2　二次関数の最大・最小

2.1　基本

復習

二次関数 $y = x^2 - 2x + 2$ について,

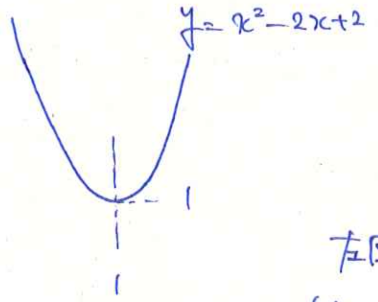
(1) 軸と頂点を求めよ.

$$y = x^2 - 2x + 2$$
$$= (x-1)^2 - 1 + 2$$
$$= (x-1)^2 + 1.$$

頂 $(1, 1)$

軸 $x = 1$

(2) 最大値・最小値を求めよ.

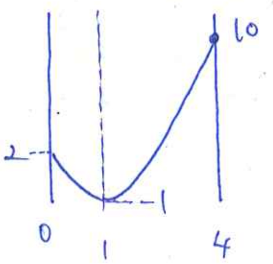


左図より

Max : なし

Min : 1.

(3) $(0 \leqq x \leqq 4)$ での最大値・最小値を求めよ.



左図より

Max : 10

Min : −1

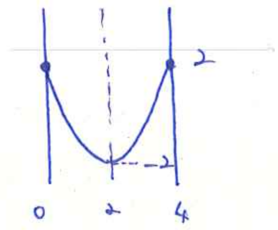
練習

以下の二次関数の最大値・最小値を求めよ.

(1) $y = x^2 - 4x + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$

$$= (x-2)^2 - 4 + 2$$
$$= (x-2)^2 - 2$$

軸 $x = 2$.



左図より

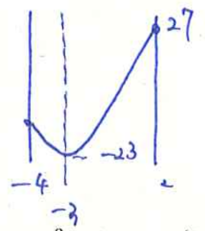
Max : 2

Min : −2

(2) $y = 2x^2 + 12x - 5 \quad (-4 \leqq x \leqq 2)$

$$= 2(x^2 + 6x) - 5$$
$$= 2\left((x+3)^2 - 9\right) - 5$$
$$= 2(x+3)^2 - 18 - 5$$
$$= 2(x+3)^2 - 23$$

軸 $x = -3$.



左図より

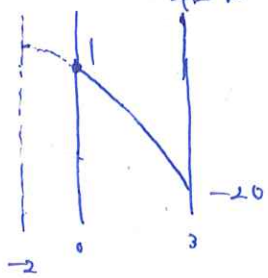
Max : 27

Min : −23

(3) $y = -x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

$$= -(x^2 + 4x) + 1$$
$$= -\left((x+2)^2 - 4\right) + 1$$
$$= -(x+2)^2 + 5 + 1$$
$$= -(x+2)^2 + 6$$

軸 $x = -2$.



左図より

Max : 1

Min : −20

2.2 縦に動く

例

2 次関数 $y = x^2 + 2x + c$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ について,

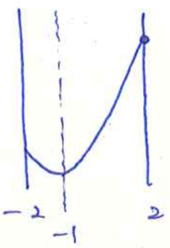
(1) 最大値が 3 になるように定数 c の値を定めよ.

$y = x^2 + 2x + c$

$= (x+1)^2 - 1 + c$

頂. $(-1,\ c-1)$

軸 $x = -1$.



左図より, $x = 2$ のとき

最大値 $8 + c$ である

これが 3 になるとき

$8 + c = 3$

$c = -5$ //

(2) c の値が (1) で求めた値であるとき, 与えられた 2 次関数の最小値を求めよ.

(1) から. $c = -5$ なので,

頂点は $(-1, -6)$ である。

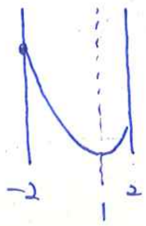
上の図から. $x = -1$ で Min -6 をとる //

練習

以下の条件を満たすように定数 c の値を求めよ. また, そのときの最大値・最小値のもう一方を求めよ.

(1) $y = x^2 - 2x + c$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ について, 最大値が 5

$= (x-1)^2 + c - 1.$



左図より. $x = -2$ で Max. $8 + c$ をとる.

これが 5 になるので

$8 + c = 5$

$c = -3$. //

また. $x = 1$ で最小値をとるので,

最小値は

$(1-1)^2 + c - 1 = -3 - 1 = -4$ //

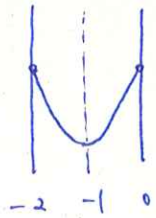
(2) $y = 2x^2 + 4x + c$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ について, 最小値が 1

$= 2(x^2 + 2x) + c$

$= 2((x+1)^2 - 1) + c$

$= 2(x+1)^2 + c - 2.$

頂 $(-1,\ c-2)$



左図から.

$x = -1$ で最小値をとる。

$\therefore$ $c - 2 = 1$.

$c = 3$ //

$c = 3$ のとき, 最大値は 左図から,

$x = 0$ のとき

i.e. $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3$

$= 3$ //

2.3 定義域が動く

例

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (0 \leqq x \boxed{\leqq a})$$

どういうことだ…?

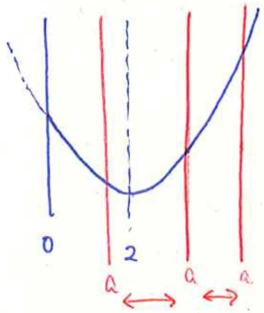
(1) 最大値を求めよ.

$y = (x-2)^2 - 4 + 2$

$= (x-2)^2 - 2$

頂 $(2, -2)$

軸 $x = 2$.

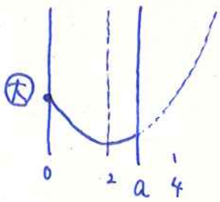


定義域の右端が自由に動く !!

この問は「aの値により, 最大値はどうなるだろう?」という問題.

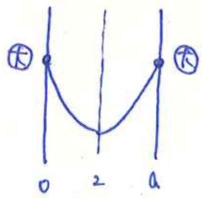
「状況に応じて場合分け」が基本!!

i) $0 < a < 4$ のとき



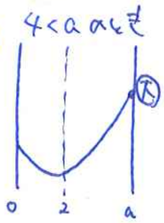
$x=0$で Max. 2

ii) $a = 4$ のとき



$x = 0, 4$で Max. 2

iii) $4 < a$ のとき



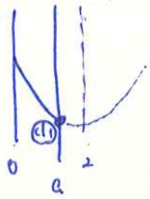
$x = a$で Max $a^2 - 4a + 2$.

i)〜iii)より 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 4 \text{ のとき} & 2 \quad (x=0) \\ a = 4 \text{ のとき} & 2 \quad (x=0, 4) \\ 4 < a \text{ のとき} & a^2 - 4a + 2 \quad (x=a) \end{cases}$$

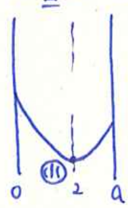
(2) 最小値を求めよ.

i) $0 < a < 2$ のとき



$x = a$で Min $a^2 - 4a + 2$.

ii) $2 \leqq a$ のとき



$x = 2$で Min. -2.

i), ii)より 最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & a^2 - 4a + 2 \quad (x=a) \\ 2 \leqq a \text{ のとき} & -2 \quad (x=2) \end{cases}$$

練習 1

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

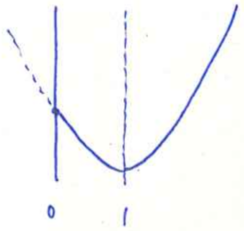
$$y = x^2 - 2x \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

(1) 最大値を求めよ．

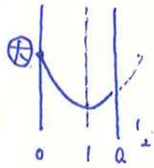
$y = x^2 - 2x$
$= (x-1)^2 - 1.$

頂 $(1, -1)$

軸 $x = 1.$

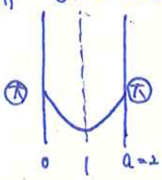


(i) $0 < a < 2$ のとき



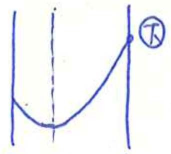
$x = 0$ で
Max. 0

(ii) $a = 2$ のとき



$x = 0, 2$ で
Max 0

(iii) $2 < a$ のとき



$x = a$ で Max.
$a^2 - 2a$

(i)〜(iii)より 最大値は

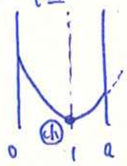
$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & 0 \quad (x=0) \\ a = 2 \text{ のとき} & 0 \quad (x=0, 2) \\ 2 < a \text{ のとき} & a^2 - 2a \quad (x=a) \end{cases}$$

(2) 最小値を求めよ．

(i) $0 < a < 1$ のとき

$x = a$ で Min
$a^2 - 2a.$

(ii) $1 \leqq a$ のとき



$x = 1$ で Min. $-1.$

(i),(ii)より 最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 2a \quad (x=a) \\ 1 \leqq a \text{ のとき} & -1 \quad (x=1) \end{cases}$$

練習 2

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

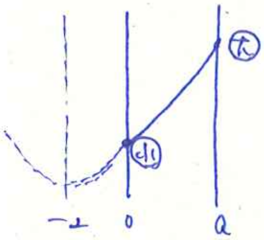
$$y = 2x^2 + 8x - 5 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

(1) 最大値を求めよ．

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 8x - 5 \\ &= 2(x^2 + 4x) - 5 \\ &= 2\left((x+2)^2 - 4\right) - 5 \\ &= 2(x+2)^2 - 8 - 5 \\ &= 2(x+2)^2 - 13 \end{aligned}$$

頂 $(-2, -13)$

軸 $x = -2$.



$a > 0$ なので，どのような a の値に対しても上図のような位置関係は変わらない．

∴ $x = a$ のとき最大値

$\underline{2a^2 + 8a - 5}$ //

(2) 最小値を求めよ．

左図から，

$x = 0$ で最小値 $\underline{-5}$ //

2,3では、右端のみが動く場合について考えた。
2,4では、両端が動く場合について考える!

2.4 定義域が動く (ver. 2)

例

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$$

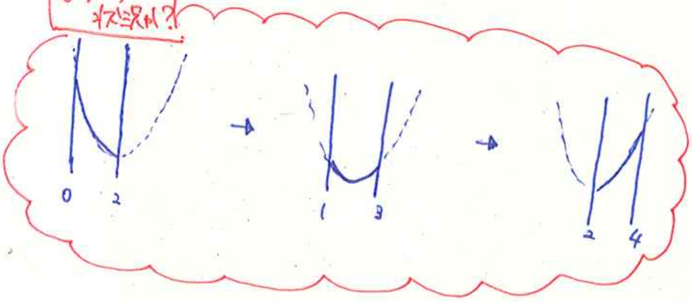
(1) 最大値を求めよ.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 2 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 2 \\ &= (x-2)^2 - 2. \end{aligned}$$

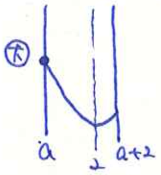
頂 $(2, -2)$

軸 $x = 2$.

どういう状況?



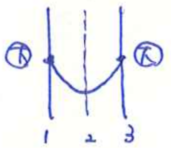
(i) $0 < a < 1$ のとき



$x = a$ で Max.

$a^2 - 4a + 2.$

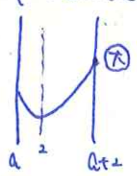
(ii) $a = 1$ のとき.



$x = 1, 3$ で Max.

$-1.$

(iii) $1 < a$ のとき



$x = a+2$ で Max.

$(a+2)^2 - 4(a+2) + 2$

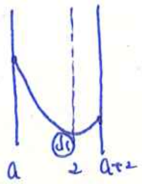
$= a^2 - 2.$

(i)〜(iii)より 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 4a + 2 \quad (x = a) \\ a = 1 \text{ のとき} & -1 \quad (x = 1, 3) \\ 1 < a \text{ のとき} & a^2 - 2 \quad (x = a+2) \end{cases}$$

(2) 最小値を求めよ.

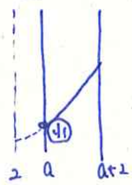
(i) $0 < a \leqq 2$ のとき



$x = 2$ で Min.

-2

(ii) $2 < a$ のとき



$x = a$ で Min.

$a^2 - 4a + 2.$

(i),(ii)より 最小値は

$$\begin{cases} 0 < a \leqq 2 \text{ で} & -2 \quad (x = 2) \\ 2 < a \text{ で} & a^2 - 4a + 2 \quad (x = a) \end{cases}$$

練習

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

$$y = x^2 - 6x + 5 \quad (a \leqq x \leqq a + 2)$$

(1) 最大値を求めよ．

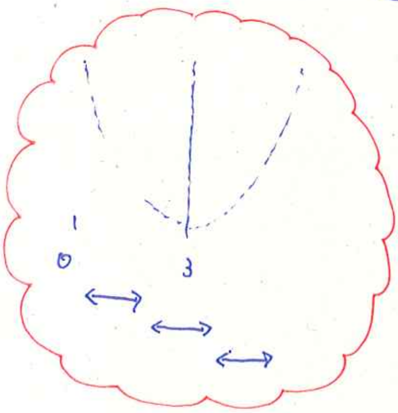
$y = x^2 - 6x + 5$

$= (x-3)^2 - 9 + 5$

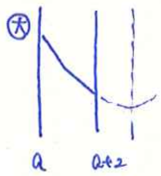
$= (x-3)^2 - 4$.

頂 $(3, -4)$

軸 $x = 3$.



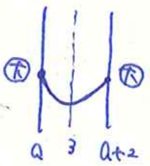
(i) $0 < a < 2$ のとき



$x = a$ で Max.

$a^2 - 6a + 5$

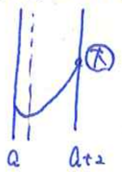
(ii) $a = 2$ のとき



$x = 2, 4$ で Max.

-3.

(iii) $2 < a$ のとき



$x = a+2$ で Max.

$(a+2)^2 - 6(a+2) + 5$

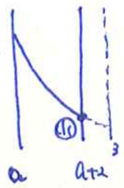
$= a^2 - 2a - 3$

ふんいより 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & a^2 - 6a + 5 \quad (x = a) \\ a = 2 \text{ のとき}, & -3 \quad (x = 2, 4) \\ 2 < a \text{ のとき} & a^2 - 2a - 3 \quad (x = a+2) \end{cases}$$

(2) 最小値を求めよ．

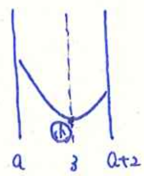
(i) $0 < a < 1$ のとき．



$x = a+2$ で Min.

$a^2 - 2a - 3$.

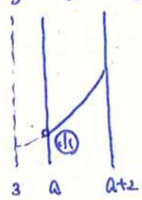
(ii) $1 \leqq a \leqq 3$ のとき



$x = 3$ で Min.

-4

(iii) $3 < a$ のとき



$x = a$ で Min.

$a^2 - 6a + 5$

ふんいより 最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 2a + 3. \quad (x = a+2) \\ 1 \leqq a \leqq 3 \text{ のとき} & -4 \quad (x = 3) \\ 3 < a \text{ のとき} & a^2 - 6a + 5 \quad (x = a) \end{cases}$$

2.5　軸が動く

例

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

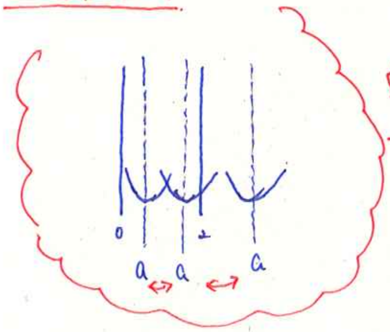
(1) 最大値を求めよ．

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1.$$
$$= (x-a)^2 + 1.$$

頂 $(a, 1)$

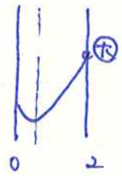
軸 $x = a$.

どういう状況か?



定義域は固定され、軸が動く!!

(i) $0 < a < 1$ のとき

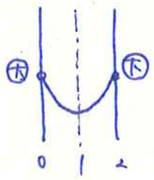


$x = 2$ で Max.

$4 - 4a + a^2 + 1.$

$a^2 - 4a + 5.$

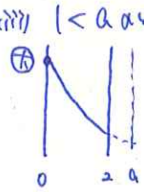
(ii) $a = 1$ のとき



$x = 0, 2$ で Max.

$1^2 + 1. = 2$

(iii) $1 < a$ のとき



$x = 0$ で Max.

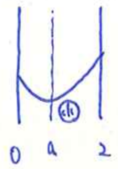
$a^2 + 1.$

(i)〜(iii)より．最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 4a + 5 \quad (x=2) \\ a = 1 \text{ のとき} & 2 \quad (x=0, 2) \\ 1 < a \text{ のとき} & a^2 + 1 \quad (x=0) \end{cases}$$

(2) 最小値を求めよ．

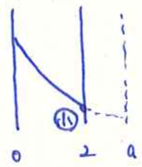
(i) $0 < a < 2$ のとき



$x = a$ で Min.

$1.$

(ii) $2 \leqq a$ のとき



$x = 2$ で Min.

$4 - 4a + a^2 + 1$

$= a^2 - 4a + 5$

(i), (ii)より　最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & 1. \quad (x = a) \\ 2 \leqq a \text{ のとき} & a^2 - 4a + 5 \quad (x = 2) \end{cases}$$

練習

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

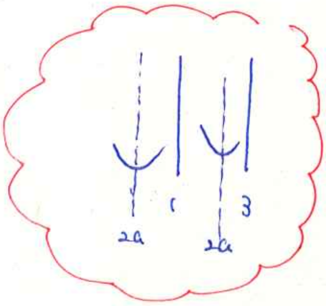
$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 + 3 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$$

(1) 最大値を求めよ．

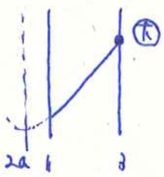
$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 + 3$$
$$= (x-2a)^2 + 3$$

頂 $(2a, 3)$

軸 $x = 2a$.



(i) $0 < 2a < 2$ のとき i.e. $0 < a < 1$.

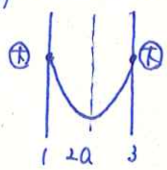


$x = 3$ で Max.

$9 - 12a + 4a^2 + 3$

$4a^2 - 12a + 12$

(ii) $2a = 2$ のとき i.e. $a = 1$.



$x = 1, 3$ で Max.

4.

(iii) $2 < 2a$ のとき i.e. $1 < a$.

$x = 1$ で Max.

$1 - 4a + 4a^2 + 3$

$4a^2 - 4a + 4$

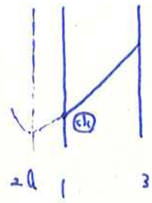
(i)〜(iii)より 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & 4a^2 - 12a + 12 \quad (x = 3) \\ a = 1 \text{ のとき} & 4 \quad (x = 1, 3) \\ 1 < a \text{ のとき} & 4a^2 - 4a + 4 \quad (x = 1) \end{cases}$$

//

(2) 最小値を求めよ．

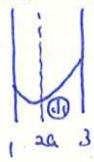
(i) $0 < 2a < 1$ i.e. $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき



$x = 1$ で Min.

$4a^2 - 4a + 4$

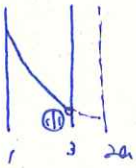
(ii) $1 \leqq 2a \leqq 3$ i.e. $\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{3}{2}$ のとき



$x = 2a$ で Min.

3.

(iii) $3 < 2a$ i.e. $\frac{3}{2} < a$ のとき



$x = 3$ で Min.

$4a^2 - 12a + 12$

(i)〜(iii)より 最小値は

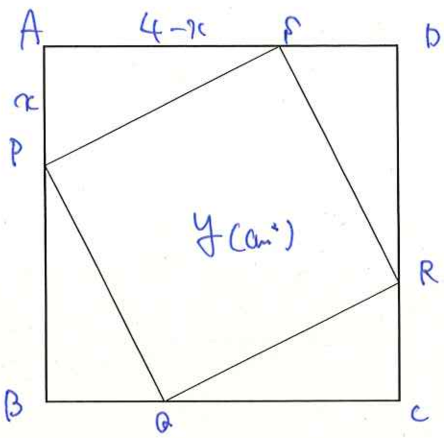
$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき} & 4a^2 - 4a + 4 \quad (x = 1) \\ \frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{3}{2} \text{ のとき} & 3 \quad (x = 2a) \\ \frac{3}{2} < a \text{ のとき} & 4a^2 - 12a + 12 \quad (x = 3) \end{cases}$$

//

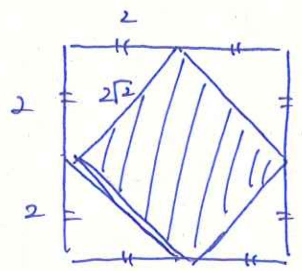
2.6　活用

例題

1 辺が 4(cm) である正方形に内接する正方形の面積について考える.



(1) 最小値を予想しよう.



上図の状況が Minimum. で，

1辺が $2\sqrt{2}$ なので

$$S_{Min} = (2\sqrt{2})^2$$
$$= 8 \ (cm^2)$$

(2) 内接正方形の面積を y(cm^2), APの長さを x(cm) とする. y を x の式で表せ.

AP$=x$. よって. SD$=x$ でもある.

∴ AS$=4-x$.

$$PS^2 = x^2 + (4-x)^2$$

ここで PS^2 は内接四角形の面積そのもの.

$$\therefore\ y = x^2 + 16 - 8x + x^2$$
$$= 2x^2 - 8x + 16$$

(3) 最小値を求めよ.

□ABCD の1辺が4なので，

$0 \leqq x \leqq 4$. である.

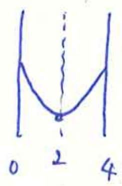
この範囲で

$y = 2x^2 - 8x + 16$ の Min を考える.

$$y = 2x^2 - 8x + 16$$
$$= 2(x^2 - 4x) + 16$$
$$= 2\left((x-2)^2 - 4\right) + 16$$
$$= 2(x-2)^2 + 8.$$

頂 $(2, 8)$

軸 $x = 2$.



左図より $x=2$ で最小値8.

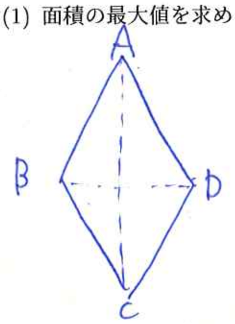
よって，$y_{Min} = 8 \ (cm^2)$

どのような問題も,ある程度答えの予想をしておくことで計算ミスは減る!!

練習問題

対角線の長さの和が 8 である菱形について, 以下の問いに答えよ.
(「予想 → 解く」の癖をつける.)

(1) 面積の最大値を求めよ.

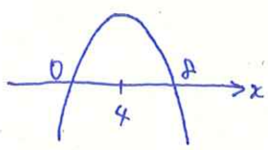


AC $= x$ とおく.
すると BC $= 8 - x$ である.

条件から.
$0 < x < 8$.

さて, 面積を y とおくと

$$y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (8 - x)$$

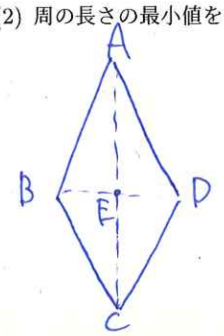


左図から,
$x = 4$ のとき最大値をとる.

$$\therefore y_{max} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (8 - 4) = 8$$

ひし形が正方形になるとき!!

(2) 周の長さの最小値を求めよ.



AE $= x$ とおくと
DE $= 4 - x$. であり.

条件から.
$0 < x < 4$.

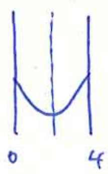
周の長さを y とおく.

$$AD^2 = x^2 + (4 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 8x + 16$$
$$\therefore AD = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$$

よって $y = 4 \cdot AD$
$$= 4 \cdot \sqrt{2x^2 - 8x + 16}.$$

y が最小値をとるのは, $\sqrt{\ }$ の中身が min になる時.

$z = 2x^2 - 8x + 16$ とおく.
$$= 2(x^2 - 4x) + 16$$
$$= 2((x-2)^2 - 4) + 16$$
$$= 2(x-2)^2 + 8$$
頂 $(2, 8)$



左図より $\sqrt{\ }$ の中身の最小値は 8

$$\therefore y_{min} = 4 \cdot \sqrt{8} = 8\sqrt{2}$$

ひし形が正方形になるとき!!