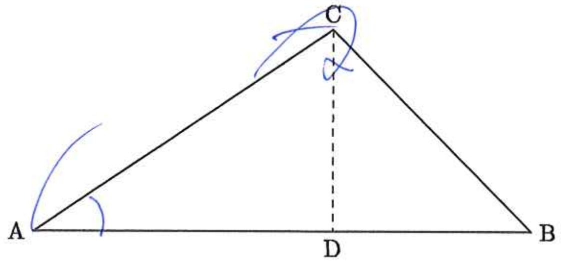
5　多角形への応用

5.1　三角形の面積

△ABC の面積 S を求めてみよう.

(1) 鋭角三角形の場合



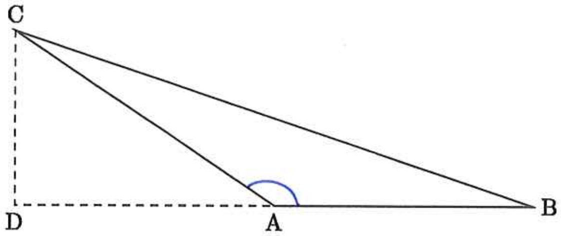
上図において, CD を ∠A の三角比と AC を用いて

CD= AC sin A

と表せるので, △ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \times \underline{AB} \times \underline{AC \sin A}$$

(2) 鈍角三角形の場合



上図において, CD を ∠A の三角比と AC を用いて

CD= AC sin A

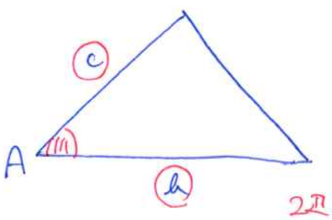
と表せるので, △ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \times \underline{AB} \times \underline{AC \sin A}$$

以上をまとめると,

三角形の面積

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$



2辺と間の角のsinθ

練習

以下のとき, 三角形 ABC の面積を求めよ.

(1) $a = 3, b = 4, C = 60°$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60°$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \underline{3\sqrt{3}}$$

(2) $a = \sqrt{3}, c = 2, B = 150°$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(3) $a = 3, b = 3, c = 3$

正三角形なので, 角はすべて60°

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60°$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{9}{4}\sqrt{3}}$$

(4) $a = 5, b = 6, c = 7$

(ヒント: $\sin\theta$ が知りたい. でもすぐわかるのは $\cos\theta$...)

余弦定理より.

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos C$$
$$49 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos C$$
$$\cos C = \frac{-\cancel{12}}{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{6}} = -\frac{1}{5}$$

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ より　　$\cos C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$= \underline{6\sqrt{6}}$$

基本
三角形に分割して考える。

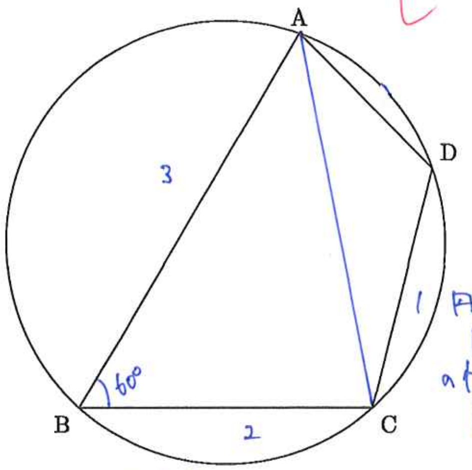
思考回路。
図から，
四角形の面積を求めるには，
$\triangle ABC + \triangle ACD$ で OK
→ AD が知りたい!!

5.2 多角形の面積

(1) 円に内接する四角形 ABCD において，

$$AB = 3, BC = 2, CD = 1, \angle B = 60^\circ$$

のときの四角形 ABCD の面積を求めよ．
(求める流れ：AC → AD → 面積)



円の内接四角形の性質より
$D = 120^\circ$

$\triangle ABC$ で余弦定理より．

$$AC^2 = 9 + 4 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 60^\circ$$
$$= 9 + 4 - 2\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$
$$= 9 + 4 - 6 = 7$$
$$\therefore AC = \sqrt{7}$$

$\triangle ACD$ で余弦定理より．

$$7 = 1 + AD^2 - 2\cdot 1\cdot AD\cdot \cos 120^\circ$$
$$7 = 1 + AD^2 - 2\cdot 1\cdot AD\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

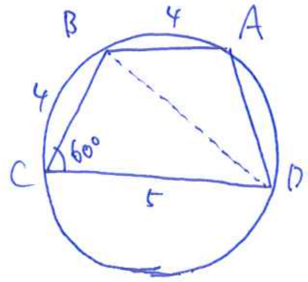
$$AD^2 + AD - 6 = 0$$
$$(AD + 3)(AD - 2) = 0$$
$AD > 0$ より $AD = 2$．

$$\therefore S = \triangle ABC + \triangle ACD$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot \sin 120^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{1}{2}\cdot \cancel{2}\cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$ //

(2) 円に内接する四角形 ABCD において，

$$AB = 4, BC = 4, CD = 5, \angle C = 60^\circ$$

のときの四角形 ABCD の面積を求めよ．



円の内接四角形なので $\angle A = 120^\circ$．

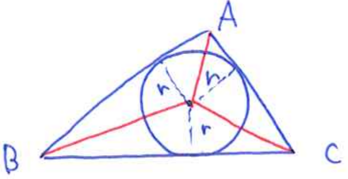
$\triangle BCD$ で余弦定理から．

$$BD^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos 60^\circ$$
$$= 16 + 25 - 20 = 21.$$

$\triangle ABD$ で余弦定理．

$$BD^2 = 16 + AD^2 - 2\cdot 4\cdot AD\cdot \cos 120^\circ$$
$$21 = 16 + AD^2 + 4AD$$
$$AD^2 + 4AD - 5 = 0$$
$$(AD + 5)(AD - 1) = 0$$
$AD > 0$ より $AD = 1$．

$$\therefore S = \triangle BCD + \triangle ABD$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot \sin 120^\circ$$
$$= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$ //



← 図で
イメージ!!

5.3 内接円と三角形

△ABC の 3 辺の長さを a,b,c とし, 内接円の半径を r とする. このとき, △ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

と表すことができる.

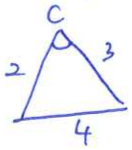
この式を使った問題を解いてみる.

問題

(1) △ABC において, $a=2, b=3, c=4$ のとき, 内接円の半径 r を求めよ.

$S = \frac{1}{2}r(2+3+4) = \frac{9}{2}r$ である。

さて, △ABC において, 余弦定理から.



$$16 = 4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\cos C$$
$$3 = -2\cdot2\cdot3\cdot\cos C$$
$$\cos C = -\frac{1}{4}$$

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ より $\sin C > 0$ なので

$$\sin C = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

∴ $S = \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$ である

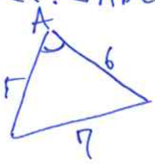
よって. $\frac{9}{2}r = \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$= \frac{\sqrt{15}}{6}$$

(2) △ABC において, $a=7, b=6, c=5$ のとき, 内接円の半径 r を求めよ.

$S = \frac{1}{2}\cdot r\cdot(7+6+5) = 9r$ である。

ここで. △ABC において 余弦定理から.



$$49 = 25+36-2\cdot5\cdot6\cdot\cos A$$
$$-12 = -2\cdot5\cdot6\cdot\cos A$$
$$\cos A = \frac{1}{5}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ で. $\sin A > 0$ なので

$$\sin A = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

∴ $S = \frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$= 6\sqrt{6}$.

よって.

$$9r = 6\sqrt{6}$$
$$r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

5.4 ヘロンの公式 (紹介)

入試で公式の証明が出る年があったりなかったり.

ヘロンの公式

△ABC の 3 辺の長さを a,b,c とする. 面積 S は以下の式で表すことができる.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ただし, $s = \frac{a+b+c}{2}$

これを知っていると, 面積が簡単に求められる.

問題

△ABC において, $a=2, b=3, c=4$ のとき, 面積 S を求めよ.

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$∴\ S = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{15}$$

Proof.

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

↲ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$$

↲ 余弦定理.

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}\times\frac{1}{2bc}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$

2乗−2乗の因数分解.

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}$$

ここで,

$$2bc-b^2-c^2+a^2 = -(b^2-2bc+c^2)+a^2$$
$$= -(b-c)^2+a^2$$
$$= a^2-(b-c)^2$$
$$= (a-b+c)(a+b-c)$$
$$2bc+b^2+c^2-a^2 = (a+b+c)(-a+b+c)$$

∴ $a+b+c = 2s$ とおくと

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2s\cdot2(s-a)\cdot2(s-b)\cdot2(s-c)}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

□