1 表に3, 裏に8が書かれた硬貨がある．この硬貨を10回投げるとき，出た数字の10個の積が8桁になる確率を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010, \log_{10}3=0.4771$とする．

<Ans>.

10回のうち、n回 表が出るとする

このとき、うらは $(10-n)$ 回

出た数の積は

$3^n \times 8^{10-n}$ と表すことができる。

$$3^n \times 8^{10-n} = 10^N$$ とおくと、 —(*)

積が8ケタになるには

$7 \leqq N < 8$ —(**) をみたせばよい。

(*)の両辺に対し、底が10の対数をとると．

$$\log_{10} 3^n \cdot 8^{10-n} = \log_{10} 10^N$$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \log_{10} 3^n + \log_{10} 8^{10-n} \\
&= n \cdot \log_{10} 3 + (10-n)\log_{10} 8 \\
&= n \log_{10} 3 + (10-n)\log_{10} 2^3 \\
&= n \log_{10} 3 + 3(10-n)\log_{10} 2 \\
&= 0.4771 \times n + 3(10-n) \times 0.3010 \\
&= 9.030 - 0.4259 \times n
\end{aligned}$$

より

$$N = 9.030 - 0.4259n.$$

(**)より

$$7 \leqq 9.030 - 0.4259n < 8$$

$$-2.030 \leqq -0.4259n < -1.030$$

$$1.030 < 0.4259n \leqq 2.030$$

$$2.4\cdots < n \leqq 4.\cdots$$

よって、積が8ケタになるのは、

(i) 表が3回 出る

(ii) 表が4回 出る

の2パターンである。

(i) 表が3回出る．

確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times {}_{10}C_3 = \frac{10\cdot 3\cdot 4}{2^{10}}$$

(ii) 表が4回出る

確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_{10}C_4 = \frac{3\cdot 7\cdot 10}{2^{10}}$$

(i),(ii)より、求める確率は．

$$\begin{aligned}
P &= \frac{3\cdot 4\cdot 10}{2^{10}} + \frac{3\cdot 7\cdot 10}{2^{10}} \\
&= \frac{3\cdot 10\cdot (4+7)}{2^{10}} \\
&= \frac{3\cdot 5\cdot 11}{2^9} = \frac{165}{512}
\end{aligned}$$

//