

1 二次方程式とグラフの関係性

検討

二次関数 $y = x^2 + 3x - 4$ について, いろいろ調べてみよう.

まとめ

$$y = ax^2 + bx + c \text{ について}$$

$D = b^2 - 4ac$			
$a > 0$ で グラフの形			
$a < 0$ で グラフの形			
x 軸との 位置関係			
x 軸との 共有点の個数			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解			

練習 1

以下の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(2) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(3) $x^2 + x - 3 = 0$

練習 2

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ.

(1) $y = x^2 + 4x - 5$

(2) $y = -2x^2 + 3x - 1$

(3) $y = 3x^2 - 4x + 5$

練習 3

以下の問いに答えよ.

- (1) 2 次方程式 $x^2 + 2x + m = 0$ が, 異なる 2 つの実数解を持つとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.

- (2) m を定数とする. 2 次方程式 $x^2 + mx + 1 = 0$ が重解を持つように, 定数 m の値を求めよ. また, その重解を求めよ.

練習 4

以下の問いに答えよ.

- (1) 2 次関数 $y = x^2 + 4x + m$ のグラフと x 軸の共有点の個数は, 定数 m の値によってどのように変わるか.

- (2) m を定数とする. 2 次関数 $y = x^2 + 2x + m$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ.

1.1 定数分離

例題

2 次関数 $y = x^2 + 4x + 3 - k$ が x 軸と共有点を持たないように、定数 k の値の範囲を求めよ.

定数分離

練習

(1) 方程式 $y = x^2 + 4x + 3 - k$ と x 軸の共有点の個数を求めよ.

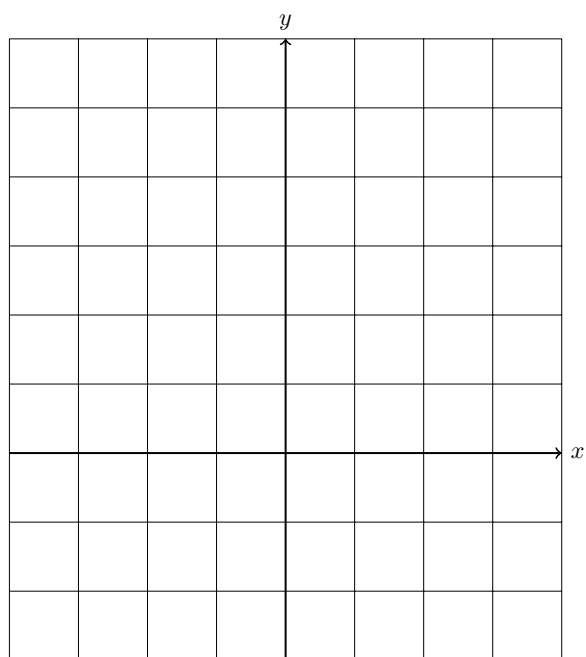
(2) 方程式 $y = -x^2 + 2x + 1 - 2k$ と x 軸の共有点の個数を求めよ.

1.2 連立方程式って

復習

(1) 連立方程式 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ を解け.

(2) 2つのグラフを描き, 共有点の座標を求めてみよう.



練習

(1) 放物線 $y = x^2 + 5x + 5$ と, 直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ.

(2) 放物線 $y = 2x^2 + 3$ と, 直線 $y = -3x + 5$ の共有点の座標を求めよ.

(3) 放物線 $y = x^2 + 3x + 3$ と, 直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ.

練習

- (1) 放物線 $y = x^2 + 3x + 1$ と、直線 $y = x + k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。
- (2) 放物線 $y = -x^2 + 2$ と、直線 $y = x - k$ が共有点を持たないように、定数 k の値の範囲を求めよ。

2 二次関数の最大・最小

2.1 基本

復習

二次関数 $y = x^2 - 2x + 2$ について,

(1) 軸と頂点を求めよ.

(2) 最大値・最小値を求めよ.

(3) $(0 \leq x \leq 4)$ での最大値・最小値を求めよ.

練習

以下の二次関数の最大値・最小値を求めよ.

(1) $y = x^2 - 4x + 2 \quad (0 \leq x \leq 4)$

(2) $y = 2x^2 + 12x - 5 \quad (-4 \leq x \leq 2)$

(3) $y = -x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leq x \leq 3)$

2.2 縦に動く

例

2 次関数 $y = x^2 + 2x + c$ ($-2 \leq x \leq 2$) について,

(1) 最大値が 3 になるように定数 c の値を定めよ.

(2) c の値が (1) で求めた値であるとき, 与えられた 2 次関数の最小値を求めよ.

練習

以下の条件を満たすように定数 c の値を求めよ. また, そのときの最大値・最小値のもう一方を求めよ.

(1) $y = x^2 - 2x + c$ ($-2 \leq x \leq 2$) について, 最大値が 5

(2) $y = 2x^2 + 4x + c$ ($-2 \leq x \leq 0$) について, 最小値が 1

2.3 定義域が動く

例

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習 1

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 2x \quad (0 \leq x \leq a)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習 2

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = 2x^2 + 8x - 5 \quad (0 \leq x \leq a)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

2.4 定義域が動く (ver. 2)

例

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (a \leq x \leq a + 2)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 6x + 5 \quad (a \leq x \leq a + 2)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

2.5 軸が動く

例

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習

a を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 + 3 \quad (1 \leq x \leq 3)$$

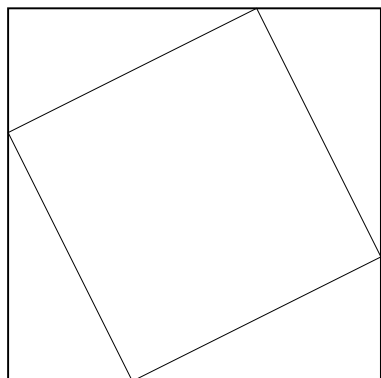
(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

2.6 活用

例題

1 辺が 4(cm) である正方形に内接する正方形について考える.



(1) 最小値を予想しよう.

(2) 内接正方形の面積を $y(\text{cm}^2)$, AP の長さを $x(\text{cm})$ とする. y を x の式で表せ.

(3) 最小値を求めよ.

練習問題

対角線の長さの和が 8 である菱形について、以下の問いに答えよ。
(「予想 → 解く」の癖をつける。)

(1) 面積の最大値を求めよ。

(2) 周の長さの最小値を求めよ。

3 二次不等式とグラフの関係性

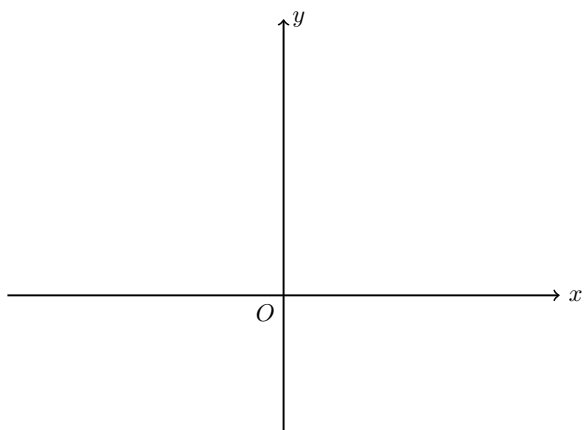
3.1 基本

復習
不等式

$$x + 2 > 0$$

を解く.

不等式を絵で見る



$x + 2 > 0$ を解くとは...

確認

不等式 $2x - 1 < 0$ についてグラフを描き, 解け.

練習問題 1

$y = x^2 + 3x + 2$ について,

(1) グラフを描け.

(2) $x^2 + 3x + 2 < 0$ を解け.

(3) $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ を解け.

練習問題 2

$y = x^2 - 2x - 8$ について,

(1) グラフを描け.

(2) $x^2 - 2x - 8 > 0$ を解け.

(3) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ を解け.

3.2 連立不等式

復習

以下の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

連立不等式とは,

練習問題

以下の連立不等式を解け.

$$(1) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

3.3 活用 1

練習問題 1

- (1) 2 次方程式 $x^2 + mx + 1 = 0$ が実数解を持つように, 定数 m の値の範囲を求めよ.

- (2) 2 次方程式 $x^2 + 2mx + 3 = 0$ が実数解を持たないように, 定数 m の値の範囲を求めよ.

練習問題 2

- (1) 2 次不等式 $x^2 + 2mx + m + 2 > 0$ の解が全ての実数であるとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.

- (2) 2 次不等式 $x^2 - mx - m \geq 0$ の解が全ての実数であるとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.

3.4 判・軸・値

例題

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。

練習問題 1

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 2m + 3$ のグラフと x 軸の正の部分異なる 2 点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。

練習問題 2

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$ のグラフと x 軸の負の部分異なる 2 点で交わるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

3.5 文章題

練習問題 1

長さが 20m のロープを張って、長方形の囲いを作る。囲いの中の面積を 16m^2 以上にするための、囲いの縦の長さの範囲を求めたい。ただし、縦とは長方形の短い方の 1 辺とする。

- (1) 縦の長さを x とおく。長方形ができるための x の範囲を求めよ。

- (2) 面積を x の式で表せ。

- (3) 面積を 16m^2 以上にするための、囲いの縦の長さの範囲を求めよ。

練習問題 2

横の長さが (縦の長さ + 2) cm で与えられる長方形の画用紙がある。この画用紙の四隅から、1 辺の長さが 1cm の正方形を切り取り、蓋のない直方体の箱を作る。

- (1) 箱の体積を x を用いて表せ。

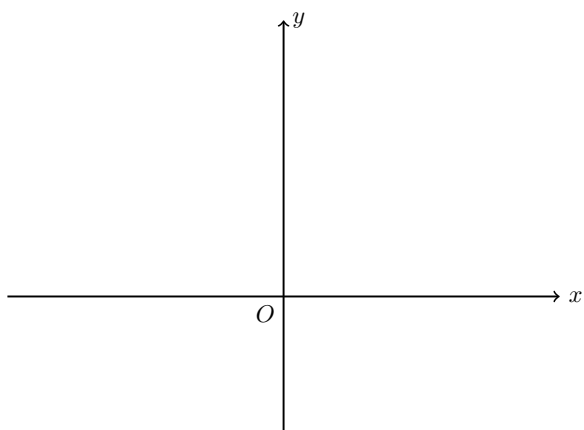
- (2) 箱の体積を 3cm^3 以上 15cm^3 以下にするためには、縦の長さをどのような範囲に取れば良いか求めよ。

4 絶対値の方程式・不等式

復習 ～ 学び 1

(1) $|x + 1| = 2$ を解け.

(2) $y = |x + 1|$ のグラフを描いてみよう.

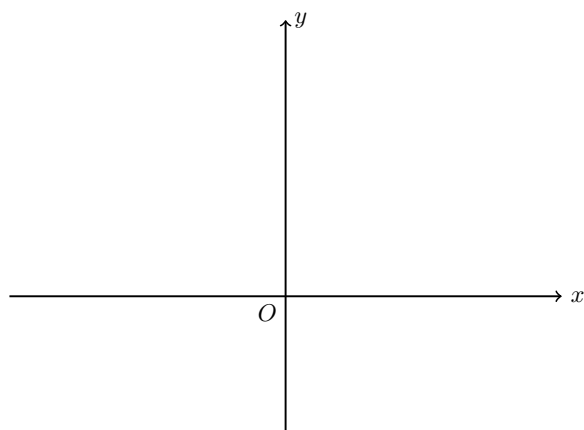


(3) グラフをもとに, $|x + 1| > 2$ を解け.

復習 ～ 学び 2

(1) $|2x - 3| = 1$ を解け.

(2) $y = |2x - 3|$ のグラフを描いてみよう.

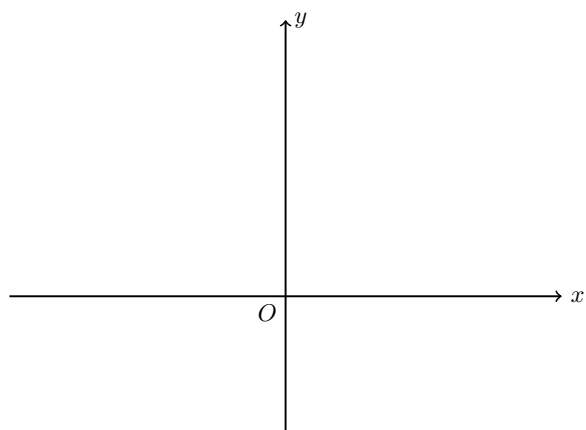


(3) グラフをもとに, $|2x - 3| \geq 1$ を解け.

考える 1

(1) $|x^2 - 3x + 2| = 2$ を解け.

(2) $y = |x^2 - 3x + 2|$ のグラフを描いてみよう.



(3) グラフをもとに, $|x^2 - 3x + 2| \leq 2$ を解け.

問題

$|x^2 - x| > x$ を解け.