$\boxed{45}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 a に対し, a^2 を 3 で割ったあまりは 0 か 1 であることを証明せよ.

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると, a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ.

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ.

以下、答案においては、断わりのない限り法を3とする。

(1) <証明>.

(i) $a\equiv 0$ のとき

$a^2\equiv 0$ である.

(ii) $a\equiv 1$ のとき

$a^2\equiv 1$ である.

(iii) $a\equiv 2$ のとき

$a^2\equiv 4$

$\equiv 1$ である。

(i)〜(iii)より

任意の自然数 a に対し、a^2 を3で割った余りは 0 または 1 ∎

(2) <証明>.

$a^2+b^2=3c^2$ が成立することから、

(右辺) が 3の倍数なので (左辺) も 3の倍数.

i.e. $a^2+b^2\equiv 0$ でなければいけない.

(1)の(i)〜(iii)の結果から、

$a^2+b^2\equiv 0$ をみたすには、

$a^2\equiv 0$ かつ $b^2\equiv 0$ である。

これは、a^2, b^2 がともに3の倍数であることを意味し、

平方数が3の倍数なので、a, b も3の倍数.

ここで、

$a=3a'$, $b=3b'$ とおく. ($a', b'\in\mathbb{N}$)

$$(\text{左辺}) = 9a'^2+9b'^2$$
$$= 9a'^2+9b'^2$$

$$\therefore\ 9a'^2+9b'^2=3c^2$$
$$3(a'^2+b'^2)=c^2$$

となり、c^2 も3の倍数.

同様の議論から、c も3の倍数.

以上から、自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ をみたすと仮定すると、

a, b, c はすべて3で割り切れる ∎

(3) <証明>.

背理法で示す。

$\underbrace{a^2+b^2=3c^2}_{※1}$ をみたす自然数 a, b, c が存在すると仮定.

(2)の議論から、

$a=3a'$, $b=3b'$, $c=3c'$ ($a', b', c'\in\mathbb{N}$)

と書ける。

※1に代入して、

$$9a'^2+9b'^2=3\cdot 9c'^2$$
$$a'^2+b'^2=3c'^2 \text{ が成立.}$$

よって、この式に対し同じ議論をくり返すと、

自然数 a, b, c は何回でも3で割ることができることが分かる。

しかし、そのような自然数は存在しないので、

仮定が誤り.

つまり、$a^2+b^2=3c^2$ をみたす自然数は存在しない ∎

(3)を示すための(1)と(2)である。

誘導に丁寧に従っていけばよい。