$\boxed{41}$ 実数 x について, $A=x^4+4x^3+4x^2+5, B=x^2+2x+2$ とおく. 以下の問いに答えよ. (岩手大)

(1) 整式 A を整式 B で割った商と余りを求めよ.

(2) A を B の 2 次式で表せ.

(3) 設問 (2) で求めた式を用いて, $\dfrac{A}{B}$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

(1)

$$\begin{array}{r}
x^2+2x-2 \\
x^2+2x+2 \,\big)\; x^4+4x^3+4x^2+5 \\
x^4+2x^3+2x^2 \\
\hline
2x^3+2x^2 \\
2x^3+4x^2+4x \\
\hline
-2x^2-4x+5 \\
-2x^2-4x-4 \\
\hline
9
\end{array}$$

よって 商: x^2+2x-2

余り: 9.

(2)

(1)より

$x^4+4x^3+4x^2+5$

$=(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)+9$.

$=(x^2+2x+2)\{(x^2+2x+2)-4\}+9$.

と書けるので

$A=B(B-4)+9$

$A=B^2-4B+9$

(3). $\dfrac{A}{B}=B-4+\dfrac{9}{B}$

$=B+\dfrac{9}{B}-4$.

ここで, $B+\dfrac{9}{B}$ について考える.

$B=x^2+2x+2$

$=(x+1)^2+1>0$ より. $\dfrac{9}{B}>0$.

相加相乗平均の関係から,

$\dfrac{B+\frac{9}{B}}{2}\geqq\sqrt{B\cdot\frac{9}{B}}=3$.

$\therefore B+\dfrac{9}{B}\geqq 6$. が成立.

よって, 等号成立は

$B=\dfrac{9}{B}$ i.e. $B=3$ のときであるが,

$3=x^2+2x+2$

$x^2+2x-1=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}$

$=-1\pm\sqrt{2}$ で,

$B=3$ になる x は存在する.

$\therefore B+\frac{9}{B}$ の最小値は 6.

$\therefore \dfrac{A}{B}$ の最小値は $6-4=2$

このときの x は $x=-1\pm\sqrt{2}$