80 円に内接している四角形 ABCD において,

$$AB = 2, BC = 3, \angle B = 120^\circ$$

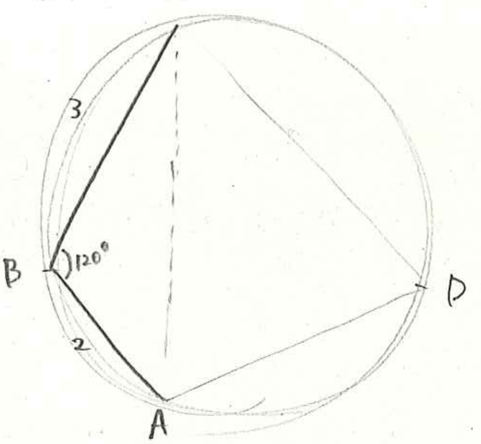
とする. 以下の問いに答えよ.

(1) AC の長さを求めよ.

(2) AD= 2のとき, 四角形 ABCD の面積を求めよ.

(3) 点 D は弧 AC のうち, 点 B のない方を動く. このとき, 四角形 ABCD の面積の最大値を求めよ.

(1)



△ABCで余弦定理より

$AC^2 = 4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\cos120^\circ$

$= 13 - 2\cdot2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 13+6 = 19$

$\therefore AC = \sqrt{19}$

(2) AD=2のとき. △ADCで余弦定理より

$19 = 4 + CD^2 - 2\cdot2\cdot CD\cdot\cos60^\circ$

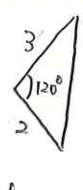
$15 = CD^2 - 2CD$

$CD^2 - 2CD - 15 = 0$

$(CD-5)(CD+3) = 0$

$CD>0$より　$CD = 5$

∴求める面積Sは

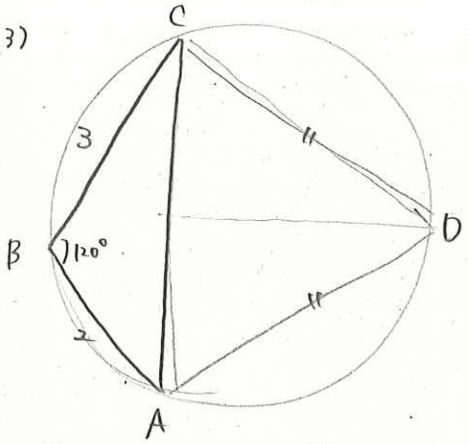
$S =$  $+$ 

$= \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin120^\circ + \frac{1}{2}\cdot1\cdot5\cdot\sin60^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot1\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{6\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{11}{4}\sqrt{3}$

(3)



四角形ABCDの面積が最大となるのは,

AD=CDとなる場合である。

(このときに,辺ACを底辺としたときの高さが最大).

∠D=60°より. このとき△ACDは正三角形である。

$\therefore S_{max} =$  $+$ 

$= \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin120^\circ + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}\cdot\sin60^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot19\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{6}{4}\sqrt{3} + \frac{19}{4}\sqrt{3}$

$= \frac{25}{4}\sqrt{3}$