

7.2 問題

1のカードが1枚, 2のカードが2枚, 3のカードが3枚, 4のカードが4枚の計10枚の中から, 同時に3枚引く. このとき, 引いたカードの最大値を M , 最小値を m とし, $X = M - m$ とする.

(1) 3枚全てが4のカードである確率を求めよ.

(2) $X = 0$ となる確率を求めよ.

(3) X についての確率分布表を作れ.

(4) 同時に3枚引く操作に対し, X の値が気に入らなかった場合もう一度だけやり直すことができる. このとき, X の期待値を最大にするには, X の値がどのようなときにやり直せば良いか.

$$\begin{aligned} 10 \text{枚から3枚引く} & \text{ 全体} \cdots 10C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ & = 120 \text{通り} \end{aligned}$$

(1) 3枚全て4.

--- 4枚から3枚引く. $4C_3 = 4$.

$$\therefore P = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

(2) $X = 0$ となるのは, 3枚とも同じ数で引く.

① 3枚全て4

$$\cdots (1) \text{より } \frac{4}{120}$$

② 3枚全て3.

--- 3枚から3枚引く (通り) $\therefore \frac{1}{120}$

$$\therefore P(X=0) = \frac{4}{120} + \frac{1}{120}$$

$$= \frac{5}{120}$$

(3) ① $X = 1$ となるのは,

・ 2, 2, 1 $\cdots 2C_2 \times 1C_1 = 1 \text{通り}$

・ 3, 2, 2 $\cdots 3 \times 1 = 3 \text{通り}$

・ 3, 3, 2 $\cdots 3C_2 \times 2C_1 = 6 \text{通り}$

・ 4, 3, 3 $\cdots 4C_1 \times 3C_2 = 12 \text{通り}$

・ 4, 4, 3 $\cdots 4C_2 \times 2C_1 = 12 \text{通り}$

$$\frac{1}{30} \text{ (40通り)}$$

$$\therefore P(X=1) = \frac{40}{120}$$

② $X = 3$ となるのは,

・ 4, 4, 1 のみ.

$$4C_2 \times 1 = 6$$

$$\therefore P(X=3) = \frac{6}{120}$$

③ $X = 2$ となるのは,

全体から $X = 0, 1, 3$ の場合を除く.

$$120 - (5 + 40 + 6) = 69$$

$$\therefore P(X=2) = \frac{69}{120}$$

④ 確率分布表

X	0	1	2	3	合計
P	$\frac{5}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1

(4) ① ④通りになる場合の期待値.

$$\begin{aligned} E &= \frac{5}{120} \cdot 0 + \frac{40}{120} \cdot 1 + \frac{69}{120} \cdot 2 + \frac{6}{120} \cdot 3 \\ &= \frac{1}{120} \cdot (40 + 138 + 18) = \frac{196}{120} \end{aligned}$$

② $X = 0$ となる場合の期待値.

X	0	1	2	3	合計
P	$\frac{5}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1

X	0	1	2	3	合計
P	$\frac{5}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{5}{120}$

$$\begin{aligned} E &= \frac{40}{120} \cdot 1 + \frac{69}{120} \cdot 2 + \frac{6}{120} \cdot 3 \\ &\quad + \frac{5}{120} \cdot \frac{40}{120} + \frac{5}{120} \cdot \frac{69}{120} + \frac{5}{120} \cdot \frac{6}{120} \cdot 3 \\ &= \frac{40}{120} \cdot \frac{125}{120} + \frac{69}{120} \cdot \frac{125}{120} \cdot 2 + \frac{6}{120} \cdot \frac{125}{120} \cdot 3 \\ &= \frac{1}{120} \cdot \frac{125}{120} \cdot (40 + 138 + 18) = \frac{196}{120} \times \frac{125}{120} = \frac{225}{120} \end{aligned}$$

③ $X = 0, X = 1$ となる場合.

X	0	1	2	3	合計
P	$\frac{5}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1

$$\begin{aligned} E &= \frac{69}{120} \cdot 2 + \frac{6}{120} \cdot 3 + \frac{45}{120} \cdot \frac{40}{120} + \frac{45}{120} \cdot \frac{69}{120} \cdot 2 + \frac{45}{120} \cdot \frac{6}{120} \cdot 3 \\ &= \frac{45}{120} \cdot \frac{40}{120} + \frac{69}{120} \cdot \frac{165}{120} \cdot 2 + \frac{6}{120} \cdot \frac{165}{120} \cdot 3 \\ &= \frac{15 \cdot 3}{120} \cdot \frac{40}{120} + \frac{3 \cdot 23}{120} \cdot \frac{15 \cdot 11}{120} \cdot 2 + \frac{6}{120} \cdot \frac{15 \cdot 11}{120} \cdot 3 \\ &= \frac{15 \cdot 3 \cdot 2}{120 \cdot 120} (20 + 23 \cdot 11 + 3 \cdot 33) \\ &= \frac{90}{120 \cdot 120} \cdot 372 = \frac{279}{120} \end{aligned}$$

④ 3通り.

(iv) $X=0, X=1, X=2$ のとき (b) 通り場合.

X	0	1	2	3	\sum
P	$\frac{5}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1

(23)

	0	1	2	3	\sum
	$\frac{114}{120} \cdot \frac{5}{120}$	$\frac{114}{120} \cdot \frac{40}{120}$	$\frac{114}{120} \cdot \frac{69}{120}$	$\frac{114}{120} \cdot \frac{6}{120}$	1

期待値は

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{114}{120} \cdot \frac{40}{120} \cdot 1 + \frac{114}{120} \cdot \frac{69}{120} \cdot 2 + \frac{114}{120} \cdot \frac{6}{120} \cdot 3 \\
 &\quad + \frac{6}{120} \cdot 3 \\
 &= \frac{114}{120} \cdot \frac{40}{120} + \frac{114}{120} \cdot \frac{2 \cdot 69}{120} + \frac{234}{120} \cdot \frac{6 \cdot 3}{120} \\
 &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot (40 + 138) + 9 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 3}{120 \cdot 120} \\
 &= \frac{(2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 89 + 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 6)}{120 \cdot 120} \\
 &= \frac{4 \cdot 3 \cdot (17 \cdot 89 + 3 \cdot 9 \cdot 13)}{120 \cdot 120} \\
 &= \frac{1864}{1200} = \frac{186.4}{120}
 \end{aligned}$$

i.e. $X=2$ のとき (b) 通り、期待値 Down.

$X=0$ のとき (a) 通り、期待値 Up.

