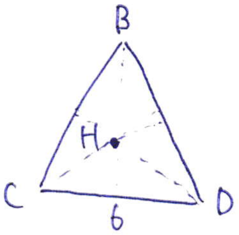
29 1辺の長さが6である正四面体ABCDについて, 以下の問いに答えよ.

(1) 正四面体ABCDの体積 V を求めよ.

(2) 正四面体に内接する球について, 半径を求めよ.

(3) 内接球の体積を求めよ.

(1)



正四面体の頂点Aから、面BCDへ垂線を下ろす。面との交点をHとする。このとき、点Hは△BCDの外心である。

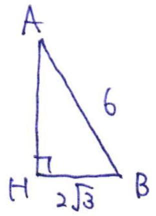
i.e. CH＝DH＝BH は、外接円の半径である。

△BCDで正弦定理より、BH＝Rとすると

$$2R = \frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$2R = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$R = 2\sqrt{3}.$$



左図で三平方の定理.

$$36 = AH^2 + 12.$$

AH>0より

$$AH = 2\sqrt{6}.$$

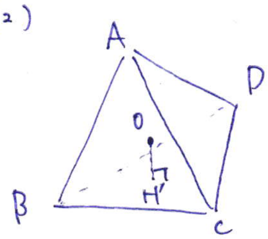
さて、$V = \frac{1}{3}\cdot \triangle BCD \times AH$ より

$$V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot \sin 60^\circ\right) \times 2\sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{6}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{6}$$

$$= 18\sqrt{2}$$

(2)



正四面体に内接する球の中心をOとする。

対称性から、4つの四面体 OABC, OBCD, OACD, OABD は合同である。—(※)

上図のように、Oから面BCDへの垂線を下ろし、交点をH'とする。

$$(\text{四面体}OBCD) = \frac{1}{3}\cdot\triangle BCD\cdot OH'$$

ここで、(※)の事実から、四面体OBCDの体積は、(1)で求めた V の $\frac{1}{4}$ 倍.

また、

$$(\triangle BCD) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot \sin 60^\circ$$

$$= 9\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot \cancel{18}^{\cancel{9}\,3}\sqrt{2} = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{9}^{\cancel{3}}\sqrt{3}\cdot OH'$$

$$6\sqrt{2} = \sqrt{3}\ OH'$$

$$\underline{OH' = 2\sqrt{6}}$$

(3)

内接球の体積 V' は

$$V' = \frac{4}{3}\pi\ OH'^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\cdot(2\sqrt{6})^3$$

$$= \frac{4}{\cancel{3}}\cdot\pi\cdot 8\cdot\cancel{6}^{2}\cdot\sqrt{6}$$

$$= 64\sqrt{6}\pi$$

(2)の考え方を知っておいて欲しい。

(3)は中学の知識!!

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

数Ⅱで証明します。