数学ランダム問題集

Takenaga Koudai

2021 年 8 月 21 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 四面体 OABC において，以下の 2 つの条件は同値であることを示せ．

（1）$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{AB}^2$

（2）$\mathrm{OA} \perp \mathrm{BC}$, $\mathrm{OB} \perp \mathrm{AC}$, $\mathrm{OC} \perp \mathrm{AB}$

$\boxed{\textbf{2}}$ $\triangle$OAB を，OA$=$OB の直角二等辺三角形とする．OA の中点を M，OB の 3 等分点のうち O に近いほうの点を N とし，AN と BM との交点を P とする．$\angle$APB$=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値はいくらか．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ.

$\boxed{\textbf{4}}$ $x^5=1$, $x \neq 1$ のとき，次の (1)，(2) の値をそれぞれ求めよ．

(1) $x+\dfrac{1}{x}$

(2) $2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2}{x^3+1}+\dfrac{x^3}{x^4+1}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ O，S，K のカードが 1 枚ずつ，A のカードが 2 枚の計 5 枚のカードがある．以下の問に答えよ．

(1) 5 枚のカードを一列に並べてできる 5 文字の列は全部で何通りあるか．

(2) 5 枚のカードを箱の中にいれる．この箱から 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し，取り出した順に左から一列に並べて 3 文字の列を作る試行を 100 回繰り返すことを考える．O，A，K の順に並ぶ事象が 100 回のうち r 回起こる確率を $\mathrm{P}(r)$ とするとき，$\mathrm{P}(r)$ が最大となるときの r の値を求めよ．ただし，それぞれの試行において，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする．

$\boxed{\textbf{6}}$ △ABC は中心 O, 半径 $\sqrt{3}$ の円に内接している．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと, 関係式 $13\vec{a}+12\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ が成り立つ．このとき，次の (1)〜(3) の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は直交することを示せ．

(2) △ABC の面積を求めよ．

(3) △ABC の頂点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いてあらわせ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ xy 平面上に，次の媒介変数で与えられる曲線 C がある．

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(2) 曲線 C において，$y \geqq a$ の部分の弧の長さを $\mathrm{L}(a)$ とするとき，$\mathrm{L}(a)$ を a を用いて表せ．ただし，$0 \leqq a < 2$ とする．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $-\dfrac{3}{2} < a_1 < 3,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $a_1 < a_2$ であることを示せ．また，$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して $0 < a_n < 3$ であることを示せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $0 < 3 - a_n \leqq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(3 - a_1)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を直線 $y = x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

$\boxed{\textbf{10}}$ 点 $\mathrm{A}(1,3,0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{d}=(-1,1,-1)$ に平行な直線を l とする．また，直線 $x+1=\dfrac{3-y}{2}$，$z=2$ を m とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P，Q がそれぞれ直線 l，m 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値と，そのときの P，Q の座標を求めよ．

(2) 直線 l，m の両方に垂直な直線 n の方程式を，$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ の形で求めよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とし，$2 < e < 3$ を用いてもよい．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とする．(1) の結果より，$f^{(n)}(x)$ を類推し，それが正しいことを証明せよ．ただし，n は自然数とする．

(3) 任意の自然数 n に対して，$f^{(n)}(x) = 0$ を満たす x の値を x_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{n}$ を求めよ．

ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ を用いてもよい．

$\boxed{\mathbf{12}}$ 2 点 $(0,1)$，$(a_n,0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を通る直線と，直線 $y=(n+2)x$ の交点の x 座標を a_{n+1} とする．$a_1=\dfrac{1}{3}$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_2 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表し，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)a_na_{n+1}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{13}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{AOB} = 36^\circ$，OA=OB，$\mathrm{AB} = 1$ である二等辺三角形 OAB において，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と OB の交点を C とする．このとき，BC の長さを求めよ．

(2) 正五角形 OABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{d}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{d}$ を用いて表せ．

$\boxed{\textbf{14}}$ $\log_2 1$ から $\log_2 20$ の数が書かれた 20 枚のカードがある．
以下の問いに答えなさい．

(1) この 20 枚のカードの中から同時に 2 枚のカードを選ぶとき，2 枚のカードに書かれた数の和が整数となる確率を求めよ．

(2) この 20 枚のカードの中から同時に 2 枚のカードを選ぶとき，2 枚のカードに書かれた数の差が整数となる確率を求めよ．

(3) この 20 枚のカードの中から同時に 3 枚のカードを選ぶとき，選んだ 3 枚のどの 2 枚のカードに書かれた数の和も整数とならない確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{15}}$ 媒介変数 θ を用いて，

$$\begin{cases} x = 2\cos^3\theta \\ y = 2\sin^3\theta \end{cases} \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線を C とする．

$\theta = t$ における曲線の接線を l とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を θ を用いて表せ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(2) 直線 l の方程式を求めなさい．

(3) 曲線 C，直線 l，x 軸で囲まれる領域を S_1 とし，曲線 C，直線 l，y 軸で囲まれる領域を S_2 とする．
S_1，S_2 を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とするとき，$V_1 + V_2$ の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{16}}$ 平面上に直径 8 の円がある．直径 AB 上の任意の点 P において，AB に垂直な弦 CD をとり，QC=QD，PQ= 3 である △QCD を，円に垂直な平面上に作る．P を A から B まで動かすとき，△QCD が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{17}}$ 2 つの曲線 $y = x$ と $y = x^n$ (n は 2 以上の整数) について，以下の問いに答えよ．

(1) 2 つの曲線に囲まれた部分を $y = x$ 周りに回転させてできる立体の体積を V_n とする．V_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{18}}$ p を素数とし，自然数 a は p と互いに素であるとき，以下の問いに答えよ．

（1）a , $2a$, $3a$, $\cdots$, $(p-1)a$ を p で割った余りはそれぞれ異なることを示せ．

（2）a^{p-1} は p の倍数であることを示せ．

（3）2018^{1800} を 181 で割ったあまりを求めよ．

$\boxed{\mathbf{19}}$ 3 辺の長さが a , b , c である三角形の面積 S が $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ を用いて，$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と表されることを示せ.

$\boxed{\textbf{20}}$ 以下の性質を満たす関数を凸関数という．

$$\text{任意の } x_1,\ x_2 \text{ と任意の } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ に対し，} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$$

さて，$f(x)$ が凸関数であるとする．任意の $x_1\ , x_2, \cdots,\ x_n$ と $\lambda_i \geq 0, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ をみたす任意の $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ に対して，以下が成立することを示せ.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$$

$\boxed{\textbf{21}}$ $a,\ b,\ c\ \geq 0$ とする．以下が成立することを示せ．

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$\boxed{\textbf{22}}$ 任意の三角形において，外心を O，重心を G，垂心を H とおく．O，G，H が一直線上にあることを示せ．また，$OG : GH = 1 : 2$ を示せ．