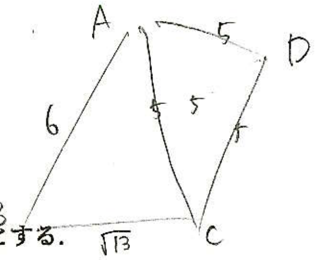
112【三角比】

四面体 ABCD は, AB$=6$, BC$=\sqrt{13}$, AD$=$BD$=$CD$=$CA$=5$ を満たしているとする.



(1) $\angle$BAC$=\theta$ とするとき, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ の値を求めよ.

(2) $\triangle$ABC の面積を求めよ.

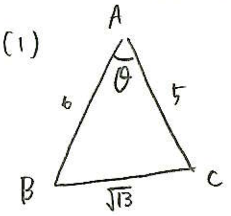
(3) 頂点 D から $\triangle$ABC に下ろした垂線を DH とすると, AH$=$BH$=$CH が成り立つことを示し, AH を求めよ.

(4) 四面体 ABCD の体積を求めよ.

(5) 頂点 B から $\triangle$ACD に下ろした垂線の長さを求めよ.

(学習院大 改)

(1)



左図で余弦定理より.

$(\sqrt{13})^2 = 5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos\theta$

$13 = 25+36-2\cdot5\cdot6\cdot\cos\theta$

$-\cancel{48}_{4} = -\cancel{2}\cdot5\cdot\cancel{6}\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ //

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\sin^2\theta = \frac{9}{25}$

$0°<\theta<180°$ より $\sin\theta>0$.

∴ $\sin\theta = \frac{3}{5}$ //

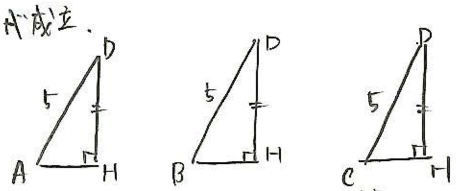
(2) $S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{3}{5} = 9$ //

(3)
<証明>.
頂点Dから, $\triangle ABC$に下ろした垂線をDHとするとき,

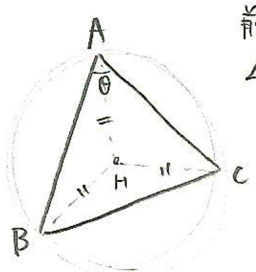
AH⊥DH, BH⊥DH, CH⊥DH

が成立.



直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいので
上図の3つの三角形は合同.

∴ AH$=$BH$=$CH ∎

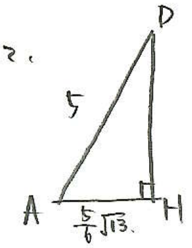


前で示したことにより, Hは
$\triangle ABC$の外心である。
i.e. AHは外接円の半径R.
正弦定理より.

$2R = \frac{\sqrt{13}}{\sin\theta}$

$R = \frac{5}{6}\sqrt{13}$ //

(4)
さて,



三平方の定理より.

$25 = \frac{25}{36}\cdot13 + DH^2$

$25\cdot\frac{23}{36} = DH^2$

$DH = \frac{5}{6}\sqrt{23}$.

∴ 求める体積Vは

$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot DH$

$= \frac{1}{3}\cdot9\cdot\frac{5}{6}\sqrt{23}$

$= \frac{5}{2}\sqrt{23}$ //

(5) 求める垂線をBMとおく.
四面体の体積Vは

$V = \frac{1}{3}\cdot BM\cdot\triangle ACD$ とおける.

さて,

$\triangle ACD = \frac{1}{2}\cdot5\cdot5\cdot\sin60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot25$

∴ $V = \frac{1}{3}\cdot BM\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot25$

よって $\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}\sqrt{23} = \frac{1}{3}BM\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\cancel{25}^{5}$

$BM = \frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2}{5}\sqrt{69}$ //