

$$3(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) = 15$$

R6. 3. 4

1 以下の値を求めよ.

(1) $(-3)^{-2}$

$$\frac{1}{9}$$

(2) $(-2024)^{-1}$

$$\frac{1}{2024}$$

(3) $27^{\frac{2}{3}}$

$$3^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

(4) $243^{\frac{1}{5}}$

$$3^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 3$$

(5) $\sqrt[3]{8}$

$$2^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2$$

2 以下の式を計算せよ.

(6) $7^2 \times 7^{-2}$

$$= 7^{2-2} = 7^0 = 1$$

(7) $2^3 \div 4^4 \times 16^2$

$$2^3 \div 2^8 \times 2^8 = \frac{2^{3-2 \cdot 8}}{2^8} = 8$$

(8) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

$$= \left(\frac{3}{81}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

(9) $\left\{\left(\frac{81}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

$$= \left(\frac{3^4}{5^2}\right)^{-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}} = \left(\frac{5^2}{3^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9}$$

(10) $\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{40}$

$$\begin{aligned} &= (3^3 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} + (2^3 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \cdot 5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \\ &= 5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

3 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$ のとき, 以下の値を求めよ.

(11) $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}} + 3(x^{\frac{1}{2}})^2 \cdot (x^{-\frac{1}{2}}) + 3(x^{\frac{1}{2}}) \cdot (x^{-\frac{1}{2}})^2 + x^{-\frac{3}{2}}$$

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 110$$

(12) $x + x^{-1}$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}$$

$$\therefore x + x^{-1} = 25 - 2 = 23$$

(13) $x^2 + x^{-2}$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^4 = x^2 + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + x^{-2}$$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 23^2 - 2 = 527$$

4 以下の方程式, 不等式を解け.

(14) $3^x = 243$

$$= 3^5$$

$$\therefore x = 5$$

(15) $2^x = \frac{1}{32}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^{-5}$$

$$x = -5$$

(16) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$

$$2^{-x} = 2^6$$

$$x = -6$$

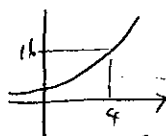
(17) $3^{3x-2} = 243$

$$= 3^5$$

$$3x - 2 = 5$$

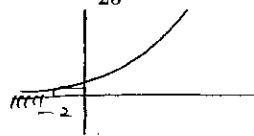
$$x = \frac{7}{3}$$

(18) $2^x > 16$



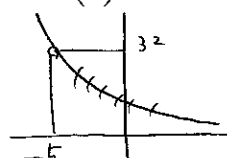
$$4 < x$$

(19) $5^x \leq \frac{1}{25}$



$$x \leq -2$$

(20) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 32$



$$-5 \leq x$$

5 以下の問いに答えよ。

(21) 以下の3つの数の大小を不等式を用いて表せ。

$$\sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{27}, \sqrt[5]{27}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{〃} & \text{〃} & \text{〃} \\ 3^{\frac{2}{3}} & 3^{\frac{3}{4}} & 3^{\frac{3}{5}} \end{array}$$

$$\frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{27}$$

(22) 方程式 $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ を解け。

$$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) = 0$$

$$3^x = 3, 1$$

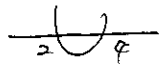
$$x = 1, 0$$

(23) 不等式 $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$ を解け。

$$t^2 - 6t + 8 < 0$$

$$(t-4)(t-2) < 0$$

$$x > 0$$

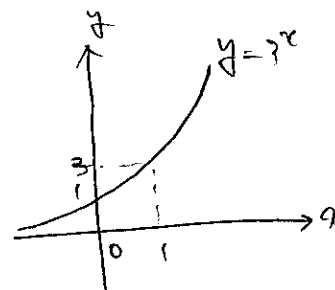


$$2 < t < 4$$

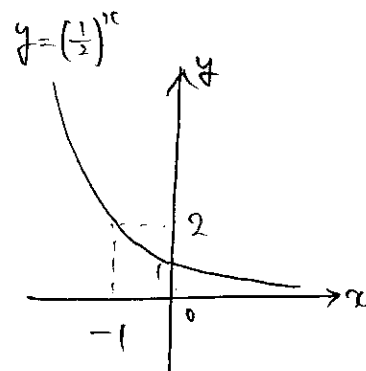
$$2 < 2^x < 4$$

$$1 < x < 2$$

(24) $y = 3^x$ のグラフを描け。



(25) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを描け。



6 以下の値を求めよ。

(26) $\log_2 8$

$= 3$

(27) $\log_3 81$

$= 4$

(28) $\log_2 \frac{1}{128}$

$= -7$

$\frac{1}{128} = 128^{-1} = (2^7)^{-1} = 2^{-7}$

(29) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

$= -2$

(30) $3^{\log_3 5}$

$= 5$

7 以下の式を計算せよ。

(31) $\log_8 4 + \log_8 16$

$= \log_8 4 \cdot 16 = \log_8 64$
 $= 2$

(32) $\log_2 12 - \log_2 3$

$= \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$

(33) $\log_3 6 - \log_3 60 + \log_3 45$

$= \log_3 \frac{36 \cdot 45}{60 \cdot 5} = \log_3 3^3 = 3$

(34) $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

$= \log_3 2^7 = 3$

(35) $(\log_2 5 + \log_4 25)(\log_5 4 + \log_{25} 2)$

$= 2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5$

8 以下の方程式, 不等式を解け。

(36) $\log_2 x = 3$

$2^3 = x$

$x = 8$

(37) $\log_{\frac{1}{10}} x = -2$

$(\frac{1}{10})^{-2} = x$

$x = 100$

(38) $\log_x 27 = 3$

$x^3 = 2^7$

$x > 0$

$x = 3$

(39) $\log_4 x = \frac{1}{2}$

$4^{\frac{1}{2}} = x$

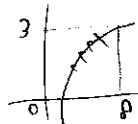
$x = 2$

(40) $\log_3(x-1) + \log_3(x-3) = 1$

$x-1 > 0, x-3 > 0 \rightarrow x > 3$

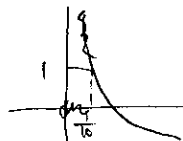
$\log_3(x-1)(x-3) = \log_3 3 \rightarrow x^2 - 4x = 0$
 $(x-1)(x-3) = 3 \rightarrow x = 4$

(41) $\log_2 x < 3$



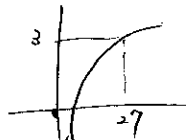
$0 < x < 8$

(42) $\log_{\frac{1}{10}} x \geq 1$



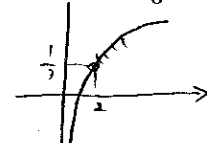
$0 < x \leq \frac{1}{10}$

(43) $\log_3 x \leq 3$



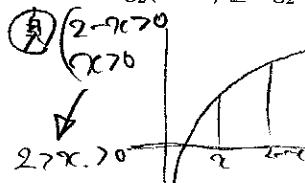
$0 < x \leq 27$

(44) $\log_8 x > \frac{1}{3}$



$x > 2$

(45) $\log_2(2-x) \geq \log_2 x$



$x < 2-x$

$2x < 2$

$x < 1$

$0 < x < 1$

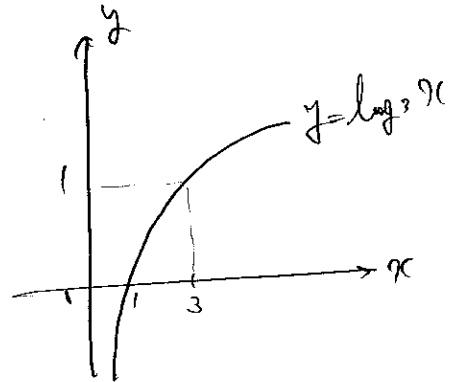
8 以下の問いに答えよ。

(46) 以下の2つの数の大小関係を不等号を用いて表せ。

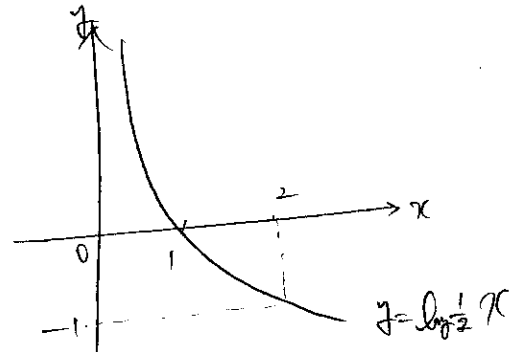
$$2\log_4 3, 3\log_4 2$$

$$\log_4 9 < \log_4 8$$

$$2\log_4 3 < 3\log_4 2$$



(47) $y = \log_3 x$ のグラフを描け。



(48) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを描け。

(49) 2^{15} は何桁か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

$$\begin{aligned} 2^{15} &= 10^N \text{ とおく} \\ 15 \log_{10} 2 &= N \log_{10} 10 \\ 15 \times 0.3010 &= N \\ N &= 3.010 + 1.505 \\ &= 4.515 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2^{15} &= 10^{4.515} \\ &= 10^4 \times 10^{0.515} \\ &\approx 10^4 \times 3.27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^{-1} &= \frac{1}{10} \approx 0.1 \\ 10^{-2} &= \frac{1}{100} \approx 0.01 \end{aligned}$$

(50) $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ を小数で表したとき、小数第何位に初めて0でない数が現れるか。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 10^N \text{ とおく。}$$

$$20 \log_{10} \frac{1}{3} = N \log_{10} 10$$

$$\begin{aligned} N &= -20 \times 0.4771 \\ &= -9.542 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 10^{-9.542}$$

小数第10位