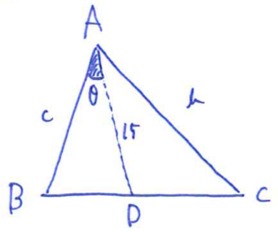
39 三角形 ABC は, AB + AC = 2BC を満たしている．また, 角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき, AD= 15 である．さらに, 三角形 ABC の内接円の半径は 4 である．以下の問いに答えよ．

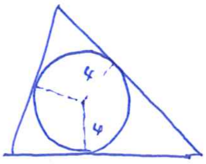
(1) $\theta = \angle \mathrm{BAD}$ とするとき, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) $A = \angle \mathrm{BAC}$ とするとき, $\sin A, \cos A$ の値を求めよ．

(3) 辺 BC の長さを求めよ．

(1)





$b = AC$, $c = AB$ とおくと．

$BC = \frac{1}{2}(b+c)$.

△ABCの面積Sについて，

左図で

$S = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot c\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 15\cdot b\cdot\sin\theta$

$= \frac{15}{2}(b+c)\sin\theta$ —①

右図で

$S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(b+c+\frac{1}{2}(b+c)\right)$

$= \frac{4}{2}\cdot\frac{3}{2}(b+c)$

$= \frac{6}{2}(b+c)$ —②

①,②より

$\frac{15}{2}(b+c)\sin\theta = \frac{6}{2}(b+c)$

$b+c \neq 0$ より

$\sin\theta = \frac{2}{5}$ //

(1)で,「与えられた条件をすべて使う」ことを意識!!

(2) $A < 180^\circ$ であるので $\frac{A}{2} = \theta < 90^\circ$ ∴ $\cos\theta > 0$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$

よって，

$\sin A = \sin 2\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{25}$ //

$\cos A = \cos 2\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \frac{21}{25} - \frac{4}{25} = \frac{17}{25}$ //

(3) △ABCについて余弦定理．

$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

$\frac{1}{4}(b+c)^2 = b^2+c^2 - 2bc\cdot\frac{17}{25}$

$\frac{1}{4}(b+c)^2 = (b+c)^2 - 2bc - \frac{34}{25}bc$

$\frac{3}{4}(b+c)^2 = \frac{84}{25}bc$ —③

△ABCの面積は．

$S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A$

$= \frac{4\sqrt{21}}{2\cdot 25}\cdot bc$.

②より

$\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}(b+c) = \frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{21}}{\cancel{2}\cdot 25}bc$

$(b+c) = \frac{2\sqrt{21}}{3\cdot 25}bc$

$\frac{3\cdot 25}{2\sqrt{21}}(b+c) = bc$ —④

③,④より

$\frac{\cancel{3}}{4}(b+c)^{\cancel{2}} = \frac{\cancel{84}^{42}}{\cancel{25}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{25}}{\cancel{2}\sqrt{21}}\cancel{(b+c)}$

$\frac{1}{4}(b+c) = \frac{42}{\sqrt{21}}$

$b+c = 8\sqrt{21}$

よって．$BC = \frac{1}{2}(b+c)$

$= 4\sqrt{21}$ //