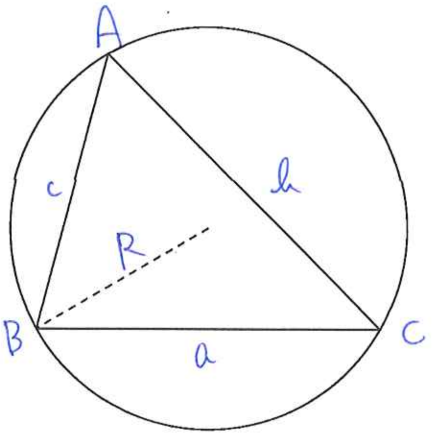
1 正弦定理 (計算)



正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

練習

$\triangle$ABC において, 以下の問いに答えよ.

(1) $a = 5, A = 45^\circ$ のとき, 外接円の半径 R を求めよ.

正弦定理から,

$$\frac{5}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{5}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2R$$

$$R = \frac{5}{\sqrt{2}} /\!/$$

(2) $b = \sqrt{3}, B = 120^\circ$ のとき, 外接円の半径 R を求めよ.

正弦定理から,

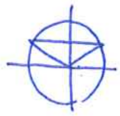
$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = 1 /\!/$$

(3) $c = 10, R = 10$ のとき, C を求めよ.

正弦定理から,



$$\frac{10}{\sin C} = 2 \cdot 10$$

$$\sin C = \frac{1}{2} \quad \therefore \ C = 30^\circ, 150^\circ /\!/$$

(4) $b = \sqrt{6}, A = 45^\circ, B = 60^\circ$ のとき, a を求めよ.

正弦定理から,

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 /\!/$$

(5) $c = \sqrt{2}, B = 30^\circ, C = 45^\circ$ のとき, $\cancel{c}$ b を求めよ.

正弦定理から,

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 /\!/$$

(6) $A = 135^\circ, B = 15^\circ, c = 2$ のとき, a の値を求めよ.

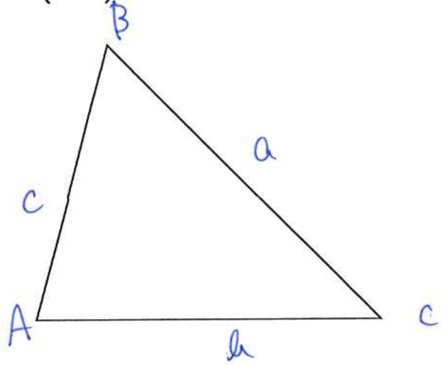
$A + B + C = 180^\circ$ なので,
$C = 30^\circ$

正弦定理より,

$$\frac{a}{\sin 135^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$a = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} /\!/$$

2　余弦定理 (計算)



余弦定理

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$

練習

△ABC において, 以下の問いに答えよ.

(1) $b = \sqrt{3}, c = 2, A = 150^\circ$ のとき, a を求めよ.

余弦定理より.

$a^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150^\circ$

$= 3 + 4 - 2\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$

$= 1$

$a > 0$ より

$a = 1$

(2) $a = 3, b = 5, C = 120^\circ$ のとき, c を求めよ.

余弦定理より.

$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120^\circ$

$= 9 + 25 - \cancel{2}\cdot 3\cdot 5\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

$= 9 + 25 - 15 = 19.$

$c > 0$ より

$c = \sqrt{19}$

(3) $a = 3, b = 2, c = \sqrt{7}$ のとき, C を求めよ.

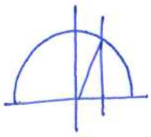
余弦定理より.

$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos C$

$7 = 9 + 4 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos C$

$\cancel{-}\cancel{6} = \cancel{-}\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot\cos C$

$\cos C = \frac{1}{2}$



左図より $C = 60^\circ$

(4) $\overset{a}{\cancel{A}} = \sqrt{7}, b = 1, c = 2\sqrt{3}$ のとき, A を求めよ.

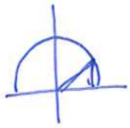
余弦定理より.

$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos A$

$7 = 1 + 12 - 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos A$

$\cancel{-}\cancel{6}^{3} = \cancel{-}2\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos A$

$\cos A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



左図から. $A = 30^\circ$

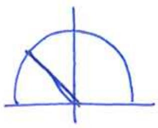
(5) $a = 1, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{2}$ のとき, B を求めよ.

余弦定理より.

$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos B$

$5 = 1 + 2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos B$

$\cos B = \frac{-1}{\sqrt{2}}$



左図から. $B = 135^\circ$

3　正弦定理・余弦定理の証明

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

＜証明＞

余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

＜証明＞

3.1 角の判定

3 辺の長さから, ある角度の鋭角・直角・鈍角を判定しよう.

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を変形して,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

辺の長さが正なので,

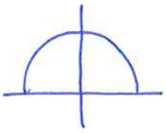
$$2bc > 0$$

よって,

$$b^2 + c^2 - a^2$$

の符号が, $\cos A$ が符号になる.

さて,



$\cos A > 0$ のとき, A は 鋭 角

$\cos A = 0$ のとき, A は 直 角

$\cos A < 0$ のとき, A は 鈍 角

i.e.

$b^2+c^2-a^2$ が

- 正 → Aは鋭角
- 0 → Aは直角
- 負 → Aは鈍角.

練習

△ABC の 3 辺が以下のとき, A の角の種類を判定せよ.

(1) $a = 9, b = 3\sqrt{2}, c = 7$

$b^2+c^2-a^2$

$= 18+49-81$

$= 67-81 < 0$

∴ Aは鈍角 //

(2) $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{6}, c = 2$

$b^2+c^2-a^2$

$= 6+4-7 > 0$

∴ Aは鋭角 //

4 正弦定理・余弦定理の活用

4.1 復習

以下のような △ABC において, 指定たものを求めよ.

(1) $a = 2\sqrt{3}, b = 7, C = 30^\circ$ のとき, c

余弦定理より.

$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 7^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 7\cdot \cos 30^\circ$

$= 12 + 49 - \cancel{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$= 61 - 42 = 19$

$\therefore c = \sqrt{19}$ ($c>0$ より).

(2) $a = \sqrt{10}, A = 135^\circ, B = 30^\circ$ のとき, b

正弦定理より.

$\frac{\sqrt{10}}{\sin 135^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ}$

$b = \sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{5}$

(3) $a = 2, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{5} - 1$ のとき, B および外接円の半径 R

余弦定理より.

$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + (\sqrt{5}-1)^2 - 2\cdot 2\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\cos B$.

$8 = 4 + 6 - 2\sqrt{5} - 4(\sqrt{5}-1)\cos B$

$2\sqrt{5} - 2 = 4(\sqrt{5}-1)\cos B$.

$\therefore \cos B = \frac{1}{2}$

i.e. $B = 60^\circ$

正弦定理より

$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = 2R$

$\cancel{2}R = \cancel{2}\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{6}}{3}$

4.2 問題

(1) △ABC において, $a = 2, b = \sqrt{3} + 1, C = 60^\circ$ のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ.

余弦定理より.

$c^2 = 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\cdot\cancel{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cancel{\cos 60^\circ}$

$= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{3}+1) = 6$

$c>0$ より $c = \sqrt{6}$

正弦定理より

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$ $\therefore \sin A = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

A の候補は, 45°, 135° であるが, C = 60° であることと, 三角形の内角の和が 180° であることから, 135° は不適

$\therefore A = 45^\circ$

$B = 180^\circ - (A + C)$

$= 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

(2) △ABC において, $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3} + 1, C = 45^\circ$ のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ.

余弦定理より.

$c^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cancel{\cos 45^\circ}$

$= 2 + 4 + 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{3}+1) = 4$.

$c>0$ より $c = 2$.

正弦定理より.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$ $\therefore \sin A = \cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cancel{\sin 45^\circ}$

$= \frac{1}{2}$

$a < c$ より $A = 30^\circ$

$A + B + C = 180^\circ$ より

$B = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

4.3　最大角の大きさ

Question. 三角形 ABC の辺が $a=3, b=6, c=7$ のとき，最大角は ∠A, ∠B, ∠C のうちどれか.

$\longrightarrow$ ∠C

つまり，最大の辺に向かい合う角が，その三角形の最大の内角.

問題

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 13 : 8 : 7$ が成立するとき，最大角の大きさを求めよ.

正弦定理より．

$a:b:c = 13:8:7$ である。

実数 $k>0$ を用いて．

$a=13k,\ b=8k,\ c=7k$ とおくと．

最大角は A である。（$\because a>b>c$）

余弦定理より．

$$(13k)^2 = (8k)^2 + (7k)^2 - 2\cdot 8k\cdot 7k\cdot\cos A$$

$$(169-64-49)\cancel{k^2} = -2\cdot 8\cancel{k}\cdot 7\cancel{k}\cdot\cos A$$

$$\cancel{56} = -2\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cos A$$

$$\cos A = -\frac{1}{2}$$

∴最大角は 120° //

練習

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ が成立するとき，最大角の大きさを求めよ.

正弦定理より．

$a:b:c = 3:5:7.$

実数 $k>0$ を用いて，

$a=3k,\ b=5k.\ c=7k$ とおくと．

最大角は C である。（$\because a<b<c$）

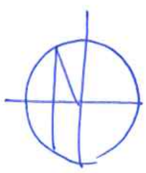
余弦定理より．

$$(7k)^2 = (3k)^2 + (5k)^2 - 2\cdot 3k\cdot 5k\cdot\cos C$$

$$(49-9-25)\cancel{k^2} = -2\cdot 3\cancel{k}\cdot 5\cancel{k}\cos C$$

$$\cancel{15} = -2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cos C$$

$$\cos C = -\frac{1}{2}$$



∴最大角は 120° //