(1)、(2)の誘導で全体の仕組みを知る!!

(4)をあえて1つ1つ解いてみた。

8 1, 2, 3, 4, 5 の数字を左から並べて n 桁の数を作る．同じ数字を何回用いてもよいが，作った n 桁の数の中に次の 6 種類の数字の並び 12, 13, 21, 23, 31, 32 のいずれも現れてはいけない．

このルールのもとで作ることができる n 桁の数全体の集合を A_n とし，A_n の要素の個数を a_n で表す．例えば $a_1 = 5$ である．A_n の中で，末尾が 4 または 5 であるものの全体の集合を B_n とし，B_n の要素の個数を b_n で表す．

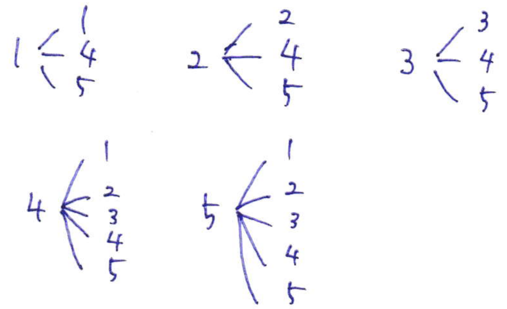
(1) a_2 を求めよ．

(2) b_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1). A_2の要素を樹形図で列挙してみる。



上の図より　$a_2 = 19$

(2) 集合A_nの要素であるどんな数に対しても、右端に4,5いずれを並べてもA_{n+1}の要素であり、こうして作った数はB_{n+1}の要素である。

また、A_nの要素でない数に対して同じ操作をしてもA_{n+1}の要素にはならない。

∴ $b_{n+1} = 2a_n$

(3) A_{n+1}の要素の数のうち、右端が1,2,3のいずれかの場合、A_{n+2}の要素にするために右端に数を加えてよいのは、(1)の樹形図より、3通り。

一方で、B_{n+1}の要素の数のうち、A_{n+2}の要素にするために右端に付してよい数は1~5のすべて。

∴ $a_{n+2} = 3\times(a_{n+1} - b_{n+1}) + 5\times b_{n+1}$

$= 3a_{n+1} + 2b_{n+1}$

$= 3a_{n+1} + 2\cdot 2a_n$　(∵(2))

よって　$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$

(4). (3)より $n \geqq 2$において.

$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$

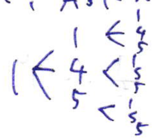
$a_{n+2} - 4a_{n+1} = (-1)(a_{n+1} - 4a_n)$

$= (-1)^2(a_n - 4a_{n-1})$

⋮

$= (-1)^{n-1}(a_3 - 4\cdot a_2)$

ここで、A_3について.



(3通り).

⋮

77通り.

i.e. $a_3 = 77$.

∴ $a_{n+2} - 4a_{n+1} = (-1)^{n-1}(77 - 4\cdot 19)$

$= (-1)^{n-1}$

$a_{n+2} = 4a_{n+1} + (-1)^{n-1}$

$\frac{a_{n+2}}{(-1)^{n+2}} = -4\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}} - 1$

$c_n = \frac{a_n}{(-1)^n}$ とおく.

$c_{n+2} = -4c_n - 1$

$c_{n+2} + \frac{1}{5} = -4\left(c_{n+1} + \frac{1}{5}\right)$

$= (-4)^2\left(c_n + \frac{1}{5}\right)$

⋮

$= (-4)^n\left(c_2 + \frac{1}{5}\right)$

また, $c_2 = \frac{a_2}{(-1)^2} = 19$.

∴ $c_{n+2} + \frac{1}{5} = (-4)^n\left(19 + \frac{1}{5}\right)$

$= (-4)^n\cdot\frac{96}{5}$

$= (-4)^{n+2}\cdot\frac{6}{5}$

よって $c_{n+2} = \frac{6}{5}(-4)^{n+2} - \frac{1}{5}$

$$a_{n+2} = \frac{6}{5}(-4)^{n+2} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{a_{n+2}}{(-1)^{n+2}} = \frac{6}{5}(-4)^{n+2} - \frac{1}{5}$$

$$a_{n+2} = \frac{6}{5}\cdot 4^{n+2} - \frac{1}{5}\cdot(-1)^{n+2}$$

$$= \frac{6}{5}\cdot 4^{n+2} - \frac{1}{5}(-1)^{n+2}$$

$n+2$をnにおき換えると

$$a_n = \frac{6}{5}\cdot 4^n - \frac{1}{5}\cdot(-1)^n$$

$n=2$のとき

$$\frac{6}{5}\cdot 16 - \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{95}{5} = 19$$

$n=3$のとき

$$\frac{6}{5}\cdot 4^3 - \frac{1}{5}\cdot(-1) = \frac{384+1}{5}$$

$$= \frac{385}{5} = 77$$

$n=2,3$ いずれも成立.

$$\therefore\ a_n = \frac{6}{5}\cdot 4^n - \frac{1}{5}(-1)^n$$

$$= \underline{\frac{3}{5}\cdot 2^{2n+1} - \frac{1}{5}(-1)^n}\ //$$