48 座標平面上で，不等式

$$2|x-4|+|y-5| \leqq 3,\quad 2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big| \leqq 3$$

が表す領域をそれぞれ A, B とする．（九大）

(1) 領域 A を図示せよ．

(2) 領域 B を図示せよ．

(3) 領域 B の点 (x, y) で，x が正の整数，y は整数であって，自然数 p, q を用いて $x^p = |y|^q$ と表せるものを全て求めよ．

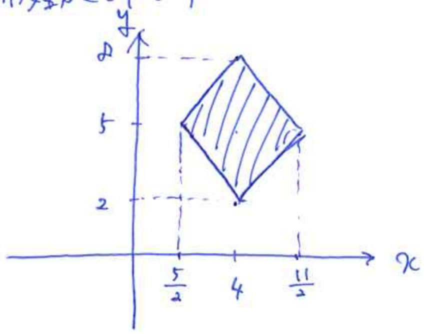
(1) まず，$2|x|+|y| \leqq 3$ がみたす領域を考える．

これは，4点 $(0, 3)$，$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，$(0, -3)$，$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ を結んでできる四角形の内部または辺上である．

不等式

$$2|x-4|+|y-5| \leqq 3$$

は，先の図形を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 平行移動させたもの．



よって求める領域 A は，図の斜線部で，境界線を含む．

(2)．不等式

$$2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big| \leqq 3$$

が表す領域は，

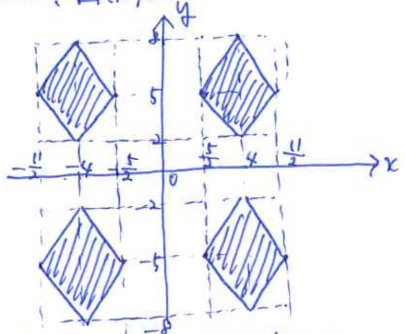
$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ では (1) と一致

$x \geqq 0$，$y < 0$ では (1) と x 軸対称

$x < 0$，$y \geqq 0$ では (1) と y 軸対称

$x < 0$，$y < 0$ では (1) と原点対称．

であるので，図示すると



求める領域は，図の斜線部で，境界線を含む．

(3)．領域内の格子点を探し，それが $x^p = |y|^q$ をみたすか否かを調べていく．

$x > 0$ かつ $y > 0$ では，領域 A 内で，格子点は

$x = 3$ のとき

$y = 4, 5, 6$．

いずれも $3^p = |y|^q$ は不成立．

$x = 4$ のとき

$y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$．

$y = 2, 4, 8$ において

$4^p = |y|^q$ が成立．

$x = 5$ のとき

$y = 4, 5, 6$

$y = 5$ において

$5^p = |y|^q$ が成立．

∴ $(4, 2)$，$(4, 4)$，$(4, 8)$，$(5, 5)$ で $x^p = |y|^q$ と表すことができる．

$x > 0$，$y < 0$ についても同様に考えて，

求める格子点は

$(4, \pm 2)$，$(4, \pm 4)$，$(4, \pm 8)$，$(5, \pm 5)$