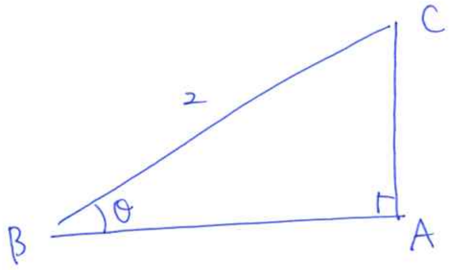
47 △ABC において, ∠A は直角で, ∠B< ∠C とし, BC= 2 とする. ∠B= θ とおくとき, 以下の問いに答えよ. (金沢大)

(1) 辺 AB, AC の長さ, および △ABC の面積 S を, θ を用いて表せ.

(2) △ABC の内接円の半径 r を, θ を用いて表せ.

(3) 辺 BC の垂直二等分線が, 内接円 O と接するとき, θ と r の値を求めよ.



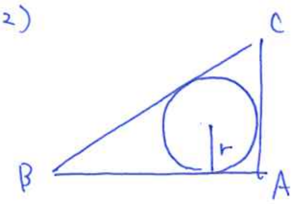
(1) $\frac{AB}{2} = \cos\theta$ より　$AB = 2\cos\theta$ //

$\frac{AC}{2} = \sin\theta$ より　$AC = 2\sin\theta$ //

$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ より

$S = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$ //

(2)



△ABCの面積 Sは、rを用いて

$S = \frac{1}{2} r (AB + BC + CA)$

$= \frac{1}{2} r (2\cos\theta + 2\sin\theta + 2)$

$= r(\cos\theta + \sin\theta + 1)$

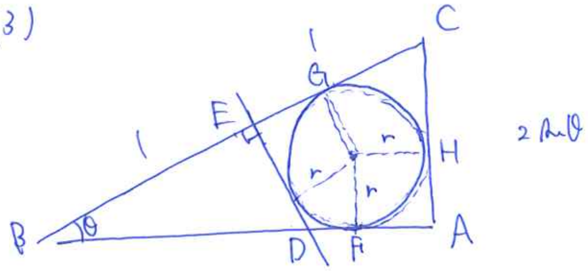
と書ける.

(1)の結果を用いて

$2\sin\theta\cos\theta = r(\cos\theta + \sin\theta + 1)$

$\therefore r = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 1}$ //

(3)



$AB = AF + FB$

$= AF + BG$

$= r + (r+1) = 2r + 1$.

$AC = AH + HC$

$= AH + CG$

$= r + (1 - r) = 1$.

(1)の結果と比較.

$\begin{cases} 2\cos\theta = 2r + 1. & \text{—①} \\ 2\sin\theta = 1. & \text{—②} \end{cases}$

②より　$2\sin\theta = 1$.　$\sin\theta = \frac{1}{2}$

θ は鋭角より.　$\theta = 30°$.

①より

$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2r + 1$.

$2r = \sqrt{3} - 1$.

$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

よって　$\theta = 30°$,　$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ //