「指数→対数をとってみる.」は思考の1つ.
(1), (2)の誘導があるので親切な問題.

10 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^3 4^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とするとき, b_{n+1} を b_n を用いて表せ.

(2) α, β を定数とし $f(n) = \alpha n + \beta$ とする. このとき, $b_{n+1} - f(n+1) = 3\{b_n - f(n)\}$ が成り立つように α, β を定めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(1) $a_{n+1} = a_n^3 \cdot 4^n$

辺を 底が2の 対数をとると.

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n^3 \cdot 4^n$$
$$= 3\log_2 a_n + n \cdot \log_2 4$$
$$= 3\log_2 a_n + 2n.$$

$b_n = \log_2 a_n$ より

$$b_{n+1} = 3b_n + 2n$$

(2) (1)より

$$b_{n+1} = 3b_n + 2n. \quad -①$$
$$b_{n+1} - (\alpha(n+1)+\beta) = 3(b_n - (\alpha n+\beta)) \quad -②$$

この2式が等しくなるので,

②式を変形して.

$$b_{n+1} = 3b_n - 2\alpha n + \alpha + 4\beta.$$

比較して

$$-2\alpha = +2.$$
$$\alpha + 4\beta = 0$$
$$\alpha = -1.$$
$$\beta = \frac{1}{4}$$

②にもどして

$$b_{n+1} - \left(-(n+1) + \frac{1}{4}\right) = 3\left(b_n - \left(-n + \frac{1}{4}\right)\right)$$

(3) (2)の最後の式において

$$b_n - \left(-n + \frac{1}{4}\right) = c_n \text{とおく.}$$

$$c_{n+1} = 3 \cdot c_n$$

ここで

$$c_1 = b_1 - \left(-1 + \frac{1}{4}\right)$$
$$= \log_2 a_1 - \left(-1 + \frac{1}{4}\right)$$
$$= \log_2 2 - \left(-1 + \frac{1}{4}\right)$$
$$= 1 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore c_n = \frac{7}{4} \cdot 3^{n-1}$$

よって

$$b_n - \left(-n + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4} \cdot 3^{n-1}$$
$$b_n = \frac{7}{4} \cdot 3^{n-1} - n + \frac{1}{4}$$

$b_n = \log_2 a_n$ より

$$a_n = 2^{b_n}$$
$$= 2^{\frac{1}{4}(7 \cdot 3^{n-1} - 4n + 1)}$$