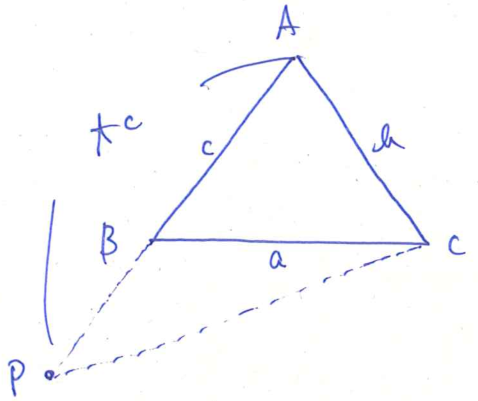
43 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=$BC, $b=$CA, $c=$AB とする．実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に AP$=tc$ となるように点 P をとる．以下の問いに答えよ．

(1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ．

(2) 点 P が CP$=a$ を満たすとき，t を求めよ．

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，∠A と ∠B に関する条件を求めよ．



(1) △ABCにて余弦定理．

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{—①}$$

△APCにて余弦定理．

$$CP^2 = b^2 + (tc)^2 - 2\cdot b\cdot tc\cdot \cos A$$

①を代入．

$$CP^2 = b^2 + t^2c^2 - \cancel{2bc}t \frac{b^2+c^2-a^2}{\cancel{2bc}}$$

$$= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2)$$

$$= c^2t^2 - (b^2+c^2-a^2)t + b^2$$

(2) CP$=a$のとき．

(1)で求めた式から，

$$a^2 = c^2t^2 - (b^2+c^2-a^2)t + b^2$$

$$c^2t^2 - (b^2+c^2-a^2)t + (b^2-a^2) = 0$$

$$(c^2t - (b^2-a^2))(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}$$

ここで，$t>0$なので，

$$\begin{cases} b>a\text{のとき} & t=1,\ \dfrac{b^2-a^2}{c^2} \\ b\leqq a\text{のとき} & t=1 \end{cases}$$

(3). 点Pが辺AB上にちょうど2つあることから，

$$0 \leqq \frac{b^2-a^2}{c^2} < 1 \quad \text{である。}$$

$c^2>0$より

$$0 \leqq b^2-a^2 < c^2$$

i) $0 \leqq b^2-a^2$ より

$$0 \leqq (b-a)(b+a)$$

$$0 \leqq b-a \qquad (\because\ b+a>0)$$

$\therefore\ a \leqq b$ よって $\angle A \leqq \angle B$.

ii) $b^2-a^2 < c^2$ より

$$b^2 < a^2+c^2$$

$\therefore$ ∠Bは鋭角．

i, ii より．

$$0 < \angle A \leqq \angle B < \frac{\pi}{2}$$

計算を1つ1つ丁寧に行っていけばeasyである。
(2)では，解の公式でもいいが，$t=1$を代入したら等号成立することから，$(t-1)$が1つの因数であることに気づきたい。