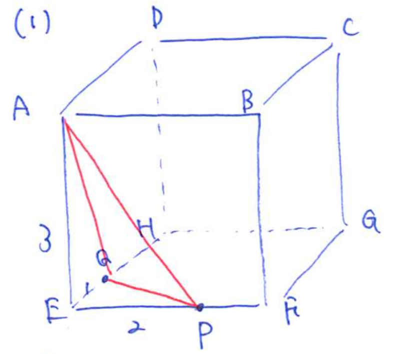
30 1辺が3である立方体ABCD-EFGHについて, EFを2 : 1に内分する点をP, EHを1 : 2に内分する点をQとおく. 以下の問いに答えよ.

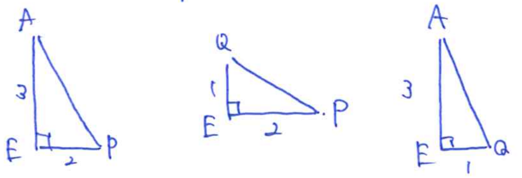
(1) △APQの面積を求めよ.

(2) 四面体AEPQの体積を求めよ.

(3) 点Eから平面APQへ垂線を下ろし, 平面APQとの交点をHとおく. EHの長さを求めよ.

(1)



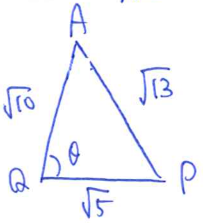


上図で各々三平方の定理.

$AP = \sqrt{13}$

$QP = \sqrt{5}$

$AQ = \sqrt{10}$



左図で余弦定理.

$13 = 10 + 5 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\theta$

$-2 = -2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$より.

$\sin\theta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7}{2}$ //

(2) 求める体積をVとおくと

$V = \frac{1}{3} \times (\triangle EPQ\text{の面積}) \times 3.$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \times 3$

$= 1.$ //

(3) $V = \frac{1}{3} \times (\triangle APQ\text{の面積}) \times EH$

とも書ける.

i.e.

$1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot EH$

$\therefore EH = \frac{6}{7}$ //