1　事象と確率

試行と事象

- 試行
  $\cdots$ 同じ試行のもとで繰り返すことのできる実験や観測.
- 事象
  $\cdots$ 試行の結果として起こる事柄.
- 全事象
  $\cdots$ 1 つの試行で起こりうる結果全体の事象.
- 根元事象
  $\cdots$ 全事象の集合 U のただ 1 つの要素からなる部分集合で表される事象.

例

「サイコロを 1 回投げる」とき,

定義

ある試行において, 全ての根元事象が同様に確からしいとき,

1.1　練習問題

以下の確率を求めよ.

(1) A, B, C の 3 人がジャンケンをし, あいこになる確率.

(2) A, B, C, D, E の 5 文字を無作為に横一列に並べるとき, A と B が両端になる確率.

(3) 大人 4 人, 子供 2 人を無作為に円形に並べるとき, 子供 2 人が隣り合う確率.

(4) 赤玉 2 個, 白玉 3 個入った袋の中から同時に 2 個の玉を取り出すとき, 異なる色の玉を取り出す確率.

1.2　演習問題

赤玉と白玉が計 8 個入った袋がある．以下のとき, 赤玉と白玉の個数の内訳を求めよ.

(1) 1 個取り出すとき, 赤玉を引く確率が $\dfrac{1}{4}$

(2) 2 個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉を引く確率が $\dfrac{15}{28}$

2　確率の基本性質

基本性質

U : 全事象, $A \subset U$ とする.

(1)

(2)

$n(A \cup B) =$ なので,

和事象

$$P(A \cup B) =$$

特に,

$n(\overline{A}) =$ なので,

余事象

$$P(\overline{A}) =$$

2.1　練習問題

(1) サイコロ投げで, 事象 A「偶数の目が出る」, 事象 B「3 の倍数が出る」とする.
(a) $P(A \cap B)$ を求めよ.

(b) $P(A \cup B)$ を求めよ.

(2) 1 から 100 までの書かれた 100 枚のカードから 1 枚引くとき, 偶数または 3 の倍数を引く確率を求めよ.

(3) 大小 2 個のサイコロを投げる. 以下の確率を求めよ.
(a) 目の和が 3 以上となる確率.

(b) 同じ目が出る確率.

(c) 少なくとも一方は奇数である確率.

2.2　演習問題 1

2 個のサイコロを同時に投げる．以下の確率を求めよ．

(1) 出る目の最大値が 4 以上である確率.

(2) 出る目の最大値が 2 以上 4 以下である確率.

(3) 出る目の最小値が 2 である確率.

2.3　演習問題 2

3 個のサイコロを同時に投げる．以下の確率を求めよ．

(1) 出る目の最大値が 4 以上である確率.

(2) 出る目の最大値が 2 以上 4 以下である確率.

(3) 出る目の最小値が 2 である確率.

3 独立

独立

「試行が独立である」とは, いくつかの試行において, どの試行の結果も他の試行の結果に影響を受けないことをいう.

例

A さんと B さんがこの順に, 1 から 12 の書かれたカードから 1 枚ずつカードを引く. 事象 A「A さんがカードを引く」, 事象 B「B さんがカードを引く」とする.

- 毎回カードを戻す場合.

- 引いたカードを戻さない場合

3.1 練習問題

(1) 大小 2 個のサイコロを投げる. 大のサイコロは 5 以上の目, 小のサイコロは偶数の目が出る確率を求めよ.

(2) 八面体サイコロ (1 から 8 の目が書かれたサイコロ) を 2 回投げる. 目の和が偶数となる確率を求めよ.

3.2 反復試行

3.2.1 復習

サイコロを 5 回投げるとき, 以下の場合の数を求めよ.

(1) 全て偶数の目が出る.

(2) 偶数の目がちょうど 2 回出る.

(3) 偶数の目が 2 回以上出る.

3.2.2 確率へ...

3.3　練習問題 1

硬貨を 6 回投げるとき, 以下の確率を求めよ.

(1) ちょうど 2 回表が出る確率

(2) ちょうど 3 回表が出る確率

(3) 4 回以上表が出る確率

3.4　練習問題 2

袋内に赤 2, 黄 2, 青 3 の計 7 個入っている. 1 個の玉を取り出し, 色を見て戻す操作を 3 回繰り返す. 以下の確率を求めよ.

(1) 3 回とも同じ色である確率.

(2) 全て違う色になる確率.

(3) 青が 1 回も出ない確率.

3.5 演習問題 (数直線問題)

数直線上を動く点 P がある．この点 P はサイコロを投げ, 奇数が出れば $+2$, 偶数が出れば -1 だけ移動するとする．以下の確率を求めよ．ただし, 点 P の初期位置は原点とする．

(1) 1 回の操作後に P が $+2$ の位置にいる確率．

(2) 2 回の操作後に P が $+1$ の位置にいる確率．

(3) 3 回の操作後に P が $+3$ の位置にいる確率．

(4) 6 回の操作後に P が $+3$ の位置にいる確率．

4　条件付き確率

条件付き確率

- 条件付き確率 $P_A(B)$
  $\cdots$ 事象 A が起こったとして, そのときに事象 B が起きる確率.

ベン図で状況整理

上の図から,

条件付き確率

事象 A が起こったとして, そのときに事象 B が起きる確率は,

$$P_A(B) =$$

例

サイコロを投げて偶数の目が出たとき, その目が 3 の倍数である確率を求めよ.

4.1　練習問題

(1) 恐竜博物館の入場者のうち, 全体の 25% が高校生で, 全体の 15% が年間パスで入場した高校生である. 高校生の入場者から 1 人選ぶとき, その人が年間パスで入場している確率を求めよ.

(2) 福井大学生のうち, 全体の 60% が通学に電車を利用していて, 全体の 40% が自転車を利用している. また, 全体の 10% が電車と自転車を共に利用している.

(a) 電車を利用している学生の中から 1 人を選ぶとき, その生徒が自転車も利用している確率を求めよ.

(b) 自転車を利用している学生の中から 1 人を選ぶとき, その生徒が電車も利用している確率を求めよ.

5　独立ではない確率

5.1　練習問題

(1) 3 本のあたりくじを含む計 10 本のくじから, A, B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く. ただし, 引いたくじは元に戻さない. このとき, B が当たりを引く確率を求めよ.

(2) 5 本のあたりくじを含む計 12 本のくじから, A, B, C の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く. ただし, 引いたくじは元に戻さない. このとき, C が当たりを引く確率を求めよ.

6　期待値

例題

以下のくじにおいて, 1 本あたりの賞金額を求めよ.

	賞金	本数
1 等	10000 円	1 本
2 等	1000 円	5 本
3 等	100 円	10 本
ハズレ	0 円	84 本
計		100 本

期待値

X のとる値と確率が以下の表のようであるとき,

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

X の期待値は

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots x_np_n$$

(ただし, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$)

6.1　練習問題 1

(1) サイコロを 1 回投げるとき, 出る目の期待値を求めよ.

(2) サイコロを 2 回投げるとき, 出る目の和の期待値を求めよ.

6.2　練習問題 2

(1) サイコロを 1 回投げる試行において, 次の 2 つの場合が選べるとき, どちらを選んだ方がより多くの金額を得ることができると期待できるか.
   (a) 3 の倍数が出たら 1000 円もらえるが, その他の場合は 0 円.
   (b) 出た目の枚数分の 100 円玉がもらえる.

6.3　練習問題 3

赤玉 3 個, 白玉 5 個入った袋から 3 個の玉を同時に取り出し, 取り出した赤玉の個数だけ 1000 円札がもらえるゲームがある. あなたが店主である場合, 1 回の金額設定を何百円にするか. ただし, 店の儲けもあり, 尚且つ客にも多くのリターンが見込める金額設定にせよ.

7　場合の数・確率演習

7.1　問題

4 組の親子, 計 8 人がいる．この 8 人が, 以下のような会場の座席に座ることを考える.

ステージ

A 列				
B 列				
	1 番	2 番	3 番	4 番

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 8 人の座席の座り方は何通りあるか.

(2) A 列に子供が座り, 親は自身の子供の後ろに座る．このような並び方は何通りあるか.

(3) 親子が隣同士に座るような並び方は何通りあるか．ただし, ここでいう隣同士とは, 同じ列で隣接番号に座ることである.

(4) どの親子も隣同士にならないような座り方は何通りあるか.

7.2　問題

1 のカードが 1 枚, 2 のカードが 2 枚, 3 のカードが 3 枚, 4 のカードが 4 枚の計 10 枚の中から, 同時に 3 枚引く．このとき, 引いたカードの最大値を M, 最小値を m とし, $X = M - m$ とする.

(1) 3 枚全てが 4 のカードである確率を求めよ.

(2) $X = 0$ となる確率を求めよ.

(3) X についての確率分布表を作れ.

(4) 同時に 3 枚引く操作に対し, X の値が気に入らなかった場合もう一度だけやり直すことができる．このとき, X の期待値を最大にするには, X の値がどのようなときにやり直せば良いか.

7.3　問題

　1 のカードが 4 枚, 2 のカードが 3 枚, 3 のカードが 2 枚, 4 のカードが 1 枚の計 10 枚の中から, 同時に 3 枚引く．このとき, 引いたカードの最大値を M, 最小値を m とし, $X = M + m$ とする.

(1) 3 枚全てが 1 のカードである確率を求めよ.

(2) $X = 5$ となる確率を求めよ.

(3) X についての確率分布表を作れ.

(4) 同時に 3 枚引く操作に対し, X の値が気に入らなかった場合もう一度だけやり直すことができる．このとき, X の期待値を最大にするには, X の値がどのようなときにやり直せば良いか.

7.4　問題

3 個のサイコロを同時投げ, 出た目によって以下のような役と点数を設定する.

役	説明	点数
ゾロ目	3 つとも同じ目	10 点
階段	3 つの数が連続	6 点
奇数	3 つの目が全て奇数	3 点
偶数	3 つの目が全て偶数	2 点

もし出た目が気に入らなければ, 気に入らないサイコロのみ選んで振り直すこともできるとする.

(1) 振り直しの操作を禁じた場合, 各々の役の確率を求めよ.

(2) 振り直しの操作を禁じた場合の, 点数の期待値を求めよ.

(3) 振り直しを行うことができる場合, ゾロ目が起きる確率を求めよ. ただし, 振り直しを行う際は, 確率が最も大きくなるように振り直すサイコロを選ぶものとする.

(4) このゲームの得点の期待値を求めよ.

7.5　問題

1 から 12 のカード計 12 枚を準備し, 2 人で以下のようなゲームを行う.

- 各々 1 枚ずつ無作為に選び, その数値を得点とする.
- 気に入らない場合, 手札を元に戻し再度引き直すこともできる.

以下の問いに答えよ.

(1) 得点の期待値を求めよ.

(2) お互いに引き直しをしないとする. 自身の得点が 8 点の場合, このゲームに敗北する確率を求めよ.

(3) 相手が「私の得点は 6 点です」と宣言してくれた. 自身の得点は 3 点であったため引き直すことにした. 引き直して勝つことができる確率を求めよ. ただし, 相手は嘘をついておらず, 引き直しもしないものとする.

(4) 相手は期待値以上の得点のため, 引き直しをしなかった. 自身の点数がどのような時に引き直しを選択すれば, この勝負に勝利する確率が最も高くなるか.

7.6 問題

原点を始点として数直線上を動く点 P がある．サイコロを 1 回投げ, 動き方を以下の通り決める.

- 3 の倍数が出た場合, $+2$
- それ以外の場合, -1

(1) 3 回繰り返す場合, 点 P が原点にいる確率を求めよ.

(2) 3 回繰り返した後の点 P の座標の期待値を求めよ.

(3) 6 回繰り返した後の点 P の座標の期待値を求めよ.

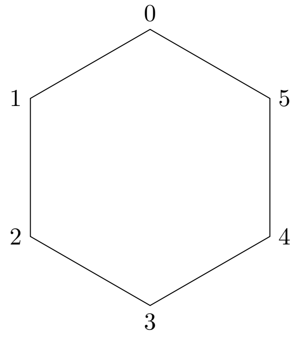
(4) 動き方を以下の通りに変更する.

- 1 が出た場合, $+3$
- 3 の倍数が出た場合, ± 0
- それ以外の場合, -1

このとき, 6 回繰り返した後の期待値を求めよ.

7.7　問題

0 を始点として, 下のような正六角形の周上を動く点 P がある.



サイコロを投げて動き方を以下の通り決め, 操作終了後の点 P の位置を得点とする.

- 3 の倍数が出た場合, 反時計まわりに $+2$
- それ以外の場合, 反時計まわりに $+1$

(1) 3 回の操作後に, 得点が 0 である確率を求めよ.

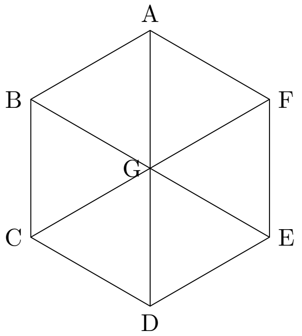
(2) 3 回の操作後に, 得点が 4 以上である確率を求めよ.

(3) 3 回の操作後の得点の期待値を求めよ.

(4) 3 回の操作を行う. 1 回の操作ごとに得点を記録し, それを X_1, X_2, X_3 とする. $S = X_1 + X_2 + X_3$ とするとき, S の期待値を求めよ.

7.8　問題

図のような正六角形 ABCDEF において, 点 G を向かい合う対角線の交点とする. この 7 点のうち, 3 点を無作為に選んでできる図形について考える.



以下の問いに答えよ.

(1) 三角形ができない確率を求めよ.

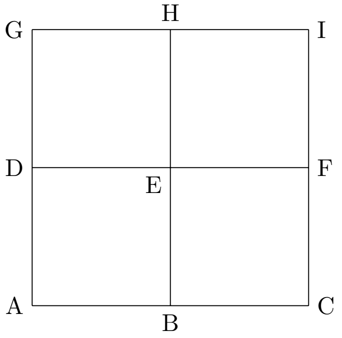
(2) 1 辺が 1 の正三角形ができる確率を求めよ.

(3) 直角三角形ができる確率を求めよ.

(4) できる図形の面積の期待値を求めよ. ただし, 三角形ができなかった場合の面積は 0 とする.

7.9　問題

以下のような図形において, 3 点を無作為に選んでできる図形について考える.



以下の問いに答えよ.

(1) 三角形ができない確率を求めよ.

(2) 面積が 1 の三角形ができる確率を求めよ.

(3) 面積が 2 の三角形ができる確率を求めよ.

(4) できる図形の面積の期待値を求めよ. ただし, 三角形ができなかった場合の面積は 0 とする.

7.10　問題

「1 段ずつ」「1 段飛ばし」のいずれかで階段を登る．以下の問いに答えよ．

(1) 2 段, 3 段, 4 段の登り方はそれぞれ何通りか.

(2) 15 段を登る方法は何通りあるか.

(3) 連続して「1 段飛ばし」は選択できないとする．このとき 15 段を登る方法は何通りあるか.

(4) 登り方として「2 段飛ばし」を追加する．このとき 15 段を登る方法は何通りあるか.

7.11 問題

n を 2 以上の整数とする．縦 2 行, 横 n 列のマスに 1 から $2n$ までの整数を重複なく入れた表を $T(n)$ とする．また,「減少表」を以下で定義する．

減少表

以下の性質を満たす $T(n)$ を減少表といい, $S(n)$ とする．

- 横に並ぶ 2 個の数字について, (左の数字)>(右の数字) が常に成立.
- 縦に並ぶ 2 個の数字について, (上の数字)>(下の数字) が常に成立.

(1) $T(2)$ は何通りあるか．また, そのうちで $S(2)$ は何通りあるか.

(2) $S(3)$ は何通りあるか.

(3) $S(4)$ は何通りあるか.

(4) $S(5)$ は何通りあるか.