アレクサンドロフの定理

Takenaga Koudai

2022 年 2 月 21 日

目次

1　アレクサンドロフの定理

定理 1.0.1 (アレクサンドロフの定理)**.** 展開図に以下の条件を満たすように接着を与える．

1. どの頂点においても，角度の総和が 2π を超えない．
2. 結果として得られる複体が球面に位相同型である．

このとき，この接着に対応する凸多面体は一意に定まる．

この定理を証明することを目標とする．
前半に一意性について示し，後半で存在性を示すことにする．
証明については，冗長になるので，小節で見通しを立てた上で，それぞれ順序立てて証明していくことにする．

定義 1.0.2 (凸多角形の距離)**.** X : 凸多角形，$^\forall x, y \in X$ に対し，

$$d(x, y) = ||x - y||$$

で定義する．(通常の距離)

定義 1.0.3 (展開図)**.** 凸多角形の集合で，それらを接着するための条件を与えたもの．

1. 多角形の接着は，同じ長さの辺同士でのみ行われる．
2. R の各辺に，どの辺をどの向きに接着するか指定する．
(接着が指定された点同士は同一視する．)

定義 1.0.4 (展開図中での同一視)**.** $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ に対し，X と Y の接着を以下で定義する．
$A \subset X$，$B \subset Y$ に対し，同相写像 $f : A \to B$ を与え，$X \cup Y$ 上の同値関係を

$$z \sim y \Longleftrightarrow x = y \ or \ f(x) = y$$

この同値関係による同一視を接着という．
$(X \cup Y)/\sim$ を X と Y を f により接着してできる空間という．

定義 1.0.5 (展開図上の距離)**.** $x, y \in R$: 展開図上の 2 点の距離 $d'(x, y)$ を以下で定義.

$$d'(x, y) \coloneqq \inf\{d(p_1, q_1) + \cdots + (p_n, q_n)\}$$

ただし，$(p_1, \cdots, p_n)$，$(q_1, \cdots, q_n)$ は有限点列で，次を満たす．$[x] = [p_1], [q_i] = [p_{i+1}], [q_n] = [y]$ $(i = 1, \cdots, n-1)$

これが距離の公理を満たすことを以下で示す．

証明. 怪しいのは $d'(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$ だけ．他はほぼ明らかなのでいつかやることにする．
さて，以下の順で示せば良い．

1. コンパクト空間から実数値への連続関数は最大値・最小値をもつ．
2. コンパクト空間の商空間はそれもまたコンパクト．
3. 補題 2.1 から，$d(p_1, q_1) + d(p_2, q_2) + \cdots d(p_n, q_n)$ は有界の和で書ける．
4. inf の中身は連続関数であり，かつコンパクト空間から実数値への連続関数であるので，最小値を持つ．
5. このことから，$d'(x, y) = \min\{d(p_1, q_1) + d(p_2, q_2) + \cdots d(p_n, q_n)\}$ と書くことができる．
6. よって $d'(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$

□

1.1　多角形と三角形分割

定義 1.1.1 (単純多角形)**.** $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}^2$ が以下の条件をみたすとき，これらの点を順に直線分 $(E_i = [q_i, q_{i+1}])$ で結んだものを単純多角形といい，$Q(q_1, \cdots, q_n)$ で表す.

連続しない 2 辺は共有点を持たない.

この単純多角形で囲まれた領域のうち，有界な方を $D(Q)$ とおく.

定義 1.1.2 (対角線)**.** $Q(q_1, \cdots, q_n)$ の対角線とは，Q の連続しない 2 つの頂点を端点とする線分で，$D(Q)$ に含まれるもの.

補題 1.1.3. $Q(q_1, \cdots, q_n)$ において，$[q_i, q_j]$ が対角線であるとする.

$$
\begin{aligned}
Q^+ &= Q(q_i, q_{i+1}, \cdots, q_{j-1}, q_j) \\
Q^- &= Q(q_j, q_{j+1}, \cdots, q_{i-1}, q_i)
\end{aligned}
$$

とし，$D(Q) = D(Q^+) \cup D(Q^-)$ かつ $D(Q^+) \cap D(Q^-) = [q_i, q_j]$ とできる.

証明. 略 □

補題 1.1.4. 頂点を 4 つ以上持つ単純多角形は対角線を持つ.

証明. 略 □

補題 1.1.5. 単純多角形は三角形分割可能.

証明. 略 □

1.2　一意性の証明

この小節では，**??**の一意性について示していく.

定理 1.2.1 (アレクサンドロフの定理の一意性)**.** 等長な展開図を持つ凸多面体は合同である.

補題 1.2.2. L:凸多面体 P 上の最短弧であるとする.
L は P の各面上に最大で 1 本の線分を持つ多角形上の直線である.

証明. Q_λ : P の各面 ($\lambda \in \Lambda$:有限集合) とする.

- 直線分となること (Q_λ 上で折れ曲がらない).
  $^\exists X, Y \in (Q_\lambda \cap L)$ $s.t.$ $XY \neq L_{XY}$ と仮定する．($i.e.$ $Q_\lambda \cap L$ 上の 2 点 X, Y で，線分 XY と L 上の部分弧で異なるものが存在すると仮定する．)
  このとき，L_{XY} を線分 X に置き換えてできる弧 L' は L よりも短くなる．これは L が最短弧であることに矛盾する.
- 各面で最大 1 本となること.
  弧 L の両端の点を X, Y とおく．L が P のある面 Q_λ を 2 回またぐと仮定する．L を X を始点として $X \to Y$ と移動するときに通る Q_λ の境界上の点を順に X_1, X_2, X_3, X_4 とナンバリングする ($X, Y \in Q_\lambda$ のときはそれぞれ $X = X_1, Y = X_4$ とする)．まず，三角不等式から

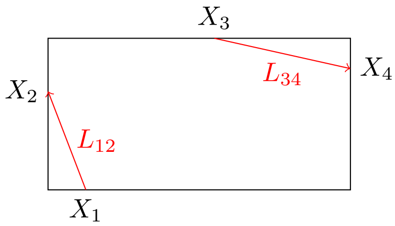

図 1

$$
\begin{aligned}
&X_1X_2 + X_2X_3 \geq X_1X_3 \\
&X_1X_3 + X_3X_4 > X_1X_4 \\
&\qquad\qquad\qquad \therefore X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 > X_1X_4
\end{aligned}
$$

また，P が凸多面体であることから，X_2, X_3 を端点にもつ L の部分弧 L_{23} は

$$L_{23} \geq X_2X_3$$

を満たすので

$$L_{14} \geq X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 > X_1X_4$$

よって，L_{14} を X_1X_4 に置き換えてできる L' は L よりも短くなる．これは L の最短性に矛盾．

□

補題 1.2.3. 多面体 P_1 と P_2 が展開図 R から接着により実現されるとき，両者の間には等長写像が存在する．

証明. 展開図 R から実現される凸多面体が存在するとき，X 上の各点は実現された凸多面体上のある点に対応する．この対応は一対一であり，展開図上の距離の定義から，展開図上の 2 点間の距離とそれに対応する凸多面体上の 2 点間の距離は一致する．ここで，P_1, P_2 が展開図 R から実現されたものであることから，当然それらの間の対応する 2 点間の距離も一致するはずである．よって，展開図 R から凸多面体 P_1, P_2 への自然な全単射を f_1, f_2 とおいて，$f : P_1 \to P_2$ を $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ でて定めることで f は等長写像となる． □

補題 1.2.4. P_1, P_2:凸多面体とし，

- $\phi : P_1 \to P_2$
- $\phi^{-1} : P_2 \to P_1$

をそれぞれ等長写像とする．
P_1 の面の ϕ による像は，P_2 の面を覆い，その結果，その面を”新たな面”に分割する．
ϕ^{-1} でも同様の操作を行うことができる．
その結果，多面体 P_1 と P_2 は，同じ数の同じように配置された新しい合同な面で構成される．

証明. Q_1 : P_1 のある面，$\phi(Q_1)$: Q_1 の像とする．
$\phi(Q_1)$ が，多面体 P_2 のある面 R_2 を少なくとも部分的に覆っているとする．

$$i.e.\ S_2 = R_2 \cap \phi(Q_1) \neq \emptyset$$

- S_2 が凸多角形であることを示す．$X_2, Y_2 \in S_2$，$X_1 = \phi^{-1}(X_2), Y_1 = \phi^{-1}(Y_2)$ とする．
  Q_1 の凸性から，線分 X_1Y_1 は Q_1 に含まれる．
  $\therefore \phi(X_1Y_1)$ も $\phi(Q_1)$ に含まれる．
  さて，線分 X_1Y_1 が P_1 の (X_1と Y_1 間の) 最短弧であり，ϕ は等長写像なので，$\phi(X_1Y_1)$ も P_2 の (X_1 と X_2

間の) 最短弧である．

一方，X_2 と Y_2 は同じ面 R_2 上の点なので，線分 X_2Y_2 が最短弧.

$\therefore X_2Y_2 \in \phi(X_1Y_1)$ かつ $X_2Y_2 \in R_2 \quad \therefore X_2Y_2 \in S_2$

S_2 は面 R_2 から，Q_1 を囲む P_1 の辺の ϕ による像によって切り取ったものであり，多面体の辺は常に多面体中の最短の弧であるので，P_1 の辺を等長写像 ϕ でとばしたものは P_2 の最短弧である．

??より，P_1 の任意の辺の像のうち面 R_2 上にあるものは直線分．結果，S_2 は R_2 から有限個の線分で切り取られ，有界な多角形となる．P_1, P_2 は有限個の面を持つため，P_2 の面と $\phi(P_1)$ の共有点は有限個.

$\therefore$ 多面体 P_2 は有限個の新しい面に分割される．

$\phi^{-1}: P_2 \to P_1$ でも同様の操作を行う．

ϕ が等長写像なので，P_1, P_2 は同じ数の合同，同じ組み合わせ構造を持つ新しい面で構成される． □

さて，**??**の証明を行う．

証明. **??**により，2 つの等長な点数を持つ凸多面体 P_1, P_2 の間に等長写像が存在し，同じ数で合同で，同じように配置された面で構成されるので，コーシーの剛性定理より，P_1 と P_2 は合同である． □

1.3　存在性定理の証明

この小節では，??の存在性について示していく．

1.3.1　展開図の本質的な幾何学のいくつかの定理

ここでは詳しい証明は省くことにする[*1]．

定義 1.3.1 (最短弧)**.** 展開図 R のなかで，同じ端点を持つ全ての弧の中で，その長さが最も短い曲線を最短弧という．

最短弧は以下を満たす．

1. 最短弧はそれぞれ，展開図の各凸多角形の中に最大 1 本の直線分を持つ．
2. 多角形の辺を横切る場合，屈折することはない．(i.e. 辺と最短弧のなす角は辺を跨いでも変わらない．)
3. 2π 未満の点を通ることはない．(2π を超える点を通ることはあるが，ここでは扱わないので略．)
4. 1 つの点 (始点) から他の 2 点 (終点) への最短弧は，一方がもう一方に含まれるか，始点以外で交わらないかのいずれか．
5. 全ての展開図で，任意の 2 点のペアは最短弧で結ぶことができる (最短弧の存在性)．

測地線 (展開図上での最短弧) について考えていく．

定義 1.3.2 (測地線多角形)**.** 測地線多角形とは，最短弧で構成される閉曲線で囲まれた，展開図の任意の領域で，接着してできるものが円盤に位相同型なもの．

測地線多角形が通常の多角形と違うポイントは，測地線多角形の内部に展開図の真の (2π 未満の) 頂点が含まれる可能性があるということである．しかし，曲率の条件を与えることにより，平面の多角形と等長であることがわかる．以下でそれを主張する[*2]．

1. 測地線三角形が，内部に曲率が非零の点を含まない場合，その三角形は平面上に展開可能である．つまり，通常の $\mathbb{R}^2$ 内の三角形と等長．
2. 測地線多角形 Q の内部に曲率が非零の点が存在しないとき，Q は端点以外の点で交わらないような対角線により三角形分割可能である．
3. 曲率が非零の点を内部に持たない測地線多角形は平面上に展開可能である．(重なり合う可能性はある．)

1.3.2　展開図が満たす条件

アレクサンドロフの条件を満たす展開図を考える．つまり，球面に位相同型で，各頂点の角度の総和は 2π 以下である展開図を考える．

定義 1.3.3. 以下のように言葉を定義する．
正曲率の展開図 $\Longleftrightarrow$ 各頂点の角度の総和は 2π 以下．
冗長な頂点がない $\Longleftrightarrow$ 各頂点の角度の総和が真に 2π 以下 (i.e. 2π 未満)．

補題 1.3.4. 展開図 R 上の 2 点 x, y を結ぶ最短弧について，

1. 2π 未満の頂点を通ることはない (端点を除く)．
2. ある頂点 x から，2 点 y, z に最短弧を結んだとき，この 2 本の弧は x 以外で交わらない．

[*1] Alexandrov,A.D. *Convex Polyhedra*. 72 ページ以降参照
[*2] 1 から 3 の順に示していける．

証明. 1. $a \in xy$ が展開図上の頂点で，2π 未満とする．また，xa, ya が共に展開図をなす多角形上での線分であると仮定.
頂点 a 周りを展開図の接着の対応により接着する．曲面 axy を平面に引き伸ばすと，三角形 axy ができる．ここで，三角形 axy において $xy < xa + ay$ である．よって，2π 未満の頂点を通る弧長よりも短くなり，かつそのような頂点を通らないように弧を引くことができる.

2. 交わるとし，その点を a とする．1 から，最短弧は 2π 未満の頂点を通らないので，a 周りの角度は 2π である．また，交わることから，xy と xz のなす角は $0 < \theta < 2\pi$．よって，$^\exists x' \in xa \subset xy$, $^\exists z' \in az$ $s.t. \triangle ax'z' \subset R$. また，$xy$ の部分弧 xa と xz の部分弧 xa の弧の長さは等しい k とから，$ax' = ax''$ なる点を $xa \subset xz$ 上にとることができ，

$$\begin{aligned} xz &= xx'' + x''a + az' + zz' \\ &> xx' + x'z' + z'z \end{aligned}$$

となる．ただし，このような点は $x = x'$, $z = z'$ でしかなく (x', z' 周りの角は 2π なので同じ議論がくりかえされる)，初めに取った最短弧が最短ではないことになり，矛盾.

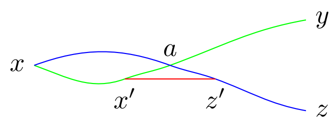

図 2

□

補題 1.3.5. 全てのアレクサンドロフの展開図は，角度の和が 2π 未満の頂点を少なくとも 3 つ持つ.
もし，展開図が 2π 未満の頂点をちょうど 3 つ持ち，他の頂点が (存在し)2π に等しいとき，この展開図は二重被覆多角形として実現可能である.

証明. 背理法で示す．もし，2π 未満の角度が 2 つしか存在しないと仮定する．これを θ_1, θ_2 とおく．このとき，

$$\sum_{i=1}^{2}(2\pi - \theta_i) < 4\pi$$

これは，球面に位相同型な曲面上の全てのガウス曲率の総和が 4π であることに矛盾する.
2 つ目の主張を示す．2π 未満の頂点間に測地線を描く．展開図が球面に位相同型であることから，3 本の測地線で囲まれた展開図 R の領域は円盤に位相同型であり，2π 未満の頂点がちょうど 3 個であることから，内部にはそのような頂点は含まれない．このような測地線三角形は $\mathbb{R}^2$ の三角形と等長であり，できた 2 つの三角形の対応する辺の長さは等しいので，合同である.
よって，二重被覆多角形として実現可能である. □

補題 1.3.6. 任意の正曲率の展開図は，以下の条件を満たす展開図に等長変換可能である.

1. 展開図は三角形の接着で構成される.
2. 冗長な頂点を持たない.
3. 展開図の三角形の 2 頂点が接着されることはない.

証明. $A_1, \cdots, A_v$: 展開図の非冗長な頂点とする．($v \geq 3 \because$ **??**)
展開図 R において，頂点 A_1 から，$A_2, \cdots, A_v$ へそれぞれ最短弧で結び，この弧に沿って R を切断する．(つまり，展開図を A_1 から各々の頂点への測地線で切断する．)

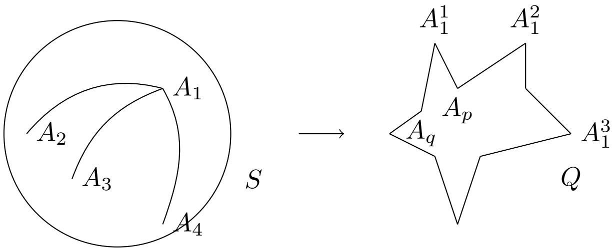

図 3　$S \to Q$

できた多角形を Q とおく．これは測地線に囲まれた多角形であり，Q の作り方から内部には曲率が非零な点を含まないので (重なり合う可能性もあるが) 平面に展開可能である．
同一点から出た最短弧は交わらないので (??より)，Q は円盤に同型．また，Q は以下の 2 種類の頂点を持つ．

- 第一頂点 $A_2, \cdots, A_v$: 展開図の $v-1$ 個の頂点に対応.
- 第二頂点 $A_1^1, \cdots, A_1^{v-1}$: 展開図の一つの頂点 A_1 に対応.

また，この 2 種類の頂点は Q 上に交互に配置される．第二頂点は展開図の同じ頂点に対応する (i.e. 接着される) ので，以下を示す必要がある．

主張. Q は，各々の三角形が第二頂点を最大で 1 つ持つように三角形分割できる．

まず，A_1 の角度の総和 $= \displaystyle\sum_{i=1}^{v-1} A_a^i < 2\pi$ より，A_1^i のうち π 以上の角度になり得るのは最大で 1 個である．
$A_1^1 < \pi$ と仮定する．
A_1^1 に隣接する角を A_p, A_q とおく．線分 A_pA_q を描き，三角形 $T = A_1^1A_pA_q$ を考える．A_1^1 なので，この角度は T での A_1^1 での角度でもある．$\therefore T \cap Q$ は多角形である (ここで，$T = T \cap Q$ にもなり得ることもある)．

- $T = T \cap Q$ のとき．T が Q の三角形分割の一つ．
- $T \neq T \cap Q$ のとき．$T \cap Q$ で A_p と A_q を結ぶ最短弧を描く．

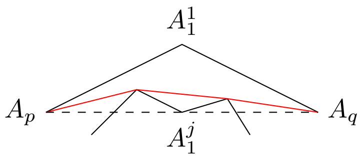

図 4　A_p と A_q を結ぶ最短弧

明らかに，

$$\overline{A_pA_q} < A_pA_1^1 + A_1^1A_q$$

$\overline{A_pA_q}$ 上に第二頂点が存在しないことを示す．これを示せば，Q から $T \cap Q$ を取り除くことで主張を満たす三角形分割が可能であることになる．これを背理法で示す．
$\overline{A_pA_q}$ 上に A_1^j があるとする．まず，三角不等式等から

$$A_pA_1^j < \overline{A_pA_1^j}$$
$$A_qA_1^j < \overline{A_qA_1^j}$$

なので，上の 2 式から

$$\begin{aligned} A_pA_1^j + A_1^jA_q &< \overline{A_pA_1^j} + \overline{A_1^jA_q}\ (= \overline{A_pA_q}) \\ &< A_pA_1^1 + A_1^1A_q \end{aligned}$$

よって，A_1^1 から 2 つの点 A_p，A_q への最短弧の長さの和より，A_1^j からの 2 つの点 A_p，A_q への最短弧の長さの和を短くすることができる．

しかしこれは，$A_pA_1^1$，$A_qA_1^1$ は展開図上 A_p と A_1，A_q と A_1 の最短弧であったので，矛盾．$\therefore$ $\overline{A_pA_q}$ 上に第二頂点 A_1^j は存在しない．よって，Q から $T \cap Q$ を $\overline{A_pA_q}$ に沿って切り取った多角形は第二頂点を一個持つ多角形．これは主張を満たす三角形分割可能である．

さて，$A_1^i < \pi$ を満たす頂点が存在する限りこれを繰り返し，残った多角形には第二頂点は高々 1 個しか含まれない．この多角形も主張を満たすように三角形分割可能である． □

さて，以上の 2 つの補題から，展開図は以下の条件を満たすように等長変換できる．

結果． アレクサンドロフ条件を持つ展開図は以下を満たす．

1. 展開図は三角形で構成される．
2. 角度の和が 2π 未満の頂点数は 3 個以上．
3. 展開図を構成する三角形の頂点の中に，冗長な頂点が存在しない．
4. 構成する三角形のどの 2 頂点も接着されない．

以後，展開図はこれらの条件を満たすものとする．下に，このような等長変換の一例を挙げておく．

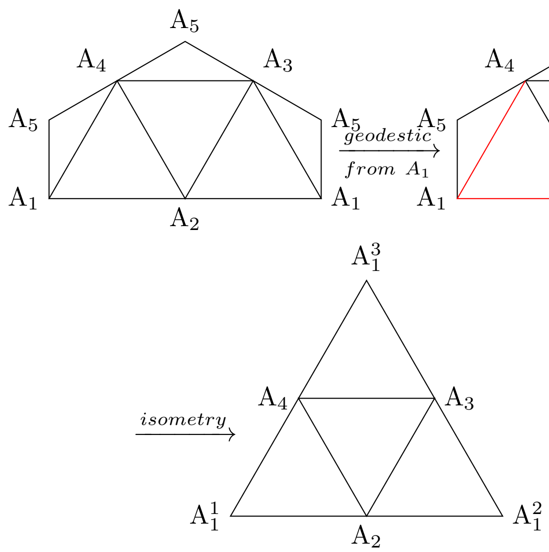

図 5　等長変換の 1 例 (四面体)

1.3.3　展開図の多様体

一度，展開図に含まれている計量関係を無視する．つまり，辺の長さ (と角度の大きさ) の情報を一度取り除く (グラフ構造で見ることになる)．

定義 1.3.7 (複体)**.** この中で複体とは，三角形の集まりであって，辺の接着条件が与えられており，接着してできるグラフがオイラーの公式 ($f-e+v=2$) を満たすもの．

複体 K の三角形が内部に曲率非零の点を含まず，辺の接着が長さを保存している場合に，実際に展開図を与える．これを「複体 K は構造 K を持つ展開図に変換された」という．
さて，平面の三角形は，辺の長さが決まれば一意に定まるので，複体 K から展開図を得るには K の辺に長さを与えるだけで十分．よって，構造 K を持つ展開図は k 個のパラメータ $r_1,\cdots,r_k$(辺の長さ) を指定することで決定される．構造 K を持つ全ての展開図の集合は，k 次元空間のある領域 $\mathbf{M}^0$ として表すことができる．$\mathbf{M}^0$ はどのようなものか．

- 辺の長さが唯一満たすべき条件は，三角不等式「$r_i+r_j>r_k$」
  各が半空間を指定しており，この半空間の共通部分が $\mathbf{M}^0$ である．
  (ちなみに，$\mathbf{M}^0$ は，原点を中心とする凸多面体の内部)
- $\mathbf{M}^0$ は空でない．
  ($\because r_1=\cdots=r_k$ で三角不等式成立)

さて，以上で見たように任意の複体 K に対して全ての三角形が正三角形でるような構造 K の展開図が存在する．また，真に正の曲率を持つ展開図の集合は，$\mathbf{M}^0$ のある部分集合 $\mathbf{M}$ で表すことができる．$\mathbf{M}$ は，各頂点において角度の和が 2π 未満という条件により決定される ($\therefore \mathbf{M}$ は開)．$\mathbf{M}$ を，真に正の曲率を持つ展開図の多様体という．

補題 1.3.8. 複体 K の頂点数が 4 以上の場合，$\mathbf{M}$ は $\mathbf{M}^0$ の真部分集合.

証明. 2 ステップに分けて証明を行う．
<u>Step1</u>
3 つより大きい数の頂点を持つ複体において，接する三角形が少なくとも 3 つ存在するような頂点が存在する．
$\because$) 対偶「各頂点に最大で 2 つの三角形が隣接 $\Longrightarrow$ 最大で 3 つの頂点をもつ」を示す．
そのような複体の三角形の 1 つを ABC とおく．ある三角形 ABD が辺 AB で ABC と隣接しているとする．このとき，2 つの三角形は頂点 A と B で隣接していることになる．仮定から，A と B で隣接している他の三角形は存在しないので，辺 AC と AD，辺 BC と BD が接着されていることになる．これにより全ての辺が接着され，2π 未満の頂点は 3 個のみ．
<u>Step2</u>
??の証明
$\because$) $\mathbf{M}^0$ に含まれ，$\mathbf{M}$ に含まれない展開図を作れば良い．K は 4 つ以上の頂点を持つと仮定する．Step1 より，少なくとも 3 つの三角形が隣接するような頂点が存在する．この頂点を A とおく．さて，K の全ての辺に同じ長さを与える (i.e. 正三角形からなる展開図を考える)．A から出る辺の長さを同じ割合で減らしていく．このとき，他の辺は固定しておく．この操作により，A に隣接する三角形の角 A での角度は π に近づいていく．仮定から，A での角度の和は 3π 以上の値に近づく．これは $\mathbf{M}$ に含まれない． □

さて，多様体 $\mathbf{M}$ の境界とは，全ての角で $\displaystyle\sum_j \phi_{ij} \le 2\pi$ が成立し，少なくとも 1 つは等号が成立するような展開図に対応する点の集合である．また，曲面 F_i を，等式 $\displaystyle\sum_j \phi_{ij} = 2\pi$ が成立し，他の角では 2π 以下であるような展開図に対応する点の集合とする．$\mathbf{M}$ の境界は，v 個の面 F_i の断片で構成される．

補題 1.3.9. $\mathbf{M}$ の各連結成分の境界は，$\mathbf{M}$ の他の連結成分の点が存在しないようなある近傍の点を含む．

証明. $\mathbf{M}' : \mathbf{M}$ のある連結成分とする．$\mathbf{M}'$ の境界上に，$F_1,\cdots,F_l(l<v)$ に属する点 X_0 をとる．X_0 が Lem の条件を満たす点になることを確認していく．点 X_0 は，頂点 $A_1,\cdots,A_l$ の各々の角の和は 2π で，他の頂点 $A_i(i>l)$ の角の和は 2π 未満であるような展開図 R_0 に対応している．R_0 の辺の長さが $\epsilon(>0)$ 未満であれば，$A_i(i>l)$ の

和は 2π にはならない．このような微小変化のみ考える (i.e. X_0 の近傍 W を考え，W が $F_1, \cdots, F_l$ 以外の面 F_i を含まないようにする)．頂点 A_1 に隣接する R_0 の三角形を考える．点 A を囲む辺のうち一つを r とする．A_1 の角度

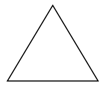

図 6　A_1 を囲む辺

の和 $\displaystyle\sum_j \phi_{1j}$ は，r の増加関数である．辺 r を長く (短く) すると，$\sum \phi_{1j}$ が 2π より大きく (小さく) なる．これを $R_1(R_2)$ とする．この 2 つの展開図 R_1, R_2 は，ある点 X_1, X_2 に対応する．点 X_1, X_2 の近傍 U_1, U_2 を，U_1 の全ての点で $\sum \phi_{1j} < 2\pi$．U_2 の全ての点で $\sum \phi_{1j} > 2\pi$ なるようにとる．辺 r には，長さを座標とする k 次元空間の r 軸が対応する．つまり，1 つの辺 r のみが変化すると，対応する点は r 軸に沿って移動することになる．r :fix より，U_1, U_2 は $k-1$ 次元の立方体領域である．U_1 と U_2 は互いに平行であり，r 軸以外が対応する点 Y_1 と Y_2 を取れば，これを結ぶ線分 Y_1Y_2 は r 軸に平行．これらの線分の全体は，プリズムの形 (i.e. 角柱) をしており，X_0 の近傍を覆っている．この V に，$\mathbf{M}$ の連結成分のうち，$\mathbf{M}'$ 以外の点が含まないことを示す．

$Y_1(Y_2)$ では，角度の和 $\sum \phi_{1j}$ は 2π より小さい (大きい)．Y_1 から Y_2 に線分上を移動するとき，この和は単調増加する．$\therefore$ 線分 Y_1Y_2 上には $\sum \phi_{1j} = 2\pi$ なる唯一の点が存在．これは，U_1 と U_2 に端点を持つ各線分 Y_1Y_2 が 1 点で F_1 と交わることを意味する．したがって，プリズム全体は F_1 により 2 つの部分 V_1, V_2 に分割される．V_2 では，$\sum \phi_{1j} > 2\pi$ なので，V_2 のどの点も $\mathbf{M}$ に属さない．さて，X_0 は $\mathbf{M}$ のある連結成分 $\mathbf{M}'$ の境界上に存在するので，X_0 の近くに $\mathbf{M}'$ の点が存在．$\mathbf{M}'$ が V_1 全体を含むことを背理法で示す．

V_1 の中で $\mathbf{M}'$ に属さない点を Y とする．$\mathbf{M}'$ に属する点を Z とする．プリズム V の構成法から点 Y と Z は，U_1 のある点 Y_1 と Z_1 から出ている r 軸に平行な線分上にある．したがって，線分 Y_1Z_1 を引くと，V_1 内の Y と Z を結ぶ連結した多角的な線 $L = YY_1 \cup Y_1Z_1 \cup Z_1Z$ が得られる．Z は $\mathbf{M}'$ の内部に存在し，Y は $\mathbf{M}'$ の外部に存在するので，L は $\mathbf{M}'$ の境界と交わる．この交点は，ある面 F_i 上に存在しなければならない．さて W は，$F_1, \cdots, F_l$ 以外の面 F_j の点を含まないようにとったので，交点は表面 $F_1, \cdots, F_l$ 上飲みに存在．しかし，X_0 の定義により，$\mathbf{M}'$ の境界のどの点も l 個未満の面 F_i には属さない．これは矛盾し，つまり V_1 は $\mathbf{M}'$ に完全に含まれる．同時に，V_2 は $\mathbf{M}$ の点を全く含んでない．したがってプリズム V は $\mathbf{M}'$ 以外の $\mathbf{M}$ の点を含まないような X_0 の近傍領域である．　$\square$

1.3.4　多面体の多様体

与えられた構造 K を持つ展開図の多様体と共に，構造 K を持つ正曲率の展開図から糊付けにより得られた凸多面体を考える．多面体 P が展開図 R から糊付けにより生成されるには,

1. これらの三角形の複体が K と同じ構造を持つこと
2. その三角形が，展開図 R の対応する三角形と等長になること

を満たすように三角形分割が可能なときである．したがって, 展開図 R から多面体 P を糊付けで生成すると，$R \to P$ の写像が定義され，それにより $K \to P$ の写像も定義される．このような写像により誘導される P 上の三角形の複体を，P の K-三角形分割という．図形的には，K-三角形化多面体とは，P 上に展開図 R の多角形の辺が描かれた多面体である．真に正曲率の展開図について考える場合は，展開図の多角形の頂点は必然的に多面体の頂点となる．

さて，次の??では，三角形分割が多面体の頂点以外の頂点を持つことを追加で認める．

補題 1.3.10. T_0 : 各三角形の内部に曲率が非零の点を含まないような，凸多面体 P_0 の三角形分割とする．このとき，以下の条件を満たすような $\epsilon > 0$ が存在する．
もし，凸多面体 P の頂点が T_0 の頂点と一対一に対応しており，各々の頂点が ϵ 以下の距離にある場合，T_0 と同じ構造をもつ P の三角形分割を取れる．

証明. 点 A を固定して考える．多面体 P_0 の各面を T_0 の頂点を分割の頂点として三角形分割する．T_0 の辺 AB を，$int(AB) \cap T_i \neq \emptyset$ (T_i : 三角形分割された三角形) を満たす三角形とともに平面上に展開する．これは明らかに 1 つの単純多角形になる．これを Q_{AB} とおく．さて，$P_0 \to P$ の変化は，T_0 の頂点の連続的な変化であるので，面の変

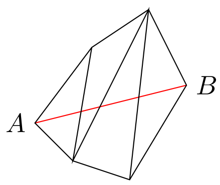

図 7　多角形 Q_{AB}

化も連続的である．したがって，$\delta_{AB}(>0)$ が以下を満たすように取れる．
Q_{AB} の頂点を δ_{AB} 未満の微小変化をしても，$int(AB) \subset Q_{AB}$ が成立．
全ての T_0 の辺に対し同じ操作を行い，これらの δ たちの最小値を ϵ とすればよい．

□

次に，三角形分割された多面体の多様体における近傍領域について考える．
P_0 を K-三角形分割された多面体とし，複体 K の頂点 A, B, C に対応する P_0 の 3 頂点を A, B, C とする．直交座標系 x, y, z を選び，A : 原点，B : x 軸正方向，C : xy 平面の半空間 $y > 0$ に載せる．P_0 が二重被覆多角形に縮退しなければ，xy 平面上にない P_0 の頂点 D をもう一つ選択し，必要ならば平面 $z = 0$ に対して反転させることで D を半空間 $z > 0$ に写す．以上のように多面体の位置を指定すれば，平行移動も反転もできなくなる．等長写像 $P_1 \to P_0$ が存在すれば，多面体 P_1 は上の変換で一致する．これらを同じ多面体と分類し,[*3] その各多面体の多様体を考える．

- 多面体が二重被覆多角形に縮退していない場合.
  3 頂点を上記の条件を保ったまま，十分に小さな頂点の変位を適用すれば，新しい凸多面体 P が得られる．各多面体は，変位させた頂点の凸包の境界である．??より，頂点の変位が十分小さければ，多面体 P は，P_0 の K-三角形分割と同じ構造を持つ K-三角形分割ができる．したがって，P_0 の頂点に近い多面体 P は K-三角形

[*3] 合同な多面体が同じものとしてみなされることになる．

分割になり，これらの多面体の集まりを P_0 の近傍と定義する．

- 多面体が二重被覆多角形に縮退している場合.

  このとき，P_0 は平面 $z=0$ 上にある．半空間 $z>0$ をみて上側，半空間 $z<0$ をみて下側と区別する．複体 K の一方は上側，もう一方は下側に写される．したがって，縮退した K-三角形分割の多面体のこれらの面は，K の対応する部分により区別できる．A,B,C の位置に関する条件を保存したまま頂点の小さな変位により，多面体 P_0 を P に近づけることができる．変位が十分小さければ，面は僅かに回転するだけで，どの面も平面 $z=0$ に垂直にならない．したがって，各多面体 P においても，$z>0$ 側と $z<0$ 側を区別可能である．**??**より，多面体 P は P_0 と同じ構造の K-三角形分割が可能である．この三角形分割は，P_0 の上側 (下側) に対応する K の部分が P の上側 (下側) に写されるように選択する．こうして得られた K-三角形分割された P は全て異なる．これらを縮退多面体 P_0 の近傍と定義.

つまり，K-三角形分割された多面体 P_0 の近傍とは，微小変化した T_0 の頂点の凸包で K-三角形分割された多面体 P の集まりである．
さて，P_0 の頂点に近い頂点を持つ多面体 P は，P_0 の K-三角形分割と同じ構造の K-三角形分割を持ち，それらの P はそれぞれ異なることがわかった．複体 K の頂点数を v とすると，多面体では頂点の座標は $3v$ 個の変数となる．ここで，A : 原点，B : x 軸正方向，C : xy 平面上 $(y>0)$ より，6 個の変数は一定．つまり，$3v-6$ 個の可変座標を持つことになる．これらの座標は十分に小さい範囲で任意に変化し，異なる K-三角形多面体が得られる．これは，各 K-三角形分割された多面体 P_0 は $(3v-6)$ 次元立方体に同型の近傍を持つことを意味する．したがって，全ての K-三角形分割された多面体の集まりは，実際には $(3v-6)$ 次元多様体として見ることができる．

補題 1.3.11. 複体 K の頂点数を v，辺数を e とする．このとき，$3v-6=e$ が成立する．つまり，多面体の多様体 $\mathbf{P}$ と展開図の多様体 $\mathbf{M}$ の次元は一致する．

証明. f : K の三角形の数とする．各三角形は 3 つの辺を持ち，辺は対で同一視されるので，$3f=2e$．また，オイラーの公式 : $f-e+v=2$ より，

$$\begin{aligned} 3f-3e+3v&=6\\ 2e-3e+3v&=6\\ 3v-6&=e \end{aligned}$$

□

補題 1.3.12. K-三角形分割された多面体 P_n の列が，ある展開図 R に収束する展開図 R_n を持つとする．
このとき，列 P_n からある K-三角形分割された多面体 P に収束する多面体の部分列 P_{n_j} をその K-三角形分割とともに取り出せる．
i.e. P の三角形分割は，P_{n_j} の K-三角形分割の極限.

証明. 仮定より P_n の展開図 R_n は収束するので，それらの頂点間の距離は一様収束性を持つ．このことより，多面体自身は原点を中心とするある球に覆われる．複体 K の頂点を列挙する．対応する多面体 P_n(とその展開図 R_n) の頂点もまた列挙する．K の 1 つ目の頂点が収束するような多面体の部分列を選び，次にその部分列から，2 つ目の頂点が収束するような部分列を選択する．以下，同操作を繰り返すと，全ての頂点が収束するような列が得られる．これをあらためて P_n とおく．それぞれの展開図を R_n とおく．凸多面体 P_n の極限多面体を P とおく．この P が**??**を満たすことを示す．そのためにまず以下を示す．

主張. 多面体 P_n のある辺が R_n のどの辺とも一致しない場合，その P_n の辺と R_n の全ての辺との交点の総数がある数 N_0 を超えないことを示す．(これは，全ての多面体 P_n の全ての辺に対して同じ)

P_n の辺の長さの上限を L，R_n の三角形の全ての高さの最大を h とする．R_n は R に収束するので，$h>0$(三角形が潰れることはない)．R_n の 1 つの頂点に隣接する三角形の最大数を m とおく．R_n は全て同じ構造を持つので，m

は全ての R_n で同じ．主張の N_0 は,

$$N_0 = \frac{2Lm}{h} + m$$

ととれる．この逆を仮定する．つまり，ある多面体 P_n 上には，R_n の辺と交点の数が

$$N > \frac{2Lm}{h} + m$$

である辺 a が存在すると仮定する．さて，辺 a は N 個の交点によって $N+1$ 個の線分に分割される．これらの線分の列の中に，各々の長さが $\dfrac{h}{2}$ 未満の長さの，少なくとも m 個の連続する線分の部分列が存在する．

これは，もしそうでない場合，任意の m 個の連続する線分の中に $\dfrac{h}{2}$ 以上の長さの線分が存在することになる．さて，全ての $N+1$ 個の線分のうち，m 個の連続した線分の列は $\left[\dfrac{N+1}{m}\right]$ 個交わらないようにとれる．さて,

$$\begin{aligned}\left[\frac{N+1}{m}\right] &\geq \left[\frac{N}{m}\right] \\ &\geq \left[\frac{2L}{h} + 1\right] > \frac{2L}{h}\end{aligned}$$

m 個の連続した線分は，$\dfrac{h}{2}$ 以上の線分を含むので，集合全体の長さも $\dfrac{h}{2}$ 以上となる．このような列が $\left[\dfrac{N+1}{m}\right]$ 個交わらないように取れるので，線分全体の長さは $\left[\dfrac{N+1}{m}\right]\dfrac{h}{2}$ 以上．これは上の不等式から L よりも大きい．さて，辺の長さの上限が L なので矛盾.

$\therefore \dfrac{h}{2}$ よりも短い線分は少なくとも m 個連続する.

さて，長さ $\dfrac{h}{2}$ より短い連続する m 本の線分の最初の線分 EF が展開図 R_n の三角形 ABC にあるとする．EF の端点は，A から辺 AB と AC の長さの半分よりも短い距離に存在．したがって，E と F は点 B と C よりも A に近い位置に存在する.

$\because$) F から AB へ垂線を引き，交点を H とおく．C からも同様にし H' とおく．$FH \leq FE$ であり，もし $FA \geq \dfrac{1}{2}AC$ の場合，中点連結定理から $\dfrac{1}{2}CH' \leq FH$．これは EF が，三角形 ABC で C を頂点としたときの高さの半分以上になり，EF が $\dfrac{h}{2}$ よりも短いという条件に矛盾．(E も同様．)

辺 a を $E \to F$ と辿っていくと，隣の三角形 ACD に入る．この三角形上でも $\dfrac{h}{2}$ よりも短い線分をもつ．したがって，この三角形でも辺 a は AC, AD の半分よりも A に近い点で三角形の辺と交わる．このような線分が点 A の周りで m 本続くが，A 周りでは最大で m 個の三角形しか隣接しない．つまり，辺 a は頂点 A の周りを 1 周し，再び AB に戻り AB と交わることになる．ただしこれは不可能.

$\because$) 実際，A は展開図 R の頂点であり，同時に多面体 P_n の頂点でもある．したがって，A は P_n の，ある辺 b により他の頂点と隣接しているはずである．このとき，a が A 周りを囲んでいるので，b と a は交わることになるが，辺は頂点でしか交わることはできなかった.

よって，$N > \dfrac{2Lm}{h} + m$ が成立するような辺 a は存在しない．つまり，任意の多面体 P_n の任意の辺と，展開図 R_n の辺の交点の数は N_0 を超えない.

また逆に，任意の展開図 R_n の任意の辺と多面体 P_n の辺との交点の数は，全ての多面体について同じある数 N_1 を超えないことも明らか.

(主張の証明終了)

ここで，各展開図 R_n の辺を列挙し，対応する辺に同じナンバリングを行う．全ての展開図で最初の辺をとる．最初の辺が,

- 多面体 P_n の辺に対応しているならば，R_n の最初の辺が収束するように，P_n の辺をとる.

- 多面体 P_n の辺と交差しているなら，前の主張から交点数は有限なので，交点がある有限位置に収束するような部分列 P_{n_j} を選ぶことができる．そうすると，隣接する交点間の区間も収束，i.e. その辺の長さも収束．

同じ議論を 2 番目の辺，3 番目の辺 $\cdots$ と繰り返し，対応しあう R_n の全ての辺が収束し，自身の辺も収束するように多面体 P_n の列を得ることができる．これらの辺の極限は，極限多面体上 P 上に，K と同じ構造のネットを形成し，P を多面体の頂点を内部に含まない三角形に分割する．実際に，R_{n_j} の三角形は P_{n_j} の頂点を含むことなく，辺の部分のみで互いに隣接するようになっている．これらの面は，P 上のある多角形に収束．これらの多角形からなる P の面の辺は，展開図 R_{n_j} の辺の極限に対応 (P の面の辺は R_{n_j} の辺の極限値)．平面上に展開すると，これらの多角形は展開図 R_{n_j} の三角形の極限．i.e. 展開図は P 上にプロットされ，R_{n_j} の展開図と同じ構造で，辺の長さはこれらの展開図の辺の長さの極限に等しい．多面体 P_{n_j} 上に描画された展開図 R_{n_j} の 3 要素 (頂点，辺，三角形) は，P 上にプロットされた展開図 R 上の対応する 3 要素に収束．i.e. K-三角形分割された多面体 P_{n_j} は，K-三角形化された多面体に収束し，その展開図 R_{n_j} は K-三角形分割された R に収束する． □

1.3.5 アレクサンドロフの写像定理

存在性の証明に必要なアレクサンドロフの写像定理を紹介する．

定理 1.3.13 (Alexandrov's mapping lemma)**.** $\mathbf{A}, \mathbf{B}$: 次元 n の多様体，$\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ を以下の条件を満たす写像とする．

1. $\mathbf{B}$ の各連結成分は，$\mathbf{A}$ の点の像を含む．
2. ϕ は単射．
3. ϕ は連続．
4. 多様体 $\mathbf{B}$ の点 B_m $(m = 1, 2, \cdots)$ が多様体 $\mathbf{A}$ の点 A_m $(m = 1, 2, \cdots)$ の像であり，B_m の列が点 B に収束するならば，$\mathbf{A}$ には，B を像とする点 A が存在し，A に収束する A_m の部分列 A_{m_i} が存在する．

このとき，$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$．つまり ϕ は全射．

証明. 条件 (4) より，ϕ^{-1} は連続．
実際に，$B_m = \phi(A_m), B = \phi(A), B_m \to B$ のもと，数列 A_m が A に収束しないと仮定する (i.e. ϕ^{-1} が連続でないと仮定)．このとき，補集合が無限に多くの点 A_m を持つ A の近傍が存在する．この点を $A_1, A_2, \cdots$ とおく．以下がわかる．

$$\begin{aligned}
&B_{m_j} = \phi(A_{m_j}) \\
&B_{m_j} \to B \\
&B = \phi(A) \\
&\text{かつ，点 } A_{m_j} \text{で成る部分列は } A \text{ に収束しない．}
\end{aligned}$$

これは (4) に矛盾．よって ϕ^{-1} は連続．
(3) より ϕ は連続，(2) より単射なので，ϕ は同型．
Domain Invariance Theorem より，多様体 $\mathbf{A}$ の像 $\phi(\mathbf{A})$ は $\mathbf{B}$ の開集合．
実際に，$B \in \phi(\mathbf{A})$ と仮定する．i.e. B が $\mathbf{A}$ のある点 A の像と仮定する．U_B を，$B \in \mathbf{B}$ の近傍で n 次元立方体 (i.e. n 次元 Euclid 空間) に同相なものとする．ϕ の連続性により，点 A は U_B に像が含まれる近傍 V_A をもつ．また，点 A は n 次元立方体に同相な近傍をもち，この近傍と V_A の共通部分は U_B に写される A の近傍でもある．この近傍 W_A は，明らかに n 次元 Euclid 空間の開集合に同相．したがって，Domain Invariance Theorem より，同型像 $\phi(W_A)$ は U_B の開集合 (i.e. B の近傍)．したがって，全ての点 $B \in \phi(\mathbf{A})$ は $\phi(\mathbf{A})$ に含まれる近傍をもち，$\phi(\mathbf{A})$ は開集合であることになる．さらに，条件 (4) は，$\phi(\mathbf{A})$ が $\mathbf{B}$ 上で閉であることを意味する．
実際に，ある点 $B_n = \phi(A_n)$ が B に収束するならば，(4) により，$\mathbf{A}$ のなかに B に写される点 A が存在．

よって，$\phi(\mathbf{A})$ は $\mathbf{B}$ で開かつ閉で，$\mathbf{B}$ の各連結成分と空でない交点を持つ ($\because 1$) ので，$\mathbf{B}$ の全ての点を含んでいるはず．
実際に，$\phi(\mathbf{A})$ が開より，$\mathbf{B} \setminus \phi(\mathbf{A})$ は閉．$\mathbf{B}$ の連結成分の一つを $\mathbf{B}'$ とする．

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B}' \cap \phi(\mathbf{A})) \cup (\mathbf{B}' \cap (\mathbf{B} \setminus \phi(\mathbf{A})))$$

すると，$\phi(\mathbf{A})$ が閉より，$\mathbf{B}' \cap \phi(\mathbf{A})$ も閉．$(\mathbf{B}' \cap (\mathbf{B} \setminus \phi(\mathbf{A})))$ も同様．i.e. $\mathbf{B}'$ を $\mathbf{B}'$ で閉じた 2 つの集合に分割できる．これは，$\mathbf{B}'$ が連結であることから不可能．$\therefore$ どちらかは空集合．(1) より，$\mathbf{B}'$ には，$\phi(\mathbf{A})$ の点が含まれる．i.e. $\mathbf{B}' \cap \phi(\mathbf{A})$ は空でない．$\therefore \mathbf{B}' = \mathbf{B}' \cap \phi(\mathbf{A})$．各連結成分で和をとれば，$\mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \phi(\mathbf{A})$．$\therefore \mathbf{B} \subset \phi(\mathbf{A})$
また，単射性から $\phi(\mathbf{A}) \subset \mathbf{B}$
$\therefore \phi(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ □

1.3.6 存在性の証明

展開図に対する仮定:各頂点の角の和は最大で 2π，球面に同型．
??より，定理の条件を満たす展開図は，各頂点での角度の合計が 2π 未満の「正曲率」の展開図と等長なので，このような展開図に限定して証明を行う．また，??より，3 つの頂点のみの展開図は二重被覆多角形として実現可能．このことより，頂点数における帰納法で示すことにする ($n = 3$ での成立は前述より)．次の主張を示せば良い．

主張. K : 正曲率の展開図への変換が可能な $v(> 3)$ 個の頂点を持つ複体とする．v 個未満の頂点数を持つ正曲率の展開図が全て実現可能ならば，構造 K を持つ正曲率の展開図 R も全て実現可能．

さて，$\mathbf{M}$ を構造 K をもつ展開図 R の多様体，$\mathbf{P}$ を K-三角形化多面体の多様体とする．定義から，各 K-三角形化多面体 P には，P 上にプロットされた展開図 R が対応する．したがって，$\mathbf{P}$ から $\mathbf{M}$ への自然な写像 ϕ が存在する．この写像 ϕ が全射であることを示せれば，条件を満たす任意の展開図 R からある凸多面体 P が実際に糊付けにより生成されることになる．さて，??より，2 つの多様体 $\mathbf{P}, \mathbf{M}$ は次元が一致するので，アレクサンドロフの写像定理 (??) を用いることができる．よって，ϕ に対し，以下の 4 条件が成立することが示せればよい．

1. $\mathbf{M}$ の各連結成分には，$\mathbf{P}$ の点を像に含むような点 (i.e. 実現可能な展開図 R) が含まれる．
2. ϕ : 単射．
3. ϕ : 連続．
4. $\mathbf{M}$ の点列 R_n が，$\mathbf{P}$ の点列 P_n の像であり，ある点 $R \in \mathbf{M}$ に収束するとする．このとき，R を像に持つ点 $P \in \mathbf{P}$ が存在し，その点 P に収束する部分列 P_{n_j} が存在する．

ここで示すべきは $1 \sim 3$ である．4 に関しては??の内容そのものになる．

1. $\mathbf{M}$ の各連結成分に実現可能な展開図が含まれていること．
   証明のために，構造 K を持つ全ての展開図の多様体 $\mathbf{M}^0$ を考える[*4]．??より，多様体 $\mathbf{M}$ は，多様体 $\mathbf{M}^0$ の部分集合．$\mathbf{M}$ の境界は各頂点の角度の合計が 2π 以下 (ただし，いくつかは 2π に等しい) 展開図からなる．??より，このような展開図は頂点数が v より小さい展開図と等長．帰納法の仮定より，v 未満の頂点数の展開図は実現可能なので，これらも実現可能 (i.e. $\mathbf{M}^0$ における $\mathbf{M}$ の境界は実現可能な展開図で構成されている)．
   $\mathbf{M}'$: $\mathbf{M}$ のある連結成分とする．??より，$\mathbf{M}'$ の境界には，$\mathbf{M}$ の他の連結成分の点を含まない小近傍を持つ点 (展開図)R_0 が存在．R_0 は $\mathbf{M}^0$ の境界上の点より，ある凸多面体として実現可能．ここで，R_0 の全ての頂点は P_0 の頂点ではない ($\because$ 幾つかの頂点が 2π に等しい)．多面体 P_0 上では，これらの頂点に P_0 の辺や面の内部にある点 $A_1, \cdots, A_l$ が対応する．これらの点を十分に小さい距離で外側に移動させ，これらの移動させた点の集まりと多面体 P の凸包を考える．この凸包の境界は，P_0 に描かれた展開図 R_0 上の頂点に近い頂点を持

[*4] これは，角度の制限をとったもの．

つ多面体 P である．さらに，$A_1, \cdots, A_l$ は P の真の頂点に対応づけが可能．**??**より，多面体 P は，R_0 と同じ構造 K の三角形分割 R が可能．さて，R の頂点は全て多面体 P の真の頂点に対応するので，角の和は 2π 未満．したがって R は，多様体 $\mathbf{M}$ に属する．R_0 の近傍の点には，連結成分 $\mathbf{M}'$ 以外の点は含まれないので，R は考察中の連結成分 $\mathbf{M}'$ に属する．このように，$\mathbf{M}$ の各連結成分には，実現可能な展開図が含まれる．

2. ϕ の単射性.
   実際 ϕ は，K-三角形化された多面体のそれぞれに，その多面体の K-三角形化として実現可能な展開図を割り当てているので，単射性はこの定義より暗示されている．
   もし，2 つの多面体 P_1, P_2 が同じ展開図 R を持っているとする．このとき，P_1 に描かれた展開図 R と P_2 に描かれた展開図 R を見れば，両者の間には等長関係が存在する．([2] 3.3 章，定理 1) より，P_1 から P_2 へのこのような等長写像は平行移動と回転のみで実現可能．このことは，K-三角形化多面体の同値性の定義から，P_1 と P_2 は等しいことを意味する．したがって異なる K-三角形化多面体には，異なる展開図が対応する．したがって，写像 ϕ は一対一.
3. ϕ が連続であること.
   多面体の頂点の連続的な変化は，対応する展開図の辺の長さの連続的な変化を起こすので，ϕ は連続.

以上により，条件の全てを満たすことが確認され， $\phi : \mathbf{P} \to \mathbf{M}$ は全射であることが示された.

2　アレクサンドロフ条件と同値な条件

アレクサンドロフの定理 (**??**) の 2 つの条件のうち，2. を言い換えることで，具体的に構成していくことを考えたい．そこで，以下の接着方法を定義する．

定義 2.0.1 (チャック接着)**.** e_i, v_i : 展開図となる単純多角形の辺と頂点とする (ナンバリングは適切に行う).
$|e_{i-1}| = |e_i|$ となるような辺が存在するとき，ある点 v_i を起点に e_{i-1} と e_i を接着する方法をチャック接着という．

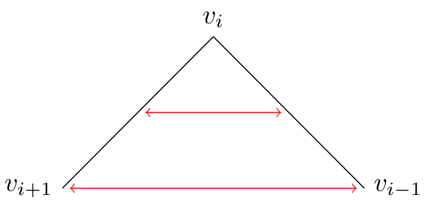

図 8　チャック接着

補題 2.0.2. アレクサンドロフの条件 (特に 2) を満たす展開図は，チャック折りできる頂点 v を少なくとも 1 つもつ．また，チャック折りしてできた閉チェーンに対しても，チャック接着できる頂点をもつ．

この補題を示すことにより，アレクサンドロフの定理 (**??**) の条件 2 を

「チャック折りできる点をもち，
その操作をおこなった後の閉チェーンに対しても，チャック折りできる点が存在する．」

に置き換えることができる．

補題 2.0.3. アレクサンドロフの条件 (特に 2) を満たす展開図は，チャック折りできる頂点 v を少なくとも 1 つもつ．また，チャック折りしてできた閉チェーンに対しても，チャック接着できる頂点をもつ．

証明．アレクサンドロフの条件を満たし，チャック接着可能な点が存在しないと仮定する．
展開図上で同一視される適当な 2 辺を接着する．すると，2 つの閉チェーンができる．各々を L_1, L_2 とおく．ここ

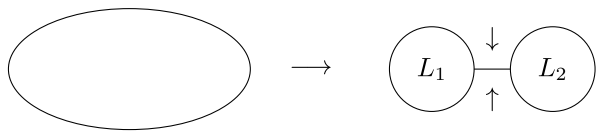

図 9　適当な 2 辺の接着

で，球面に位相同型であることから，L_1 の辺と L_2 の辺が接着されることはない．
また，元の展開図がチャック接着可能な点を持たないことを仮定しているので，閉路 L_1 に対し，接着できるのは以下の 2 パターンのみ．

1. 接着して同一視した点を起点にチャック接着．
2. チャック接着でない離散的な接着．

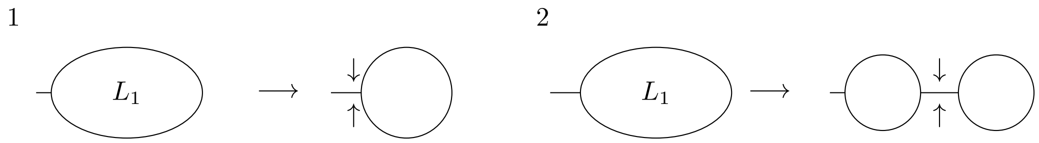

図 10　2 つの接着方法

1 もしくは 2 の接着を行ってできた閉チェーンのうち，元の単純多角形で連続しているものを考える．この閉チェーンが辺数 4 になるまで操作を繰り返す．
できた閉チェーンで，接着により同一視が行われた点を v とおく．その点を基準に反時計回りに e_1, e_2, e_3, e_4 と辺に名前をつける．また，e_2, e_3 の両方に接続する点を u とおく．

1. この閉チェーンでチャック接着ができるとき．
   起点となりうるのは v のみである．v を起点にチャック接着を行うと，e_2 と e_3 を接着することになるが，これは u を起点とするチャック接着に他ならない．
2. チャック接着ができないとき．
   e_1, e_3 もしくは e_2, e_4 を接着するしかないが，これは，球面に位相同型にはならない．

よって，どちらの場合にも矛盾が発生する．
したがって，アレクサンドロフの条件を満たす展開図はチャック接着できる点をもつ．
また，できた閉チェーンに対してもチャック接着できる点を持つことに関しては，これまでの議論と同様に示すことができる． □

参考文献

[1] エリック・D・ドメイン，ジョセフ・オールク著，上原隆平訳『幾何的な折りアルゴリズム』近代科学社，2009. 367

[2] Alexandrov,A.D. *Convex Polyhedra*. Berlin: Springer-Verlag. Monographs in Mathematics. Translation of the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutatelaze, and A. B. Sossinsky, 2005. 193-197