

68 a を定数とする. 2 次関数 $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ ($a \leq x \leq a+2$) について, 以下の問いに答えよ.

(1) $a=0$ のとき, $f(x)$ の最小値を求めよ.

(2) $f(x)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ.

(4) $g(a) = M(a) - m(a)$ とする. $y = g(a)$ のグラフを描け.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 5$$

$$= -(x^2 - 2x) + 5$$

$$= -(x-1)^2 + 6$$

上に凸

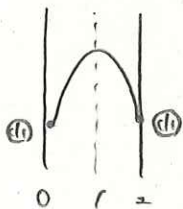


$$\text{軸} \quad x=1$$

(1) $a=0$ のとき

定義域は

$$0 \leq x \leq 2.$$

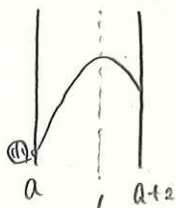


左図より

$$x=0, 2 \text{ 時}$$

$$\text{Min. } 5$$

(2) $a \leq 0$ のとき

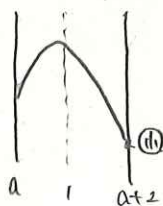


左図より

$$x=a \text{ 時}$$

$$\text{Min. } -a^2 + 2a + 5$$

(3) $0 < a$ のとき



左図より

$$x=a+2 \text{ 時}$$

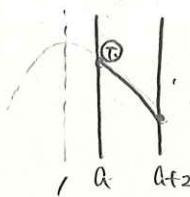
$$\text{Min. } -a^2 - 2a + 5$$

(4) (1), (2) より

$$m(a) = \begin{cases} -a^2 + 2a + 5 & (a \leq 0) \\ -a^2 - 2a + 5 & (0 < a) \end{cases}$$

(3)

(i) $1 < a$

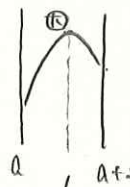


左図より

$$x=a \text{ 時}$$

$$\text{Max. } -a^2 + 2a + 5$$

(ii) $-1 \leq a \leq 1$



左図より

$$x=1 \text{ 時}$$

$$\text{Max. } 6$$

(iii) $a+2 < 1$

すなわち $a < -1$



左図より

$$x=a+2 \text{ 時}$$

$$\text{Max. } -a^2 - 2a + 5$$

(4) (i) ~ (iii) より

$$M(a) = \begin{cases} -a^2 - 2a + 5 & (a < -1) \\ 6 & (-1 \leq a \leq 1) \\ -a^2 + 2a + 5 & (1 < a) \end{cases}$$

(4)

a	-1	0	1
M	$-a^2 - 2a + 5$ -1	6	$-a^2 + 2a + 5$ 5
m	$-a^2 + 2a + 5$	$-a^2 - 2a + 5$	$-a^2 - 2a + 5$
$M-m$	$-4a$	$a^2 - 2a + 1$ " $(a-1)^2$ "	$a^2 + 2a + 1$ " $(a+1)^2$ "
			$4a$

