

46 以下の問いに答えよ。

(1) $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ のとき, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ の整数部分はいくらか。

(2) 0 でない 2 つの実数 a, b が $a+b+1=0$ を満たすとき, $\frac{b^2}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{a^2}{b}$ の値を求めよ。

(1)

$$x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \quad \text{より}$$

$$x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

∴

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$= x^2(x^2+1) + x(x^2+1) + 1$$

$$= (3+2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2}) + \sqrt{3+2\sqrt{2}}(4+2\sqrt{2}) + 1$$

$$= (12 + 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 8) + \sqrt{3+2\sqrt{2}}(4+2\sqrt{2}) + 1$$

$$\therefore \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{より}$$

$$\sim = (1+\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})$$

$$= 4 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4$$

$$\therefore (\text{上式}) = (20 + 14\sqrt{2}) + (8 + 6\sqrt{2}) + 1$$

$$= 29 + 20\sqrt{2}$$

∴

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

$$28.2 < 20\sqrt{2} < 28.4$$

$$\therefore 57.2 < 29 + 20\sqrt{2} < 57.4$$

$$\text{整数部分は } \underline{57}$$

$$(2) \frac{b^2}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{a^2}{b}$$

$$= \frac{b^3 + a^3 + 1}{ab}$$

$$= \frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b) + 1}{ab}$$

$$= \frac{(-1)^3 - 3ab(-1) + 1}{ab}$$

$$\begin{aligned} \because a+b+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a+b &= -1 \end{aligned}$$

$$= \frac{3ab}{ab} = \underline{3}$$

(1) は、先に二重根号は消すことも可能?

(2) は、 a^3+b^3 の因数分解の公式を使う。

$a+b+1=0$ という条件をうまく使う。

$(a+b)$ を作り出す。