38 a, b, c, d は実数とする．以下の不等式を示せ． (富山県大)

(1) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

(2) $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

(3) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geqq \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2$

(1).
〈証明〉.

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$= \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$
$$= \frac{2(a^2+b^2)-(a^2+2ab+b^2)}{4}$$
$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$
$$= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geqq 0$$

よって、$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ が成立

(2)〈証明〉.

$$2\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$$
$$= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$$
$$= a^2-2ab+b^2 + b^2-2bc+c^2 + c^2-2ca+a^2$$
$$= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

ここで、
$(a-b)^2 \geqq 0$, $(b-c)^2 \geqq 0$, $(c-a)^2 \geqq 0$
より、
$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) \geqq 0$

∴ $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ が成立

(3).
〈証明〉.

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+ca+ad+bd+cd)}{16}$$
$$= \frac{3a^2+3b^2+3c^2+3d^2-2(ab+bc+ca+ad+bd+cd)}{16}$$
$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{16}+\frac{b^2-2bc+c^2}{16}+\frac{c^2-2ca+a^2}{16} + \frac{a^2-2ad+d^2}{16}+\frac{b^2-2bd+d^2}{16}+\frac{c^2-2cd+d^2}{16}$$
$$= \left(\frac{a-b}{4}\right)^2+\left(\frac{b-c}{4}\right)^2+\left(\frac{c-a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-d}{4}\right)^2+\left(\frac{b-d}{4}\right)^2+\left(\frac{c-d}{4}\right)^2$$

各項は実数の2乗なので、すべて0以上.

∴ $\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geqq 0$

よって $\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geqq \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2$