2 二項定理

2.1 復習

展開せよ．

(1) $(x+y)^5$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

(2) $(x+2y)^4$

$= 1\cdot x^4 + 4(x)^3\cdot(2y)^1 + 6(x)^2\cdot(2y)^2 + 4(x)\cdot(2y)^3 + (2y)^4$

$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

(3) $(2x+3)^6$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$= (2x)^6 + 6\cdot(2x)^5\cdot 3 + 15(2x)^4\cdot 3^2 + 20\cdot(2x)^3\cdot 3^3 + 15\cdot(2x)^2\cdot 3^4 + 6(2x)\cdot 3^5 + 3^6$

$= 64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729$

2.2 二項定理

$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$

xy^4 x y y y y

y x y y y

$\vdots$

${}_5C_4 = 5$

xy^4 の係数 … ${}_5C_4 = 5$

同様にして…

$$\boxed{(x+y)^5 = {}_5C_5\cdot x^5 + {}_5C_4\cdot x^4y + {}_5C_3\cdot x^3y^2 + {}_5C_2\cdot x^2y^3 + {}_5C_1\cdot xy^4 + {}_5C_0\, y^5}$$

二項定理

xy^3 の係数

x は $2y$ 3 コ

${}_4C_1 \times x \times (2y)^3 = 4\times x \times 8y^3$

$= 32xy^3$

2.3 問題

以下の展開式において, [ ] 内に指定された項の係数を求めよ.

(1) $(2x+3y)^5$ $[x^3y^2]$

5コの( )から. 2xを3コ. 3yを2コ.

i.e.

$${}_5C_2 \cdot (2x)^3 \cdot (3y)^2$$

$$= 10 \times 8x^3 \times 9y^2$$

$$= 720x^3y^2$$

720

(2) $(2x-y)^7$ $[x^5y^2]$

7コの( )の中から, 2xを5コ. −yを2コ

i.e.

$${}_7C_2 \times (2x)^5 \cdot (-y)^2$$

$$= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \times 32x^5 \times y^2$$

$$= 21 \times 32 \times x^5y^2$$

672

(3) $(3x-2y)^8$ $[x^4y^4]$

8コの( )の中から, 3xを4コ. (−2y)を4コ.

i.e.

$${}_8C_4 \times (3x)^4 \times (-2y)^4$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot 81x^4 \cdot 16y^4$$

$$= 10 \cdot 7 \cdot 81 \cdot 16\ x^4y^4$$

$$= 90720\ x^4y^4$$

90720

(4) $(5x+3y)^9$ $[x^3y^6]$

2.4 問題

以下の展開式において, [ ] 内に指定された項の係数を求めよ.

(1) $(a+b+c)^4$ $[a^2bc]$

4コの( )から. a2コ. b1コ. c1コ.

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 2 = 12$$

∴ a^2bcの係数は.

12

(2) $(a+b+c)^6$ $[a^3b^2c]$

6コの( )から. a3コ. b2コ. c1コ.

$${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times 1 = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} \times 3 = 60.$$

∴ a^3b^2c の係数は 60

(3) $(a+3b+2c)^7$ $[a^3b^2c^2]$

7コの中から. a3コ. b2コ. c2コ

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1}$$

$$= 210$$

$$\therefore 210 \times a^3 \times (3b)^2 \times (2c)^2$$

$$= 210 \times a^3 \times 9b^2 \times 4c^2$$

$$= 840 \times 9\ a^3b^2c^2$$

$$= 7560\ a^3b^2c^2$$

∴ $a^3b^2c^2$の係数は

7560