5 $a_1=3, a_2=2$ とし, $n \geqq 2$ のとき,

$$a_{n+1}=a_n^2+a_n-1$$

として数列 $\{a_n\}$ を定める.

(1) $n \geq 2$ のとき, $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つような自然数 n を求めよ.

(1) <証明>.

帰納法で示す。

(i) $n=2$ のとき.

$a_{n+1}=a_n^2+a_n-1$ より

$a_3=2^2+2-1$

$=5$

また.

$a_1\cdot a_2-1=3\cdot 2-1$

$=5$

より. $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ は成立.

(ii) $n=k$ のとき.

$a_{k+1}=a_1a_2\cdots a_k-1$ が成立すると仮定. —(※)

$a_{n+1}=a_n^2+a_n-1$ に対し. $n=k+1$ 代入.

$a_{k+2}=a_{k+1}^2+a_{k+1}-1$

$=a_{k+1}\underline{(a_{k+1}+1)}-1$

＿部に(※)代入.

$a_{k+2}=a_{k+1}(a_1\cdots a_k-1+1)-1$

$=a_1\cdots a_{k+1}-1.$

となり. $n=k+1$ でも成立.

(i), (ii)より. 2以上のすべての自然数 n について

$a_{n+1}=a_1\cdots a_n-1$ が成立 ▨

(2)

$a_{n+1}=a_n^2+a_n-1$ より

$a_n^2=a_{n+1}-a_n+1$. である.

$a_1^2=\cancel{a_2}-\overset{3}{a_1}+1$

$a_2^2=\cancel{a_3}-\cancel{a_2}+1$

$a_3^2=\cancel{a_4}-\cancel{a_3}+1.$

⋮

$a_{100}^2=\cancel{a_{101}}-\cancel{a_{100}}+1.$

$a_{101}^2=\cancel{a_{102}}-\cancel{a_{101}}+1$

$a_{102}^2=\cancel{a_{103}}-\cancel{a_{102}}+1$

$a_{103}^2=\cancel{a_{104}}-\cancel{a_{103}}+1$

$+)\ a_{104}^2=a_{105}-\cancel{a_{104}}+1.$

$\sum_{k=1}^{104} a_k^2 = a_{105}-3+104$ ← ∵(1)

$=a_1\cdots a_{104}-1-3+104$

$=a_1\cdots a_{104}+100$

であるので,

題意をみたす n は $\underline{104}$ //