3 数Ⅰの復習3日目(思考)

3.1 同時分布

大小2個のサイコロに対し, 大のサイコロの目を X, 小のサイコロの目を Y とする.

(1) $X=1, Y=3$ となる確率を求めよ.

$$P(X=1, Y=3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{36}$$

(2) $1 \leqq X \leqq 3, Y=3$ となる確率を求めよ.

$$P(1 \leq X \leq 3, Y=3) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{12}$$

(3) $2 \leqq X \leqq 5, Y \leqq 3$ となる確率を求めよ.

$$P(2 \leq X \leq 5, Y \leq 3) = \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{9}$$

(4) X の期待値を求めよ.

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)$$
$$= \frac{7}{2}$$

(5) $X+Y$ の期待値を求めよ.

$$E(X+Y) = \frac{7}{2}+\frac{7}{2} = 7$$

(6) $3X+2Y$ の期待値を求めよ.

$$E(3X+2Y) = 3E(X)+2E(Y)$$
$$= 3\cdot\frac{7}{2}+2\cdot\frac{7}{2} = \frac{21+14}{2} = \frac{35}{2}$$

(7) 中のサイコロを追加し, 出た目を Z とする. $X+Y+Z$ の期待値を求めよ.

$$E(X+Y+Z) = \frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}$$
$$= \frac{21}{2}$$

(8) X を100の位, Y を10の位, Z を1の位とする得点の期待値を求めよ.

$$E(100X+10Y+Z)$$
$$= 100\cdot\frac{7}{2}+10\cdot\frac{7}{2}+\frac{7}{2} = \frac{7}{2}\cdot(100+10+1)$$
$$= \frac{7}{2}\cdot 111 = \frac{777}{2}$$

$\boxed{1}\times 4$
$\boxed{2}\times 3$
2回.

3.2 独立

問題

1と書かれたカードが4枚, 2と書かれたカードが3枚入った袋からカードを2回続けて取り出す. 1回目のカードの値を X, 2回目のカードの値を Y とするとき, 以下の確率を求めよ.

(1) 取り出した玉を元に戻さない場合,

(a) $P(X=1)$

$$\frac{4}{7}$$

(b) $P(Y=2)$

1回目		2回目	
$\boxed{1}$	$\longrightarrow$	$\boxed{2}$	$\cdots \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{12}{42}$
$\boxed{2}$	$\longrightarrow$	$\boxed{2}$	$\cdots \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{6}{42}$

$$\therefore P(Y=2) = \frac{\cancel{18}\ 3}{\cancel{42}\ 7} = \frac{3}{7}$$

(c) $P(X=1, Y=2)$

上の表より $\frac{2}{7}$

(2) 取り出した玉を元に戻す場合,

(a) $P(X=1)$

$$\frac{4}{7}$$

(b) $P(Y=2)$

1回目		2回目	
$\boxed{1}$	$\rightarrow$	$\boxed{2}$	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{12}{49}$
$\boxed{2}$	$\rightarrow$	$\boxed{2}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$$\therefore P(Y=2) = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$$

(c) $P(X=1, Y=2)$

上の表より $\frac{12}{49}$

独立とは

2つの確率変数 X, Y が互いに独立とは,
Xのとる値a、Yのとる値b に対して 以下が aとbのとり方に関係なく常に成り立つときをいう。

$$P(X=a, Y=b) = P(X=a)\cdot P(Y=b)$$

☆ (1)と(2)のケースでは、(1)は独立でない
(2)は独立.

問題

1 と書かれたカードが 4 枚, 2 と書かれたカードが 3 枚入った袋からカードを 2 回続けて取り出す. 1 回目のカードの値を X, 2 回目のカードの値を Y とするとき, 以下の期待値を求めよ.

(1) 取り出した玉を元に戻さない場合,

(a) $E(X)$

1回目に $\boxed{1}$ を引く確率 … $\frac{4}{7}$

〃 $\boxed{2}$ 〃 $\frac{3}{7}$

$$\therefore E(X) = \frac{4}{7}\cdot 1 + \frac{3}{7}\cdot 2 = \frac{10}{7}$$

(b) $E(Y)$

1回目	2回目 (Y)	
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$
	$\boxed{2}$	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$
$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}$
	$\boxed{2}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}$

∴ 2回目に $\boxed{1}$ … $\frac{4}{7}$

〃 $\boxed{2}$ … $\frac{3}{7}$

$$\therefore E(Y) = \frac{4}{7}\cdot 1 + \frac{3}{7}\cdot 2 = \frac{10}{7}$$

(c) $E(X+Y)$

$X+Y$	2	3	4	計
P	$\frac{12}{7\cdot 6}$	$\frac{24}{7\cdot 6}$	$\frac{6}{7\cdot 6}$	1

$$E(X+Y) = \frac{1}{7\cdot 6}(2\cdot 12 + 3\cdot 24 + 4\cdot 6) = \frac{20}{7}$$

(d) $E(XY)$

XY	1	2	4	計
P	$\frac{12}{7\cdot 6}$	$\frac{24}{7\cdot 6}$	$\frac{6}{7\cdot 6}$	1

$$E(XY) = \frac{1}{7\cdot 6}(1\cdot 12 + 2\cdot 24 + 4\cdot 6) = \frac{14}{7} = 2$$

(2) 取り出した玉を元に戻す場合,

(a) $E(X)$

1回目に 1 … $\frac{4}{7}$

2 … $\frac{3}{7}$

$$\therefore E(X) = \frac{4}{7}\cdot 1 + \frac{3}{7}\cdot 2 = \frac{10}{7}$$

(b) $E(Y)$

同上 $E(Y) = \frac{10}{7}$

(c) $E(X+Y)$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{10}{7} + \frac{10}{7} = \frac{20}{7}$$

(d) $E(XY)$

XY	1	2	4	計
P	$\frac{4\cdot 4}{7\cdot 7}$	$\frac{4\cdot 3}{7\cdot 7}\times 2$	$\frac{3\cdot 3}{7\cdot 7}$	1

$$E(XY) = \frac{1}{7\cdot 7}(16 + 48 + 36) = \frac{100}{49}$$

独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

$$\boxed{(\text{分散}) = (2\text{乗平均}) - (\text{平均})^2}$$

問題

大小 2 個のサイコロを投げて出る目をそれぞれ X, Y とする.

平均 $\cdots \dfrac{7}{2}$

(1) $V(X), V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

$$V(X) = \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+4+9+16+25+36\right) - \frac{49}{4}$$

20　10　61

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$$

同上

$$V(Y) = \frac{35}{12}$$

「どう工夫するか」が大切。

ミスが少なくなるように!!

(2) $V(X+Y)$ を求めよ.

2乗和

X+Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\to 4+9+16+25+36+49$

$\to 9+16+25+36+49+64$

$\to 16+25+36+49+64+81$

$\to 25+36+49+64+81+100$

$\to 36+49+64+81+100+121$

$\to 49+64+81+100+121+144$

2乗平均

$$\to \frac{1}{36}\left(4+9\times2+16\times3+25\times4+36\times5 + 49\times6+64\times5+81\times4 + 100\times3+121\times2+144\right)$$

$$= \frac{1}{36}\left(4+18+48+100+180+294 + 320+324+300 + 242+144\right)$$

170　500　710

$$= \frac{1}{36}\left(170+500+710+644\right)$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 1974 = \frac{329}{6}$$

$X+Y$ の

平均 $\cdots 7$

$$\therefore V(X+Y) = \frac{329}{6} - 7^2$$

$$= \frac{329}{6} - 49 = \frac{1}{6}(329-294) = \frac{35}{6}$$

独立な確率変数の和の分散

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

$6\overline{)1974}$ → 329

18

17

12

54

3.2.1 証明

確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y について,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

<proof>.

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} p_i (X_i + Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i X_i + p_i Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i X_i + \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

■

独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

<proof>

大学で。 ■

$X \backslash Y$	Y_1	Y_2	計
X_1	$p_1 q_1$	$p_1 q_2$	p_1
X_2	$p_2 q_1$	$p_2 q_2$	p_2
計	q_1	q_2	1

のとき…

$$\begin{aligned}
E(XY) &= X_1 Y_1 p_1 q_1 + X_1 Y_2 p_1 q_2 + X_2 Y_1 p_2 q_1 + X_2 Y_2 p_2 q_2 \\
&= X_1 p_1 \cdot Y_1 q_1 + X_1 p_1 \cdot Y_2 q_2 + X_2 p_2 \cdot Y_1 q_1 + X_2 p_2 \cdot Y_2 q_2 \\
&= X_1 p_1 (Y_1 q_1 + Y_2 q_2) + X_2 p_2 (Y_1 q_1 + Y_2 q_2) \\
&= (X_1 p_1 + X_2 p_2)(Y_1 q_1 + Y_2 q_2) \\
&= E(X)\, E(Y)
\end{aligned}$$

独立な確率変数の和の分散

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

<proof>

$$V(X+Y) = \underbrace{E((X+Y)^2)}_{①} - \underbrace{(E(X+Y))^2}_{②}$$

$$\begin{aligned}
① &= E(X^2 + 2XY + Y^2) \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\
&= E(X^2) + 2E(X) \cdot E(Y) + E(Y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
② &= (E(X+Y))^2 = (E(X) + E(Y))^2 \\
&= (E(X))^2 + 2E(X) \cdot E(Y) + (E(Y))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ V(X+Y) &= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) \\
&\quad - ((E(X))^2 + 2E(X) \cdot E(Y) + (E(Y))^2) \\
&= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&\quad + E(Y^2) - (E(Y))^2 \\
&= V(X) + V(Y).
\end{aligned}$$

■

3コになっても"2コのときに使った公式"は使える!!

3.2.2 練習

大中小3個のサイコロを投げるとき, 以下の値を求めよ.

(1) 出る目の和の期待値

大、中、小の目を X, Y, Z とおくと

$E(X) = E(Y) = E(Z) = \frac{7}{2}$ なので

$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 3 \times \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ //

(2) 出る目の積の期待値

X, Y, Z は互いに独立なので

$$E(X \cdot Y \cdot Z) = E(X) \cdot E(Y) \cdot E(Z) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{343}{8}$$ //

(3) 出る目の和の分散

X, Y, Z は互いに独立なので

$$V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{4}$$ //