$ を含まない) 部分集合 S で, u から v への任意のパスが必ず S の元を通るという性質を持つ S のこと.

定義

G : グラフ, $u, v \in V(G)$ ($u \neq v$), $P, P': u$ と v を結ぶパスとする.

P と P' が点素 $\stackrel{\text{def}}{\iff} P$ と P' が端点 u, v 以外で交わらないこと.

11.1 メンガーの定理

定理

連結グラフ G の隣接していない2点 u, v を結ぶ点素なパスの最大数は, u と v の分離集合の点の最小数に等しい.

<証明>

u と v の分離集合 S に k 個の頂点がある場合, 点素なパスは k 本以下である.

$\therefore k+1$ 本以上存在すると仮定する. すると, S のある点が, 2本以上のパスに含まれることになる. これは, パスが点素であることに矛盾する.

G の頂点数に関する帰納法で示す. $|V(G)| = n$ とする. n 未満のグラフでの定理の成立を仮定する.

1. k が最小となるような u と v の分離集合 S の元全てが, いずれも頂点 u もしくは v と隣接している場合.

- $V(G)$ のうち, 大きさ k の u と v の分離集合 S に含まれていない点が存在するとき.

S に含まれていない点 w を除くことで, k の値は変化せず, $|V(G)| = n-1$ となり, 帰納法の仮定より定理の主張は成立する.

- $V(G)$ の次数が, 大きさ k の u と v の分離集合 S のいずれかに含まれているとき.

u から v への任意のパス P は, 1点もしくは2点の頂点を通る. また, k の最小性から, P は大きさ k の u と v の分離集合 S のうち, 高々1点しか含まない.

G から, P の頂点 (端点 u, v を除く) を除き, 隣接する辺を削除して得られるグラフ G' は, $|V(G')| < n$ をみたし, 帰納法の仮定から $k-1$ 本の点素なパスが含まれる. これらのパスと P を合わせることで, G には k 本の点素なパスが得られる.

2. k が最小の u と v の分離集合 S が存在し, S の全ての点が u または v に隣接しているわけではない場合.

G から, S に含まれる全ての頂点と隣接する辺を除くと, 2つの G の部分グラフ U, W が残り, これらは次を満たす.

$$U \cap W = \emptyset, u \in U, v \in W$$

さて, G から U の全ての辺を縮約して得られるグラフを G_1 とする. 縮約して得られた頂点を u' とする.

$|V(G_1)| < |V(G)|$ であり, なおかつ V は明らかに G_1 における最小な u と v の分離集合である. 帰納法の仮定から, G_1 には u' から v への k 本の点素なパスが存在する.

同様に, G から W の全ての辺を縮約して得られるグラフを G_2 に対しても, V は G_2 における最小な u

と v' の分離集合で、 v' から u への k 本の点素なパスが存在する。これらのパスを組み合わせることで、 G の u, v を結ぶ k 本の点素なパスが得られる。

□

11.2 ホイットニーの定理

定理

グラフ G が k 連結

$\iff G$ の任意の 2 頂点に対し、それらを結ぶ k 本の点素なパスが存在

<証明>

(\Leftarrow) G が k -連結ではないと仮定する。すると、ある u と v の分離集合 $S \subset V(G)$ で、 $|S| \leq k-1$ なるものが存在する。つまり、 S の点の最小数は $k-1$ 以下である。メンガーの定理より、 G において u, v 間に k 本の点素なパスをとることができず、矛盾する。

(\Rightarrow) $\forall u, v \in V(G)$ をとる。

1. $uv \notin E(G)$ のとき、メンガーの定理より k 本の点素なパスを取れる。
2. $uv \in E(G)$ のとき、 G から辺 uv を除いたグラフ G' を考える。 G' が $(k-1)$ 連結のとき、メンガーの定理より G' には u, v 間に $k-1$ 本の点素なパスが存在。これに、 uv を加えることで、 k 本の点素なパスができる。

G' が $(k-1)$ 連結であることを示す。

\therefore 背理法で示す。

G' が $(k-1)$ 連結でないと仮定すると、 G' は u, v を分離するような次数 $(k-2)$ 以下の頂点集合 S' をもつ。ここで、 G が k 連結であることより、 $|V(G)| \geq k+1$ であり、ある頂点 $x \in V(G') \setminus S' \setminus \{u, v\}$ が存在する。 x は G において、 u, v のどちらか一方とは隣接していない。 $xu \notin E(G)$ とする。このとき、 $S' \cup \{v\}$ が x と v を分離する。これは、 G の k 連結性に反する。

□

11.3 3次元凸多面体の3連結性

前提条件

G :凸多面体グラフとする.

$f \in F(G)$ が n 角形 $\implies f$ は相異なる n 個の面と辺で隣接

$v \in V(G)$ の次数が $n \implies v$ は相異なる n 個の面と隣接

面 f に隣接する面は全て相異なる.

示すこと

3次元凸多面体のグラフ G が, 任意の2点間に3本の点素なパスを持つこと.

これを示すことで, ホイットニーの定理から, 3次元多面体グラフが3連結であることを示すことができる.

<証明>

$\forall u, w \in V(G)$ の間に, 辺の数が最小になるようにパスを取り, そのパスを P_1 とおく.

1. u と w が同一平面 f 上に存在するとき.

(a) u と w が隣接するとき.

- $P_1 = uw$ である.
 - 面 f の外周で, 辺 uw とは逆周りのパスを P_2 とする.
 - 辺 uw を境に f と隣接する面 f_2 周りの u から w へのパスのうち, uw でない方を P_3 とする.
- これらのパスは点素.

(b) u と w が隣接しないとき.

- P_1 が面 f 周りの uw 間のパスのうちどちらとも点素であればその2本を P_2, P_3 とすれば3本の点素なパスを持つことがわかる.
- そうでない場合.

面 f 周りの uw 間のパスを2本を P_1, P_2 とおく. P_1 を境に, f と隣接する面を f_i とする. この面の外周でを辿り, P_1 と点素なようにパスを取れる. これを P_3 とすれば良い.

2. u と w が同一平面上にはないとき.

P_1 に含まれる頂点のうち, u, w 以外の点を $u \rightarrow w$ の順に v_1, v_2, \dots とおく. 頂点 v_i の次数を j とおくと, v_i 周りに j 個の面が存在する. この面で, 辺で隣接するもの同士の共通点で P_1 上にない点を k_i とおく. 同様の操作を P_1 上の点 v_i で繰り返す.

P_1 はそのままとし, P_2, P_3 を P_1 とは点素に k_i を辿るようにとることができる.

1,2 から, 3次元多面体のグラフ G が任意の2点間に3本の点素なパス P_1, P_2, P_3 を持つことがわかる.

□

12 辺による面の特徴づけ

以下の問題を考える.

問い

多面体グラフ G が与えられたときに, G の面 f を囲う辺というのは, G の描画に依らずに定まるのか.

示すべきこと

G の 2 つの描画 (同型な多面体グラフ) を考えたときに, 辺 e_1, \dots, e_n が面 f を囲っていれば, もう片方の描画では e_1, \dots, e_n に対応する辺が囲う面が一意的に存在する.

Whitney の定理

グラフ G が k 連結

$\iff G$ の任意の 2 点について, これらを結ぶ点素なパスが k 本存在する.

Steinitz の定理

グラフ G が 3 次元の多面体として実現可能

$\iff G$ が単純平面的かつ 3 連結.

以降, 3 次元の多面体グラフのことを単に多面体グラフという.

命題

多面体グラフ $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ が同型であるとする. このとき, $e_1, \dots, e_n \in E$ で囲まれる G の面 f に対し, e_1, \dots, e_n に対応する辺 e'_1, \dots, e'_n で囲まれる G' の面 f' が一意的に存在する.

<証明>

G, G' の面集合を各々 F, F' とする.

$f \in F$ が, $e_1, \dots, e_n \in E$ によって囲まれているとする. $e_i (i = 1, \dots, n-1)$ の端点を v_i, v_{i+1} とし, e_n の端点を v_n, v_1 とし, $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_{n-1}} v_n \xrightarrow{e_n} v_1$ を閉路 C とする. C は長さ 3 以上である.

同型によって各 $v \in V$ は $v' \in V'$ に対応し, 各 $e \in E$ は $e' \in E'$ に対応しているとする.

e'_1, \dots, e'_n で囲まれる $f' \in F'$ が存在しないと仮定し, 矛盾を導く.

同型により, e'_1, \dots, e'_n は G' の閉路. この閉路を C' とする. C' は面の境界ではないことと, G' の連結性によって, C' の内部, 外部には, G' のへんが存在し, C' に接続している. この内からの接続点を v'_i , 外からの接続点を v'_j とする. いま, $v'_i \neq v'_j$ として考えて良い. 実際に, $v'_i = v'_j$ としたときに, この $v'_i (= v'_j)$ を G' から取り去れば, G' が連結ではなくなるから, 3 連結性に反する.

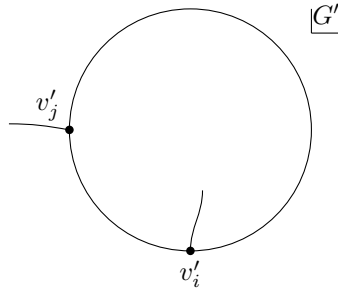


図 36:

さらに, 内の辺が v'_i 以外の点で, C' に接続しないなら, v'_i を取り去れば, 連結性が崩れる. G' の 3 連結性から内の辺は v'_i 以外の C' 上の点に接続する. 外の辺も同様. つまり, G' では, C' の適当な 2 点が C' の内側でのパスで結ばれ, C' の適当な 2 点が C' の外側のパスで結ばれる. この内側のパスの 1 つを P_1 とし, 外側のパスの 1 つを P_2 とする.

1. P_1 or P_2 の長さが 1 のとき. (i.e. P_1 か P_2 が辺のとき.)

G' は単純グラフであるので, 多重辺を含まないから, C' は長さ 4 以上であり, 下図のようになる.

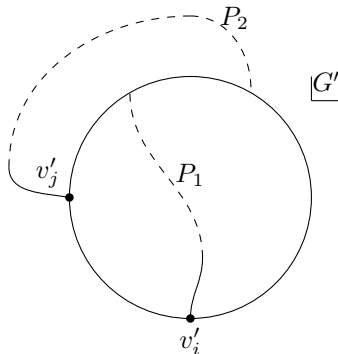


図 37:

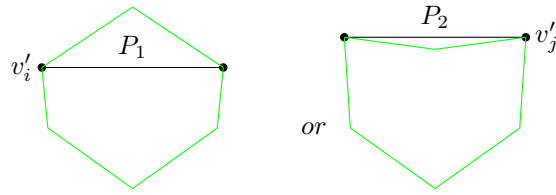


図 38:

ここで、 G においては、 C は f の境界で、平面性により、いずれの場合も

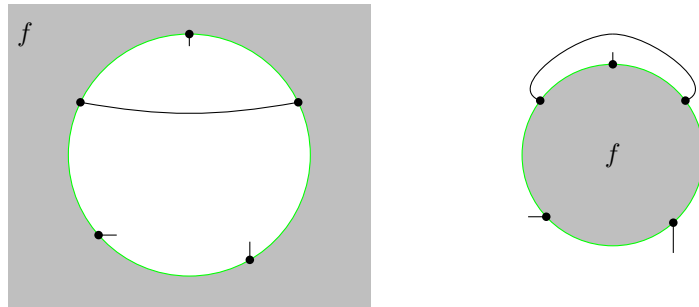


図 39:

となっている。これは、 G の 3 連結性に反する。

2. P_1, P_2 の長さが共に 2 以上のとき。

P_1 と P_2 の道中の点 w'_1, w'_2 をとる。このとき、 C' の頂点集合の全体は、 w'_1, w'_2 の分離集合である。つまり、 w'_1 から w'_2 への任意のパス P は、 C' の頂点を通る。グラフの同型から、 G において w_1 から w_2 へのパスは C を通らなければならない。しかし、 G においては次の図のようになる。

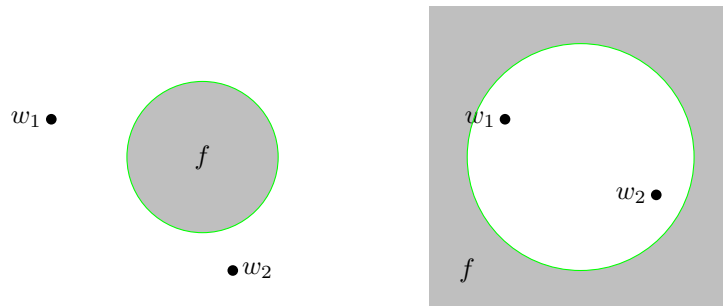


図 40:

Whitney の定理と、 G の 3 連結性から、 G において w_1, w_2 を結ぶ点素なパスは 3 本あるはずである。しかし、 f の領域に辺は存在しないから、 w_1 と w_2 を結ぶ点素なパスは多くても 2 本しかない。これは G の 3 連結性に矛盾する。

以上で、1, 2 いずれの場合も矛盾を生じるため、 e'_1, \dots, e'_n で囲まれる $f' \in F'$ の存在が示せた。

次に、一意性を示す。

e'_1, \dots, e'_n で囲まれる G' の面が 2 つあるとすると、それは $G' = C'$ となるときのみである。このとき、 C' の長さが 3 なら G' は多面体グラフではなく、4 以上なら明らかに 3 連結でない。

これで命題が示せた。

□

第Ⅳ部

多面体

13 コーシーの剛性定理

定義

$P \subset \mathbb{R}^3$ が凸多面体

$\iff \mathbb{R}^3$ 中の有限個の点の集合の凸包.

よって, P が n 個の有限個の頂点 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を持つなら,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

で表される. (ちなみ, $n \geq 5$ のとき $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ の表し方は一意的ではない.)

定義

2 つの凸多面体が合同

$$\iff \exists f: P \rightarrow P' \text{ s.t. } "x, y \in P \implies |x - y| = |f(x) - f(y)|" \text{ かつ } f(P) = P'$$

この条件は, 以下の条件と同値

P は合同変換 (平行移動, 回転, 鏡映の合成) によって P' にうつる.

これにより, 上の定義は本当に合同であることがわかる. (互いに重なり合う.)

補題 1

G :空でない連結単純平面グラフとする.

G の辺を 2 色に塗り分けたとき, $v \in V(G)$ まわりの色の変化の合計 $\sigma(v)$ が 2 以下となるものが存在.

<証明の概略>

明らかに, $\sigma(v)$ は偶数である. V, E, F をそれぞれ頂点, 辺, 面の数とする.

背理法で示す.

$\forall v$ に対し, $\sigma(v) \geq 4$ であると仮定する.

- 符号の変化の総和

$$\Sigma = \sum_v \sigma(v) \geq 4V \quad (1)$$

- 面が $2k, 2k+1$ 角形 \implies 面の周りの符号の変化は高々 $2k$ 回
 f_k を G の中にある k 角形の個数とすると,

$$\Sigma \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + \cdots$$

また, 面と辺の関係で,

$$\begin{aligned} 2E &= F \\ &= 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots \end{aligned}$$

オイラーの多面体定理より,

$$\begin{aligned} V &= 2 + E - F \\ &= 2 + \frac{1}{2}(3f_3 + 4f_4 + \cdots) - (f_3 + f_4 + \cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4V &= 8 + (2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + \cdots) \\ \therefore 4V &> \Sigma \end{aligned}$$

これは (1) に矛盾.

□

定義 (球面多角形)

球面上に描かれたいくつかの大円で囲まれる図形を球面多角形という.

ここでは, 大円を直線, 大円上の弧を線分とみなす.

定理

1. γ を直線 AC と BC の, 点 C における接ベクトルのなす角とする. これは, 面 OAC と面 OBC のなす面角に一致する.
2. 余弦定理が球面多角形上でも成立.
3. 三角不等式も成立.

<証明の概略>

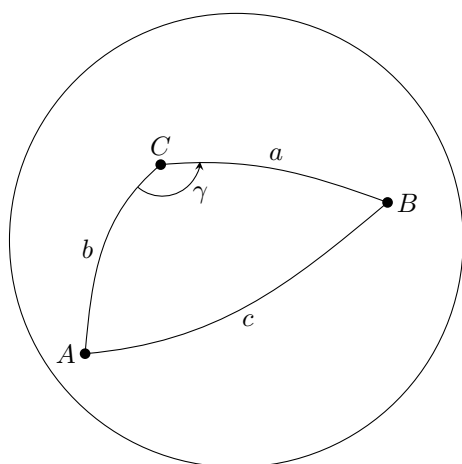


図 41: 球面三角形

余弦定理

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cdot \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \cdot \sin \frac{b}{r} \cdot \cos \gamma$$

cos と sin のテーラー展開

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

代入すると,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} \cdot c^2 r^2 &= \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{r^2}\right) + \frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} \cdot \cos \gamma \\ \Leftrightarrow ab \cos \gamma &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

□

13.1 コーシーのアーム補題

コーシーのアーム補題

Q, Q' : 凸の (平面 or 球面) n 角形とする.

q_1, \dots, q_n : Q の頂点, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: q_1, \dots, q_n の内角, $\overline{q_i q_{i+1}}$: 辺 $q_i q_{i+1}$ の長さとし, Q' も同様に定義する.

仮定: $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対し, $\overline{q_i q_{i+1}} = \overline{q'_i q'_{i+1}}$

$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対し, $\alpha_i \leq \alpha'_i$

結論: $\overline{q_n q_1} \leq \overline{q'_n q'_1}$

(等号成立は, $\forall i \in \{2, \dots, n-1\}$ に対し $\alpha_i = \alpha'_i$)

<証明>

頂点数 n についての帰納法で示す.

- $n = 3$ のとき.

三角形 ABC において, $(0 < \gamma < \pi)$

(平面) 余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

a, b : fixed, c を大きくする $\rightarrow \cos \gamma$: 小さくなる i.e. γ : 大きくなる.

(球面) 同様に, $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$

a, b : fixed, c を大きくする $\rightarrow \cos c$: 小さくなる

$\rightarrow \cos \gamma$: 小さくなる i.e. γ : 大きくなる.

- $n - 1 (\geq 3)$ までの成立を仮定する.

n のときの成立を示せばよい.

- ある番号 $i (= 2, \dots, n)$ に対して, $\alpha_i = \alpha'_i$ なる角が存在する場合.

q_{i-1} と q_{i+1} , q'_{i-1} と q'_{i+1} を線分で結ぶ. この線分で切り落としてできる多角形に帰納法の仮定を適用する.

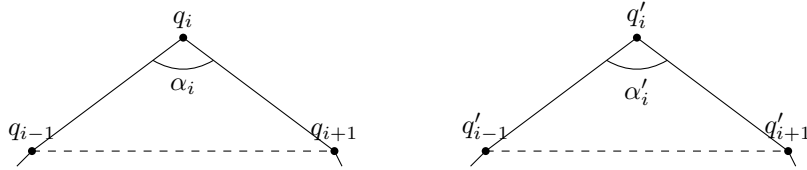


図 42:

- $2 \leq \forall i \leq n$ で, $\alpha_i < \alpha'_i$ が成立する場合.

まず, $\alpha_{n-1} = \alpha'_{n-1}$ となるように, q_{n-1} を適当に回転する. 新たにできた n 角形を Q^* , 頂点を q_1^*, \dots, q_n^* とおく.

- Q^* が凸の場合.

$\overline{q_n^* q_1^*} > \overline{q_n q_1}$ が成立.

Q^* と Q' の対応する頂点 q_{n-1}^* と q_{n-1} は構成方法により $\alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1}^*$

$\therefore Q^*$ と Q' に 1 を適用して $\overline{q_n^* q_1^*} > \overline{q_n^* q_1^*}$

よって, $\overline{q_n q_1} < \overline{q_n^* q_1^*}$

- Q^* が凸でない場合.

この場合, q_{n-1} を回転する途中で, 3 点 q_1, q_2, q_n が一直線上になる瞬間が存在する. この瞬間で改めて Q^* を構成する. このとき, $\overline{q_n^* q_1^*} > \overline{q_n q_1}$ である.

また, q_1^*, q_2^*, q_n^* が一直線上ゆえ, $\overline{q_n^* q_2^*} = \overline{q_1^* q_2^*} + \overline{q_1^* q_n^*}$
 $\therefore \overline{q_1 q_n} < \overline{q_n^* q_2^*} - \overline{q_1^* q_2^*}$

仮定から, $\overline{q_1^* q_2^*} = \overline{q_1' q_2'}$ である.

ここで, 点 q_2^*, \dots, q_n^* を頂点とする凸 $n-1$ 角形と, 点 q_2', \dots, q_n' を頂点とする凸 $n-1$ 角形で

帰納法の仮定を適用して, $\overline{q_2^* q_n^*} < \overline{q_2' q_n'}$
 $\therefore \overline{q_1 q_n} < \overline{q_1' q_n'} - \overline{q_1' q_2'} < \overline{q_1' q_n'}$

□

13.2 コーシーの剛性定理の証明 (前半)

コーシーの剛性定理

2 個の凸多面体が組み合わせ的に等しく、対応するファセットが合同であれば、対応する面角が等しい。
i.e. この多面体は合同。よって特に、凸多面体は剛性を持つ。

<証明>

対応する面角が等しいことを、背理法で示す。

2 個の凸多面体 P, P' の対応する二面角で、等しくないものが存在すると仮定する。そのような 2 面角全てに
 対し、 P' での角が P よりも大きいときに「+」、小さいときに「-」の符号を、2 面角を作る辺に付与する。

このとき、多面体 P の平面グラフであって、対応する辺に符号が付いているものだけを残したグラフは空ではない。

ここで補題 1 を用いると、ある頂点 $v \in P$ であって、 $\sigma(v)$ が 2 以下 (*i.e.* 0 or 2) のものが存在する。

この頂点 v に対して、 v を中心とし、小さな半径 ϵ の球 S_ϵ を P と交わらせ、 v と対応する頂点 $v' \in P'$ でも
 v' を中心とし、同じ半径の球 S_ϵ を P' と交わらせる。

このとき、 $Q = P \cap S_\epsilon, Q' = P' \cap S_\epsilon$ は、球面多角形であり、凸であり、対応する辺の長さが等しくなっている。

ここで、 Q, Q' の各頂点における角と、対応する P, P' の 2 面角は一致するので、 v まわりにつけていた符号を
 そのまま Q に付け替えてもよい。

v の取り方により、 Q の角には少なくとも 1 つの符号がついていて、 Q のまわりの符号の変化の合計が 0 or 2
 になる。

1. $\sigma(v) = 0$ のとき。

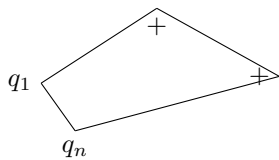


図 43:

Q には + の符号のみがついているとできる。

アームの補題によって、 $\overline{q_1 q_n} < \overline{q'_1 q'_n}$

しかしこれは、 $\overline{q_1 q_n} = \overline{q'_1 q'_n}$ に矛盾

2. $\sigma(v) = 2$ のとき。

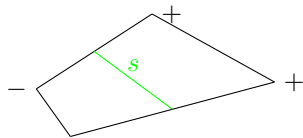


図 44:

Q に、+、- の符号を分けるように、ある辺の
 中点を結んだ線を引くことができる。この線分
 を s とすると、 Q は s によって二つの凸な球面
 多角形 Q^+, Q^- に分けることができる。

Q' でも同様にして、 s' により Q'^+, Q'^- に分離する。

Q^+ と Q^- にアームの補題を用いると、 $\overline{s} < \overline{s'}$

Q'^+ と Q'^- にアームの補題を用いると、 $\overline{s} > \overline{s'}$

これは矛盾。

□

13.3 コーシーの剛性定理の証明 (後半)

P と P' が合同であることを示す.

<証明>

凸多面体 P は n 個の頂点 $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^3$ を持ち, 同じく凸多面体 P' はそれに対応する n 個の頂点 $\{v'_1, \dots, v'_n\} \subset \mathbb{R}^3$ を持つとする. このとき,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

$$P' = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda'_i v'_i \mid \lambda'_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda'_i = 1 \right\}$$

で表される.

P と P' がグラフ同型, 面合同, 2 面角が等しい

1. $\implies P$ と P' は $\forall i \neq j, |v_i - v_j| = |v'_i - v'_j|$

2. $\implies P$ と P' は合同

の順で示す.

1. P と P' がグラフ同型, 面合同, 2 面角が等しい $\implies P$ と P' は $\forall i \neq j, |v_i - v_j| = |v'_i - v'_j|$ を示す.

(a) $v_i, v_j (i \neq j)$ が同一平面上にある場合.

$v_i, v_j \in P$ に対応する P' の点は v'_i, v'_j で, 面合同なので, $|v_i - v_j| = |v'_i - v'_j|$

(b) v_i と $v_j (i \neq j)$ が 2 つの面でつながっている場合.

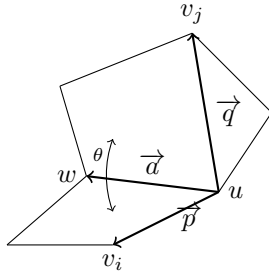


図 45: 2 面角 θ

2 つの面が辺 uw を共有するとする.

$\vec{d} = w - u, \vec{p} = v_i - u, \vec{q} = v_j - u$ とおく.

P' でも対応して, $u', w' \in P', \vec{d}', \vec{p}', \vec{q}'$ をとる.

$|\vec{p} - \vec{q}| = |\vec{p}' - \vec{q}'|$ を示す.

$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q}$ で,

面合同より $|\vec{p}|^2 = |\vec{p}'|^2, |\vec{q}|^2 = |\vec{q}'|^2$ なので, $\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{p}' \cdot \vec{q}'$ を示せば良い.

2 面角 θ を, $\vec{d}, \vec{p}, \vec{q}$ を用いて表す. \vec{d} との法線ベクトルは

$$\vec{d} \cdot (\vec{p} + s\vec{d}) = 0 \quad \left(s = \frac{\vec{d} \cdot \vec{p}}{|\vec{d}|^2} \right)$$

$$\vec{d} \cdot (\vec{q} + t\vec{d}) = 0 \quad \left(t = \frac{\vec{d} \cdot \vec{q}}{|\vec{d}|^2} \right)$$

より, $\vec{n}_1 := \vec{p} + s\vec{d}, \vec{n}_2 := \vec{q} + t\vec{d}$ となる.

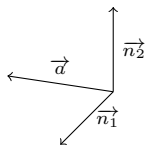


図 46:

P と P' の対応する内積は等しいことに注意すると,

$(|\vec{d} - \vec{p}|^2 = |\vec{d}|^2 + |\vec{p}|^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{p}$ より, $\vec{d} \cdot \vec{p} = \vec{d}' \cdot \vec{p}'$)

\vec{a} の法線ベクトルは, $\vec{n}_1 := \vec{p} + s\vec{a}, \vec{n}_2 := \vec{q} + t\vec{a}$ よって,

$$\begin{aligned}\cos \theta = \cos \theta' &\implies \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{\vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2'}{|\vec{n}_1'||\vec{n}_2'|} \\ &\implies (\vec{p} + s\vec{a}) \cdot (\vec{q} + t\vec{a}) = (\vec{p}' + s\vec{a}') \cdot (\vec{q}' + t\vec{a}') \\ &\implies \vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{p}' \cdot \vec{q}' \\ &\quad \therefore |\vec{p} - \vec{q}| = |\vec{p}' - \vec{q}'| \iff |\vec{v}_i - \vec{v}_j| = |\vec{v}_i' - \vec{v}_j'|\end{aligned}$$

(c) v_i と $v_j (i \neq j)$ が n 個の面でつながっている場合.

n に関する帰納法で示す.

- $n = 2$ のときは, (b) により成立.

- $n - 1$ での成立を仮定する.

このとき, $n - 1$ 枚目の面の頂点のうち適当に, 3 点 $v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3} \in P$ を選ぶと, 仮定より

$$|v_i - v_{k_l}| = |v_i' - v_{k_l}'| \quad (l = 1, 2, 3)$$

で, $n - 1$ 枚目の面は互いに合同なので,

$$|v_{k_p} - v_{k_q}| = |v_{k_p}' - v_{k_q}'| \quad (1 \leq p, q \leq 3, p \neq q)$$

よって, 四面体 $v_i v_{k_1} v_{k_2} v_{k_3}$ と四面体 $v_i' v_{k_1}' v_{k_2}' v_{k_3}'$ は合同 (2 で示す) なので, 対応する 2 面角は等しい.

また, (a), (b) より, $|v_j - v_{k_l}| = |v_j' - v_{k_l}'| \quad (l = 1, 2, 3)$ なので, 四面体 $v_j v_{k_1} v_{k_2} v_{k_3}$ と四面体 $v_j' v_{k_1}' v_{k_2}' v_{k_3}'$ も合同で対応する 2 面角は等しい.

よって, 平面 $v_i v_{k_2} v_{k_3}$ と平面 $v_j' v_{k_2}' v_{k_3}'$ のなす角 θ と, それに対応する θ' は等しい.

よって, (b) と同じ議論により, $|v_i - v_j| = |v_i' - v_j'|$

(a)~(c) より, $\forall i \neq j$ に対し, $|v_i - v_j| = |v_i' - v_j'|$

2. " P と P' で $\forall i \neq j, |v_i - v_j| = |v_i' - v_j'| \implies P$ と P' は合同"を示す.

等長写像 $f: P \rightarrow P'$ が存在して, $f(P) = P'$ であることを示せば良い.

$f: P \rightarrow P'$ を $P \ni x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i' = x' \in P'$ で定める.

$\forall x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i' \in P'$ は, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i'$ と表されるので, 明らかに $f(P) = P'$
 $x, y \in P \implies |x - y| = |f(x) - f(y)|$ を示す.

$x, y \in P$ を $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i, y = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ で表すと, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_i', f(y) = \sum_{i=1}^n b_i v_i'$ となる.

$$\begin{aligned}|v_i - v_j| = |v_i' - v_j'| &\iff |v_i - v_j|^2 = |v_i' - v_j'|^2 \\ &\iff |v_i|^2 - 2\langle v_i, v_j \rangle + |v_j|^2 = |v_i'|^2 - 2\langle v_i', v_j' \rangle + |v_j'|^2\end{aligned}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= \left| \sum_{i=1}^n a_i v_i - \sum_{i=1}^n b_i v_i \right|^2 \\
&= \left| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) v_i \right|^2 \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right|^2 \\
&= (\lambda_1^2 |v_1|^2 + \lambda_2^2 |v_2|^2 + \cdots) + (2\lambda_1 \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \cdots) \\
&= \{\lambda_1(-\lambda_2 - \lambda_3 - \cdots) |v_1|^2 + \lambda_2(-\lambda_1 - \lambda_3 - \cdots) |v_2|^2 + \cdots\} + (2\lambda_1 \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \cdots) \\
&= -\lambda_1 \lambda_2 (|v_1|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle + |v_2|^2) + \cdots
\end{aligned}$$

同様に,

$$|f(x) - f(y)|^2 = -\lambda_1 \lambda_2 (|v'_1|^2 - \langle v'_1, v'_2 \rangle + |v'_2|^2) + \cdots$$

よって,

$$|x-y|^2 = |f(x) - f(y)|^2 \iff |x-y| = |f(x) - f(y)|$$

$\therefore P$ と P' は合同.

□

14 ふいご予想

前提条件

多面体の面は全て三角形分割されているとする.

以下の定理を示す.

ふいご予想

柔軟な多面体は, 柔軟な動作を通じて常に体積が一定.

定義

辺 $e = (P, Q)$ に対し, e と P , e と Q は接続しているという.

定義

閉路 L が空でない

$\iff L$ が多面体 P で面を形成する.

定義

多面体 P がクラス K_0 である

$\iff P$ の頂点で, 空な 3 本の辺からなる閉路に接続しないものが少なくとも 1 つは存在する.

e.x.

P が次数 3 の頂点を持つ

$\implies P$ はクラス K_0 .

14.1 ケイリー・メンガー方程式

ケイリーメンガー方程式

$x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}^4$, $d_{ij} = \|x_i - x_j\|$ とする. x_1, \dots, x_5 は 3 次元の部分アフィン空間の元とする.
このとき, 以下が成立する.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ 1 & d_{51}^2 & d_{52}^2 & d_{53}^2 & d_{54}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

<証明>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2x_{11} & -2x_{12} & \cdots & \|x_1\|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -2x_{51} & -2x_{52} & \cdots & \|x_5\|^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \|x_1\|^2 & \cdots & \|x_5\|^2 \\ 0 & x_{11} & \cdots & x_{51} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とおく. すると,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \|x_1 - x_1\|^2 & \|x_1 - x_2\|^2 & \cdots & \|x_1 - x_5\|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \|x_5 - x_1\|^2 & \|x_5 - x_2\|^2 & \cdots & \|x_5 - x_5\|^2 \end{pmatrix}$$

ここで, A の第 5 列目, B の第 5 行目が 0 なので,

$$|A| = 0, |B| = 0, |AB| = \Delta$$

である.

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= |AB| \\ &= |A||B| = 0 \end{aligned}$$

□

14.2 ケイリー・メンガーの方程式の変形

ケイリー・メンガーの方程式を、次の補題で使うために変形を行う．

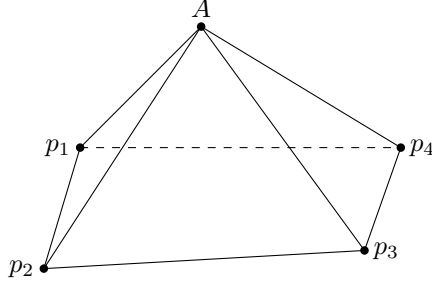


図 47: 四面体

左のような 5 点に対し、ケイリー・メンガーの方程式は以下で表すことができる．

ここで、 $l_{ij} = d_{ij}^2$ とする．

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A3} & l_{A4} \\ 1 & l_{1A} & 0 & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 1 & l_{2A} & l_{21} & 0 & l_{23} & l_{24} \\ 1 & l_{3A} & l_{31} & l_{32} & 0 & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & l_{41} & l_{42} & l_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ここで、 $x = l_{13}, y = l_{24}$ とおく．

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A3} & l_{A4} \\ 1 & l_{1A} & 0 & l_{12} & x & l_{14} \\ 1 & l_{2A} & l_{21} & 0 & l_{23} & y \\ 1 & l_{3A} & x & l_{32} & 0 & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & l_{41} & y & l_{43} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1 & 0 & l_{A1}+0 & l_{A2}+0 & l_{A3}+0 & l_{A4}+0 \\ 1 & l_{1A} & 0+0 & l_{12}+0 & 0+x & l_{14}+0 \\ 1 & l_{2A} & l_{21}+0 & 0+0 & l_{23}+0 & 0+y \\ 1 & l_{3A} & 0+x & l_{32}+0 & 0+0 & l_{34}+0 \\ 1 & l_{4A} & l_{41}+0 & 0+y & l_{43}+0 & 0+0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ l_{1A} \\ l_{2A} \\ l_{3A} \\ l_{4A} \end{pmatrix}, \delta_{3.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ l_{A1} \\ 0 \\ l_{21} \\ 0 \\ l_{41} \end{pmatrix}, \delta_{3.2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_{4.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ l_{A2} \\ l_{12} \\ 0 \\ l_{32} \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_{4.2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \\ \delta_{5.1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ l_{A3} \\ 0 \\ l_{23} \\ 0 \\ l_{43} \end{pmatrix}, \delta_{5.2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_{6.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ l_{A4} \\ l_{14} \\ 0 \\ l_{34} \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_{6.2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおく．すると,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = & |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.1} \delta_{5.1} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.1} \delta_{5.1} \delta_{6.2}| \\
& + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.1} \delta_{5.2} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.1} \delta_{5.2} \delta_{6.2}| \\
& + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.2} \delta_{5.1} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.2} \delta_{5.1} \delta_{6.2}| \\
& + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.2} \delta_{5.2} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.1} \delta_{4.2} \delta_{5.2} \delta_{6.2}| \\
& + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.1} \delta_{5.1} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.1} \delta_{5.1} \delta_{6.2}| \\
& + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.1} \delta_{5.2} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.1} \delta_{5.2} \delta_{6.2}| \\
& + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.2} \delta_{5.1} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.2} \delta_{5.1} \delta_{6.2}| \\
& + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.2} \delta_{5.2} \delta_{6.1}| + |\delta_1 \delta_2 \delta_{3.2} \delta_{4.2} \delta_{5.2} \delta_{6.2}|
\end{aligned}$$

となる．上の式の第 1 項から順に $\Delta_1, \dots, \Delta_{16}$ とおく．

ここで，簡単な計算により以下を確認できる．

$$\begin{aligned}
\Delta_3 = \Delta_9 = x & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A4} \\ 1 & l_{2A} & l_{21} & 0 & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & l_{41} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
\Delta_2 = \Delta_5 = x & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A3} \\ 1 & l_{2A} & 0 & l_{12} & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} & 0 \\ 1 & l_{4A} & l_{14} & 0 & l_{43} \end{vmatrix} \\
\Delta_8 = \Delta_{14} = xy^2 & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A3} \\ 1 & l_{1A} & 0 \end{vmatrix} = xy^2(l_{1A} - l_{3A}) \\
\Delta_{12} = \Delta_{15} = x^2y & (l_{2A} + l_{4A}) \\
\Delta_{16} = & -x^2y^2 \\
\Delta_{11} = & -x^2(l_{2A} - l_{4A})^2 \\
\Delta_6 = & -y^2(l_{1A} - l_{3A})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_4 + \Delta_7 = xy & \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} \\ 1 & l_{4A} & l_{41} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A4} \\ 1 & l_{2A} & l_{21} & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{34} \end{vmatrix} \right) \\
\Delta_{10} + \Delta_{13} = xy & \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A3} & l_{A4} \\ 1 & l_{1A} & 0 & l_{14} \\ 1 & l_{2A} & l_{23} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A2} & l_{A3} \\ 1 & l_{1A} & l_{12} & 0 \\ 1 & l_{4A} & 0 & l_{43} \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}$$

また, $p = l_{12}, q = l_{14}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\Delta_3 = \Delta_9 &= x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A4} \\ 1 & l_{2A} & p & 0 & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & q & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A4} \\ 1 & l_{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A2} & l_{A4} \\ 1 & l_{3A} & l_{32} & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & 0 & 0 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A2} & l_{A4} \\ 1 & l_{2A} & 0 & 0 \\ 1 & l_{3A} & l_{32} & l_{34} \end{vmatrix} \right\} \\
\Delta_2 = \Delta_5 &= y \left\{ 2pq l_{3A}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A3} \\ 1 & l_{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} & 0 \\ 1 & l_{4A} & 0 & 0 & l_{43} \end{vmatrix} - p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A3} \\ 1 & l_{3A} & 0 & 0 \\ 1 & l_{4A} & 0 & l_{43} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A2} & l_{A3} \\ 1 & l_{2A} & 0 & 0 \\ 1 & l_{3A} & l_{32} & 0 \end{vmatrix} \right\} \\
\Delta_4 + \Delta_7 &= \Delta_{10} + \Delta_{13} \\
&= xy \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} \\ 1 & l_{4A} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A4} \\ 1 & l_{2A} & 0 & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{34} \end{vmatrix} - p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A4} \\ 1 & l_{3A} & l_{34} \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A2} \\ 1 & l_{3A} & l_{32} \end{vmatrix} \right\} \\
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1} & l_{A2} & l_{A3} & l_{A4} \\ 1 & l_{1A} & 0 & p & 0 & q \\ 1 & l_{2A} & p & 0 & l_{23} & 0 \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{32} & 0 & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & q & 0 & l_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2pq \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A2} & l_{A4} \\ 1 & l_{3A} & l_{32} & 0 \\ 1 & l_{4A} & 0 & l_{34} \end{vmatrix} - p^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A3} & l_{A4} \\ 1 & l_{3A} & 0 & l_{34} \\ 1 & l_{4A} & l_{43} & 0 \end{vmatrix} - q^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A2} & l_{A3} \\ 1 & l_{2A} & 0 & l_{23} \\ 1 & l_{3A} & l_{32} & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

さて, $-\Delta = 0$ から, 次を得る. ($l_A = (l_{1A}, l_{2A}, l_{3A}, l_{4A}, l_{23}, l_{34})$)

$$\begin{aligned}
-\Delta &= -\Delta_{16} - (\Delta_{12} + \Delta_{15}) - \Delta_{11} \\
&\quad - (\Delta_8 + \Delta_{14}) - (\Delta_4 + \Delta_7 + \Delta_{10} + \Delta_{13}) - (\Delta_3 + \Delta_9) \\
&\quad - \Delta_6 - (\Delta_2 + \Delta_5) - \Delta_1 \\
&= x^2(y^2 + a_1(l_A)y + b_1(l_A)) \\
&\quad + x(a_2(l_A)y^2 + (b_2(l_A)p + b_3(l_A)qb_4(l_A))y + (b_5(l_A)p + b_6(l_A)q + b_7(l_A))) \\
&\quad + b_8(l_A)y^2 + (a_3(l_A)pq + b_9(l_A)p + b_{10}(l_A)q + b_{11}(l_A))y \\
&\quad + a_4(l_A)p^2 + a_5(l_A)q^2 + b_{12}(l_A)pq + b_{13}(l_A)p + b_{14}(l_A)q + b_{15}(l_A) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ここで, a_i は 0 ではない値で, b_i は辺の長さにより 0 になりうる値とおいた.

$p = l_{12}, q = l_{14}$ より, a_i, b_i を l の有理係数多項式とし, 係数を省けば, 以下の等式を得る.

$$x^2(y^2 + ay + b) + x(ay^2 + by + b) + (by^2 + by + b) = 0$$

14.3 補題

定理

P : 多面体, l_k ($1 \leq k \leq e$) : 辺長とする.

P のみに依存する多項式 $Q(V)$ で, 以下を満たすものが存在する.

$$Q(V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + \cdots + a_N(l) = 0$$

ここで,

$$l = (l_1^2, \dots, l_e^2)$$

$a_i(l)$: l の有理係数多項式

c.f. (ヘロンの公式)

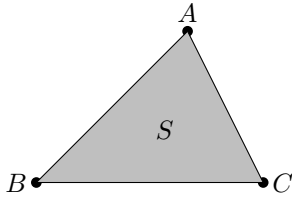


図 48: 三角形

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

c.f. (オイラーの四面体公式)

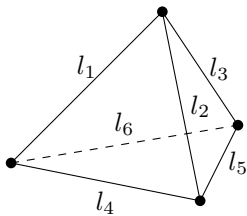


図 49: 四面体

$$V^2 = \frac{1}{144} \{ l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) \\ + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) \\ + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) \\ - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2 \}$$

さて, 上の定理の証明のために, 以下の補題を示す.

ここで, 上の定理を満たす多面体を”性質 Q を持つ”ということにする.

補題

n 頂点多面体は全て性質 Q を持つとする. P を $(n+1)$ 頂点を持つ多面体で, クラス K_0 であるとする.

このとき, P も性質 Q を持つ.

<証明>

3 辺からなる閉路に接続しない頂点 A の次数 m で帰納法を用いる.

1. A の次数が 3 のとき.

A に隣接する 3 点を通る面で多面体を切断することで, その多面体の頂点数は n になり, 帰納法の仮定を用いる.

2. A の次数が 4 のとき.

A を, 空な 3 辺からなる閉路に接続しないような次数 4 の頂点とする. A に隣接する頂点に周期的に番号づけを行う.

P を基に, 次数 3 の頂点を持つ 2 つの多面体 P_1, P_2 を構成する.

$P_i (i = 1, 2)$ を構成するために, 辺 $\langle Ap_i \rangle$ を面 $\langle Ap_{i-1}p_i \rangle, \langle Ap_i p_{i+1} \rangle$ で除去した後, 新たな面 $\langle p_{i-1}p_i p_{i+1} \rangle, \langle Ap_{i-1}p_{i+1} \rangle$ に置き換える.

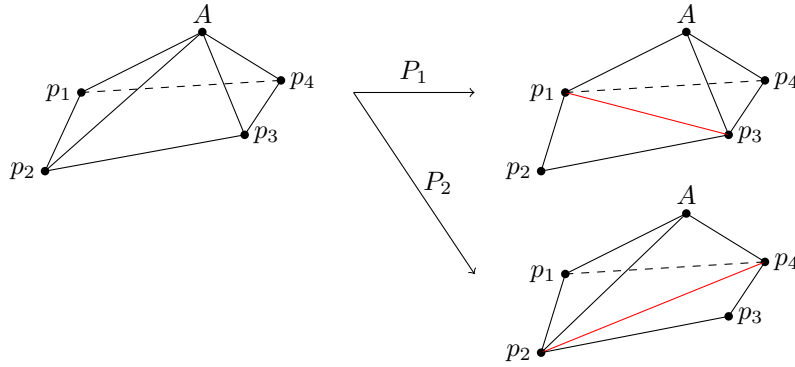


図 50: 2 つの変換

頂点 A は P_1, P_2 において次数 3 である. 対角線 $\langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_1 p_3 \rangle$ の長さを各々 d_1, d_2 とする. 帰納法の仮定より, 体積 $V_1 = \text{vol}(P_1), V_2 = \text{vol}(P_2)$ は, 以下の多項式の根として表すことができる.

$$Q_i = V_i^{2N_i} + a_1^{(i)}(l, d_i^2) V_i^{2N_i-2} + \dots = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \dots (a_i)$$

V_{0i} : 四面体 $\langle Ap_{i-1}p_i p_{i+1} \rangle$ の体積とする. P_i に V_{0i} を加えることで P を完成させる.

$$V_i = V - \epsilon V_{0i} \quad (\epsilon = \pm 1, i = 1, 2) \quad \dots (b_i)$$

式 (b) より,

$$\begin{aligned} V_i^{2m} &= (V - \epsilon V_{0i})^{2m} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(m-k)} - \epsilon V V_{0i} \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m}C_{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(m-k-1)} \end{aligned}$$

この結果を用いて, (b) を (a) に代入.

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=0}^{N_i} {}_{2N_i}C_{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k)} - \epsilon V V_{0i} \sum_{k=0}^{N_i-1} {}_{2N_i}C_{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-1)} \right) \\ &\quad + a_1^{(i)}(l, d_i^2) \left(\sum_{k=0}^{N_i-1} {}_{2N_i-1}C_{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-1)} - \epsilon V V_{0i} \sum_{k=0}^{N_i-2} {}_{2(N_i-1)}C_{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-2)} \right) \\ &\quad + \dots = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{k=0}^{N_i} {}_{2N_i}C_{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k)} + \sum_{k=0}^{N_i-1} {}_{2N_i-1}C_{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-1)} + \dots \\ &= \epsilon V V_{0i} \left(\sum_{k=0}^{N_i-1} {}_{2N_i}C_{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-1)} + \sum_{k=0}^{N_i-2} {}_{2(N_i-1)}C_{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-2)} + \dots \right) \end{aligned}$$

両辺 2 乗する.

$$\left(\sum_{k=0}^{N_i} {}_{2N_i}C_{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k)} + \sum_{k=0}^{N_i-1} {}_{2N_i-1}C_{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-1)} + \dots \right)^2$$

$$= (V V_{0i})^2 \left(\sum_{k=0}^{N_i-1} {}_{2N_i}C_{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-1)} + \sum_{k=0}^{N_i-2} {}_{2(N_i-1)}C_{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(N_i-k-2)} + \dots \right)^2$$

さて, 展開してまとめると,

V の最高次数: $4N_i$.

V の次数は全て偶数. (*i.e.* $4N_i, 4N_i - 2, \dots, 0$)

であるので, 以下の等式が得られる.

$$V^{4N_i} + A_1^{(i)}(l, d_i^2, V_{0i}^2) V^{4N_i-2} + \dots = 0$$

さて, この式において, V_{0i}^2 の値を (l, d_i^2) の関数として代入する. すると以下を得る.

$$V^{4N_i} + B_1^{(i)}(l, d_i^2) V^{4N_i-2} + \dots + B_{2N_i}^{(i)}(l, d_i^2) V^0 = 0$$

この式を d_i^2 についての等式とみると,

$$C_0^{(i)}(l, V^2)(d_i^2)^{K_i} + \dots + C_{K_i}^{(i)}(l, V^2)(d_i^2)^0 = 0$$

(a) $K_i = 0$ ($i = 1$ or 2) のとき

対応する方程式は

$$C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = V^{4N_i} + \dots = 0$$

(b) $K_i > 0$ のとき

V を (x_1, \dots, z_n) , l を (l_1^2, \dots, l_e^2) の関数として $C_j^{(i)}(l, V^2)$ に代入.

i. 得られる関数が全て 0 のとき.

$$Q(V) = C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = 0 \iff V^{4N_i} + \dots = 0$$

ii. *else*

P は対応する d_i の次数の係数が 0 でないことから, ケイリー・メンガー方程式で $x = d_1^2 = \overline{d_1}, y = d_2^2 = \overline{d_2}$ として

$$\overline{d_1}^2(\overline{d_2}^2 + a\overline{d_2} + b) + \overline{d_1}(a\overline{d_2}^2 + b\overline{d_2} + b) + (b\overline{d_2}^2 + b\overline{d_2} + b) = 0$$

この式と (a_1) から $\overline{d_1}$ を削除でき, その式と (a_2) から $\overline{d_2}$ を削除でき, $Q(V) = 0$ を得る.

□

14.4 定理の証明 ～ 予想の証明

定理

P : 多面体, l_k ($1 \leq k \leq e$) : 辺長とする.

P のみに依存する多項式 $Q(V)$ で, 以下を満たすものが存在する.

$$Q(V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + \cdots + a_N(l) = 0$$

ここで,

$$l = (l_1^2, \dots, l_e^2)$$

$a_i(l)$: l の有理係数多項式

<証明>

頂点数の帰納法により示す. つまり, n 頂点を持つ多面体では定理の証明を仮定する.

P が $n+1$ 頂点を持つとする.

1. P が空な 3 辺からなる閉路 G を持つ場合.

G の周りで P を切り取ると, 2 つの多面体 P_1, P_2 を得る. これらの頂点はいずれも $(n+1)$ 未満である. 明らかに

$$V(P) = \epsilon_1 V(P_1) + \epsilon_2 V(P_2)$$

帰納法の仮定より, P_1, P_2 はいずれも定理が成立することから P についても同様.

2. P が空な 3 辺からなる閉路 G を持たない場合.

このとき, 構造 K_0 を有するので, 補題を適用して証明終了.

□

ふいご予想

柔軟な多面体は, 柔軟な動作を通じて常に体積が一定.

<証明>

上の定理より, 多面体の体積が, 辺の長さだけの多項式で与えられている. 辺の長さは一定なので, V は離散的に変化する. 一方で, 柔軟な多面体は柔軟な動作の中では体積変化は連続的である. 故に, 柔軟な多面体は柔軟な動作下では体積は一定である.

□

第Ⅴ部

多面体の再構成

15 アレクサンドロフの定理

アレクサンドロフの定理

展開図を以下の条件を満たすように接着する.

1. どの頂点においても, 角度の総和が 2π を超えない.
2. 結果として得られる複体が球面に位相同型である.

このとき, この接着に対応する凸多面体は一意に定まる.

この定理を証明することを目標とする.

前半に一意性について示し, 後半で存在性を示すことにする.

証明については, 冗長になるので, 小節で見通しを立てた上で, それぞれ順序立てて証明していくことにする.

定義 (凸多角形の距離)

X : 凸多角形, $\forall x, y \in X$ に対し,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定義する. (通常の距離)

定義 (接着)

X, Y : 凸多角形. $A \subset X, B \subset Y$ とする.

$f: A \rightarrow B$ を同相写像とする. $X \cup Y$ 上の同値関係 \sim を以下で定義する.

$$x \sim y \iff x = y \text{ or } x \in A \text{ で } f(x) = y$$

この同値関係での同一視を「接着」という.

$$(X \cup Y) / \sim$$

を X と Y を f により接着してできる空間という.

定義 (展開図)

以下の条件を満たすように凸多角形を接着してできた単純多角形 R を展開図という.

1. 多角形の接着は, 同じ長さの辺同士でのみ行われる.
2. R の各辺にどの辺をどの向きに接着するか指定する.

(接着が指定された点同士は同一視する.)

定義 (展開図上の距離)

$x, y \in X$: 展開図上の 2 点とし, その間の距離 d' を以下で定める.

$$d'(x, y) = \inf\{d(p_1, q_1) + d(p_2, q_2) + \cdots d(p_n, q_n)\}$$

ここで, $(p_1, p_2, \cdots, p_n), (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ は有限点列.

また, $[x] = [p_1], [p_i] = [q_{i-1}], [q_n] = [y]$ を満たすとする. ($i = 2, 3, \cdots, n$)

<距離の公理の確認>

怪しいのは $d'(x, y) = 0 \implies x = y$ だけ. 他はほぼ明らかなのでいつかやることにする.

さて, 以下の順で示せば良い. (補題 2.1 と同時並行で示すことになる.)

1. コンパクト空間から実数値への連続関数は最大値・最小値をもつ.
2. コンパクト空間の商空間はそれもまたコンパクト.
3. 補題 2.1 から, $d(p_1, q_1) + d(p_2, q_2) + \cdots d(p_n, q_n)$ は有界の和で書ける.
4. \inf の中身は連続関数であり, かつコンパクト空間から実数値への連続関数であるので, 最小値を持つ.
5. このことから, $d'(x, y) = \min\{d(p_1, q_1) + d(p_2, q_2) + \cdots d(p_n, q_n)\}$ と書くことができる.
6. よって $d'(x, y) = 0 \implies x = y$

□

15.1 一意性について

15.1.1 見通し

定理 1

等長な展開図を持つ凸多面体は合同である.

この定理を示すための補題として以下を準備する.

補題 1.1

L :凸多面体 P 上の最短弧であるとする.

L は P の各面上に最大で 1 本の線分を持つ多角形上の直線である.

補題 1.2

多面体 P_1 と P_2 が同じ展開図 R から, 糊付けにより作られたものであれば, 両者の間には等長写像が存在する.

補題 1.3

P_1, P_2 :凸多面体とし,

$$\phi : P_1 \rightarrow P_2$$

$$\phi^{-1} : P_2 \rightarrow P_1$$

をそれぞれ等長写像とする.

P_1 の面の ϕ による像は, P_2 の面を覆い, その結果, その面を”新たな面”に分割する.

ϕ^{-1} でも同様の操作を行うことができる.

その結果, 多面体 P_1 と P_2 は, 同じ数の同じように配置された新しい合同な面で構成される.

15.1.2 補題の証明

補題 1.1

L : 凸多面体 P 上の最短弧であるとする.

L は P の各面上に最大で 1 本の線分を持つ多角形上の直線である.

<証明>

Q_λ : P の各面 ($\lambda \in \Lambda$: 有限集合) とする.

- 直線分となること (Q_λ 上で折れ曲がらない).

$\exists X, Y \in (Q_\lambda \cap L)$ s.t. $XY \neq L_{XY}$ と仮定する. (i.e. $Q_\lambda \cap L$ 上の 2 点 X, Y で, 線分 XY と L 上の部分弧で異なるものが存在すると仮定する.)

このとき, L_{XY} を線分 XY に置き換えてできる弧 L' は L よりも短くなる. これは L が最短弧であることに矛盾する.

- 各面で最大 1 本となること.

弧 L の両端の点を X, Y とおく. L が P のある面 Q_λ を 2 回またぐと仮定する. L を X を始点として $X \rightarrow Y$ と移動するときに通る Q_λ の境界上の点を順に X_1, X_2, X_3, X_4 とナンバリングする ($X, Y \in Q_\lambda$ のときはそれぞれ $X = X_1, Y = X_4$ とする). まず, 三角不等式から

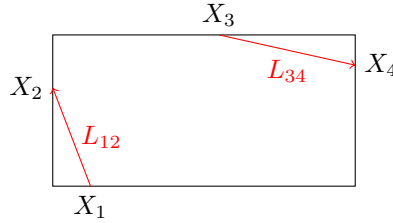


図 51

$$X_1X_2 + X_2X_3 \geq X_1X_3$$

$$X_1X_3 + X_3X_4 > X_1X_4$$

$$\therefore X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 > X_1X_4$$

また, P が凸多面体であることから, X_2, X_3 を端点にもつ L の部分弧 L_{23} は

$$L_{23} \geq X_2X_3$$

を満たすので

$$L_{14} \geq X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 > X_1X_4$$

よって, L_{14} を X_1X_4 に置き換えてできる L' は L よりも短くなる. これは L の最短性に矛盾.

□

補題 1.2

多面体 P_1 と P_2 が展開図 R から接着により実現されるとき、両者の間には等長写像が存在する.

<証明>

展開図 R から実現される凸多面体が存在するとき、 X 上の各点は実現された凸多面体上のある点に対応する. この対応は一对一であり、展開図上の距離の定義から、展開図上の 2 点間の距離とそれに対応する凸多面体上の 2 点間の距離は一致する. ここで、 P_1, P_2 が展開図 R から実現されたものであることから、当然それらの間の対応する 2 点間の距離も一致するはずである. よって、展開図 R から凸多面体 P_1, P_2 への自然な全単射を f_1, f_2 とおいて、 $f: P_1 \rightarrow P_2$ を $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ で定めることで f は等長写像となる.

□

補題 1.3

P_1, P_2 : 凸多面体とし,

$$\phi : P_1 \rightarrow P_2$$

$$\phi^{-1} : P_2 \rightarrow P_1$$

をそれぞれ等長写像とする.

P_1 の面の ϕ による像は, P_2 の面を覆い, その結果, その面を”新たな面”に分割する.

ϕ^{-1} でも同様の操作を行うことができる.

その結果, 多面体 P_1 と P_2 は, 同じ数の同じように配置された新しい合同な面で構成される.

<証明>

Q_1 : P_1 のある面, $\phi(Q_1)$: Q_1 の像とする.

$\phi(Q_1)$ が, 多面体 P_2 のある面 R_2 を少なくとも部分的に覆っているとする.

$$i.e. S_2 = R_2 \cap \phi(Q_1) \neq \emptyset$$

- S_2 が凸多角形であることを示す. $X_2, Y_2 \in S_2$, $X_1 = \phi^{-1}(X_2), Y_1 = \phi^{-1}(Y_2)$ とする.

Q_1 の凸性から, 線分 X_1Y_1 は Q_1 に含まれる.

$\therefore \phi(X_1Y_1)$ も $\phi(Q_1)$ に含まれる.

さて, 線分 X_1Y_1 が P_1 の (X_1 と Y_1 間の) 最短弧であり, ϕ は等長写像なので, $\phi(X_1Y_1)$ も P_2 の (X_1 と X_2 間の) 最短弧である.

一方, X_2 と Y_2 は同じ面 R_2 上の点なので, 線分 X_2Y_2 が最短弧.

$\therefore X_2Y_2 \in \phi(X_1Y_1)$ かつ $X_2Y_2 \in R_2 \quad \therefore X_2Y_2 \in S_2$

S_2 は面 R_2 から, Q_1 を囲む P_1 の辺の ϕ による像によって切り取ったものであり, 多面体の辺は常に多面体中の最短の弧であるので, P_1 の辺を等長写像 ϕ でとばしたものは P_2 の最短弧である.

補題 1 より, P_1 の任意の辺の像のうち面 R_2 上にあるものは直線分. 結果, S_2 は R_2 から有限個の線分で切り取られ, 有界な多角形となる. P_1, P_2 は有限個の面を持つため, P_2 の面と $\phi(P_1)$ の共有点は有限個.

\therefore 多面体 P_2 は有限個の新しい面に分割される.

$\phi^{-1} : P_2 \rightarrow P_1$ でも同様の操作を行う.

ϕ が等長写像なので, P_1, P_2 は同じ数の合同, 同じ組み合わせ構造を持つ新しい面で構成される.

□

15.1.3 定理 1 の証明

補題 1.3 により, 2 つの等長な点数を持つ凸多面体 P_1, P_2 の間に等長写像が存在し, 同じ数で合同で, 同じように配置された面で構成されるので, コーシーの剛性定理より, P_1 と P_2 は合同である.

15405 存在性が未完成.

16 アレクサンドロフ条件と同値な条件

アレクサンドロフの定理

展開図を以下の条件を満たすように接着する.

1. どの頂点においても角度の総和が 2π を超えない.
2. 得られる複体が球面に位相同型.

このとき, 接着に対応する凸多面体は一意に定まる.

2 つの条件のうち, 2. を言い換えることで, 具体的に構成していくことを考えたい. そこで, 以下の接着方法を定義する.

定義 (チャック接着)

e_i, v_i : 展開図となる単純多角形の辺と頂点とする (ナンバリングは適切に行う).

$|e_{i-1}| = |e_i|$ となるような辺が存在するとき, ある点 v_i を起点に e_{i-1} と e_i を接着する方法をチャック接着という.

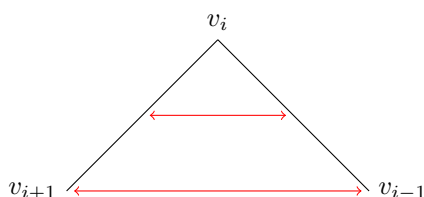


図 52: チャック接着

補題

アレクサンドロフの条件 (特に 2) を満たす展開図は, チャック折りできる頂点 v を少なくとも 1 つもつ. また, チャック折りしてできた閉チェーンに対しても, チャック接着できる頂点をもつ.

この補題を示すことにより, アレクサンドロフの定理の条件 2 を

「チャック折りできる点をもち,
その操作をおこなった後の閉チェーンに対しても, チャック折りできる点が存在する.」

に置き換えることができる.

補題

アレクサンドロフの条件 (特に 2) を満たす展開図は, チャック折りできる頂点 v を少なくとも 1 つもつ.
また, チャック折りしてできた閉チェーンに対して, チャック接着できる頂点をもつ.

<証明>

アレクサンドロフの条件を満たし, チャック接着可能な点が存在しないと仮定する.

展開図上で同一視される適当な 2 辺を接着する. すると, 2 つの閉チェーンができる. 各々を L_1, L_2 とおく.

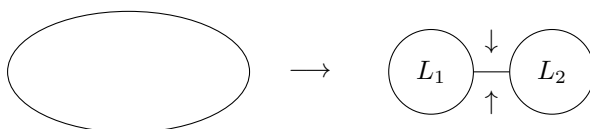


図 53: 適当な 2 辺の接着

ここで, 球面に位相同型であることから, L_1 の辺と L_2 の辺が接着されることはない.

また, 元の展開図がチャック接着可能な点を持たないことを仮定しているので, 閉路 L_1 に対し, 接着できるのは以下の 2 パターンのみ.

1. 接着して同一視した点を起点にチャック接着.
2. チャック接着でない離散的な接着.

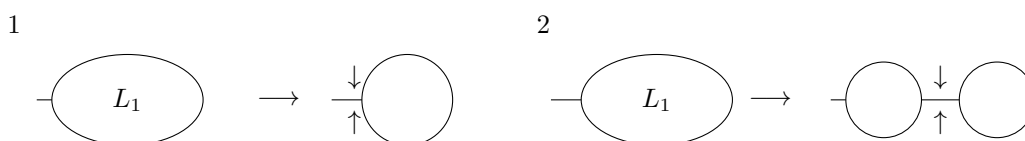


図 54: 2 つの接着方法

1 もしくは 2 の接着を行ってできた閉チェーンのうち, 元の単純多角形で連続しているものを考える. この閉チェーンが辺数 4 になるまで操作を繰り返す.

できた閉チェーンで, 接着により同一視が行われた点を v とおく. その点を基準に反時計回りに e_1, e_2, e_3, e_4 と辺に名前をつける. また, e_2, e_3 の両方に接続する点を u とおく.

1. この閉チェーンでチャック接着ができるとき.

起点となりうるのは v のみである. v を起点にチャック接着を行うと, e_2 と e_3 を接着することになるが, これは u を起点とするチャック接着に他ならない.

2. チャック接着ができないとき.

e_1, e_3 もしくは e_2, e_4 を接着するしかないが, これは, 球面に位相同型にはならない.

よって, どちらの場合にも矛盾が発生する.

したがって, アレクサンドロフの条件を満たす展開図はチャック接着できる点をもつ.

また, できた閉チェーンに対してもチャック接着できる点を持つことに関しては, これまでの議論と同様に示すことができる.

□

17 折れる多角形と折れない多角形

17.1 折れない多角形

どんな多角形からなら凸多面体が構成できるのかを考えていきたい。

考える多角形は凸には限らないが、平面上の単純多角形であることは仮定する。また、以下の定理も成立を仮定する。

定理

凸多面体を折ることができる多角形は、アレクサンドロフ接着を持つ多角形である。

まず、どんな多角形から凸多面体が構成できるとは限らないことを示す。

定理 1

凸多面体に折れないような多角形が存在する。

<証明>

実際にアレクサンドロフの条件を満たす接着が存在しないような単純多角形を提示して定理を示す。

以下の多角形はアレクサンドロフの条件を満たさない。

ここで、 $\angle A = 330^\circ, \angle B = 180^\circ, \angle C = 90^\circ, \angle D = 330^\circ, \angle E = 120^\circ$ で、 $|AB| = |AC|, |DC| = |DE|$ とす

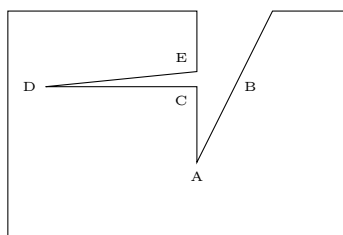


図 55: 凸多面体に折れない多角形

る。

さて、 30° 以下の角度を持つ点が存在しないことから、点 A, D においては別の点との接着は不可能である。

$\therefore AB$ と AC をこの順で接着。 DC と DE をこの順で接着。

\therefore 点 B と点 C と点 E を接着するしかない。

このとき、 $80 + 90 + 120 = 390 > 2\pi$ であるので、アレクサンドロフの条件を満たさない、

よって、上の多角形が凸多面体に折ることができない例のうちの 1 つである。

□

17.2 折れる多角形

定義 (外周半分接着)

P : 単純多角形, $\forall x \in \partial P$: *fixed*, $d_P: \partial P \times \partial P \rightarrow \mathbb{R}$: P の境界上での距離とする.
 $y, z \in \partial P$ に対し, 同値関係 \sim を以下で定義する.

$$y \sim z \iff d_P(x, y) = d_P(x, z)$$

この同値関係による接着を外周半分接着という.
また, このときの x を起点となる点ということにする.

前のページでは折れない多角形を見たが, 逆に凸多角形に関しては以下が成立する.

定理

凸多面体の全ての外周半分接着は凸多面体を折ることができる.

<証明>

外周半分接着により, ∂P 上の 2 点を接着するとき, 角度の和が 2π より大きくなることはない. 実際, $x, y \in \partial P$ を接着するとき, $\angle x, \angle y \leq \pi$ ($\because P$ が凸) なので, $\angle x + \angle y \leq 2\pi$ である.

また, 結果得られる複体は明らかに球面に位相同型であるので, 凸多面体における全ての外周半分接着はアレクサンドロフの条件を満たす. \therefore 凸多面体を折ることができる.

□

では, 凸でない場合に拡張してみるとどうなるのか.

定義

凹頂点をただ 1 つ持つ多角形に対しては, その凹点を起点とする外周半分接着により凸多面体を折れる.

<証明>

凹頂点を A とおく. A を起点として, 外周半分接着される点を x, y とおく. このとき, $\angle x, \angle y \leq \pi$ をみたま ($\because A$ 以外では凸) ので, $\angle x + \angle y \leq 2\pi$ をみたま.

また, 得られる複体は明らかに球面に位相同型.

よって, アレクサンドロフの条件を満たし, 凸多面体を折ることができる.

□

さらに拡張することを考えたいが….

定理

凹頂点を 2 つ持つ多角形で, 凸多面体に折ることができないものが存在する.

<証明>

初めに出した例がまさにその例である.

□

18 平田の半分長定理

ここでは、以下の定理を示すことを目指す。

半分長定理, 平田

P : 辺の長さが、ある単位長 l の整数倍である多角形であり、なおかつ回転ベルトを持たないと仮定する。

また、 P' を P の全ての辺の長さを $\frac{l}{2}$ に細分した細分化多角形とする。

P' に辺々接着アルゴリズムを適用することで、多角形 P の全ての接着を得ることができる。

これを示すことで、与えられた多角形に対しそれが凸多面体に折れるか否か、そのときの接着の仕方は有限なのか否かの判定へと繋げることができる。

18.1 ガウス曲率

まず準備として、ガウス曲率についての知識を得ることとする。

定義 (ガウス曲率)

多面体の表面 S 上の点 p におけるガウス曲率を、点 p における 2π に不足する角度で定義する。
i.e. ガウス曲率とは、 p に隣接する面の角度の合計を 2π から引いたものである。

例

立方体の角頂点において、隣接する面は 3 つあり、それぞれ 90° 。∴ 立方体の頂点におけるガウス曲率は $360 - (90 \times 3) = 90^\circ$ となる。

ガウス曲率について、有名な定理を紹介する。

定理

球面に位相同型な曲面上の全ての点のガウス曲率の総和は 4π 。

例

立方体

上の例で述べたように各頂点でのガウス曲率は $\frac{\pi}{2}$ である。また、頂点を除く辺、面においては任意の点周りのガウス曲率は 0 である。立方体の頂点数は 8 なので、ガウス曲率の和は 4π 。

正四面体

正四面体は正三角形を張り合わせてできるので、頂点でのガウス曲率は $2\pi - \frac{\pi}{3} \times 3 = \pi$ 。頂点数 4 なので、ガウス曲率の和は $\pi \times 4 = 4\pi$ 。

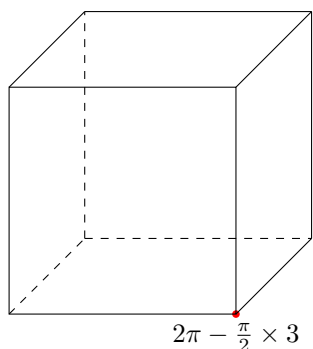


図 56: 立方体のガウス曲率

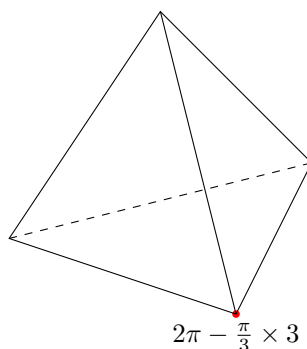


図 57: 正四面体のガウス曲率

18.2 接着木と回転ベルト

18.2.1 接着木

以下, P を単純多角形, P/\sim を展開図とし, $\pi: P \rightarrow P/\sim$ をアレクサンドロフ接着とする.

定義 (接着木)

接着 G による同値関係 \sim で, ∂P から得られる商集合 $T_G (= \partial P/\sim)$ を接着木という.

定義

- 点 $v \in T_G$ が葉 $\iff \pi^{-1}(v)$ が 1 点からなる.
- 点 $v \in T_G$ が次数 $d(\geq 3)$ の分岐点 $\iff \pi^{-1}(v)$ が d 点からなる.
- 点 $v \in T_G$ が頂点 $\iff \pi^{-1}(v)$ が P の頂点を含む.

葉, 分岐点, 頂点をまとめて節点という. また, 頂点でない葉を折り点という.

T_G が木となるのは, アレクサンドロフの条件からすぐにわかる.

例

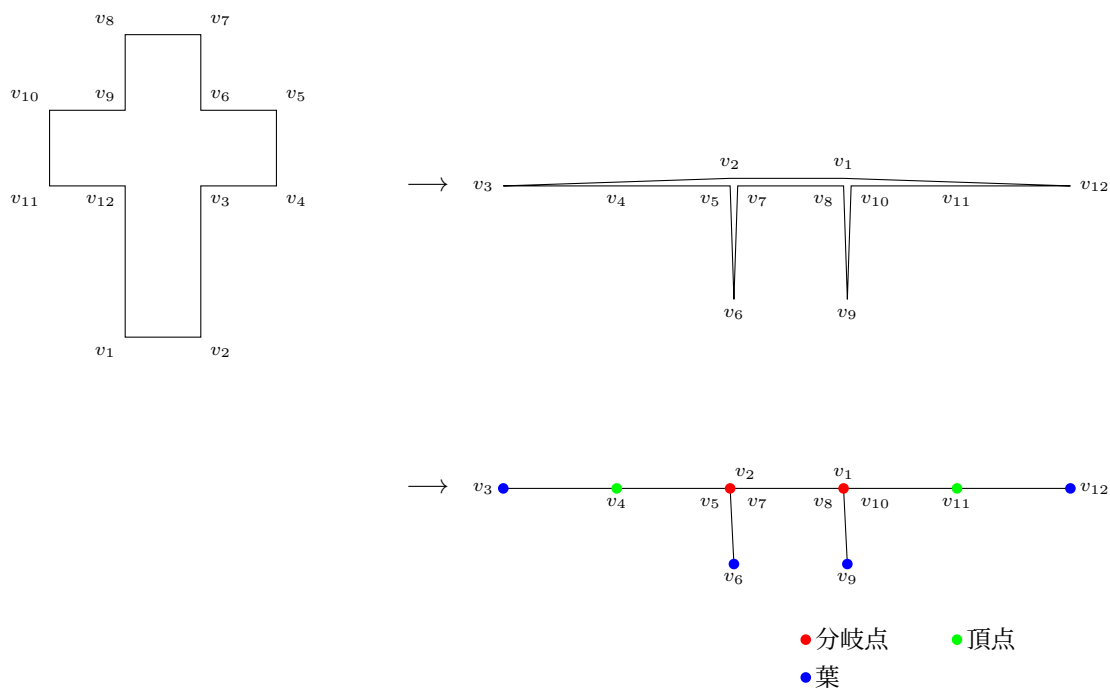


図 58: ラテンクロスから接着木への変換

定理 (接着木の性質)

接着木 T_G は、以下の性質を持つ。

1. 葉は折り点か頂点。
2. 分岐点 $v \in T_G$ に対し、 $\pi^{-1}(v)$ に含まれる頂点でない点は高々 1 個。
3. 分岐点 $v \in T_G$ に対し、 $\pi^{-1}(v)$ に含まれる頂点でない点を \bar{v} とする。 \bar{v} を含む ∂P の辺を e とする。 このとき、 v を通る T_G のパスの中で、点 v のまわりの角をパスにより 2 つに分けると、その両側の角が共に 180° 以下となるのは $\pi(e)$ のみ。
4. 葉で、そのまわりの角の和が 180° 以下となるのは高々 4 個。

<証明>

1. 定義より明らか。
2. v が分岐点であることより、 $\pi^{-1}(v)$ は 3 個以上の ∂P の点が含まれる。 そのうち、2 つが頂点でないとき、 v まわりの角の和は 360° を超える。 これはアレクサンドロフ条件に反する。
3. $\angle \bar{v} = 180^\circ$ なので、 v を通る T_G のパスのうち、その両側の角を共に 180° にするのは \bar{v} とそれ以外の点を分けるパス $\pi(e)$ のみ。
4. 葉 v のまわりの角の和が 180° 以下のとき、凸多面体 P/\sim における頂点での曲率は 180° 以上。 凸多面体の頂点の曲率の総和は 720° 。 \therefore 高々 4 個。

□

<図解>

2.

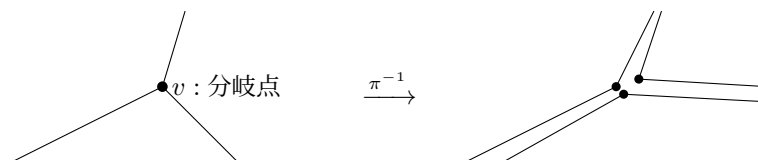


図 59

もし、2 点が 180° のとき、アレクサンドロフ条件が OUT.

3.

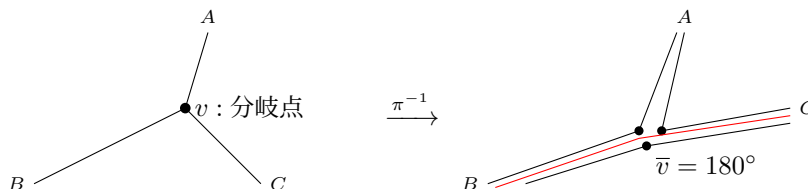


図 60

パス BC のみが v まわりを 180° 以下に分ける。

定義

接着木 T_G のパスで、その端点が葉 or 分岐点で途中に分岐点を持たないものを分岐辺という。

T_G は分岐辺を分岐点で接続したものである。

18.2.2 回転ベルトパス

定義 (回転ベルトパス)

接着木 T_G の葉と葉をつなぐパス p が以下の条件を満たすとき, p を回転ベルトパスという.

1. パス p の端点 (葉) v まわりの角度が 180° 以下.
2. パス p の端点でない節点 v において, p で分けられる v のまわりの角はどちら側も 180° 以下.

定義 (回転ベルト)

回転ベルトパス p を囲む ∂P の部分集合 $\tilde{p} = \pi(p)$ を回転ベルトという.

例

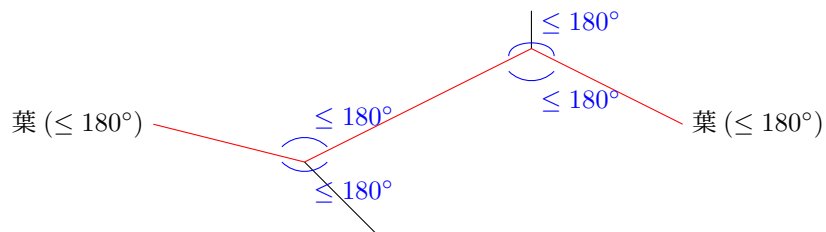


図 61: 回転ベルト

定理

回転ベルトパス p の接着を, その閉路での任意の点での外周半分接着に置き換えることができる.

このことから, 回転ベルトパスを持つような多角形からは, 凸多角形を無限個生成することができることがわかる.

18.3 平田の半分長定理の証明

以下、多角形 P の全ての辺の長さは、ある単位長 l の整数倍であると仮定する。

18.3.1 準備

定義 (r -点)

1. P の各辺上に、頂点から長さ l の間隔で点をとる。この点と各頂点を r -点とよぶ。
2. 隣接する 2 つの r -点の midpoint に新たに点をとる。この点を r' -点とよぶ。

定義 (r -接着)

P の接着木 T_G の分岐辺 s が、以下の 2 条件を共に満たすとき、その分岐辺は r -接着という。また、そうでないときを、非 r -接着という。

1. s の端点 v が葉であるとき、 $\pi^{-1}(v)$ は r -点 or r' -点。
 s の端点 v が分岐点であるとき、 $\pi^{-1}(v)$ と接続している $\pi^{-1}v$ 内の 2 点と共に r -点である。
2. s の端点でないところでは、 r -点には r -点が、 r' -点には r' -点が接着している。

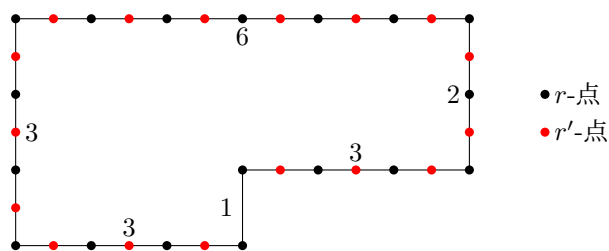


図 62: r -点 ($l = 1$ とする)

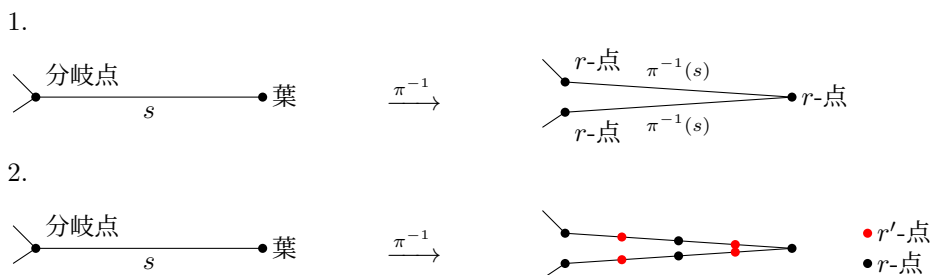


図 63: r -接着の条件

18.3.2 補題とその証明

まず、定理の証明に用いる補題を提示する.

補題 1

P の接着木 T_G に対して、以下が成立.

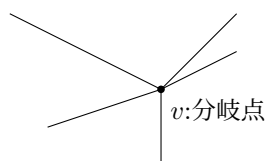
1. T_G の分岐辺 s の 1 つの端点 v で、 r -接着の定義 1 が成立 $\implies s$ は r -接着.
2. T_G の分岐辺 s 上の端点ではない点 v で、 r -点と r -点が接着 $\implies s$ は r -接着.
3. T_G の次数 d の分岐辺を v とする. v を端点とする d 個の分岐辺の中で、非 r -接着なものは 0 個 or 1 個.
4. T_G の葉と葉をつなぐパス p に含まれる全ての分岐辺が非 r -接着 $\implies p$ は回転ベルトパス.
5. T_G が非 r -接着な分岐辺 s をもつとする. このとき、 s を含む回転ベルトパス p で、 p の全ての分岐辺が非 r -接着であるものが存在する.

補題 2

P が回転ベルトを持たないと仮定する. このとき、 P の接着木 T_G はすべて r -接着.

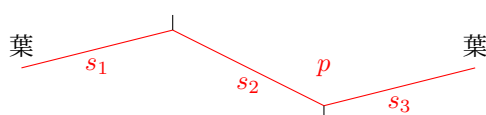
まずは補題を絵で考える.

<図解>



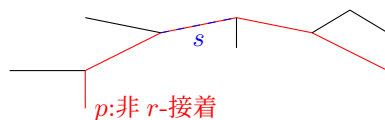
5 本に分岐辺のうち、非 r -接着なものは 0 個 or 2 個

図 64: 補題 1-3



s_1, s_2, s_3 が全て非 r -接着
 $\implies p$ は回転ベルトパス

図 65: 補題 1-4



s が非 r -接着
 $\implies \exists p$: 回転ベルトパス s.t. 非 r -接着

図 66: 補題 1-5

では、順に補題を示していく.

補題 1-1

T_G の分岐辺 s の 1 つの端点 v で, r -接着の定義 1 が成立 $\implies s$ は r -接着.

<証明>

v, v' を s の両端点とする. 点 v が, r -接着の定義 1 を満たすと仮定する.

s の両端以外には, 分岐点はないので, s から両端点を除いた部分を \bar{s} とすると, $\pi^{-1}(\bar{s})$ は ∂P の 2 本のパス p_1, p_2 で, その v 側の端点は共に r -点か共に r' -点のいずれかである.

$\frac{l}{2}$ 間隔に r -点と r' -点が交互に並んでいるので, s は r -接着の定義 2 を満たす.
さて, 分岐辺 s のもう一方の点 v' について,

1. v' が分岐点のとき.

接着木の性質 2 より, p_1, p_2 のいずれか一方の v' 側の端点は頂点である (r -点). また, 他方も r -点となる ($\because p_1, p_2$ が同じ長さ, $\frac{l}{2}$ 間隔で r, r' -点が並んでいること, v 側の r, r' が一致していること).

2. v' が葉のとき.

p_1, p_2 は連続した 1 本のパス p となる. 両端点が共に v -点 or r' -点.

$\therefore p$ は l の整数倍の長さ.

$\therefore p$ の中点が葉となり, そこは r -点もしくは r' -点である.

よって, s は r -接着.

□

補題 1-2

T_G の分岐辺 s 上の端点ではない点 v で, r -点と r -点が接着 $\implies s$ は r -接着.

<証明> 略 (補題 1-1 と同様).

□

補題 1-3

T_G の次数 d の分岐辺を v とする. v を端点とする d 個の分岐辺の中で, 非 r -接着なものは 0 個 or 1 個

<証明>

接着木の性質 2 より, $\pi^{-1}(v)$ の d 個の点のうち, 頂点でないものは高々 1 個である.

$\therefore \pi^{-1}(v)$ のうち, r -点でないものは 0 or 1 個である.

1. 0 個のとき.

$\pi^{-1}(v)$ が全て頂点 (r -点) から, 補題 1-1 から v を端点とする全ての分岐辺は全て r -接着.

2. 1 個のとき.

$\pi^{-1}(v)$ のうち, 頂点 (r -点) でないものを \bar{v} とする. v を端点とする分岐辺 s のうち, $\bar{v} \in \pi^{-1}(s)$ となるものはちょうど 2 個.

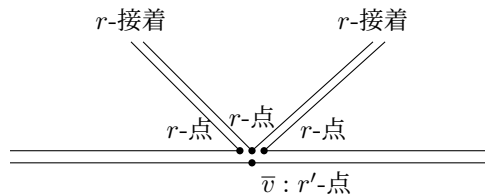


図 67

さて、の 2 つの分岐辺は r -接着の定義 1 を満たさないので非 r -接着。残る $d - 2$ 個の分岐辺は r -接着。

□

補題 1-4

T_G の葉と葉をつなぐパス p に含まれる全ての分岐辺が非 r -接着 $\implies p$ は回転ベルトパス。

<証明>

1. p の葉について。
非 r -接着より、常に折り点。 \therefore その周りの角は 180° 。
2. p の分岐点について。(そのような点を v とおく。)
 v と接続する p の 2 つの分岐辺が非 r -接着。
接着木の性質 3 より、 v での p の両側は 180° 以下。

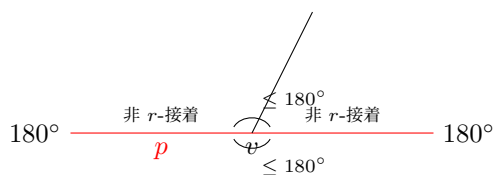


図 68

3. p の葉でも分岐点でもない頂点。
頂点と頂点以外の点が接着しているので両側 180° 以下。
したがって、 p は回転ベルトパスの定義を満たす。

□

補題 1-5

T_G が非 r -接着な分岐辺 s をもつとする。このとき、 s を含む回転ベルトパス p で、 p の全ての分岐辺が非 r -接着であるものが存在する。

<証明>

1. 分岐辺 s の両端が葉のとき。
補題 1-4 より、 s は回転ベルトパス。
2. s の端点 v が分岐点であるとき。
補題 1-3 より、 v を端点とするもう 1 つの非 r -接着な分岐辺 e' が存在する。この 2 つの分岐辺を点 v でつなぐことで、1 つのパスが構成される。このパスにおいても 1 つの端点に分岐点なとき、その点を端点とするもう 1 つの非 r -接着な分岐辺が存在する。
分岐辺の数が有限なので、繰り返すことで、葉と葉をつなぐパス p となる。
構成法から、全ての分岐辺が非 r -接着。補題 1-4 より、 p は s を含む回転ベルトパス。

□

補題 2

p が回転ベルトを持たないと仮定する。このとき、 p の接着木 T_G は全て r -接着。

<証明>

背理法で示す.

接着木 T_G に, 非 r -接着な分岐辺 s が存在すると仮定. 補題 1-5 から, s を含む回転ベルトパスが存在する.
これは矛盾.

□

以上で, 準備は完了したので, 最後に平田の半分長定理を提示し, 証明を行う.

18.3.3 平田の半分長定理

半分長定理, 平田

P : 辺の長さが, ある単位長 l の整数倍である多角形であり, なおかつ回転ベルトを持たないと仮定する.
また, P' を P の全ての辺の長さを $\frac{l}{2}$ に細分した細分化多角形とする.
 P' に辺々接着アルゴリズムを適用することで, 多角形 P の全ての接着を得ることができる.

<証明>

補題 2 より, 多角形 P の任意の接着木を T_G とする. T_G の全ての分岐辺は r -接着となる.

したがって, この接着は細分化多角形 P' の辺々接着である.

$\therefore P'$ に辺々接着アルゴリズムを適用することで得ることができる.

□

18.4 回転ベルトを持つパターン

回転ベルトを持つパターンについても考えてみる．前回までの条件を引き継ぐことにする．

18.4.1 準備

まず，以下の補題を考える．

補題

P の接合木 T_G が回転ベルトパスを持つとする．以下が成立．

1. ∂P のある辺 e の部分線分がパス p に含まれる \implies 辺 e 全体が p に含まれる．
2. パス p を囲む回転ベルト \tilde{p} の長さは l の整数倍．
3. パス p 上の分岐点 v とつながる p の外部にある分岐辺は r -接着．
4. パス p に含まれない分岐辺 s で，非 r -接着なものが存在するとする．このとき，そのような分岐辺全体の集合は 1 つの回転ベルトパスである．

<図解>

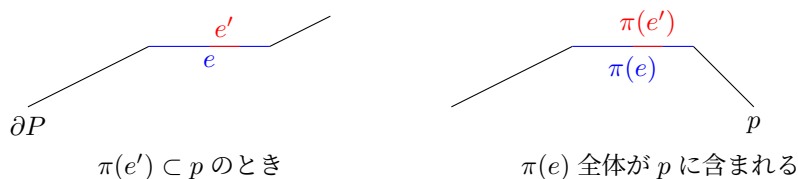


図 69: 1

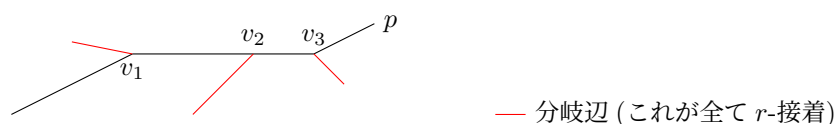


図 70: 3

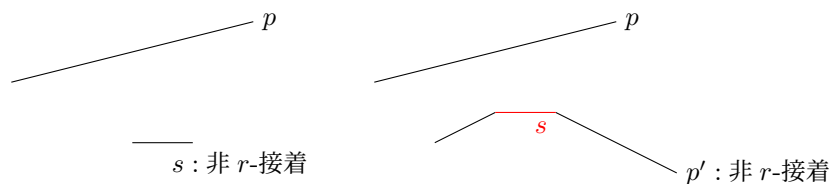


図 71: 4

さて，証明にうつる．

補題-1

∂P のある辺 e の部分線分がパス p に含まれる \implies 辺 e 全体が p に含まれる．

<証明>

辺 e の部分線分がパス p に含まれているとする．背理法で示す．

辺 e 全体がパス p に含まれていないと仮定.

i.e. 辺 e の像 $\pi(e)$ は, パス p のある分岐点 v において, パス p の外にでている. このとき, 分岐点 v のまわり

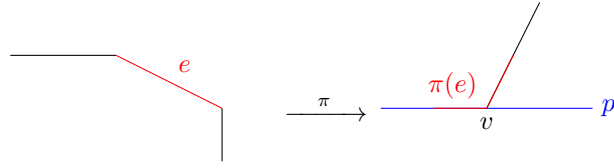


図 72

の角を 180° 以下の 2 つの側に分けるのは, 接着木の性質-3 より, $\pi(e)$ のみ. しかし, p は回転ベルトパスなので, p も v まわりの角を 180° 以下の 2 つの側に分ける. これは矛盾.

□

補題-2

回転ベルト \tilde{p} の長さは l の整数倍.

<証明>

1 より, 回転ベルトパス p を囲む回転ベルト \tilde{p} は, ∂P のいくつかの辺の和集合. ∂P の辺は l の整数倍なので, \tilde{p} もそうである.

□

補題-3

パス p 上の分岐点 v とつながる p の外部にある分岐辺は r -接着.

<証明>

補題 1-3 より, v を端点とする分岐辺の中で, 非 r -接着なものは 0 個 or 1 個.

1. 0 個のとき.

明らか.

2. 2 個のとき.

$\pi^{-1}(v)$ に頂点以外の点が含まれる.

(もし, 全て頂点なら, $\pi^{-1}(v)$ は全て r -点. r -点から等間隔に r' -点, r -点が並ぶ. これはもちろん r -点, r' -点同士が接着される. これは r -接着の定義そのもの.)

接着木の性質-3 から, v まわりの角を 180° 以下に分けるパスはただ 1 つ. また, p が回転ベルトパスなので, それが p である. \therefore 非 r -接着な 2 本の分岐辺は p に含まれる.

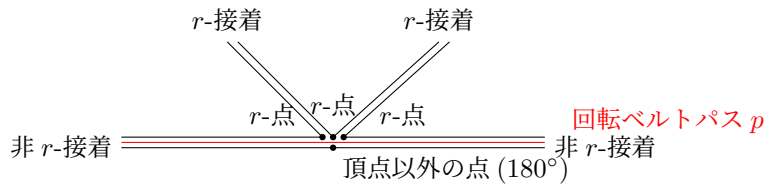


図 73

よって, 分岐点 v とつながる p の外部にある分岐辺は r -接着.

□

補題-4

パス p に含まれない分岐辺 s で、非 r -接着なものが存在するとする。このとき、そのような分岐辺全体の集合は 1 つの回転ベルトパスである。

<証明>

補題 1-5 より、 s を含む回転ベルトパス p' で、その分岐辺が全て非 r -接着なものが存在する。3 より、 p と p' は共有点を持たない。接着木の性質 4 より、そのような p' は高々 1 個。

$\therefore p'$ は高々 1 個。

$\therefore p$ に含まれない分岐辺で、非 r -接着なもの全体は 1 つの回転ベルトパス。

□

18.4.2 本題

以下の定理を示す.

定理

P : 前と同条件, 加えて, 回転ベルトを持つ多角形.

P' : P の全ての辺を $\frac{l}{2}$ に細分した細分多角形.

P'' : P の全ての辺を $\frac{l}{4}$ に細分した細分多角形.

m : P' に辺々接着アルゴリズムを適用して得られる接着の数.

m' : P'' に辺々接着アルゴリズムを適用して得られる接着の数.

このとき, $m < m'$ が成立.

<証明>

P' に辺々接着アルゴリズムを適用して得られる接着は, P'' に辺々接着アルゴリズムを適用しても得られる.

$\therefore m \leq m'$.

ゆえに, P'' の辺々接着であるが, P' の辺々接着ではないものを 1 つ見つければ良い.

P は回転ベルトを持つので, 回転ベルトパス p をもつ接着木 T_G が存在する. パス p に含まれない分岐辺で, 非 r -接着なものが存在すれば, 補題-4 より, そのような分岐辺全体の集合は 1 つの回転ベルトパス p' になる. 補題-3 より, p と p' は共有点をもたない.

$\therefore p, p'$ に含まれない他の分岐辺は全て r -接着. なおかつ回転ベルトパスを構成しない.

補題-2 より, p のまわりの回転ベルト \tilde{p} の長さを nl とする ($n \in \mathbb{N}$).

\tilde{p} には, n 個の r -点, r' -点が存在し, $\frac{l}{2}$ 間隔で交互に並んでいる.

隣りあう r -点と r' -点の中点 x を 1 つ選ぶ. \tilde{p} に対し, x を起点とする外周半分接着をすれば, これは r -点と r' -点が接着されるので, 非 r -接着. また, P' の辺々接着ではないが P'' の辺々接着となっている.

$\therefore m < m'$

□

この定理より, 接着の可否, 接着の有限 or 無限, のアルゴリズムが得られる. 実際に,

- 接着可能か否か.

→ P' に辺々接着アルゴリズムを走らせる. (ここで m 個発見)

- 有限か無限か.

→ P'' に辺々接着アルゴリズムを走らせる. (ここで m' 個発見)

if. $m < m' \implies$ 無限.

else. 有限. (m 個の接着.)

19 ラテックロスから凸多面体の再構成

ここでは、単純多角形のみを考察することにし、接着も辺々接着に限るものとする。

19.1 多面体再構成

アレクサンドロフの定理

展開図を以下の条件を満たすように接着する。

1. どの頂点においても角度の和が 2π を超えない。
2. 結果として得られる複体が球面に位相同型。

このとき、この接着に対応する凸多面体は一意に定まる。

以下では、この定理の 2 条件をアレクサンドロフ条件ということにする。アレクサンドロフの定理から、任意の多角形にアレクサンドロフ条件を満たすように辺の接着を指定することができれば、凸多面体を組み立てることができることがわかる。

アレクサンドロフ条件 1 は、接着する辺を指定していく中で実際に検証がしやすい条件であるが、条件 2 は、接着の指定を終了するまではなかなか判定できない。そこで、この条件と同値でなおかつ判定がしやすい条件を与えることにする。

多角形の任意の頂点から、反時計回りにナンバリングを行い、 $e_i = v_i v_{i+1}$ とする。

定義 (チャック接着)

v_i : 多角形の頂点, $e_i = v_i v_{i+1}$: 多角形の辺とする。

$|e_i| = |e_{i-1}|$ を満たす辺が存在し、その辺同士を v_i を起点に接着する方法をチャック接着という。

このチャック接着を用いて、アレクサンドロフ条件 2 と同値な条件を考える。

定理

以下の 2 条件は同値である。

1. アレクサンドロフ条件 2.
2. 展開図の閉チェーンが、チャック接着できる起点を持ち、チャック接着した後にできる閉チェーンに対してもチャック接着できる起点が存在する。

証明は別紙参照。この定理を用いることで、多角形の各頂点から、チャック接着可能か否かの検証を繰り返していき、最後までできれば凸多面体が構成できることになる。

19.2 ラテンクロスから凸多面体の構成

実際に辺々接着の検証とアレクサンドロフの角度条件を検証した結果、左右対称なものを除いて以下の9通りの辺々接着が得られた。以下では、接着する頂点の番号を表している。

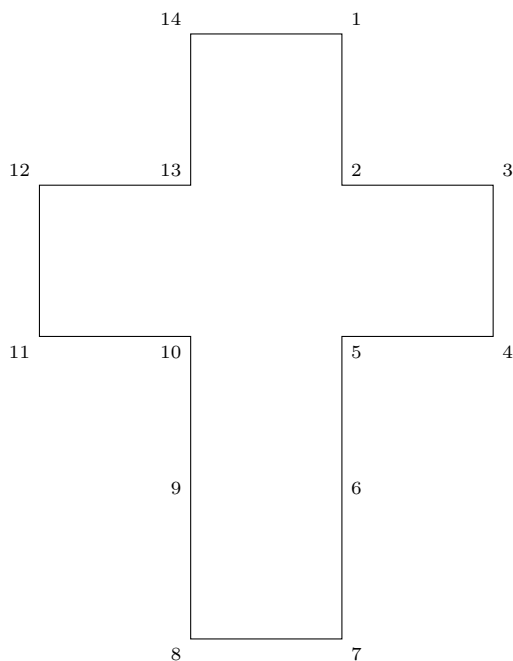


図 74: ラテンクロス

- (1),(2,14),(3,13),(4,6,12),(5),(7,11),(8,10),(9)
- (1),(2,14),(3,13),(4,6,12),(5),(7,9,11),(8),(10)
- (1),(2,14),(3,13),(4,8,12),(5,7),(6),(9,11),(10)
- (1,3),(2),(4,6,14),(5),(7,13),(8,12),(9,11),(10)
- (1,3),(2),(4,8,12,14),(5,7),(6),(9,11),(10),(13)
- (1,3,7),(2),(4,6),(5),(8,12,14),(9,11),(10),(13)
- (1,3,9),(2),(4,6,8),(5),(7),(10,14),(11,13),(12)
- (1,3,9),(2),(4,8),(5,7),(6),(10,14),(11,13),(12)
- (1,5),(2,4),(3),(6,14),(7,13),(8,12),(9,11),(10)

これらを実際に組み上げていくと、「立方体」「四角形(二重被覆多面体)」「四面体」「五面体」「八面体」の5種類の凸多面体が構成された。^{*2}実際に構成して展開図に折り目を記したものを以下に示す(立方体の展開図は自明なので省略)。

^{*2} 鏡像異性体は同じ多面体として扱うことにする。

19.2.3 五面体

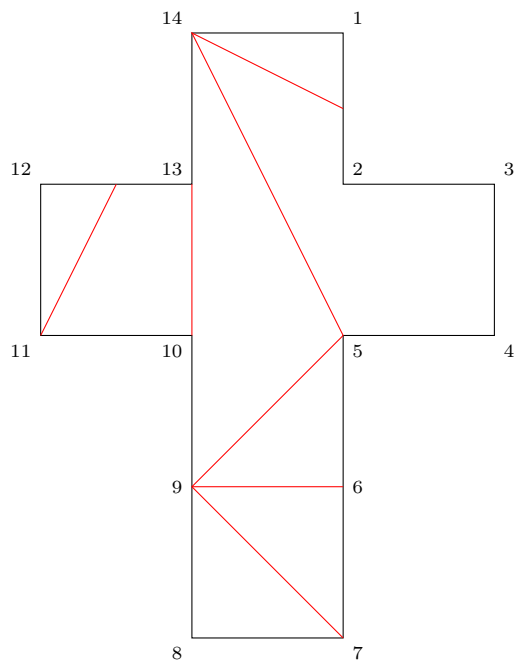


图 79: D[0]

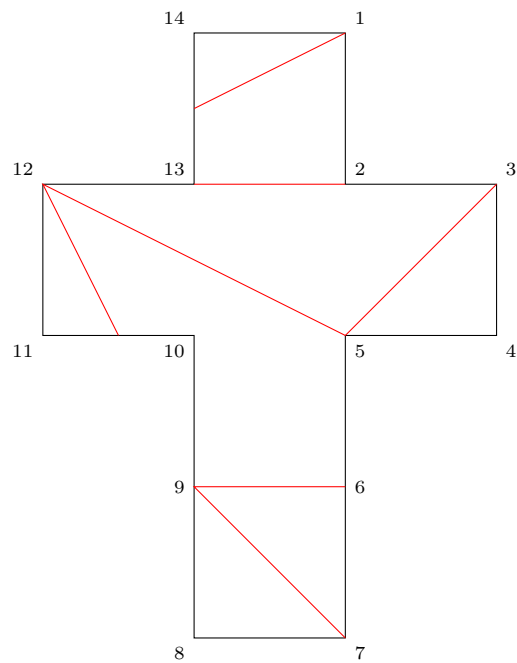


图 80: D[0]

19.2.4 八面体

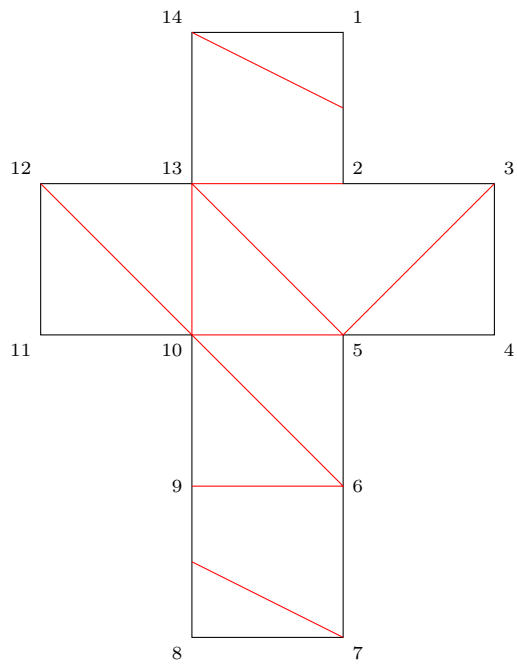


图 81: E[0]

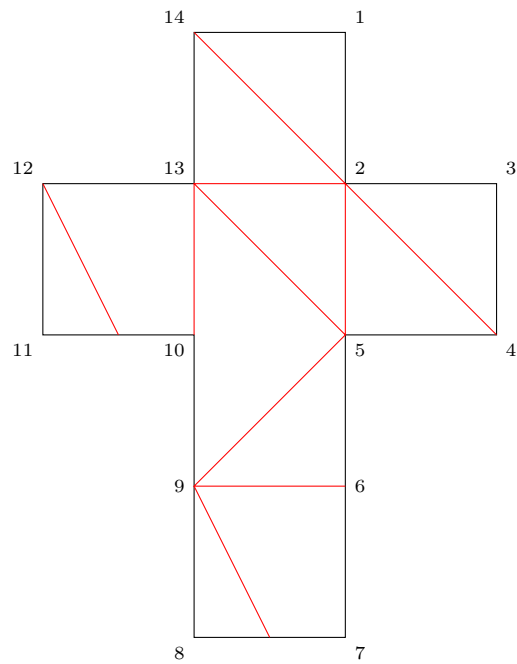


图 82: E[2]

19.3 アレクサンドロフパズル

ラテックロスから辺々接着 5 種類の凸多面体が生成できる (二重被覆多面体含む) ことがわかったところで、これら全てを組み立てることができるようなパズル的なおもちゃを作成することを考えてみる。具体的には、硬い面に対し自由に折り曲げられる折り目を与え、それらのうちからうまく選択し折り曲げて辺を接着していくことで 5 種類のうちからある多面体が組み立てられるものであり、折り曲げ方を変えると別の多面体が出てくる仕組みを持つパズルである。折り目の組み合わせを与えるにあたって、立方体は 1 通り、他の多面体は 2 通りの折り方があり、裏表まで考慮すれば $1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \div 2 = 128$ 通りである。これらの組み合わせの中から「最もいい組み合わせ」とは何かを定義し、見つけていく。

19.3.1 考察

では、最もいい組み合わせはなんなのか、案を挙げていく。
作成しやすさと、組み立てやすさの 2 つの観点から考察していくことにする。

1. できるだけ折り線が交わる数が少なくなるようにする。
→ 交点が少ないことで、折り線の見た目が綺麗になる。
2. 折り線の共有する数が多くなるようにする。
→ 共有する折り線を増やすことで、ラテックロスに引かれる折り線が少なくなるので見た目が綺麗になる。
3. 折り線の傾きの正負の差が小さくなるようにする。
→ もし同じ方向の折り線が複数あると、ある折り線を折ろうとしても他の折り線が折れてしまうことが考えられる。そのため、できるだけ折り線の傾きは正負異なる方がいいと考えられる。
4. 折り線の存在する範囲の分散が小さくなるようにする。
→ 折り線の数が少なくなるようにしたとしても、ある範囲内に集中して折り線が存在し、別の範囲内には折り線が存在しないような形だと、なかなか綺麗とは言えない。なので、分散を考えてみるといいのではないかと考えた。
5. 折り線に囲まれた連結領域の面積の最小値が大きいもの。
→ この案ののちに各連結領域の面積の分散を考えようと思ったが、分割数を大きくし、平均の面積を小さくする方が分散が小さくなることになり、「良い組み合わせ」とは言えないのではないかと考え、やめることにした (計算だけはしてある。)。
6. ラテックロスの境界上のある点から複数の折り線が出ているとする。その時に、それらの間の角度が小さくならないようにする。
→ 3 の案と考え方はほぼ同じである。

19.3.2 実験

では、上記の案をいくつか組み合わせて実際に組み合わせて実際に作成していく。その中で、「いい組み合わせ」の定式化を考えていくことにする。

1. 交点数が最小なもの。

交点数 8 の組み合わせが 1 つ見つかった (B[0]C[0]D[0]E[0])。

2. 共有折り線数が最大なもの。

共有の折り線数が 7 なものが 1 つ見つかった (B[0]C[3]D[2]E[1])。

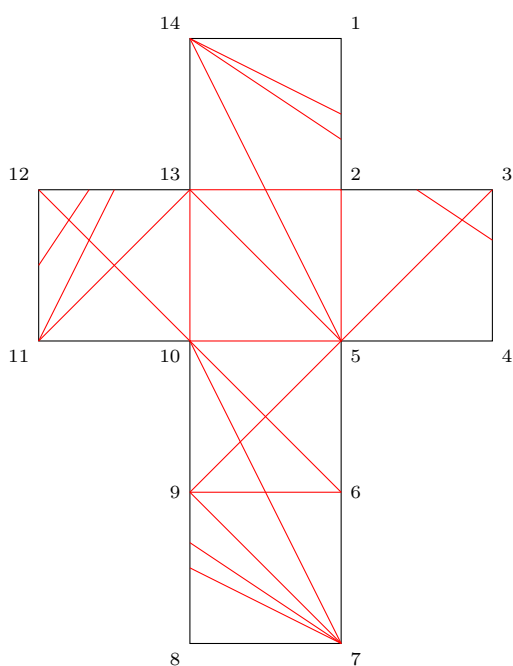


図 83: B[0]C[0]D[0]E[0]

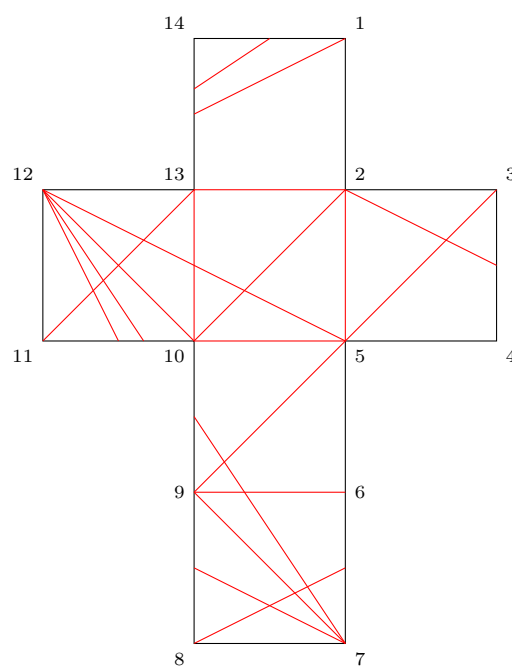


図 84: B[0]C[3]D[2]E[1]

3. 「交点数 - 共有折り線数」が最小なもの。

前小節であげた案のうち、1 つ目と 2 つ目をまとめて考案してみた。その結果、1 の結果と同じ展開図が得られた (B[0]C[0]D[0]E[0])。

表 1: 条件 1~3 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	0	0	0	08	06	02	3.000	0.667	2	7.125	30	574	7063794.43222
0	3	2	1	12	07	05	2.833	1.472	3	7.125	33	322	11240943.37374

4. 折り線の存在する範囲の分散が最小なもの.

ラテンクロスの各正方形領域に番号を振り、折り線がどの領域に存在するのかを調べ、その本数の分散を求めて比較した結果、その値が最小(= 0.22...)となるものが3つ見つかった.

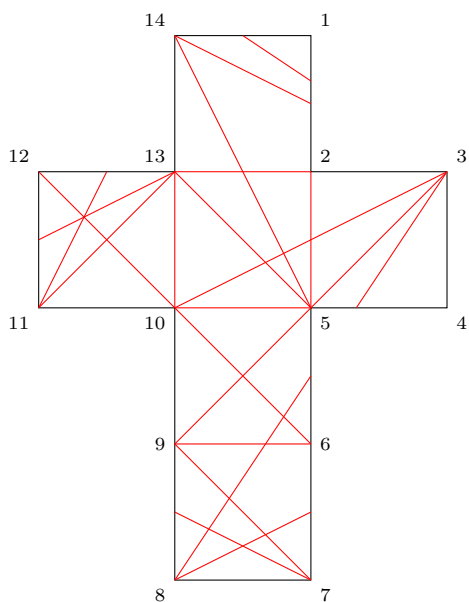


図 85: B[0]C[2]D[0]E[0]

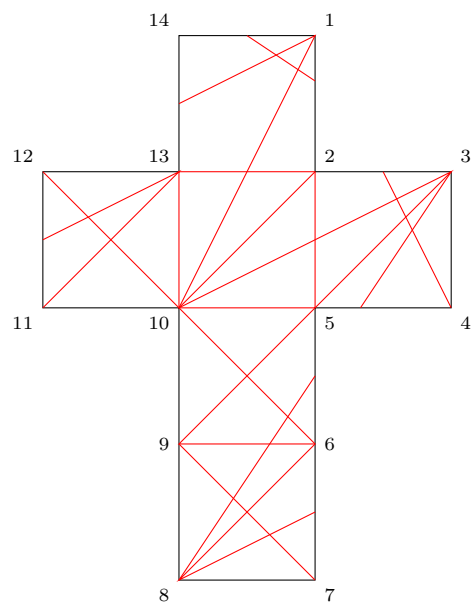


図 86: B[0]C[2]D[1]E[1]

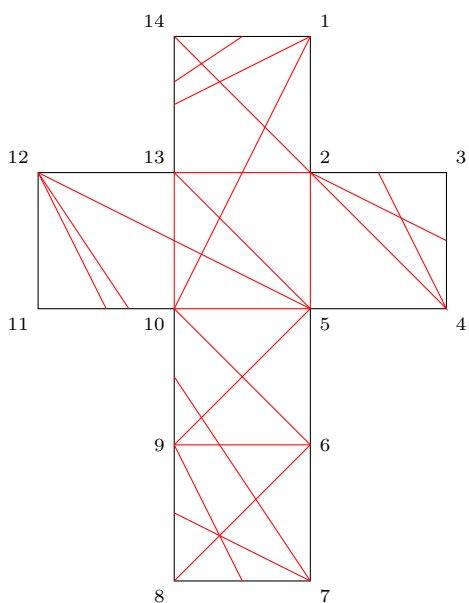


図 87: B[1]C[3]D[1]E[2]

表 2: 条件 4 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	2	0	0	13	04	09	3.333	0.222	1	11.310	37	594	4600082.14317
0	2	1	1	15	04	11	3.333	0.222	1	11.310	38	341	3872265.25208
1	3	1	2	13	04	09	3.333	0.222	1	7.125	37	585	5295506.32140

5. 折り線に囲まれた連結領域の面積の最小値が大きいもの.

各連結成分の画素数を調べることで、擬的ではあるが面積を求めることができる. この手法を用いて実際に計算を行うと、誤差も考慮して4つの組み合わせの候補が見つかった.

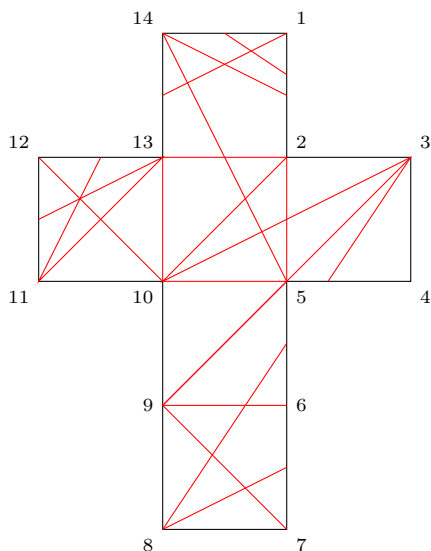


図 88: B[0]C[2]D[0]E[1]

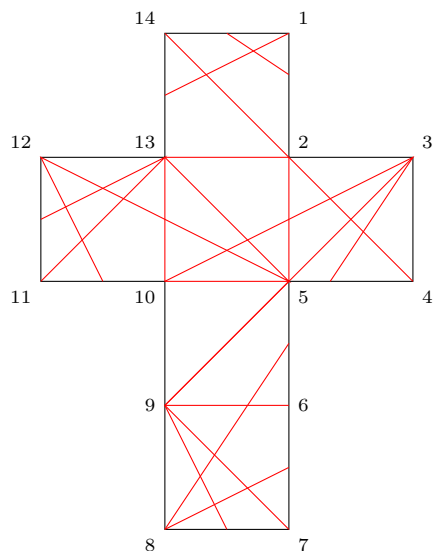


図 89: B[0]C[2]D[2]E[2]

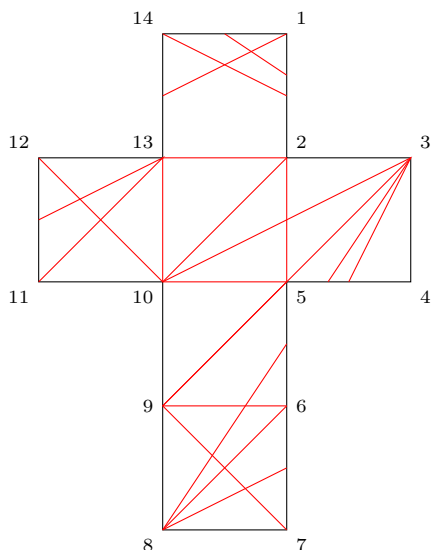


図 90: B[0]C[2]D[3]E[1]

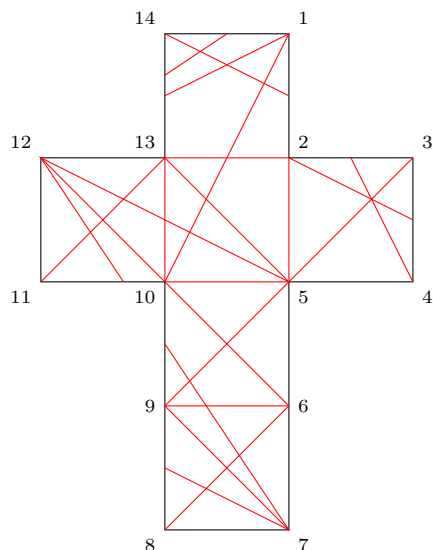


図 91: B[0]C[3]D[1]E[0]

表 3: 条件 5 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	2	0	1	12	05	07	3.167	0.472	2	11.310	35	608	6337526.86204
0	2	2	2	18	04	14	3.333	0.556	2	11.310	41	608	5840752.28079
0	2	3	1	09	06	03	3.000	0.667	2	7.125	31	608	8660026.82414
0	3	1	0	17	03	14	3.500	0.250	1	11.310	42	607	4016726.37868

6. 2本の折り線の間の角度の最小値が大きいもの。

2本の折り線間の角度を計算し、それぞれの組み合わせでの最小値を求めた。その結果、3つの組み合わせが見つかった。

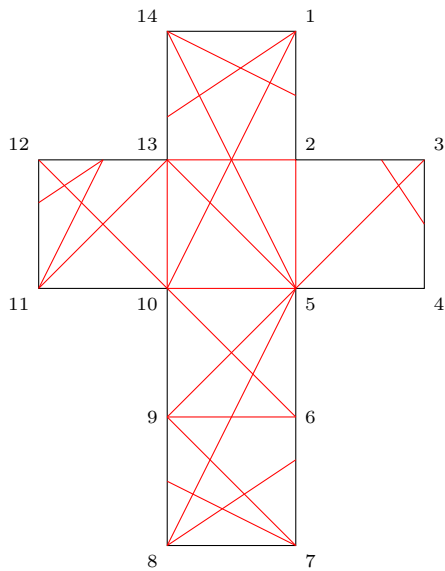


図 92: B[0]C[1]D[0]E[0]

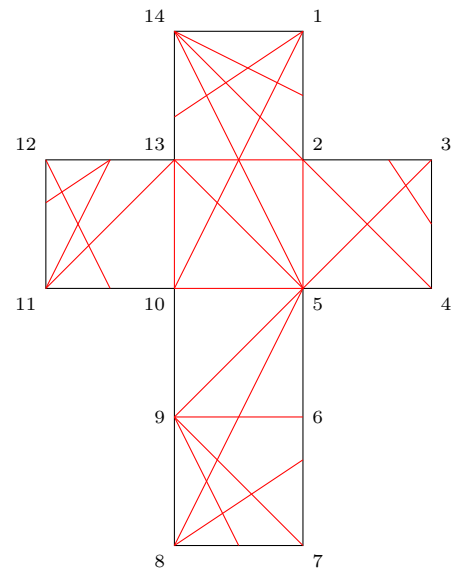


図 93: B[0]C[1]D[0]E[2]

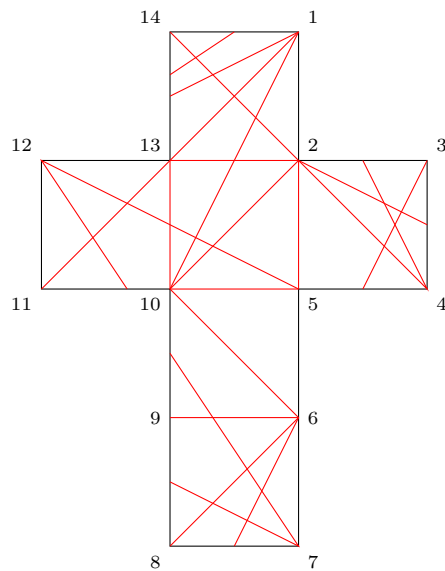


図 94: B[1]C[3]D[1]E[3]

表 4: 条件 6 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	1	0	0	16	04	12	3.333	0.556	2	18.435	40	583	4671352.95000
0	1	0	2	17	03	14	3.500	0.917	3	18.435	42	335	4774243.92800
1	3	1	3	19	03	16	3.500	0.917	3	18.435	43	133	5098681.15955

19.4 実際に作成してみる

上記で実験した中で、個人的に綺麗だと感じた「角度の最小値が最大なもの」の中から、そのほかの指標においても良いものと評価される $B[0]C[1]D[0]E[0]$ を実際に作成してみる。各多面体を組み上げた際に面の対応が見やすいように面にそれぞれ色分けをしておく。

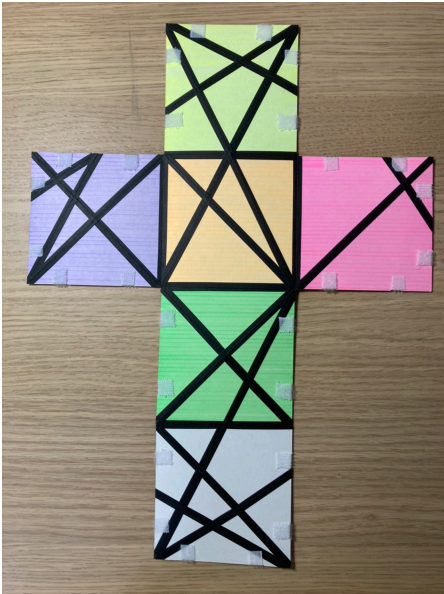


図 95: 展開した状態

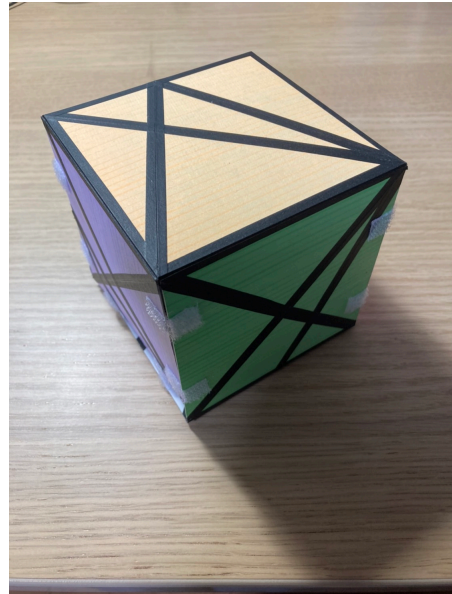


図 96: 立方体

以下のように二重被覆多角形を組み立てることができる。



図 97: 二重被覆多角形



図 98: 二重被覆多角形 (裏面)

四面体を以下のように組み立てることができる。



図 99: 四面体



図 100: 四面体 (別角度)

五面体を以下のように組み立てることができる。五面体を初見で組み立てることは意外と難易度が高い。



図 101: 五面体



図 102: 五面体 (別角度)

八面体を以下のように組み立てることができる．八面体の組み立てのための折り線を把握していないとなかなか八面体は折れない．



図 103: 八面体



図 104: 八面体 (別角度)

今回の作成では，面を画用紙で作成し，折り線部分で一度切断し，再度マスキングテープで貼り合わせることで，可動的な部分を作った．また，各辺においてはマジックテープを用いて辺同士が接着可能なようにしてある．

19.4.1 今後の展望

今回はラテンクロスの 14 本の辺による辺々接着のみについて考察してきたが，この接着に制限しない場合はラテンクロスから構成できる多面体の種類がさらに増える．その場合，計算時間が多くなることから，うまいアルゴリズムを考案する必要がある．計算時間の短縮を実現するとともに，今回と同じようにいい組み合わせを構成し，現実的に作成ができるのかどうか，またできるのであれば実際に作成をしてみたいと考える．

19.5 参考

全ての指標の表を以下に載せておく.

表 5: さまざまな指標の数値

B C D E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 – 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0 0 0 0	08	06	02	3.000	0.667	2	7.125	30	574	7063794.43222
0 0 0 1	14	06	08	3.000	1.000	2	7.125	36	257	7339399.55556
0 0 0 2	09	05	04	3.167	0.806	2	7.125	32	581	5978095.85840
0 0 0 3	13	05	08	3.167	0.472	2	7.125	36	193	6175466.52083
0 0 1 0	18	02	16	3.667	0.889	2	7.125	44	257	3807613.09504
0 0 1 1	18	03	15	3.500	0.583	2	11.310	43	390	3699780.38940
0 0 1 2	20	01	19	3.833	0.806	2	11.310	47	126	3277724.19104
0 0 1 3	20	02	18	3.667	1.222	3	11.310	46	193	5000312.12854
0 0 2 0	15	03	12	3.500	0.917	3	7.125	39	189	5350130.74951
0 0 2 1	18	05	13	3.167	1.139	3	11.310	40	189	6049859.36937
0 0 2 2	14	04	10	3.333	0.556	2	11.310	37	369	4171356.31264
0 0 2 3	20	03	17	3.500	0.250	1	11.310	44	189	3997981.45196
0 0 3 0	16	03	13	3.500	0.583	2	7.125	40	189	3996788.66937
0 0 3 1	20	03	17	3.500	0.917	3	7.125	44	189	4849880.25362
0 0 3 2	21	01	20	3.833	1.139	3	7.125	47	126	3639746.76415
0 0 3 3	21	02	19	3.667	0.556	2	7.125	46	178	3445840.72637
0 1 0 0	16	04	12	3.333	0.556	2	18.435	40	583	4671352.95000
0 1 0 1	15	04	11	3.333	1.222	3	7.125	39	256	6511110.96384
0 1 0 2	17	03	14	3.500	0.917	3	18.435	42	335	4774243.92800
0 1 0 3	16	03	13	3.500	0.583	2	11.310	41	126	5051233.41701
0 1 1 0	18	04	14	3.333	0.889	3	7.125	42	256	5033188.15249
0 1 1 1	12	05	07	3.167	0.806	3	7.125	35	544	5926945.15102
0 1 1 2	19	03	16	3.500	0.917	3	7.125	44	331	4219609.46436
0 1 1 3	13	04	09	3.333	1.222	3	7.125	37	126	6955760.73046
0 1 2 0	21	03	18	3.500	0.917	3	7.125	45	193	5255365.62765
0 1 2 1	15	05	10	3.167	1.139	3	7.125	37	193	7412888.08035
0 1 2 2	18	04	14	3.333	0.556	2	7.125	41	320	4931424.96371
0 1 2 3	17	03	14	3.500	0.250	1	7.125	41	126	4361374.26889
0 1 3 0	20	03	17	3.500	0.583	2	11.310	44	189	3394172.61312
0 1 3 1	15	03	12	3.500	0.917	3	7.125	39	189	4987608.77844
0 1 3 2	25	01	24	3.833	1.139	3	11.310	51	189	3528181.68704
0 1 3 3	18	02	16	3.667	0.556	2	11.310	43	126	3088043.31855
0 2 0 0	13	04	09	3.333	0.222	1	11.310	37	594	4600082.14317
0 2 0 1	12	05	07	3.167	0.472	2	11.310	35	608	6337526.86204

表 5: さまざまな指標の数値

B C D E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 – 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0 2 0 2	16	03	13	3.500	0.583	2	11.310	40	133	5328216.77750
0 2 0 3	13	03	10	3.500	0.250	1	7.125	38	590	4490749.76524
0 2 1 0	22	02	20	3.667	0.556	2	11.310	47	321	3437510.58307
0 2 1 1	15	04	11	3.333	0.222	1	11.310	38	341	3872265.25208
0 2 1 2	25	01	24	3.833	0.806	2	11.310	51	341	3161659.94771
0 2 1 3	15	02	13	3.667	1.222	3	7.125	41	186	4470184.70434
0 2 2 0	19	03	16	3.500	0.583	2	11.310	43	589	5810402.94213
0 2 2 1	14	06	08	3.000	1.000	3	11.310	35	589	9302166.18286
0 2 2 2	18	04	14	3.333	0.556	2	11.310	41	608	5840752.28079
0 2 2 3	15	03	12	3.500	0.250	1	7.125	40	224	4590316.22438
0 2 3 0	13	05	08	3.167	1.139	3	7.125	36	321	7793613.47145
0 2 3 1	09	06	03	3.000	0.667	2	7.125	31	608	8660026.82414
0 2 3 2	17	03	14	3.500	1.583	3	7.125	42	373	6289261.57426
0 2 3 3	11	04	07	3.333	0.889	3	7.125	36	590	5027844.36111
0 3 0 0	14	05	09	3.167	0.806	3	11.310	36	341	5620410.39738
0 3 0 1	20	04	16	3.333	1.222	3	11.310	43	322	6411057.57599
0 3 0 2	16	03	13	3.500	0.917	3	7.125	40	185	5536257.05000
0 3 0 3	20	03	17	3.500	0.250	1	11.310	44	341	3312447.58884
0 3 1 0	17	03	14	3.500	0.250	1	11.310	42	607	4016726.37868
0 3 1 1	17	03	14	3.500	0.583	2	11.310	42	323	4411583.39456
0 3 1 2	18	01	17	3.833	0.472	2	7.125	46	539	3101839.23629
0 3 1 3	18	02	16	3.667	0.556	2	11.310	44	133	3260342.23709
0 3 2 0	11	06	05	3.000	1.000	3	7.125	33	539	8121114.48669
0 3 2 1	12	07	05	2.833	1.472	3	7.125	33	322	11240943.37374
0 3 2 2	11	06	05	3.000	0.667	2	7.125	33	518	7565086.35262
0 3 2 3	13	05	08	3.167	0.472	2	7.125	36	374	5308855.15432
0 3 3 0	17	04	13	3.333	0.556	2	11.310	40	585	6091763.07750
0 3 3 1	20	03	17	3.500	0.917	3	11.310	44	323	6872754.13378
0 3 3 2	21	01	20	3.833	1.472	3	7.125	48	225	5326878.21832
0 3 3 3	21	02	19	3.667	0.556	2	11.310	46	374	3631496.86389
1 0 0 0	12	04	08	3.333	0.889	3	7.125	36	543	5121192.54552
1 0 0 1	19	03	16	3.500	1.250	3	7.125	44	257	4569259.87345
1 0 0 2	11	05	06	3.167	1.139	3	7.125	34	126	8825331.44031
1 0 0 3	17	03	14	3.500	1.250	3	7.125	42	332	5263051.86678
1 0 1 0	17	03	14	3.500	1.917	4	7.125	42	257	6408190.00964
1 0 1 1	18	03	15	3.500	0.917	3	11.310	43	383	4670673.86155
1 0 1 2	15	04	11	3.333	0.889	3	11.310	39	126	7342754.74162
1 0 1 3	18	03	15	3.500	1.917	4	11.310	43	335	6753755.20389
1 0 2 0	16	02	14	3.667	1.222	3	7.125	41	189	4543495.72873
1 0 2 1	21	02	19	3.667	0.556	2	11.310	46	189	2987477.10775

表 5: さまざまな指標の数値

B C D E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 – 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
1 0 2 2	17	03	14	3.500	0.583	2	11.310	41	126	4023106.74123
1 0 2 3	25	01	24	3.833	1.139	3	11.310	51	193	3726768.30219
1 0 3 0	15	04	11	3.333	1.222	3	7.125	38	193	6571653.00554
1 0 3 1	22	02	20	3.667	1.222	3	7.125	47	193	4765102.55048
1 0 3 2	17	03	14	3.500	0.250	1	7.125	41	126	4371300.96966
1 0 3 3	19	03	16	3.500	0.917	3	7.125	43	320	4641389.08383
1 1 0 0	20	02	18	3.667	0.889	2	11.310	46	389	3574220.67297
1 1 0 1	21	01	20	3.833	1.472	3	7.125	48	256	3728978.81207
1 1 0 2	18	03	15	3.500	1.250	3	11.310	43	331	6640468.85235
1 1 0 3	20	01	19	3.833	1.472	3	11.310	47	126	4450623.93210
1 1 1 0	17	05	12	3.167	1.472	3	7.125	40	256	6912845.92750
1 1 1 1	11	05	06	3.167	0.806	2	7.125	34	529	6341849.08651
1 1 1 2	12	06	06	3.000	0.667	2	7.125	34	313	8613945.30536
1 1 1 3	11	05	06	3.167	1.472	3	7.125	34	544	7953775.16955
1 1 2 0	23	02	21	3.667	1.222	3	7.125	48	193	4412827.52040
1 1 2 1	19	02	17	3.667	0.556	2	7.125	44	193	3147729.54287
1 1 2 2	20	03	17	3.500	0.583	2	7.125	44	320	4381057.89050
1 1 2 3	23	01	22	3.833	1.139	3	7.125	49	126	3529454.30820
1 1 3 0	20	04	16	3.333	1.222	3	11.310	43	189	5489226.64359
1 1 3 1	18	02	16	3.667	1.222	3	7.125	43	189	4984652.69443
1 1 3 2	20	03	17	3.500	0.250	1	11.310	44	194	4011786.70816
1 1 3 3	17	03	14	3.500	0.917	3	11.310	41	369	4137169.24331
1 2 0 0	17	02	15	3.667	0.556	2	11.310	43	321	3257252.00649
1 2 0 1	18	02	16	3.667	0.556	2	11.310	44	583	3298342.85331
1 2 0 2	18	03	15	3.500	0.583	2	11.310	42	133	4528204.95011
1 2 0 3	18	01	17	3.833	0.806	2	7.125	45	539	3799196.02173
1 2 1 0	22	03	19	3.500	1.583	3	11.310	46	321	5692540.14367
1 2 1 1	16	04	12	3.333	0.889	3	11.310	39	341	4512402.69165
1 2 1 2	19	04	15	3.333	0.556	2	11.310	42	341	4700086.95918
1 2 1 3	17	03	14	3.500	1.583	3	7.125	41	186	6546294.09875
1 2 2 0	21	02	19	3.667	0.889	3	11.310	46	321	5197559.58270
1 2 2 1	18	03	15	3.500	0.250	1	11.310	42	589	3566631.73753
1 2 2 2	20	03	17	3.500	0.583	2	11.310	44	373	4364996.36932
1 2 2 3	21	01	20	3.833	1.139	3	7.125	48	224	4547540.97526
1 2 3 0	12	06	06	3.000	1.333	3	7.125	34	321	8131705.89014
1 2 3 1	12	05	07	3.167	1.139	3	7.125	35	539	6174393.31102
1 2 3 2	13	05	08	3.167	0.472	2	7.125	36	373	5296639.52083
1 2 3 3	12	05	07	3.167	0.806	2	7.125	35	520	6357230.04408
1 3 0 0	16	03	13	3.500	0.250	1	11.310	40	187	2954457.84000
1 3 0 1	24	01	23	3.833	0.806	2	11.310	50	185	2813937.86440

表 5: さまざまな指標の数値

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 — 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
1	3	0	2	14	03	11	3.500	0.917	3	7.125	39	184	4917309.84352
1	3	0	3	25	01	24	3.833	0.806	2	11.310	51	185	2973345.77855
1	3	1	0	15	04	11	3.333	0.889	3	11.310	39	225	5880914.28008
1	3	1	1	16	03	13	3.500	0.250	1	11.310	41	590	3545752.54729
1	3	1	2	13	04	09	3.333	0.222	1	7.125	37	585	5295506.32140
1	3	1	3	19	03	16	3.500	0.917	3	18.435	43	133	5098681.15955
1	3	2	0	11	05	06	3.167	0.806	2	7.125	34	225	6868675.53028
1	3	2	1	15	04	11	3.333	0.889	3	7.125	39	323	4797199.78041
1	3	2	2	11	05	06	3.167	0.806	3	7.125	35	585	5839031.74694
1	3	2	3	19	03	16	3.500	1.250	3	7.125	44	374	5229866.53512
1	3	3	0	15	05	10	3.167	0.806	3	11.310	37	211	6837679.05625
1	3	3	1	21	02	19	3.667	0.556	2	11.310	46	225	4249791.19518
1	3	3	2	15	03	12	3.500	0.250	1	7.125	40	224	4579243.56937
1	3	3	3	20	03	17	3.500	0.583	2	11.310	44	225	4899706.02221

参考文献

- [1] Ziegler, G.M. Lectures on Polytopes, Volume 152 of Graduate Texts in Mathematics. Heidelberg : Springer-Verlag, 1994.
- [2] Alexandrov, A.D. *Convex Polyhedra*. Berlin: Springer-Verlag. Monographs in Mathematics. Translation of the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutatelaze, and A. B. Sossinsky, 2005.
- [3] Sabitov, I. The volume as a metric invariant of polyhedra. Distance Comput Geom 20, 1998.
- [4] O'Rourke, J. Computational Geometry in C (2nd.ed). Cambridge University Press, 1998.
- [5] Leo Liberti, Carlie Lavor, Six mathematical gems from the history of Distance Geometry, 2005.
- [6] エリック・D・ドメイン, ジョセフ・オールク著, 上原隆平訳『幾何的な折りアルゴリズム』近代科学社, 2009.
- [7] J. マトウシエク著, 岡本吉央訳『離散幾何学講義』シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005.
- [8] R・J・ウィルソン著, 西関隆夫・西関裕子訳『グラフ理論入門』原書第4版, 近代科学社, 2001.
- [9] 平田浩一, 「多面体と展開図における半分超定理について」, 2016.
- [10] 尾山大輔「経済学のための数学」(<http://www.oyama.e.u-tokyo.ac.jp/econmath13/separation03.pdf> 閲覧日:2021年3月10日)
- [11] 中本敦浩「教員養成のためのグラフ理論」, (<http://tgt.ynu.ac.jp/nakamoto/kyoin.pdf> 閲覧日:2021年1月15日)