アレクサンドロフパズル

竹永　耕大

Fukuoka , Japan

February 10, 2022

Contents

Alexandrov の定理

定理（Alexandrov の定理）

多角形の接着を以下の条件を満たすように行う．

1. どの頂点においても角度の和が 2π を超えない．
2. 結果として得られる複体が球面に位相同型．

このとき，この接着に対応する凸多面体は一意に定まる．

「凸多面体が一意に定まる」については，鏡像異性体 (i.e. 裏返したもの) は同じものとして扱うことにする．
この定理により，任意の多角形に条件を満たすように辺の接着を指定すれば，凸多面体を組み立てることができることがわかる．

定義（辺々接着）

簡単にいうと，同じ長さの辺と辺を接着していく手法．

辺々接着でないものとして，ある 1 つの辺を別の複数辺を跨ぐように接着したものが挙げられる．

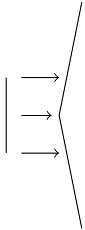


Figure: 辺々接着でないもの

ラテンクロス

ラテンクロスの辺を，下の図のように与える．その上で，どのような凸多面体が生成されるのかについて考えてみる．

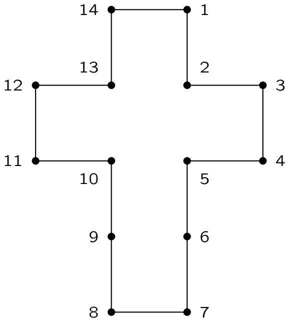


Figure: ラテンクロス

構成してみる

単純な方法で探索をし，凸多面体が構成される接着方法について左右対称なものを除き列挙してみた (プログラムの作成上，どの点とどの点を接着するのかという列挙方法になっている).

- (1),(2,14),(3,13),(4,6,12),(5),(7,11),(8,10),(9)
- (1),(2,14),(3,13),(4,6,12),(5),(7,9,11),(8),(10)
- (1),(2,14),(3,13),(4,8,12),(5,7),(6),(9,11),(10)
- (1,3),(2),(4,6,14),(5),(7,13),(8,12),(9,11),(10)
- (1,3),(2),(4,8,12,14),(5,7),(6),(9,11),(10),(13)
- (1,3,7),(2),(4,6),(5),(8,12,14),(9,11),(10),(13)
- (1,3,9),(2),(4,6,8),(5),(7),(10,14),(11,13),(12)
- (1,3,9),(2),(4,8),(5,7),(6),(10,14),(11,13),(12)
- (1,5),(2,4),(3),(6,14),(7,13),(8,12),(9,11),(10)

組み立て

前で列挙した 9 つの接着方法を実際に組み立ててみたところ，立方体，四角形 (二重被覆多面体)，四面体，五面体，八面体の 5 種類の凸多面体が構成できることが確認された．

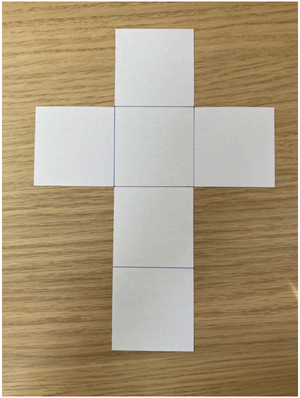


Figure: ラテンクロス

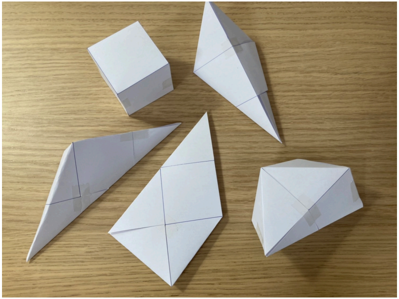


Figure: 5 つの多面体

組み立て方

ラテンクロスから作成する際には，頂点の接着しかわかっていないので，まずは頂点を貼り合わせ，竹串などで必要箇所に折り線をつけていく作業を行う．

Figure: 過程

Figure: 完成

展開図

それぞれの立体の展開図を見ていく．
六面体 (立方体) の展開図は自明なので省略．
それぞれの展開図に 2 種類の折り線が現れたので，以下の手順で名前を与える．

1. 立体の名前の頭文字 (二重被覆:D，四面:T，五面:P，八面:O) をとる．
2. 2 種類に対し下付き添字で 0 または 1 をつける．
3. 鏡像 (裏返し) に対しては，文字の肩に m をつける

この組み合わせにより展開図を区別していく．

展開図

これは二重被覆多面体の展開図.

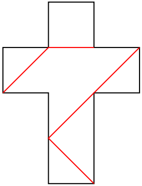


Figure: Q_0

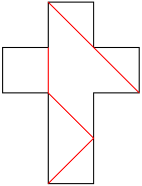


Figure: Q_1

展開図

さて，これは四面体の展開図．

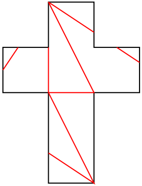


Figure: T_0

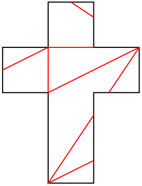


Figure: T_1

そして，これは五面体の展開図．

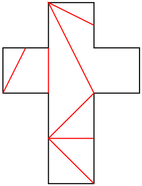


Figure: P_0

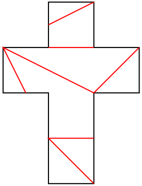


Figure: P_1

最後に，これは八面体の展開図．

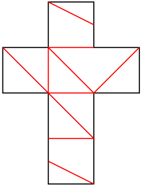


Figure: O_0

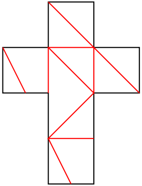
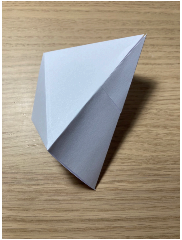


Figure: O_1



アレクサンドロフパズルの作成へ

ラテンクロス上に折り線を与え，そのいくつかをうまく選択して接着すればいずれかの凸多面体ができるパズルを作ってみよう．
さて，

- 凸多面体 $\Longrightarrow$5 種類
- 立方体の展開図：1 種類，他：2 種類 ×2(表裏) の 4 通り

なので，展開図の組み合わせは鏡像異性体を取り除き 128(通り) である．

アレクサンドロフパズルの作成へ

実際に作成するにあたって，折り線が入り乱れているようなパズルは見た目も美しくなく，作成もしにくい．そのため，128 個の組み合わせから，いい組み合わせを見つけていくことを考える．
そのために，「いい組み合わせ」とは何かを考える必要がある．

いい組み合わせとは？

いい組み合わせとは何か，いくつか考案する．

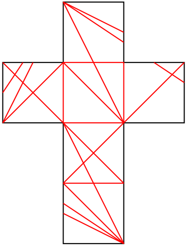
いい組み合わせの案

1. できるだけ折り線が交わることが少なくなるようにする．
2. 折り線の共有する数が多くなるようにする．
3. 折り線の存在する範囲の分散が小さくなるようにする．
4. 折り線に囲まれた連結領域の面積の最小値が大きいもの．
5. ラテンクロスの境界上のある点から複数の折り線が出ているとする．その時に，それらの間の角度が小さくならないようにする．

ここで，立方体の折り線については共有数は一定なので，全ての展開図からその辺は省略して考えることにする．

案 1：折り線の交わり

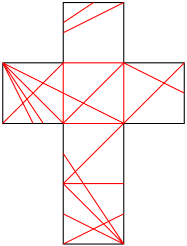
折り線の交わりが多いと，パズルが煩雑になるだろうという考えからこの案を出した．
下の組み合わせが折り線の交わりの本数の最小の組み合わせである．



組み合わせ	交点数	共有折り線	分散	角度	領域数	最小面積
$Q_0T_0P_0O_0$	08	06	0.667	7.125	30	574

案２：共有する折り線

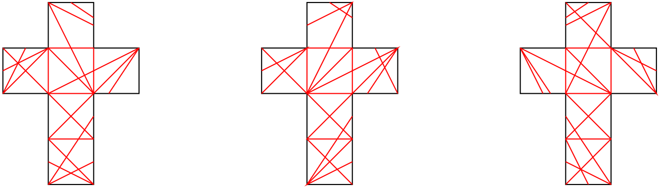
折り線の共有数が多いほどラテンクロスの上の折り線が減るので，見た目が綺麗になるだろうという考えからこの案を出した．
下の組み合わせが折り線の共有数が最大になる組み合わせである．



組み合わせ	交点数	共有折り線	分散	角度	領域数	最小面積
$Q_0 T_1^m P_1 O_0^m$	12	07	1.472	7.125	33	322

案 3：折り線の存在する範囲の分散

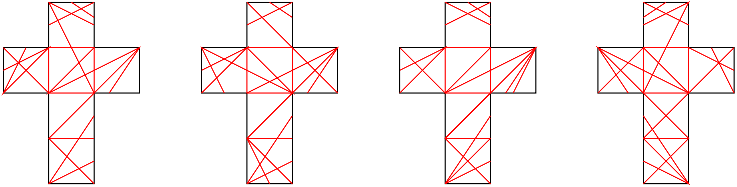
ラテンクロスを 6 つの正方形領域に分割して，その領域の内部に何本の折り線があるかを調べた．その上でその分散を調べ，最小となるものが以下の 3 つとなった．分散が小さければ，折り線に偏りがなくなるだろうという考えから，この案を出した．



組み合わせ	交点数	共有折り線	分散	角度	領域数	最小面積
$Q_0 T_1 P_0 O_0$	13	04	0.222	11.310	37	594
$Q_0 T_1 P_0^m O_0^m$	15	04	0.222	11.310	38	341
$Q_0^m T_1^m P_0^m O_1$	13	04	0.222	7.125	37	585

案 4：連結領域の面積

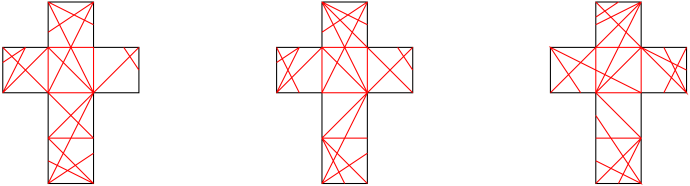
小さいパーツがあると，パズルとして制作する際に難易度が上がる．製作者目線での指標としてこの案を出した．ただし，面積を求めるのは難しかったので，連結領域内の画素数を数え上げ，擬似的な面積で代用をおこなった．誤差も考慮した結果，4 つの組み合わせが見つかった．



組み合わせ	交点数	共有折り線	分散	角度	領域数	最小面積
$Q_0T_1P_0O_0^m$	12	05	0.472	11.310	35	608
$Q_0T_1P_1O_1$	18	04	0.556	11.310	41	608
$Q_0T_1P_1^mO_0^m$	09	06	0.667	7.125	31	608
$Q_0T_1^mP_0^mO_0$	17	03	0.250	11.310	42	607

案 5：折り線のなす角度

なす角度が小さくなるほど，細い領域ができ，折り線に沿って折る際に隣のせんも巻き込む恐れがあり，そのような問題点をなくすためにこの案を出した．同一端点から出ている折り線についてそのなす角の大きさを計算し，その最小値の大きいものを探した結果 3 つ見つかった．



組み合わせ	交点数	共有折り線	分散	角度	領域数	最小面積
$Q_0T_0^mP_0O_0$	16	04	0.556	18.435	40	583
$Q_0T_0^mP_0O_1$	17	03	0.917	18.435	42	335
$Q_0^mT_1^mP_0^mO_1^m$	19	03	0.917	18.435	43	133

各指標

各案でいいとされてきた組み合わせのそれぞれの指標を一覧化してみる．

組み合わせ	交点数	共有折り線	分散	角度	領域数	最小面積
$Q_0T_0P_0O_0$	08	06	0.667	7.125	30	574
$Q_0T_1^mP_1O_0^m$	12	07	1.472	7.125	33	322
$Q_0T_1P_0O_0$	13	04	0.222	11.310	37	594
$Q_0T_1P_0^mO_0^m$	15	04	0.222	11.310	38	341
$Q_0^mT_1^mP_0^mO_1$	13	04	0.222	7.125	37	585
$Q_0T_1P_0O_0^m$	12	05	0.472	11.310	35	608
$Q_0T_1P_1O_1$	18	04	0.556	11.310	41	608
$Q_0T_1P_1^mO_0^m$	09	06	0.667	7.125	31	608
$Q_0T_1^mP_0^mO_0$	17	03	0.250	11.310	42	607
$Q_0T_0^mP_0O_0$	16	04	0.556	18.435	40	583
$Q_0T_0^mP_0O_1$	17	03	0.917	18.435	42	335
$Q_0^mT_1^mP_0^mO_1^m$	19	03	0.917	18.435	43	133

いい展開図の組み合わせの決定

今までで見てきた展開図の組み合わせの中から，一つ決定することになるが，各案ごとの指標以外にも検討した上で個人的に綺麗だと思ったものを選ぶことにした．私の選択は，案 5 での折り線の条件が良かった組み合わせ $Q_0 T_0^m P_0 O_0$ である．

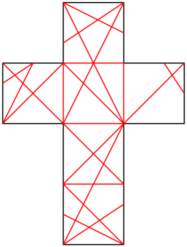


Figure: 私の選択

パズルの作成

いい組み合わせも決定したことで，実際に作成していくことにする．

準備物

- 画用紙 (厚め)
- マスキングテープ
- カラーペン
- マジックテープ (背面がテープのもの)

一度全パーツを切り分けた上でマスクキングテープで貼り合わせることで，可動部分を再現し，マジックテープで辺同士の接着を可能にした．
カラーペンについては，各正方形を色分けし，面の対応が見やすくなるように準備した．

命題

ラテンクロスの辺に，任意の辺から時計回りにナンバリングを行う．このとき，アレクワンドロフの条件を満たす接着では偶数の辺と奇数の辺の接着のみが行われる．

もし，奇 (偶) 数同士での接着が行われるとする．このとき，この接着の後には辺による 2 つの閉チェーンが生成される．さて，ラテンクロスの辺数は 14 で，奇 (偶) 数同士での接着をしたので，各々の閉チェーンの辺数は奇数本になる．奇数本のチェーンは閉じることができないためこの後どう接着しても多面体は生成されない．2 つの閉チェーンの余った辺同士を接着すれば閉じることはできるが，これは球面に位相同型にはならず，不適． □

この命題により，辺にはマジックテープのフック面とループ面を交互に与えればパズルが上手く完成することがわかる．

完成

ただし，中心に折り線が存在するような辺が複数あるため，マジックテープの接着方法は写真のように行なった．以下に，完成したラテンクロスとその辺 (マジックテープ部分) の拡大写真を載せる．

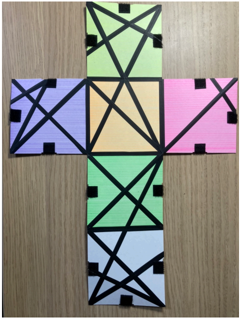


Figure: 展開した状態

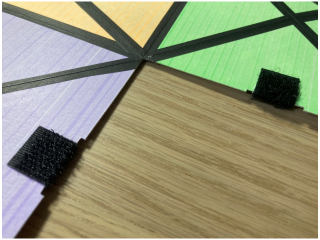


Figure: 接着する辺

組み立て (立方体)

実際に組み立てて遊んでみることにする．

Figure: 立方体

Figure: 二重被覆多角形

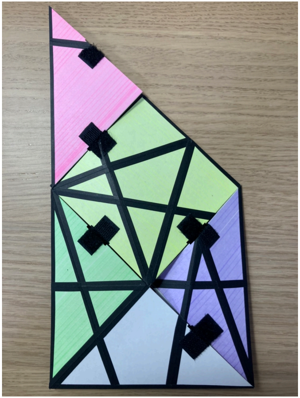


Figure: 二重被覆多角形 (裏面)

組み立て (四面体)

Figure: 四面体

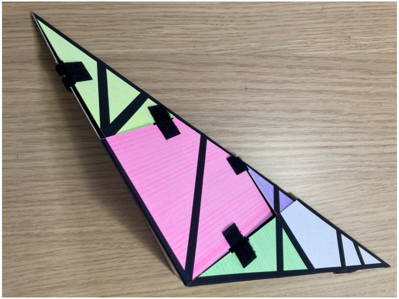


Figure: 四面体 (別角度)

組み立て (五面体)

Figure: 五面体

Figure: 五面体 (別角度)

組み立て (八面体)

Figure: 八面体

Figure: 八面体 (別角度)

よくない組み合わせとの比較

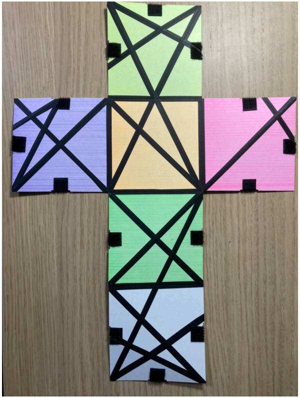


Figure: いい組み合わせ

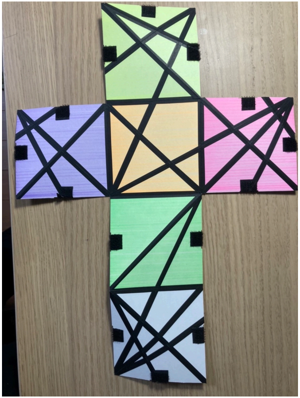


Figure: よくない組み合わせ

何秒で全て再現できるのか

30 分を限度とし，さまざまな人に実際に遊んでもらうことにした．その結果を作成した順番に表にする．

被験者	所属	作成順番				
M さん	Math M1	立方体 under 1m	五面体 5m25s	四面体 21m	二重被覆 25m46s	-
S さん	Math M1	立方体 under 1m	五面体 4m22s	四面体 20m20s	八面体 28m	-
K さん	Math M1	立方体 under 1m	八面体 2m20s	五面体 3m30s	二重被覆 6m50s	四面体 11m
K さん	Math M1	立方体 under 1m	四面体 7m42s	八面体 30min up	-	-
I さん	T	立方体 under 1m	八面体 3m6s	五面体 5m6s	二重被覆 15m22s	四面体 19m20s

Table: 実験 (いい組み合わせ)

何秒で全て再現できるのか

次の表はよくない展開図の組み合わせのパズルで実験してみた結果である．

被験者	所属	作成順番				
A さん	Math M1	立方体	二重被覆	八面体	四面体	五面体
		under 1m	3m30	7m5s	19m	21m50s
Y さん	Math M1	立方体	八面体	五面体	二重被覆	-
		under 1m	3m17s	3m50s	14m50s	
M さん	Math M1	立方体	四面体	五面体	二重被覆	-
		under 1m	13m16s	15m15s	21m20s	
T さん	Math M1	立方体	二重被覆	四面体	八面体	五面体
		under 1m	7m20s	14m24s	20m	27m
K さん	S	立方体	二重被覆	四面体	八面体	五面体
		under 1m	15m23s	19m10s	24m	28m35s

Table: 実験 (よくない組み合わせ)

考察

今回実際に遊んでもらい時間を計測した中では，どちらの組み合わせが良いかは判断できるまでには至らなかった．ただし，全て組み立て完了した人からはどの多面体が綺麗といった話や，30 分で見つけきれなかった人は時間経過後にもう少し粘りたいといった声が聞け，実際にしばらく遊んでくれていたため，パズルゲームとしては成功なのではないかと感じた．

今後の展望

今回はラテンクロスの 14 本の辺による辺々接着のみについて考察してきたが，この接着に制限しない場合はラテンクロスから構成できる多面体の種類がさらに増える．
計算時間の短縮の実現とともに，今回と同じようにいい組み合わせを構成し，現実的に作成ができるのかどうか，またできるのであれば実際に作成をしてみたい．