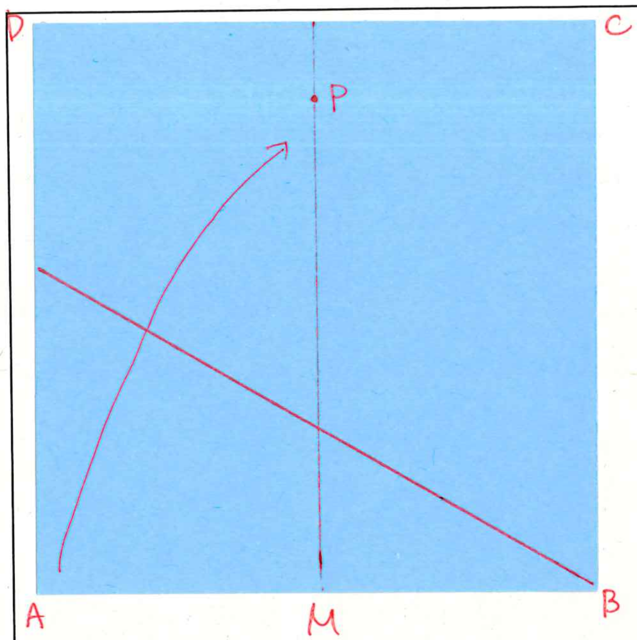
1　正方形から正三角形を折る

1.1　直角三角形を折る

正方形を折ることで, $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形を作ろう.



1.2　説明

上で考えたことに対し, $1:2:\sqrt{3}$ になる理由を説明しよう.

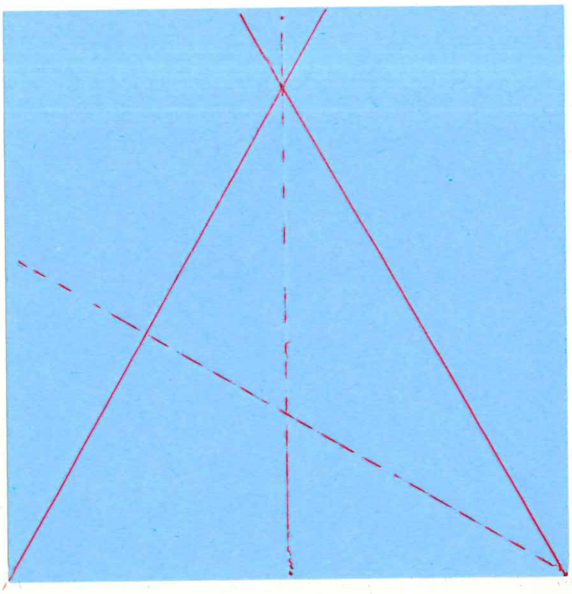
正方形の一辺を1とする.

$AB=BP$ より. $BP=1$, $AP=1$.(対称性).

また、$MB=\frac{1}{2}$ より. $\triangle APM$ は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形.

1.3　正三角形

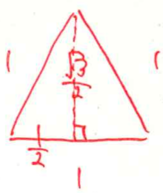
表面で考えた直角三角形を用いて, 正方形に内接する正三角形を折る方法を考えよう.
(ここで,「正方形に内接する」とは, 正三角形の少なくとも２頂点が正方形の周と接することである.)



△APBを折れば
正三角形ができる.

1.4　面積

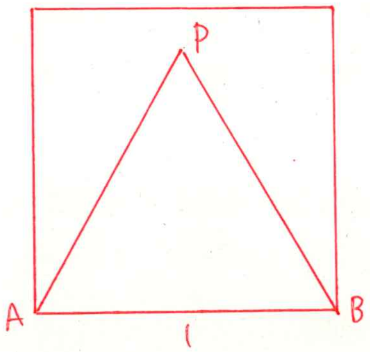
上の正三角形の面積を求めよ.　(1辺の長さを1とする).

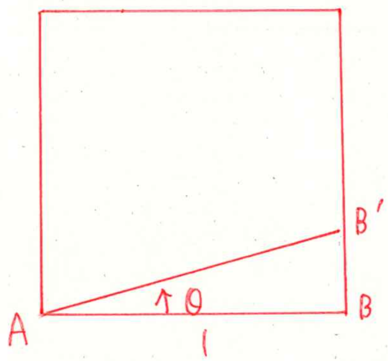


$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

1.5　思考力養成

内接する正三角形で，もっと面積の大きいいものを折れないか考えよう．折れる場合は，その折り方とその面積を求めよう．





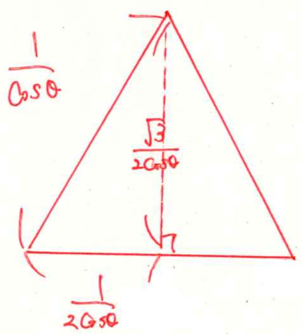
矢印の方向にずらすと，1辺が大きい正三角形がつくれそう。

対称性から，回転できる角度θは．

$0^\circ \le \theta \le 15^\circ$　$\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{12}\right)$.

AB'の長さは，$\frac{1}{AB'} = \cos\theta$ より $AB' = \frac{1}{\cos\theta}$　$\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{12}\right)$.

i.e. 角度θだけずらした後にできる正三角形の一辺の長さは，$\frac{1}{\cos\theta}$.



その面積は

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4\cos^2\theta} \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{12}\right).$$

Sのmaxは，$\cos\theta$の値が最も小さくなるとき．

i.e.　$\theta = \frac{\pi}{12}$でmin.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore S_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\right)^2 = \underline{2\sqrt{3}-3.}_{\,/\!/}$$