7 加法定理を述べ, 全て証明せよ.

加法定理

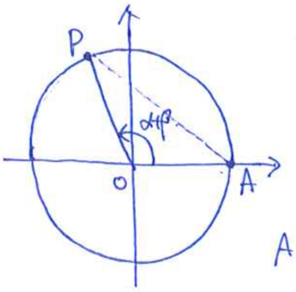
(1) $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cos\beta.$

(2) $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

(複号同順).

<証明>



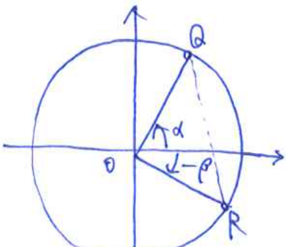
単位円上の点について、

左図において

$P(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$

$A(1, 0)$ であるので

$$AP^2 = (1-\cos(\alpha+\beta))^2 - (\sin(\alpha+\beta))^2$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$



左図で

$Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$R(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$

ここで $\cos(-\beta) = \cos\beta$

$\sin(-\beta) = -\sin\beta$ であるので

$R(\cos\beta, -\sin\beta)$.

$$QR^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (-\sin\beta - \sin\alpha)^2$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

さて、2つの図で $\angle AOP = \angle ROQ$ であるので、

$AP = QR$.

$\therefore AP^2 = QR^2$

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{―(*)}$$

さて、この式で β を $-\beta$ におきかえると、

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$

(*) において、

α を $\frac{\pi}{2}-\alpha$ におきかえると、

$$(\text{左辺}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)$$
$$= \sin(\alpha-\beta).$$

$$(\text{右辺}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\therefore \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

この式の β を $-\beta$ へおきかえる。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (1)$$

また、$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から、

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta}}$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

この式の β を $-\beta$ へおきかえて、

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$
$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \quad (3)$$

加法定理は覚えておこう。

証明も、はじめのアイデアをもっておくこと!