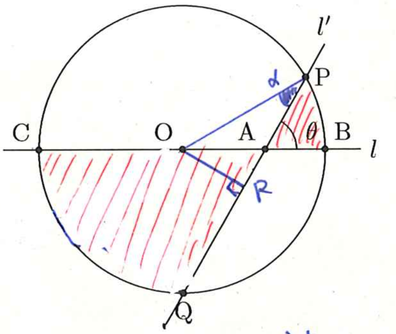
41 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円がある．この円の内部に点 A があり，A を通る直径を BC とする．直線 BC を l とし，l を A のまわりに角 θ $(0<\theta<\pi)$ だけ回転した直線を l' とする．図 1 のように l' と円の交点を P, Q とし，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$, $\mathrm{OA}=t$ $(0<t<1)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

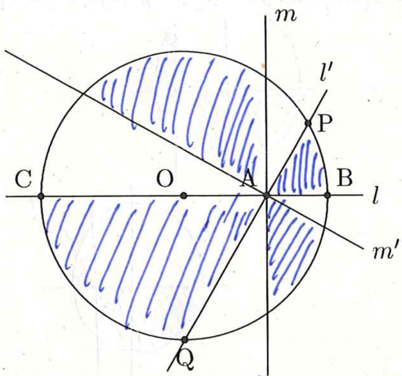
(1) $\angle\mathrm{APO}=\alpha$ とするとき，$\sin\alpha$ を t と $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\angle\mathrm{POB}+\angle\mathrm{QOC}$ を θ で表せ．

(3) l を A のまわりに θ だけ回転したとき，l が通過する領域のうち，円の周と内部にある部分の面積を $S(\theta)$ とする．このとき，$S(\theta)$ を求めよ．

(4) A を通り l に垂直な直線を m とする．2 直線 l, m をそれぞれ A のまわりに θ だけ回転したとき，l, m が通過する領域のうち，円の周と内部にある部分の面積を求めよ．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．





(1) 点Oから直線PQへ垂線を下ろし、交点をRとおく.

$$\sin\alpha=\frac{OR}{OP}=OR.\quad (\because OP=1)$$

よって、△OARにおいて、

$$\frac{OR}{OA}=\sin\theta.$$

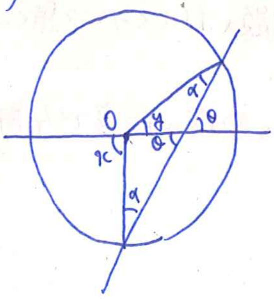
$$OR=OA\sin\theta$$

$$\therefore\ OR=t\sin\theta$$

以上より.

$$\sin\alpha=t\sin\theta \quad //$$

(2)



左図において.

$$y+\alpha=\theta.$$

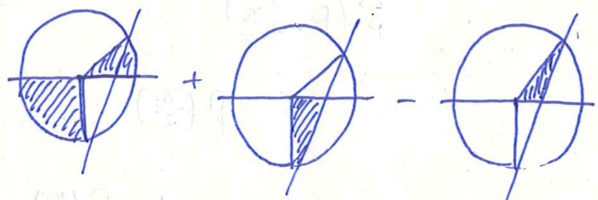
$$(180^\circ-x)+\alpha=(180^\circ-\theta).$$

上の2式を連立してαを消去.

$$x+y=2\theta$$

$$\therefore\ \angle POB+\angle QOC=2\theta \quad //$$

(3) 求める面積 $S(\theta)$ は、左図の斜線部であり.

$S(\theta)=$ 

$$=\pi\cdot1^2\times\frac{\cancel{2}\theta}{\cancel{2}\pi}+\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot AQ\cdot\sin\alpha-\frac{1}{2}\cdot OP\cdot AP\cdot\sin\alpha$$

$$=\theta+\frac{1}{2}AQ\sin\alpha-\frac{1}{2}AP\sin\alpha$$

よって、$\dfrac{AR}{OA}=\cos\theta$ i.e. $AR=t\cos\theta$

$\dfrac{PR}{OP}=\cos\alpha.$ $PR=\cos\alpha.$

$$\therefore\ AP=PR-AR=\cos\alpha-t\cos\theta$$

$$AQ=QR+AR=\cos\alpha+t\cos\theta.$$

$$\therefore\ S(\theta)=\theta+\frac{1}{2}\sin\alpha\,(AQ-AP)$$

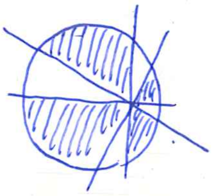
$$=\theta+\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot2t\cos\theta$$

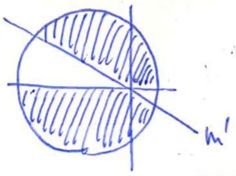
$$=\theta+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot t\sin\theta\cdot\cancel{2}t\cos\theta$$

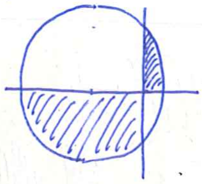
$$=\theta+t^2\sin\theta\cos\theta$$

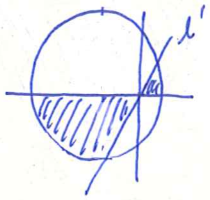
$$=\theta+\frac{1}{2}t^2\sin2\theta \quad //$$

(4) 求める面積を $T(\theta)$ とおく.

$T(\theta) =$ 

$=$ 

$-$ 

$+$ 

$$= S\left(\theta+\tfrac{1}{2}\pi\right) - S\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + S(\theta)$$

$$= \left(\theta+\tfrac{1}{2}\pi\right) + \tfrac{1}{2}r^2\sin(2\theta+\pi) - \left\{\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right\} + \left\{\theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta\right\}$$

$$= \theta+\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta - \tfrac{1}{2}\pi + \theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta$$

$$= 2\theta$$

$$\therefore\ T(\theta) = 2\theta$$

(3)は、(1),(2)の問題のイトをくみとって解くことができたか? がPoint.

(4)は、$T(\theta)$を3つの面積の和・差に分解できたか? がPoint.