

31 以下の問いに答えよ。【**】

- (1) 3次方程式 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ の1つの解が $1+i$ であるとき、定数 a, b の値と、他の解を全て求めよ。

$1+i$ は解より、共役な複素数 $1-i$ も解。

もう1つ $x = \alpha$ と

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + ax + b &= (x - (1+i))(x - (1-i))(x - \alpha) \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x - \alpha) \\ &= x^3 - (2+\alpha)x^2 + (2+2\alpha)x - 2\alpha \end{aligned}$$

係数比較して

$$\begin{cases} -5 = -(2+\alpha) \\ a = 2+2\alpha \\ b = -2\alpha \end{cases}$$

$$\alpha = 3, \quad a = 8, \quad b = -6$$

$$\therefore a = 8, \quad b = -6$$

他の解: $3, 1-i$

- (2) 3次方程式 $x^3 + 1 = 0$ の虚数解の1つを ω とする。

$\omega^2 - \omega + 1$ の値を求めよ。

$$\omega^3 + 1 = 0$$

$$(\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0.$$

$$\omega \neq -1$$

$$\omega^2 - \omega + 1 = 0$$

- (3) 3次方程式 $x^3 + 1 = 0$ の虚数解の1つを ω とする。

$\omega^{30} + \omega^{20} + \omega^{10} + 1$ の値を求めよ。

$$\omega^3 = -1$$

$$\omega^{30} = (\omega^3)^{10} = 1$$

$$\omega^{20} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 = 1 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{10} = (\omega^3)^3 \cdot \omega = -1 \cdot \omega = -\omega$$

$$\therefore \omega^{30} + \omega^{20} + \omega^{10} + 1$$

$$= 1 + \omega^2 - \omega + 1$$

$$= 2$$