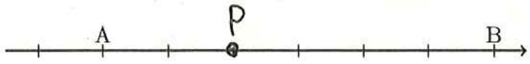
1　中学の復習

1.1　新出用語

(1) 内分

(a) AB を 1 : 2 に内分する点 P

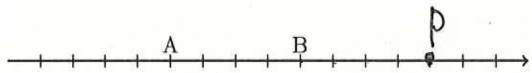


(b) AB を 2 : 1 に内分する点 Q

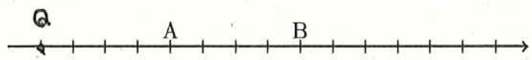
(c) AB を 2 : 1 に内分する点 R

(2) 外分

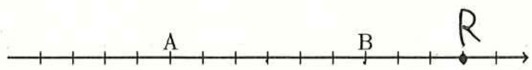
(a) AB を 2 : 1 に外分する点 P



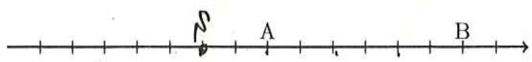
(b) AB を 1 : 2 に外分する点 Q



(c) AB を 3 : 1 に外分する点 R



(d) AB を 1 : 4 に外分する点 S



1.2　既習用語の確認

(1) 二等辺三角形とは

2組の辺が等しい三角形.

(2) 正三角形とは

3組の辺が等しい三角形.

(3) 正方形とは

すべての辺が等しく、角が90°である四角形.

(4) 長方形とは

すべての角が90°である四角形.

(5) 平行四辺形とは

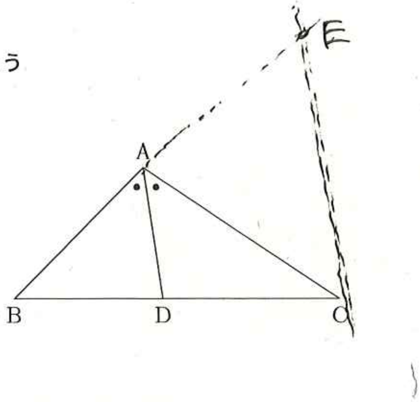
2組の対辺が平行である四角形.

(6) 台形とは

1組の対辺が平行である四角形.

1.3 証明しよう

1.3.1 定理 1



上の図において, 以下の等式が成立する.

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

Proof.

点Cを通り、直線ADに平行な直線と、
辺BAのA側への延長の交点をEとおく.

AD // CEより.

$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{ACE}$.

$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BEC}$.

$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD}$より.

$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{AEC}$.

∴ △ACEは二等辺三角形.

i.e. AC=AE. —(*1)

さて、AD // CEから、

$\mathrm{BA} : \mathrm{AE} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$.

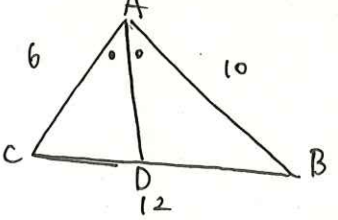
(*1)から、

$\mathrm{BA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$.

□

練習問題

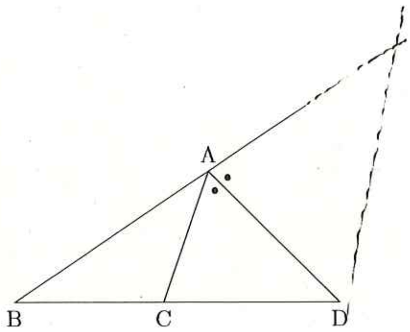
AB= 10, BC= 12, CA= 6 である △ABC において, ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とおく. 線分 BD の長さを求めよ.



$\mathrm{CD} : \mathrm{DB} = 6 : 10$
$= 3 : 5$

$\therefore \mathrm{BD} = 12 \times \frac{5}{8}$
$= \frac{15}{2}$ //

1.3.2 定理 2



上の図において, 以下の等式が成立する.

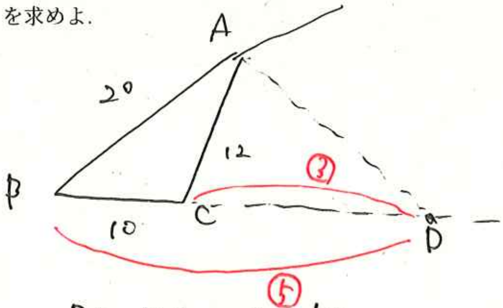
$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

Proof.

□

練習問題

AB= 20, BC= 10, CA= 12 である △ABC において, ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とおく. 線分 BD の長さを求めよ.



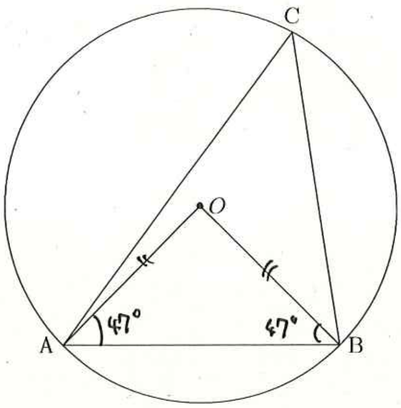
$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 20 : 12$
$= 5 : 3$

図より CD = 15 ∴ BD = 25 //

1.4　円周角の定理

指定された角の大きさを求めよ．

(1) $\angle\mathrm{OAB} = 47^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{ACB}$ の値



$\angle AOB = 180^\circ - 2\cdot 47^\circ$

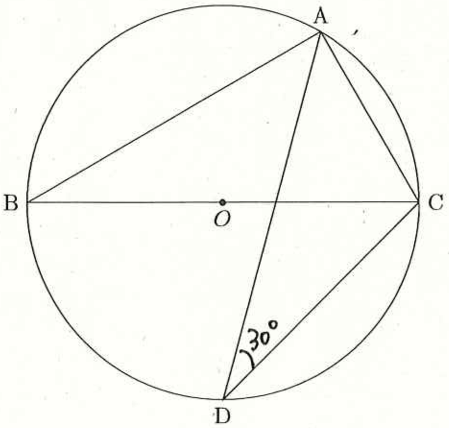
$= 180^\circ - 94^\circ$

$\therefore \angle AOB = 86^\circ$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \times 86^\circ$

$= 43^\circ$

(2) $\angle\mathrm{ADC} = 30^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{ACB}$ の値



$\angle ABC = 30^\circ$ （円周角の定理）．

BCが直径 ∴． $\angle BAC = 90^\circ$

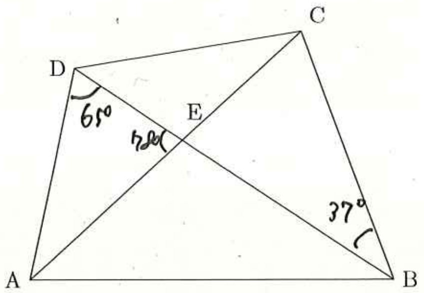
$\therefore \angle ACB = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$

$= 60^\circ$

1.5　円周角の定理の逆

以下の図において，4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるか判定せよ．

(1) $\angle\mathrm{ADB} = 65^\circ$, $\angle\mathrm{AED} = 78^\circ$, $\angle\mathrm{DBC} = 37^\circ$



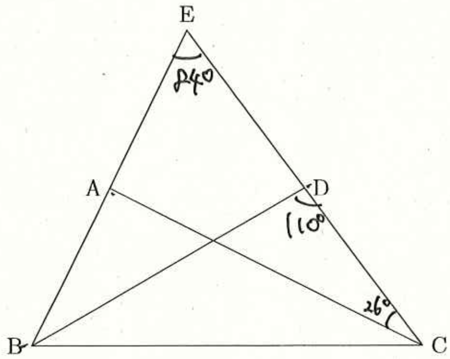
$\angle DAE = 180^\circ - (65^\circ + 78^\circ)$

$= 180^\circ - 143^\circ = 37^\circ$

$\angle DAC = \angle DBC$ より

4点 A, B, C, D は同一円周上．

(2) $\angle\mathrm{BEC} = 84^\circ$, $\angle\mathrm{BDC} = 110^\circ$, $\angle\mathrm{ACD} = 26^\circ$



$\angle EAC = 180^\circ - (84^\circ + 26^\circ)$

$= 180^\circ - 110^\circ$

$= 70^\circ$

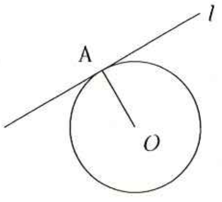
$\angle BAC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$ より

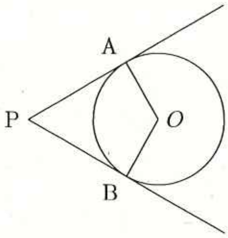
4点 A, B, C, D は同一円周上．

1.6 円と直線

円と直線の関係についての復習をしよう.



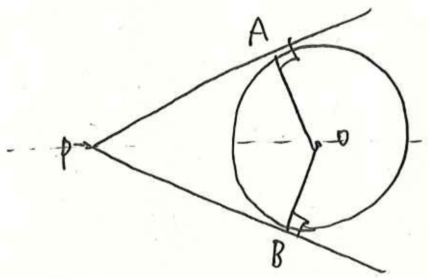
直線 l と線分 OA の関係性 $l \perp OA$



線分 PA と線分 PB の関係性 $AP = BP$

線分 PA と線分 PB の関係性について証明しよう.

Proof.



上図で, $\angle OAP = \angle OBP = 90°$,

半径なので $OA = OB$.

また, OPは共通しているので,

2つの直角三角形 $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ は合同.

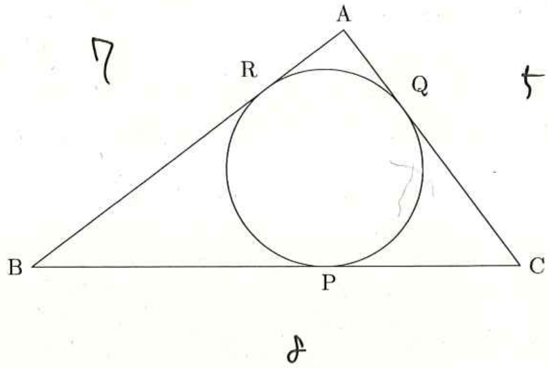
$\therefore PA = PB$

//

□

練習問題

(1) AB= 7, BC= 8, CA= 5 とする. BP の長さを求めよ.



$BP = x$ とおくと $BR = x$. —①

$PC = 8 - x$.

$PC = CQ$ より

$CQ = 8 - x$.

$QA = 5 - (8 - x)$

$= x - 3$.

$AR = QA$

$= x - 3$

$\therefore RB = 7 - (x - 3)$

$= 10 - x$. —②

①, ② より

$x = 10 - x$

$x = 5$

//

1.7 三角形の存在

3 辺の長さが以下のような三角形は存在するか答えよ．
また，存在する場合に，その三角形が特殊 (直角・二等辺・正など) であれば，それも答えよ．

(1) $1, 2, 2$

存在する.

二等辺三角形.

(2) $3, 4, 5$

存在する

直角三角形

(3) $4, 6, 10$

存在しない

(4) $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$

存在する.

直角三角形