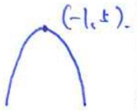
11 以下の問いに答えよ．【★★】

(1) $x=-1$ のとき最大値 5 をとり，グラフが点 $(-2,4)$ を通るような 2 次関数を求めよ．

$x=-1$ の時 Max 5 なので、



右図のように 上に凸で、頂点 $(-1,5)$

方程式を

$$y=a(x+1)^2+5.$$

点 $(-2,4)$ を通るので

$$4=a(-2+1)^2+5$$

$$a=-1.$$

∴ 求める2次関数は

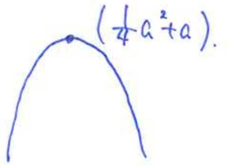
$$y=-(x+1)^2+5$$

(2) 2 次関数 $y=-x^2+ax+a$ の最大値が 3 となるように，定数 a の値を定めよ．

$$y=-x^2+ax+a$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{1}{4}a^2+a.$$

頂 $\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{4}a^2+a\right)$.



左図より Maxが3より

$$\frac{1}{4}a^2+a=3$$

$$a^2+4a-12=0$$

$$(a+6)(a-2)=0$$

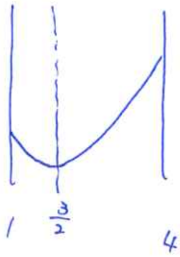
$$a=2,\ -6$$

(3) 2 次関数 $y=x^2-3x+c\ \ (1\leqq x\leqq 4)$ の最大値が 5 であるように，定数 c の値を定めよ．また，そのときの最小値を求めよ．

$$y=x^2-3x+c$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+c.$$

頂 $\left(\frac{3}{2},\ c-\frac{9}{4}\right)$.



左図より $x=4$ で最大値.

$$4^2-3\cdot4+c$$

$$=4+c.$$

この値が5になるので

$$4+c=5 \qquad c=1.$$

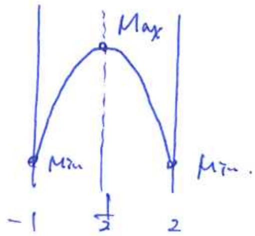
また、このとき最小値は $c-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}$

(4) 2 次関数 $f(x)=ax^2-ax+b\ \ (a<0)$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値が 3，最小値が -22 であるとき，定数 a,b の値を求めよ．

上に凸.

$$f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a+b.$$

頂 $\left(\frac{1}{2},\ b-\frac{1}{4}a\right)$



左図より

$x=\frac{1}{2}$ で Max $b-\frac{1}{4}a$.

$x=-1,\ 2$ で Min $2a+b$.

条件より

$$\begin{cases} b-\frac{1}{4}a=3. \\ 2a+b=-22 \end{cases}$$

連立して解くと

$$a=-\frac{100}{9} \qquad b=\frac{2}{9}$$