

5 演習問題

5.1 集合記法

(1) \mathbb{N}, \mathbb{R} はそれぞれ自然数全体の集合, 実数全体の集合とする.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{x | 0 < x < 6, x \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{x | 1 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{R}\}$$

のとき, 以下の に当てはまる記号を書け.

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(a) A B

$$A = B$$

(b) A C

$$A \subset C$$

(c) 3 A

$$3 \in A$$

(d) 1.3 B

$$1.3 \notin B$$

(e) C $\sqrt{2}$

$$C \ni \sqrt{2}$$

(2) 以下の集合を, 別の記法で書き表せ. ただし, \mathbb{Z} は整数全体の集合とする.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) $B = \{x \mid -3 < x < 5, x \in \mathbb{Z}\}$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

(c) $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$$C = \{2x \mid 1 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{Z}\}.$$

(d) $D = \{x \mid x \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\}$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

(3) 以下の集合の部分集合を全て求めよ.

(a) $A = \{a, b\}$

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}.$$

(b) $B = \{a, b, c\}$

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\},$$

$$\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\},$$

$$\{a, b, c\}.$$

(c) $C = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$$

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$$

$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\},$$

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

5.2 共通部分・和集合・補集合

$U = \{x | 1 \leq x \leq 15, x \in \mathbb{N}\}$ を全体集合とし, その部分集合を

$$A = \{x | x \text{ は奇数} \}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 13, 15\}$$

$$B = \{x | x \text{ は } 3 \text{ の倍数} \}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

$$C = \{x | x \text{ は } 5 \text{ の倍数} \}$$

$$C = \{5, 10, 15\}$$

とする. 以下の部分集合を求めよ.

(1) $A \cap B$

$$A \cap B = \{3, 9, 15\}$$

(2) $A \cup B$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15\}$$

(3) $C \cap B$

$$C \cap B = \{15\}$$

(4) \bar{A}

$$\bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

(5) $\overline{\bar{B}}$

$$\begin{aligned} \overline{\bar{B}} &= B \\ &= \{3, 6, 9, 12, 15\} \end{aligned}$$

(6) $\bar{A} \cap C$

$$\bar{A} \cap C = \{10\}$$

$$\bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

$$\bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$$

(7) $\bar{A} \cup \bar{B}$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

(8) $\bar{A} \cap \bar{B}$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$$

(9) $\overline{A \cap C}$

$$A \cap C = \{5, 15\} \text{ ではない}$$

$$\overline{A \cap C} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

(10) $\overline{A \cup C}$

$$A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15\} \text{ ではない}$$

$$\overline{A \cup C} = \{2, 4, 6, 8, 12, 14\}$$

(11) $A \cap B \cap C$

$$A \cap B \cap C = \{15\}$$

(12) $\overline{A \cup (B \cap C)}$

$$B \cap C = \{15\}$$

$$\bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

$$\therefore \bar{A} \cup (B \cap C) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$$

$$\therefore \overline{\bar{A} \cup (B \cap C)} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

5.3 命題

以下の文が命題であるか否かを判断せよ。また、命題である場合は真偽を判定し、偽の場合はその理由を説明せよ。

- (1) 福井県は石川県よりも面積が広い。

真

- (2) 日本の人口は多い。

命題ではない。

- (3) 4は素数である。

偽

- (4) 100は大きい数である。

命題ではない。

- (5) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$x < 10 \implies x < 2$$

偽

$$\text{反例: } x = 9$$

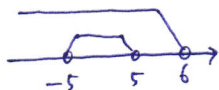
- (6) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$x \geq 10 \implies x \geq 2$$

真

- (7) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$|x| < 5 \implies x < 6$$



真

- (8) $x \in \mathbb{Z}$ (整数全体の集合) とする。

$$x \text{ が偶数} \implies x^2 \text{ が奇数}$$

偽

$$\text{反例 } x = 4 \text{ とき } x^2 = 16$$

- (9) $x \in \mathbb{Z}$ (整数全体の集合) とする。

$$x \text{ が } 3 \text{ の倍数} \implies x^2 \text{ が奇数}$$

偽

$$\text{反例 } x = 6 \text{ とき } x^2 = 36$$

- (10) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$x^2 \text{ が } 3 \text{ の倍数} \implies x \text{ が奇数}$$

偽

反例.

$$x^2 = 36 \text{ とき } x = \pm 6$$

5.4 必要条件・十分条件

☐ に当てはまるものを以下から選べ.

- (a) 必要条件であるが十分条件ではない
- (b) 十分条件であるが必要条件ではない
- (c) 必要条件でも十分条件でもない
- (d) 必要十分条件である

(1) 「 x が整数」であることは「 x が自然数」であるための ☐

\Rightarrow 偽

\Leftarrow 真

(c)

a.

(2) 「 x が 6 の倍数」であることは「 x が 3 の倍数」であるための ☐

\Rightarrow 真 (+)

\Leftarrow 偽

b.

(3) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする.

「 $x < 10$ 」であることは「 $|x| < 10$ 」であるための ☐

\Rightarrow 偽

\Leftarrow 真

(c)

a.

(4) $x \in \mathbb{N}$ (自然数全体の集合) とする.

「 $x < 10$ 」であることは「 $|x| < 10$ 」であるための ☐

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

\Rightarrow 真
 \Leftarrow 真

d.

5.5 同値

x, y, z は実数とする. 以下の中で, $x = y$ と同値な条件を全て選べ.

- (a) $x + z = y + z$ 真
- (b) $3x = 3y$ 真
- (c) $xz = yz$ 偽
- (d) $x^2 = y^2$ 偽
- (e) $x - y = 0$ 真
- (f) $(x - y)^2 = 0$ 真

a, b, e, f

(c) 12777

「 $xz = yz \Rightarrow x = y$ 」は偽.

反例 | $z = 0, x = 1, y = 2$.

(d) 12777

「 $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ 」は偽.

反例 | $x = 1, y = -1$.

5.6 否定

以下の条件を否定した条件をかけ。ただし、 $x \in \mathbb{R}, n, y \in \mathbb{N}$ とする。

- (1) n は 3 の倍数である。

n は 3 の倍数でない

- (2) n は 3 の倍数かつ偶数である。

n は 3 の倍数でない または 奇数

	3の倍数	でない
偶	もつ	///
奇	///	///

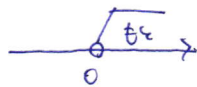
- (3) x, y はともに有理数である。

x, y の少なくとも一つは無理数

	有	無
有	もつ	///
無	///	///

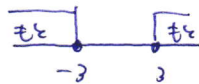
- (4) $x > 0$

$x \leq 0$



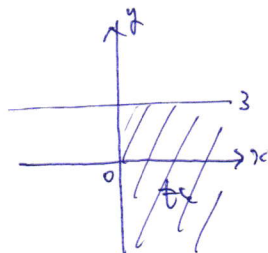
- (5) $|x| \geq 3$

$-3 < x < 3$



- (6) $x > 0$ かつ $y \leq 3$

$x \leq 0$ または $y > 3$



5.7 逆・裏・対偶

$x \in \mathbb{R}$ (実数全体) とする。

以下の命題の逆・裏・対偶を述べ、それらの真偽を求めよ。

- (1) $x > 0 \Rightarrow x > 5$ 偽 ② $x = 1$

逆 $x > 5 \Rightarrow x > 0$ 真

裏 $x \leq 0 \Rightarrow x \leq 5$ 真

対偶 $x \leq 5 \Rightarrow x \leq 0$ 偽 ③ $x = 4$

- (2) $x < 4 \Rightarrow x^2 < 4$ 偽 ① $x = -10$

逆 $x^2 < 4 \Rightarrow x < 4$ 真

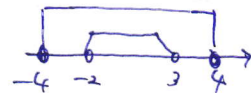
裏 $x \geq 4 \Rightarrow x^2 \geq 4$ 真

対偶 $x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 4$ 偽 ② $x = -4$

- (3) $x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow |x| \leq 4$ 真

$$(x-3)(x+2) < 0$$

$-2 < x < 3 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$ 真



逆 $|x| \leq 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0$ 偽 ③ $x = 4$

裏 $x^2 - x - 6 \geq 0 \Rightarrow |x| > 4$ 偽 ④ $x = 4$

対偶 $|x| > 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$ 真