# 令和５年度 KNC 数学問題演習

取り組みチェック表

| 問題 | 取り組み日 | ○・△・× | コメント |
|---|---|---|---|
| 41 | | | |
| 42 | | | |
| 43 | | | |
| 44 | | | |
| 45 | | | |

______年４組______番 氏名________________________________________

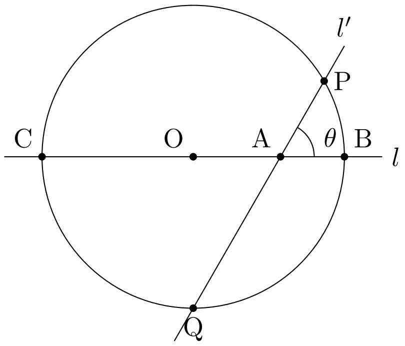
$\boxed{\textbf{41}}$ 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円がある．この円の内部に点 A があり, A を通る直径を BC とする．直線 BC を $l$ とし, $l$ を A のまわりに角 $\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ だけ回転した直線を $l'$ とする．図 1 のように $l'$ と円の交点を P, Q とし, $\angle$PAB$=\theta$, OA$=t$ $(0 < t < 1)$ とするとき, 以下の問いに答えよ．

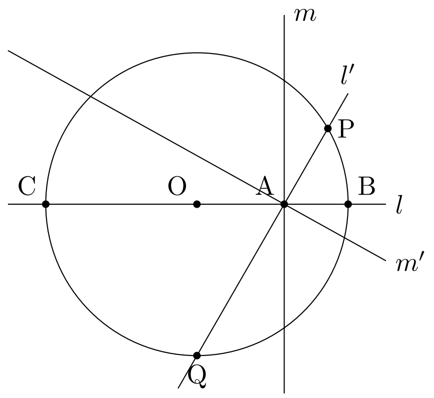
(1) $\angle$APO$=\alpha$ とするとき, $\sin\alpha$ を $t$ と $\sin\theta$ で表せ.

(2) $\angle$POB$+\angle$QOC を $\theta$ で表せ.

(3) $l$ を A のまわりに $\theta$ だけ回転したとき, $l$ が通過する領域のうち, 円の周と内部にある部分の面積を $S(\theta)$ とする．このとき, $S(\theta)$ を求めよ.

(4) A を通り $l$ に垂直な直線を $m$ とする．2 直線 $l, m$ をそれぞれ A のまわりに $\theta$ だけ回転したとき, $l, m$ が通過する領域のうち, 円の周と内部にある部分の面積を求めよ．ただし, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする.



$\boxed{\textbf{42}}$ いくつかの半径 3 の円を, 半径 2 の円 Q に外接し, かつ, 互いに交わらないように配置する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 半径 3 の円の 1 つを $R$ とする. 円 $Q$ の中心を端点とし, 円 $R$ に外接する 2 本の半直線のなす角を $\theta$ とおく. ただし, $0 < \theta < \pi$ とする. このとき, $\sin\theta$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ.

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ.

$\boxed{\mathbf{43}}$ 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=$BC, $b=$CA, $c=$AB とする. 実数 $t \geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に AP$=tc$ となるように点 P をとる. 以下の問いに答えよ.

(1) CP$^2$ を $a, b, c, t$ を用いて表せ.

(2) 点 P が CP$=a$ を満たすとき, $t$ を求めよ.

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき, ∠A と ∠B に関する条件を求めよ.

$\boxed{\textbf{44}}$ サイコロを 3 回続けて投げて出た目を順に $a, b, c$ とする．これらの数 $a, b, c$ に対して 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \cdots (*)$$

を考える．ただし，サイコロはどの目も同様に確からしく出るものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数の解をもつとき，積 $ac$ の取りうる値を求め，積 $ac$ の各値ごとに可能な $a$ と $c$ の組 $(a, c)$ がそれぞれ何通りあるか求めよ．

(2) 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの有理数の解をもつ確率を求めよ．ただし，一般に自然数 $n$ が自然数の 2 乗でなければ，$\sqrt{n}$ は無理数であることを用いても良い．

$\boxed{\mathbf{45}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 $a$ に対し, $a^2$ を 3 で割ったあまりは 0 か 1 であることを証明せよ.

(2) 自然数 $a, b, c$ が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると, $a, b, c$ はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ.

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 $a, b, c$ は存在しないことを証明せよ.