13 New Theorem.

(1) 中線定理を示せ.

中線定理

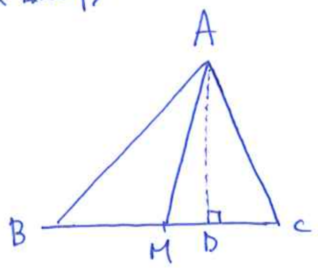
$\triangle$ABC の辺 BC の中点を M とする. 以下が成立.

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

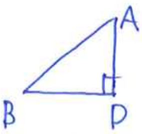
(2) AB= 6, BC= a, CA= 4 である三角形 ABC において, 辺 BC, CA の中点をそれぞれ M, N とする. AM= $\sqrt{10}$ のとき, a の値と, 線分 BN の長さを求めよ.

(1)

<証明>

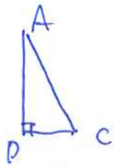


頂点Aから直線BCへの垂線を下ろし、交点をDとおく.



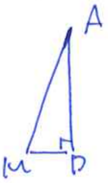
三平方の定理

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ —①



三平方の定理

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ —②



三平方の定理

$AM^2 = AD^2 + MD^2$ —③

①+②

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + DC^2$ —④

③より

$AD^2 = AM^2 - MD^2$

④に代入、

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2(AM^2 - MD^2) + BD^2 + DC^2 \\ &= 2AM^2 + BD^2 - MD^2 + DC^2 - MD^2 \quad —⑤ \end{aligned}$$

さて、図から、

$$\begin{aligned} BD^2 &= (BM + MD)^2 \\ &= BM^2 + 2BM \cdot MD + MD^2 \end{aligned}$$

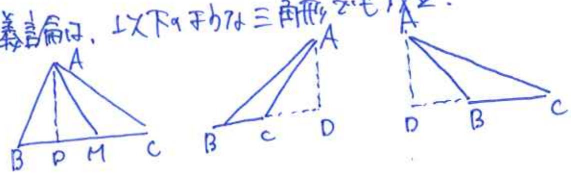
$$\begin{aligned} CD^2 &= (MC - MD)^2 \\ &= MC^2 - 2MC \cdot MD + MD^2 \end{aligned}$$

また、$BM = MC$.

∴ ⑤の右辺は

$$\begin{aligned} (右辺) &= 2AM^2 + (BM^2 + 2BM \cdot MD + MD^2) - MD^2 + (MC^2 - 2MC \cdot MD + MD^2) - MD^2 \\ &= 2AM^2 + BM^2 + MC^2 \\ &= 2AM^2 + 2BM^2 \end{aligned}$$

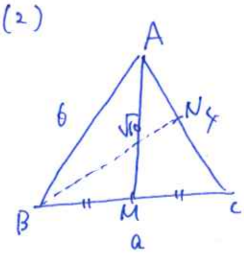
この議論は、以下のような三角形でも成立.



よって、

$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + MB^2)$ ■

(2)

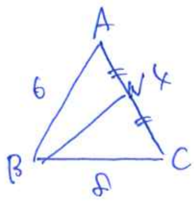


$BM = \frac{1}{2}a$.

中線定理より

$$\begin{aligned} 6^2 + 4^2 &= 2\left(10 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2\right) \\ 36 + 16 &= 2\left(10 + \tfrac{a^2}{4}\right) \\ 32 &= \tfrac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

$a > 0$ より $a = 8$ //



左図で中線定理.

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= 2(BN^2 + 2^2) \\ 36 + 64 &= 2(BN^2 + 4) \\ 92 &= 2BN^2 \\ BN^2 &= 46 \end{aligned}$$

$BN > 0$ より $BN = \sqrt{46}$ //

この定理は知っておいてもいいかも…？

ちなみに、この証明は厳密性に欠けるので注意.