9 以下の問いに答えよ．【★★】

(1) 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が以下の条件を満たすように，定数 a, b, c の値を定めよ．

$$f(1) = f(-1),\quad f(2) = 2f(1),\quad f(0) = 2$$

$f(1) = a+b+c$.　　$f(2) = 4a+2b+c$.

$f(-1) = a-b+c$.　　$f(0) = c$.

(i) $f(1) = f(-1)$ より

$a+b+c = a-b+c$.

$b = 0$.

(ii) $f(0) = 2$ より

$c = 2$.

(iii) $f(2) = 2f(1)$ より

$4a+2b+c = 2(a+b+c)$.

$2a = c$.　　$c=2$ より　$a=1$.

$\therefore$ $a=1$. $b=0$. $c=2$

(2) 2 次関数 $y = -x^2 - 6x + 7$ のグラフは，2 次関数 $y = -x^2 + 4x - 5$ のグラフをどのように平行移動したものか．

$y = -x^2 - 6x + 7$

$= -(x^2+6x)+7$

$= -(x+3)^2+9+7$

$= -(x+3)+16$　　頂 $(-3, 16)$

$y = -x^2+4x-5$

$= -(x-2)^2-1$.　　頂 $(2, -1)$.

頂 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[+17]{-5} \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \end{pmatrix}$

よって，$y = -x^2-6x+7$ のグラフは

$y = -x^2+4x-5$ のグラフを

x軸方向に -5，y軸方向に 17

平行移動したもの．

(3) $y = 2x^2$ を平行移動して，頂点が $y = 2x - 3$ 上にくるようにすると，この放物線は点 $(2, 1)$ を通った．この放物線の方程式を求めよ．

平行移動後の頂点の x 座標を p とおく．

頂点は $y = 2x-3$ 上より．y 座標は $2p-3$ とおける．

$\therefore$ $y=2x^2$ を平行移動した後の方程式を

$y = 2(x-p)^2 + (2p-3)$.

とおける．

これが $(2, 1)$ を通るので

$1 = 2(2-p)^2 + (2p-3)$.

$1 = 8 - 8p + 2p^2 + 2p - 3$.

$2p^2 - 6p + 4 = 0$

$p^2 - 3p + 2 = 0$

$(p-1)(p-2) = 0$

$\therefore$ $p = 1, 2$

よって，求める放物線の方程式は

$y = 2(x-1)^2 - 1$.

$y = 2(x-2)^2 + 1$