48 $a-2 \leqq x \leqq a+2$ のとき，2 次関数 $f(x)=-x^2+4ax$ の最小値を m とし，最大値を M とする．

(1) $a=3$ のとき，m の値と M の値を求めよ．

(2) $a=-1$ のとき，m の値と M の値を求めよ．

(3) m を a を用いて表せ．

(4) M を a を用いて表せ．

$f(x) = -x^2+4ax$

$= -(x^2-4ax)$

$= -\{(x-2a)^2-4a^2\}$

$= -(x-2a)^2+4a^2$

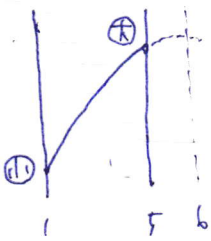
軸 $x=2a$.

頂 $(2a, 4a^2)$.

(1) $a=3$ のとき. $f(x)=-(x-6)^2+36$

定義域 $1 \leqq x \leqq 5$

軸 $x=6$.



左図より

$x=1$ で Min. 11

$x=5$ で Max 35

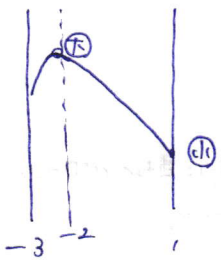
$\therefore M=35$

$m=11$

(2) $a=-1$ のとき. $f(x)=-(x+2)^2+4$

定義域 $-3 \leqq x \leqq 1$.

軸 $x=-2$.



左図より

$x=1$ で Min -5

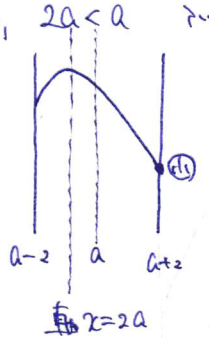
$x=-2$ で Max 4

$\therefore M=4$

$m=-5$

(3).

(i) $2a<a$ すなわち. $a<0$ のとき.



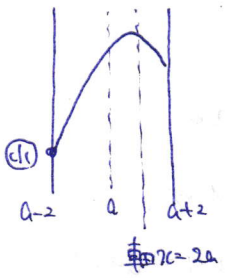
左図より $x=a+2$ で Min.

$-(a+2)^2+4a(a+2)$

$=-a^2-4a-4+4a^2+8a$

$=3a^2+4a-4$

(ii) $2a \geqq a$ すなわち. $a \geqq 0$ のとき



左図より $x=a-2$ で Min.

$-(a-2)^2+4a(a-2)$

$=-a^2+4a-4+4a^2-8a$

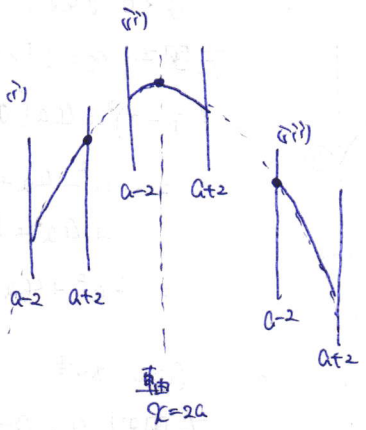
$=3a^2-4a-4$

(i).(ii) をまとめると.

$$m=\begin{cases} 3a^2+4a-4 & (a<0) \\ 3a^2-4a-4 & (0 \leqq a) \end{cases}$$

(うらへ)

(4)



(i) $a+2 < 2a$ のとき.

i.e. $2 < a$ のとき

上図より

$x = a+2$ で Max.

$-(a+2)^2 + 4a(a+2)$

$= -a^2 - 4a - 4 + 4a^2 + 8a$

$= 3a^2 + 4a - 4$.

(ii)

$-2 \leq a \leq 2$ のとき.

上図より

$x = 2a$ で Max. $4a^2$

(iii) $2a < a-2$

i.e. $a < -2$ のとき

上図より

$x = a-2$ で Max

$3a^2 - 4a - 4$.

(i)~(iii) より

$$M = \begin{cases} 3a^2 - 4a - 4 & (a < -2) \\ 4a^2 & (-2 \leq a \leq 2) \\ 3a^2 + 4a - 4 & (2 < a) \end{cases}$$

定義域・軸 ともに動くパターン。
ただ、なるべきことは同じ。