5 組み合わせ

5.1 並べる

5人から$\boxed{}$人並べる．総数は何通りか．

(1) 1人

□

5

5通り．

(2) 2人

□ □

$5 \times 4 = 20$

20通り

(3) 3人

□ □ □

$5 \times 4 \times 3 = 60$

60通り．

(4) 4人

□ □ □ □

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

120通り

(5) 5人

□ □ □ □ □

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

120通り

5.2 選ぶ

5人から$\boxed{}$人選ぶ．総数は何通りか．

(1) 1人

a

b

c

d

e

5通り．

(2) 2人

a − b, c, d, e

b − c, d, e

c − d, e

e − d

10通り

(3) 3人

a − b − c, d, e

a − c − d, e

a − d − e

b − c − d, e

b − d − e

c − d − e

10通り．

(4) 4人

a − b − c − d, e

a − b − e − d

a − c − d − e

b − c − d − e

5通り．

(5) 5人

a − b − c − d − e

1通り．

5.3 どうやって考えるか

・5人から2人選ぶ場合.

○並べる. 　　　　選ぶ

a − b ①　　① a, b
　 \ c ②　　② a, c
　 \ d ③　　③ a, d
　 \ e　　　　⋮
　　　　　　⑩

計10通り.

b − a ①
　 \ c
　 \ d
　 \ e

並べた後に、組みあわせとして同じものが2コずつあるので2で割る。

c − a ②
　 \ b
　 \ d
　 \ e

$$\frac{5\times 4}{2} = 10\text{通り}.$$

d − a ③
　 \ b
　 \ c
　 \ e

e − a
　 \ b
　 \ c
　 \ d

・5人から3人選ぶ場合

並べた後に2で割ればいいか?

→ No.

a, b, c
a, c, b
b, a, c
b, c, a
c, a, b
c, b, a

$\xrightarrow[(\div 3!)]{\div 6}$ a, b, c

$6 = 3!$ 通り.

i.e. 5人から3人並べて, 3!でわる.

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10\text{通り}$$

5.4 組み合わせ

定義

異なる n 個から r 個選ぶときの組み合わせの総数は

$$\frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-(r-1))}^{r\text{コ}}}{\underbrace{r\cdot(r-1)\cdots\cdots 1}_{r\text{コ}}}$$

で計算することができる.

この総数のことを

$${}_nC_r$$

と書く.

i. e.

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(r-(r-1))}{r\cdot(r-1)\cdots\cdots 1}$$

例

4 種類の果物から 2 種類選ぶ.

$${}_4C_2 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6\text{(通り)}$$

練習

(1) 8 人から 2 人えらぶ.

$${}_8C_2 = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28\text{(通り)}$$

(2) 5 人から 3 人えらぶ.

$${}_5C_3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10\text{(通り)}$$

(3) 8 人から 6 人えらぶ. ← 選ばれない2人を選べばよい。 i.e. ${}_8C_2$と同じ!!

$${}_8C_6 = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}}{\cancel{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 2\cdot 1} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28\text{(通り)}$$

性質

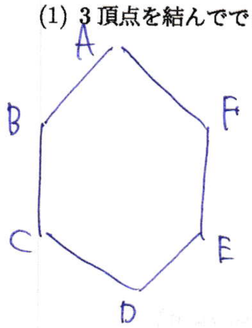
$${}_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$$

5.5 さまざまな問題

問題 1

正六角形 ABCDEF について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 頂点を結んでできる三角形は何個できるか．



6頂点から 3頂点選べばよいので

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$= 20$ 通り

(2) 2 頂点を結んでできる線分は何個できるか．

6 頂点から 2頂点選べばよい．

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ 通り}$$

(3) 対角線は何本引くことができるか．
(ただし対角線とは，2 点を結んでできる線分のうち，六角形の辺ではないもののことである．)

(2)の辺のうち，対角線でないものは，
6本あるので

$15 - 6 = 9$ 本

問題 2

大人 3 人，子供 5 人から以下のような選び方は何通りあるか．

(1) 大人子供関係なく，8 人から 3 人選ぶ．

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$= 56$ 通り

(2) 大人 3 人を選ぶ．

大人3人から3人選ぶので　1通り

(3) 子供 3 人を選ぶ．

5人から3人選ぶので $${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$= 10$ 通り

(4) 大人 2 人，子供 3 人を選ぶ．

大人の選び方は 3人から2人 … ${}_3C_2 = 3$．
子供の 〃 5人から3人 … ${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$
$= 10$

$\therefore 3 \times 10 = 30$ 通り

(5) 子供が少なくとも 1 人は含まれるように 3 人選ぶ．

大	子
3	0
2	1
1	2
0	3

← ここ

誰でも3人選ぶ選び方から，大人3人選ぶ通りを
引けばよい．

(1)より 8人中3人選ぶのは 56通り．
(2)より 大人 3人 〃 1通り．

$\therefore 56 - 1 = 55$ 通り

問題 3

9 人を以下のように分けるときの分け方は何通りあるか.

(1) A, B, C の 3 部屋に, 3 人ずつ分ける.

まず, 9人中3人 Aの部屋に入れる $_9C_3$

次に 6人中3人 B 〃 $_6C_3$

さいごに, 3人中3人 C 〃 1.

$$\therefore\ _9C_3 \times {}_6C_3 \times 1 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} \times \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}$$

$= \underline{1680\text{(通り)}}$ //

(2) A の 部屋に 2 人, B の部屋に 3 人, C の部屋に 4 人分ける.

まず9人中2人 Aの部屋に入れる $_9C_2$

次に 7人中3人 B 〃 $_7C_3$

さいごに 4人を Cの 〃 1.

$$\therefore\ _9C_2 \times {}_7C_3 \times 1 = \frac{9\cdot\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}\cdot 1} \times \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}$$

$= \underline{1260\text{(通り)}}$ //

(3) 3 人ずつの班に分ける.

A, B, Cの3部屋に分けて区別をなくす。

(1) の結果から,

$$1680 \div 3! = \frac{1680}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$= \underline{280\text{(通り)}}$ //

(4) 4 人, 4 人, 1 人の 3 つに分ける.

まず, A, B, C に 4, 4, 1 人ずつ入れる.

$_9C_4 \times {}_5C_4$

$$= \frac{9\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}\cdot 5 = 630\text{ 通り}.$$

AとBの区別をなくす.

$630 \div 2 = \underline{315\text{(通り)}}$ //

6 同じものを含む順列

6.1 例題

F, U, K, U, I の 5 文字を全て使ってできる文字列は, 何通りあるか.

□ □ □ □ □

5コのマスから1マス Fを入れる … 5通り.

残4コのマスから1マス K 〃 … 4通り.

残3コの 〃 I 〃 … 3通り.

残りは 2つの U を入れる … 1通り.

∴ $5\times4\times3\times1=$ 60通り

6.2 練習

(1) BANANA の 6 文字を全て使ってできる文字列は, 何通りあるか.

B … 1コ
A … 3コ
N … 2コ

□ □ □ □ □ □

6マスから1マス Bを入れる … 6通り.

残り5マスから3マス Aを入れる … $_5C_3=10$通り.

残りに N を入れる … 1通り.

∴ $6\times10=$ 60通り

(2) KOUKOUSEI の 9 文字を全て使ってできる文字列は, 何通りあるか.

K … 2
O … 2
U … 2
S … 1
E … 1
I … 1

□ □ … □

Kを9マスから2マス … $_9C_2$
Oを7マスから2マス … $_7C_2$
Uを5マスから2マス … $_5C_2$
Sを3マスから1マス … 3
Eを2 〃 … 2
Iを1 〃 … 1

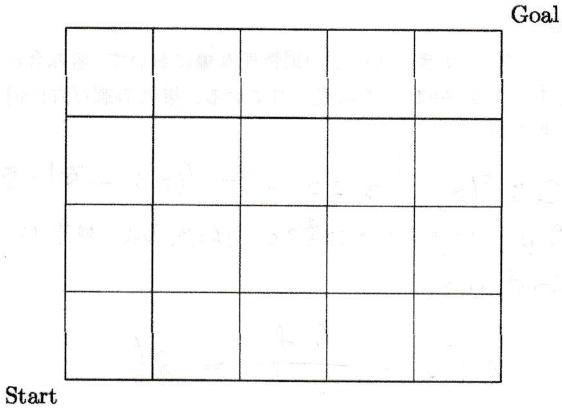
$$\therefore\ {}_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2\times3\cdot2\cdot1$$

$$=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}\times\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times3\cdot2\cdot1$$

$$=9\times5040$$

$=45360$ 通り

6.3 最短経路問題



上の図において, Start から Goal までの経路の最短路は, 何通りあるか.

最短で Start → Goal は、

→が5回、↑が4回

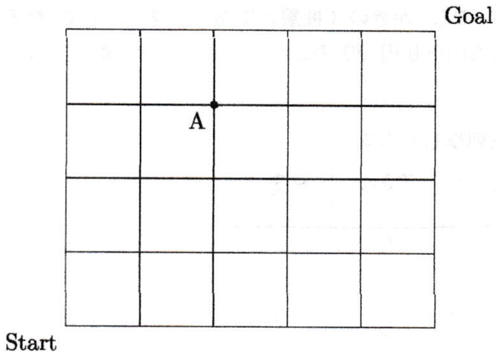
であり、この矢印を並べ替えたら最短路が作れる。

∴ その総和は

$$_9C_5 = \frac{9\cdot\cancel{8}\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}$$

$= 126$ 通り //

練習



(1) Start から A までの経路の最短路は, 何通りあるか.

→が2回、↑が3回、なので、

$_5C_2 = 10$ 通り //

(2) A から Goal までの経路の最短路は, 何通りあるか.

→が3回、↑が1回、なので

$_4C_3 = 4$ 通り //

(3) Start から Goal までの経路の最短路のうち, A を通るものは, 何通りあるか.

Start → A → Goal.
(10通り) (4通り)

よって $10\times4 = 40$ 通り //

(4) Start から Goal までの経路の最短路のうち, A を通らないものは, 何通りあるか.

Start → Goal は、→×5、↑×4 なので

$_9C_5 = 126$ 通り。

∴ Aを通らないものは、Aを通るものを引けばよいので

$126-40 = 86$ 通り //

7 重複組み合わせ

7.1 例題

りんご, なし, かきの 3 種類の果物売り場において, 組み合わせ自由で 4 個 1000 円で販売されている. 果物の選び方は何通りあるか.

(1) 個数列挙してみる…

りんご	なし	かき
4	0	0
3	1	0
3	0	1
2	2	0
	1	1
	0	2
1	3	0
	2	1
	1	2
	0	3
0	4	0
	3	1
	2	1
	1	3
	0	4

15通り

(2) New 思考

○○○○|| の6コを並べる

ex.

○|○○|○ ← 1コ 2コ 1コ に対応

並べ方は

$_6C_4 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$通り

7.2 問題

(1) りんご, なし, かきの 3 種類の果物売り場において, 組み合わせ自由で 7 個 2000 円で販売されている. 果物の選び方は何通りあるか.

○を7コ, |を2コ の計9コを一列に並べ, 左から順に○の個数をりんご, なし, かきに対応させる.

$_9C_2 = \frac{9\cdot8}{2\cdot1} = 36$.

∴ 36通り

(2) $x+y+z=7$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の個数は, 全部で何通りか.

○を7コ, |を2コ の計9コを一列に並べ, 左から順に○の数を x, y, z の値に対応させる.

$_9C_2 = 36$

36通り