$\boxed{50}$ サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とする．これらの数に対して 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

を考える．以下の問いに答えよ． (九大)

(1) 2 次方程式が異なる 2 つの実数解を持つとき，積 ac の取りうる値の範囲を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ．

(2) 2 次方程式が異なる 2 つの有理数解をもつ確率を求めよ．ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい．

(1) 2つの異なる実数解をもつので

$b^2 - 4ac > 0$.

$b=1$ のとき　ac : なし
$b=2$ のとき　ac : なし
$b=3$ のとき　$ac = 1, 2$
$b=4$ のとき　$ac = 1, 2, 3$.
$b=5$ のとき　$ac = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$b=6$ のとき　$ac = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$.

よって，
$ac = 1$ のとき
$(a, c) = (1, 1)$　1通り．
$ac = 2$ のとき
$(a, c) = (1, 2), (2, 1)$　2通り
$ac = 3$ のとき
$(a, c) = (1, 3), (3, 1)$　2通り
$ac = 4$ のとき
$(a, c) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$　3通り
$ac = 5$ のとき
$(a, c) = (1, 5), (5, 1)$　2通り．
$ac = 6$ のとき
$(a, c) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$　4通り．
$ac = 8$ のとき
$(a, c) = (2, 4), (4, 2)$　2通り

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつには．

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ において

$b^2 - 4ac$ が $(\text{整数})^2$ の形で表される必要がある．

$b=3$ のとき．$ac = 2$ であれば $b^2 - 4ac = 1$. ―①
$b=4$ のとき．$ac = 3$ であれば $b^2 - 4ac = 4$ ―②
$b=5$ のとき．$ac = 4$ であれば $b^2 - 4ac = 9$ ―③
$ac = 6$ であれば $b^2 - 4ac = 1$. ―④
$b=6$ のとき　$ac = 5$ であれば $b^2 - 4ac = 16$ ―⑤
$ac = 8$ であれば $b^2 - 4ac = 4$ ―⑥

(1) の結果を用いて，
① … 2通り
② … 2通り．
③ … 3通り
④ … 4通り
⑤ … 2通り
⑥ … 2通り．
計 15通り．

よって求める確率は

$$P = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$