64 以下の命題を証明せよ．ただし，$n \in \mathbb{Z}$ とする．

(1) n^2 が偶数ならば n は偶数である．

(2) $\sqrt{2}$ は無理数である．

(3) $\sqrt{3}$ は無理数である．

(1) <証明>

「n^2 が偶数 $\Rightarrow$ n が偶数」

の対偶

「n が奇数 $\Rightarrow$ n^2 が奇数」

を示す。

n が奇数のとき，

$$n = 2m+1 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2+4m+1 \\ &= 2(2m^2+2m)+1 \end{aligned}$$

∴ 2×(整数)+1 と表せるので

n^2 も奇数

よって対偶が真なのでもとの命題も真 ■

(2) <証明>.

背理法で示す。

$\sqrt{2}$ が有理数と仮定．

i.e. $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ （m, n：互いに素，$n \neq 0$ / $m, n \in \mathbb{Z}$）

と書ける。

$$\sqrt{2}\,n = m.$$

辺を2乗して

$$2n^2 = m^2 \quad \text{—} (*)$$

(左辺)＝偶数なので右辺も偶数

m^2 が偶数なので m も偶数（∵(1)）

∴ $m = 2l$ と書ける.

$$m^2 = 4l^2$$

(*)から

$$2n^2 = 4l^2$$
$$n^2 = 2l^2$$

同様に n^2 も偶数なので n も偶数.

これは n, m が互いに素であることに矛盾.

∴ 仮定が誤り. i.e. $\sqrt{2}$ は無理数 ■

(3) <証明>

背理法で示す。

$\sqrt{3}$ が有理数と仮定.

i.e. $\sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$ （$m, n \in \mathbb{Z}$，$n \neq 0$，m, n：互いに素）.

と書ける。

$$\sqrt{3}\,n = m$$

$$3n^2 = m^2 \quad \text{—} (*)$$

(左辺)：3の倍数なので右辺も3の倍数.

m^2 が3の倍数なので m も3の倍数

∵ 対偶「m が3の倍数でない $\Rightarrow$ m^2 が3の倍数でない」

を示す。

m が3の倍数でないので

$m = 3k+1$，$m = 3k+2$ と書ける.（$k \in \mathbb{Z}$）

(i) $m = 3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} m^2 &= 9k^2+6k+1 \\ &= 3(3k^2+2k)+1. \end{aligned}$$

(ii) $m = 3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} m^2 &= 9k^2+12k+4 \\ &= 3(3k^2+2k+1)+1. \end{aligned}$$

ともに3で割ったら余り1

∴ 対偶は真なのでもとの命題も真

∴ $m = 3k$ （$k \in \mathbb{Z}$）と書ける。

このとき $m^2 = 9k^2$

(*)より

$$3n^2 = 9k^2$$
$$n^2 = 3k^2$$

同じ議論から，n も3の倍数.

これは，m と n が互いに素であることに矛盾.

∴ 仮定が誤り.

i.e. $\sqrt{3}$ は無理数 ■