

1 数Iの復習 1日目

1.1 問題 1

生徒 10 人の 2 回の結果が、以下のようになった。

生徒	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
テスト 1 (得点)	1	1	2	4	7	8	8	9	10	10
テスト 2 (得点)	2	4	3	5	4	5	6	7	6	8

(1) それぞれの平均値を求めよ。

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+4+7+8+8+9+10+10}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{2+4+3+5+4+5+6+7+6+8}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

(2) それぞれの分散, 標準偏差を求めよ。

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{10} (6^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2) \\ &= \frac{1}{10} (25 + 25 + 16 + 4 + 1 + 4 + 4 + 9 + 16 + 16) \\ &= \frac{1}{10} \cdot 120 = 12 \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{10} (3^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2) \\ &= \frac{1}{10} (9 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 9) \\ &= \frac{30}{10} = 3 \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \sqrt{3}$$

(3) テスト 1 とテスト 2 の相関係数を求めよ。

まず、分散を求めよ。

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{10} ((-5) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ &\quad + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3) \\ &= \frac{1}{10} (15 + 5 + 8 - 1 + 2 + 6 + 4 + 12) \\ &= \frac{51}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{相関係数 } r &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \\ &= \frac{\frac{51}{10}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{51}{2 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{17}{20} \end{aligned}$$

1.2 確率変数と確率分布

例題

2個のサイコロを投げて、出た目の和を X とする。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

上の表を確率分布という。

- (1) $P(10 \leq X)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 P(10 \leq X) &= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \\
 &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

- (2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} \\
 &= \frac{1}{36} (2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 50 + 50 + 42 + 30 + 22 + 2) \\
 &= \frac{1}{36} (20 + 50 + 42 + 70 + 70) \\
 &= \frac{252}{36} = 7
 \end{aligned}$$

- (3) $Y = 2X + 1$ とする。 $E(Y)$ を求めよ。

$Y = 2X + 1$	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \frac{1}{36} \cdot 5 + \frac{2}{36} \cdot 7 + \dots + \frac{1}{36} \cdot 25 \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

$aX + b$ の期待値

X : 確率変数, a, b : 定数 とする。

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

2 数Iの復習 1日目

2.1 確率変数の分散

復習

10点満点のテストにおいて、A, B, C, Dさんがそれぞれ3, 6, 7, 4点を取った。平均値、分散、標準偏差をそれぞれ求めよ。

$$\text{Ave} = \frac{3+6+7+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} (4+1+4+1) \\ &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

確率変数の分散と標準偏差

X	X_1	X_2	...	X_n	計
P	p_1	p_2	...	p_n	1

$$\bullet E((X-m)^2) = \sum_{\lambda=1}^n p_{\lambda} \cdot (X_{\lambda}-m)^2 \quad \leftarrow \left(= p_1(X_1-m)^2 + p_2(X_2-m)^2 + \dots + p_n(X_n-m)^2 \right)$$

$$= V(X)$$

↑
分散の定義そのもの。

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\bullet (\text{分散}) = (\text{2乗平均}) - (\text{平均})^2$$

練習問題

サイコロ 1 個を投げて出た目を X とする。以下を求めよ。

(1) $E(X)$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\frac{1}{2} +$
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ = 7$$

(2) $V(X)$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 \\ = \frac{1}{36} \cdot 5^2 + \frac{2}{36} \cdot 4^2 + \frac{3}{36} \cdot 3^2 + \frac{4}{36} \cdot 2^2 + \frac{5}{36} \cdot 1^2 + \frac{6}{36} \cdot 0^2 \\ + \frac{5}{36} \cdot 1^2 + \frac{4}{36} \cdot 2^2 + \frac{3}{36} \cdot 3^2 + \frac{2}{36} \cdot 4^2 + \frac{1}{36} \cdot 5^2 \\ = \frac{1}{36} (25 \cdot 2 + 16 \cdot 2 \cdot 2 + 9 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 5) = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} //$$

(3) $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \\ = \sqrt{\frac{210}{36}} = \frac{\sqrt{210}}{6} //$$

(4) 確率変数 $Y = 2X + 3$ の期待値, 分散, 標準偏差をそれぞれ求めよ。

$$E(Y) = 2 \cdot E(X) + 3 \\ = 2 \cdot 7 + 3 = 17 //$$

$$V(Y) = V(2X + 3) \\ = \sum_{i=1}^n (2x_i + 3 - (2\bar{x} + 3))^2 \\ = \sum_{i=1}^n (2x_i - 2\bar{x})^2 \\ = 4 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 4 \cdot V(X) = 4 \cdot \frac{35}{6} = \frac{70}{3} //$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{70}{3}} //$$

★ 確率変数 X に対し.

$$Y = aX + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

と表す.

$$E(Y) = a \cdot E(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma(Y) = a \cdot \sigma(X)$$