

ラテンクロスから凸多面体の再構成

Takenaga Koudai

2022 年 2 月 10 日

1 ラテンクロスから凸多面体の再構成

ここでは、単純多角形のみを考察することにし、接着も辺々接着に限るものとする。

1.1 多面体再構成

アレクサンドロフの定理

展開図を以下の条件を満たすように接着する。

1. どの頂点においても角度の和が 2π を超えない。
2. 結果として得られる複体が球面に位相同型。

このとき、この接着に対応する凸多面体は一意に定まる。

以下では、この定理の 2 条件をアレクサンドロフ条件ということにする。アレクサンドロフの定理から、任意の多角形にアレクサンドロフ条件を満たすように辺の接着を指定することができれば、凸多面体を組み立てることができることがわかる。

アレクサンドロフ条件 1 は、接着する辺を指定していく中で実際に検証がしやすい条件であるが、条件 2 は、接着の指定を終了するまではなかなか判定できない。そこで、この条件と同値でなおかつ判定がしやすい条件を与えることにする。

多角形の任意の頂点から、反時計回りにナンバリングを行い、 $e_i = v_i v_{i+1}$ とする。

定義 (チャック接着)

v_i : 多角形の頂点, $e_i = v_i v_{i+1}$: 多角形の辺とする。

$|e_i| = |e_{i-1}|$ を満たす辺が存在し、その辺同士を v_i を起点に接着する方法をチャック接着という。

このチャック接着を用いて、アレクサンドロフ条件 2 と同値な条件を考える。

定理

以下の 2 条件は同値である。

1. アレクサンドロフ条件 2.
2. 展開図の閉チェーンが、チャック接着できる起点を持ち、チャック接着した後にできる閉チェーンに対してもチャック接着できる起点が存在する。

証明は別紙参照。この定理を用いることで、多角形の各頂点から、チャック接着可能か否かの検証を繰り返していき、最後までできれば凸多面体が構成できることになる。

1.2 ラテンクロスから凸多面体の構成

実際に辺々接着の検証とアレクサンドロフの角度条件を検証した結果、左右対称なものを除いて以下の9通りの辺々接着が得られた。以下では、接着する頂点の番号を表している。

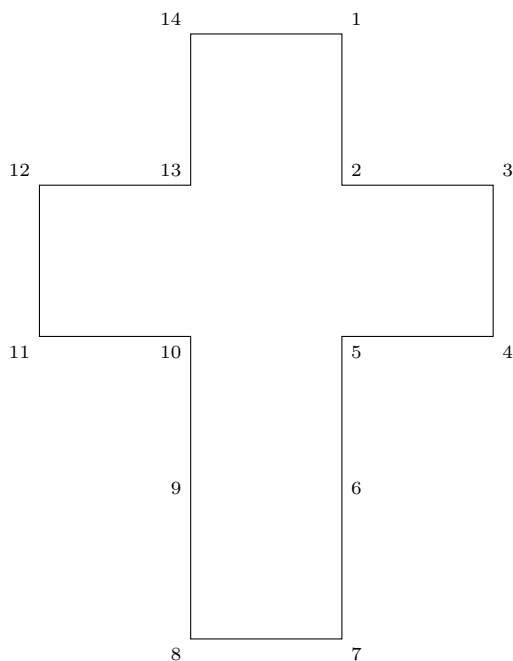


図 1: ラテンクロス

- (1),(2,14),(3,13),(4,6,12),(5),(7,11),(8,10),(9)
- (1),(2,14),(3,13),(4,6,12),(5),(7,9,11),(8),(10)
- (1),(2,14),(3,13),(4,8,12),(5,7),(6),(9,11),(10)
- (1,3),(2),(4,6,14),(5),(7,13),(8,12),(9,11),(10)
- (1,3),(2),(4,8,12,14),(5,7),(6),(9,11),(10),(13)
- (1,3,7),(2),(4,6),(5),(8,12,14),(9,11),(10),(13)
- (1,3,9),(2),(4,6,8),(5),(7),(10,14),(11,13),(12)
- (1,3,9),(2),(4,8),(5,7),(6),(10,14),(11,13),(12)
- (1,5),(2,4),(3),(6,14),(7,13),(8,12),(9,11),(10)

これらを実際に組み上げていくと、「立方体」「四角形(二重被覆多面体)」「四面体」「五面体」「八面体」の5種類の凸多面体が構成された。^{*1}実際に構成して展開図に折り目を記したものを以下に示す(立方体の展開図は自明なので省略)。

^{*1} 鏡像異性体は同じ多面体として扱うことにする。

1.2.3 五面体

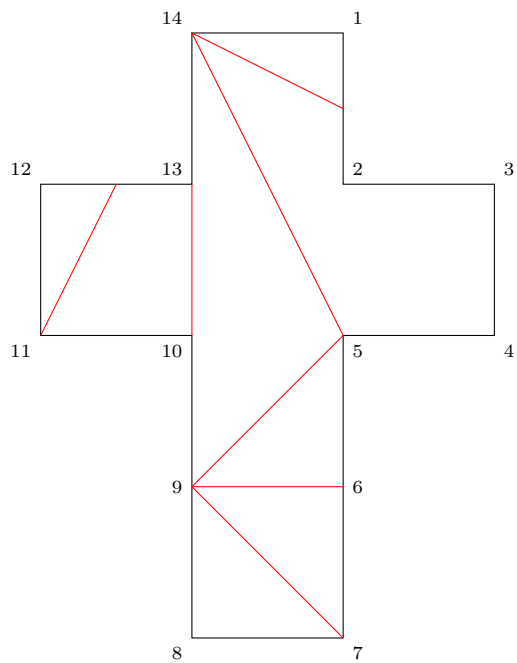


图 6: D[0]

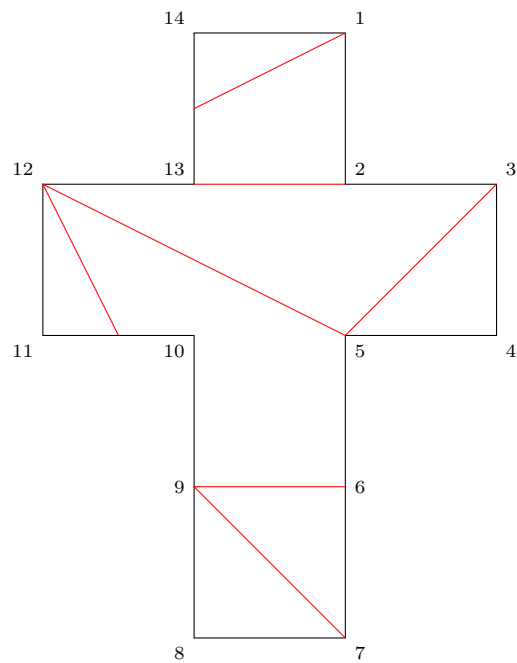


图 7: D[0]

1.2.4 八面体

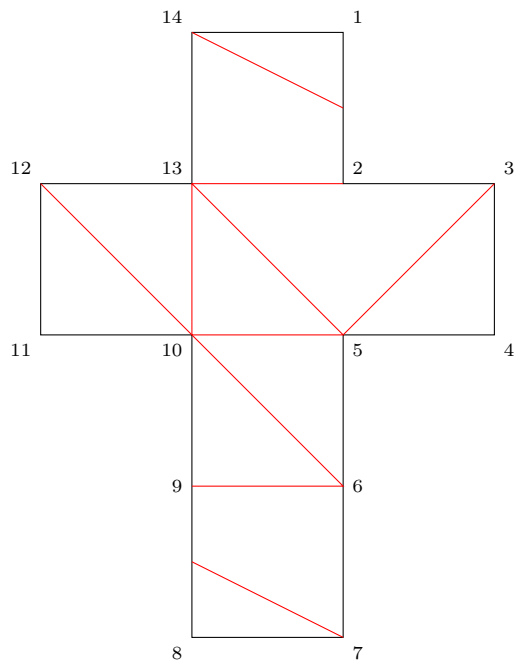


图 8: E[0]

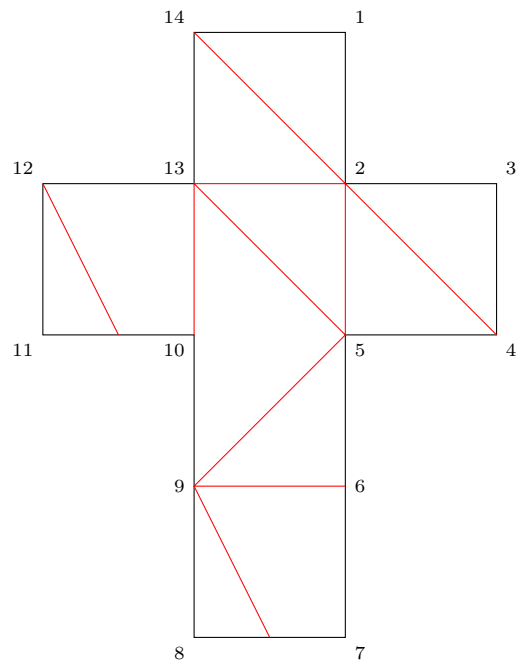


图 9: E[2]

1.3 アレクサンドロフパズル

ラテングロスから辺々接着 5 種類の凸多面体が生成できる (二重被覆多面体含む) ことがわかったところで、これら全てを組み立てることができるようなパズル的なおもちゃを作成することを考えてみる。具体的には、硬い面に対し自由に折り曲げられる折り目を与え、それらのうちからうまく選択し折り曲げて辺を接着していくことで 5 種類のうちからある多面体が組み立てられるものであり、折り曲げ方を変えると別の多面体が出てくる仕組みを持つパズルである。折り目の組み合わせを与えるにあたって、立方体は 1 通り、他の多面体は 2 通りの折り方があり、裏表まで考慮すれば $1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \div 2 = 128$ 通りである。これらの組み合わせの中から「最もいい組み合わせ」とは何かを定義し、見つけていく。

1.3.1 考察

では、最もいい組み合わせはなんなのか、案を挙げていく。
作成しやすさと、組み立てやすさの 2 つの観点から考察していくことにする。

1. できるだけ折り線が交わることが少なくなるようにする。
→ 交点が少ないことで、折り線の見た目が綺麗になる。
2. 折り線の共有する数が多くなるようにする。
→ 共有する折り線を増やすことで、ラテングロスに引かれる折り線が少なくなるので見た目が綺麗になる。
3. 折り線の傾きの正負の差が小さくなるようにする。
→ もし同じ方向の折り線が複数あると、ある折り線を折ろうとしても他の折り線が折れてしまうことが考えられる。そのため、できるだけ折り線の傾きは正負異なる方がいいと考えられる。
4. 折り線の存在する範囲の分散が小さくなるようにする。
→ 折り線の数が少なくなるようにしたとしても、ある範囲内に集中して折り線が存在し、別の範囲内には折り線が存在しないような形だと、なかなか綺麗とは言えない。なので、分散を考えてみるといいのではないかと考えた。
5. 折り線に囲まれた連結領域の面積の最小値が大きいもの。
→ この案ののちに各連結領域の面積の分散を考えようと思ったが、分割数を大きくし、平均の面積を小さくする方が分散が小さくなることになり、「良い組み合わせ」とは言えないのではないかと考え、やめることにした (計算だけはしてある。)。
6. ラテングロスの境界上のある点から複数の折り線が出ているとする。その時に、それらの間の角度が小さくならないようにする。
→ 3 の案と考え方はほぼ同じである。

1.3.2 実験

では、上記の案をいくつか組み合わせて実際に組み合わせて実際に作成していく。その中で、「いい組み合わせ」の定式化を考えていくことにする。

1. 交点数が最小なもの。

交点数 8 の組み合わせが 1 つ見つかった (B[0]C[0]D[0]E[0])。

2. 共有折り線数が最大なもの。

共有の折り線数が 7 なものが 1 つ見つかった (B[0]C[3]D[2]E[1])。

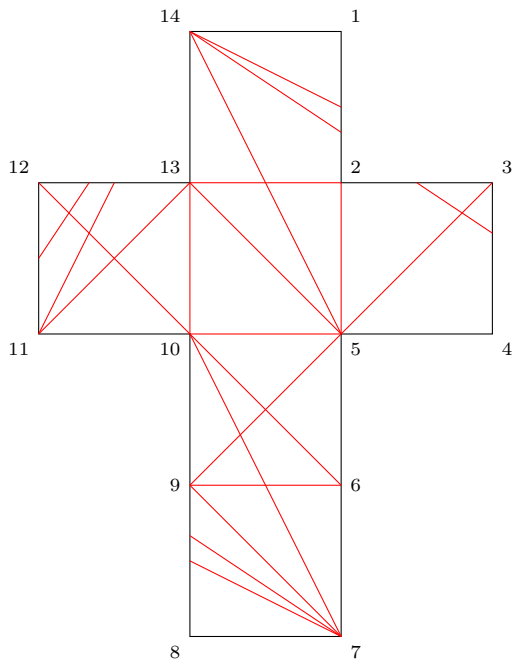


図 10: B[0]C[0]D[0]E[0]

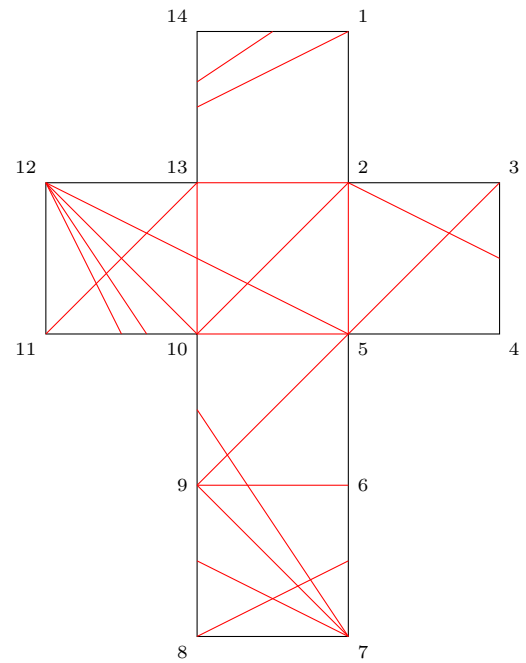


図 11: B[0]C[3]D[2]E[1]

3. 「交点数 - 共有折り線数」が最小なもの。

前小節であげた案のうち、1 つ目と 2 つ目をまとめて考案してみた。その結果、1 の結果と同じ展開図が得られた (B[0]C[0]D[0]E[0])。

表 1: 条件 1~3 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	0	0	0	08	06	02	3.000	0.667	2	7.125	30	574	7063794.43222
0	3	2	1	12	07	05	2.833	1.472	3	7.125	33	322	11240943.37374

4. 折り線の存在する範囲の分散が最小なもの.

ラテンクロスの各正方形領域に番号を振り、折り線がどの領域に存在するかを調べ、その本数の分散を求めて比較した結果、その値が最小(= 0.22...)となるものが3つ見つかった.

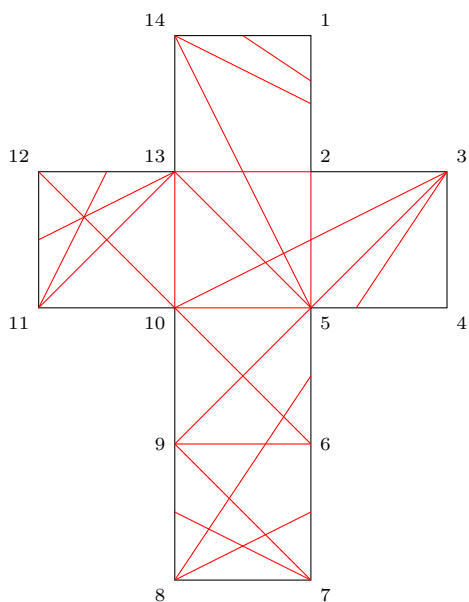


図 12: B[0]C[2]D[0]E[0]

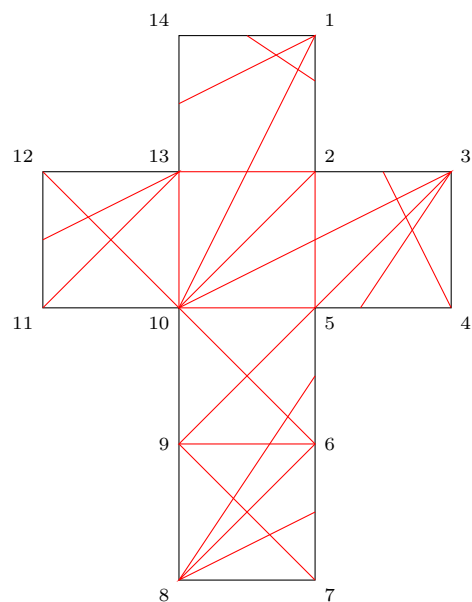


図 13: B[0]C[2]D[1]E[1]

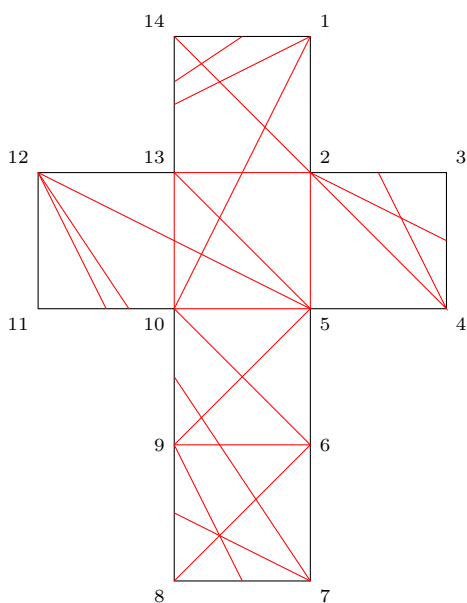


図 14: B[1]C[3]D[1]E[2]

表 2: 条件 4 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	2	0	0	13	04	09	3.333	0.222	1	11.310	37	594	4600082.14317
0	2	1	1	15	04	11	3.333	0.222	1	11.310	38	341	3872265.25208
1	3	1	2	13	04	09	3.333	0.222	1	7.125	37	585	5295506.32140

5. 折り線に囲まれた連結領域の面積の最小値が大きいもの.

各連結成分の画素数を調べることで、擬的ではあるが面積を求めることができる. この手法を用いて実際に計算を行うと、誤差も考慮して4つの組み合わせの候補が見つかった.

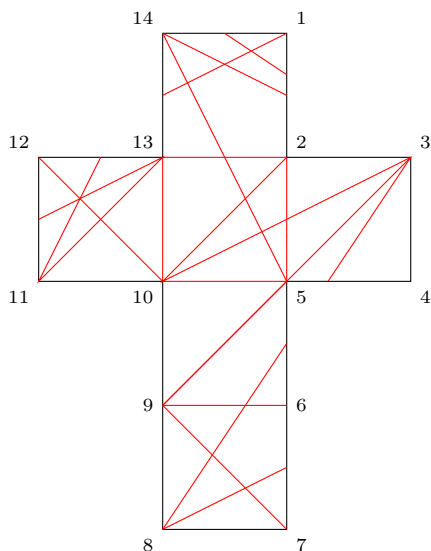


図 15: B[0]C[2]D[0]E[1]

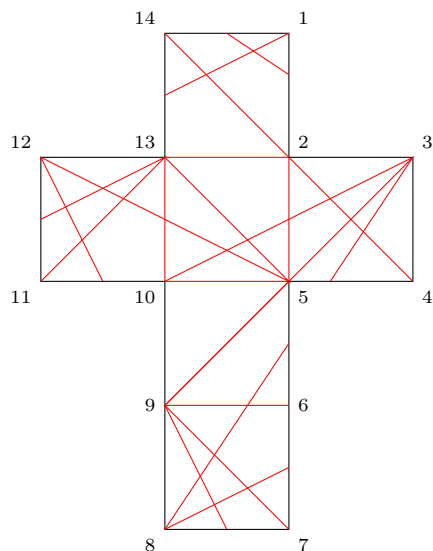


図 16: B[0]C[2]D[2]E[2]

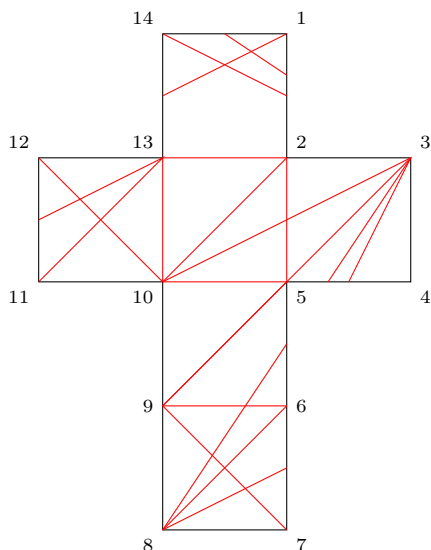


図 17: B[0]C[2]D[3]E[1]

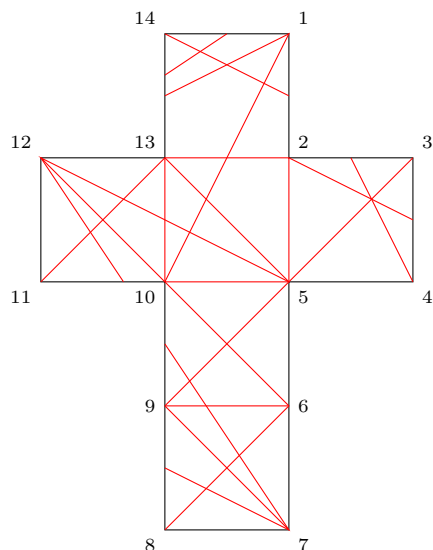


図 18: B[0]C[3]D[1]E[0]

表 3: 条件 5 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	2	0	1	12	05	07	3.167	0.472	2	11.310	35	608	6337526.86204
0	2	2	2	18	04	14	3.333	0.556	2	11.310	41	608	5840752.28079
0	2	3	1	09	06	03	3.000	0.667	2	7.125	31	608	8660026.82414
0	3	1	0	17	03	14	3.500	0.250	1	11.310	42	607	4016726.37868

6. 2本の折り線の間の角度の最小値が大きいもの.

2本の折り線間の角度を計算し, それぞれの組み合わせでの最小値を求めた. その結果, 3つの組み合わせが見つかった.

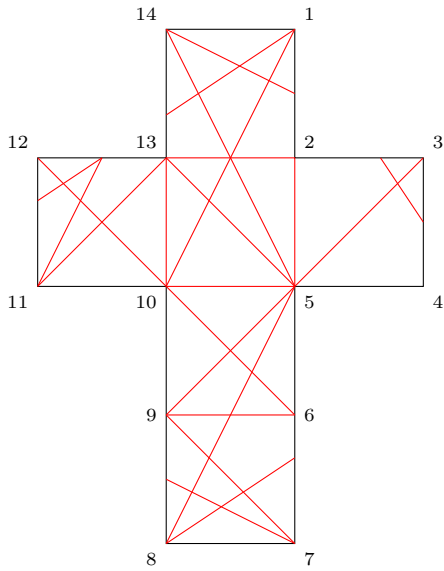


図 19: B[0]C[1]D[0]E[0]

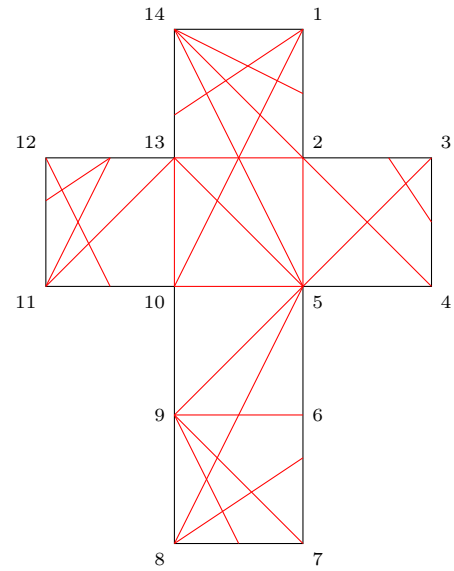


図 20: B[0]C[1]D[0]E[2]

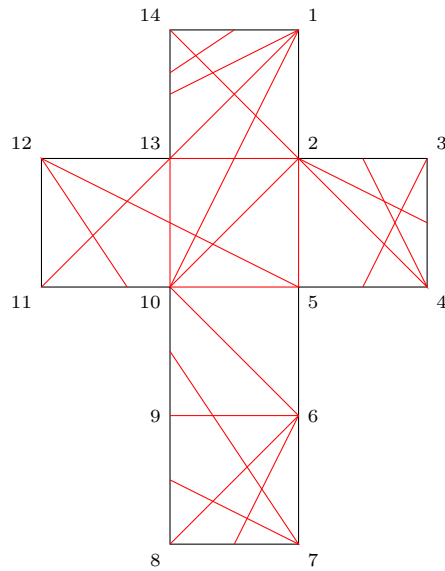


図 21: B[1]C[3]D[1]E[3]

表 4: 条件 6 で現れた組み合わせ

B	C	D	E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 - 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0	1	0	0	16	04	12	3.333	0.556	2	18.435	40	583	4671352.95000
0	1	0	2	17	03	14	3.500	0.917	3	18.435	42	335	4774243.92800
1	3	1	3	19	03	16	3.500	0.917	3	18.435	43	133	5098681.15955

1.4 実際に作成してみる

上記で実験した中で、個人的に綺麗だと感じた「角度の最小値が最大なもの」の中から、そのほかの指標においても良いものと評価される $B[0]C[1]D[0]E[0]$ を実際に作成してみる。各多面体を組み上げた際に面の対応が見やすいように面にそれぞれ色分けをしておく。

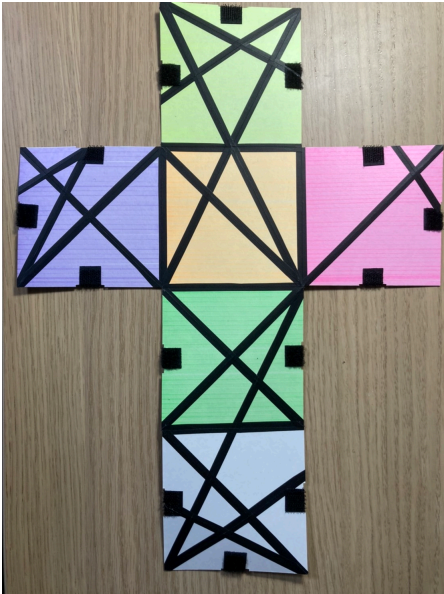


図 22: 展開した状態



図 23: 立方体

以下のように二重被覆多角形を組み立てることができる。



図 24: 二重被覆多角形

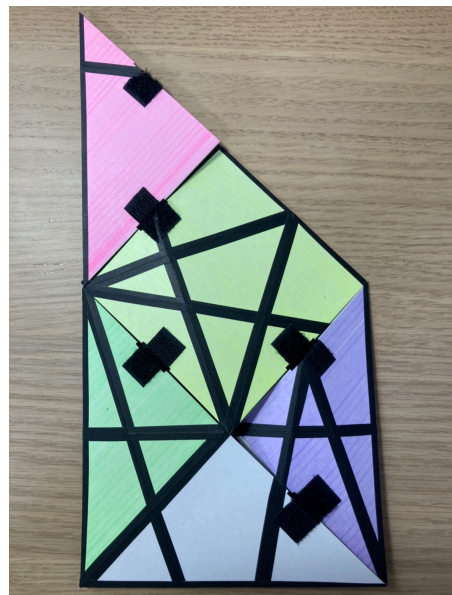


図 25: 二重被覆多角形 (裏面)

四面体を以下のように組み立てることができる。



図 26: 四面体



図 27: 四面体 (別角度)

五面体を以下のように組み立てることができる。五面体を初見で組み立てることは意外と難易度が高い。



図 28: 五面体



図 29: 五面体 (別角度)

八面体を以下のように組み立てることができる．八面体の組み立てのための折り線を把握していないとなかなか八面体は折れない．



図 30: 八面体



図 31: 八面体 (別角度)

今回の作成では、面を画用紙で作成し、折り線部分で一度切断し、再度マスキングテープで貼り合わせることで、可動的な部分を作った．また、各辺においてはマジックテープを用いて辺同士が接着可能なようにしてある．

1.4.1 実験

いい展開図の組み合わせに対し、別のいいとは言えない組み合わせのパズルを作成し、さまざまな人に遊んでもらうことで、ほんとに「いい組み合わせ」なのかを検証してみようと思う．

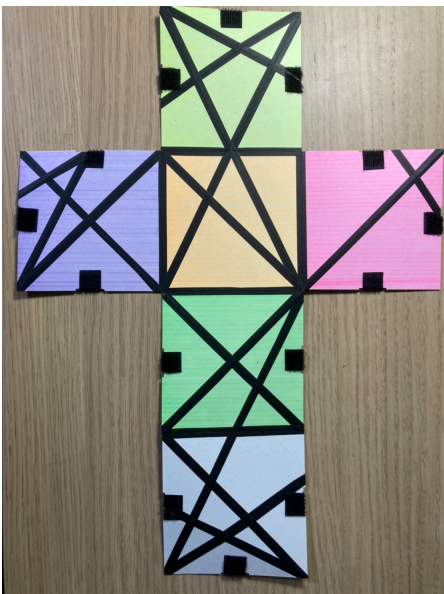


図 32: いい組み合わせ



図 33: よくない組み合わせ

表 5: 実験 (いい組み合わせ)

被験者	所属	作成順番				
M さん	M1	立方体 (1m 未満)	五面体 (5m25s)	四面体 (21m)	二重被覆多角形 (25m46s)	
S さん	M1	立方体 (1m 未満)	五面体 (4m22s)	四面体 (20m20s)	八面体 (28min)	
K さん	M1	立方体 (1m 未満)	八面体 (2m20s)	五面体 (3m30s)	二重被覆多角形 (6m50s)	四面体 (11m)
K さん	M1	立方体 (1m 未満)	四面体 (7m42s)	八面体 (30min over)		
I さん	T	立方体 (1m 未満)	八面体 (3m6s)	五面体 (5m6s)	二重被覆多角形 (15m22s)	四面体 (19m20s)

表 6: 実験 (よくない組み合わせ)

被験者	所属	作成順番				
A さん	M1	立方体 (1m 未満)	二重被覆 (3m30)	八面体 (7m5s)	四面体 (19m)	五面体 (21m50s)
Y さん	M1	立方体 (1m 未満)	八面体 (3m17s)	五面体 (3m50s)	二重被覆 (14m50s)	-
M さん	M1	立方体 (1m 未満)	四面体 (13m16s)	五面体 (15m15s)	二重被覆 (21m20s)	-
T さん	M1	立方体 (1m 未満)	二重被覆 (7m20s)	四面体 (14m24s)	八面体 (20m)	五面体 (27m)
K さん	S	立方体 (1m 未満)	二重被覆多角形 (15m23s)	四面体 (19m10s)	八面体 (24m)	五面体 (28m35s)

1.4.2 実験結果考察

さまざまな人の作成の様子を観察してきて、人の性格や考え方が出るなと感じた。

1.4.3 今後の展望

今回はラテングロスの 14 本の辺による辺々接着のみについて考察してきたが、この接着に制限しない場合はラテングロスから構成できる多面体の種類がさらに増える。その場合、計算時間が多くなることから、うまいアルゴリズムを考案する必要がある。計算時間の短縮を実現するとともに、今回と同じようにいい組み合わせを構成し、現実的に作成ができるのかどうか、またできるのであれば実際に作成をしてみたいと考える。

1.5 参考

全ての指標の表を以下に載せておく.

表 7: さまざまな指標の数値

B C D E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 – 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0 0 0 0	08	06	02	3.000	0.667	2	7.125	30	574	7063794.43222
0 0 0 1	14	06	08	3.000	1.000	2	7.125	36	257	7339399.55556
0 0 0 2	09	05	04	3.167	0.806	2	7.125	32	581	5978095.85840
0 0 0 3	13	05	08	3.167	0.472	2	7.125	36	193	6175466.52083
0 0 1 0	18	02	16	3.667	0.889	2	7.125	44	257	3807613.09504
0 0 1 1	18	03	15	3.500	0.583	2	11.310	43	390	3699780.38940
0 0 1 2	20	01	19	3.833	0.806	2	11.310	47	126	3277724.19104
0 0 1 3	20	02	18	3.667	1.222	3	11.310	46	193	5000312.12854
0 0 2 0	15	03	12	3.500	0.917	3	7.125	39	189	5350130.74951
0 0 2 1	18	05	13	3.167	1.139	3	11.310	40	189	6049859.36937
0 0 2 2	14	04	10	3.333	0.556	2	11.310	37	369	4171356.31264
0 0 2 3	20	03	17	3.500	0.250	1	11.310	44	189	3997981.45196
0 0 3 0	16	03	13	3.500	0.583	2	7.125	40	189	3996788.66937
0 0 3 1	20	03	17	3.500	0.917	3	7.125	44	189	4849880.25362
0 0 3 2	21	01	20	3.833	1.139	3	7.125	47	126	3639746.76415
0 0 3 3	21	02	19	3.667	0.556	2	7.125	46	178	3445840.72637
0 1 0 0	16	04	12	3.333	0.556	2	18.435	40	583	4671352.95000
0 1 0 1	15	04	11	3.333	1.222	3	7.125	39	256	6511110.96384
0 1 0 2	17	03	14	3.500	0.917	3	18.435	42	335	4774243.92800
0 1 0 3	16	03	13	3.500	0.583	2	11.310	41	126	5051233.41701
0 1 1 0	18	04	14	3.333	0.889	3	7.125	42	256	5033188.15249
0 1 1 1	12	05	07	3.167	0.806	3	7.125	35	544	5926945.15102
0 1 1 2	19	03	16	3.500	0.917	3	7.125	44	331	4219609.46436
0 1 1 3	13	04	09	3.333	1.222	3	7.125	37	126	6955760.73046
0 1 2 0	21	03	18	3.500	0.917	3	7.125	45	193	5255365.62765
0 1 2 1	15	05	10	3.167	1.139	3	7.125	37	193	7412888.08035
0 1 2 2	18	04	14	3.333	0.556	2	7.125	41	320	4931424.96371
0 1 2 3	17	03	14	3.500	0.250	1	7.125	41	126	4361374.26889
0 1 3 0	20	03	17	3.500	0.583	2	11.310	44	189	3394172.61312
0 1 3 1	15	03	12	3.500	0.917	3	7.125	39	189	4987608.77844
0 1 3 2	25	01	24	3.833	1.139	3	11.310	51	189	3528181.68704
0 1 3 3	18	02	16	3.667	0.556	2	11.310	43	126	3088043.31855
0 2 0 0	13	04	09	3.333	0.222	1	11.310	37	594	4600082.14317
0 2 0 1	12	05	07	3.167	0.472	2	11.310	35	608	6337526.86204

表 7: さまざまな指標の数値

B C D E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 – 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
0 2 0 2	16	03	13	3.500	0.583	2	11.310	40	133	5328216.77750
0 2 0 3	13	03	10	3.500	0.250	1	7.125	38	590	4490749.76524
0 2 1 0	22	02	20	3.667	0.556	2	11.310	47	321	3437510.58307
0 2 1 1	15	04	11	3.333	0.222	1	11.310	38	341	3872265.25208
0 2 1 2	25	01	24	3.833	0.806	2	11.310	51	341	3161659.94771
0 2 1 3	15	02	13	3.667	1.222	3	7.125	41	186	4470184.70434
0 2 2 0	19	03	16	3.500	0.583	2	11.310	43	589	5810402.94213
0 2 2 1	14	06	08	3.000	1.000	3	11.310	35	589	9302166.18286
0 2 2 2	18	04	14	3.333	0.556	2	11.310	41	608	5840752.28079
0 2 2 3	15	03	12	3.500	0.250	1	7.125	40	224	4590316.22438
0 2 3 0	13	05	08	3.167	1.139	3	7.125	36	321	7793613.47145
0 2 3 1	09	06	03	3.000	0.667	2	7.125	31	608	8660026.82414
0 2 3 2	17	03	14	3.500	1.583	3	7.125	42	373	6289261.57426
0 2 3 3	11	04	07	3.333	0.889	3	7.125	36	590	5027844.36111
0 3 0 0	14	05	09	3.167	0.806	3	11.310	36	341	5620410.39738
0 3 0 1	20	04	16	3.333	1.222	3	11.310	43	322	6411057.57599
0 3 0 2	16	03	13	3.500	0.917	3	7.125	40	185	5536257.05000
0 3 0 3	20	03	17	3.500	0.250	1	11.310	44	341	3312447.58884
0 3 1 0	17	03	14	3.500	0.250	1	11.310	42	607	4016726.37868
0 3 1 1	17	03	14	3.500	0.583	2	11.310	42	323	4411583.39456
0 3 1 2	18	01	17	3.833	0.472	2	7.125	46	539	3101839.23629
0 3 1 3	18	02	16	3.667	0.556	2	11.310	44	133	3260342.23709
0 3 2 0	11	06	05	3.000	1.000	3	7.125	33	539	8121114.48669
0 3 2 1	12	07	05	2.833	1.472	3	7.125	33	322	11240943.37374
0 3 2 2	11	06	05	3.000	0.667	2	7.125	33	518	7565086.35262
0 3 2 3	13	05	08	3.167	0.472	2	7.125	36	374	5308855.15432
0 3 3 0	17	04	13	3.333	0.556	2	11.310	40	585	6091763.07750
0 3 3 1	20	03	17	3.500	0.917	3	11.310	44	323	6872754.13378
0 3 3 2	21	01	20	3.833	1.472	3	7.125	48	225	5326878.21832
0 3 3 3	21	02	19	3.667	0.556	2	11.310	46	374	3631496.86389
1 0 0 0	12	04	08	3.333	0.889	3	7.125	36	543	5121192.54552
1 0 0 1	19	03	16	3.500	1.250	3	7.125	44	257	4569259.87345
1 0 0 2	11	05	06	3.167	1.139	3	7.125	34	126	8825331.44031
1 0 0 3	17	03	14	3.500	1.250	3	7.125	42	332	5263051.86678
1 0 1 0	17	03	14	3.500	1.917	4	7.125	42	257	6408190.00964
1 0 1 1	18	03	15	3.500	0.917	3	11.310	43	383	4670673.86155
1 0 1 2	15	04	11	3.333	0.889	3	11.310	39	126	7342754.74162
1 0 1 3	18	03	15	3.500	1.917	4	11.310	43	335	6753755.20389
1 0 2 0	16	02	14	3.667	1.222	3	7.125	41	189	4543495.72873
1 0 2 1	21	02	19	3.667	0.556	2	11.310	46	189	2987477.10775

表 7: さまざまな指標の数値

B C D E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 – 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
1 0 2 2	17	03	14	3.500	0.583	2	11.310	41	126	4023106.74123
1 0 2 3	25	01	24	3.833	1.139	3	11.310	51	193	3726768.30219
1 0 3 0	15	04	11	3.333	1.222	3	7.125	38	193	6571653.00554
1 0 3 1	22	02	20	3.667	1.222	3	7.125	47	193	4765102.55048
1 0 3 2	17	03	14	3.500	0.250	1	7.125	41	126	4371300.96966
1 0 3 3	19	03	16	3.500	0.917	3	7.125	43	320	4641389.08383
1 1 0 0	20	02	18	3.667	0.889	2	11.310	46	389	3574220.67297
1 1 0 1	21	01	20	3.833	1.472	3	7.125	48	256	3728978.81207
1 1 0 2	18	03	15	3.500	1.250	3	11.310	43	331	6640468.85235
1 1 0 3	20	01	19	3.833	1.472	3	11.310	47	126	4450623.93210
1 1 1 0	17	05	12	3.167	1.472	3	7.125	40	256	6912845.92750
1 1 1 1	11	05	06	3.167	0.806	2	7.125	34	529	6341849.08651
1 1 1 2	12	06	06	3.000	0.667	2	7.125	34	313	8613945.30536
1 1 1 3	11	05	06	3.167	1.472	3	7.125	34	544	7953775.16955
1 1 2 0	23	02	21	3.667	1.222	3	7.125	48	193	4412827.52040
1 1 2 1	19	02	17	3.667	0.556	2	7.125	44	193	3147729.54287
1 1 2 2	20	03	17	3.500	0.583	2	7.125	44	320	4381057.89050
1 1 2 3	23	01	22	3.833	1.139	3	7.125	49	126	3529454.30820
1 1 3 0	20	04	16	3.333	1.222	3	11.310	43	189	5489226.64359
1 1 3 1	18	02	16	3.667	1.222	3	7.125	43	189	4984652.69443
1 1 3 2	20	03	17	3.500	0.250	1	11.310	44	194	4011786.70816
1 1 3 3	17	03	14	3.500	0.917	3	11.310	41	369	4137169.24331
1 2 0 0	17	02	15	3.667	0.556	2	11.310	43	321	3257252.00649
1 2 0 1	18	02	16	3.667	0.556	2	11.310	44	583	3298342.85331
1 2 0 2	18	03	15	3.500	0.583	2	11.310	42	133	4528204.95011
1 2 0 3	18	01	17	3.833	0.806	2	7.125	45	539	3799196.02173
1 2 1 0	22	03	19	3.500	1.583	3	11.310	46	321	5692540.14367
1 2 1 1	16	04	12	3.333	0.889	3	11.310	39	341	4512402.69165
1 2 1 2	19	04	15	3.333	0.556	2	11.310	42	341	4700086.95918
1 2 1 3	17	03	14	3.500	1.583	3	7.125	41	186	6546294.09875
1 2 2 0	21	02	19	3.667	0.889	3	11.310	46	321	5197559.58270
1 2 2 1	18	03	15	3.500	0.250	1	11.310	42	589	3566631.73753
1 2 2 2	20	03	17	3.500	0.583	2	11.310	44	373	4364996.36932
1 2 2 3	21	01	20	3.833	1.139	3	7.125	48	224	4547540.97526
1 2 3 0	12	06	06	3.000	1.333	3	7.125	34	321	8131705.89014
1 2 3 1	12	05	07	3.167	1.139	3	7.125	35	539	6174393.31102
1 2 3 2	13	05	08	3.167	0.472	2	7.125	36	373	5296639.52083
1 2 3 3	12	05	07	3.167	0.806	2	7.125	35	520	6357230.04408
1 3 0 0	16	03	13	3.500	0.250	1	11.310	40	187	2954457.84000
1 3 0 1	24	01	23	3.833	0.806	2	11.310	50	185	2813937.86440

表 7: さまざまな指標の数値

B C D E	交点数	共有折り線	差	平均	分散	最大 – 最小	角度	領域数	最小面積	面積分散
1 3 0 2	14	03	11	3.500	0.917	3	7.125	39	184	4917309.84352
1 3 0 3	25	01	24	3.833	0.806	2	11.310	51	185	2973345.77855
1 3 1 0	15	04	11	3.333	0.889	3	11.310	39	225	5880914.28008
1 3 1 1	16	03	13	3.500	0.250	1	11.310	41	590	3545752.54729
1 3 1 2	13	04	09	3.333	0.222	1	7.125	37	585	5295506.32140
1 3 1 3	19	03	16	3.500	0.917	3	18.435	43	133	5098681.15955
1 3 2 0	11	05	06	3.167	0.806	2	7.125	34	225	6868675.53028
1 3 2 1	15	04	11	3.333	0.889	3	7.125	39	323	4797199.78041
1 3 2 2	11	05	06	3.167	0.806	3	7.125	35	585	5839031.74694
1 3 2 3	19	03	16	3.500	1.250	3	7.125	44	374	5229866.53512
1 3 3 0	15	05	10	3.167	0.806	3	11.310	37	211	6837679.05625
1 3 3 1	21	02	19	3.667	0.556	2	11.310	46	225	4249791.19518
1 3 3 2	15	03	12	3.500	0.250	1	7.125	40	224	4579243.56937
1 3 3 3	20	03	17	3.500	0.583	2	11.310	44	225	4899706.02221