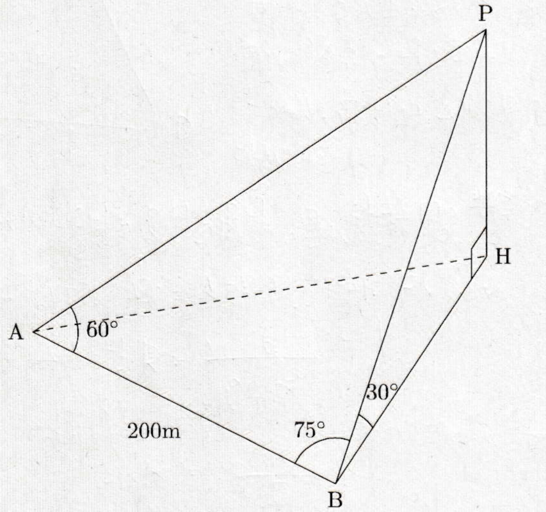
6 空間への応用

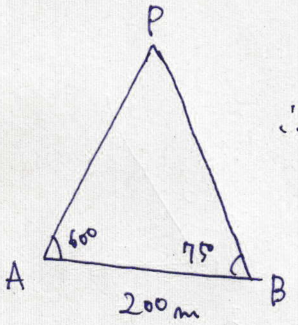
6.1 空間図形

200m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から, 山の山頂 P を見ると,

$$\angle PAB = 60^\circ,\ \angle PBA = 75^\circ$$

であった．また, B から P を見上げた角度は 30° であった．図において, P と B の標高差 PH を求めよ．





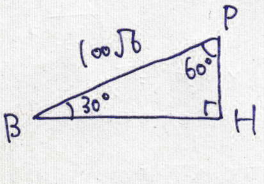
左図で，∠APB = 45°

∴ ΔAPBで正弦定理より

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = \frac{PB}{\sin 60^\circ}$$

$$PB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 200 \cdot \sqrt{2}$$

$$= 100\sqrt{6}$$



よって，左図で

ΔPBHは 1:2:√3の直角三角形

$$\therefore PH = 100\sqrt{6} \times \frac{1}{2}$$

$$= 50\sqrt{6}$$

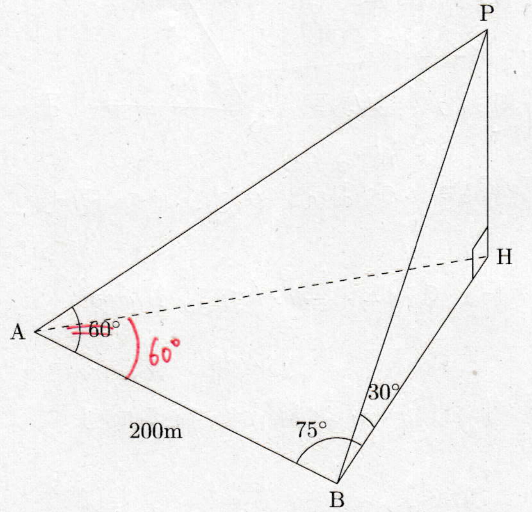
よって $PH = 50\sqrt{6}$ (m)

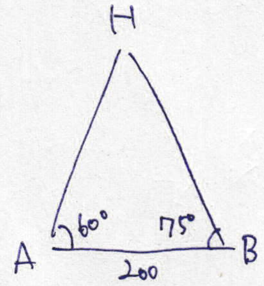
300m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から, 山の山頂 P を見ると,

∠HAB

$$\cancel{\angle PAB} = 60^\circ,\ \angle HBA = 75^\circ$$

であった．また, B から P を見上げた角度は 30° であった．図において, P と B の標高差 PH を求めよ．



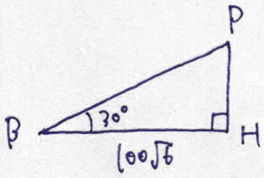


左図で，∠AHB = 45°.

∴ ΔHABで正弦定理より.

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = \frac{HB}{\sin 60^\circ}$$

$$HB = 100\sqrt{6}.$$



よって，ΔPBHは 1:2:√3の直角三角形.

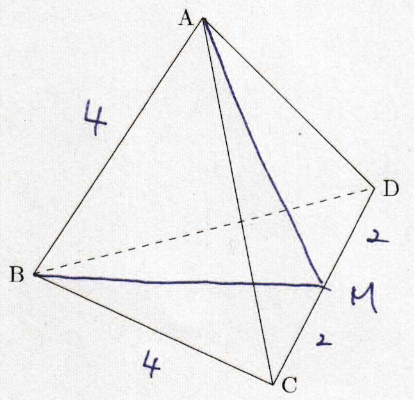
$$\therefore PH = 100\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

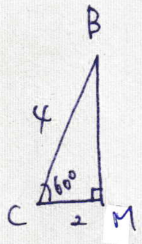
$$= 100\sqrt{2}.$$

よって $PH = 100\sqrt{2}$ (m)

6.2 問題演習

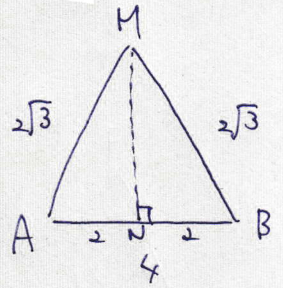
(1) 1 辺の長さが 4 である正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とする．△ABM の面積を求めよ．





左図で、$BM = 2\sqrt{3}$.

同様に $AM = 2\sqrt{3}$.



ABの中点をNとする。

△ANMで三平方の定理.

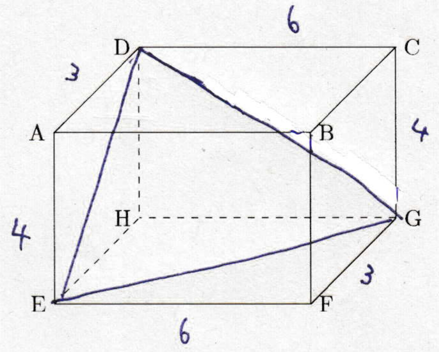
$MN = 2\sqrt{2}$

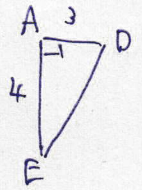
∴ △ABMの面積は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

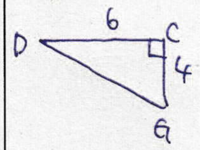
直方体ABCD−EFGHにおいて.

(2) AB= 6, AD= 3, AE= 4 である．△DEG の面積 S を求めよ．



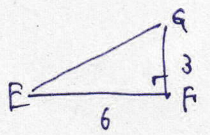


左図で $DE = 5$



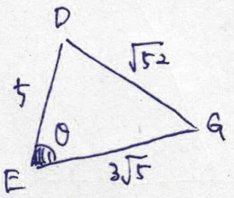
左図で

$$DG = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$



左図で

$$EG = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$$



∠DEG = θとする.

余弦定理で

$$52 = 25 + 45 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \cos\theta$$

$$-\cancel{18}^{\,3} = -\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{3}\sqrt{5}\cos\theta$$

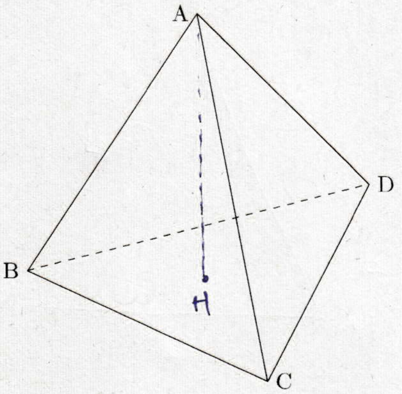
$$\cos\theta = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$より　$\sin\theta > 0$なので

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{125 - 9}}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{5} \cdot 3\cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{29}}{\cancel{5}\cancel{\sqrt{5}}} = 3\sqrt{29}$$

(3) 1 辺の長さが 4 である正四面体 ABCD において，頂点 A から △BCD に垂線をおろす．



(a) 点 H は △BCD の外心であることを示せ．

頂点Aから△BCDへ垂線を下ろす。

AB = AC = ADより．

△ABH ≡ △ACH ≡ △ADH．

∴ BH = CH = DH．

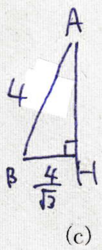
外接円の性質から，Hは外心である ■

(b) AH の長さを求めよ．

△BDCで正弦定理より．　BH = Rとすると

$$2R = \frac{4}{\sin 60^\circ}$$

$$R = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



△ABHで三平方の定理．

$$AH = 4\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \underline{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\ /\!/$$

(c) 正四面体 ABCD の体積 V を求めよ．

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AH$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{\sin 60^\circ}\right) \times 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$= \underline{\frac{64}{3}\sqrt{2}}\ /\!/$$

(4) 1 辺の長さが 6 である正四面体の体積 V を求めよ．

相似比は　4 : 6 = 2 : 3 なので，

体積比は　$2^3 : 3^3 = 8 : 27$.

$$\therefore V = \frac{\overset{8}{\cancel{64}}}{\cancel{3}}\sqrt{2} \times \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{8}}$$

$$= \underline{72\sqrt{2}}\ /\!/$$