35 円 $C_1: x^2+y^2=9,\ C_2: x^2+y^2-4x-2y+3=0$ について，以下の問いに答えよ．【★★★★】

(1) 円 C_1 と，直線 $y=kx+6$ の共有点の個数を調べよ．

共有点のx座標は

$x^2+(kx+6)^2=9$

$(1+k^2)x^2+12kx+27=0$.

判別式をDとおくと

$D=(12k)^2-4\cdot(1+k^2)\cdot 27$

$=144k^2-108k^2-108$

$=36k^2-108$

$=36(k^2-3)$

$=36(k-\sqrt{3})(k+\sqrt{3})$

$D>0$ のとき
$k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k$ で共有点2コ

$D=0$ のとき
$k=\pm\sqrt{3}$ で 共有点 1コ

$D<0$ のとき
$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ で共有点0コ

(2) 2つの円 C_1, C_2 の位置関係を調べよ．

$C_2: x^2+y^2-4x-2y+3=0$

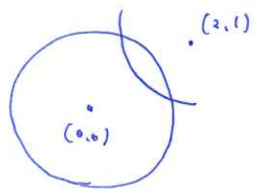
$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+3=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$.

中心$(2,1)$，半径$\sqrt{2}$.

C_1は中心$(0,0)$ 半径3.

C_1とC_2の中心間のきょりは $\sqrt{5}$.



$\sqrt{5}<3+\sqrt{2}$.
かつ
$3-\sqrt{2}<\sqrt{5}$ なので
異なる2点で交わる.

(3) 2つの円 C_1, C_2 の交点を通る直線の方程式を求めよ．

2つの共有点を通る曲線は

$(x^2+y^2-9)+k(x^2+y^2-4x-2y+3)=0$ …(※)

で書ける.

直線より $k=-1$. 代入.

$-9+4x+2y-3=0$

$2x+y-6=0$

(4) 2つの円 C_1, C_2 の交点と原点を通る図形の方程式を求めよ．

(※)において，$(0,0)$ 代入.

$-9+k(3)=0$

$k=3$.

$\therefore\ (x^2+y^2-9)+3(x^2+y^2-4x-2y+3)=0$

$4x^2+4y^2-12x-6y=0$

$x^2+y^2-3x-\frac{3}{2}y=0$