**4** 関数 $f(x) = 8^x + 4^x + 4^{-x} + 8^{-x}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき, $4^x + 4^{-x}$ および $8^x + 8^{-x}$ を $t$ を用いて表せ.

(2) $t$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(3) $f(x)$ の最小値と, そのときの $x$ の値を求めよ.

(1)

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x 2^{-x}$$
$$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2$$

$$\therefore \ \underline{4^x + 4^{-x} = t^2 - 2}$$

$$8^x + 8^{-x} = (2^x + 2^{-x})((2^x)^2 - 2^x 2^{-x} + (2^{-x})^2)$$
$$= (2^x + 2^{-x})(4^x + 4^{-x} - 1)$$

$$\therefore \ 8^x + 8^{-x} = t(t^2 - 2 - 1)$$
$$\underline{= t^3 - 3t}$$

(2) $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ より.

相加相乗平均から.

$$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

$$\therefore \ \underline{t \geqq 2}$$