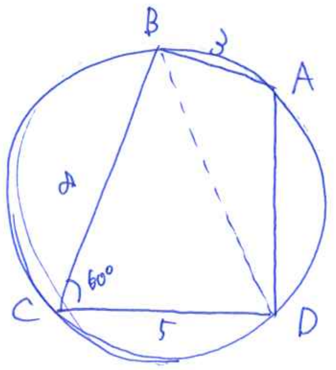
23 以下の問いに答えよ．【★★★】

(1) 円に内接する四角形 ABCD において，AB= 3, BC= 8, CD= 5, ∠BCD= 60° のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ．



四角形ABCDは円に内接するので

$\angle BAD = 120°$.

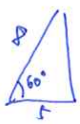
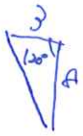
△BCDにおいて、余弦定理.

$$BD^2 = 64 + 25 - 2\cdot5\cdot8\cdot\cos 60°$$
$$= 49$$
$$BD = 7.$$

△ABDにおいて余弦定理.

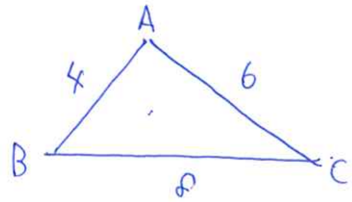
$$49 = 9 + AD^2 - 2\cdot3\cdot AD\cdot\cos 120°$$
$$AD^2 - 3AD - 40 = 0$$
$$(AD+5)(AD-8) = 0$$

$AD>0$ より $AD=8$.

∴ $S =$  $+$ 

$$= \frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin 60° + \frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\sin 120°$$
$$= 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = \underline{16\sqrt{3}}$$

(2) △ABC において，AB= 4, BC= 8, CA= 6 のとき，内接円の半径 r を求めよ．



$$S = \frac{1}{2}r(4+6+8)$$

$S = \frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\sin A$ と書ける.

$\sin A$ を求める.

まず、余弦定理から.

$$64 = 36 + 16 - 2\cdot4\cdot6\cdot\cos A$$
$$\cos A = \frac{-1}{4}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$= 3\sqrt{15}.$$

$$\therefore \frac{1}{2}r(4+6+8) = 3\sqrt{15}$$
$$9r = 3\sqrt{15}$$
$$\underline{r = \frac{\sqrt{15}}{3}}$$