4 演習問題

4.1 例題

(1) 関数 $y = 4^x - 2^{x+2} + 1$ $(-3 \leqq x \leqq 4)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ.

$y = 4^x - 2^{x+2} + 1.$

$= (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1.$

$2^x = t$ とおくと. $-3 \leq x \leq 4$ より

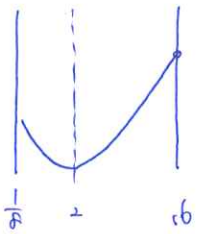
$\frac{1}{8} \leq 2^x \leq 16.$

$\therefore \frac{1}{8} \leq t \leq 16.$

$y = t^2 - 4t + 1.$

$= (t-2)^2 - 3.$

軸 $t = 2$.



左図より

$t=2$で Min -3.

$t=16$で Max 14^2-3

ここで、$t=2$のとき $2^x = 2.$

$\therefore x = 1.$

$t=16$のとき $2^x = 16$

$\therefore x = 4$

よって.

$x=1$で Min -3.

$x=4$で Max. 193

(2) 関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) + 1$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく. x が全ての実数を動くとき, t の値の範囲を求めよ.

相加相乗平均の関係から.

$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 1.$

$\therefore 2^x + 2^{-x} \geq 2$

等号成立は $x = 0$.

よって. $t \geq 2$

(b) $4^x + 4^{-x}$ を t を用いて表せ.

$(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 4^{-x}$

$= 4^x + 2 + 4^{-x}$

$\therefore 4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2.$

(c) y を t の関数として表せ.

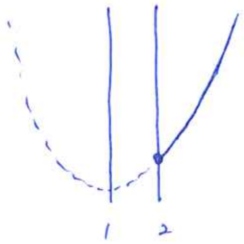
$y = (t^2 - 2) - 2t + 1.$

$= t - 2t - 1.$

(d) y の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

$y = (t-1)^2 - 2.$

軸 $t = 1$.



左図より $t=2$で Min. -1.

$t=2$のとき.

$2^x + 2^{-x} = 2.$

$x = 0$

よって. $x=0$で Min -1

4.2 問題

(1) 関数 $y = 9^x - 2\cdot 3^{x+1} - 2$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ.

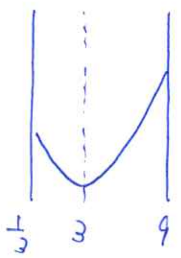
$$y = 9^x - 2\cdot 3^{x+1} - 2$$
$$= (3^x)^2 - 6\cdot 3^x - 2$$

$3^x = t$ とおくと　$-1 \leq x \leq 2$ より.

$$\frac{1}{3} \leq 3^x \leq 9$$
$$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 9$$

$$y = t^2 - 6t - 2$$
$$= (t-3)^2 + 7.$$

軸 $t=3$.



左図より

$t=3$で Min 7

$t=9$で Max 43.

ここで　$t=3$のとき $3^x = 3$.
$x = 1$.

$t=9$のとき $3^x = 9$
$x = 2$.

よって

$x=1$で Min 7

$x=2$で Max 43 //

(2) 関数 $y = 9^x + 9^{-x} + 4(3^x + 3^{-x}) - 1$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) $t = 3^x + 3^{-x}$ とおく. x が全ての実数を動くとき, t の値の範囲を求めよ.

相加相乗平均の関係から.

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 1.$$
$$3^x + 3^{-x} \geq 2.$$

等号成立は $x=0$.

$\therefore$ $t \geq 2$ //

(b) $9^x + 9^{-x}$ を t を用いて表せ.

$$(3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 2\cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 9^{-x}$$
$$\therefore 9^x + 9^{-x} = (3^x - 3^{-x})^2 - 2$$
$$= t^2 - 2$$ //

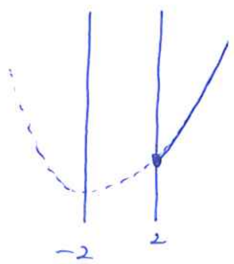
(c) y を t の関数として表せ.

$$y = (t^2 - 2) + 4t - 1.$$
$$= t^2 + 4t - 3$$ //

(d) y の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

$$y = t^2 + 4t - 3$$
$$= (t+2)^2 - 1.$$

軸 $t = -2$.



左図より

$t=2$で Min 15.

$t=2$のとき

$3^x + 3^{-x} = 2$.

$x=0$

よって $x=0$で Min 15 //