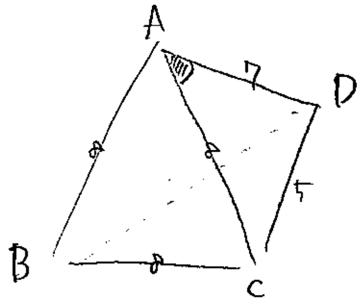
105【三角比】

四面体 ABCD があり，AB=BC=CA=8, AD=7 である．$\cos\angle CAD = \dfrac{11}{14}$ のとき，次のものを求めよ．

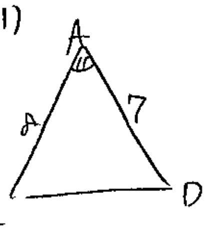
(1) 辺 CD の長さ．

(2) $\angle ACD$ の大きさ．

(3) 辺 AC 上の点 E に対して，BE+ED の長さの最小値．



(1)



△ACDで余弦定理．

$CD^2 = 8^2 + 7^2 - 2\cdot 8\cdot 7\cdot \cos\angle CAD$

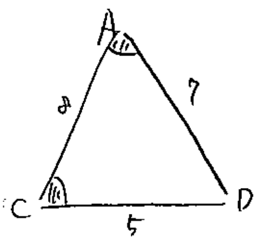
$= 64 + 49 - 2\cdot 8\cdot \cancel{7}\cdot \frac{11}{\cancel{14}}$

$= 113 - 88$

$= 25$

$\therefore CD = 5$

(2)



△ACDで余弦定理．

$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot \cos\angle ACD.$

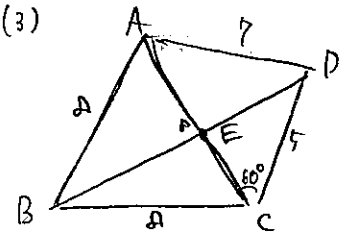
$49 = 64 + 25 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot \cos\angle ACD$

$-\cancel{40} = -2\cdot \cancel{8\cdot 5}\cdot \cos\angle ACD$

$\cos\angle ACD = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle ACD = 60^\circ$

(3)



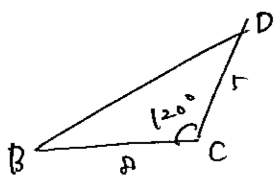
BE+ED が最小になるのは，展開した時の四角形 ABCD に対し，BD と AC の交点が E となるとき。

よって，△ABC は正三角形

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$

(2)より $\angle ACD = 60^\circ$ なので

$\angle BCD = 120^\circ$



△BCDで余弦定理

$BD^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos 120^\circ$

$= 25 + 64 + 40$

$= 129.$

∴BE+ED の最小値は

$\sqrt{129}$