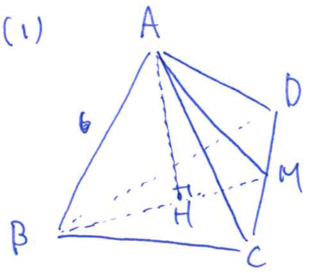
$\boxed{29}$ 1 辺の長さが 6 である正四面体 ABCD について, 以下の問いに答えよ.

(1) 正四面体 ABCD の体積 V を求めよ.

(2) 正四面体に内接する球について, 半径を求めよ.

(3) 内接球の体積を求めよ.

(1)

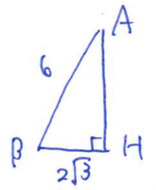


CDの中点をMとする。
ΔAMCは $1:2:\sqrt{3}$ の
直角三角形なので、
AC=6より
$AM = 3\sqrt{3}$.
同様に $BM = 3\sqrt{3}$.

点Aから ΔBCDへ垂線を下ろし、交点をHとすると、
点Hは ΔBCDの外心である
∴ BHはこの外接円の半径Rである
正弦定理から、

$$2R = \frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$R = \frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$



左図で三平方の定理.

$AH = 2\sqrt{6}$

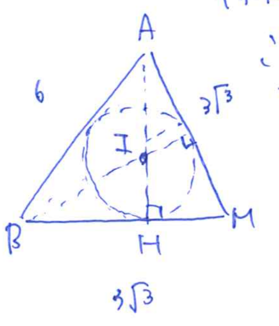
よって 体積 $V = \frac{1}{3} \times$ ΔBCDの面積 $\times AH$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot \sin 60^\circ \times 2\sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{6}\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\sqrt{6}$$

$$= 18\sqrt{2}$$

(2) 正四面体の対称性から、内接球の中心は
明らかに ΔAMD上にある
また、各面との接点は、対称性から、
中線上にあることも明らか.



∴ 内接球の半径rは、
左図のように、ΔABMの内接円の
半径を求めれば、それと一致する。

ΔAMBの面積をSとおくと

・$S = \frac{1}{2}r(6+3\sqrt{3}+3\sqrt{3})$

$= (3+3\sqrt{3})r$

・$S = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM\cdot \sin\angle AMB.$

ここで ΔAMBで余弦定理.

$36 = 27+27-3\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\cos\angle AMB.$

$-18 = -27\cdot 3\cos\angle AMB$

$\cos\angle AMB = \frac{2}{9}$

$\sin^2\angle AMB + \cos^2\angle AMB = 1$ より

$\sin\angle AMB = \frac{\sqrt{77}}{9}$

$\therefore S = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\sqrt{3}\cdot\cancel{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{77}}{\cancel{9}}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{77}.$

比較して

$\cancel{3}(1+\sqrt{3})r = \frac{\cancel{3}}{2}\sqrt{77}$

$r = \frac{\sqrt{77}}{2\sqrt{3}+1}$

$= \frac{\sqrt{77}}{2\sqrt{3}+1}\times\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1}$

$= \frac{\sqrt{77}(2\sqrt{3}-1)}{11}$