7 不等式の証明

実数の大小関係の基本性質

$$a > b, b > c \Longrightarrow a > c$$
$$a > b \Longrightarrow a + c > b + c, \quad a - c > b - c$$
$$a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$
$$a > b, c < 0 \Longrightarrow ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

このことから導かれること.

$$\begin{cases} a>0,\ b>0 \Rightarrow a+b>0,\ ab>0 \\ a<0,\ b<0 \Rightarrow a+b<0,\ ab>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>b \Leftrightarrow a-b>0 \\ a<b \Leftrightarrow a-b<0 \end{cases}$$

7.1 基本の証明

(1) $x > 1, y > 1$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$xy + 1 > x + y$$

<証明>.

$$(xy+1)-(x+y) = xy - x - y + 1$$
$$= x(y-1)-(y-1)$$
$$= (x-1)(y-1)$$

さて,
$x>1 \Leftrightarrow x-1>0$
$y>1 \Leftrightarrow y-1>0$ なので,

$(x-1)(y-1)>0$

$\therefore\ (xy+1)-(x+y)>0$

よって $xy+1 > x+y$ 図

(2) $x > y$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$3x - 4y > x - 2y$$

<証明>.

$$(3x-4y)-(x-2y) = 3x-4y-x+2y$$
$$= 2x-2y$$
$$= 2(x-y)$$

さて, $x>y$ より
$x-y>0$.

$\therefore\ 2(x-y)>0$

よって. $(3x-4y)-(x-2y)>0$

よって, $3x-4y > x-2y$ 図

7.2　さまざまな証明

(1) 以下の不等式を示せ．また，等号成立条件を調べよ．

$$x^2+10y^2 \geqq 6xy$$

＜証明＞.

$(x^2+10y^2)-6xy = x^2-6xy+10y^2$

$= x^2-6xy+9y^2+y^2$

$= (x-3y)^2+y^2$

$(x-3y)^2 \geqq 0$, $y^2 \geqq 0$ であるので,

$(x-3y)^2+y^2 \geqq 0$

$\therefore$ $(x^2+10y^2)-6xy \geqq 0$

i.e. $x^2+10y^2 \geqq 6xy$ 　■

等号成立は,

$x-3y=0$ かつ $y=0$

$\therefore$ $x=0$, $y=0$ で

等号成立 //

(2) $a>0, b>0$ のとき, 以下の不等式を示せ．

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

＜証明＞.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$ であるので,

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ を示す

$\Leftrightarrow$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$ を示す. —(*)

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2 = a+2\sqrt{ab}+b-(a+b)$

$= 2\sqrt{ab}$.

$\sqrt{ab}>0$ より. $2\sqrt{ab}>0$.

$\therefore$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2>0$ が成立.

i.e. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

よって (*) から,

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ 　■

(3) 以下の不等式を示せ．また，等号成立条件を調べよ．

$$|a|+|b| \geqq |a+b|$$

＜証明＞.

$|a|+|b| \geqq 0$, $|a+b| \geqq 0$ であるので,

$|a|+|b| \geqq |a+b|$ を示す

$\Leftrightarrow$ $(|a|+|b|)^2 \geqq (|a+b|)^2$ を示す. —(*).

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2 = |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$= a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$= 2|ab|-2ab$.

$= 2(|ab|-ab)$

ここで, $|ab| \geqq ab$ であるので

$|ab|-ab \geqq 0$.

$\therefore$ $2(|ab|-ab) \geqq 0$

よって

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2 \geqq 0$

i.e.

$(|a|+|b|)^2 \geqq (|a+b|)^2$

(*)より

$|a|+|b| \geqq |a+b|$. 　■