115【指数・対数】

$\frac{1}{4} \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $y=\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^2+1$ を考える.

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x=t$ とおくとき, t の値の範囲を求めよ.

(2) y を t を用いて表せ.

(3) y の最大値, 最小値およびそのときの x の値を求めよ.

(山梨大)

(1) $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ より

$0 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$

$\therefore$ $0 \leq t \leq 2$ //

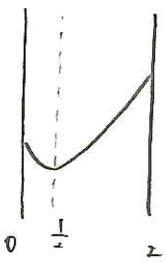
(2)

$y=\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^2+1$

$=\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\frac{1}{2}\cdot 2\log_{\frac{1}{2}} x+1$

$= t^2-t+1.$ //

(3) $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ $(0 \leq t \leq 2)$



左図より

$t=2$ で Max 3

$t=\frac{1}{2}$ で Min $\frac{3}{4}$

よって $t=2$ のとき

$\log_{\frac{1}{2}} x=2$

$x=\frac{1}{4}$

$t=\frac{1}{2}$ のとき

$\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で Min $\frac{3}{4}$

$x=\frac{1}{4}$ で Max 3 //