$\boxed{40}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 加法定理を用いて, $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を示せ.

(2) $\triangle$ABC が半径 2 の円に内接し, $A = \dfrac{\pi}{3}$ であるとき, $a+b+c$ の最大値を求めよ.

(1) 〈証明〉.

加法定理より.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

辺々たすと

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$. — (*)

ここで

$\alpha+\beta = A$

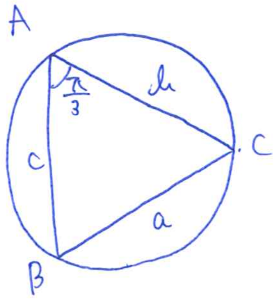
$\alpha-\beta = B$ とおくと

$\alpha = \dfrac{A+B}{2}$ $\beta = \dfrac{A-B}{2}$ が成立.

$\therefore$ (*) に代入.

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ ∎

(2)



正弦定理より. $R=2$ なので

$2R = \dfrac{a}{\sin A}$

$a = 2\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

$2R = \dfrac{b}{\sin B}$

$b = 4\sin B$.

$2R = \dfrac{c}{\sin C}$

$c = 4\sin C$.

$\therefore a+b+c = 2\sqrt{3} + 4\sin B + 4\sin C$

$= 2\sqrt{3} + 4(\sin B + \sin C)$ — (**)

この式から, $a+b+c$ が最大となるのは.

$\sin B + \sin C$ が最大となるときである.

(1) の式より

$\sin B + \sin C = 2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$= 2\sin\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\pi\cdot\cos\dfrac{1}{2}\cdot(2B-(B+C))$

$(\because B+C = \dfrac{2}{3}\pi)$

$= 2\cdot\sin\dfrac{1}{3}\pi\cdot\cos\dfrac{1}{2}(2B-\dfrac{2}{3}\pi)$

$= \sqrt{3}\cos(B-\dfrac{1}{3}\pi)$

この値が $0 < B < \dfrac{2}{3}\pi$ で最大となるのは

$B = \dfrac{1}{3}\pi$ のときであり. そのとき

$\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{1}{3}\pi - \dfrac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$. が最大値.

$\therefore a+b+c$ の最大値は. (**) から.

$2\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{3} = \underline{6\sqrt{3}}$ //

(2) を解くための (1) であることを念頭に!!

(2) を解くときには, まず予想。

「$a+b+c$ の最大は, 正三角形のとき?」

↓

結果が予想と一致したことから, 正解だろう。