$\boxed{49}$ a を実数とし, 2 次方程式 $x^2+2(a+1)x+3(a^2+4a+3)=0$ を考える. 2 次方程式の 1 つの解が正で他の解が負となるとき, a のとりうる値の範囲を求めよ.

また, 2 次方程式が 2 つの異なる正の解をもつとき, a のとりうる値の範囲を求めよ.

<Ans>.

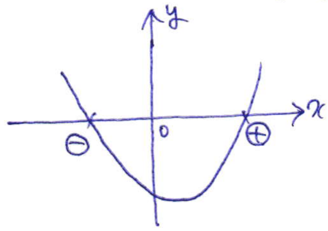
(1) $f(x) = x^2+2(a+1)x+3(a^2+4a+3)$

とおく.

与えられた2次方程式の解は、

$y=f(x)$ と x軸の共有点のx座標。

解が正と負に1つずつなので、$y=f(x)$のグラフは



のようになる.

このようになる条件は

$x=0$のとき $y<0$.

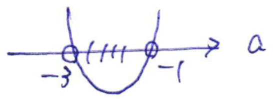
i.e. $f(0)<0$

よって

$f(0)=3(a^2+4a+3)<0$

$a^2+4a+3<0$

$(a+3)(a+1)<0$



上図から、

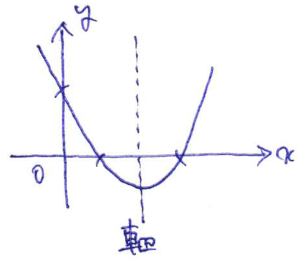
$-3<a<-1$ //

(2) 同様に考える。2つの正の解をもつので

(i) $f(x)=0$の判別式 $D>0$

(ii) 軸>0

(iii) $x=0$で $y>0$.



(i) $D>0$

$x^2+2(a+1)x+3(a^2+4a+3)=0$ の判別式を

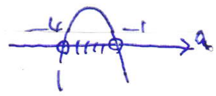
Dとおくと

$D=4(a+1)^2-4\cdot3(a^2+4a+3)$

$=4(a^2+2a+1-3a^2-12a-9)$

$=4(-2a^2-10a-8)$

$=-8(a^2+5a+4)=-8(a+4)(a+1)>0$



∴ $-4<a<-1$.

(ii) 軸>0

軸は $x=-(a+1)$ より

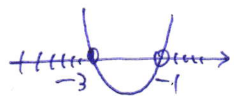
$-(a+1)>0$

$a+1<0$

$a<-1$.

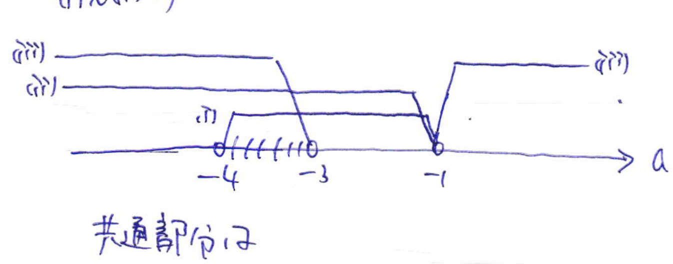
(iii) $f(0)>0$

$f(0)=3(a+1)(a+3)>0$



$a<-3$, $-1<a$

(i)~(iii)より



共通部分は

$-4<a<-3$ //

前半部分は、必要な条件をうまく見付ける.