

45 連立方程式 $\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$ を満たす整数の組 (x, y, z) で, $x \leq y \leq z$ を満たすものを全て求めよ. (一橋大).

① $x=1$ とする.

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 21$$

② $x=1$ とする

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx + 21)$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx + 42$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 = 42$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 42$$

③ 3つの平方和が 42 となる組合せはない.

$$1^2, 4^2, 5^2 \text{ など}$$

④ $x \leq y \leq z$ とする. 3つの平方和.

$$(z-x)^2 \text{ が最小}$$

$$\therefore (z-x)^2 = 5^2$$

$$\therefore z-x=5 \quad (\because z \geq x)$$

⑤ $(x-y)^2 = 1^2$ とする

$$\therefore y-x=1 \quad \text{--- ⑥}$$

$$(y-z)^2 = 4^2$$

$$z-y=4 \quad \text{--- ⑦}$$

⑧ ⑥より

$$z = x+5$$

$$y = x+1$$

⑨ ⑦より

$$x^2 = (x+1)(x+5) + 7$$

$$0 = 6x + 5 + 7 \quad x = -2$$

$$\therefore y = -1, z = 3$$

⑩ $(x-y)^2 = 4^2$ とする

$$\therefore y-x=4 \quad \text{--- ⑪}$$

⑪ ⑪より

$$z = x+5$$

$$y = x+4$$

⑫ ⑪より

$$x^2 = (x+5)(x+4) + 7$$

$$0 = 9x + 27 = 0$$

$$x = -3$$

$$\therefore y = 1, z = 2$$

⑬

$$(x, y, z) = (-2, -1, 3), (-3, 1, 2)$$