

107 【指数関数】

$y = 9^x + 9^{-x} - 3^{1+x} - 3^{1-x} + 1$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

$$= 9^x + 9^{-x} - 3 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{-x} + 1$$

$$= 9^x + 9^{-x} - 3(3^x + 3^{-x}) + 1$$

$$t = 3^x + 3^{-x} とおく。$$

$3^x > 0, 3^{-x} > 0$ より、相加相乗関係より、

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 1$$

$$\therefore 3^x + 3^{-x} \geq 2. \quad (\text{等号成立は } x=0)$$

$$t \geq 2.$$

したがって、

$$\begin{aligned} t^2 &= (3^x + 3^{-x})^2 \\ &= 9^x + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 9^{-x} \end{aligned}$$

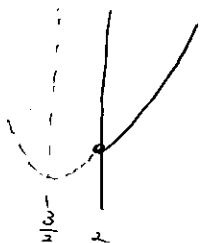
$$\therefore 9^x + 9^{-x} = t^2 - 2.$$

$$\therefore y = (t^2 - 2) - 3t + 1.$$

$$= t^2 - 3t - 1 \quad (t \geq 2).$$

$$= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$$\text{軸 } t = \frac{3}{2}$$



$$\text{図より } t=2 \text{ のとき } \text{Min. } -3.$$

$$t=2 \text{ より}$$

$$3^x + 3^{-x} = 2.$$

$$x=0.$$

$$\text{よって } x=0 \text{ のとき } \text{Min. } -3$$