14 以下の問いに答えよ. 【★★★★】

(1) x, y が $x \geqq 0, y \geqq 0, x+2y=4$ を満たすとき, x^2+4y^2 の最大値と最小値を求めよ.

$x+2y=4$ より

$x=4-2y$

$y \geqq 0$ より $4-2y \leqq 2$.

$\therefore\ x \leqq 2$.

また, $x \geqq 0$ とあわせて $0 \leqq x \leqq 2$.

$x+2y=4$ から $2y=4-x$

よって

$x^2+4y^2 = x^2+(4-x)^2$

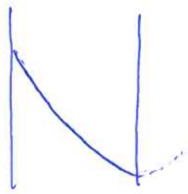
$= 2x^2-8x+16$.

$= 2(x^2-4x)+16$

$= 2(x-2)^2-8+16$

$= 2(x-2)^2+8$.

頂 $(2, 8)$.



左図より $x=0$ で Max. 16

$x=2$ で Min 8

$x=0$ のとき. $y=2$.

$x=2$ のとき $y=1$.

まとめると.

$x=0, y=2$ で Max 16

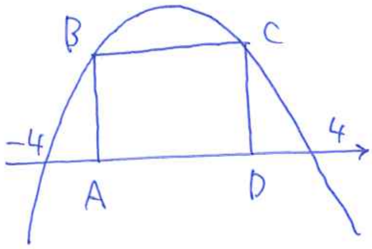
$x=2, y=1$ で Min 8

4

(2) 放物線 $y=-x^2+16$ と x 軸で囲まれる図形に内接する長方形 ABCD について, 周の長さの最大値を求めよ.

$y=-x^2+16$

$=-(x-4)(x+4)$.



D の x 座標を p とおくと. A は $-p$.

各座標は

A$(-p, 0)$. B$(-p, -p^2+16)$

C$(p, -p^2+16)$, D$(p, 0)$.

すると.

AD $=2p$

AB $=-p^2+16$.

$\therefore$ 周の長さは

$2\cdot(-p^2+16)+2\cdot 2p$

$=-2p^2+4p+32$

$=-2(p-1)^2+2+32$

$=-2(p-1)^2+34$.

よって $p=1$ で 周の長さは最大値 34

4