6 数列 $\{a_n\}$ に対し, S_n を

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

で定める. $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し, $S_n = 2a_n + n$ が成り立つとき, 次の問いに答えよ.

(1) a_1 および a_2 を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ.

(3) a_n を n の式で表せ.

(1) $S_n = 2a_n + n$ より.

・$n=1$ のとき

$S_1 = 2a_1 + 1$.

ここで $S_1 = a_1$ より

$a_1 = 2a_1 + 1$ ∴ $\underline{a_1 = -1}$ //

・$n=2$ のとき

$S_2 = 2a_2 + 1$

ここで, $S_2 = a_1 + a_2$ より

$a_1 + a_2 = 2a_2 + 1$.

$-1 + a_2 = 2a_2 + 1$

∴ $\underline{a_2 = -2}$ //

(2), (3)

$$\begin{array}{rcl} S_{n+1} &=& 2a_{n+1} + (n+1) \\ -)\ S_n &=& 2a_n + n \\ \hline a_{n+1} &=& 2a_{n+1} - 2a_n + 1. \end{array}$$

∴ $a_{n+1} = 2a_n \underline{- 1.}$ //

$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

よって数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 -2,
公比 2 の等比数列.

∴ $a_n - 1 = -2 \cdot 2^{n-1}$
$= -2^n$

$\underline{a_n = -2^n + 1}$ //