21 △ABCにおいて, 次のものを求めよ. 【⋆】

(1) $a=5, A=30^\circ, B=45^\circ$ のとき, b および外接円の半径 R.

正弦定理より.

$$\frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$b = 10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

正弦定理より

$$2R = \frac{5}{\sin 30^\circ}$$

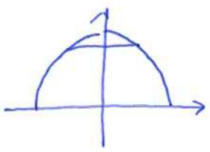
$$R = 5$$

(2) $a=10\sqrt{3}$, 外接円の半径 $R=10$ のとき, A.

正弦定理より

$$2R = \frac{a}{\sin A}$$

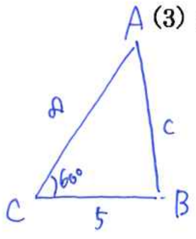
$$2\cdot 10 = \frac{10\sqrt{3}}{\sin A}$$



$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ $A = 60^\circ, 120^\circ$

(3) $a=5, b=8, C=60^\circ$ のとき, $\cos B$



余弦定理より

$$c^2 = 64+25-2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos 60^\circ$$
$$= 49$$

$\therefore$ $c=7$.

同様に余弦定理.

$$64 = 49+25-2\cdot 5\cdot 7\cdot\cos B.$$

$$\cos B = \frac{1}{7}$$

(4) $a=\sqrt{2}, c=1+\sqrt{3}, B=45^\circ$ のとき, b, A

余弦定理より.

$$b^2 = (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 45^\circ$$
$$= 2+4+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}$$
$$= 4$$

$\therefore$ $b=2$.

正弦定理より

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A} \qquad \sin A = \frac{1}{2}$$

$B=45^\circ$ より $A < 180^\circ - 45^\circ$ $\therefore$ $A = 30^\circ$

(5) $a=\sqrt{3}-1, b=\sqrt{6}, c=2$ のとき, A, B

余弦定理より

$$(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{6}\cdot\cos A$$
$$4-2\sqrt{3} = 6+4-4\sqrt{6}\cos A$$
$$\cos A = \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}}$$

余弦定理.

$$6 = (\sqrt{3}-1)^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)\cos B.$$
$$6 = 4-2\sqrt{3}+4-4(\sqrt{3}-1)\cos B$$
$$2(\sqrt{3}-1) = -4(\sqrt{3}-1)\cos B$$
$$\cos B = -\frac{1}{2}$$

$B = 120^\circ$.

正弦定理

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{2}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$C < 60^\circ$ より $C = 45^\circ$

$\therefore$ $A = 15^\circ$

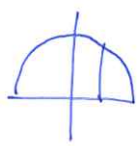
(6) $a:b:c = 7:5:8$ のとき, A

三角形の大きさに関わらず, 辺の比で三角形は決定する.

△ABCにおいて $a=7$. $b=5$. $c=8$ とする.

余弦定理より

$$49 = 25+64-2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos A$$
$$-40 = -2\cdot 5\cdot 8\cos A$$
$$\cos A = \frac{1}{2}$$



$\therefore$ $A = 60^\circ$