

1 指数

1.1 復習

以下の計算をせよ. (7) 以降は推測せよ.

(1) $2^6 =$

(2) $2^5 =$

(3) $2^4 =$

(4) $2^3 =$

(5) $2^2 =$

(6) $2^1 =$

(7) $2^0 =$

(8) $2^{-1} =$

(9) $2^{-2} =$

1.2 復習, 推測

左の結果も参考にしつつ, 以下の計算をせよ.

(1) $(-5)^3$

(2) $(-5)^2$

(3) $(-5)^1$

(4) $(-5)^0$

(5) $(-5)^{-1}$

(6) $(-5)^{-2}$

(7) $(-5)^{-3}$

1.3 復習

以下の計算をせよ.

(1) $3^2 2^2$

(2) $(2^2)^3$

(3) $(2 \times 3)^3$

(4) $\frac{2^{10}}{2^5}$

(5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

1.4 一般化

以下の計算をせよ.

(1) $a^3 a^4$

(2) $(a^2)^3$

(3) $(a \times b)^3$

(4) $\frac{a^9}{a^5}$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

1.5 拡張

1.6 問題

以下の値を求めよ.

(1) $9^{\frac{1}{2}}$

(2) $8^{\frac{2}{3}}$

(3) $81^{-\frac{1}{4}}$

(4) $125^{\frac{4}{3}}$

(5) $3^{\frac{3}{2}} \times 9^{\frac{1}{4}} \times 81^{-\frac{3}{8}}$

(6) $2^{\frac{5}{2}} \times 8^{\frac{3}{4}} \div 4^{-\frac{1}{4}}$

1.7 根号拡張

1.8 問題

以下の値を求めよ.

(1) $\sqrt[3]{8}$

(2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

(3) $\sqrt[4]{81}$

(4) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}$

(5) $(\sqrt[2]{5})^2$

(6) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{32}}$

(7) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$

(8) $\sqrt[4]{5} \div \sqrt{5} \times \sqrt[8]{5}$

2 指数関数

2.1 グラフ

指数関数

$y = a^x$

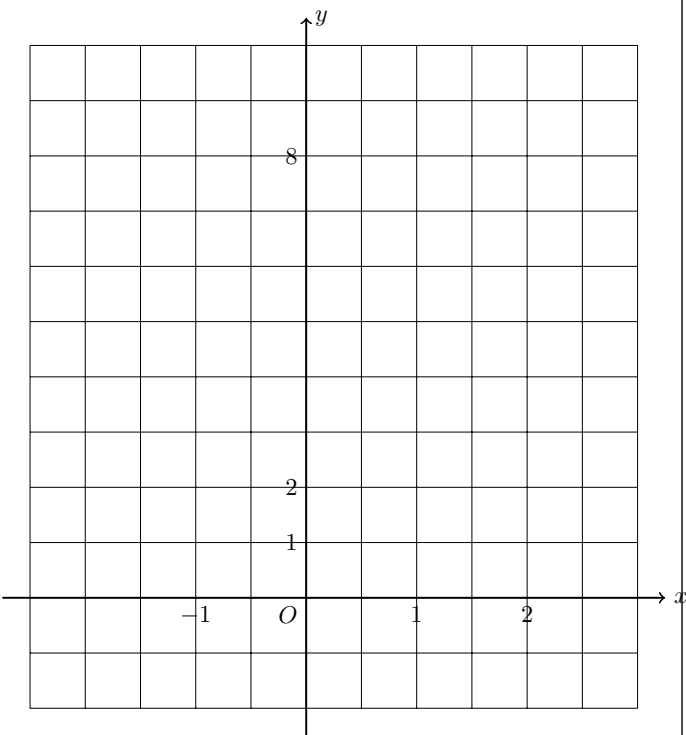
について考える. ($a > 0, a \neq 1$ とする.)

指数関数 $y = a^x$ について, a を, _____ という.

これまで, 新しい関数のグラフを描くとき, まず表を描いていた.
今回も同じ手順を踏む.

(1) $y = 2^x$ について.

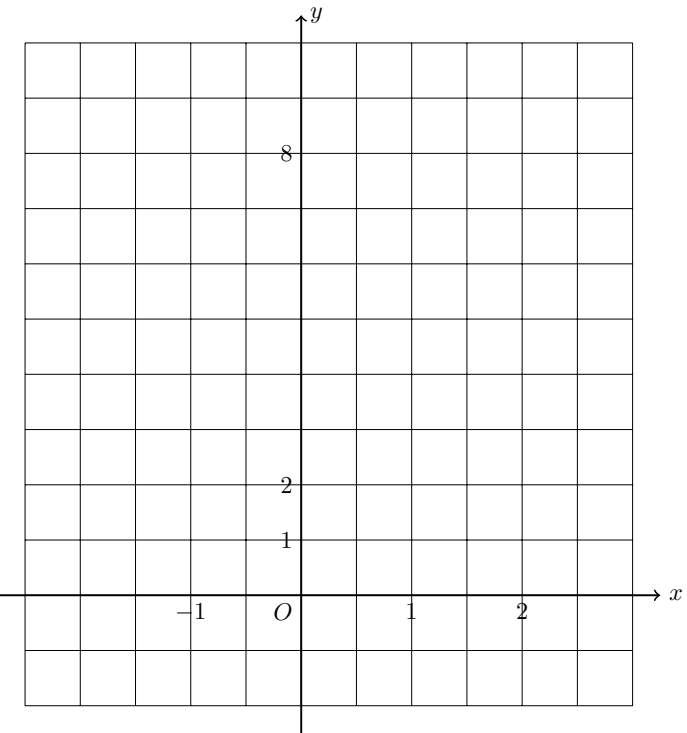
x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
y							



【 のとき】

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ について.

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
y							

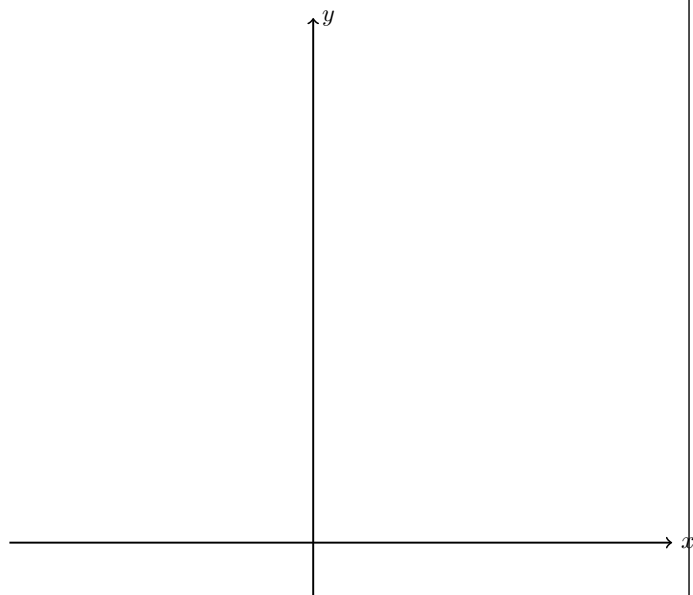


【 のとき】

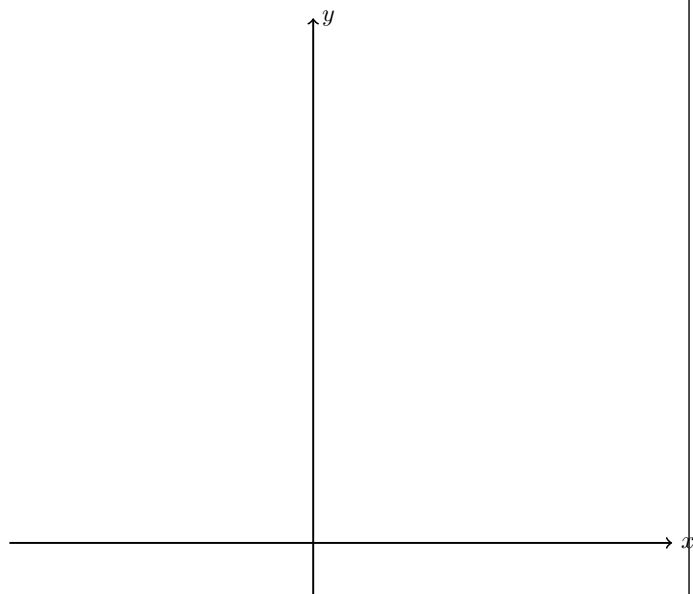
2.2 問題

以下のグラフを描け.

(1) $y = 3^x$



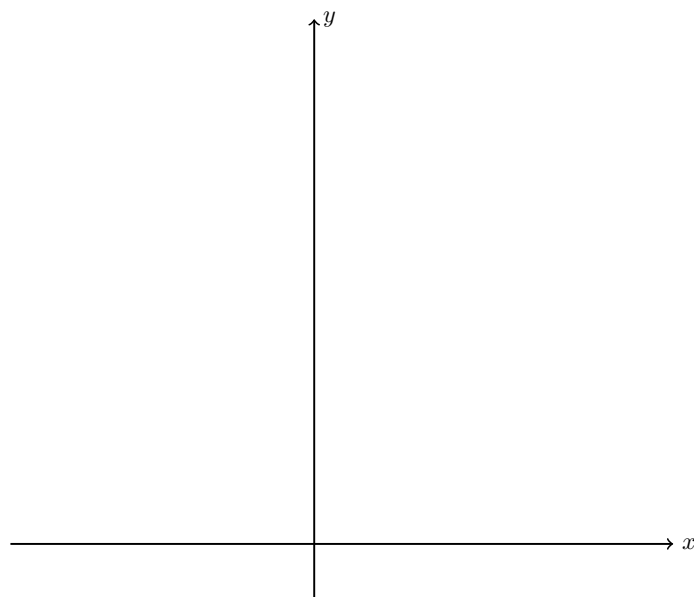
(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



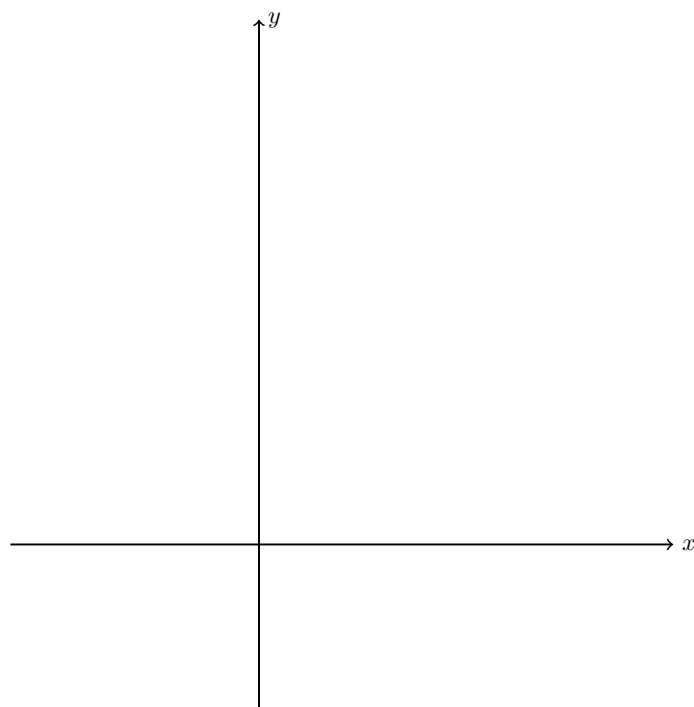
2.3 問題 (平行移動)

以下のグラフを描け.

(1) $y = 3^x + 1$



(2) $y = 2^{(x-2)} - 1$



2.4 大小関係比較

例題

以下の 3 つの数の大小関係を不等号を用いて表せ.

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{27}$$

2.5 問題

以下の数の大小関係を不等号を用いて表せ.

(1) $\sqrt{2}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[7]{16}$

(2) $1, 0.5^3, 0.5^{-1}$

2.6 方程式

例題

以下の方程式を解け.

$$16^x = 8$$

$$(1) \ 9^x = 27$$

$$(2) \ 2^{x+1} = \frac{1}{8}$$

$$(3) \ 2^{x+1} = 8^x$$

2.7 不等式

例題

以下の方程式を解け.

$$16^x \geq 8$$

$$(1) \ 9^x \leq 27$$

$$(2) \ \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{16}$$

$$(3) \ 2^x \leq 8^{x+1}$$

2.8 二次関数への帰着問題

問題

以下の方程式・不等式を解け. ($0 \leq x < 2\pi$ とする.)

(1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

(2) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 > 0$

例題

以下の方程式・不等式を解け.

(1) $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$

(2) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$

2.9 練習問題

以下の方程式・不等式を解け.

(1) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

(2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

(3) $4^x - 6 \cdot 2^x - 16 \leq 0$

(4) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$

3 日常生活

3.1 ドラえもん

- (1) 羽二重餅に、ドラえもんの秘密道具「バイバイン」を使った。
以下の問いに答えよ。

「バイバイン」の効果

増やしたい物に一滴垂らすと 5 分ごとに数が倍に増える。ただし、増やした物は何らかの方法で処分しない限り無限に増殖し続ける。

(Wikipedia より)

- (a) 30 分放置した場合、羽二重餅は何個になるか。

- (c) 羽二重餅を 1024 個得るためには、何分待つ必要があるか。

- (b) 1 時間放置した場合、羽二重餅は何個になるか。

- (d) 羽二重餅を 2^{30} 個 (= 1,073,741,824 個) 以上得るには、最低何分待つ必要があるか。

3.2 おかね

S&P500 種株価指数は, 1957 年に導入されて, 年平均で約 10% の上昇率である.

S&P500 をベンチマークとする ETF(上場投資信託) に投資することを考える. 以下の問いに答えよ.

(ただし簡単のため, 年率は 10% の固定で考える.)

(1) 100 万円の投資をした際, 1 年後の評価額はいくらか.

(2) 100 万円の投資をした際, 2 年後の評価額はいくらか.

(3) 100 万円の投資をした際, 10 年後の評価額はいくらか.

(4) 1000 万円の投資をした際, 評価額が 2000 万円を超えるのは, 何年後か.

3.2.1 いろいろなおはなし

4 演習問題

4.1 例題

- (1) 関数 $y = 4^x + 2^{x+2} + 1$ ($-3 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ.
- (2) 関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) + 1$ について、以下の問いに答えよ.
- (a) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく. x が全ての実数を動くとき, t の値の範囲を求めよ.
- (b) $4^x + 4^{-x}$ を t を用いて表せ.
- (c) y を t の関数として表せ.
- (d) y の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

4.2 問題

(1) 関数 $y = 9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 2$ ($-1 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ.

(2) 関数 $y = 9^x + 9^{-x} + 4(3^x + 3^{-x}) - 1$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) $t = 3^x + 3^{-x}$ とおく. x が全ての実数を動くとき, t の値の範囲を求めよ.

(b) $4^x + 4^{-x}$ を t を用いて表せ.

(c) y を t の関数として表せ.

(d) y の最小値と, そのときの x の値を求めよ.