

1 復習・不定積分

1.1 微分と積分

(1) $(x^2 + 3x)' =$

(2) $\int (2x + 3)dx =$

1.2 定積分

(1) $\int_0^2 x^2 dx$

1.2.1 面積

(1) $y = x^2, y = 0, x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) $\int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx$

1.3 微分の復習

以下の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin x$

(2) $y = \cos x$

(3) $y = \tan x$

(4) $y = \log_2 x$

(5) $y = \log x$

(6) $y = 3^x$

(7) $y = 2^x$

1.4 不定積分

不定積分

(1) $\int x^\alpha dx =$

(2) $\int \frac{1}{x} dx =$

(3) $\int \sin x dx =$

(4) $\int \cos x dx =$

(5) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

(6) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$

(7) $\int e^x dx =$

(8) $\int a^x dx =$

(a は 1 でない正の定数)

1.5 練習

(1) $\int \frac{1}{x^2} dx =$

(2) $\int \sqrt{x} dx =$

(3) $\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} dx =$

(4) $\int (2 \sin x + 3 \cos x) dx =$

(5) $\int (2e^x + 3^x) dx =$

(6) $\int \tan^2 x dx =$

(7) $\int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx =$

(8) $\int 5^x \log 5 dx =$

2 置換積分

2.1 置換積分法

置換積分

$$\int f(x)dx =$$

2.1.1 練習

以下の不定積分を求めよ.

(1) $\int x\sqrt{x+1}dx$

(2) $\int x\sqrt{2x-1}dx$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

2.2 例

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad C: \text{積分定数}$$

$$\int (3x+1)^4 dx \text{ 以下の不定積分を求めよ.}$$

2.2.1 練習

以下の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1}{4x+3} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$$

$$(3) \int \sin 2x dx$$

$$(4) \int e^{3x-1} dx$$

2.3 違う形の置換積分

2.3.1 例

以下の不定積分を求めよ.

(1) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

(2) $\int \cos^2 x \sin x dx$

2.3.2 練習

(1) $\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$

(2) $\int xe^{-x^2}dx$

(3) $\int \frac{\log x}{x}dx$

2.4 部分積分法

2.4.1 例

(1) $\int x \cos x dx$

(2) $\int \log x dx$

(3) $\int x^2 e^x dx$

2.4.2 練習

(1) $\int x \sin x dx$

(2) $\int \log 2x dx$

(3) $\int (x^2 + 1) \sin x dx$

3 色々な形

3.1 例題

(1) $\int \frac{x^2 - 1}{x + 2} dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

(3) $\int \sin^2 x dx$

(4) $\int \sin 3x \cos 2x dx$

3.2 練習

(1) $\int \frac{4x^2 + 2x}{2x - 1} dx$

(2) $\int \frac{3}{x^2 + x - 2} dx$

(3) $\int \sin^2 3x dx$

(4) $\int \sin x \sin 3x dx$

4 定積分

4.1 復習兼演習

(1) $\int_0^4 (3x^2 - 4x + 1)dx$

(2) $\int_{-1}^2 2^x dx$

(3) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

(4) $\int_4^2 \frac{x^2 + 2}{x - 1} dx$

(5) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

(6) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

5 置換積分

5.1 復習兼演習

置き換えた場合, 範囲に注意.

$$(1) \int_2^1 x(2-x)^4 dx$$

$$(2) \int_0^1 x(1-x)^5 dx$$

$$(3) \int_2^5 x\sqrt{x-1} dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

(5) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

(6) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx$

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

(8) $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$

5.2 奇関数・偶関数

関数 $f(x)$ において,

- $f(-x) = f(x)$ が常に成立するとき, この関数を偶関数.
- $f(-x) = -f(x)$ が常に成立するとき, この関数を奇関数.

【図】

5.2.1 練習

(1) $\int_{-1}^1 (x^3 + 3x^2 + x + 2)dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)dx$

(3) $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2}dx$

5.3 部分積分

5.3.1 復習・練習

(1) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

(2) $\int_0^1 x e^x dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

6 定積分の色々な問題

6.1 定積分と導関数

定積分と導関数

a が定数のとき

6.1.1 問題

以下の関数を x で微分せよ.

(1) $\int_3^x \sin t dt$

(2) $\int_{10}^x t \log t dt$ (ただし, $x > 0$)

6.2 例題

(1) 関数 $G(x) = \int_0^x (x-t) \cos t dt$ の導関数を求めよ.

(2) 関数 $\int_x^{2x} \sin t dt$ を x で微分せよ.

(3) 等式 $f(x) = x + \int_0^\pi f(t) \sin t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

6.3 問題

(1) 関数 $G(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$ について, $G'(x), G''(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $\int_x^{3x} \cos t dt$ を x で微分せよ.

(3) 等式 $f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.



6.4.1 例題

以下の極限值を求めよ.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$$

6.4.2 問題

以下の極限值を求めよ.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)$$

6.5 定積分と不等式

不等式

区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x), g(x)$ について,

6.5.1 例題

- (1) $x \geq 0$ のとき, $\frac{1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{(x+1)^2}$ が成り立つことを示せ.
- (2) 不等式 $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} > \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ.

6.5.2 問題

- (1) $x \geq 0$ のとき, $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x^2 + x + 1}$ が成り立つことを示せ.
- (2) 不等式 $\log 2 > \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}$ が成り立つことを示せ.

6.6 例題

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の定積分を利用して、以下の不等式を証明せよ.

$$\log n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (\text{ただし, } n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

6.7 問題

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の定積分を利用して、以下の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1) \quad (\text{ただし, } n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

7 面積

7.1 復習兼演習

(1) 放物線 $y = x^2 - 4$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) 放物線 $y = x^2$ と x 軸, 直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) 2 曲線 $y = x^2, y = x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) 曲線 $y = e^x$ と x 軸, y 軸, 直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(6) 2 曲線 $y = x^2, y = \sqrt{x}$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(5) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において, 2 曲線 $y = \sin x, y = \cos x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(7) 2 曲線 $x + 4y = 5, xy = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

7.2 視点を変える

(1) $y = \log x$ と x 軸, y 軸および直線 $y = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) 2 曲線 $x = y^2, x = y + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

7.3 いろいろな面積

(1) 半径 r の円の面積を求めよ.

(3) $a, b > 0$ とする. 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の面積を求めよ.

(2) $a, b \neq 0$ とする. 2 点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ を通る直線と, x 軸, y 軸で囲まれた部分 (三角形) の面積を求めよ.

7.4 媒介変数

7.4.1 例題

$a > 0$ とする. サイクロイド

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

7.4.2 練習

$a > 0, b > 0$ とする. 以下の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

8 体積

8.1 練習

- (1) 底面の半径が a , 高さが a である直円柱がある. この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で, 直円柱を 2 つの立体に分けるときの, 小さい方の立体の体積 V を求めよ.

- (2) 半径 a の円 O がある. この直径 AB 上の点 P を通り直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし, 高さが h である二等辺三角形を, 円 O の面に対して垂直に作る. P が A から B まで動くとき, この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ.

(3) 曲線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ.

(4) 曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ.