1　集合と場合の数

定義

集合 A の要素が有限のとき，その個数を n(A) で表す．

例

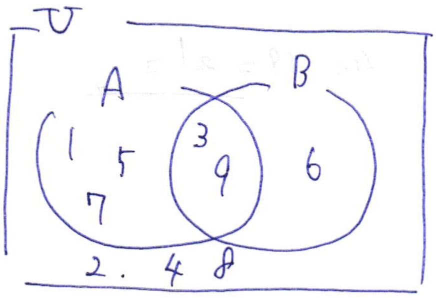
$A\ \{1,2,3,4,5\}$ のとき，要素の個数は 5 個なので，

問題 1

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$A = \{1,3,5,7,9\}$$
$$B = \{3,6,9\}$$

のとき，以下の問いに答えよ．

(1) ベン図を描け．



(2) $n(A)$ を求めよ．

$n(A) = 5$

(3) $n(B)$ を求めよ．

$n(B) = 3$

(4) $n(A \cap B)$ を求めよ．

$n(A \cap B) = 2$

(5) $n(A \cup B)$ を求めよ．

$n(A \cup B) = 6$

(6) $n(\overline{A} \cap B)$ を求めよ．

$n(\overline{A} \cap B) = 1$

問題 2

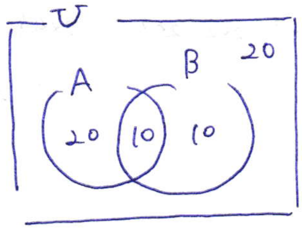
全体集合 U と，その部分集合 A, B に対し，

$$n(U) = 60, \quad n(A) = 30, \quad n(B) = 20, \quad n(A \cap B) = 10$$

を満たすとき，以下の値を求めよ．

(1) $n(\overline{A})$

$n(\overline{A}) = 30$



(2) $n(A \cup B)$

$n(A \cup B) = 40$

(3) $n(\overline{A \cap B})$

$n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B)$

$= 60 - 10 = 50$

(4) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$

$= n(\overline{A \cup B})$　(ド・モアブル)

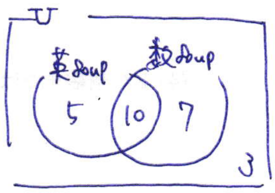
$= n(U) - n(A \cup B)$

$= 60 - 40 = 20$

問題 3

25 人クラスで，英語と数学の小テストを実施したところ，英語で 80 点以上の生徒は 15 人，数学で 80 点以上の生徒は 17 人，英語と数学ともに 80 点以上の生徒は 10 人であった．このとき，以下の人数を求めよ．

(1) 少なくとも一方は 80 点以上であった人．



22人

(2) ともに 80 点未満であった人．

3人

問題 4

100 以下の正の整数において, 以下の条件を満たすものの個数を求めよ.

(1) 2 の倍数

2, 4, 6, ⋯, 98, 100

2×1 2×2 2×3 2×49 2×50

よって 50コ

(2) 3 の倍数

3, 6, 9, ⋯, 99

3×1 3×2 3×3 3×33

よって 33コ

(3) 2 の倍数かつ 3 の倍数

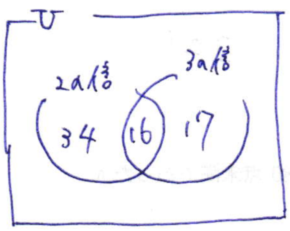
i.e. 6の倍数.

6, 12, ⋯, 96

6×1 6×2 6×16

よって 16コ

(4) 2 の倍数または 3 の倍数



ベン図より

34+16+17 = 67コ

問題 5

100 以上 200 以下の整数において, 以下の条件を満たすものの個数を求めよ.

(1) 3 の倍数

102, 105, ⋯, 198

3×34 3×35 ⋯ 3×66

よって 66−33 = 33コ

(2) 5 の倍数

100, 105, ⋯, 200

5×20 5×21 ⋯ 5×40

よって 40−19 = 21コ

(3) 3 の倍数かつ 5 の倍数

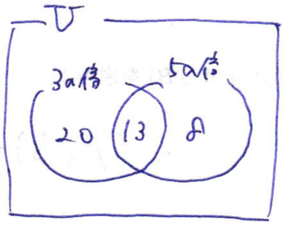
i.e. 15の倍数.

105, 120, ⋯, 195

15×7 15×8 ⋯ 15×19

よって 19−6 = 13コ

(4) 3 の倍数または 5 の倍数



上図より

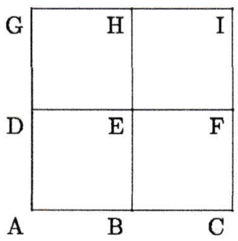
20+13+8 = 41コ

2　場合の数

Point

もれなく，重複なく．
そのために，規則的に数えあげる．

問題 1



A をスタートとし，I まで行く最短路は何通りあるか．

A / B — C — F — I
　　　＼ E — F — I
　　　　　＼ H — I
A ＼ D — E — F — I
　　　　　＼ H — I
　　＼ G — H — I

6通り

問題 2

サイコロを 2 個投げたとき，以下の場合の数を求めよ．

(1) 和が 6 となる．

和	1	2	3	4	5	6
1					6	
2				6		
3			6			
4		6				
5	6					
6						

左図より

5コ

(2) 積が 6 となる．

積	1	2	3	4	5	6
1						6
2			6			
3		6				
4						
5						
6	6					

左図より

4コ

問題 3

大中小 3 個のサイコロを同時に投げる．以下の場合の数を求めよ．

(1) 和が 6 となる．

大 中 小　　大 中 小　　大 中 小
1 − 1 − 4　　2 − 1 − 3　　4 − 1 − 1
　＼ 2 − 3　　　＼ 2 − 2
　＼ 3 − 2　　　＼ 3 − 1
　＼ 4 − 1　　3 − 1 − 2
　　　　　　　　＼ 2 − 1

10通り

(2) 積が 6 となる．

大 中 小　　大 中 小
1 − 1 − 6　　2 − 1 − 3
　＼ 2 − 3　　　＼ 3 − 1
　＼ 3 − 2　　3 − 1 − 2
　＼ 6 − 1　　　＼ 2 − 1
　　　　　　　6 − 1 − 1

9通り

(3) 全て奇数となる．

大 中 小
1, 3, 5　〃　〃
の3パターン

$3 \times 3 \times 3 = 27$通り．

問題 4

$(a + b + c + d + e)(x + y + z)$ を展開したときの項数を求めよ．

aに対し，x，y，zの3コ
b　〃
⋮

$\therefore\ 5 \times 3 = 15$コ

問題 5

A 組 3 人，B 組 5 人，C 組 7 人のうちから 1 人ずつ選ぶ．選び方は何通りあるか．

A組　B　C
3通り × 5 × 7 = 105通り

問題 6

以下の数の正の約数の個数を求めよ．

(1) 6

1, 2, 3, 6

4コ

(2) 12

1, 2, 3, 4, 6, 12

6コ

(3) 24

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

8コ

(4) 122 $= 61 \times 2$

1, 2, 61, 122

4コ

(5) 3600 $= 6 \times 6 \times 10 \times 10$

$= 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

2の数　　3の数　　5の数

2の数	3の数	5の数
0	0, 1, 2	0, 1, 2
1	⋮	
2		
3		
4		

上図より

$5 \times 3 \times 3 = 45$コ

3 順列

例題

5 個の数 1, 2, 3, 4, 5 から異なる数字を使ってできる以下のような数は何個あるか.

(1) 4 桁の整数

千 百 十 一

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ こ

(2) 3 桁の偶数

百 十 一

2通り まず、一の位. 2 or 4.

4×3 通り 次に百、十の位は残り4つから2つ.

よって

$2 \times 4 \times 3 = 24$ 通り

(3) 3 桁の 5 の倍数

百 十 一

1通り まず一の位は 5.

4×3 通り 次に百、十の位は残った4つから2つ.

よって $4 \times 3 = 12$ 通り

問題 1

以下の順列の総数を求めよ.

(1) 7 人から 4 人選んで並べる.

$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ (通り)

(2) 1, 2, 3, 4 のうち異なる 3 つを使い 3 桁の整数を作る.

百 十 一

$4 \times 3 \times 2 = 24$ (通り)

(3) 8 人から 3 人のリレー選手と走順を決める.

一 二 三

$8 \times 7 \times 6 = 336$ 通り

(4) 1~8 と書かれた席に 3 人が座る.

1 2 ---- 8

A B C

$8 \times 7 \times 6 = 336$ 通り

(5) 6 人の異なる景品を 6 人に配る.

A B --- F

A

$\underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 720$ 通り

6! と書く.

階乗

(6) 5 人を一列に並べる.

$\underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 120$ 通り

問題 2

大人 4 人，子供 3 人が一列に並ぶ．以下の条件を満たすように並ぶときの並び方の総数を求めよ．

(1) 大人が両端に並ぶ．

□ - - - - - □

4 × 3　　まず、大人を両端に並べる。

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$　　残り5人を中に並べる

よって

$4 \times 3 \times 5! = 1440$ 通り

(2) 大人と子供が交互に並ぶ．

まず大人を一列に並べる

大 大 大 大　　$4! = 24$ 通り

次に、間に子どもを入れていく

大 大 大 大

子 子 子　　$3! = 6$ 通り。

$\therefore\ 24 \times 6 = 144$ 通り

(3) 子供が 3 人連続して並ぶ．

$\boxed{\text{子ども3人}}$ 大 大 大 大

↑

3!通り。

子ども1まとまりで並べていく。

子どもの並べ方は $3! = 6$ 通り。

まとまり + 大人4人 の5コを一列に並べる

$5! = 120$ 通り。

$\therefore\ 6 \times 120 = 720$ 通り

問題 3

6 個の数 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる数字を使ってできる以下のような数は何個あるか．

(1) 4 桁の整数

千 百 十 一

5　　千の位は 0以外の5通り。

$5 \times 4 \times 3$　　以下3桁は残り5コから3つ。

$\therefore\ 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ コ

(2) 4 桁の奇数

千 百 十 一

3　　一の位は 1, 3, 5 の3通り。

千の位は 残り5コから0を除く4通り。

4

4×3　　残りは 4コから2コ。

$\therefore\ 3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ コ

(3) 4 桁の偶数

(4桁の整数) = (4桁の奇数) + (4桁の偶数)

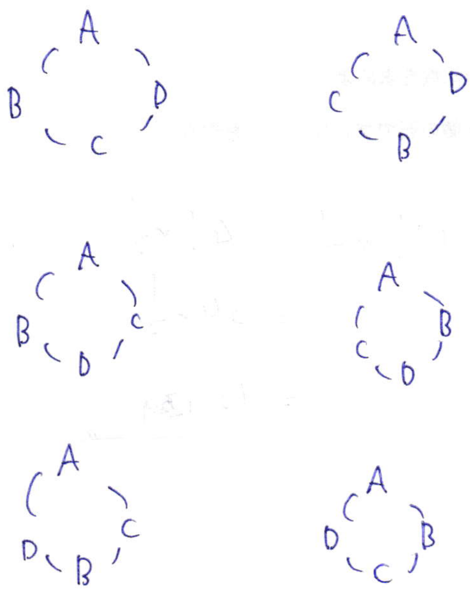
$\therefore\ 300 - 144 = 156$ コ

4 色々な順列

4.1 円順列

検討

A, B, C, D の 4 人を円形に並べる．どんな並べ方があるか全列挙しよう．



何通りあるか. ⟶ 6通り．

どうすれば計算できるか検討しよう．

基準を1人決め，時計まわりに

どのように並んでいるかを数え上げる。

残り3人を一列に ⟶ 3! 通り.

円順列

異なる n 個のものを円形に並べるときの並べ方は,

$(n-1)!$

問題

以下の順列の総数を求めよ

(1) 異なる 5 個の石を円形に並べる．

$(5-1)! = 4!$

$= 24$ 通り

(2) 3 人の人間を円形に並べる．

$(3-1)! = 2!$

$= 2$ (通り)

(3) 8 人の人間を円形に並べる．

$(8-1)! = 7!$

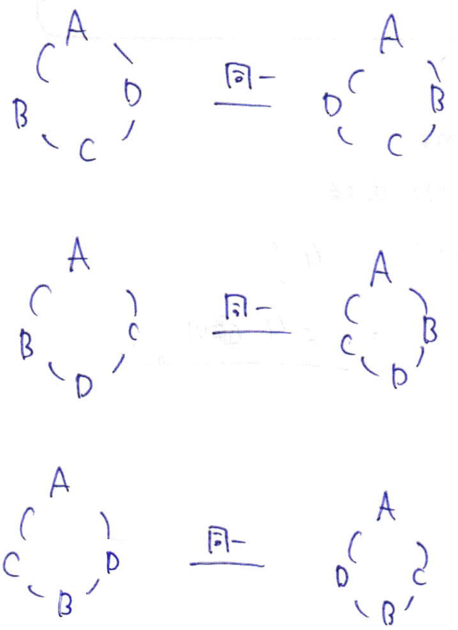
$= 5040$ (通り)

4.2　数珠順列

検討

A, B, C, D

異なる4つの石を用いてブレスレットを作る．どんな並べ方があるか全列挙しよう．



何通りあるか．⟶　　3通り.

どうすれば計算できるか検討しよう．

円に並べた後，左右対称を考慮

i.e. $\frac{1}{2}$倍する.

$$(4-1)! = 3! = 6.$$

$$6 \times \frac{1}{2} = 3コ$$

数珠順列

異なる n 個のものの数珠順列は,

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

問題

以下の順列の総数を求めよ

(1) 異なる5個の石でブレスレットを作る．

$$(5-1)! \times \frac{1}{2} = 4! \times \frac{1}{2}$$
$$= 24 \times \frac{1}{2}$$
$$= 12 \text{（通り）}$$

(2) 異なる10個の石で首飾りを作る．

$$(10-1)! \times \frac{1}{2} = 9! \times \frac{1}{2}$$
$$= 9 \cdot 8 \cdot 7! \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 9 \cdot 4 \cdot 5040$$
$$= 181440 \text{（通り）}$$

(3) 異なる7個の石で首飾りを作る．

$$(7-1)! \times \frac{1}{2} = 6! \times \frac{1}{2}$$
$$= 720 \times \frac{1}{2}$$
$$= 360 \text{（通り）}$$

4.3 重複順列

検討

○と×を重複を許して3個並べる．どんな並べ方があるか全列挙しよう．

$\square$ $\square$ $\square$

O or X　O or X　O or X

$2 \times 2 \times 2$

何通りあるか．⟶　8通り．

どうすれば計算できるか検討しよう．

各々2通りずつ．

i.e. 2^3 通り．

重複順列

r回並べる．

異なる n 個のものの重複順列は，

n^r

問題

(1) 1, 2, 3, 4 から重複を許して 4 個の数字を選んでできる 4 桁の整数は何個か．

千 百 十 一

$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$

$= 256$ 通り //

(2) 10 人を A または B の 2 部屋に分ける方法．ただし，1 人も入らない部屋があっても良い．

1人目　2人目　----　10人目

A or B　A or B　　　A or B

$2^{10} = 1024$ 通り //

(3) 0, 1, 2, 3 から重複を許して 4 個の数字を選んでできる 4 桁の整数は何個か．

千 百 十 一

$3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$ 通り //

(4) 0, 1, 2, 3 から重複を許して 4 個の数字を選んでできる 4 桁の偶数は何個か．

千の位 … 1, 2, 3

一の位 … 0, 2

千 百 十 一

$3 \times 4 \times 4 \times 2$

$= 96$ 通り //