40 xy 平面において, $kx^2+ky^2+x-y-4k+1=0$ $(k>0)$ で表される円 C がある. 以下の問いに答えよ. (鳥取大)

(1) k の値によらず円 C はある 2 点 A, B を通る. その 2 点を求めよ.

(2) 円 C の中心 D と点 E(1, 5) を結ぶ線分 DE の長さが最小になるときの k の値と, そのときの円 C の半径 r を求めよ.

(1)

$kx^2+ky^2+x-y-4k+1=0$

$k(x^2+y^2-4)+(x-y+1)=0$

この式は,

円 $x^2+y^2-4=0$ と直線 $x-y+1=0$ の共有点を通る図形のうち, 円 $x^2+y^2-4=0$ を除くものを表す.

よって, k の値によらず円と直線の共有点を通るので

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

共有点の x 座標は

$x^2+(x+1)^2=4$

$2x^2+2x-3=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{4}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$$

$x=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ のとき $y=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}+1$

$=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$

$x=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ のとき $y=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

∴ 2 点の座標は

$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ //

(2)

$k\neq0$ より

$x^2+y^2+\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}y-4+\frac{1}{k}$

$\left(x+\frac{1}{2k}\right)^2-\frac{1}{4k^2}+\left(y-\frac{1}{2k}\right)^2-\frac{1}{4k^2}-4+\frac{1}{k}=0$

$\left(x+\frac{1}{2k}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2k}\right)^2-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{k}-4=0$

中心 $D\left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$

半径 $r=\sqrt{\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{k}+4}$

DE の長さ l は

$l^2=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2+\left(5-\frac{1}{2k}\right)^2$

$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{4k^2}+25-5\cdot\frac{1}{k}+\frac{1}{4k^2}$

$=\frac{1}{2k^2}-4\cdot\frac{1}{k}+26$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}-8\cdot\frac{1}{k}\right)+26$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-4\right)^2+18$

l は $\frac{1}{k}=4$ i.e. $k=\frac{1}{4}$ のときに最小値 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

このとき

$r=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot4^2-4+4}$

$=2\sqrt{2}$.

まとめると,

$k=\frac{1}{4}$ で DE は最小値 $3\sqrt{2}$ で,

そのときの半径 $r=2\sqrt{2}$ //