

3 二次不等式とグラフの関係性

3.1 基本

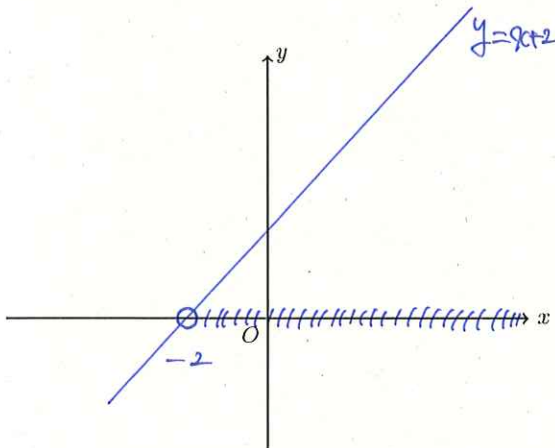
復習
不等式

$$x + 2 > 0$$

を解く.

$$x > -2$$

不等式を絵で見る

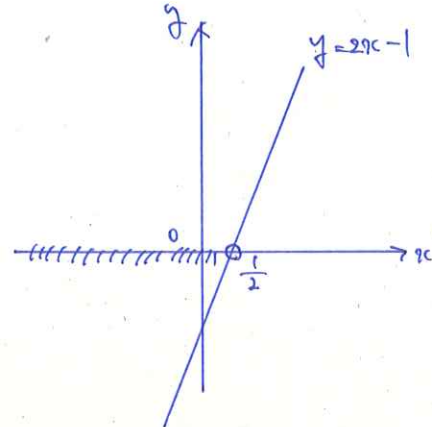


$x + 2 > 0$ を解くとは...

$y = x + 2$ のグラフのうち、値が 0 より大きくなる
部分の x の範囲を求めること.

確認

不等式 $2x - 1 < 0$ についてグラフを描き、解け.



求める範囲は上の斜線部分.

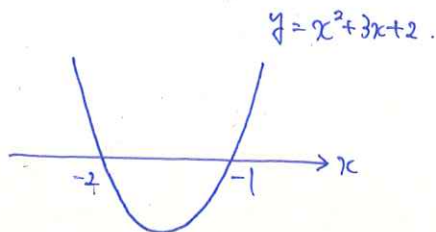
$$\therefore x < \frac{1}{2}$$

練習問題 1

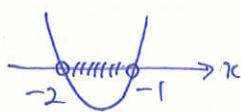
$y = x^2 + 3x + 2$ について,

(1) グラフを描け.

$$y = (x+2)(x+1)$$



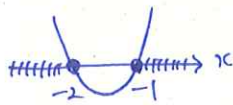
(2) $x^2 + 3x + 2 < 0$ を解け.



左図より

$$-2 < x < -1$$

(3) $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ を解け.



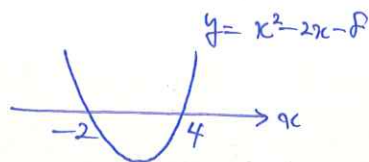
$$x \leq -2, -1 \leq x$$

練習問題 2

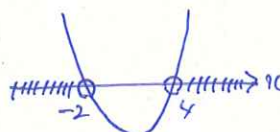
$y = x^2 - 2x - 8$ について,

(1) グラフを描け.

$$y = (x-4)(x+2)$$



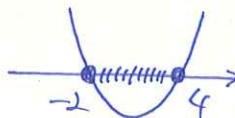
(2) $x^2 - 2x - 8 > 0$ を解け.



左図より

$$x < -2, 4 < x$$

(3) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ を解け.



左図より

$$-2 \leq x \leq 4$$

3.2 連立不等式

復習

以下の連立不等式を解け.

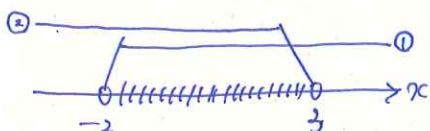
$$\begin{cases} 2x+4 > 0 & \text{---①} \\ x-3 < 0 & \text{---②} \end{cases}$$

①より.

$$\begin{aligned} 2x &> -4 \\ x &> -2. \end{aligned}$$

②より.

$$x < 3$$



共通部分は上図の斜線部.

$$\therefore -2 < x < 3$$

連立不等式とは,

各不等式の共通部分を求めよ!!

練習問題

以下の連立不等式を解け.

$$(1) \begin{cases} x^2+2x-3 < 0 & \text{---①} \\ x^2-x-6 < 0 & \text{---②} \end{cases}$$

①より.

$$(x-3)(x+1) < 0$$



左図より

$$-1 < x < 3.$$

②より.

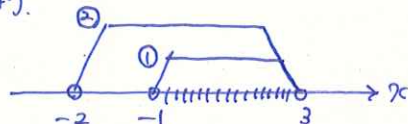
$$(x-3)(x+2) < 0$$



左図より

$$-2 < x < 3.$$

①, ②より.



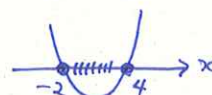
共通部分は上図の斜線部.

$$\therefore -1 < x < 3$$

$$(2) \begin{cases} x^2-2x-8 \leq 0 & \text{---①} \\ x^2+4x+3 > 0 & \text{---②} \end{cases}$$

①より.

$$(x-4)(x+2) \leq 0$$

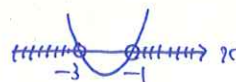


左図より

$$-2 \leq x \leq 4.$$

②より.

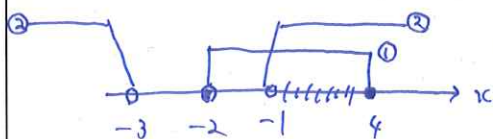
$$(x+3)(x+1) > 0$$



左図より

$$x < -3, -1 < x.$$

①, ②より.



共通部分は上図の斜線部.

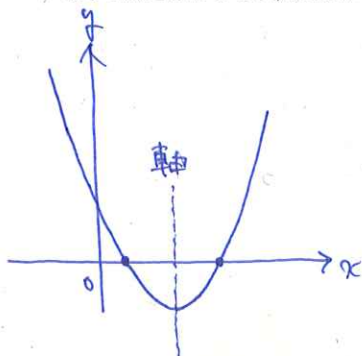
$$\therefore -1 < x \leq 4$$

$$-4 \leq m \leq 0$$

3.4 判・軸・値

例題

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$ のグラフと x 軸の正の部分異なる 2 点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。



まず、グラフと x 軸は異なる 2 点で交わる条件を
不足と excess 思考!!

条件を分けてみる。
左図のグラフに注目して
条件を分ける。
① 判別式 $D > 0$ 。
② 軸 > 0
③ $x = 0$ のとき $y > 0$

① 判別式。

$$x = 0 \text{ のとき } y > 0$$

$$0 - 2m \cdot 0 + 5m + 6 > 0$$

$$5m + 6 > 0$$

$$m > -\frac{6}{5}$$

② 軸。

$$x^2 - 2mx + 5m + 6 = 0 \text{ の判別式 } D > 0$$

$$D = (-2m)^2 - 4 \cdot (5m + 6)$$

$$= 4(m^2 - 5m - 6)$$

$$D > 0$$

$$m^2 - 5m - 6 > 0$$

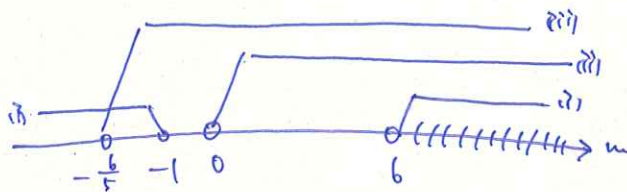
$$(m - 6)(m + 1) > 0$$



左図より

$$m < -1, 6 < m$$

③ 共通部分。下図の斜線部。



$$m > -\frac{6}{5}, 6 < m$$

$$m > -\frac{6}{5}, 6 < m$$

③ 軸。

$$y = x^2 - 2mx + 5m + 6$$

$$= (x - m)^2 - m^2 + 5m + 6$$

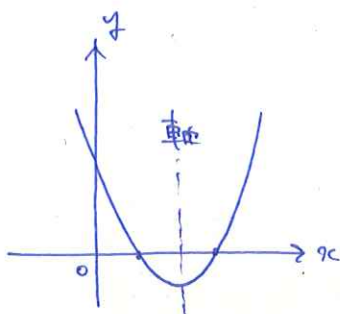
$$\text{軸 } x = m$$

$$\text{軸} > 0$$

$$m > 0$$

練習問題 1

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 2m + 3$ のグラフと x 軸の正の部分異なる 2 点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。



条件を分けては、
 1) 判別式 $D > 0$
 2) 軸 > 0
 3) $x=0$ での $y > 0$ 。

i) (2002)

2 次方程式 $x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$

判別式 $D > 0$ をあて。

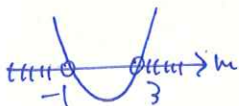
$$D = (-2m)^2 - 4 \cdot (2m + 3)$$

$$= 4(m^2 - 2m - 3)$$

$$= 4(m - 3)(m + 1)$$

$$D > 0 \Rightarrow$$

$$(m - 3)(m + 1) > 0$$



左図より。

$$m < -1, 3 < m$$

ii) (2002)

$$y = x^2 - 2mx + 2m + 3$$

$$= (x - m)^2 - m^2 + 2m + 3$$

軸 $x = m$ 。

軸 > 0 より、

$$m > 0$$

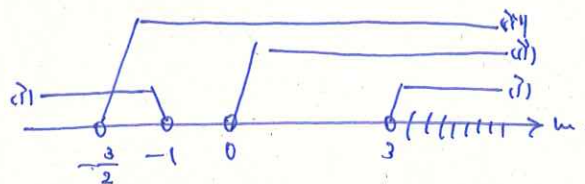
iii) $x = 0$ での

$$y = 2m + 3 > 0$$

$$2m + 3 > 0$$

$$m > -\frac{3}{2}$$

ii) からの共通部分は、下図の斜線部。

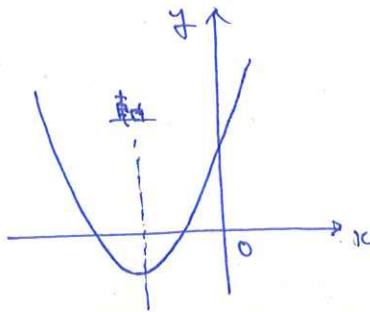


よって

$$3 < m$$

練習問題 2

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$ のグラフと x 軸の異なる 2 点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。



条件を分けてみる。
左図の如く 2 点で交わる。

3 点で交わる。

i) 判別式 $D > 0$

ii) 軸 < 0

iii) $x=0$ とき $y > 0$

ii) 2 通り。

$$2 \text{ 次方程式 } x^2 - 2mx + 5m + 6 = 0$$

判別式 $D > 0$ とおく。

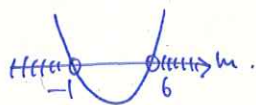
$$D = (-2m)^2 - 4(5m + 6)$$

$$= 4(m^2 - 5m - 6)$$

$$= 4(m - 6)(m + 1).$$

$D > 0$ とおく。

$$(m - 6)(m + 1) > 0$$



左図より

$$m < -1, 6 < m.$$

iii) 2 通り。

$$y = x^2 - 2mx + 5m + 6$$

$$= (x - m)^2 - m^2 + 5m + 6.$$

$$\text{軸 } x = m.$$

軸 < 0 とおく。

$$m < 0$$

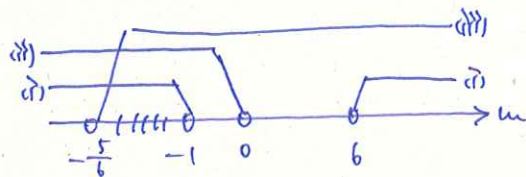
iii) 2 通り。

$x=0$ とき $y > 0$ とおく。

$$5m + 6 > 0$$

$$m > -\frac{6}{5}$$

i) ~ iii) の共通部分は下図の斜線部。



より

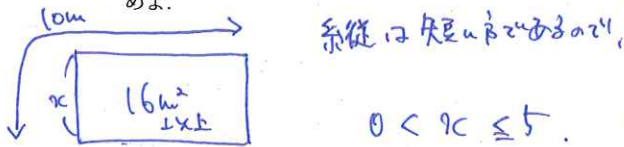
$$-\frac{6}{5} < m < -1$$

3.5 文章題

練習問題 1

長さが 20m のロープを張って、長方形の囲いを作る。囲いの中の面積を 16m^2 以上にするための、囲いの縦の長さの範囲を求めたい。ただし、縦とは長方形の短い方の 1 辺とする。

- (1) 縦の長さを x とおく。長方形ができるための x の範囲を求めよ。



$$0 < x \leq 5$$

- (2) 面積を x の式で表せ。

横: $(10-x)\text{m}$

面積を y とおく

$$y = x(10-x)$$

- (3) 面積を 16m^2 以上にするための、囲いの縦の長さの範囲を求めよ。

(1) 面積 $y \geq 16$ とおく

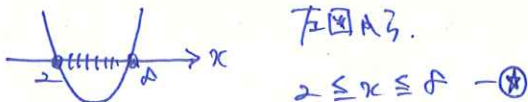
$$x(10-x) \geq 16$$

$$-x^2 + 10x \geq 16$$

$$-x^2 + 10x - 16 \geq 0$$

$$x^2 - 10x + 16 \leq 0$$

$$(x-2)(x-8) \leq 0$$



(1) の結果の共通部分は、下図斜線部。



よって $2 \leq x \leq 5$

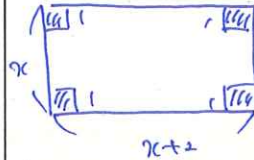
∴ $2\text{m} \leq x \leq 5\text{m}$

練習問題 2

横の長さが (縦の長さ + 2) cm で与えられる長方形の画用紙がある。この画用紙の四隅から、1 辺の長さが 1cm の正方形を切り取り、蓋のない直方体の箱を作る。

縦: x cm

- (1) 箱の体積を x を用いて表せ。



底面は、 $(x-2)(x-2)$

高さ $(x+2)-2 = x$

∴ 体積は $(x-2) \cdot x$

- (2) 箱の体積を 3cm^3 以上 15cm^3 以下にするためには、縦の長さをどのような範囲に取れば良いか求めよ。

(1) 体積 $3 \leq x(x-2) \leq 15$

∴

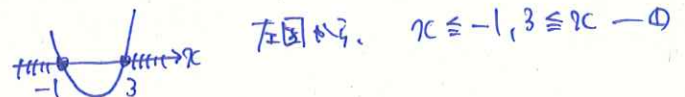
$$3 \leq x(x-2) \leq 15$$

- ① $3 \leq x(x-2)$

$$3 \leq x^2 - 2x$$

$$0 \leq x^2 - 2x - 3$$

$$0 \leq (x-3)(x+1)$$

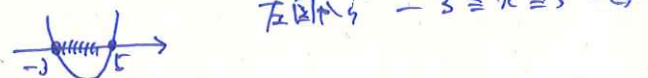


- ② $x(x-2) \leq 15$

$$x^2 - 2x \leq 15$$

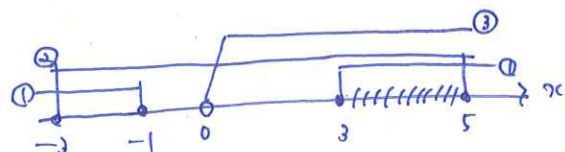
$$x^2 - 2x - 15 \leq 0$$

$$(x-5)(x+3) \leq 0$$



∴ 長さ x は $3 \leq x \leq 5$ cm

① ~ ③ の共通部分は下図の斜線部。



よって $3 \leq x \leq 5$

∴ $3\text{cm} \leq x \leq 5\text{cm}$