16 円に内接する四角形 ABCD において，

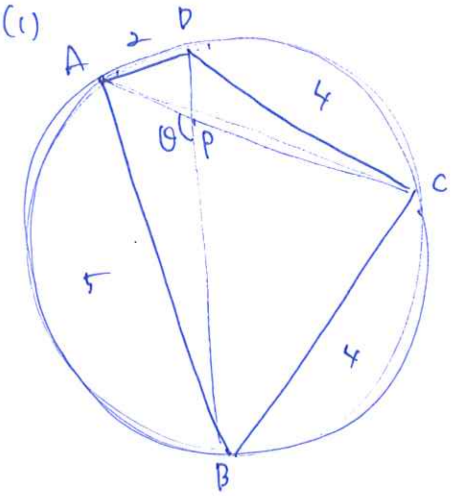
$$\mathrm{AB}=5, \mathrm{BC}=4, \mathrm{CD}=4, \mathrm{DA}=2$$

とする．また，対角線 AC と BD の交点を P とおく．

(1) 三角形 APB の外接円の半径を R_1，三角形 APD の外接円の半径を R_2 とするとき，$\dfrac{R_1}{R_2}$ の値を求めよ． （千葉大）

(2) AC の長さを求めよ．

(1)



上図のように，$\angle \mathrm{APB}=\theta$ とおく．

正弦定理より，$\triangle \mathrm{APB}$ において

$$2R_1=\frac{5}{\sin\theta}$$

$\angle \mathrm{APD}=180^\circ-\theta$．

$$\therefore \sin\angle \mathrm{APD}=\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$\therefore \triangle \mathrm{APD}$ において正弦定理で

$$2R_2=\frac{2}{\sin\angle \mathrm{APD}}=\frac{2}{\sin\theta}$$

$$\therefore \frac{\cancel{2}R_1}{\cancel{2}R_2}=\frac{\frac{5}{\sin\theta}}{\frac{2}{\sin\theta}}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2}=\frac{5}{2}$$

(2) $\triangle \mathrm{ABC}$ において余弦定理．

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC}\cdot\cos\angle \mathrm{ABC}$$
$$=25+16-2\cdot5\cdot4\cdot\cos\angle \mathrm{ABC}$$
$$=41-2\cdot5\cdot4\cos\angle \mathrm{ABC} \quad \text{—①}$$

$\triangle \mathrm{ADC}$ において余弦定理．

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2-2\cdot \mathrm{AD}\cdot \mathrm{DC}\cdot\cos\angle \mathrm{ADC}$$
$$=4+16-2\cdot2\cdot4\cdot\cos\angle \mathrm{ADC}$$
$$=20-2\cdot2\cdot4\cos\angle \mathrm{ADC} \quad \text{—②}$$

よって，四角形 ABCD は円に内接するので，

$$\angle B+\angle D=180^\circ$$

$$\therefore \cos\angle \mathrm{ADC}=\cos(180^\circ-\angle \mathrm{ABC})=-\cos\angle \mathrm{ABC}$$

$\therefore$ ②から，

$$\mathrm{AC}^2=20+2\cdot2\cdot4\cdot\cos\angle \mathrm{ABC}$$
$$\mathrm{AC}^2-20=2\cdot2\cdot4\cdot\cos\angle \mathrm{ABC}$$
$$\cos\angle \mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AC}^2-20}{2\cdot2\cdot4}$$

①に代入．

$$\mathrm{AC}^2=41-\cancel{2}\cdot5\cdot\cancel{4}\,\frac{\mathrm{AC}^2-20}{\cancel{2}\cdot2\cdot\cancel{4}}$$
$$\mathrm{AC}^2=41-5\cdot\frac{\mathrm{AC}^2-20}{2}$$
$$2\mathrm{AC}^2=82-5(\mathrm{AC}^2-20)$$
$$7\mathrm{AC}^2=82+100=182$$
$$\mathrm{AC}^2=26$$

$\mathrm{AC}>0$ より

$$\mathrm{AC}=\sqrt{26}$$

R_1，R_2 の各々の値に $\sin\theta$ が残るが，比を求めるときに消えるので気にせずに進もう。