77 小問集合.

(1) 2 直線 $y=x+1, y=\sqrt{3}x-3$ のなす角 θ を求めよ. ただし, $0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$ とする.

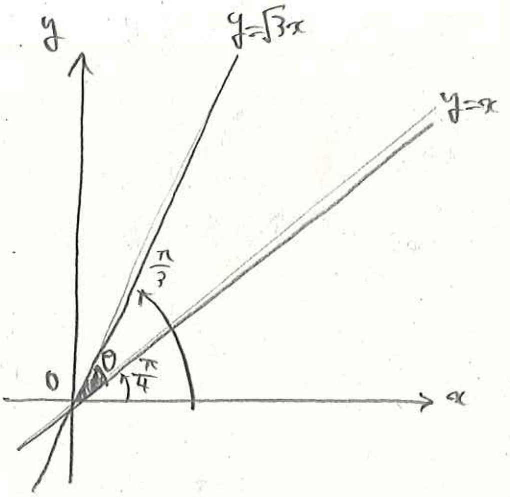
(2) 2 直線 $y=2x+1, y=\frac{1}{3}x-3$ のなす角 θ を求めよ. ただし, $0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$ とする.

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$ のとき, 以下の値を求めよ. ただし, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする.

(a) $\sin\theta\cos\theta$

(b) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(1)



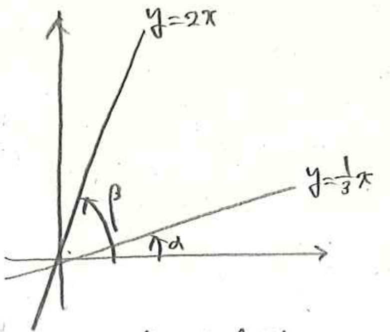
2直線のなす角は、$y=x$と$y=\sqrt{3}x$のなす角と等しい。

上図から、

$$\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$ //

(2) 2直線のなす角は、

$y=2x$と$y=\frac{1}{3}x$のなす角θと等しい。



上図のように、角をα、βとおく。

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=2$.

求める角θは $\theta=\beta-\alpha$.

さて、$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$$

$\therefore \tan\theta=1$.

$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$より $\theta=\frac{\pi}{4}$ //

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$より

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{16}$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$$

$$2\sin\theta\cos\theta+1=\frac{1}{16}$$

$$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{16}$$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}$ //

$$(\sin\theta+\cos\theta)^3=\sin^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos^2\theta+\cos^3\theta$$

$$=\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{15}{32}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{64}+\frac{45}{128}$$

$$=\frac{47}{128}$$ //