1　二次方程式とグラフの関係性

<u>検討</u>

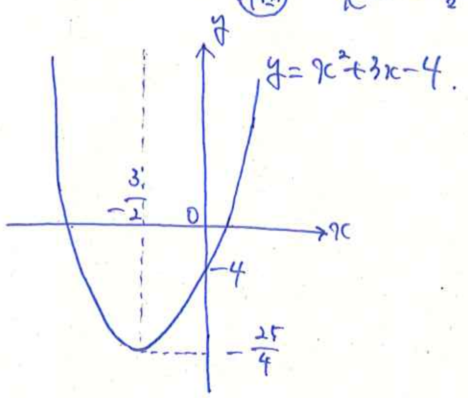
二次関数 $y = x^2 + 3x - 4$ について，いろいろ調べてみよう．

◎平方完成

$$y = x^2 + 3x - 4$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

頂 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

軸 $x = -\frac{3}{2}$

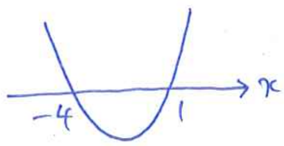


◎ x軸との共有点．

$$0 = x^2 + 3x - 4$$
$$= (x+4)(x-1)$$

$$x = 1, -4$$

∴ x軸との共有点の座標は $(1, 0), (-4, 0)$



<u>まとめ</u>

2次関数は，

・平方完成することで，頂点・軸の情報が知れる。

☆展開してもとに戻るかを確認!!

→計算ミス減.

・x軸との共有点の座標を調べるには…

$y=0$として 2次方程式を解く!!

共有点の有無について．

$y = ax^2 + bx + c$ に対し．　$(a \neq 0)$.

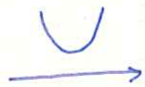
$ax^2 + bx + c = 0$ を考える．

解の公式から．

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

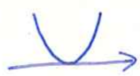
・共有点なし ⇔ 実数解なし

⇔ $b^2 - 4ac < 0$.



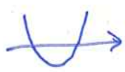
・共有点1コ ⇔ 実数解1コ (重解)

⇔ $b^2 - 4ac = 0$



・共有点2コ ⇔ 実数解2コ

⇔ $b^2 - 4ac > 0$.



→ $b^2 - 4ac$ の正・零・負で実数解の個数がわかる!!

$D = b^2 - 4ac$:「判別式」という．

☆解の公式の√の中身．

練習 1

以下の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=1, 2.$

(2) $x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2=0$

$x=-1$

(3) $x^2 + x - 3 = 0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

練習 2

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ.

(1) $y = x^2 + 4x - 5$

方程式 $x^2+4x-5=0$ について.

$x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$x=1, -5$

解2コなので 共有点も2コ

(2) $y = -2x^2 + 3x - 1$

方程式 $-2x^2+3x-1=0$ について.

$-2x^2+3x-1=0$

$2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$

$x=\frac{1}{2}, 1$

解2コ i.e. 共有点2コ

(3) $y = 3x^2 - 4x + 5$

方程式 $3x^2-4x+5=0$ について.

判別式をDとおくと.

$D=(-4)^2-4\cdot3\cdot5$

$=16-60<0$

$D<0$なので 共有点0コ

練習 3

以下の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $x^2 + 2x + m = 0$ が, 異なる 2 つの実数解を持つとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.

異なる2つの実数解をもつためには.
与えられた方程式の判別式 $D>0$ であればよい.

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot m > 0$$
$$4 - 4m > 0$$
$$4 > 4m$$
$$1 > m$$

(2) m を定数とする. 2 次方程式 $x^2 + mx + 1 = 0$ が重解を持つように, 定数 m の値を求めよ. また, その重解を求めよ.

重解をもつためには,
与えられた2次方程式の判別式 $D=0$. であればよい.

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 = 0$$
$$m^2 - 4 = 0$$
$$(m-2)(m+2) = 0$$
$$\therefore m = \pm 2$$

i) $m=2$ のとき
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1.$$

ii) $m=-2$ のとき
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
$$x = 1$$

練習 4

以下の問いに答えよ.

(1) 2 次関数 $y = x^2 + 4x + m$ のグラフと x 軸の共有点の個数は, 定数 m の値によってどのように変わるか.

共有点の x 座標は.
$x^2 + 4x + m = 0$ の実数解である.

判別式を D とおくと
$$D = 4^2 - 4 \cdot m.$$
$$= 16 - 4m.$$
$$= 4(4-m).$$

$D>0$ のとき
$4-m>0$. $4>m$.

$D=0$ のとき
$4-m=0$. $4=m$.

$D<0$ のとき
$4-m<0$ $4<m$.

以上より.
- $m<4$ で 共有点 2コ
- $m=4$ で 1コ
- $m>4$ で 0コ

(2) m を定数とする. 2 次関数 $y = x^2 + 2x + m$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ.

共有点の x 座標は,
$x^2 + 2x + m = 0$ の実数解である。
判別式を D とおくと.
$$D = 2^2 - 4m.$$
$$= 4(1-m).$$

$D>0$ のとき
$1-m>0$. $1>m$.

$D=0$ のとき
$1-m=0$ $1=m$.

$D<0$ のとき
$1-m<0$ $1<m$.

以上より.
- $m<1$ で 共有点 2コ
- $m=1$ で 1コ
- $1<m$ で 0コ

1.1 定数分離

例題

2 次関数 $y = x^2 + 4x + 3 - k$ が x 軸と共有点を持たないように，定数 k の値の範囲を求めよ．

共有点の x 座標は

$x^2+4x+3-k=0$ の実数解．

判別式を D とおくと，共有点なし より $D<0$.

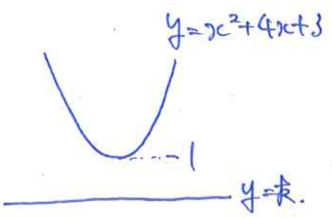
$$D=16-4\cdot(3-k)<0.$$
$$4(1+k)<0$$
$$1+k<0$$
$$\therefore\ k<-1.$$

定数分離

方程式 $x^2+4x+3=k$ が実数解をもたないように k の値を決めればよい。
これは．$y=x^2+4x+3$ と $y=k$ が共有点をもたないことと同値である。

$$y=x^2+4x+3$$
$$=(x+2)^2-4+3$$
$$=(x+2)^2-1.$$

頂 $(-2,-1)$



2つのグラフが共有点をもたないような k の値は
上図から．$k<-1$

練習

(1) 方程式 $y = x^2 + 4x + 3 - k$ と x 軸の共有点の個数を求めよ．

左下図から．

$k<-1$ で共有点 0コ

$k=-1$ で共有点 1コ

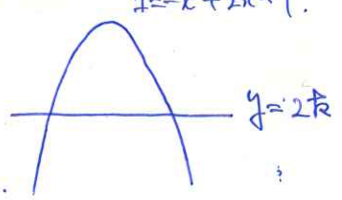
$k>-1$ で共有点 2コ

(2) 方程式 $y = -x^2 + 2x + 1 - 2k$ と x 軸の共有点の個数を求めよ．

求める共有点の個数は，方程式 $-x^2+2x+1-2k=0$ の実数解の個数．
また，これは $y=-x^2+2x+1$ と $y=2k$ の共有点のコ数を調べればよい．

$$y=-x^2+2x+1$$
$$=-(x-1)^2+2.$$

頂 $(1,2)$.



上図から，
- $2k<2$ i.e. $k<1$ で 2コ
- $2k=2$ i.e. $k=1$ で 1コ
- $2k>2$ i.e. $k>1$ で 0コ

1.2 連立方程式って

復習

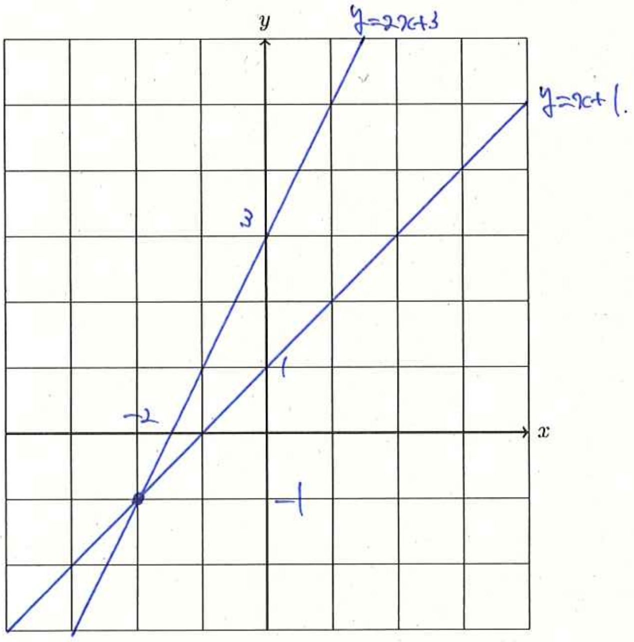
(1) 連立方程式 $\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x+3 \end{cases}$ を解け.

$$\begin{array}{rl} & y = x+1 \\ -) & y = 2x+3 \\ \hline & 0 = -x-2 \end{array}$$

$x = -2$

$y = -1$.

(2) 2 つのグラフを描き, 共有点の座標を求めてみよう.



共有点 $(-2, -1)$

連立方程式を解く ⇔ グラフの共有点を求める

練習

(1) 放物線 $y = x^2 + 5x + 5$ と, 直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ.

共有点の x 座標は

$x^2 + 5x + 5 = x + 2$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x = -1, -3$.

$x = -1$ のとき $y = -1 + 2 = 1$.

$x = -3$ のとき $y = -3 + 2 = -1$.

∴ 共有点は $(-1, 1), (-3, -1)$

(2) 放物線 $y = 2x^2 + 3$ と, 直線 $y = -3x + 5$ の共有点の座標を求めよ.

共有点の x 座標は

$2x^2 + 3 = -3x + 5$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$(2x-1)(x+2) = 0$

$x = \frac{1}{2}, -2$

$x = \frac{1}{2}$ のとき, $y = -3 \cdot \frac{1}{2} + 5$

$= \frac{7}{2}$

$x = -2$ のとき $y = -3 \cdot (-2) + 5 = 11$

∴ 共有点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), (-2, 11)$

(3) 放物線 $y = x^2 + 3x + 3$ と, 直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ.

共有点の x 座標は.

$x^2 + 3x + 3 = x + 2$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x = -1$.

このとき

$y = -1 + 2 = 1$.

共有点は $(-1, 1)$

練習

(1) 放物線 $y=x^2+3x+1$ と, 直線 $y=x+k$ が接するとき, 定数 k の値を求めよ. また, そのときの接点の座標を求めよ.

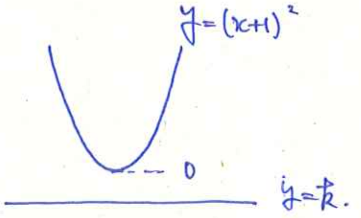
共有点のx座標は

$$x^2+3x+1=x+k$$

の実数解であり，2曲線が接するには，2次方程式が重解をもてばよい.

$$x^2+3x+1=x+k$$
$$x^2+2x+1=k$$
$$(x+1)^2=k \quad \text{—— (*)}$$

(*)の解は，$y=(x+1)^2$ と $y=k$ の共有点の個数と一致する.



上図より，共有点が1コとなるのは $k=0$.

i.e. $k=0$で 2次方程式は重解をもつ.

よって，求めるkの値は $k=0$

$k=0$のとき，2次方程式の解は(*)から

$$x=-1.$$

このときのyの値は

$$y=-1+0$$
$$=-1.$$

∴ 接点は $(-1,-1)$

(2) 放物線 $y=-x^2+2$ と, 直線 $y=x-k$ が共有点を持たないように, 定数 k の値の範囲を求めよ.

共有点のx座標は

$$-x^2+2=x-k \quad \text{—— (*)}$$

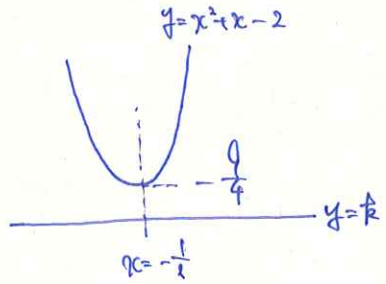
の実数解であり，共有点をもたないためには，この2次方程式が実数解をもたなければよい。

$$-x^2+2=x-k$$
$$x^2-2=-x+k$$
$$x^2+x-2=k.$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=k$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=k.$$

よって(*)の実数解の個数は

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \quad と \quad y=k$$

の共有点の個数と一致する。



上図より，共有点をもたないためには

$$k<-\frac{9}{4}$$

よって求めるkの値の範囲は

$$k<-\frac{9}{4}$$