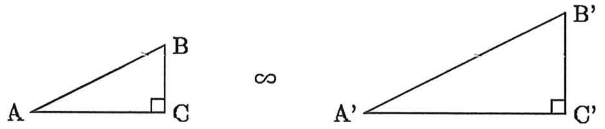
1　三角比

1.1　正弦・余弦・正接



2 つの三角形が相似なとき，

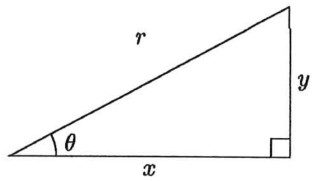
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} \quad , \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \quad , \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

∠C= 90° の直角三角形において，辺の比

$$\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AC}$$

の値は，∠A の値のみによって決まる．

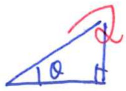
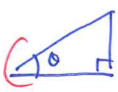
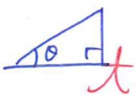
以上のことから $\cdots$



上図のように，鋭角の 1 つを θ，各辺を x, y, r とする．
先に見た通り，

$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$$

の値は θ の大きさのみで決まる．

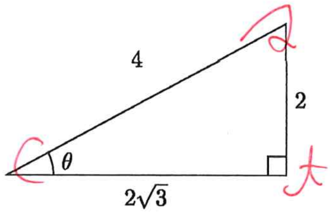
$\frac{y}{r} = \sin\theta$	正弦	
$\frac{x}{r} = \cos\theta$	余弦	
$\frac{y}{x} = \tan\theta$	正接	

★左下にθ，右下に直角！

問題

以下の図形の $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ．

(1)

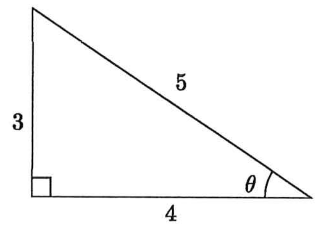


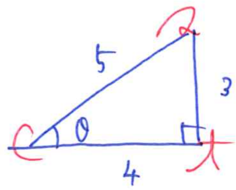
$$\sin\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)





$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$

1.2 三角比の表の利用

三角比の表を使ってみよう.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
⋮	⋮	⋮	⋮
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
⋮	⋮	⋮	⋮

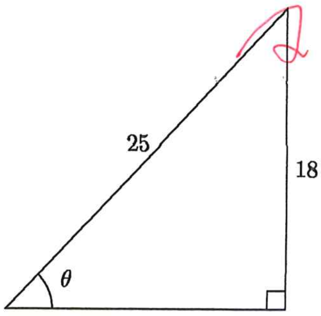
次の値を求めよ.

(1) $\sin 6^\circ \fallingdotseq 0.1045$ //

(2) $\cos 8^\circ \fallingdotseq 0.9903$ //

(3) $\tan 10^\circ \fallingdotseq 0.1763$ //

以下の θ のおおよその値を三角比を用いて求めよ.



$\sin\theta = \frac{18}{25} = \frac{18}{25} \times \frac{4}{4}$

$= \frac{72}{100} = 0.72.$

上の表から, $\sin\theta \fallingdotseq 0.72$ となるのは, 46°のとき.

$\therefore \theta \fallingdotseq 46^\circ$ //

問題

三角比の表を用いて以下のおおよその値を求めよ.

(1) $\sin 25^\circ$

0.4226 //

(2) $\cos 67^\circ$

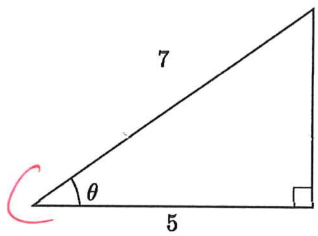
0.3907 //

(3) $\tan 38^\circ$

0.7813 //

以下の θ のおおよその値を三角比を用いて求めよ.

(1)



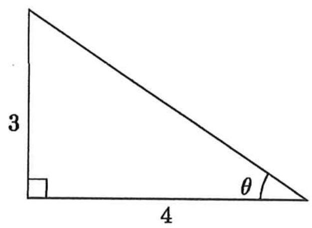
$\cos\theta = \frac{5}{7}$

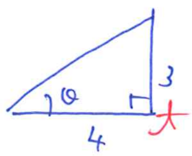
$\fallingdotseq 0.714$

0.714
7)50
49
10
7
30
28

$\therefore \theta \fallingdotseq 44^\circ$ //

(2)





$\tan\theta = \frac{3}{4}$

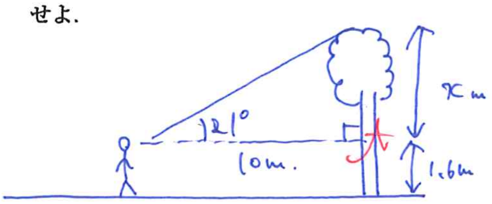
$= 0.75.$

$\therefore \theta \fallingdotseq 37^\circ$ //

1.3　三角比の活用

文章問題を解いてみよう．

(1) 木の根本から水平に 10 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 21° であった．目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．



上図から，$\tan 21° = \frac{x}{10}$

$x = 10 \times \tan 21°$

$= 10 \cdot 0.3839$

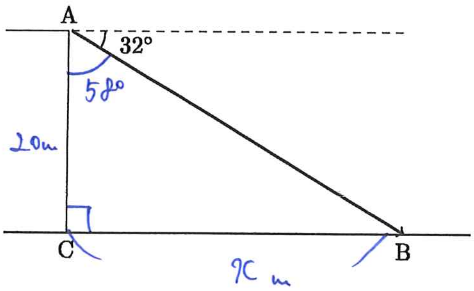
$= 3.839$

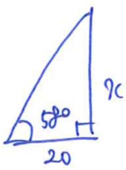
∴木の高さは　$3.839 + 1.6$

$= 5.439$

約5.4m

(2) 地上からの高さ 20 m の地点 A で地上の場所 B を見下ろしたら，その角は下の図のように水平面に対して 32° であった．B は，A の真下の地点 C から何 m 離れているか．1m 未満を四捨五入して求めよ．





$\frac{x}{20} = \tan 58°$

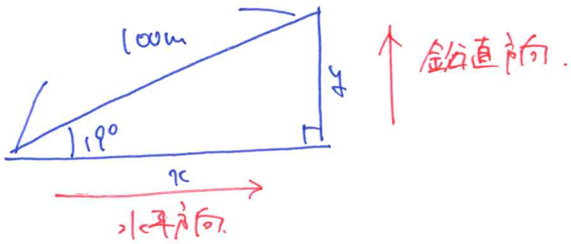
$x = 20 \times 1.6003$

$= 32.006$

∴約32m

(3) 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登る．このとき，以下の問いに 1m 未満を四捨五入して答えよ．

(a) 鉛直方向には何 m 上がることになるか．



$\frac{y}{100} = \sin 19°$

∴ $y = 100 \times 0.3256$

$= 32.56$

約33m

(b) 水平方向には何 m 進ことになるか．

$\cos 19° = \frac{x}{100}$

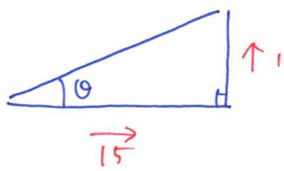
$x = 100 \times \cos 19°$

$= 100 \times 0.9455$

$= 94.55$

約95m

(4) 車椅子用に屋外に設置するスロープについて，その勾配は $\frac{1}{15}$ 以下にするという基準がある．
スロープの基準を 1° 単位で設定する場合，この基準を満たすには，傾斜角は何度以下にしなければならないか．ここで，勾配とは，水平方向に 1 進ときに鉛直方向に上がる高さを表す．



勾配 $\frac{1}{15}$ … 右に15進んだら上に1進む．

$\tan\theta$ の値が $\frac{1}{15}$ 以下になればいい．

$\frac{1}{15} = 0.066\cdots$

$\tan\theta$ の値が $0.066\cdots$ 以下

∴ 3° 以下

2　三角比の相互関係

2.1　三角比の相互関係

相互関係

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

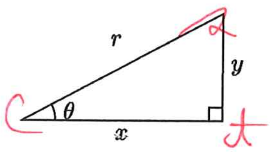
(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

証明しよう.

<proof>

(1) について

三角比の定義から,



$\dfrac{y}{r} = \sin\theta$

$\dfrac{x}{r} = \cos\theta$

$\dfrac{y}{x} = \tan\theta$

なので,

$$x = r\cos\theta \quad ,y = r\sin\theta \qquad \cdots(*)$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

」(1)

(2) について

上図の三角形において, 三平方の定理より,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

この式に (∗) 代入して

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

$$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

」(2)

(3) について

(2) の式の辺々を $\cos^2\theta$ で割ると,

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここで (1) より $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので,

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

□

注) $(\cos\theta)^2$ のことを $\cos^2\theta$ とかく.

相互関係を用いて, 1つの三角比から他の三角比を求めてみよう.

(1) θ は鋭角とする. $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

<Ans>

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から,

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$
$$= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

ここで, $0° < \theta < 90°$ なので,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

//

また, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から,

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

//

(2) θ は鋭角とする. $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$$

$0° < \theta < 90°$ より　$\sin\theta > 0$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

//

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\tan\theta = 2\sqrt{2}$$

//

(3) θ は鋭角とする. $\tan\theta = 2$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$$

$0° < \theta < 90°$ より　$\cos\theta > 0$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

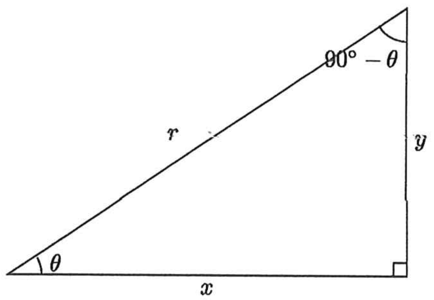
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

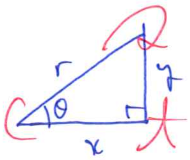
$$\therefore\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

//

2.2　$90^\circ - \theta$ の三角比



上の図から,

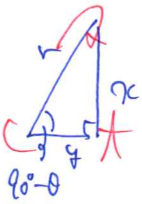


$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

また,



$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r}$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y}$$

よって, $90^\circ - \theta$ の三角比は, θ の三角比を用いて以下のように表すことができる.

$90^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

この関係式を用いて, ある三角比を別の角の三角比で表してみよう.　たして90°

(1) $\sin 53^\circ = \cos 27^\circ$

(2) $\cos 86^\circ = \sin 4^\circ$

(3) $\tan 43^\circ = \dfrac{1}{\tan 47^\circ}$

本当に成り立っているのかを三角比の表で確認してみよう.

以下の ( ) に適する鋭角の角度を入れよ.

(1) $\sin 64^\circ = \cos(26^\circ)$

(2) $\cos 34^\circ = \sin(56^\circ)$

(3) $\tan 29^\circ = \dfrac{1}{\tan(61^\circ)}$

以下の三角比を 45° 以下の三角比で表せ.

(1) $\sin 59^\circ$

$= \cos 31^\circ$

(2) $\cos 78^\circ$

$= \sin 12^\circ$

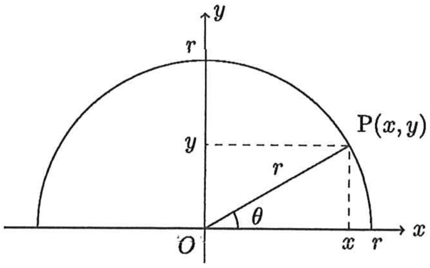
(3) $\tan 81^\circ$

$= \dfrac{1}{\tan 9^\circ}$

3　三角比の拡張

3.1　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ への拡張

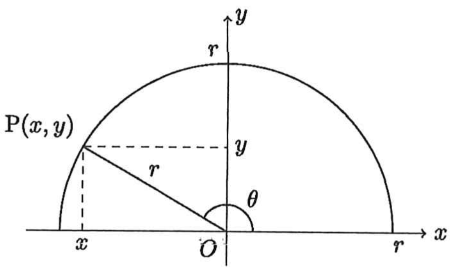
鋭角でしか考えることができなかった三角比を, 鋭角以外でも考えることのできるように拡張しよう.



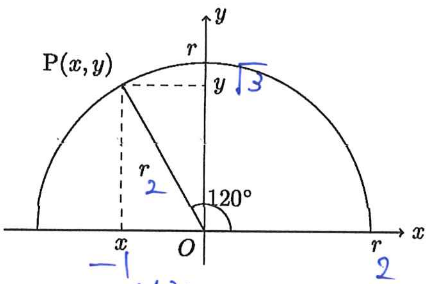
半径 r 上の円上の点を P(x, y) とする. x 軸の正の向きと OP のなす角を θ とし, 三角比を以下のように定義.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

座標で定義することで, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ での三角比を定義できる.



この定義を用いて, 120° の三角比を求めてみよう.



$r=2$ にしてみると...

(1) $\sin 120^\circ$

$= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ //

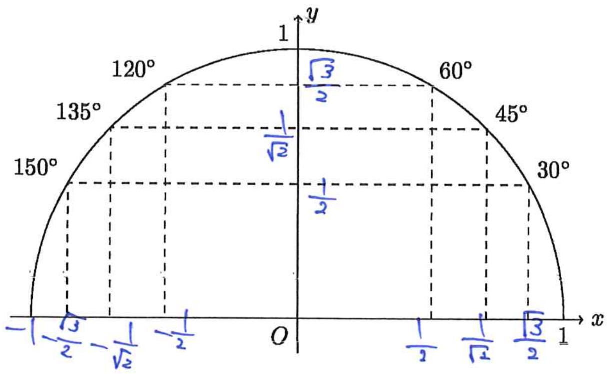
(2) $\cos 120^\circ$

$= \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ //

(3) $\tan 120^\circ$

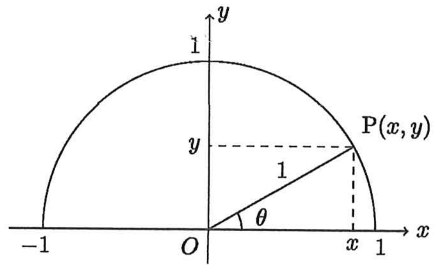
$= -\sqrt{3}$ //

三角比の値は, 三角形の大きさ (円の半径の大きさ) に依らず決まので, $r = 1$ として考えることが多い. (これを<u>単位円</u>という)
単位円を用いて, 下の表を埋めてみよう.



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

三角比についてまとめてみる.



単位円で考えると, 点 P の座標 (x, y) は

$x =$ $\cos\theta$ 　　, $y =$ $\sin\theta$

また, 点 P は半円上にあることから,

$0 \leqq y \leqq 1$　,　$-1 \leqq x \leqq 1$

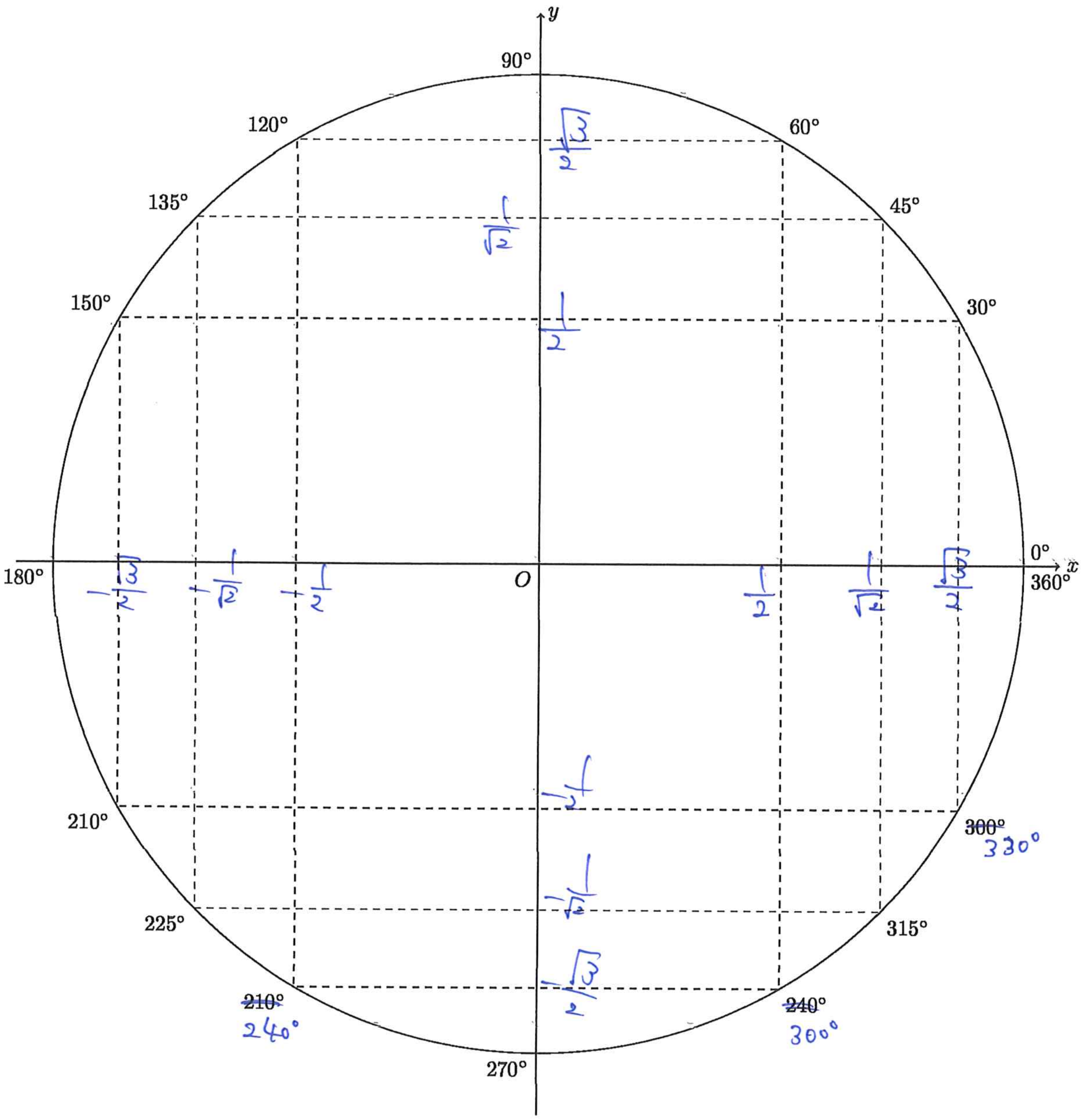
なので, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において,

$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$　,　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ なので, $\tan\theta$ は直線 OP の<u>傾き</u>

3.2　更なる拡張 $(+\alpha)$

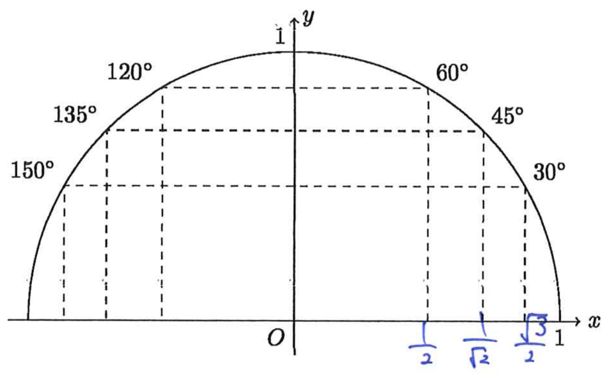
同様にして 360° まで拡張することもできる．単位円で考えてみよう．



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.3　180° − θ の三角比

復習



同じ

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

90°を境に、異符号．

上の表から天下り的に性質を見つけよう．

180° − θ の三角比

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

以下の三角比を鋭角の三角比で表せ．

(1) $\sin 124° = \sin 56°$

(2) $\cos 134° = -\cos 46°$

(3) $\tan 157° = -\tan 23°$

以下の値を，三角比の表を用いて求めよ

(1) $\sin 159° = \sin 21°$

$\fallingdotseq 0.3584$

(2) $\cos 178° = -\cos 2°$

$= -0.9994$

(3) $\tan 151° = -\tan 29°$

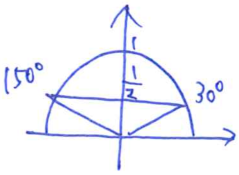
$= -0.5543$

単位円を描く!!

3.4　三角比の等式

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき, 次の等式を満たす θ の値を求めよ.

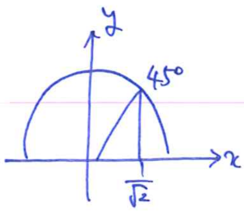
(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$



左図から,

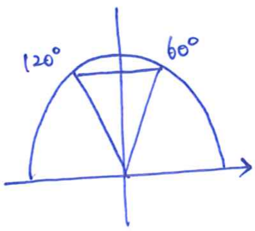
$\theta = 30°, 150°$

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



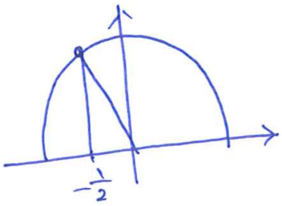
左図から, 45°

(3) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



左図から, $\theta = 60°, 120°$

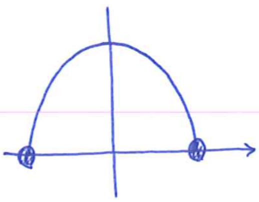
(4) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$



左図から,

$\theta = 120°$

(5) $\sin\theta = 0$

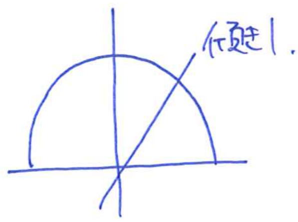


高さ0,

i.e. 左図から,

$\theta = 0°, 180°$

(6) $\tan\theta = 1$



左図から,

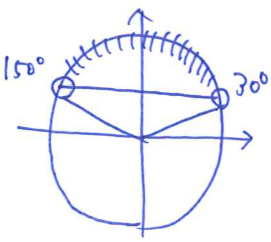
$\theta = 45°$

単位円で!!

3.5　三角比の不等式

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．

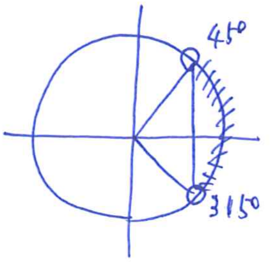
(1) $\sin\theta > \frac{1}{2}$



左図から

$30° < \theta < 150°$

(2) $\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

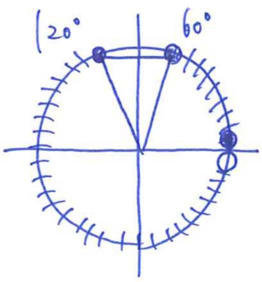


左図より

$0° \leqq \theta < 45°$,

$315° < \theta < 360°$

(3) $\sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

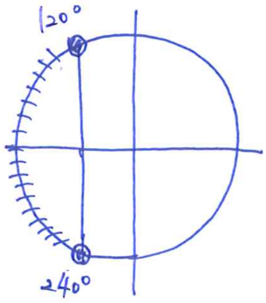


左図より

$0° \leqq \theta \leqq 60°$,

$120° \leqq \theta < 360°$

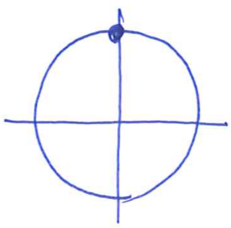
(4) $\cos\theta \leqq -\frac{1}{2}$



左図より

$120° \leqq \theta \leqq 240°$

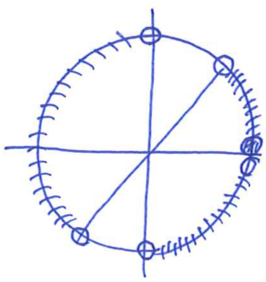
(5) $\sin\theta \geqq 1$



左図から.

$\theta = 90°$

(6) $\tan\theta < 1$ 傾き1より小



傾き1より小

$0° \leqq \theta < 45°$,

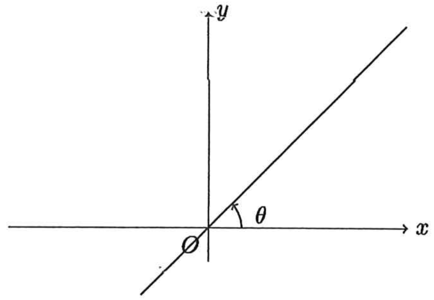
$90° < \theta < 240$,

$270° < \theta < 360°$

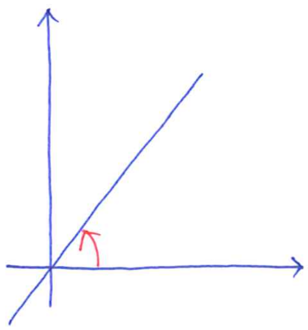
3.6 直線の傾きと $\tan\theta$

☆ $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする.

下の図のように, x 軸の正の部分から, 反時計回りに直線まで測った角度を直線と x 軸の正の向きとのなす角という.

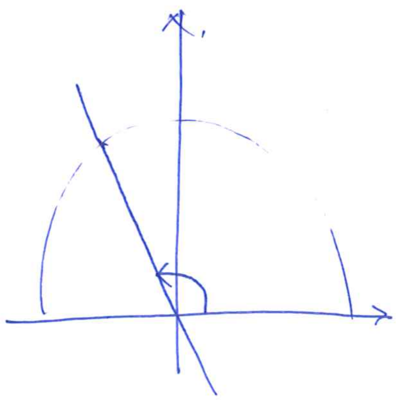


(1) 直線 $y = x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ.



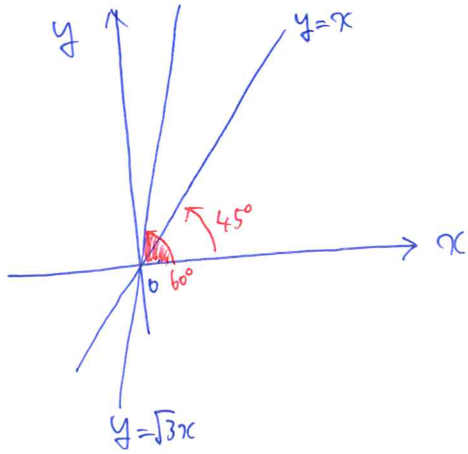
$\underline{45°}_{//}$

(2) 直線 $y = -\sqrt{3}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ.



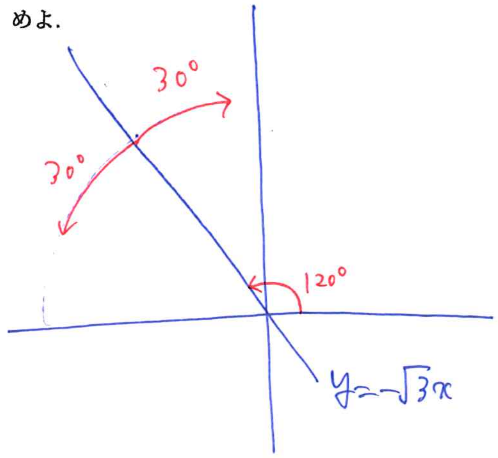
$\underline{120°}_{//}$

(3) 直線 $y = x$ と直線 $y = \sqrt{3}x$ のなす鋭角を求めよ.



上図から,　$60° - 45° = \underline{15°}_{//}$

(4) 直線 $y = -\sqrt{3}x$ とのなす鋭角が 30° になる直線の方程式を求めよ.



上図から,

$\underline{x = 0,\quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x}_{//}$

3.7　相互関係

復習

相互関係

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

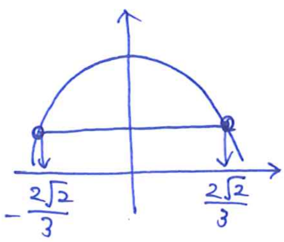
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，他の 2 つの値を求めよ．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = \dfrac{8}{9}$

$\cos\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

i) $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

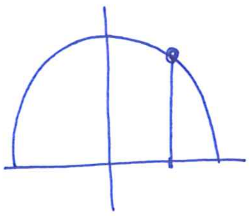
$\tan\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

ii) $\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$\tan\theta = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

//

(2) $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta = \dfrac{16}{25}$

左図より $\sin\theta > 0$ より

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ //

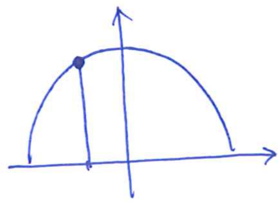
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ //

(3) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta = \dfrac{8}{9}$



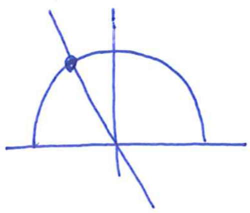
左図より $\sin\theta > 0$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ //

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = -2\sqrt{2}$ //

(4) $\tan\theta = -2$



$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$1 + 4 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$

図より $\cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ //

よって，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

$= -2 \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$

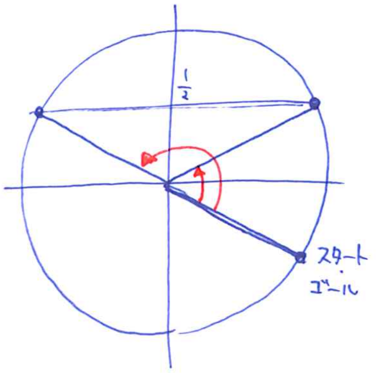
$\therefore \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ //

1周する.　30° 逆もどりした地点から1周する.

3.8 始点のズレた三角比の方程式

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき, 以下の方程式, 不等式を解け.

(1) $\sin(\theta - 30°) = \dfrac{1}{2}$

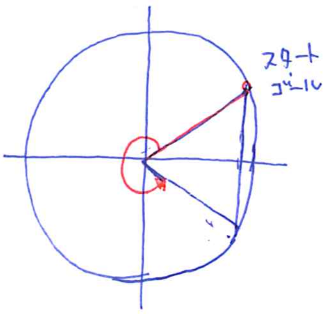


左図より

$\theta = 60°, 180°$

30°すすんだ地点から1周する.

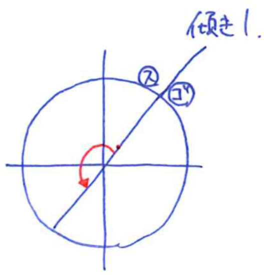
(2) $\cos(\theta + 30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



左図から,

$\theta = 0°, 300°$

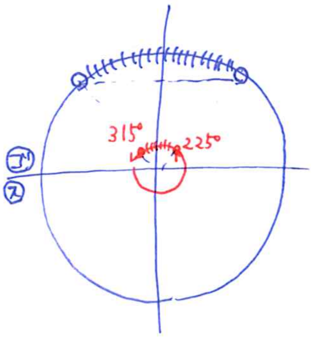
(3) $\tan(\theta + 45°) = 1$



左図から,

$\theta = 0°, 180°$

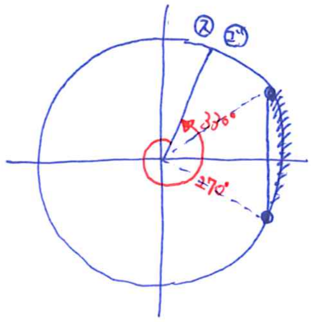
(4) $\sin(\theta - 180°) > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



左図より.

$225° < \theta < 315°$

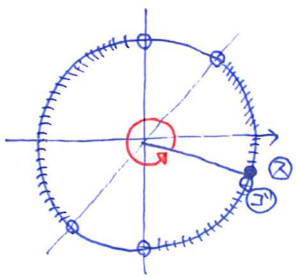
(5) $\cos(\theta + 60°) \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



左図より

$270° \leqq \theta \leqq 330°$

(6) $\tan(\theta - 30°) < 1$



左図から.

$0° \leqq \theta < 75°,$

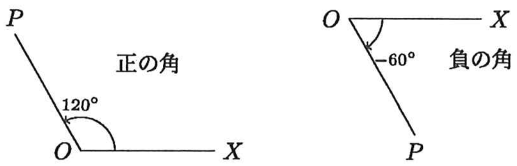
$120° < \theta < 255°,$

$300° < \theta < 360°$

4 角の拡張

4.1 拡張

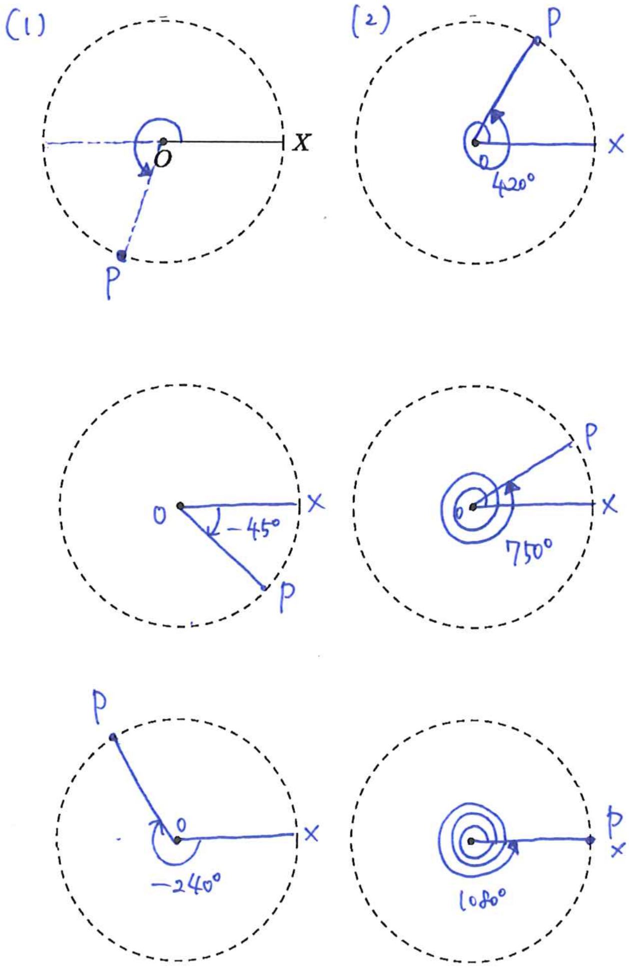
角を負の世界へ拡張しよう．
平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させる．
このとき，半直線 OP のことを動径
動径の最初の位置である半直線 OX のことを始線



上図のように，反時計回りに測った回転の角を「正の角」
時計回りに測った回転の角を「負の角」という．

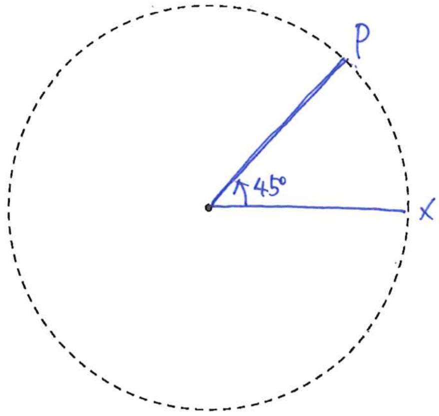
問題
次の動径を図示せよ．

(1) 260°
(2) 420° $= 360° + 60°$
(3) −45°
(4) 750° $= 360° + 360° + 30°$
(5) −240°
(6) 1080° $= 360° + 360° + 360°$



問題

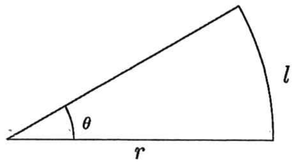
(1) 45° の動径と同じ位置にある角度を正，負それぞれ 2 つずつあげよ．



$45° + 360° = 405°$
$45° + 360° + 360° = 765°$
$45° - 360° = -315°$
$45° - 360° - 360° = -675°$

角度 θ に対し動径の位置は，<u>360</u>° 回転するごとに一致する．

4.2　弧度法



定義 (弧度法)

半径 r, 弧長 l に対し,

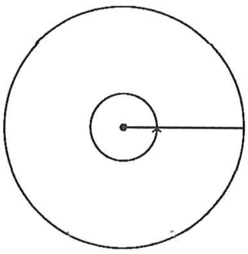
$$\theta = \frac{l}{r}\ (rad)$$

と定義する.
単位 (rad) はラジアンと読む. 省略することが多い.

ラジアンに円の大きさには関係しないので, 半径 1 で考えると便利である.

$\boxed{\text{円周} \cdots 2\pi r}$

例
360° を弧度法で表す.



半径 1 の円の弧長 (円周) は

2π なので,

$360° = 2\pi$

問題
度数法で表された角度を弧度法で表せ.

(1) 30°

$\times\frac{1}{12}$ $360° = 2\pi$

$30° = \frac{1}{6}\pi$ //

(2) 120°

$\times\frac{1}{3}$ $360° = 2\pi$

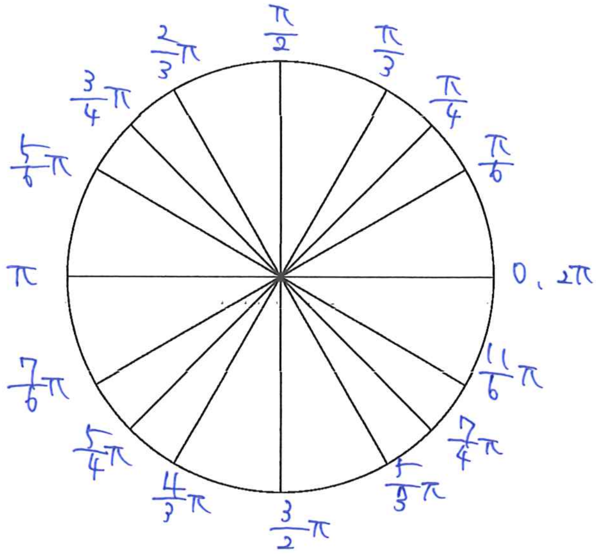
$120° = \frac{2}{3}\pi$ //

(3) 270°

$\times\frac{3}{4}$ $360° = 2\pi$

$270° = \frac{3}{2}\pi$ //

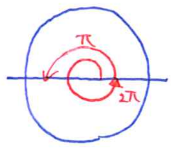
下の図に弧度法で角度を書き入れよう.



問題
次の角度を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の弧度法で表せ.

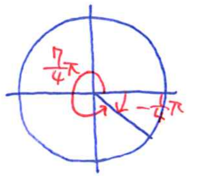
(1) 3π

$= 2\pi + \pi$



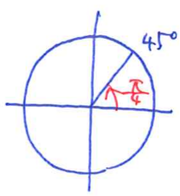
π //

(2) $-\frac{1}{4}\pi$ $= \frac{7}{4}\pi - 2\pi$



$\frac{7}{4}\pi$ //

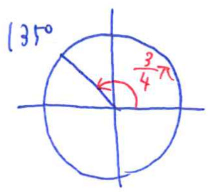
(3) 45°



$\frac{\pi}{4}$ //

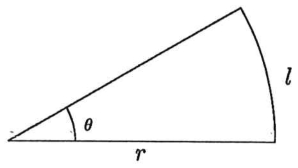
(4) 495°

$= 360° + 135°$



$\frac{3}{4}\pi$ //

4.3　扇形



弧度法の定義より,

$$\theta = \frac{l}{r}\ (rad)$$

なので,

弧長 $l =$ $r\theta$

次に, 円の面積 πr^2 に対して, 扇形の面積を考える.
円 1 周 2π に対し, 扇形は角度 θ 分であるので,
扇形の面積 S は

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \theta$$

問題
以下の扇形の弧長 l と面積 S を求めよ.

(1) 半径 4, 中心角 $\frac{1}{2}\pi$

$l = r\theta = 4 \cdot \frac{1}{2}\pi = \underline{2\pi}$ //

$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \underline{4\pi}$ //

(2) 半径 2, 中心角 $\frac{7}{6}\pi$

$l = 2 \cdot \frac{7}{6}\pi = \underline{\frac{7}{3}\pi}$ //

$S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{7}{6}\pi = \underline{\frac{7}{3}\pi}$ //

(3) 半径 3, 中心角 $\frac{5}{3}\pi$

$l = 3 \cdot \frac{5}{3}\pi = \underline{5\pi}$ //

$S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{5}{3}\pi = \underline{\frac{15}{2}\pi}$ //