

5 恒等式

定義

以下のように、文字を含む等式においてその両辺の値が存在する限り、文字にどのような値を代入しても成立する等式を恒等式という。

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

以下のような式は恒等式ではない。

$$(x+1)(x+2) = 0, \quad x(x+1) = x+1$$

例題

恒等式になるように、右辺を与えよ。

$$(1) \quad x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$$

$$(2) \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$(3) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$(4) \quad \frac{2}{x(x+2)} = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

5.1 練習

以下の等式が x についての恒等式になるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

$$(1) \quad x^2 - 1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c \\ &= ax^2 + (2a+b)x + a+b+c \end{aligned}$$

恒等式になる、係数を比較し。

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = -1 \end{cases}$$

$$\therefore a = 1, b = -2, c = 0$$

$$(2) \quad \frac{x+4}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{a(x+2) + bx}{x(x+2)} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a}{x(x+2)} \end{aligned}$$

恒等式になる、係数を比較し。

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = -1$$